Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Investigando a Aprendizagem de Frações nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental II

Michele Benincá

Vitória - Espírito Santo

Setembro de 2020

Investigando a Aprendizagem de Frações nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental II

Michele Benincá

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho.

Vitória - Espírito Santo
Setembro de 2020

Investigando a Aprendizagem de Frações nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental II

Michele Benincá

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 22 de setembro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho (Orientador)
UFES

Prof. Dr. Alancardek Pereira Araujo
UFES

Prof. Dr. Fidelis Zanetti de Castro
IFES

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus que me concedeu saúde e força para enfrentar todos os desafios e me possibilitar chegar até aqui. E dedico a memória do meu pai Ivo Benincá.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida, pela saúde, pela paciência nos momentos difíceis pelos quais passei nesta etapa da minha vida.

Aos familiares e amigos, em especial a Sônia, que tanto me incentivaram e ajudaram nos cuidados com meu pai me possibilitando ter tempo para me dedicar aos estudos.

Aos colegas do curso, em especial Flávio, Jarde, Luiza, Mariana e Jesuíno, por além de compartilharem seus conhecimentos e experiencias também compartilharem sua amizade.

Ao meu orientador, Professor Doutor Moacir Rosado Filho, pelo incentivo e por partilhar de seus conhecimentos.

Ao professor Florêncio, pela sua dedicação e por várias vezes se mostrar disponível para nos ajudar com os estudos.

A todos os professores do PROFMAT.

A todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

"Nossa vida é uma constante viagem,
do nascimento à morte. A paisagem
muda, as pessoas mudam, as
necessidades se transformam, mas o
trem segue adiante. A vida é o trem,
não a estação". (Paulo Coelho)

Resumo

Fração é um conceito elementar de grande relevância na matemática, mas verificam-se dificuldades em relação à sua aprendizagem para os alunos do ensino fundamental. Esta pesquisa é um estudo qualitativo com avaliação diagnóstica onde pretendeu-se investigar as dificuldades no processo de aprendizagem de frações em alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental.

Iniciou-se com a contextualização histórica de fração, destacando sua relevância, ao longo do tempo, para as civilizações e na matemática. A fim de evidenciar sua importância na atualidade, buscou-se analisar como os documentos oficiais da educação brasileira, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) do Ensino Fundamental e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), abordam o conceito de frações e quais são suas propostas para o ensino de frações no ensino fundamental II. Apresenta-se ainda uma pesquisa bibliográfica para discutir possíveis causas para as dificuldades na aprendizagem de frações que serão comprovadas posteriormente mediante a análise dos resultados das avaliações diagnósticas. Concluiu-se o amparo teórico com a apresentação da teoria de frações, apresentando o conceito de fração, definições, significados, propriedades e operações.

Em relação à pesquisa de campo (diagnóstica), apresenta-se a caracterização da pesquisa e dos sujeitos envolvidos, a metodologia utilizada, as avaliações diagnósticas distintas aplicadas em turmas de 6º e 7º anos do ensino fundamental II de diferentes escolas de municípios e redes de ensino. A fim de verificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, realizou-se uma análise criteriosa dos seus resultados às questões das avaliações diagnósticas, sendo possível relacionar as dificuldades mais relevantes.

Concluiu-se a pesquisa mediante uma análise das dificuldades verificadas na avaliação diagnóstica e com a relação destas dificuldades com os textos de amparo teórico utilizados para este fim.

Palavras-chave: Frações, Avaliação Diagnóstica, Aprendizagem.

Abstract

The fraction is an elementary concept of great relevance in mathematics, but there are difficulties in learning for elementary school students. This research is a qualitative study with diagnostic evaluation that aims to investigate the difficulties in the learning process of fractions in students of 6th and 7th grades of middle school.

It begins with the historical contextualization of fraction, highlighting its relevance over time to civilizations and mathematics. In order to highlight its importance today, we sought to analyze how the official documents of Brazilian education, National Curriculum Parameters (PCN's) Middle School and Common National Curricular Base (BNCC), address the concept of fractions and what are their proposals for teaching fractions in middle school II. A bibliographic research is also presented to discuss possible causes for the learning difficulties of fractions that will be proven later by analyzing the results of the diagnostic evaluations. It concludes the theoretical support with the presentation of the theory of fractions, presenting the concept of fraction, definitions, meanings, properties and operations.

Regarding the field research (diagnosis), we present the characterization of the research and the subjects involved, the methodology used, the different diagnostic evaluations applied in 6th and 7th grade middle school classes from different schools in different municipalities and education networks. In order to verify students' learning difficulties, a careful analysis of their results is performed to the questions of the diagnostic evaluations, being possible to relate the most relevant difficulties.

The research is concluded by analyzing the difficulties found in the diagnostic evaluation and the relationship of these difficulties with the theoretical support texts used for this purpose.

Keywords: Fractions, Diagnostic Assessment, Learning.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular
ENADE - Exame Nacional de Desempenho de Estudantes
ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC - Ministério da Educação
OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático
SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa

A matemática está presente em nossa vida e é muito difícil pensar em algo onde não se identifica sua aplicação. Segundo a BNCC de Ensino Fundamental, o conhecimento matemático é necessário aos alunos durante sua formação básica, pois além da vasta aplicação na sociedade, serve de instrumento para formação de cidadãos críticos e responsáveis (BRASIL, 2018, p. 265). Os alunos devem ser capazes de utilizar a matemática na resolução de problemas que representem situações da vida. Para isso, devem aplicar conceitos e interpretá-los segundo o contexto ao qual está relacionado (BRASIL, 2018, p. 265).

Mesmo com todo o prestígio atribuído à Matemática, ela é vista por muitos alunos como complicada e fria. Os alunos acham que a matemática é importante, mas não conseguem sentir e perceber essa importância. Isso ocorre muitas vezes pela forma como é trabalhada nas escolas: através de resolução de inúmeros exercícios de forma descontextualizada e sem conexão com a vida (THOMAZ, 1999, p. 6). Ainda segundo a autora, os alunos desenvolvem raciocínio matemático em suas interações do dia a dia, mas fracassam na escola, pois o modo como o conhecimento é trabalhado não possui relação com as necessidades práticas (THOMAZ, 1999, p. 8). Nota-se assim que algumas escolas não conseguem transmitir aos alunos a importância e o significado da matemática como conhecimento da humanidade.

O Ensino Fundamental possui grande importância para a formação matemática dos alunos, pois é nele que se desenvolvem competências e habilidades importantes como raciocínio, capacidade de representar e argumentar matematicamente e resolução de problemas em contextos diversos pela aplicação de conceitos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 266). É nesta etapa ainda que o aluno desenvolve o senso crítico e consegue perceber a relevância da matemática para a compreensão do mundo (BRASIL, 2018, p. 266). Desta forma, devemos dedicar atenção especial para esta etapa da formação escolar, pois o mau desenvolvimento das habilidades e competências pertinentes a ela influenciarão negativamente na formação matemática do aluno e na forma como este enxerga e compreende a matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNs) dividem os conceitos matemáticos em diferentes campos, sendo o campo de Números e Operações importante para a aprendizagem matemática, pois o aluno constrói e assimila o conhecimento sobre números, envolvendo análise de propriedades, operações, inter-relações e aplicação na resolução de problemas (BRASIL, 1998, p. 50). O conhecimento numérico permitirá que o aluno possa construir posteriormente noções algébricas e aplicá-las em diferentes contextos.

Os PCNs de ensino fundamental destacam uma problemática que é percebida nas escolas em relação a aprendizagem de números e suas operações. Ainda que o estudo de números e suas operações possuam destaque no currículo do ensino fundamental, verificam-se muitos alunos concluindo esta etapa educacional com conhecimentos insuficientes sobre números, suas aplicações e significado das operações (BRASIL, 1998, p. 95). Em alguns casos, ainda que o aluno saiba calcular corretamente, ele demonstra dificuldade quanto a interpretação dos resultados obtidos, especialmente quando o resultado é decimal ou fracionário (BRASIL, 1998, p. 95). Os PCNs ainda destacam que esta problemática ocorre devido à forma como os números são trabalhados e pelo pouco destaque dado a este assunto no ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 95).

Esta problemática, também percebida ao longo da minha prática docente, motivou esta pesquisa que tem como um dos objetivos investigar as causas para a dificuldade na aprendizagem de números, especialmente de frações, que se destaca tanto pela importância quanto pela dificuldade de compreensão dos alunos. Para contribuir com a aprendizagem dos números, os PCNs sugerem que o trabalho com os conteúdos deste campo deve priorizar atividades que permitam a ampliação do sentido dos números e significado das operações (BRASIL, 1998, p. 95).

Esta pesquisa destina-se aos professores de matemática que atuam nas séries de ensino fundamental. Descreve-se uma pesquisa qualitativa realizada com alunos das turmas de 6º e 7º anos do ensino fundamental de escolas pertencentes a diferentes cidades e redes de ensino do Espírito Santo, onde buscou-se avaliar a aprendizagem de frações e diagnosticar as dificuldades apresentadas pelos alunos, relacionando os resultados desta prática com as dificuldades identificadas no referencial teórico utilizado, especialmente, nos documentos oficiais de educação.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é destacar a relevância da aprendizagem de frações, diagnosticar possíveis dificuldades na aprendizagem de frações em alunos do ensino fundamental e analisar causas e fatores que poderiam contribuir para alguma dificuldade neste processo.

Os objetivos específicos da pesquisa são:

- Apresentar a construção histórica das frações;
- Destacar a importância da aprendizagem de frações;
- Diagnosticar dificuldades na aprendizagem de frações;
- Relacionar os resultados da diagnose com o referencial teórico.

1.3 Organização da pesquisa

Esta pesquisa é composta por quatro capítulos. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica a respeito do conceito de frações. Inicia-se com a apresentação do contexto histórico de frações, origem, desenvolvimento e aplicações em diferentes civilizações. Analisa-se documentos oficiais de educação como BNCC, PCN e SAEB, identificando suas orientações para o ensino de frações na escola básica e amparando reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de frações na formação dos estudantes com atenção para as dificuldades apresentadas neste processo. Finaliza-se o capítulo, apresentando formalmente o conceito de frações, suas interpretações, classificações, processos de simplificação e comparação, bem como o estudo de operações com frações, com destaque para a representação geométrica das mesmas.

O Capítulo 3 destina-se a apresentação da pesquisa de campo, realizada em diferentes escolas, de cunho diagnóstico, que buscou identificar as dificuldades apresentadas por alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental no processo de aprendizagem de frações. O capítulo divide-se em caracterização da pesquisa, caracterização dos sujeitos, metodologia e apresentação, análise e discussão dos resultados das avaliações diagnósticas aplicadas.

O Capítulo 4 apresenta as considerações finais sobre a pesquisa, destacando os itens mais relevantes observados e relacionando com a fundamentação teórica que ampara o trabalho. Finaliza-se com sugestões para continuação da pesquisa.

Capítulo 2

Frações

Neste capítulo será apresentado e estudado um antigo e importante conceito matemático: as frações. O estudo será iniciado por uma análise do contexto histórico de frações, sua origem e aplicações em diferentes civilizações ao longo do tempo. Será realizada uma pesquisa em documentos oficiais como BNCC e PCN para verificar o que eles abordam sobre frações, quais são as orientações para o ensino de frações na escola básica e análise de descritores do SAEB. Pretende-se ainda refletir sobre o ensino e aprendizagem de frações e sua relevância para a formação básica e na vida dos estudantes.

Mesmo sendo um dos conceitos básicos da matemática de maior importância, as frações geram medo em muitos alunos, que preferem trabalhar muitas vezes com a representação decimal do que com a fração. Por isso, será realizada uma discussão sobre esta questão, onde buscaremos avaliar possíveis causas. O capítulo será finalizado com a apresentação formal do conceito de frações, suas propriedades e métodos de operação.

2.1 Contexto Histórico de Fração

A utilização dos números é algo tão natural que podemos pensar que o homem já nasce sabendo manipulá-los e que o conhecimento dos números é algo inato do ser humano (CELESTINO, 2017, p. 3). No entanto, a origem e a construção dos números não ocorreram de forma rápida. Inicialmente, as noções primitivas de número poderiam estar relacionadas à percepção da diferença entre um objeto e muitos objetos, como por exemplo, um lobo e muitos lobos, uma árvore e uma floresta e posteriormente, conforme as necessidades dos povos para contagem de bens, territórios e membros, a noção de números foi sendo estruturada (BOYER, 2012, p. 1). Ainda segundo Boyer, é improvável que os números tenham sido descobertos por um único indivíduo ou uma tribo, mas foi construída gradualmente e simultaneamente entre os povos (BOYER, 2012, p. 2). A origem destas percepções deve ser tão antiga quanto o descobrimento do fogo (BOYER, 2012, p. 2).

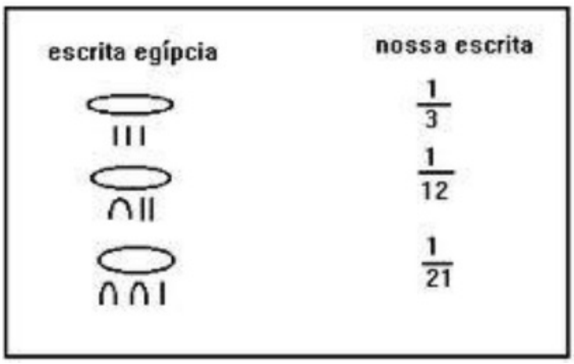
É importante destacar que os nossos mais antigos antepassados não dispunham de símbolos para representar números e sequer conheciam o conceito de número abstrato (CELESTINO, 2017, p. 3). A princípio contava-se apenas até dois, sendo qualquer conjunto além deste nível dado por “muitos” (BOYER, 2012, p. 3). Segundo comprovações arqueológicas, a noção de número precede a de civilização e de escrita.

Percebe-se assim que a origem dos números está ligada à necessidade de contagem do homem primitivo e por ocorrer de forma simultânea em diversas tribos, cada uma desenvolveu seu método de contagem que posteriormente foram estruturados dando origem aos sistemas de numeração (CELESTINO, 2017, p. 3).

Os primeiros sistemas de numeração representavam apenas números inteiros. As civilizações antigas utilizavam apenas números inteiros em suas necessidades práticas e a noção de frações não tinha utilidade. Desta forma, as frações apareceram muito tempo depois como um produto da idade moderna da matemática (BOYER, 2012, p. 4). As frações surgiram da necessidade das civilizações antigas em realizar medições, pois perceberam que muitas vezes não era possível representar medidas apenas com números inteiros. Para solucionar esse problema, foi preciso criar uma maneira de representar partes que não formavam números inteiros. Sendo assim, surgiram os números fracionários nos sistemas de numeração de alguns povos antigos (CELESTINO, 2017, p. 3). Podemos escrever de forma resumida que os números inteiros foram criados para contar enquanto os fracionários foram criados para medir (CELESTINO, 2017, p. 4).

Provavelmente os egípcios foram a primeira civilização a inserir frações em seu sistema numérico e outros povos também o fizeram posteriormente (CELESTINO, 2017, p. 9). No Egito eram conhecidas apenas frações unitárias além de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ e para representá-las era utilizado um sinal oval alongado para representar o inteiro (BOYER, 2012, p. 10). Observe abaixo um exemplo da representação egípcia para frações unitárias.

Figura 2.1: Representação das frações egípcias.



Fonte: CELESTINO (2017, p. 9).

Os egípcios compreendiam e trabalhavam com frações unitárias, mas desconheciam frações racionais gerais da forma $\frac{m}{n}$ (BOYER, 2012, p. 10). Desta forma, a definição de fração $\frac{m}{n}$ foi realizada posteriormente por outra civilização.

Outras civilizações antigas também conheciam e trabalhavam com frações. Os babilônios, em torno do ano 200 a.C. já utilizavam frações de forma similar às frações decimais de hoje em dia. Mas trabalhavam apenas com denominadores iguais as potências de 60, devido ao seu sistema de numeração ser sexagesimal (base 60) (CELESTINO, 2017, p. 10).

Assim como os egípcios e os babilônios, os romanos e os gregos também utilizavam frações e estabeleceram regras próprias para representá-las (CELESTINO, 2017, p. 10). Os romanos deram nomes especiais a cada fração e normalmente utilizavam o número 12 como denominador fixo. Já os gregos, assim como os egípcios, tinham preferência por frações unitárias, mas também utilizavam frações comuns gerais e sexagesimais (CELESTINO, 2017, p. 10). Ambas as civilizações utilizaram frações em problemas econômicos, comerciais e de divisão de terras (CELESTINO, 2017, p. 11). Além disso, "a Grécia conheceu os sistemas egípcio e babilônico e os astrônomos gregos passaram a utilizar as frações sexagesimais em suas medidas, por isso dos graus, minutos e segundos para medida de ângulos" (CELESTINO, 2017, p. 11). A autora ainda destaca que mesmo quando o sistema decimal passou a ser utilizado para números inteiros, o sexagesimal continuou sendo utilizado para frações (CELESTINO, 2017, p. 11).

A civilização chinesa, com seu sistema decimal, conseguiu representar frações de forma muito parecida com a utilizada atualmente. Porém, em vez de utilizar "frações impróprias" como por exemplo $\frac{9}{4}$, escreviam como "frações mistas" $2\frac{1}{4}$ (CELESTINO, 2017, p. 11). A obra chinesa *Nine Chapters on the Mathematical Art* de aproximadamente 100 a.C. além de apresentar uma notação para frações, também forneceu regras usuais para operar frações, entre elas: como simplificar frações, como somar e multiplicar (CELESTINO, 2017, p. 11).

Os hindus representavam frações de forma parecida com a dos chineses, pois seu sistema numérico também era decimal e posicional (CELESTINO, 2017, p. 11). As frações, na forma que são utilizadas hoje em dia, têm grande influência hindu, assim como a origem do sistema numérico decimal, utilizado hoje em dia, que teve origem na Índia. Os hindus representavam frações escrevendo dois números, um sobre o outro (CELESTINO, 2017, p. 11).

Com isso, percebemos que as frações foram utilizadas por diversos povos antigos, de formas diferentes, influenciadas pelo sistema numérico utilizado por cada civilização. Cada povo estabeleceu uma forma própria de utilizar frações, assim como foi feito com os números inteiros (CELESTINO, 2017, p. 12). Somente com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética foi possível perceber que as frações seguiam regras, como os inteiros, e sendo assim, poderiam ser comparadas com números (CELESTINO, 2017, p. 12).

Quanto à notação, as frações passaram por representações diferentes em diversas civilizações antigas, sendo as notações iniciais diferentes da atual. Os babilônios foram os primeiros a utilizar uma notação racional através das frações sexagesimais (CELESTINO, 2017, p. 12). Os gregos tentaram atribuir uma notação geral utilizando seu sistema de numeração alfabético, mas optaram por utilizar a notação babilônica (CELESTINO, 2017, p. 12). Os hindus trabalhavam com um sistema numérico decimal e representavam frações com um número sobre o outro, mas sem a barra. Por volta do ano 1000 os árabes aperfeiçoaram a notação hindu e inseriram a barra para as frações (CELESTINO, 2017, p. 13).

As frações decimais surgiram na matemática chinesa e no século XVI passaram a serem utilizadas na Europa (CELESTINO, 2017, p. 13). O matemático árabe Al-Kashi (1380 – 1429) possui grande importância na história das frações decimais e, apesar de ter precursores, é considerado o inventor dessas frações, pois foi o primeiro a sugerir que frações decimais são tão convenientes quanto as sexagesimais para problemas com muitas casas decimais (CELESTINO, 2017, p. 13). As frações decimais se popularizaram após a publicação do livro do matemático belga Simon Stevin (1548 – 1620), *De Thiende* de 1585. "Stevin mostrou em seu livro que escrever frações como decimais permite que operações com frações sejam efetuadas pelos algoritmos muito mais simples da aritmética de números inteiros" (CELESTINO, 2017, p. 13).

Portanto, concluímos que as frações, originadas inicialmente no Egito, também foram utilizadas por outras civilizações antigas, cada uma com notação adequada ao seu sistema de numeração. As frações eram aplicadas na resolução de problemas sobre divisão de terras, operações comerciais, heranças, mas somente os chineses possuíam métodos para realizar cálculos com frações. As frações foram reconhecidas como número muito depois de seu surgimento e com o tempo, foram aperfeiçoadas com a notação e regras que conhecemos hoje.

2.2 Frações em Documentos Oficiais da Educação e Avaliação Nacional

Nesta seção, apresentaremos as orientações dos seguintes documentos oficiais da educação brasileira sobre o ensino e aprendizagem de frações: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) Ensino Fundamental e Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Serão analisadas as recomendações destes documentos tanto sobre metodologias de abordagem de frações quanto sobre os conceitos que devem ser trabalhados em cada ano escolar.

Além disso, analisaremos os descritores do SAEB que tratam do conceito de frações.

2.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Ensino de Frações

Os PCNs de Ensino Fundamental destacam que a aprendizagem de frações deve ser iniciada ainda nos ciclos referentes ao ensino fundamental I (1º ao 5º ano) e seu estudo deve ter continuidade ao longo dos ciclos referentes ao ensino fundamental II (6º ao 9º ano) (BRASIL, 1998, p. 101).

No terceiro e quarto ciclos (6º ao 9º ano), o aluno deve perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas, especialmente os que envolvem cálculos de medidas ou divisões (BRASIL, 1998, p. 101). Os PCNs sugerem que a contextualização é uma forma de proporcionar essa percepção aos alunos e, para isso, problemas históricos que culminaram no surgimento dos racionais são boas ferramentas para seu ensino (BRASIL, 1998, p. 101).

Os PCNs ressaltam que as frações possuem múltiplas interpretações e faz-se necessário que o aluno compreenda cada uma delas e consiga perceber seu significado em contextos distintos. Porém, estas representações não devem ser trabalhadas de forma isolada e a consolidação do conhecimento requer um trabalho sistematizado que deve ser desenvolvido ao longo de todo o ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 103).

Dentre as diferentes interpretações atribuídas às frações, destaca-se a relação parte/ todo, quando uma unidade (um todo) é dividida em partes equivalentes e a fração representa a relação entre um certo número de partes e o todo. Nesta interpretação, utiliza-se a representação de figuras geométricas divididas em partes iguais (BRASIL, 1998, p. 102).

As frações também são utilizadas para representar uma divisão entre dois números inteiros, onde o segundo número é diferente de zero. O aluno precisa compreender que esta é uma interpretação distinta da anterior, pois a fração $\frac{2}{5}$ pode representar tanto duas partes de um total de 5, quanto a divisão de 2 unidades em 5 partes e certamente são situações distintas (BRASIL, 1998, p. 102).

Outra utilização para frações é a representação de uma razão que expressa a relação entre duas quantidades de uma mesma grandeza (BRASIL, 1998, p. 102). Este caso ocorre, por exemplo, quando se quer expressar que 1 a cada 3 alunos de uma sala são meninos, logo $\frac{1}{3}$ dos alunos são meninos. Outro caso é na representação de escalas em mapas como, por exemplo, a escala de 1 cm para 1000 m, escrita como 1 : 100.000 ou $\frac{1}{100000}$. A fração também é utilizada na representação de porcentagem onde 80 a cada 100 pessoas gostam de futebol, logo $\frac{80}{100}$ ou 80% gosta de futebol.

As frações ainda podem ser utilizadas como operadores para transformar números, por exemplo, por qual número devo multiplicar 7 para transformar em 5? Nesse caso, devemos multiplicar 7 por $\frac{5}{7}$ (BRASIL, 1998, p. 103).

Percebemos então que as frações possuem papel importante para solucionar e representar situações diversas, mas as diferentes representações devem estar bem definidas para o estudante e este processo requer estudo e dedicação. O aluno deve ser conduzido a vivenciar situações distintas envolvendo frações para construir seus significados. Deve ser levado a analisar e comparar as representações.

Para contribuir com o processo de construção de significado para frações, os PCNs sugerem uma abordagem que explore os racionais em situações cotidianas, porém deve-se notar que os racionais aparecem mais na forma decimal do que na fracionária (BRASIL, 1998, p. 103). Contudo, as frações possuem grande importância no desenvolvimento de outros conceitos matemáticos e precisam ser bem compreendidas e aplicadas pelos alunos.

Os PCNs também sinalizam que o professor deve ficar atento sobre metodologias e formas de abordagem para o ensino e aprendizagem de frações. E destacam que, apesar de estudarem frações nos primeiros ciclos do ensino fundamental, os alunos chegam ao terceiro ciclo (6º e 7º ano) sem compreenderem seus significados e os procedimentos para realizar operações (BRASIL, 1998, p. 100). Em alguns casos, esta dificuldade se estende até o ensino médio, o que torna importante a reflexão sobre os métodos utilizados no ensino e aprendizagem das frações para uma efetiva construção de significados.

2.2.2 As Frações na Base Nacional Comum Curricular

Indo ao encontro do proposto pelos PCNs Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental (BNCC), cuja última versão foi homologada em 2018, propõe que o estudo de frações seja iniciado ainda no 2º ciclo do ensino fundamental, especificamente no 4º ano. Os conteúdos que deverão ser ministrados em cada série estão apresentados na BNCC em tabelas divididas por ano escolar, unidades temáticas, objetos do conhecimento e habilidades.

A seguir, apresentamos uma tabela com os objetos do conhecimento e habilidades relacionadas ao ensino e aprendizagem de frações propostas para cada ano do ensino fundamental. Todos os objetos descritos são pertencentes à unidade temática de Números e as informações estão dispostas na BNCC do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 280-319).

Ano	**Objetos do Conhecimento**	**Habilidades**

4º ano	Números racionais: frações unitárias mais usuais $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \text{ e } \frac{1}{100}\right)$.	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \text{ e } \frac{1}{100}\right)$ como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5º ano	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica.	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
5º ano	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência.	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
5º ano	Cálculo de porcentagens e representação fracionária.	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
6º ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

6º ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
7º ano	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
7º ano	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

8º ano	Porcentagens.	(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
8º ano	Dízimas periódicas: fração geratriz.	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
9º ano	Potências com expoentes negativos e fracionários.	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Tabela 2.1: BNCC - Objetos de Aprendizagem e Habilidades.

Percebe-se, portanto, que as frações devem ser introduzidas aos alunos ainda no primeiro segmento do ensino fundamental. No 4º ano são introduzidas as frações unitárias e no 5º ano inicia-se a construção do conceito de frações por meio de sua representação e seus significados. Neste ano, também se relacionam as porcentagens com suas representações fracionárias. Esta etapa inicial de aprendizagem sobre frações é importante para a formalização dos conceitos pelos alunos e falhas neste processo poderão comprometer a compreensão de conceitos mais formais sobre frações estudados em anos posteriores.

Nos anos do ensino fundamental II, o conceito de frações é bem definido e os alunos começam a comparar e operar com os diferentes significados das frações. Mas, assim como sugerem os PCN's, a BNCC também propõe um processo de aprendizagem progressivo sobre frações, onde a cada ano escolar os conceitos se tornam mais estruturados e formalizados para os alunos. No 6º ano consolida-se ainda mais o significado de frações e os alunos têm contato com duas aplicações diferentes de frações: parte/todo e quociente. Também são introduzidas as operações de adição e subtração de frações neste ano e os alunos devem ser capazes de resolver problemas pelo uso de frações. No 7º ano, os alunos ampliam o conhecimento sobre as diversas formas de aplicação de frações, passando a utilizá-las na representação de parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Neste ano, são introduzidas as operações de multiplicação, divisão e potenciação de frações, bem como a resolução de problemas que necessitam destas operações. No 8º ano, já tendo consolidado o conceito de fração, suas representações e operações, são propostas aplicações destes conceitos como na obtenção de fração geratriz de dízima periódica e cálculos de porcentagem. No 9º ano, as frações são aplicadas no cálculo de potências com expoentes fracionários.

Podemos observar que a BNCC propõe uma aprendizagem de frações que acompanha o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno. A formalização da fração, suas representações e operações é iniciada no 5º ano, mas o aluno continua sua aprendizagem nos anos posteriores.

É importante destacar que mesmo a BNCC apresentando habilidades relacionadas diretamente ao conceito de frações, ela não propõe um estudo isolado deste conceito. As frações possuem diversas aplicações em diversas áreas da matemática básica como álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística, bem como da matemática superior. Além disso, as frações possuem aplicações em contextos diversos do dia a dia. E, portanto, sua aprendizagem se faz necessária já nos anos iniciais do ensino fundamental.

2.2.3 As Frações nos Descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) é uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC) que tem como um dos objetivos promover periodicamente avaliações do sistema educacional brasileiro. É responsável pela realização do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) aplicado a estudantes iniciantes e concluintes de ensino superior, da Provinha Brasil, aplicada aos alunos matriculados no 2º ano do ensino fundamental da rede pública e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) composto por avaliações externas que permitem diagnosticar a aprendizagem na educação básica brasileira (BRASIL, 2019).

O INEP, como parte integrante do SAEB, realiza a Prova Brasil bianualmente para alunos do 5º ano e do 9º ano do ensino fundamental das escolas públicas para avaliar a qualidade do ensino nas escolas quanto à aprendizagem de língua portuguesa e matemática. A Prova Brasil possui uma matriz de referência que está de acordo com as orientações da BNCC. Esta matriz apresenta temas e descritores que estão presentes nas questões da prova. A seguir, apresentaremos uma tabela com os descritores do SAEB relacionados ao ensino de frações divididos por ano escolar.

Ano	**Tema**	**Descritor**

5º ano	Números e Operações/Álgebra e Funções.	D21 – Identificar diferentes representações de um mesmo número racional. D22 – Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica. D24 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados. D25 – Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração. D26 – Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).
9º ano	Números e Operações/Álgebra e Funções.	D21 - Reconhecer as diferentes representações de um número racional. D22 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados. D23 - Identificar frações equivalentes. D25 - Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). D26 - Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Tabela 2.2: Descritores de Matemática do SAEB.

O SAEB segue as orientações da BNCC e seus descritores estão adequados às orientações da BNCC quanto ao ensino de frações nas diferentes etapas do ensino fundamental.

Esta pesquisa tem por objetivo avaliar a aprendizagem de frações em alunos de 6º e 7º anos de escolas públicas do Espírito Santo. Para isso, serão utilizados os descritores do SAEB, bem como as diretrizes da BNCC para nortear as investigações.

2.3 As Dificuldades no Processo de Ensino e Aprendizagem de Frações

A matemática é importante e está presente em situações cotidianas, porém, ela tem se destacado como fria e difícil para muitos alunos. Alguns conceitos matemáticos são conhecidos pela dificuldade de aprendizagem como, por exemplo, as frações. "Frações tem sido um assunto temido, mal compreendido e mal aprendido" (BERTONI, 2009, p. 12), sendo este um dos temas mais difíceis do ensino fundamental. Diversas pesquisas e avaliações têm comprovado o baixo rendimento dos alunos sobre frações (BERTONI, 2009, p. 16).

As representações fracionárias são desenvolvidas ainda nos ciclos iniciais, mas na prática, verifica-se que os alunos chegam ao terceiro ciclo do ensino fundamental sem compreender seus diferentes significados e os procedimentos de cálculo (BRASIL, 1998, p. 100). Esta dificuldade se mantém ao longo do ensino fundamental e, para alguns alunos, ao longo de toda sua formação básica. Pretende-se, nesta seção, investigar possíveis causas para as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de frações.

Ainda que os números inteiros sejam muito utilizados em situações cotidianas, as frações são essenciais para o entendimento de razões, porcentagens, escalas, receitas, entre outros (BERTONI, 2009, p. 16). A criança, ao longo do seu processo de formação matemática, precisa compreender que existem situações e contextos que requerem a introdução de novos números, pois os inteiros não são capazes de atender algumas necessidades (BERTONI, 2009, p. 12).

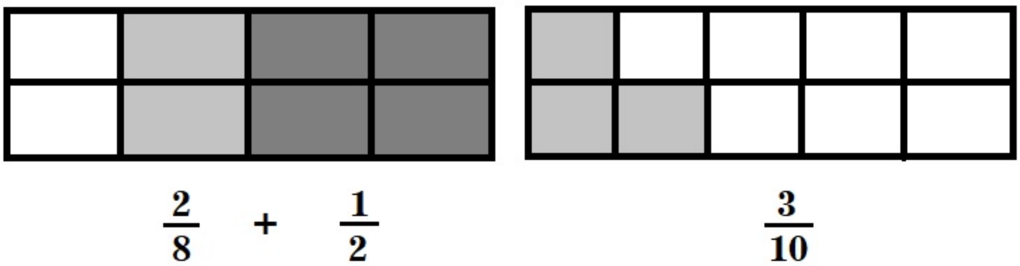
As frações precisam ser compreendidas como números, o que nem sempre ocorre. Frações são números necessários para medir, conforme sua constituição histórica. Nas aulas, os alunos aprendem representações, regras para diferentes operações, frações equivalentes, mínimo múltiplo comum e acabam, por sua vez, não compreendendo o significado essencial: fração é um número. "Na verdade, há muita coisa poluindo e escondendo o cristal puro que fração é: um número. Uma ideia matemática associada à quantificação" (BERTONI, 2009, p. 12).

O aluno, antes de tudo, precisa compreender o conceito de número fracionário e a maior preocupação deve ser o conhecimento de frações, que vai além da divisão de figuras geométricas em partes iguais e regras operatórias (BERTONI, 2009, p. 16). O aluno precisa ser conduzido a situações que o permitam identificar as frações em contextos cotidianos e a perceber a ideia de número fracionário relacionada (BERTONI, 2009, p. 16).

Quando o aluno não compreende corretamente o conceito de fração, o processo de aprendizagem deste conceito não ocorre em sua integralidade. Tratando-se de frações, as aparências enganam, pois ainda que a criança seja capaz de reproduzir regras operatórias ou representações corretamente na resolução de problemas, diversos aspectos não são bem compreendidos (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191). “De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar dificuldades relativas às frações sem que ninguém perceba” (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Uma das dificuldades identificadas para a aprendizagem de frações surge quando o aluno tenta transferir propriedades do conjunto dos inteiros para os números fracionários, não levando em consideração as características específicas de cada conjunto numérico. Por exemplo, quando um aluno deseja somar duas frações, sem reconhecer o significado de fração como um número diferente dos naturais e inteiros, ele pode apenas somar os algarismos dos numeradores e dos denominadores, o que levaria a um resultado equivocado. E a extensão de propriedades dos números naturais para os fracionários torna-se um problema para a aprendizagem de frações. Este tipo de associação não ocorre apenas pelo desconhecimento dos procedimentos operatórios de frações, mas principalmente pelo desconhecimento do significado das próprias frações. Quando um aluno realiza a adição de frações $\frac{2}{8} + \frac{1}{2}$ e encontra como resultado $\frac{3}{10}$, ele desconsidera o significado de $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{2}$ e não compreende que o resultado encontrado não se justifica.

Figura 2.2: Representação geométrica da soma de frações.



Fonte: O próprio autor.

Também é possível destacar que “uma explicação para as dificuldades encontradas, possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais” (BRASIL, 1998, p. 101). Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Fundamental destacam alguns obstáculos à aprendizagem de frações. Apresentamos abaixo esses obstáculos:

- Um número fracionário pode ser representado por diferentes e infinitas escritas. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, ... são representações distintas para um mesmo número (BRASIL, 1998, p. 101). Isso contrapõe os números naturais, onde cada número apresenta uma representação única;

- Enquanto nos números naturais temos $a < b$, nos números fracionários temos $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Essa desigualdade pode parecer contraditória para os alunos, se não entenderem os diferentes significados de frações (BRASIL, 1998, p. 101);

- Quando multiplicamos dois números naturais diferentes de 0 e 1, espera-se obter como resultado um número maior do que ambos, mas quando multiplicamos números racionais, por exemplo, 20 e $\frac{1}{2}$, o resultado é 10, menor do que 20 (BRASIL, 1998, p. 101). O mesmo ocorre com a divisão, pois quando dividimos um natural por outro, esperamos como resultado um número menor do que o dividendo. Mas ao dividir 10 por $\frac{1}{2}$, o resultado encontrado é 20, maior do que 10. É de se esperar um espanto nos alunos ao perceberem que uma divisão é capaz de dobrar o resultado do dividendo, quando, para ele, a divisão é o processo de repartir uma determinada quantidade em partes menores. Estes resultados surpreendem os alunos, pois diferem de tudo o que compreendiam sobre as operações de multiplicação e divisão;

- Enquanto para os números naturais podem ser atribuídos sucessor e antecessor, nos números fracionários (assim como nos decimais) isso não é possível, pois entre quaisquer dois números racionais existem infinitos números racionais (BRASIL, 1998, p. 101).

Percebe-se que os números racionais, ou seja, os números fracionários, diferem em vários pontos dos números naturais. As frações possuem características, regras operatórias, representações próprias e são números utilizados para medir. Para aprender frações, o aluno precisa se apropriar do significado destes números e deve ser capaz de associá-los às diversas situações vivenciadas em seu cotidiano.

Com o avanço tecnológico as calculadoras passaram a fazer parte do dia a dia do ser humano e como elas utilizam números racionais na representação decimal, estes aparecem com mais frequência em situações cotidianas do que as frações. Esta familiaridade com as representações decimais influencia o comportamento do aluno em sala de aula que prefere o cálculo com decimais ao uso de frações.

Muitas pesquisas se debruçam no estudo dos racionais no ensino fundamental e pode-se considerar que a "disputa"de preferência entre frações ou decimais é motivo de polêmica (FERNANDES, 2008, p. 6). Há quem defenda que o uso da forma fracionária diminuiu com os anos, por influência do uso das calculadoras, que utiliza os números na forma decimal e considera os conceitos de frações complexos, inviabilizando a compreensão do seu significado pelos alunos (FERNANDES, 2008, p. 6). Por outro lado, há quem defenda que a aprendizagem de frações se justifica por ser base de conteúdos não só matemáticos, mas também de cunho social como medidas, proporcionalidade, porcentagem e juros (FERNANDES, 2008, p. 6). Quanto à esta questão, concordamos com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental ao defenderem o estudo das frações no ensino fundamental, ainda que sua presença ocorra com menos frequência no cotidiano do que os decimais (BRASIL, 1998, p. 103). As frações são necessárias para o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos, muitos deles importantes para situações vivenciadas em sociedade.

2.4 O Conceito de Fração

Nesta seção será apresentado o conceito de fração, definições, significados, propriedades e operações. Para tal, utilizou-se como referência a coleção *Teláris* de Luiz Roberto Dante para ensino fundamental II (2018).

2.4.1 Conjunto dos Números Racionais

O conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, é definido como o conjunto dos números da forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, sendo que $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, com $n, n' \neq 0$ se, e somente se, $mn' = m'n$.

Podemos considerar que todos os números inteiros também são racionais, bastando tomar b igual a 1. São números racionais:

- Frações;
- Números naturais ($\mathbb{N}$);
- Números inteiros ($\mathbb{Z}$);
- Números decimais exatos;
- Dízimas periódicas.

2.4.2 Definição de Fração

Uma fração, representada de modo genérico como $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, designa o inteiro dividido em b partes iguais das quais utiliza-se o número a de partes. Neste caso, a corresponde ao numerador da fração, enquanto b corresponde ao denominador da fração. O numerador e o denominador são chamados de termos da fração.

O denominador corresponde ao número de partes que um todo será dividido e o numerador corresponde ao número de partes que serão consideradas.

Vamos restringir o presente estudo às frações $\frac{a}{b}$ onde $a, b > 0$.

2.4.3 As Diferentes Interpretações das Frações

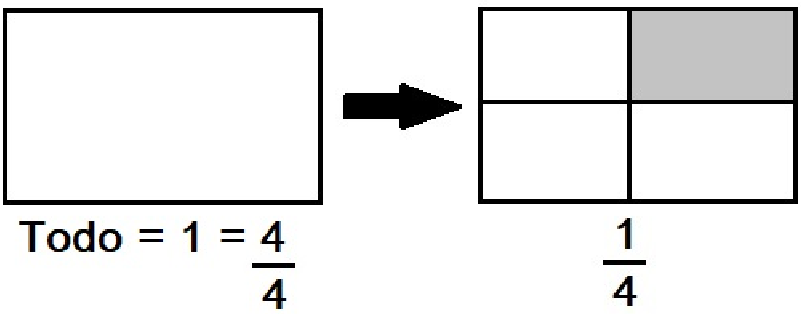
As frações possuem interpretações diferentes de acordo com o contexto em que estão sendo aplicadas. Os PCNs de Ensino Fundamental destacam os seguintes significados distintos para fração: relação parte/todo, razão, quociente e operador multiplicativo. Podemos ainda incluir mais dois significados que são a fração como um número e fração de uma quantidade.

I) Fração como Relação Parte/todo

Este é um dos significados mais conhecidos e utilizados de fração. Neste contexto, as frações representam a relação entre a parte e o todo. A fração $\frac{a}{b}$ representa a divisão do "todo"em b partes iguais, onde considera-se apenas a partes.

Podemos exemplificar este significado da seguinte forma: João dividiu uma folha em quatro partes iguais e pintou apenas uma, ou seja, ele pintou uma das quatro partes. Logo, a folha representa o "todo"que foi dividido em 4 partes e utilizou-se 1 dessas partes. Assim, a fração $\frac{1}{4}$ representa a parte utilizada desta folha enquanto a fração $\frac{3}{4}$ representa a parte não utilizada da folha. Para introduzir esta representação de frações, é comum fazer-se uso da representação geométrica, onde as partes e o todo são apresentados por um desenho. Neste exemplo, teremos:

Figura 2.3: Representação geométrica da relação parte/todo

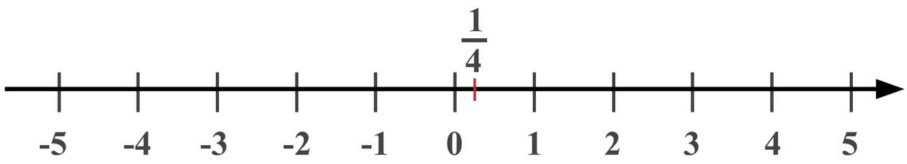


Fonte: O próprio autor.

II) Fração como um Número

Ainda que existam diferentes significados e interpretações para as frações, deve-se destacar seu significado essencial: fração é um número. Nesse contexto é possível representar a fração em sua forma decimal, identificar o posicionamento de uma fração na reta numérica, entre outras situações.

Figura 2.4: Representação da fração como número



Fonte: O próprio autor.

III) Fração como Razão

A fração pode ser utilizada para representar a razão entre duas medidas de uma mesma grandeza. Podemos exemplificar este significado como: Bruna tem 8 balões dos quais três são vermelhos, logo 3 em 8 balões são vermelhos, ou seja $\frac{3}{8}$ dos balões são vermelhos. Outra aplicação de fração como razão está no cálculo de probabilidade. A probabilidade de se obter a face cara virada para cima ao lançar um moeda é de 1 em 2 possibilidades, logo a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda é de $\frac{1}{2}$.

Figura 2.5: Representação da fração como razão

Fonte: O próprio autor.

IV) Fração como Quociente

Na ideia de fração como quociente, a fração representa uma divisão entre dois números inteiros. Ou seja, $\frac{8}{4} = 8 \div 4 = 2$. Assim, $\frac{8}{4}$ é a representação na forma de fração da divisão de 8 por 4. Esta representação também é muito utilizada na matemática, pois usualmente, na resolução de equações, representa-se a divisão por meio de fração.

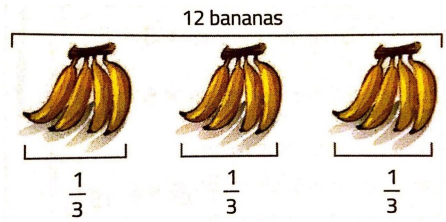
V) Fração como Operador Multiplicativo

Neste contexto, a fração é utilizada como operador multiplicativo para transformação de números. Por exemplo, para transformar o número 3 em 7, devemos multiplicá-lo por $\frac{7}{3}$.

VI) Fração de uma Quantidade

A fração ainda pode ser utilizada para representar parte de uma quantidade. Por exemplo: de uma dúzia de bananas, será utilizado $\frac{1}{3}$ para a receita de um bolo, logo devemos calcular $\frac{1}{3}$ de 12 bananas. Para isso, divide-se as 12 bananas em 3 partes e toma-se apenas uma parte. Logo $\frac{1}{3}$ de $12 = 4$, pois $12 \div 3 = 4$. E por sua vez, sobrarão $\frac{2}{3}$ de 12 bananas, ou seja, sobrarão $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ bananas.

Figura 2.6: Divisão de bananas em 3 partes.



Fonte: DANTE (2018, p. 175).

2.4.4 Nomenclatura das Frações

A leitura de uma fração depende de seu denominador. É possível dividir as frações em três grupos:

I) Frações com denominadores de 2 a 9.

Lê-se primeiro o numerador seguido de seu denominador.

$\frac{1}{2} \Rightarrow$ um meio. $\frac{1}{5} \Rightarrow$ um quinto. $\frac{5}{8} \Rightarrow$ cinco oitavos.

$\frac{2}{3} \Rightarrow$ dois terços. $\frac{5}{6} \Rightarrow$ cinco sextos. $\frac{2}{9} \Rightarrow$ dois nonos.

$\frac{3}{4} \Rightarrow$ três quartos. $\frac{4}{7} \Rightarrow$ quatro sétimos.

II) Frações com denominadores de 10, 100 ou 1000.

As frações com denominadores 10, 100 ou 1000 são chamadas de *frações decimais*.

$\frac{7}{10} \Rightarrow$ sete décimos. $\frac{3}{100} \Rightarrow$ três centésimos. $\frac{1}{1000} \Rightarrow$ um milésimo.

III) Frações com denominadores diferentes dos anteriores.

Lê-se o numerador, depois o denominador seguido da palavra *avos*.

$\frac{1}{12} \Rightarrow$ um doze avos. $\frac{3}{20} \Rightarrow$ três vinte avos. $\frac{2}{35} \Rightarrow$ dois trinta e cinco avos.

2.4.5 Classificação de Frações

I) Frações Próprias

São as frações que possuem valor maior do que (zero) e menor que 1 inteiro. Nelas, o numerador é menor do que o denominador e diferente de zero.

Exemplos: $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}, ...$

II) Frações Impróprias

São as frações que valem 0, 1 inteiro ou mais que 1 inteiro. Nelas, o numerador é diferente pode ser zero ou pode ser igual ou maior do que o denominador.

Exemplos: $\frac{7}{2}, \frac{6}{3}, \frac{0}{5}, ...$

III) Frações Aparentes

São as frações onde o numerador é múltiplo do denominador. Estas frações representam um número inteiro, mas em forma de fração. Elas são casos particulares das frações impróprias.

Exemplos: $\frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \frac{10}{5}, ...$

IV) Frações Mistas

São as frações constituídas de uma parte inteira e outra fracionária (fração própria). É possível encontrar uma fração imprópria a partir do número misto.

Exemplos: $2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{5}$, ...

A fração $2\frac{1}{3}$ é transformada em fração imprópria do seguinte modo:

$$2\frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Já a fração $1\frac{2}{5}$ é transformada em fração imprópria do seguinte modo:

$$1\tfrac{2}{5} = \tfrac{5}{5} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{7}{5}.$$

Obs: Para converter frações impróprias em frações mistas devemos escrever a fração como uma soma de uma fração aparente e uma fração própria de mesmos denominadores.

Exemplo: Convertendo a fração $\frac{9}{4}$ em fração mista:

$$\tfrac{9}{4} = \tfrac{8}{4} + \tfrac{1}{4} = 2\tfrac{1}{4}.$$

V) **Frações Unitárias**

São frações com numerador igual a 1 e o denominador é um inteiro positivo.

Exemplos: $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{30}, \ldots$

VI) **Frações Decimais**

São frações cujos denominadores são potências positivas de 10. Essas frações podem ser representadas por um número decimal.

Exemplos: $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{21}{100} = 0,21$; $\frac{3}{1000} = 0,003$; ...

VII) **Frações Equivalentes**

São duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade. Frações equivalentes possuem mesmo valor.

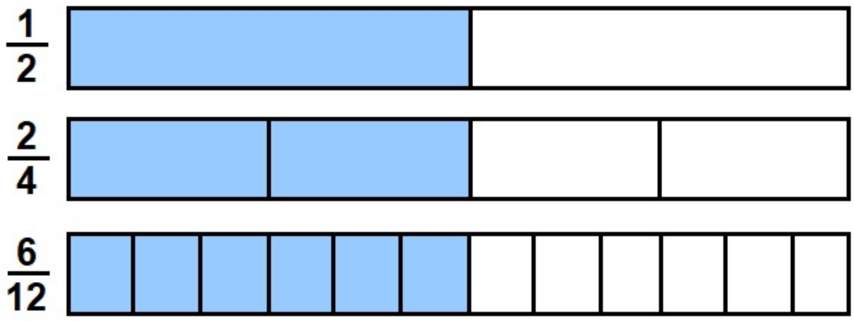
Para obtermos uma fração equivalente a uma fração dada, basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

Exemplos: $\frac{1^{\times 2}}{2_{\times 2}} = \frac{2^{\times 3}}{4_{\times 3}} = \frac{6}{12}$ e $\frac{12^{\div 2}}{18_{\div 2}} = \frac{6^{\div 3}}{9_{\div 3}} = \frac{2}{3}$

Portanto, pela definição de frações equivalente temos:

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{4} = \tfrac{6}{12} = \ldots$$

Figura 2.7: Frações equivalentes.



Fonte: O próprio autor.

Obs: Podemos verificar se duas frações são equivalentes multiplicando os números de forma cruzada.

Exemplo: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \Rightarrow 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \Rightarrow 4 = 4.$

2.4.6 Simplificação de Frações e Frações Irredutíveis

Para simplificar uma fração, dividimos sucessivamente o numerador e o denominador por um divisor comum, até obtermos a fração de tal modo que não tenham divisores comuns diferentes de 1.

Uma forma mais rápida de simplificar frações é dividir numerador e denominador pelo MDC (Máximo Divisor Comum) de ambos. Desta forma será realizada apenas uma divisão.

Exemplos:

I)Para simplificar a fração $\frac{10}{14}$, basta observar que tanto o numerador quanto o denominador são divisíveis por dois. Logo,

$$\frac{10^{\div 2}}{14_{\div 2}} = \frac{5}{7}.$$

A simplificação desta fração requer apenas a divisão, pois $mdc(5, 7) = 1$.

II) Para a fração $\frac{78}{12}$, o numerador e o denominador são divisíveis por 2 e por 3, logo faremos divisões sucessivas:

$$\frac{78^{\div 2}}{12_{\div 2}} = \frac{39^{\div 3}}{6_{\div 3}} = \frac{13}{2}.$$

Alternativamente, poderíamos ter realizado uma única divisão pelo $mdc(78, 12) = 6$, obtendo a fração $\frac{13}{2}$.

Observe que as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{13}{2}$ não são possíveis de simplificar, pois o mdc dos respectivos numeradores e denominadores são iguais a 1 neste caso, dizemos que o numerador e o denominador são primos entre si ($mdc = 1$).

A fração, cujo numerador e denominador são primos entre si, é denominada *fração irredutível* ou *forma simplificada*, pois não são possíveis novas simplificações.

2.4.7 Comparação entre Frações

Comparar frações significa identificar qual possui maior valor (representa a maior quantidade do inteiro) ou se são iguais.

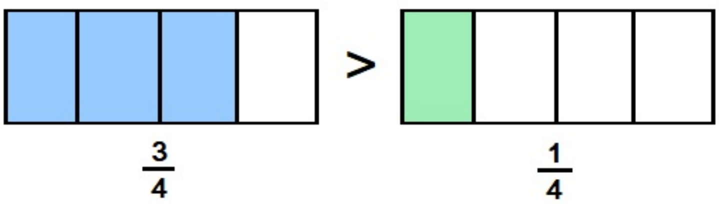
Para comparar frações, devemos dividir em dois casos:

I) Frações com mesmo denominador

Para comparar as frações com mesmo denominador, basta analisar seus numeradores.

Exemplo: Dadas as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, como $3 > 1$, então $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$.

Figura 2.8: Comparação entre frações de mesmo denominador.



Fonte: O próprio autor.

II) Frações com denominadores diferentes

Para comparar frações com denominadores diferentes, precisamos reduzi-las ao mesmo denominador e isso pode ser feito de duas formas diferentes: pelo MMC (mínimo múltiplo comum) ou multiplicando cruzado.

a) Utilizando o MMC

Dadas as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{7}$, faremos o mmc dos denominadores para transformá-las em novas frações equivalentes as primeiras, mas de mesmo denominador.

Calculando o $mmc(4,7)$:

$$\begin{array}{c|c|c} 4 & 7 & 2 \\ \hline 2 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

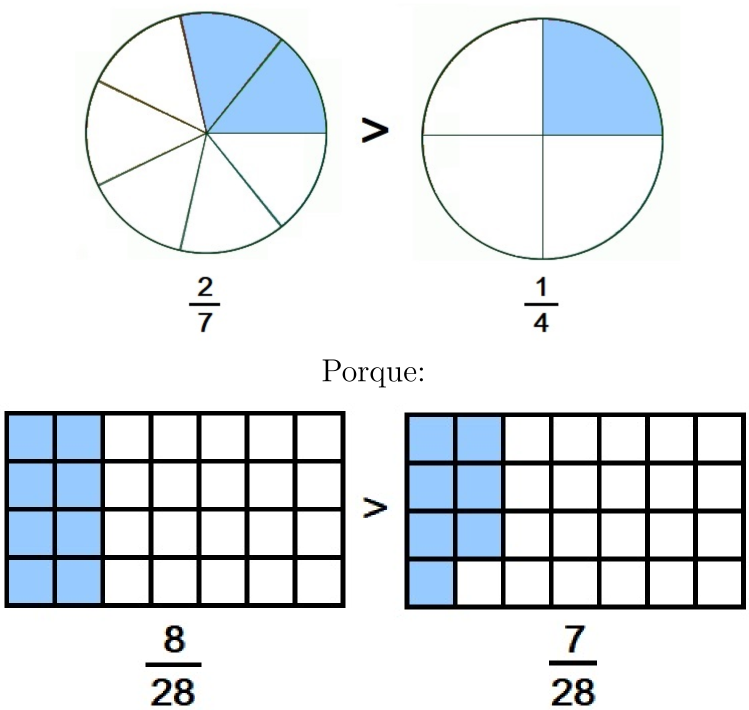
Como $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$, então $mmc(4,7) = 28$. Este resultado será o novo denominador das duas frações.

Agora, basta obter duas novas frações de denominadores 28, equivalentes às originais.

$$\frac{1^{\times 7}}{4_{\times 7}} = \frac{7}{28} \quad \text{e} \quad \frac{2^{\times 4}}{7_{\times 4}} = \frac{8}{28}.$$

Agora, com os denominadores iguais, comparam-se os numeradores das frações: como $8 > 7$, então $\frac{8}{28} > \frac{7}{28}$ e, portanto, $\frac{2}{7} > \frac{1}{4}$.

Figura 2.9: Comparação entre frações de denominadores diferentes.



Fonte: O próprio autor.

b) Produto dos Meios pelos Extremos

Neste caso, utilizamos a propriedade das proporções conhecida como o *produto dos meios pelos extremos.* Multiplicamos o numerador da primeira fração com o denominador da segunda e o numerador da segunda fração pelo denominador da primeira.

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $a, b, c, d > 0$, temos:

$$\tfrac{a}{b} > \tfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c.$$

Demonstração: Sejam $a, b, c, d > 0$. Suponha que

$$\tfrac{a}{b} > \tfrac{c}{d}.$$

Logo,

$$\tfrac{a}{b} \cdot b \cdot d > \tfrac{c}{d} \cdot b \cdot d.$$

Então,

$$ad > bc.$$

Por outro lado, suponha que

$$ad > bc.$$

Logo,

$$\tfrac{a \cdot d}{b \cdot d} > \tfrac{b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Então,

$$\tfrac{a}{b} > \tfrac{c}{d}.$$

Caso o resultado seja igual, ou seja, $a \cdot d = c \cdot b$, significa que elas são equivalentes.

Exemplo: Dadas as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, temos:

$$2 \cdot 4 = 8 \text{ e } 3 \cdot 3 = 9.$$

Como $9 > 8$, então $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

2.4.8 Adição e Subtração de Frações

Assim como foi feito na comparação de frações, na adição e na subtração de frações devemos dividir em dois casos:

- Frações com denominadores iguais;
- Frações com denominadores diferentes.

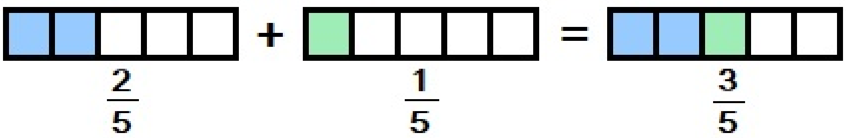
I) Frações com mesmo denominador

Em frações com mesmo denominador, somamos ou subtraímos os numeradores de acordo com a operação solicitada e mantemos o denominador.

Exemplos:

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$.

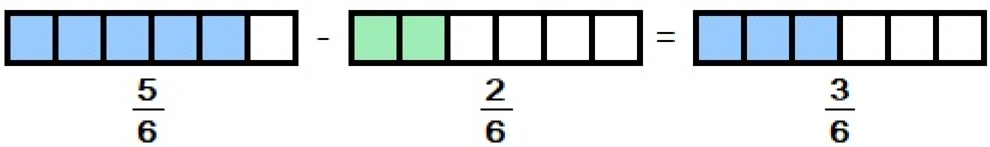
Figura 2.10: Adição de frações.



Fonte: O próprio autor.

b) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6}$.

Figura 2.11: Subtração de frações.



Fonte: O próprio autor.

II) Frações com denominadores diferentes

Para realizar a adição ou a subtração de frações com denominadores diferentes devemos transformar as frações originais em frações equivalentes com o mesmo denominador, utilizando como recurso o *mmc* dos denominadores.

Exemplo: Para calcular $\frac{1}{9} + \frac{3}{6}$, devemos obter o $mmc(9, 6)$.

$$\begin{array}{c|c|c} 9 & 6 & 2 \\ \hline 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Como $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, então $mmc(6,9) = 18$. Este resultado será o novo denominador das duas frações.

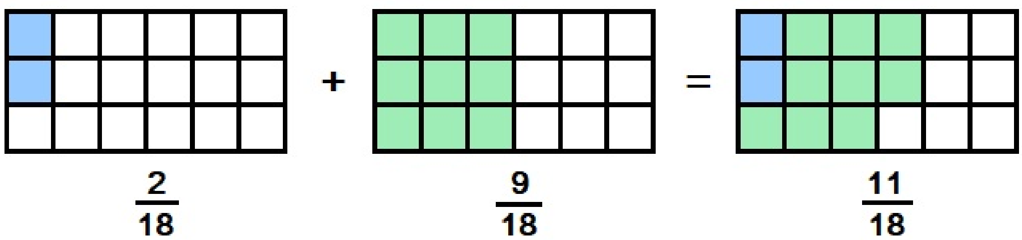
Agora, obteremos frações equivalentes as dadas com denominador 18. Assim:

$$\frac{1^{\times 2}}{9_{\times 2}} = \frac{2}{18} \quad \text{e} \quad \frac{3^{\times 3}}{6_{\times 3}} = \frac{9}{18}.$$

E, por fim, realizamos a adição das frações de mesmo denominador:

$$\frac{1}{9} + \frac{3}{6} = \frac{2}{18} + \frac{9}{18} = \frac{2+9}{18} = \frac{11}{18}.$$

Figura 2.12: Adição de frações com denominadores diferentes.



Fonte: O próprio autor.

Obs: Na subtração o processo é análogo ao da adição.

2.4.9 Multiplicação de Frações

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, para multiplicá-las, basta fazer o produto entre os numeradores e o produto entre os denominadores. Assim,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ com } a, b, c \text{ e } d \in \mathbb{N}.$$

Exemplos:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$.

b) $2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 7} = \frac{2}{7}$.

Obs: Quando multiplicamos um número inteiro por uma fração, multiplicamos o inteiro pelo numerador da fração, já que o denominador de todo número inteiro é 1.

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = \frac{10}{10} = 1.$

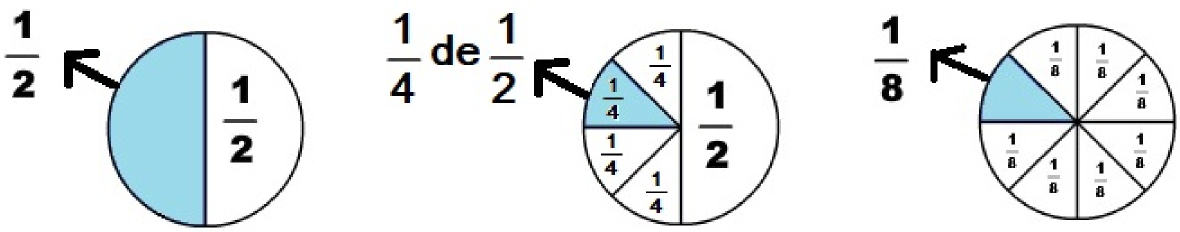
Obs: Quando duas frações multiplicadas resultam em 1, dizemos que as frações são *inversas*. Logo $\frac{a}{b}$ é inversa de $\frac{b}{a}$.

Também é possível representar geometricamente a multiplicação de frações. Para isso, devemos utilizar a multiplicação de frações interpretada como o cálculo de uma fração de uma quantidade. Veja os exemplos abaixo.

Exemplos:

a) Realizando a multiplicação das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, sabe-se que o resultado será $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Porém, é possível pensar esta multiplicação como o processo para se obter $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$. Desta forma, dado um inteiro, deve-se considerar metade, ou seja, $\frac{1}{2}$ do total. E então, toma-se $\frac{1}{4}$ desta metade, resultando em $\frac{1}{8}$ do total.

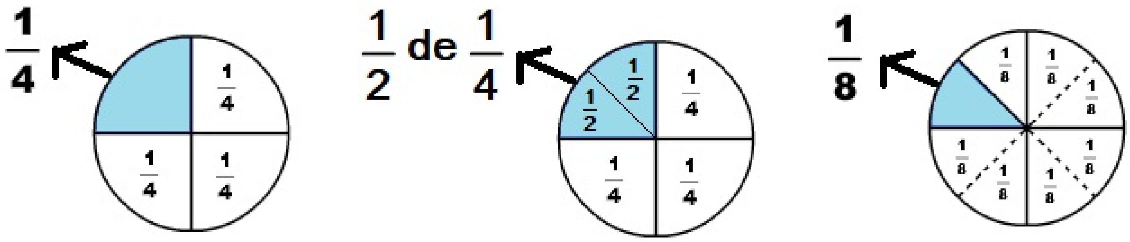
Figura 2.13: Multiplicação de frações - primeiro exemplo.



Fonte: O próprio autor.

Podemos ainda realizar outra representação para a multiplicação entre as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Se multiplicarmos $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, dado um inteiro, podemos considerar $\frac{1}{4}$ do total e depois tomar apenas metade deste $\frac{1}{4}$, resultando em $\frac{1}{8}$ do total.

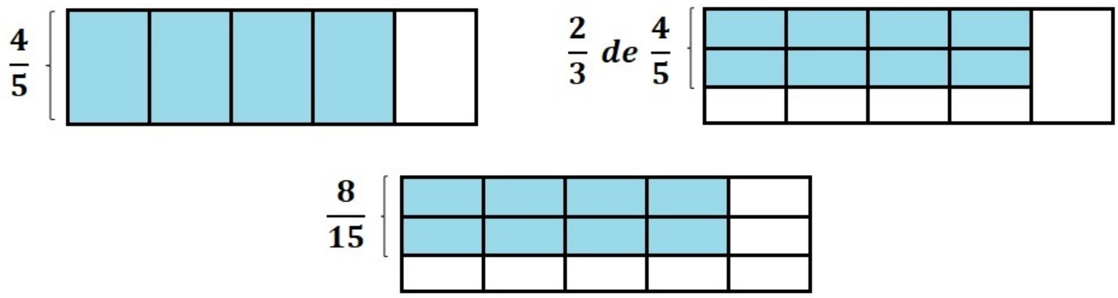
Figura 2.14: Multiplicação de frações - segundo exemplo.



Fonte: O próprio autor.

b) Realizando a multiplicação das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, sabe-se que o resultado será $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. A representação geométrica desta multiplicação será obtida ao considerar $\frac{4}{5}$ do inteiro e depois tomando $\frac{2}{3}$ deste $\frac{4}{5}$. Geometricamente, esta multiplicação está representada na figura abaixo.

Figura 2.15: Multiplicação de frações - terceiro exemplo.



Fonte: O próprio autor.

c) Dadas as frações $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{4}$, sabe-se que $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{24}{12} = 2$.

Para representar geometricamente esta multiplicação de frações, é necessário perceber que $\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$.

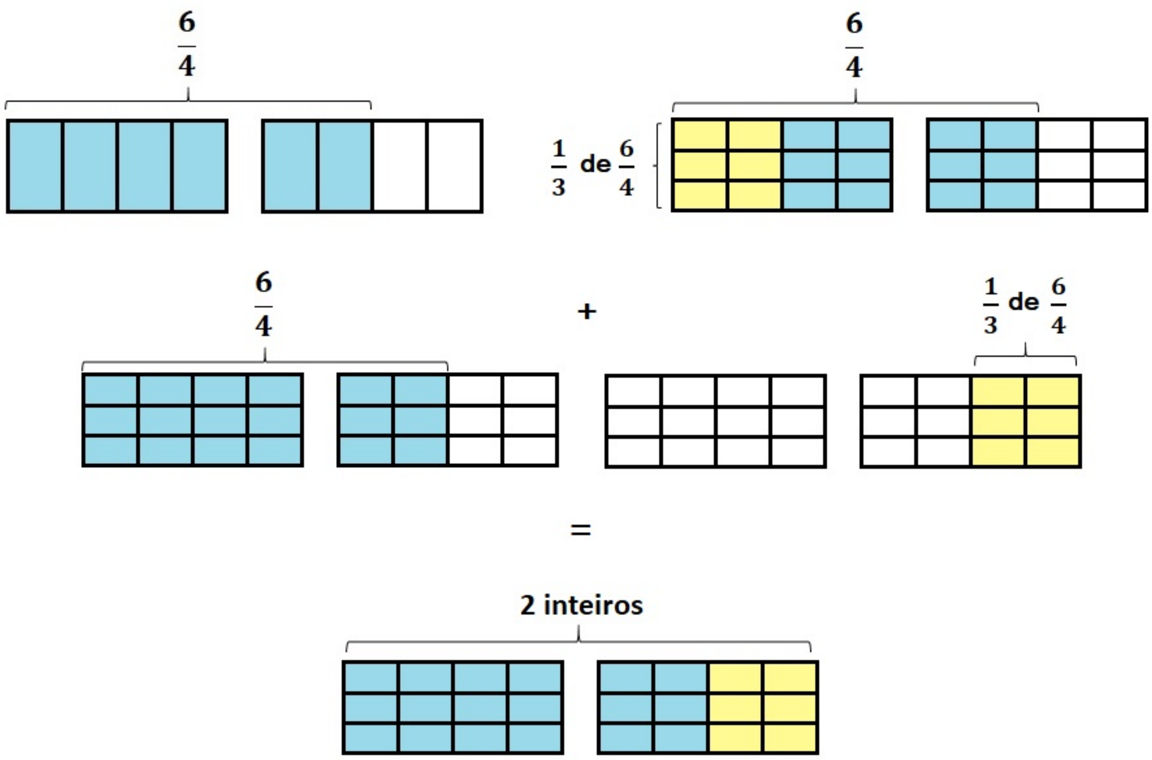
Obs: Para esta representação, será utilizada a propriedade *distributiva* da multiplicação, onde $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$.

Logo, aplicando a propriedade *distributiva* da multiplicação,

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{6}{4} = 1 \cdot \frac{6}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4}.$$

Portanto, representar geometricamente a multiplicação $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4}$ é o mesmo que representar $\frac{6}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4}$.

Figura 2.16: Multiplicação de frações - quarto exemplo.



Fonte: O próprio autor.

2.4.10 Divisão de Frações

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, para dividi-las, basta multiplicar ambas as frações pelo inverso da fração que está no denominador.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Exemplo:

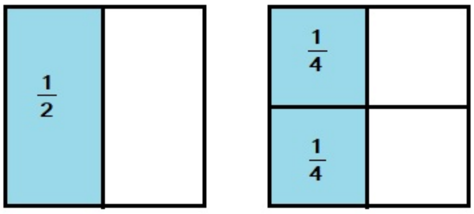
a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 1} = \frac{6\div 2}{4\div 2} = \frac{3}{2}$.

Para representar geometricamente a divisão de frações, devemos recorrer a um processo similar ao realizado na divisão euclideana, onde, por exemplo, ao dividir 10 por 2, obtém-se 5, já que $10 = 2\cdot 5$. É possível pensar ainda que o resultado 5 representa a quantidade de vezes que é possível inserir grupos de 2 unidades em 10 unidades. E é com este último pensamento que iremos interpretar geometricamente a divisão de frações.

Exemplos:

a) Para realizar a divisão $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$, deve-se identificar quantas vezes é possível inserir a fração $\frac{1}{4}$ do inteiro em $\frac{1}{2}$ do mesmo inteiro.

Figura 2.17: Divisão de frações - primeiro exemplo.

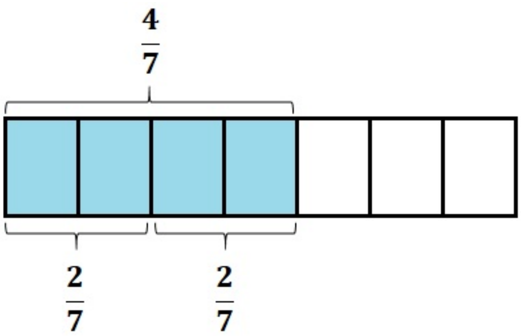


Fonte: O próprio autor.

Pela representação geométrica das frações é possível perceber que $\frac{1}{4}$ representa metade de $\frac{1}{2}$ do inteiro, ou seja, $\frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4}$. Portanto, é possível inserir $\frac{1}{4}$ do inteiro 2 vezes em $\frac{1}{2}$ do mesmo inteiro. Desta forma, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$.

b) Para realizar a divisão $\frac{4}{7} \div \frac{2}{7}$, deve-se identificar quantas vezes é possível inserir a fração $\frac{2}{7}$ do inteiro em $\frac{4}{7}$ do mesmo inteiro.

Figura 2.18: Divisão de frações - segundo exemplo.

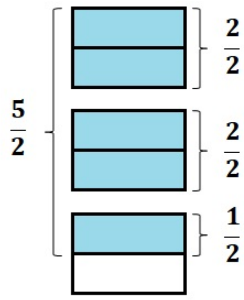


Fonte: O próprio autor.

Conforme representação geométrica, é possível perceber que $\frac{4}{7} = 2 \cdot \frac{2}{7}$. Logo, $\frac{4}{7} \div \frac{2}{7} = 2$.

c) Para realizar a divisão $\frac{1}{2} \div \frac{5}{2}$, deve-se identificar quantas vezes é possível inserir a fração $\frac{5}{2}$ do inteiro em $\frac{1}{2}$ do mesmo inteiro. Como $\frac{5}{2} > \frac{1}{2}$, será possível inserir apenas uma fração de $\frac{5}{2}$ em $\frac{1}{2}$.

Figura 2.19: Divisão de frações - terceiro exemplo.



Fonte: O próprio autor.

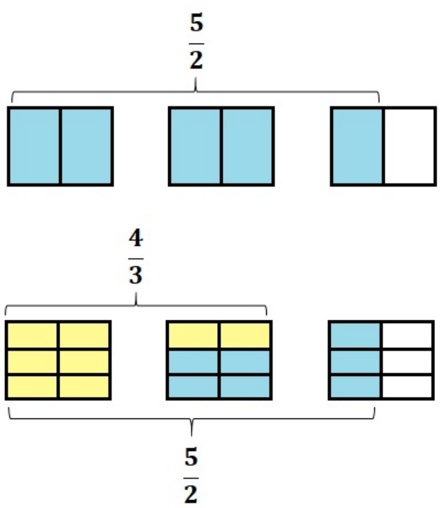
Observe que na figura, $\frac{1}{2}$ é um único retângulo azul e o $\frac{5}{2}$ são todos os retângulos azuis. O que é dividir $\frac{1}{2}$ por $\frac{5}{2}$? É saber qual parte do total dos retângulos azuis cabe em um único retângulo azul. Ou seja, considerando todos os retângulos azuis como "novo todo", qual fração deste todo corresponde a um único retângulo azul? Veja que esse todo fica dividido em 5 partes iguais (os retângulos azuis), e um único retângulo azul corresponde a fração $\frac{1}{5}$ deste todo, ou seja, corresponde a $\frac{1}{5}$ de $\frac{5}{2}$.

Pela representação geométrica, é possível perceber que apenas 1 parte de 5 da fração $\frac{5}{2}$ pode ser inserida em $\frac{1}{2}$. Logo, $\frac{1}{2} \div \frac{5}{2} = \frac{1}{5}$. Este resultado pode ser verificado através do processo algébrico de divisão frações.

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

d) Para obter o resultado da divisão $\frac{4}{3} \div \frac{5}{2}$, deve-se identificar quantas vezes é possível inserir a fração $\frac{5}{2}$ do inteiro em $\frac{4}{3}$ do mesmo inteiro. Como $\frac{5}{2} > \frac{4}{3}$, será possível inserir apenas uma fração de $\frac{5}{2}$ em $\frac{4}{3}$.

Figura 2.20: Divisão de frações - quarto exemplo.



Fonte: O próprio autor.

Observe que na figura, $\frac{4}{3}$ são os retângulos amarelos e $\frac{5}{2}$ são os retângulos coloridos (amarelos e azuis). O que é dividir $\frac{4}{3}$ por $\frac{5}{2}$? É saber quantos retângulos amarelos cabem no total (todo) dos retângulos coloridos. Ou seja, considerando os retângulos coloridos como "novo todo", qual fração deste todo corresponde aos retângulos amarelos? Veja que esse todo fica dividido em 15 partes iguais (os retângulos coloridos), e os retângulos amarelos são 8 desses retângulos, o que resulta na fração $\frac{8}{15}$.

Pela representação geométrica, percebe-se que é possível inserir 8 partes de 15 da fração $\frac{5}{2}$ em $\frac{4}{3}$. Assim, $\frac{4}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{8}{15}$. Verificando o resultado pelo processo algébrico

$$\frac{4}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}.$$

2.4.11 Potenciação de Frações

Para calcular a potência de uma fração, utilizamos as seguintes regras:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.

Obs: Interpretando a fração como uma divisão entre dois inteiros, podemos realizar a divisão dos inteiros primeiro e depois realizar a potenciação. No exemplo a), teríamos:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = (0,4)^2 = 0,16.$$

Como $\frac{4}{25} = 0,16$, verificamos a afirmação.

2.4.12 Radiciação de Frações

O cálculo da raiz de uma fração é realizado de forma similar ao da potenciação.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Exemplo: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

Obs: Analogamente, poderíamos ter realizado a divisão antes de calcular a raiz quadrada, pois $\frac{1}{4} = 0,25$ e $\sqrt{0,25} = 0,5 = \frac{1}{2}$.

Capítulo 3

A Pesquisa de Campo

Este capítulo tem por objetivo apresentar a metodologia utilizada na realização do presente estudo. Para tal, apresenta-se a caracterização da pesquisa e dos sujeitos envolvidos, a metodologia utilizada e análise dos resultados da pesquisa. Iniciamos com a caracterização da pesquisa.

3.1 Caracterização da pesquisa

A pesquisa caracteriza-se por uma abordagem qualitativa, de acordo com a perspectiva de Bogdan e Biklen (2013).

> 1. Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. (...) 2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. (...) 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. (...) 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. (...) 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN & BIKLEN, 2013, p.47-51).

A abordagem qualitativa utilizada nesta pesquisa seguiu os moldes de Bogdan e Biklen (2013), pois trata-se de uma pesquisa realizada diretamente em escolas, os dados foram recolhidos em palavras e atenção aos significados produzidos.

A pesquisa foi dividida em três etapas: elaboração de avaliação diagnóstica segundo descritores do SAEB e BNCC, aplicação de avaliação diagnóstica nas escolas e análise dos resultados sobre a aprendizagem de frações com especial atenção às dificuldades verificadas.

3.2 Caracterização dos sujeitos

O objetivo deste estudo foi diagnosticar as dificuldades apresentadas por alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental de seis escolas públicas do Espírito Santo, em relação à aprendizagem de frações.

A pesquisa diagnóstica foi realizada em seis escolas públicas do Espírito Santo, em turmas de 6º e 7º anos, pertencentes a redes de ensino e municípios distintos. Participaram da pesquisa um total de 397 alunos, sendo 188 do 6º ano do ensino fundamental e 209 do 7º ano do ensino fundamental.

Na primeira escola, EMEF Vercenílio da Silva Pascoal, da Prefeitura de Vitória, localizada no bairro Joana D'arc de Vitória - ES, participaram da pesquisa um total de 46 alunos pertencentes a duas turmas do turno vespertino, sendo 27 alunos da turma de 6º ano e 19 da turma de 7º ano.

Na segunda escola, EEEFM Maria da Paz Pimentel, escola estadual, localizada no bairro Centro de Fundão - ES, participaram da pesquisa um total de 35 alunos pertencentes a duas turmas do turno matutino, sendo 20 alunos da turma de 6º ano e 15 da turma de 7º ano.

Na terceira escola, ECEC Margarete Cruz Pereira, da Prefeitura de Cariacica, localizada no bairro Roda D'agua de Cariacica - ES, participaram da pesquisa um total de 12 alunos de uma turma de 7º ano. Trata-se de uma escola de campo de tempo integral.

Na quarta escola, EEEFM Francelina Carneiro Setúbal, escola estadual, localizada no bairro Itaparica de Vila Velha - ES, participaram da pesquisa um total de 53 alunos pertencentes a duas turmas do turno vespertino, sendo 22 alunos da turma de 6º ano e 31 da turma de 7º ano.

Na quinta escola, EMEF Orestes Souto Novaes, da Prefeitura de Viana, localizada no bairro Jucu de Viana - ES, participaram da pesquisa um total de 95 alunos pertencentes a quatro turmas do turno matutino, sendo 48 alunos de duas turmas de 6º ano e 47 de duas turmas de 7º ano.

Na sexta escola, EMEF Cidade Pomar, da Prefeitura da Serra, localizada no bairro Cidade Pomar da Serra - ES, participaram da pesquisa um total de 156 alunos pertencentes a seis turmas do turno matutino, sendo 71 alunos de três turmas de 6º ano e 85 de três turmas de 7º ano.

As avaliações diagnósticas aplicadas em turmas de mesma série das seis escolas foram iguais. Foram elaboradas e aplicadas duas avaliações, uma para as turmas de 6º ano e outra para as turmas de 7º ano, para que pudéssemos coletar os dados da pesquisa que descreveremos a seguir.

3.3 Metodologia

A proposta desta pesquisa é realizar uma investigação sobre as dificuldades no processo de aprendizagem de frações em alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental. Para isso foram elaboradas avaliações diagnósticas adequadas aos níveis de compreensão propostos pela BNCC e seguindo os descritores do SAEB, para aplicação aos alunos de 6º e 7º anos. Para a resolução das avaliações diagnósticas foram necessárias duas horas-aula.

Os resultados das avaliações diagnósticas serão analisados de forma qualitativa, por meio de uma investigação sobre as atividades e as respostas dadas pelos alunos às questões que compõem a avaliação.

3.4 Avaliação Diagnóstica

A fim de que se entenda como o processo de aprendizagem foi avaliado, foram elaboradas duas avaliações diagnósticas, em forma de questionários, uma para turmas de 6º ano e outra para turmas de 7º ano do ensino fundamental. Os questionários foram elaborados segundo os descritores do SAEB e a matriz de referência da BNCC.

O questionário do 6º ano do ensino fundamental é composto de 15 questões optativas e discursivas. A avaliação diagnóstica foi aplicada nas escolas em Julho de 2019. Identificou-se que em todas as escolas participantes da pesquisa, o conteúdo de frações já havia sido trabalhado no ano letivo de 2019, portanto, os alunos já tinham conhecimento sobre todos os descritores previstos para o 6º ano do ensino fundamental. Mas, ainda assim, a avaliação tinha por objetivo verificar a qualidade da aprendizagem das frações nos alunos investigados.

O questionário do 7º ano do ensino fundamental é composto de 20 questões optativas e discursivas. E, assim como realizado nas turmas de 6º ano, a avaliação foi aplicada em Julho de 2019, após os alunos terem estudado frações no ano letivo vigente.

Os descritores contemplados na avaliação do 6º ano foram:

I) Descritores do SAEB 5º ano:

- D21 – Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.
- D22 – Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.
- D24 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

- D25 – Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração.
- D26 – Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).

II) Descritores do SAEB 9º ano:

- D21 - Reconhecer as diferentes representações de um número racional.
- D22 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
- D23 - Identificar frações equivalentes.
- D25 - Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição e subtração).
- D26 - Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição e subtração).

Os descritores contemplados na avaliação do 7º ano foram:

I) Descritores do SAEB 9º ano:

- D21 - Reconhecer as diferentes representações de um número racional.
- D22 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
- D23 - Identificar frações equivalentes.
- D25 - Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
- D26 - Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

3.4.1 Análise dos resultados da Avaliação Diagnóstica

A seguir faremos uma análise qualitativa dos resultados obtidos nas avaliações diagnósticas aplicadas nas seis escolas pesquisadas.

A análise dos resultados será apresentada separadamente para cada ano pesquisado. Iniciaremos apresentando a avaliação diagnóstica aplicada ao 6º ano e, na sequência, serão analisadas as questões individualmente, relacionando-as com seus respectivos descritores, tabulando o desempenho das turmas e analisando respostas dadas pelos alunos às questões. O mesmo será realizado para a avaliação diagnóstica aplicada nas turmas de 7º ano.

No final, apresentaremos uma análise geral quanto ao desempenho das turmas, dificuldades apresentadas e níveis de conhecimento sobre frações verificados ao longo da análise da avaliação diagnóstica.

3.4.1.1 Avaliação Diagnóstica do 6º Ano

A tabela a seguir mostra os descritores do SAEB 5º ano e 9º ano cobrados e as questões associadas a cada descritor.

Tabela 3.1: Descritores SAEB na Avaliação Diagnóstica do 6º Ano

Matriz de Referência do SAEB 5º Ano	**Matriz de Referência do SAEB 9º Ano**	**Descritor**	**Questões**
D21	D21	Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.	1, 2, 3, 4 e 5
D22		Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.	8
D24	D22	Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.	9 e 10
D26		Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).	15
	D23	Identificar frações equivalentes.	6 e 7
	D26	Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição e subtração).	11, 12, 13 e 14

A avaliação diagnóstica aplicada nas turmas de 6º ano foi:

Figura 3.1: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

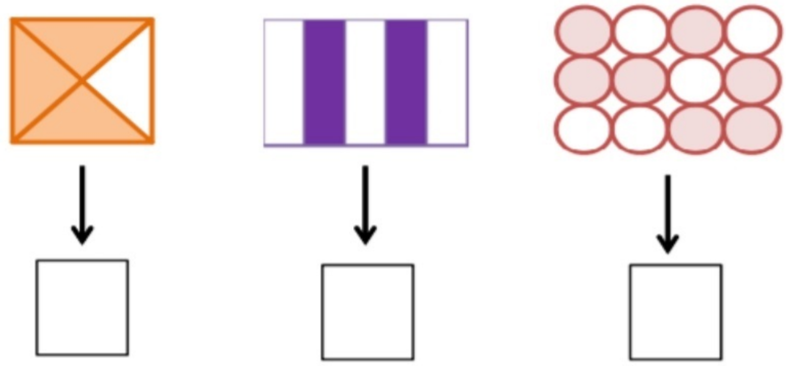
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PROFMAT

<u>ATIVIDADE DIAGNÓSTICA DE FRAÇÕES – 6º ANO</u>

Esta atividade faz parte de uma pesquisa de mestrado em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, da aluna Michele Benincá, sobre o ensino de frações na Educação Básica.

1) Considere cada figura como um inteiro e indique a fração da parte colorida:



2) Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate do mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{1}{3}$ de seu chocolate e Paulo comeu $\frac{2}{3}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Justifique sua resposta representando, geometricamente, as duas situações.

3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7} =$ ______________________________

b) $\frac{3}{10} =$ ______________________________

c) $\frac{5}{26} =$ ______________________________

d) $\frac{7}{100} =$ ______________________________

4) Assinale a alternativa composta apenas por frações próprias:

a) $\frac{5}{2}\ e\ \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{10} e\ \frac{2}{5}$

c) $\frac{5}{2}\ e\ \frac{7}{7}$

d) $\frac{3}{6}\ e\ \frac{50}{20}$

5) Toda fração imprópria pode ser escrita como número misto. A fração imprópria $\frac{7}{3}$ pode também ser escrita na forma mista em qual das alternativas abaixo:

a) $2\frac{1}{3}$

b) $3\frac{4}{5}$

c) $1\frac{1}{2}$

d) $3\frac{1}{3}$

6) Qual é a fração equivalente a $\frac{15}{20}$ que tem numerador 27?

a) $\frac{27}{30}$

b) $\frac{27}{9}$

c) $\frac{27}{36}$

d) $\frac{27}{100}$

7) Qual a forma irredutível da fração $\frac{150}{210}$?

a) $\frac{15}{21}$

b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{35}{70}$

8) Compare as frações abaixo utilizando um dos sinais: >, < ou =.

a) $\frac{1}{7}$ ____ $\frac{2}{14}$

b) $\frac{3}{2}$ ____ $\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ ____ $\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{4}$ ____ $\frac{3}{12}$

9) Sara fez um bolo para seus filhos e o repartiu em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo foi consumida?

a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

10) João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

a) 9 km

b) 10 km

c) 12 km

d) 15 km

11) Uma caixa de bolacha pesa $\frac{3}{4}$ kg. Qual é o peso de 8 caixas?

a) 6 kg

b) 12 kg

c) 10 kg

d) 5 kg

12) A dona Angélica tem 5 xícaras de balas que ela vai servir no lanche para um grupo de crianças. Cada porção é de $\frac{1}{4}$ de xícara. Quantas crianças vão receber uma porção de balas no lanche?

a) 12

b) 20

c) 15

d) 16

13). Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? ___________________.

Cálculos:

b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? ___________________.

Cálculos:

14) No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{3}{5}$ dos apartamentos, o que corresponde a 12 apartamentos. Quantos apartamentos há, ao todo, nesse prédio?

Cálculos:

15) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

a) 30

b) 40

c) 50

d) 60

Obrigada por sua participação!

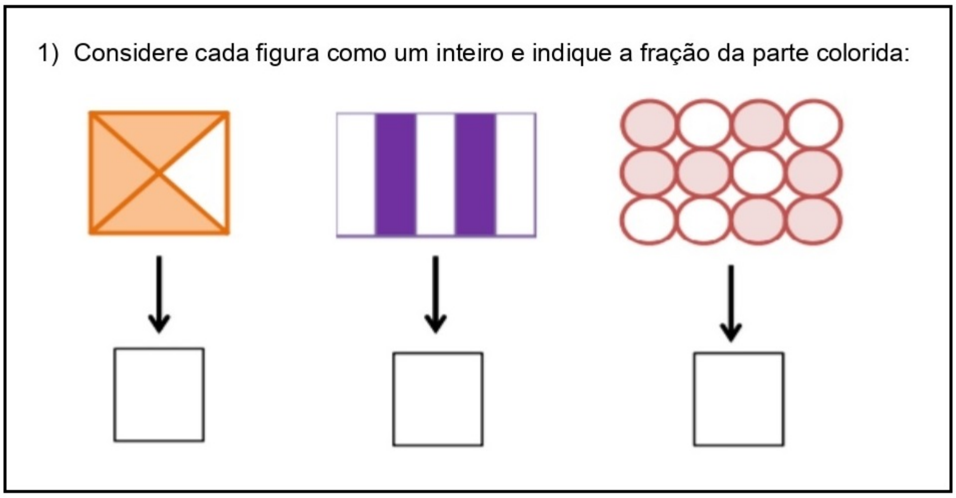
Michele Benincá

A seguir analisaremos as questões presentes na avaliação diagnóstica, na ordem em que foram propostas aos alunos.

Como o objetivo deste estudo é analisar os resultados apresentados pelos alunos nas questões presentes na avaliação diagnóstica e não comparar o desempenho de alunos das diferentes escolas, os resultados das cinco escolas serão apresentados juntos. Portanto, em todas as questões, os resultados apresentam o desempenho dos 188 alunos participantes da pesquisa.

A figura em sequência apresenta a questão 1 da avaliação.

Figura 3.2: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 1.



Os resultados desta questão foram:

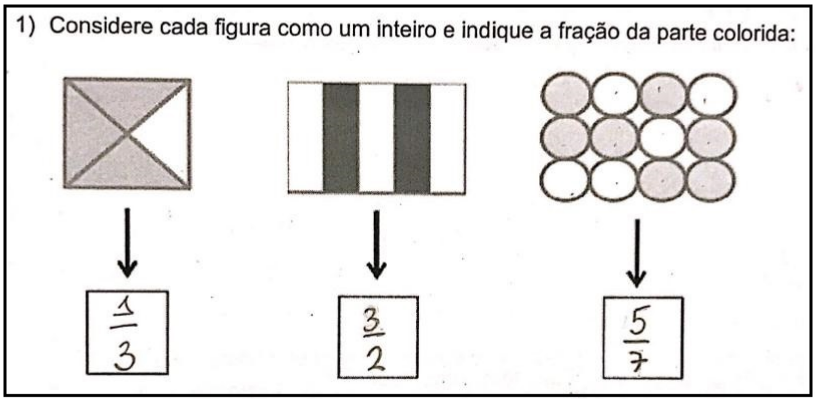
Tabela 3.2: Distribuição das Respostas - Questão 1 - 6º Ano

	3 Acertos	2 Acertos	1 Acerto	Nenhum Acerto
Frequência	28	35	12	113
Percentual	15%	19%	6%	60%

Nesta questão, o aluno deveria identificar a fração representada em cada figura. Percebe-se com os resultados que a maior parte dos alunos apresenta dificuldades em interpretar as representações geométricas de frações.

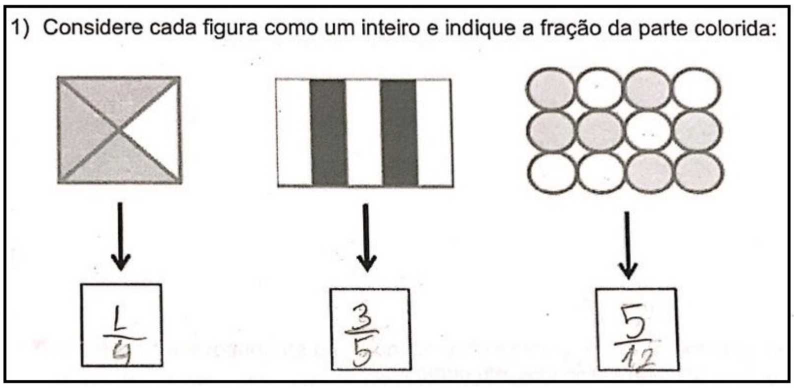
A figura abaixo apresenta a resolução mais comum feita pelos alunos. Percebe-se uma dificuldade no reconhecimento da fração como parte-todo. Neste caso, o aluno entendeu como parte colorida as partes brancas e considerou como o todo apenas a parte acinzentada.

Figura 3.3: Resolução do Aluno A para a Questão 1.



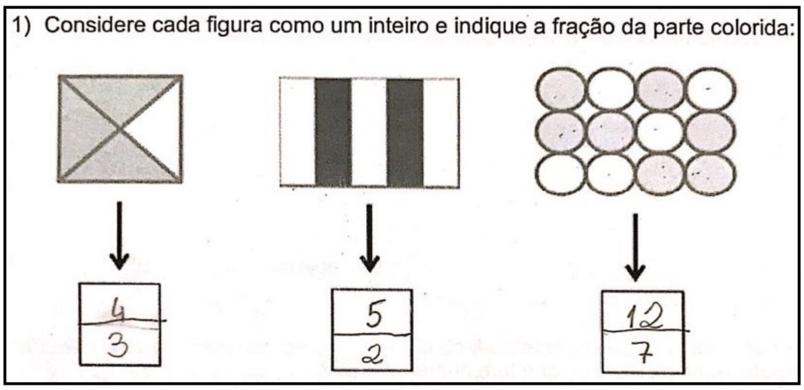
Na figura abaixo apresenta-se outra resolução comum, onde o aluno conseguiu identificar o todo como sendo a quantidade de pedaços em que a figura (o inteiro) foi dividida, porém considerou como parte colorida os pedaços brancos, quando deveria ter considerado a parte acinzentada.

Figura 3.4: Resolução do Aluno B para a Questão 1.



Uma quantidade menor de alunos soube identificar corretamente a parte colorida e o todo, porém, ao representar esta relação na forma de fração, trocou a ordem dos números, colocando o total de pedaços sobre a quantidade de partes coloridas.

Figura 3.5: Resolução do Aluno C para a Questão 1.



A resposta correta para esta questão é $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{12}$ respectivamente.

A figura em sequência apresenta a questão 2 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.6: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 2.

2) Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate do mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{1}{3}$ de seu chocolate e Paulo comeu $\frac{2}{3}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Justifique sua resposta representando, geometricamente, as duas situações.

Os resultados desta questão foram:

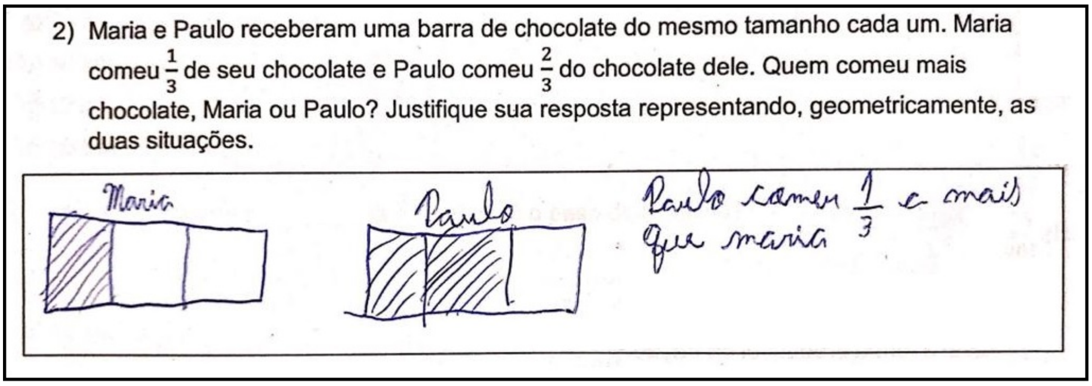
Tabela 3.3: Distribuição das Respostas - Questão 2 - 6º Ano

	Acerto	Erro
Frequência	103	85
Percentual	55%	45%

Nesta questão foram avaliadas duas habilidades: comparação de frações e a representação geométrica. Percebe-se um melhor desempenho dos alunos nessa questão em relação à questão anterior, evidenciando que alguns alunos são capazes de construir uma representação geométrica para as frações, mas têm dificuldade em identificar a fração representada por um desenho. Dos alunos que não acertaram esta questão, alguns conseguiram comparar algebricamente as frações, percebendo que Paulo comeu mais chocolate do que Maria, pois $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, porém nenhum deles conseguiu representar geometricamente as frações de chocolate.

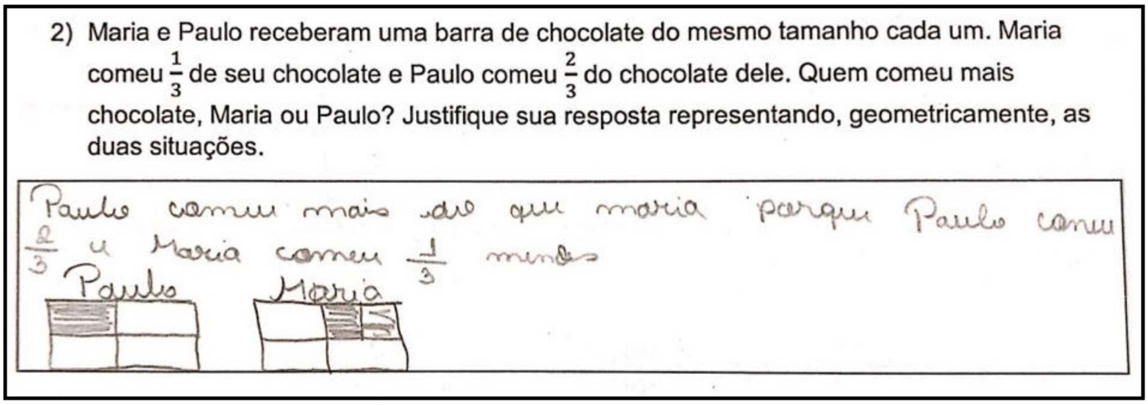
Abaixo apresenta-se a resolução de um aluno que respondeu corretamente à questão. Além de representar geometricamente as frações e compará-las de forma correta, o aluno ainda apresentou a diferença entre as partes que cada pessoa comeu do chocolate.

Figura 3.7: Resolução do Aluno D para a Questão 2.



A figura abaixo representa a resolução mais comum dos alunos que não responderam corretamente. O aluno realizou corretamente a comparação entre as frações e apresentou a diferença entre as quantidades de chocolate comidas por Paulo e Maria, porém não soube representar com figuras as frações.

Figura 3.8: Resolução do Aluno E para a Questão 2.



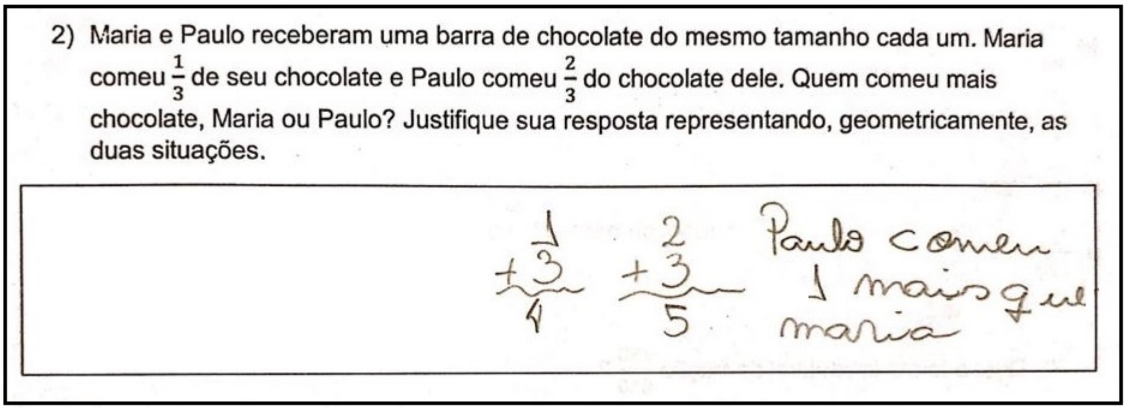
2) Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate do mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{1}{3}$ de seu chocolate e Paulo comeu $\frac{2}{3}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Justifique sua resposta representando, geometricamente, as duas situações.

Paulo comeu mais do que maria porque Paulo comeu $\frac{2}{3}$ e Maria comeu $\frac{1}{3}$ menos

Paulo Maria

Temos ainda alguns alunos que realizaram cálculos algébricos diferentes para comparar as frações. Este aluno somou numerador e denominador das frações e comparou os resultados. Esta forma de cálculo, apesar de diferente, poderia induzir ao erro se os denominadores das frações fossem números distintos, por exemplo, para as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$, teríamos $1 + 4 = 5$ e $2 + 3 = 5$, logo poderíamos concluir que as frações são iguais, o que não é verdade. O aluno também não conseguiu representar geometricamente as frações.

Figura 3.9: Resolução do Aluno F para a Questão 2.

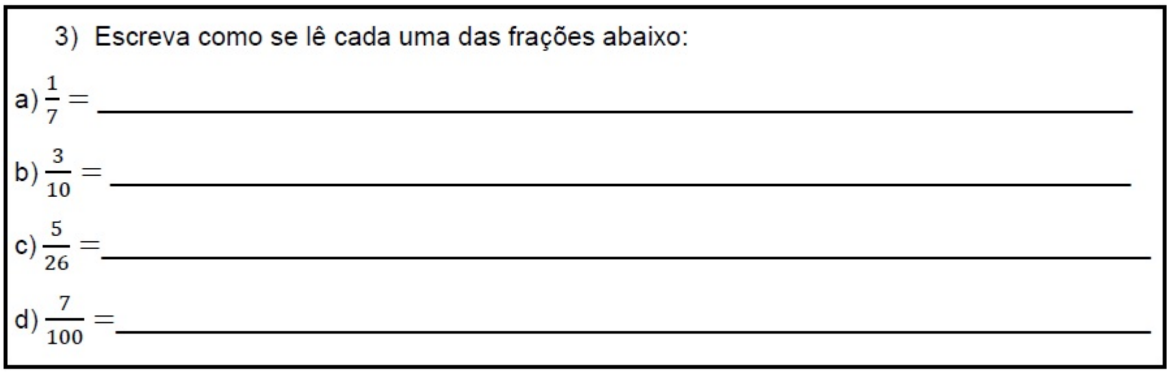


2) Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate do mesmo tamanho cada um. Maria comeu $\frac{1}{3}$ de seu chocolate e Paulo comeu $\frac{2}{3}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Justifique sua resposta representando, geometricamente, as duas situações.

$\begin{array}{r} 1 \\ +3 \\ \hline 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ +3 \\ \hline 5 \end{array}$ Paulo comeu 1 mais que maria

A figura em sequência apresenta a questão 3 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.10: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 3.



3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = __________

b) $\frac{3}{10}$ = __________

c) $\frac{5}{26}$ = __________

d) $\frac{7}{100}$ = __________

Os resultados desta questão foram:

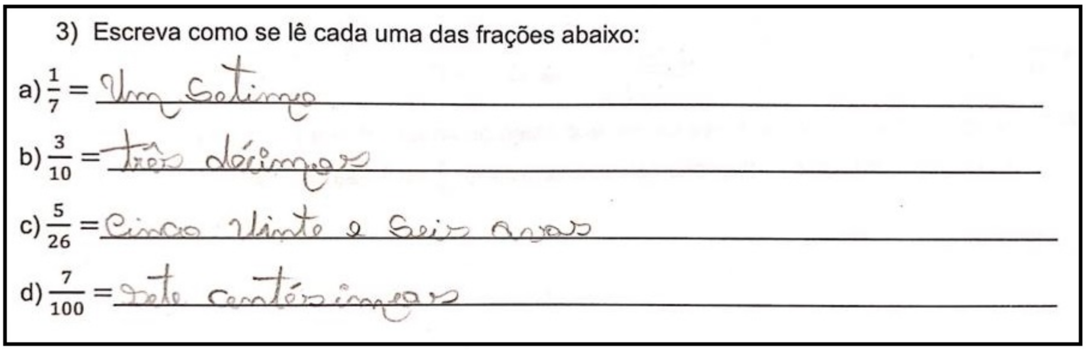
Tabela 3.4: Distribuição das Respostas - Questão 3 - 6º Ano

	4 Acertos	3 Acertos	2 Acertos	1 Acerto	Nenhum Acerto
Frequência	64	43	24	14	43
Percentual	34%	23%	13%	7%	23%

Nesta questão avaliou-se o conhecimento dos alunos sobre a nomenclatura das frações. Os resultados demonstraram que a maioria dos alunos tem conhecimento sobre a nomenclatura das frações, porém cerca de $\frac{1}{4}$ dos alunos não souberam escrever a nomenclatura correta para as frações propostas.

Abaixo apresenta-se a resposta de um aluno que escreveu corretamente a nomenclatura das frações.

Figura 3.11: Resolução do Aluno G para a Questão 3.



3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = Um sétimo

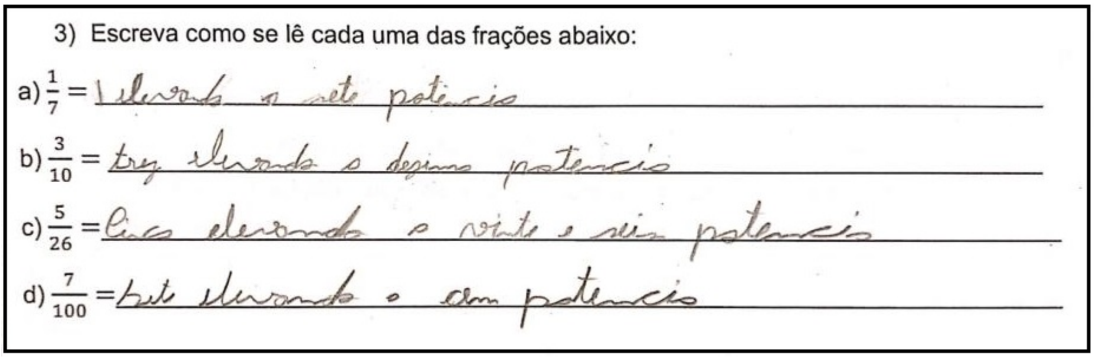
b) $\frac{3}{10}$ = três décimos

c) $\frac{5}{26}$ = Cinco vinte e seis avos

d) $\frac{7}{100}$ = sete centésimos

A figura a seguir mostra uma resolução comum a muitos alunos que responderam às questões de forma errada. Os alunos entenderam a representação de fração como uma potência, onde a base é o numerador e o expoente é o denominador.

Figura 3.12: Resolução do Aluno H para a Questão 3.



3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = 1 elevando a sete potência

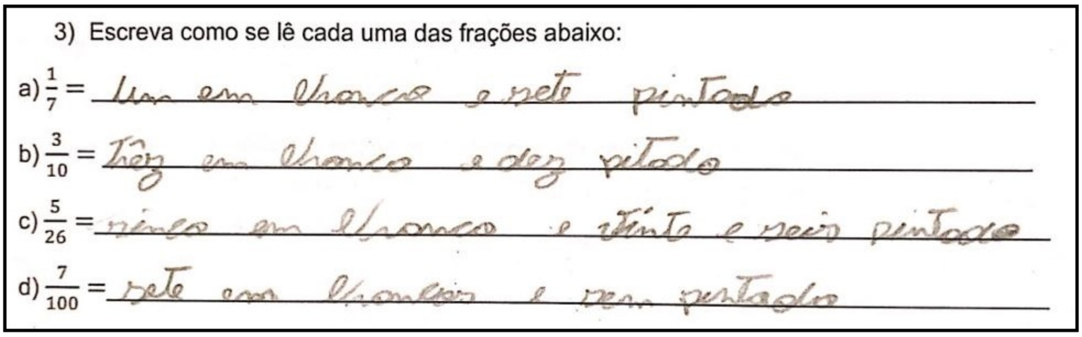
b) $\frac{3}{10}$ = trez elevando a dezima potencia

c) $\frac{5}{26}$ = cinco elevando a vinte e seis potencia

d) $\frac{7}{100}$ = sete elevando a cem potencia

Na resolução a seguir o aluno tenta relacionar a fração à sua representação geométrica, mas comete erro ao identificar a parte pintada e a parte em branco.

Figura 3.13: Resolução do Aluno I para a Questão 3.



3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = Um em branco e sete pintado

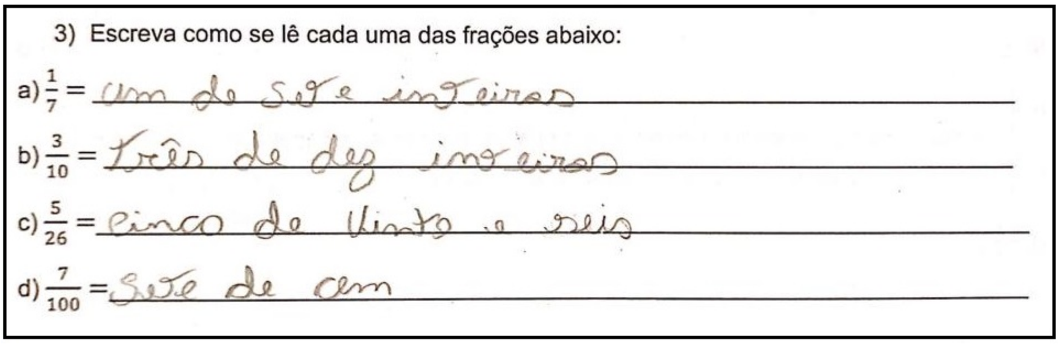
b) $\frac{3}{10}$ = Trêz em branco e dez pitado

c) $\frac{5}{26}$ = cinco em branco e vinte e seis pintado

d) $\frac{7}{100}$ = sete em branco e cem pintado

Na figura abaixo, vê-se que o aluno utilizou uma linguagem muito comum para descrever as frações, apesar de não ter utilizado a nomenclatura pedida. Essa linguagem é usualmente utilizada em sala de aula para representar frações: "uma parte de sete", "um por sete", "um sobre sete", e isso induziu o raciocínio do aluno para descrever as frações desta forma.

Figura 3.14: Resolução do Aluno J para a Questão 3.



3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = um de sete inteiros

b) $\frac{3}{10}$ = Três de dez inteiros

c) $\frac{5}{26}$ = cinco de vinte e seis

d) $\frac{7}{100}$ = sete de cem

A figura em sequência apresenta a questão 4 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.15: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 4.

4) Assinale a alternativa composta apenas por frações próprias:

a) $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{10}$ e $\frac{2}{5}$

c) $\frac{5}{2}$ e $\frac{7}{7}$

d) $\frac{3}{6}$ e $\frac{50}{20}$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.5: Distribuição das Respostas - Questão 4 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	11	106	35	11	25
Percentual	6%	56%	19%	6%	13%

Esta questão exigia que o aluno compreendesse o conceito de frações próprias. Frações próprias são as que apresentam o numerador menor do que o denominador. Portanto, a resposta correta é a letra b).

Nesta questão os alunos apenas assinalaram a resposta, não realizaram cálculos.

A figura em sequência apresenta a questão 5 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.16: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 5.

5) Toda fração imprópria pode ser escrita como número misto. A fração imprópria $\frac{7}{3}$ pode também ser escrita na forma mista em qual das alternativas abaixo:

a) $2\frac{1}{3}$

b) $3\frac{4}{5}$

c) $1\frac{1}{2}$

d) $3\frac{1}{3}$

Os resultados desta questão foram:

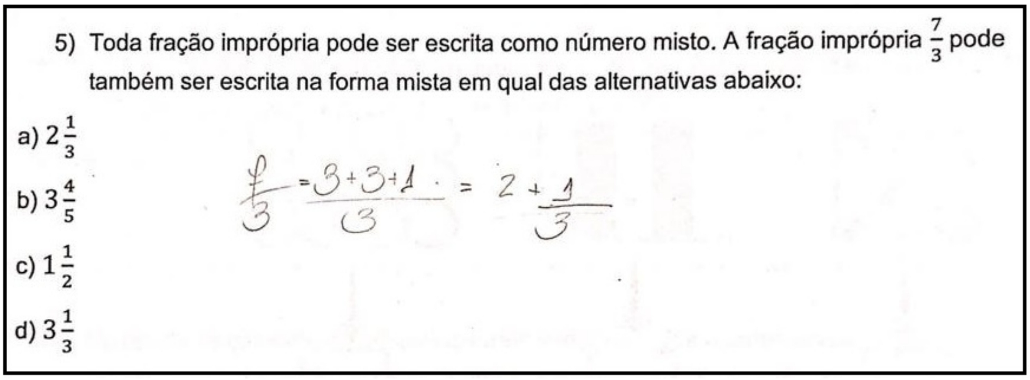
Tabela 3.6: Distribuição das Respostas - Questão 5 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	71	64	17	11	25
Percentual	38%	34%	9%	6%	13%

Para resolver esta questão os alunos deveriam conhecer frações impróprias, números mistos e saber realizar a transformação de uma representação para a outra. Os resultados mostram o desconhecimento de muitos alunos sobre o conceito de frações mistas. Isto decorre do desconhecimento do conceito de frações, o que implica em dificuldades de aprendizagem de conteúdos subsequentes.

A figura abaixo apresenta a resolução de um aluno que respondeu corretamente à questão. O aluno escreveu o numerador 7 como $3+3+1$ e identificou que a fração $\frac{3}{3} = 1$ inteiro.

Figura 3.17: Resolução do Aluno K para a Questão 5.


5) Toda fração imprópria pode ser escrita como número misto. A fração imprópria $\frac{7}{3}$ pode também ser escrita na forma mista em qual das alternativas abaixo:

a) $2\frac{1}{3}$

b) $3\frac{4}{5}$

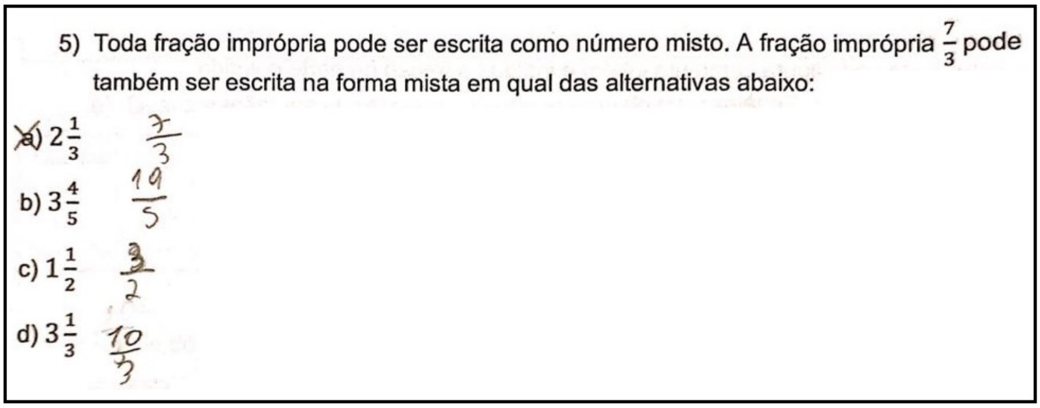
c) $1\frac{1}{2}$

d) $3\frac{1}{3}$

$\frac{7}{3} = \frac{3+3+1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Na resolução abaixo o aluno encontrou a resposta correta, transformando as frações mistas das opções de resposta em frações impróprias, porém não conseguiu realizar a transformação da fração imprópria em mista.

Figura 3.18: Resolução do Aluno L para a Questão 5.


5) Toda fração imprópria pode ser escrita como número misto. A fração imprópria $\frac{7}{3}$ pode também ser escrita na forma mista em qual das alternativas abaixo:

a) $2\frac{1}{3}$ $\frac{7}{3}$

b) $3\frac{4}{5}$ $\frac{19}{5}$

c) $1\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

d) $3\frac{1}{3}$ $\frac{10}{3}$

Os alunos que responderam de maneira incorreta à questão, não esboçaram cálculos, logo não será possível uma análise de seu raciocínio.

A figura em sequência apresenta a questão 6 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.19: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 6.

6) Qual é a fração equivalente a $\frac{15}{20}$ que tem numerador 27?

a) $\frac{27}{30}$

b) $\frac{27}{9}$

c) $\frac{27}{36}$

d) $\frac{27}{100}$

Os resultados desta questão foram:

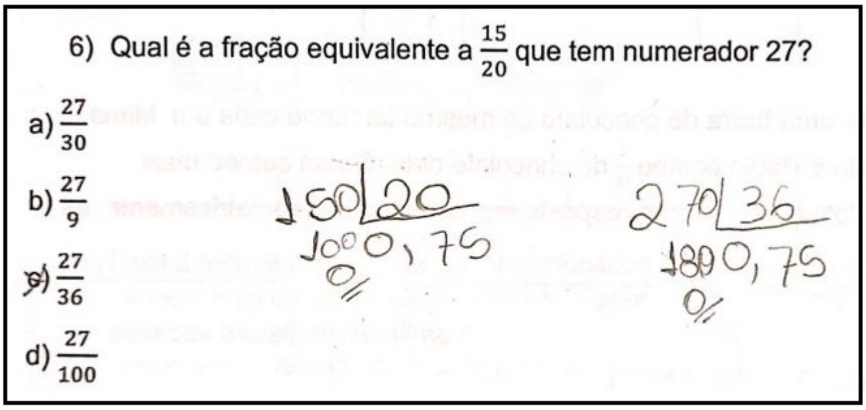
Tabela 3.7: Distribuição das Respostas - Questão 6 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	32	36	45	39	36
Percentual	17%	19%	24%	21%	19%

Analisando as resoluções dos alunos identificou-se que 184 alunos não realizaram cálculos para responder à questão e os que fizeram, não utilizaram simplificação de frações ou o processo que equivalência para solucionar o problema. Verificou-se que nenhum aluno apresentou conhecimento quanto ao processo de equivalência de frações.

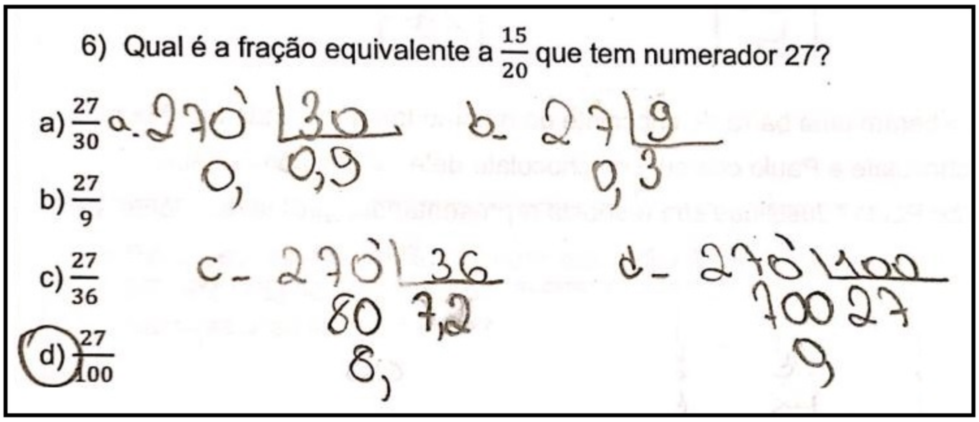
Dos 45 alunos que acertaram, apenas um efetuou cálculos para obter a resposta. Todos os alunos que efetuaram contas realizaram a divisão das frações para comparar os seus valores decimais. A figura abaixo apresenta a resolução deste aluno.

Figura 3.20: Resolução do Aluno M para a Questão 6.



Os demais alunos que realizaram cálculos procederam do mesmo modo que o aluno acima, tentaram encontrar o valor decimal de cada fração através da divisão do numerador pelo denominador, porém encontraram muita dificuldade na divisão dos números com quocientes decimais.

Figura 3.21: Resolução do Aluno N para a Questão 6.



Percebe-se com essa questão a tendência dos alunos em trabalhar com números decimais. Possivelmente, estes se sentem mais familiarizados e seguros para operar com números decimais e, por isso, procederam de forma a utilizar decimais ao invés de frações. E isso é reflexo do uso da calculadora no cotidiano do aluno.

Uma maneira de realizar este cálculo é:

$$\frac{15^{\div 5}}{20_{\div 5}} = \frac{3^{\times 9}}{4_{\times 9}} = \frac{27}{36}.$$

A figura em sequência apresenta a questão 7 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.22: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 7.

7) Qual a forma irredutível da fração $\frac{150}{210}$?

a) $\frac{15}{21}$

b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{35}{70}$

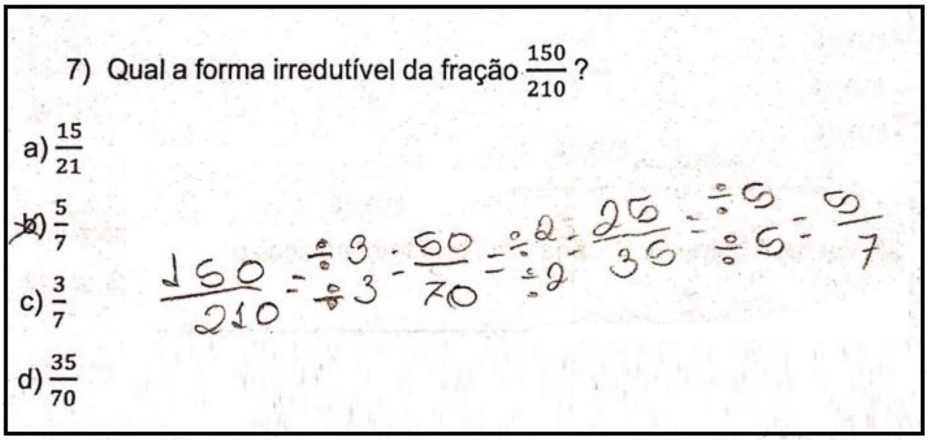
Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.8: Distribuição das Respostas - Questão 7 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	68	21	11	49	39
Percentual	36%	11%	6%	26%	21%

Esta questão exige novamente o conhecimento de simplificação e noção de equivalência de frações. Apenas 11% dos alunos responderam corretamente esta questão. A figura abaixo apresenta a solução de um aluno que efetuou o cálculo de forma correta:

Figura 3.23: Resolução do Aluno P para a Questão 7.


7) Qual a forma irredutível da fração $\frac{150}{210}$?

a) $\frac{15}{21}$

b) $\frac{5}{7}$

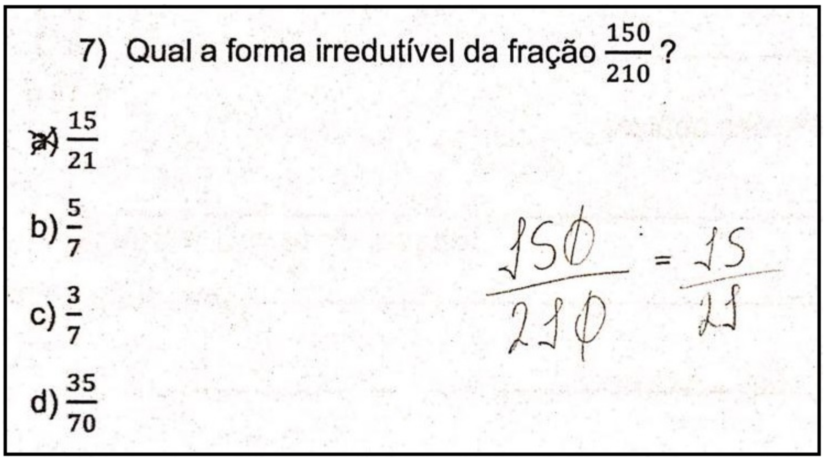
c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{35}{70}$

$\frac{150}{210} = \frac{\div 3}{\div 3} = \frac{50}{70} = \frac{\div 2}{\div 2} = \frac{25}{35} = \frac{\div 5}{\div 5} = \frac{5}{7}$

Na figura abaixo tem-se a resolução de muitos alunos que optaram pela letra a) como resposta. Os alunos conseguiram identificar que ambos os números 150 e 210 são divisíveis por 10, pois terminam em 0, mas não conseguiram identificar que 15 e 21 são divisíveis por 3.

Figura 3.24: Resolução do Aluno Q para a Questão 7.



7) Qual a forma irredutível da fração $\frac{150}{210}$?

a) $\frac{15}{21}$

b) $\frac{5}{7}$

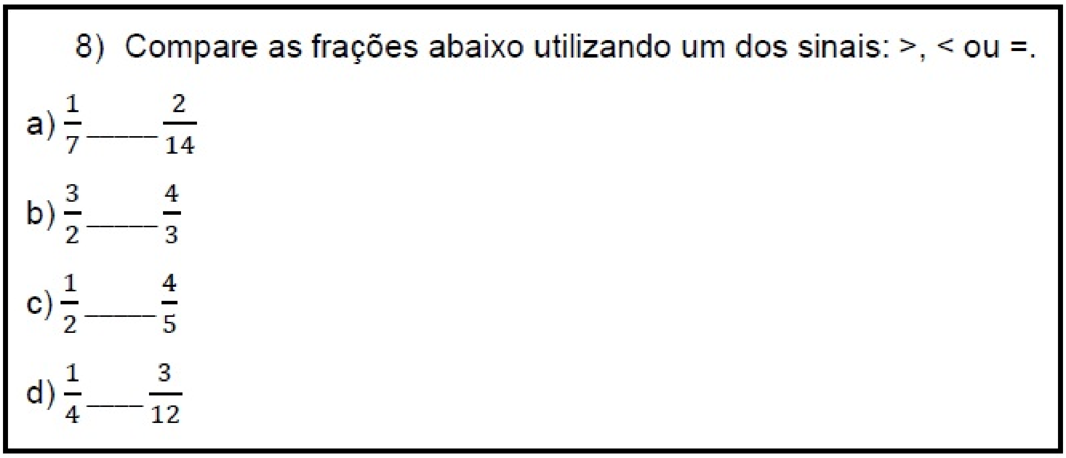
c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{35}{70}$

$\frac{150}{210} = \frac{15}{21}$

A figura em sequência apresenta a questão 8 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.25: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 8.



8) Compare as frações abaixo utilizando um dos sinais: >, < ou =.

a) $\frac{1}{7}$ ____ $\frac{2}{14}$

b) $\frac{3}{2}$ ____ $\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ ____ $\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{4}$ ____ $\frac{3}{12}$

Os resultados desta questão foram:

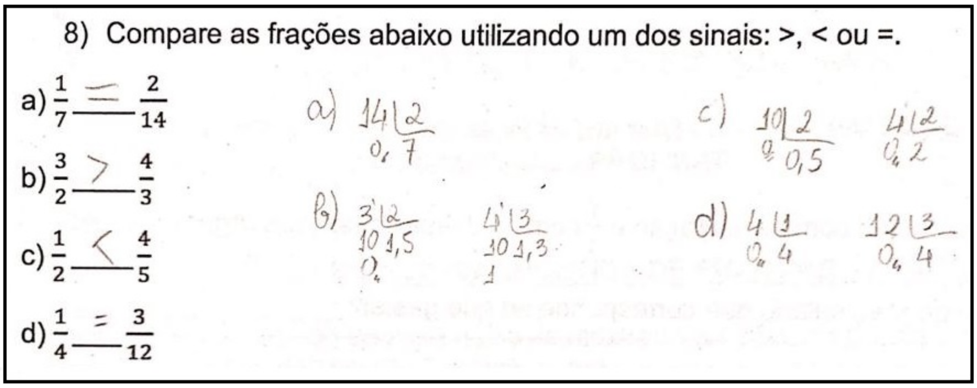
Tabela 3.9: Distribuição das Respostas - Questão 8 - 6º Ano

	4 Acertos	3 Acertos	2 Acertos	1 Acertos	Nenhum Acerto
Frequência	4	8	32	75	69
Percentual	2%	4%	17%	40%	37%

Como consequência das dificuldades apresentadas em equivalência de frações, os alunos não conseguiram comparar corretamente as frações dadas. Nenhum aluno tentou compará-las através da representação geométrica.

A figura abaixo apresenta a solução do único aluno que comparou corretamente as frações. Repare que o aluno utilizou a divisão de frações para encontrar o valor decimal correspondente e poder compará-las. Outros alunos tentaram realizar o cálculo desta forma, porém não conseguiram efetuar as divisões de forma correta.

Figura 3.26: Resolução do Aluno R para a Questão 8.


8) Compare as frações abaixo utilizando um dos sinais: >, < ou =.

a) $\frac{1}{7}$ = $\frac{2}{14}$

b) $\frac{3}{2}$ > $\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ < $\frac{4}{5}$

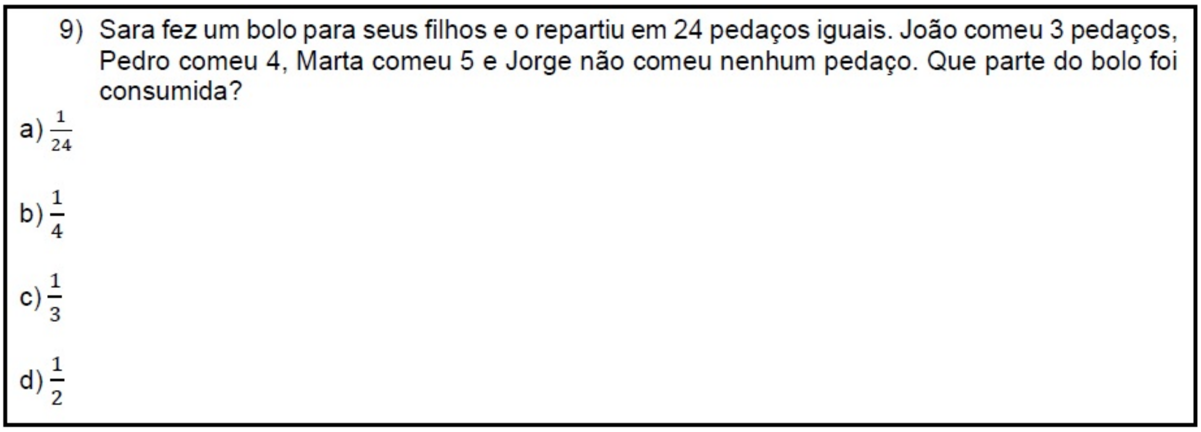
d) $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{12}$

A resolução desta questão pode ser feita através do cálculo do MMC que transformará as frações em equivalentes de mesmo denominador ou através do produto dos meios pelos extremos. A solução por este segundo método é:

a) $1 \cdot 14 = 2 \cdot 7 \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{2}{14}$.
b) $3 \cdot 3 > 2 \cdot 4 \Rightarrow \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$.
c) $1 \cdot 5 < 2 \cdot 4 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.
d) $1 \cdot 12 = 4 \cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.

A figura em sequência apresenta a questão 9 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.27: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 9.


9) Sara fez um bolo para seus filhos e o repartiu em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo foi consumida?

a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

Os resultados desta questão foram:

Esta questão busca trabalhar com o significado de fração parte-todo. Além disso, é necessário o conhecimento de simplificação de frações.

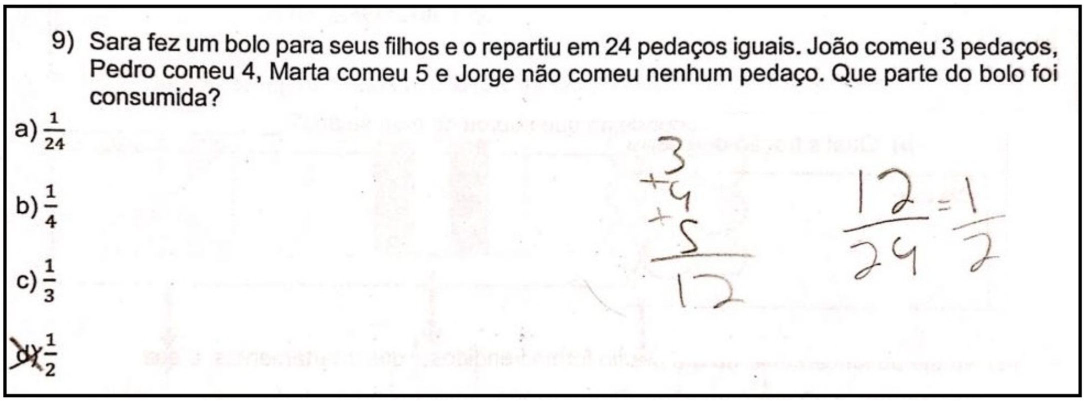
Tabela 3.10: Distribuição das Respostas - Questão 9 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	92	28	15	28	25
Percentual	49%	15%	8%	15%	13%

Alguns alunos apresentaram soluções algébricas enquanto outros utilizaram desenhos para representar a parte comida do bolo.

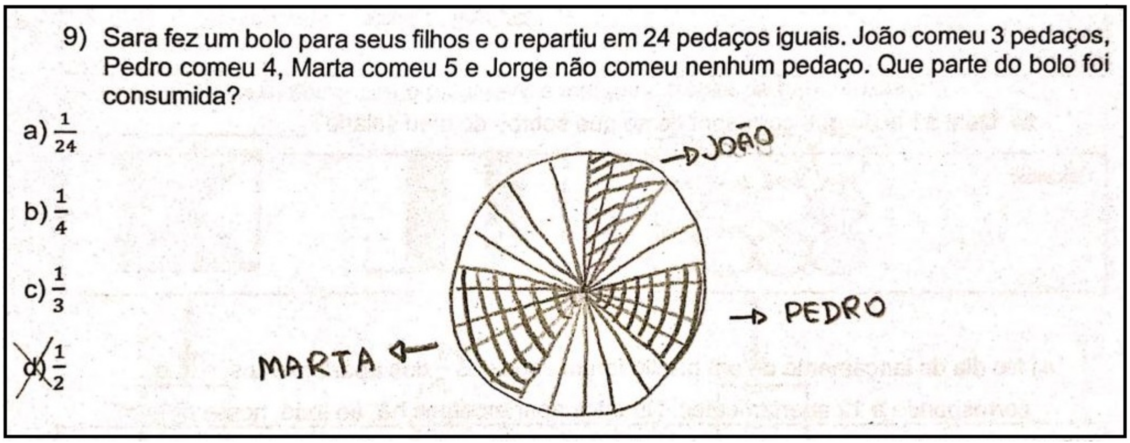
A figura abaixo apresenta a resolução correta de um aluno que utilizou apenas cálculo algébrico:

Figura 3.28: Resolução do Aluno S para a Questão 9.



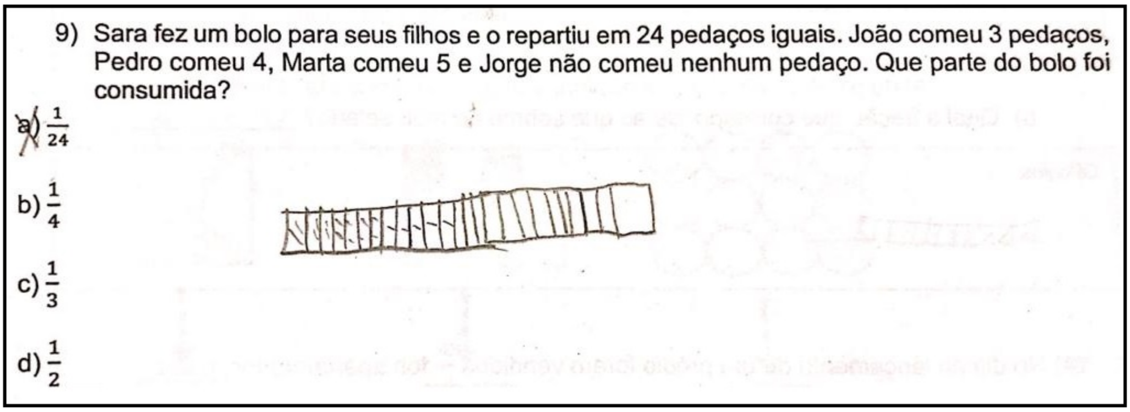
E na figura abaixo temos a solução de um aluno que realizou a representação geométrica.

Figura 3.29: Resolução do Aluno T para a Questão 9.



Muitos alunos erraram a questão por não conseguirem simplificar a fração $\frac{12}{24}$. Então, encontrando este resultado, assinalaram a opção a), pois era a única com denominador 24. As figuras a seguir apresentam resoluções algébricas e geométricas de alunos que assinalaram a resposta indevida.

Figura 3.30: Resolução do Aluno U para a Questão 9.


9) Sara fez um bolo para seus filhos e o repartiu em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo foi consumida?

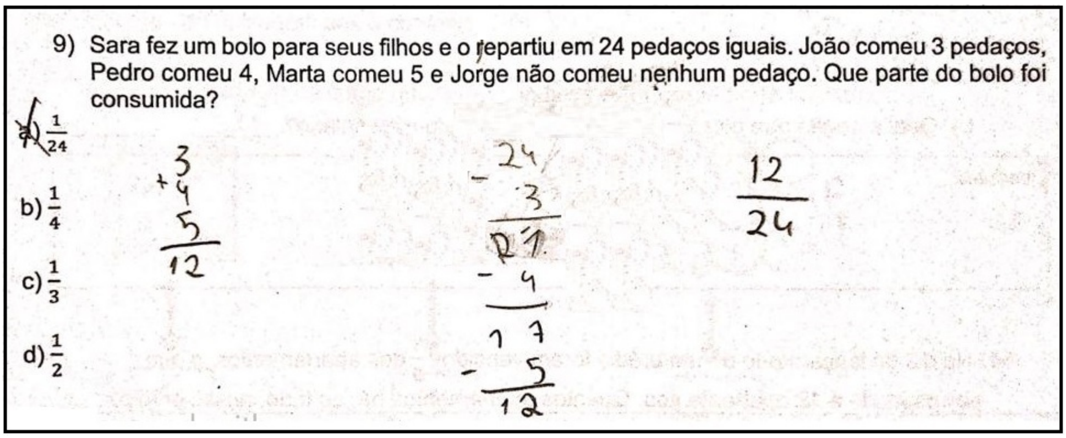
a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

Figura 3.31: Resolução do Aluno V para a Questão 9.


9) Sara fez um bolo para seus filhos e o repartiu em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo foi consumida?

a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

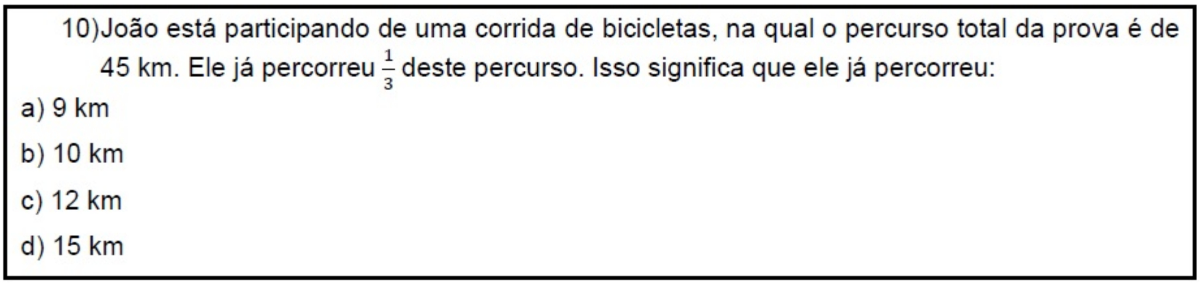
$3 + 4 + 5 = 12$

$24 - 3 = 21$; $21 - 4 = 17$; $17 - 5 = 12$

$\frac{12}{24}$

A figura em sequência apresenta a questão 10 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.32: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 10.


10) João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

a) 9 km

b) 10 km

c) 12 km

d) 15 km

Os resultados desta questão foram:

O objetivo desta questão era saber se o aluno compreende o significado de fração de uma quantidade.

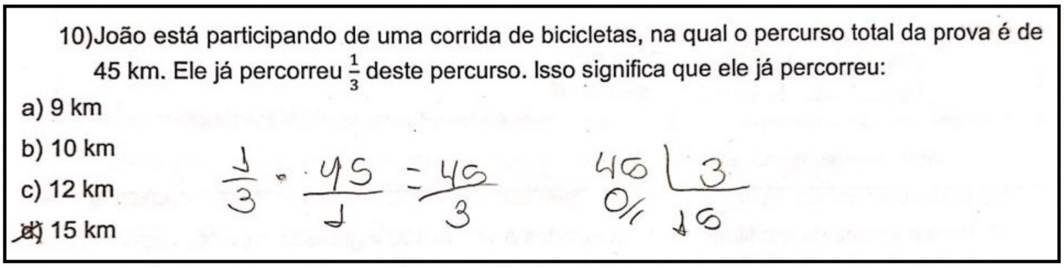
Tabela 3.11: Distribuição das Respostas - Questão 10 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	17	23	56	71	21
Percentual	9%	12%	30%	38%	11%

Repetindo os resultados das questões anteriores, vemos que a maioria dos alunos respondeu de forma incorreta esta questão e destes, nenhum apresentou cálculo para indicar o raciocínio utilizado na solução.

A figura a seguir apresenta uma resolução comum aos alunos que responderam corretamente à questão.

Figura 3.33: Resolução do Aluno X para a Questão 10.


10)João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

a) 9 km

b) 10 km

c) 12 km

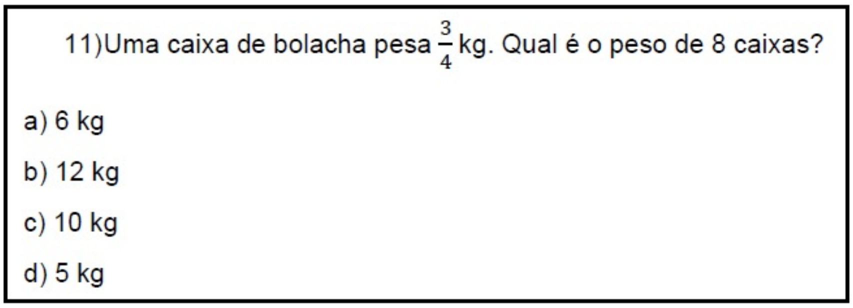
d) 15 km

$\frac{1}{3} \cdot \frac{45}{1} = \frac{45}{3}$

45 | 3
0/ 15

A figura em sequência apresenta a questão 11 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.34: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 11.


11)Uma caixa de bolacha pesa $\frac{3}{4}$ kg. Qual é o peso de 8 caixas?

a) 6 kg

b) 12 kg

c) 10 kg

d) 5 kg

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.12: Distribuição das Respostas - Questão 11 - 6º Ano

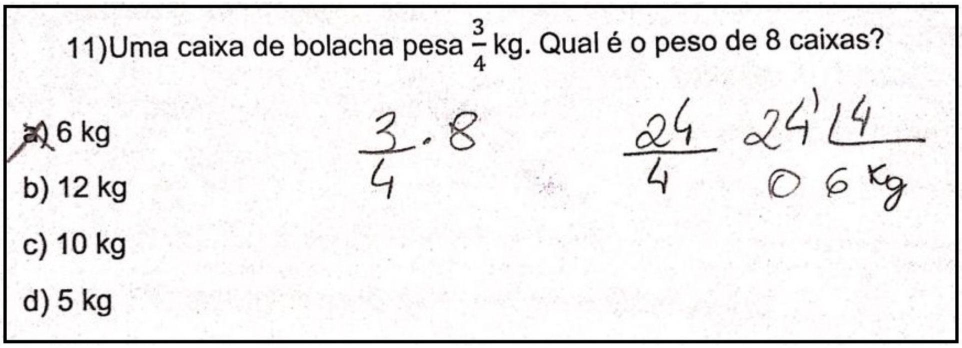
	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	60	68	24	12	24
Percentual	32%	36%	13%	6%	13%

Esta questão buscava verificar se o aluno compreende e consegue calcular a adição de frações. A questão também pode ser resolvida por uma multiplicação de uma fração por um inteiro.

Novamente, os alunos que erraram a questão apenas assinalaram uma resposta sem apresentar os cálculos, impossibilitando a análise de seu raciocínio.

A figura abaixo apresenta uma solução muito comum entre os alunos que responderam corretamente. A resolução visa a multiplicação do peso da caixa por 8.

Figura 3.35: Resolução do Aluno Y para a Questão 11.



11)Uma caixa de bolacha pesa $\frac{3}{4}$ kg. Qual é o peso de 8 caixas?

a) 6 kg

b) 12 kg

c) 10 kg

d) 5 kg

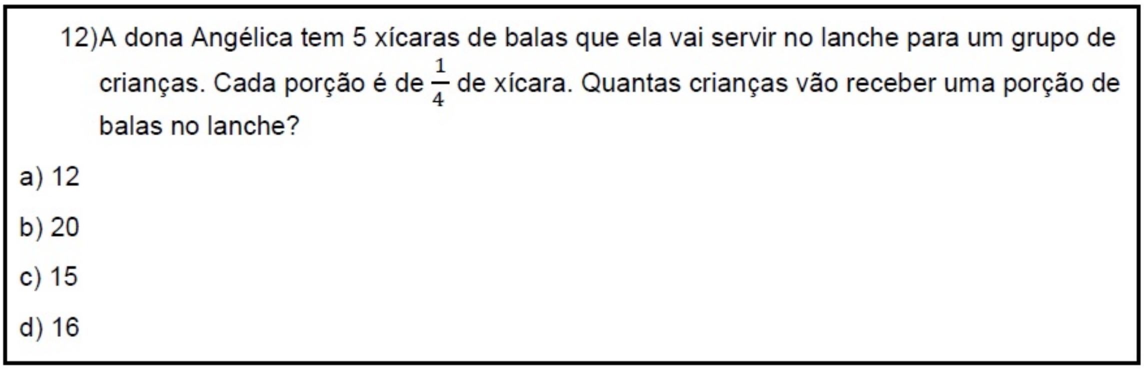
$\frac{3}{4} \cdot 8$ $\frac{24}{4}$ $24 \,|\, 4$ $0 \quad 6$ kg

A questão ainda pode ser resolvida por meio da adição de oito frações $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{24}{4}=6 \text{ kg}.$$

A figura em sequência apresenta a questão 12 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.36: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 12.



12)A dona Angélica tem 5 xícaras de balas que ela vai servir no lanche para um grupo de crianças. Cada porção é de $\frac{1}{4}$ de xícara. Quantas crianças vão receber uma porção de balas no lanche?

a) 12

b) 20

c) 15

d) 16

Os resultados desta questão foram:

Esta questão pretendia explorar a divisão de um inteiro por uma fração, mas para isso o aluno precisaria compreender o significado de fração como parte do inteiro 5.

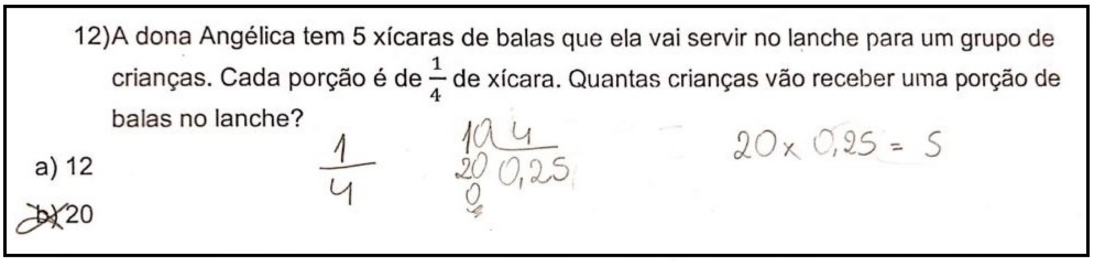
A figura a seguir apresenta a solução de um aluno que utilizou o valor decimal da fração $\frac{1}{4}$ para determinar a quantidade de porções. Para concluir a questão o aluno

Tabela 3.13: Distribuição das Respostas - Questão 12 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	56	56	28	13	35
Percentual	30%	30%	15%	7%	18%

utilizou as opções de resposta para encontra o total de porções, mas poderia ter operado uma divisão de 5 inteiros por $0,25$ ou $\frac{1}{4}$.

Figura 3.37: Resolução do Aluno W para a Questão 12.

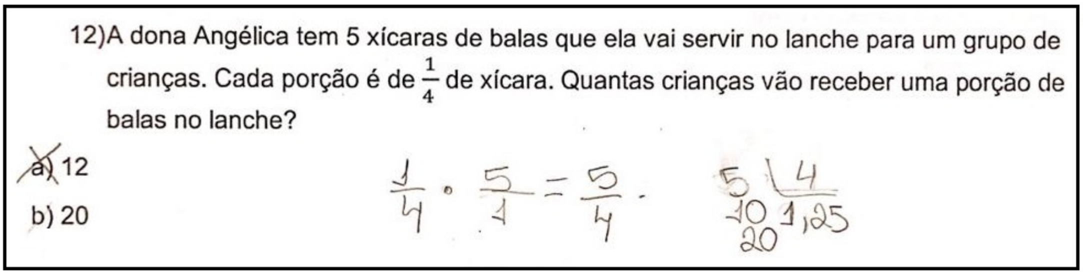

12)A dona Angélica tem 5 xícaras de balas que ela vai servir no lanche para um grupo de crianças. Cada porção é de $\frac{1}{4}$ de xícara. Quantas crianças vão receber uma porção de balas no lanche?

a) 12

b) 20

Abaixo apresentamos a solução comum aos alunos que sinalizaram como resposta a alternativa a). Este aluno interpretou que para a porção que correspondia a $\frac{1}{4}$ da xícara, quando atribuída a 5 xícaras, corresponderia a $\frac{1}{4}$ de 5 xícaras. Porém este cálculo resulta em $1,25$ e, desta forma, os alunos marcaram a opção a) 12.

Figura 3.38: Resolução do Aluno Z para a Questão 12.


12)A dona Angélica tem 5 xícaras de balas que ela vai servir no lanche para um grupo de crianças. Cada porção é de $\frac{1}{4}$ de xícara. Quantas crianças vão receber uma porção de balas no lanche?

a) 12

b) 20

A figura em sequência apresenta a questão 13 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.39: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 13.

13). Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? __________________.

Cálculos:

b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? __________________.

Cálculos:

Os resultados desta questão foram:

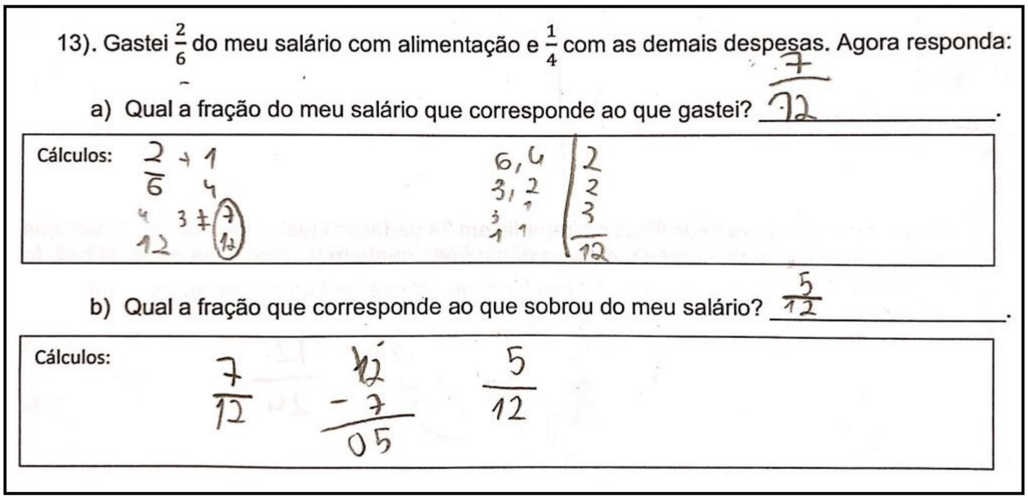
Tabela 3.14: Distribuição das Respostas - Questão 13 - 6º Ano

	2 Acertos	1 Acerto	Nenhum Acerto
Frequência	8	8	172
Percentual	4%	4%	92%

O objetivo desta questão é realizar cálculos de adição e subtração de frações mediante problema contextualizado. A baixa acertividade nesta questão reflete a dificuldade dos alunos em interpretar enunciados e associar o conceito matemático devido. A maioria dos alunos não conseguiu resolver a questão e não apresentou nenhum cálculo.

As duas imagens a seguir apresentam as soluções de dois alunos que acertaram a questão. Ambos entenderam que a pergunta a) tratava da soma das frações. Já na pergunta b), apenas o primeiro respondeu corretamente. Os dois resolveram de maneiras distintas. O primeiro realizou a subtração das frações enquanto o outro contou com o auxílio da representação geométrica.

Figura 3.40: Resolução do Aluno A1 para a Questão 13.


13). Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

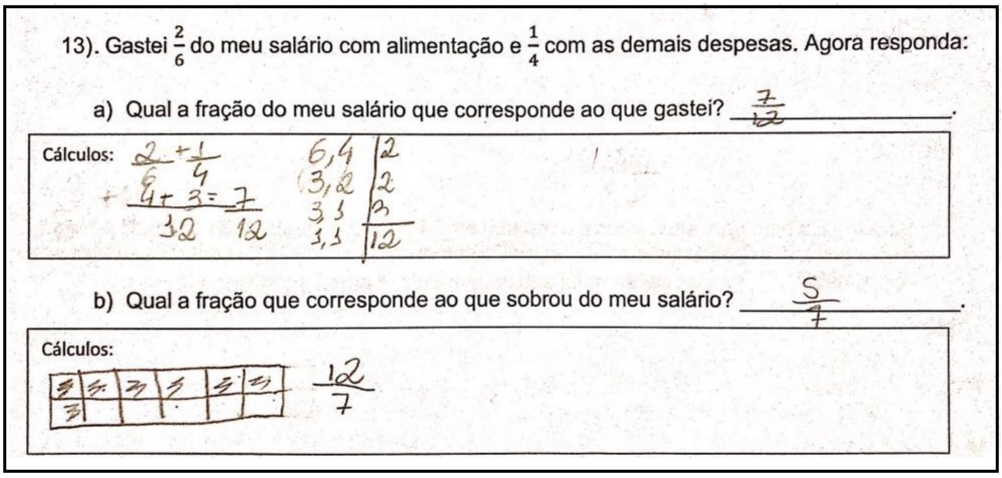
a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? $\frac{7}{12}$

Cálculos:

b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? $\frac{5}{12}$

Cálculos:

Figura 3.41: Resolução do Aluno A2 para a Questão 13.


13). Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? $\frac{7}{12}$

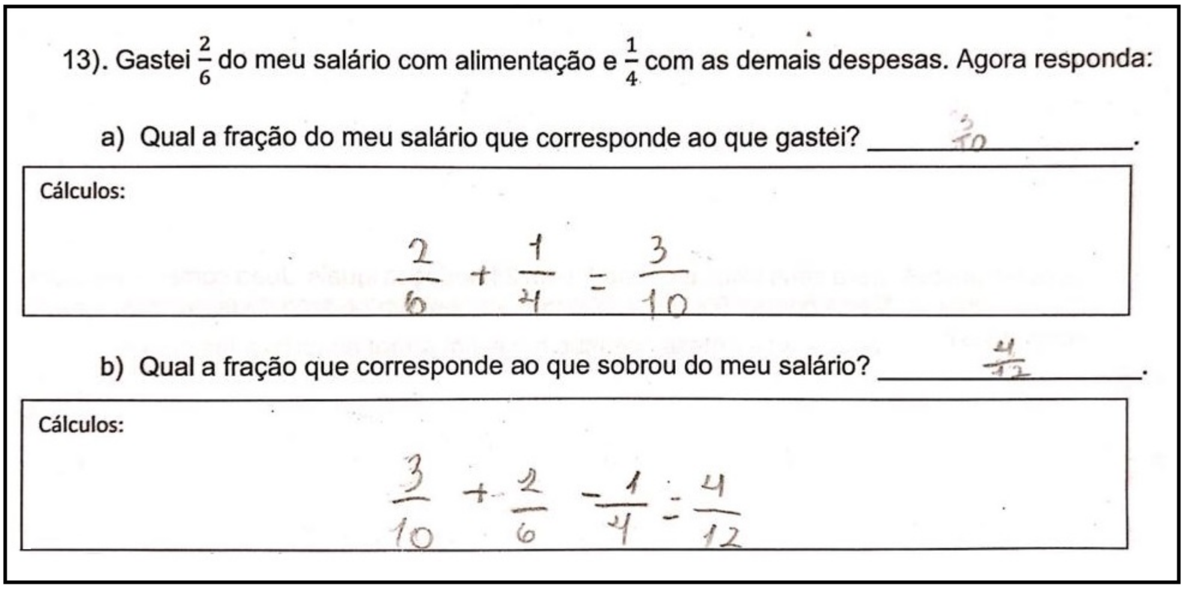
Cálculos:

b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? $\frac{5}{7}$

Cálculos:

A seguir temos uma resolução identificada um algumas avaliações. Os alunos conseguiram interpretar corretamente o enunciado do item a), identificando que tratava-se de uma soma das frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{4}$. Porém, desconheciam o processo de adição de frações com denominadores distintos e somaram os numeradores e os denominadores. No item b) a interpretação foi errada e os alunos repetiram o mesmo processo para adição e subtração de frações.

Figura 3.42: Resolução do Aluno A3 para a Questão 13.



13). Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? $\frac{3}{10}$.

Cálculos:

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{3}{10}$$

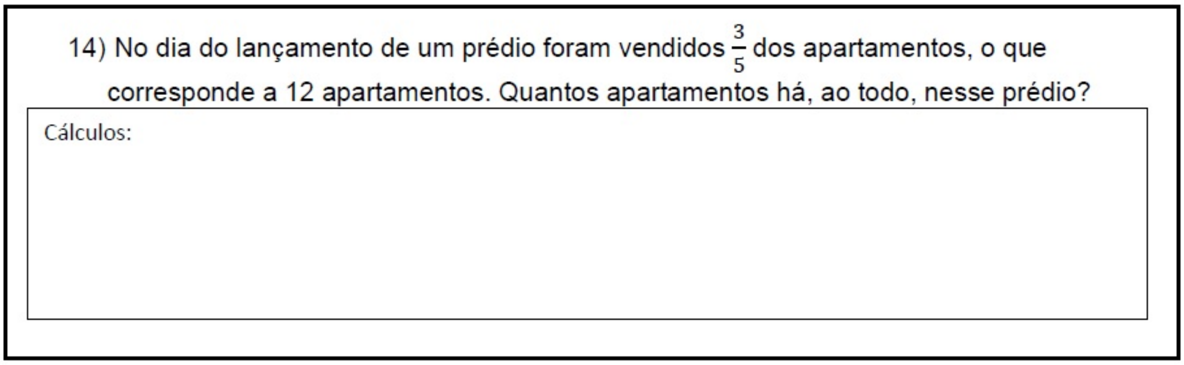
b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? $\frac{4}{12}$.

Cálculos:

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12}$$

A figura em sequência apresenta a questão 14 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.43: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 14.



14) No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{3}{5}$ dos apartamentos, o que corresponde a 12 apartamentos. Quantos apartamentos há, ao todo, nesse prédio?

Cálculos:

Os resultados desta questão foram:

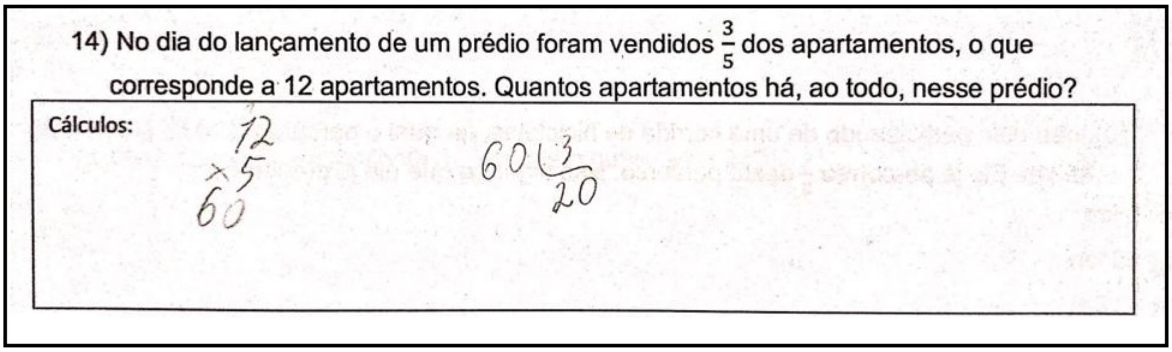
Tabela 3.15: Distribuição das Respostas - Questão 14 - 6º Ano

	Acerto	Erro
Frequência	17	171
Percentual	9%	91%

Nesta questão o aluno deveria entender a equivalência entre a fração $\frac{3}{5}$ e a quantidade 12 de apartamentos. Com isso seria possível descrever quantos apartamentos correspondem a $\frac{1}{5}$ para então obter o total de apartamentos. Por tratar-se de uma questão mais complexa, apenas quatro alunos conseguiram resolvê-la corretamente.

A figura abaixo apresenta a resolução de um aluno que interpretou o problema de forma algébrica.

Figura 3.44: Resolução do Aluno A4 para a Questão 14.


14) No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{3}{5}$ dos apartamentos, o que corresponde a 12 apartamentos. Quantos apartamentos há, ao todo, nesse prédio?

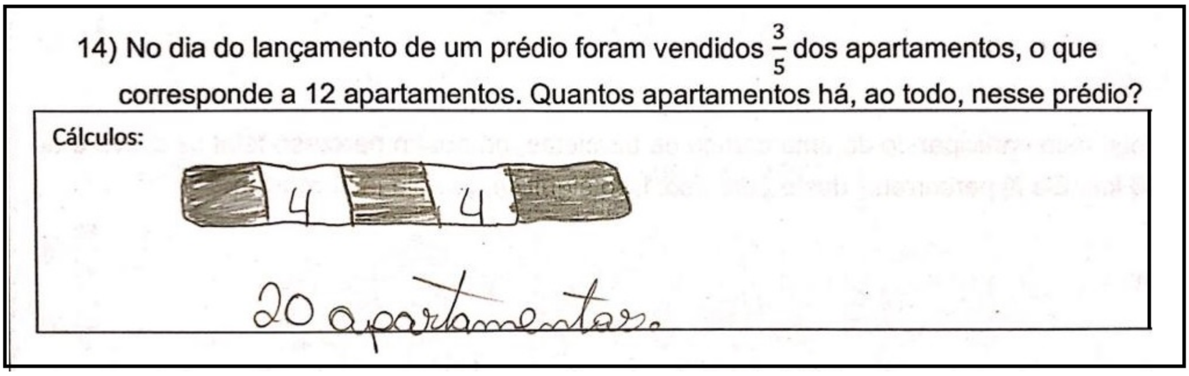
Cálculos:

12
×5
60

60 | 3
20

A seguir apresentamos uma solução geométrica realizada pelo aluno. Com a representação através de desenho o aluno concluiu que $\frac{1}{5}$ equivale a 4 apartamentos e conseguiu responder corretamente à questão.

Figura 3.45: Resolução do Aluno A5 para a Questão 14.


14) No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{3}{5}$ dos apartamentos, o que corresponde a 12 apartamentos. Quantos apartamentos há, ao todo, nesse prédio?

Cálculos:

4 4

20 apartamentos

A figura em sequência apresenta a questão 15 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.46: Avaliação Diagnóstica do 6º Ano - Questão 15.

15) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

a) 30

b) 40

c) 50

d) 60

Os resultados desta questão foram:

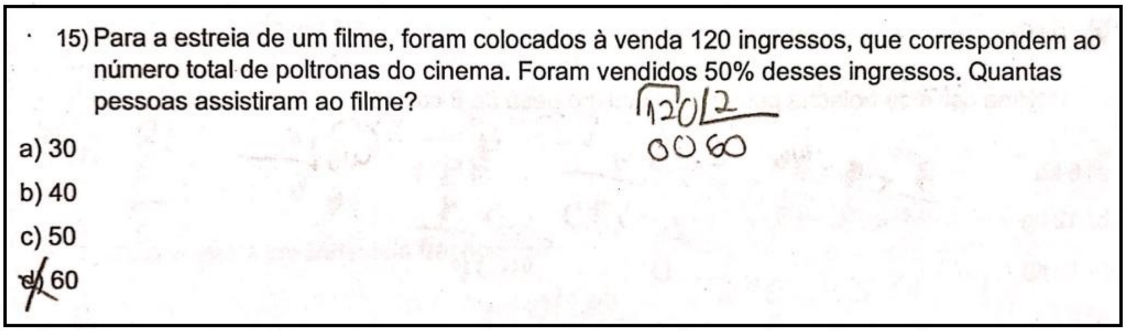
Tabela 3.16: Distribuição das Respostas - Questão 15 - 6º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	4	28	28	92	36
Percentual	2%	15%	15%	49%	19%

Nesta questão esperava-se que o aluno compreendesse o conceito de porcentagem como uma fração com denominador 100 e fosse capaz de calcular a porcentagem de uma quantidade. Muitos alunos responderam corretamente à questão associando $50\% = \frac{50}{100}$ à metade de um valor.

A figura a seguir exemplifica esse raciocínio, pois o aluno encontrou a resposta apenas dividindo 120 por 2, ou seja, interpretando 50% à metade de 120.

Figura 3.47: Resolução do Aluno A6 para a Questão 15.


15) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

120 | 2

00 60

a) 30

b) 40

c) 50

~~d)~~ 60

Considerando que todos os alunos participantes da pesquisa haviam estudado os conceitos abordados na avaliação diagnóstica no ano letivo de aplicação da prova, os resultados demonstraram que o conteúdo de frações, incluindo seu significado, representações, operações e propriedades não foram bem assimiladas. Os alunos apresentaram dificuldades conceituais e desconhecimento dos diferentes significados de fração. Sem esse entendimento, torna-se difícil avançar no estudo de frações e compreender os demais conteúdos a ela associados.

Na avaliação, observou-se que os alunos apresentaram dificuldade em reconhecer a fração descrita por um desenho, onde muitos conseguiram representar geometricamente uma fração. Apesar de conseguir descrever uma fração como um desenho, os alunos não conseguem interpretar um desenho dado para associá-lo a uma fração.

Quando comparam frações com mesmo denominador, os alunos conseguem estabelecer corretamente uma relação de ordem, porém apresentam dificuldades em comparar frações com denominadores diferentes.

Quanto à nomenclatura e a classificação de frações como própria, imprópria e mista, os alunos apresentaram bons conhecimentos, porém grande parte dos alunos não foi capaz de transformar frações impróprias em números mistos. Isto retrata o desconhecimento do conceito de fração e sua relação com o inteiro.

Os alunos demonstraram pouco domínio nos processos de simplificação e equivalência de frações, preferindo descobrir o valor decimal relacionado à fração para fazer a comparação entre a fração dada no enunciado e as opções de respostas. Mesmo optando pela divisão do numerador pelo denominador, os alunos não souberam realizar corretamente a divisão com quociente decimal.

Quando foi necessário calcular a fração de uma quantidade, a maior parte dos alunos apresentou dificuldade. Muitos sequer conseguiram apresentar um raciocínio no papel, o que reforça o total desconhecimento do significado de uma fração e a relação com o inteiro.

Problemas contextualizados onde frações representavam quantidades ou parte de inteiros foram um verdadeiro desafio para os alunos e estes demonstraram dificuldades na resolução dos mesmos. Os alunos não compreendem a fração como parte de um inteiro e não conseguem associar esta representação como uma medida.

Na questão de porcentagem, os alunos conseguiram associar 50% como metade, já que 50 corresponde à metade de 100, porém não foi possível perceber se caso a porcentagem fosse outra, por exemplo, 39%, se os alunos seriam capazes de calcular.

Percebeu-se com a análise da avaliação diagnóstica uma recorrência no uso de representação decimal para as frações. Muitos alunos desconhecem os procedimentos de cálculos, simplificações, equivalência e representação geométrica de frações, mas conseguem, e preferem, associá-las a valores decimais. Esta prática decorre da grande influência das calculadoras na vida humana. A presença dos números decimais no cotidiano é mais perceptível do que as frações, fazendo com que os alunos sintam-se mais seguros para trabalhar com representações decimais em detrimento das fracionárias.

Em resumo, foram identificadas muitas dificuldades decorrentes do desconhecimento do conceito de fração e estes resultados evidenciam a aprendizagem deficitária deste conceito.

3.4.1.2 Avaliação Diagnóstica do 7º Ano

A avaliação diagnóstica aplicada nas turmas de 7º ano foi:

Figura 3.48: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

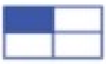
PROFMAT

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA DE FRAÇÕES – 7º ANO

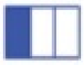
Esta atividade faz parte de uma pesquisa de mestrado em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, da aluna Michele Benincá, sobre o ensino de frações na Educação Básica.

1) Aprendemos que fracionar é dividir, desta forma, observe as partes pintadas das figuras, as quais estão representadas na forma de fração, número decimal e porcentagem. Verifique qual delas apresenta todas as igualdades e formas de representações corretas.

a)  $= \frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$

b)  $= \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{40}{100} = 40\%$

c)  $= \frac{3}{3} = 0{,}3 = \frac{30}{100} = 30\%$

d)  $= \frac{1}{2} = 0{,}2 = \frac{20}{100} = 30\%$

2) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7} =$ ____________________

b) $\frac{3}{10} =$ ____________________

c) $\frac{5}{26} =$ ____________________

d) $\frac{7}{100}$ =____

4) Assinale a alternativa composta apenas por frações próprias:

a) $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{10}$ e $\frac{2}{5}$

c) $\frac{5}{2}$ e $\frac{7}{7}$

d) $\frac{3}{6}$ e $\frac{50}{20}$

5) Toda fração imprópria pode ser escrita como número misto. A fração imprópria $\frac{7}{3}$ pode também ser escrita na forma mista em qual das alternativas abaixo:

a) $2\frac{1}{3}$

b) $3\frac{4}{5}$

c) $1\frac{1}{2}$

d) $3\frac{1}{3}$

6) Qual é a fração equivalente a $\frac{15}{20}$ que tem numerador 27?

a) $\frac{27}{30}$

b) $\frac{27}{9}$

c) $\frac{27}{36}$

d) $\frac{27}{100}$

7) Qual a forma irredutível da fração $\frac{150}{210}$?

a) $\frac{15}{21}$

b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{35}{70}$

8) Compare as frações abaixo utilizando um dos sinais: >, < ou =.

a) $\frac{1}{7}$ ____ $\frac{2}{14}$

b) $\frac{3}{2}$ ____ $\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ ____ $\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{4}$ ____ $\frac{3}{12}$

9) Sara fez um bolo para seus filhos e o repartiu em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo foi consumida?

a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

10) João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

a) 9 km

b) 10 km

c) 12 km

d) 15 km

11) Uma caixa de bolacha pesa $\frac{3}{4}$ kg. Qual é o peso de 8 caixas?

a) 6 kg

b) 12 kg

c) 10 kg

d) 5 kg

12) A dona Angélica tem 5 xícaras de balas que ela vai servir no lanche para um grupo de crianças. Cada porção é de $\frac{1}{4}$ de xícara. Quantas crianças vão receber uma porção de balas no lanche?

a) 12

b) 20

c) 15

d) 16

13) Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? ___________________.

Cálculos:

b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? ___________________.

Cálculos:

14) No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{3}{5}$ dos apartamentos, o que corresponde a 12 apartamentos. Quantos apartamentos há, ao todo, nesse prédio?

Cálculos:

15) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

a) 30

b) 40

c) 50

d) 60

16) Veja a relação de compras de Antônio e calcule quanto ele vai gastar.

Produto	Preço Unitário (R$)
1 lata de molho de tomate	2,50
1 pacote de café	3,85
1 lata de leite condensado	5,90
1 lata de óleo de soja	3,12
2 pacotes de bolachas	3,70
2 latas de leite em pó	8,23

a) R$ 29,50

b) R$ 30,90

c) R$ 40,00

d) R$ 39,23

17) Calcule o valor da expressão: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

Cálculos:

18) Calcule o valor da expressão: $\sqrt{\frac{16}{25}} - \sqrt{\frac{1}{9}} =$

Cálculos:

19) Um prédio tem 18,75 metros de altura. Um segundo prédio tem o triplo dessa altura. Qual é a altura do segundo prédio?

a) 56,25 metros

b) 53,25 metros

c) 57,75 metros

d) 54,50 metros

20) José comprou uma camiseta de R$ 80,00 e como ele fez o pagamento a vista conseguiu um desconto de 8%. Quanto José pagou pela camisa após o desconto?

a) R$ 59,10

b) R$ 74,60

c) R$ 73,60

d) R$ 71,56

Obrigada por sua participação!

Michele Benincá

A tabela a seguir mostra os descritores do SAEB 5º ano e 9º ano cobrados e as questões associadas a cada descritor.

Tabela 3.17: Descritores SAEB na Avaliação Diagnóstica do 7º Ano

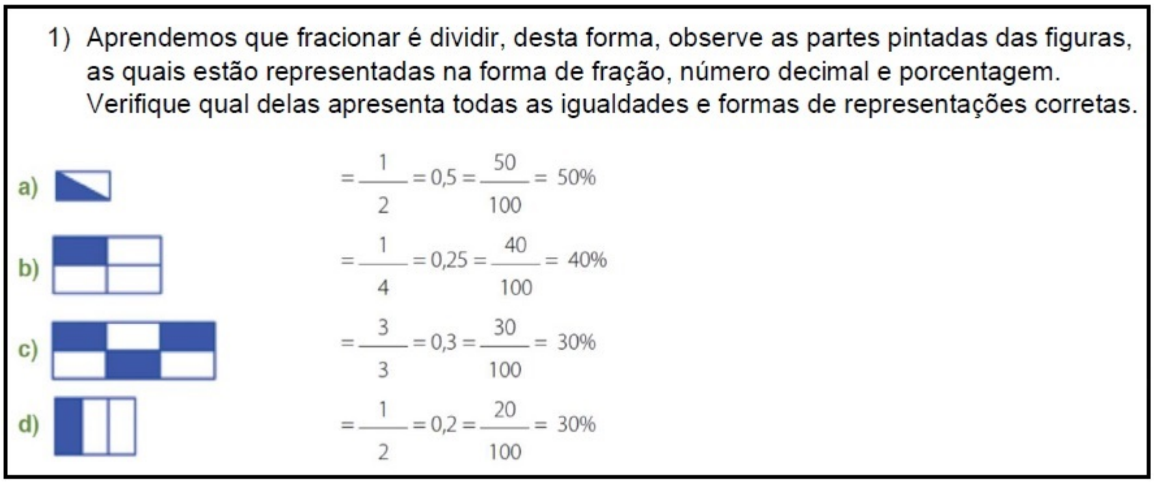
Matriz de Referência do SAEB 5º Ano	**Matriz de Referência do SAEB 9º Ano**	**Descritor**	**Questões**
D21	D21	Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.	1, 3, 4 e 5
D22		Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.	8
D24	D22	Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.	9 e 10
D25	D26	Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).	2, 16 e 19
D26		Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).	15 e 20
	D23	Identificar frações equivalentes.	6 e 7
	D26	Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição e subtração).	11, 12, 13, 14, 17 e 18

A seguir, analisaremos as questões presentes na avaliação diagnóstica, na ordem em que foram propostas aos alunos.

Do mesmo modo realizado na análise dos resultados da avaliação diagnóstica aplicada ao 6º ano, os resultados das cinco escolas serão apresentados juntos. Portanto, em todas as questões, os resultados apresentam o desempenho dos 209 alunos participantes da pesquisa.

A figura em sequência apresenta a questão 1 da avaliação.

Figura 3.49: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 1.



1) Aprendemos que fracionar é dividir, desta forma, observe as partes pintadas das figuras, as quais estão representadas na forma de fração, número decimal e porcentagem. Verifique qual delas apresenta todas as igualdades e formas de representações corretas.

a) $= \frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$

b) $= \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{40}{100} = 40\%$

c) $= \frac{3}{3} = 0{,}3 = \frac{30}{100} = 30\%$

d) $= \frac{1}{2} = 0{,}2 = \frac{20}{100} = 30\%$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.18: Distribuição das Respostas - Questão 1 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	112	16	45	0	15
Percentual	59%	9%	24%	0%	8%

Esta questão apresentava uma série de representações distintas para um mesmo valor fracionário: representação fracionária, forma decimal, fração centesimal, forma percentual e representação geométrica. Percebe-se que a maioria dos alunos respondeu corretamente esta questão. Como os alunos não representaram cálculos para esta questão, não foi possível identificar a motivação por opções de resposta diferentes do item a).

A figura em sequência apresenta a questão 2 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.50: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 2.

2) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

Os resultados desta questão foram:

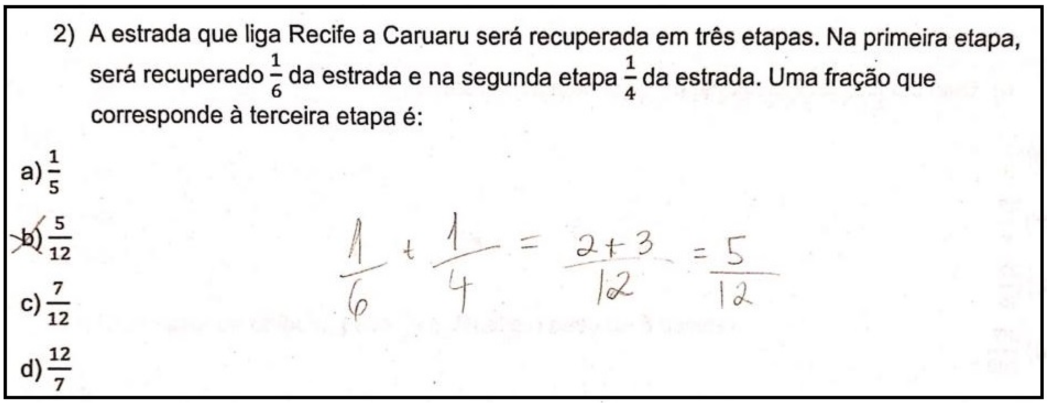
Tabela 3.19: Distribuição das Respostas - Questão 2 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	104	23	41	8	33
Percentual	50%	11%	20%	4%	15%

Nesta questão, os alunos deveriam compreender o conceito de fração como parte de um inteiro e saber realizar a adição de frações. A resposta correta para esta questão é a opção c) $\frac{7}{12}$. Grande parte dos alunos respondeu esta questão de forma incorreta, o que reforça nossa impressão de que os alunos não detêm conhecimento conceitual de fração. Era esperado que os alunos realizassem a adição das frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$, porém apenas um aluno realizou a operação de adição corretamente, apesar de não ter sinalizado a opção correta.

A figura abaixo apresenta a solução do único aluno que somou corretamente as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$. Surpreende o fato deste ter sido o único aluno que tentou resolver o problema através da adição das frações. Apesar de ter realizado a adição de frações corretamente, o aluno não interpretou o resultado final de maneira certa e assinalou a opção errada.

Figura 3.51: Resolução do Aluno B1 para a Questão 2.


2) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{12}$

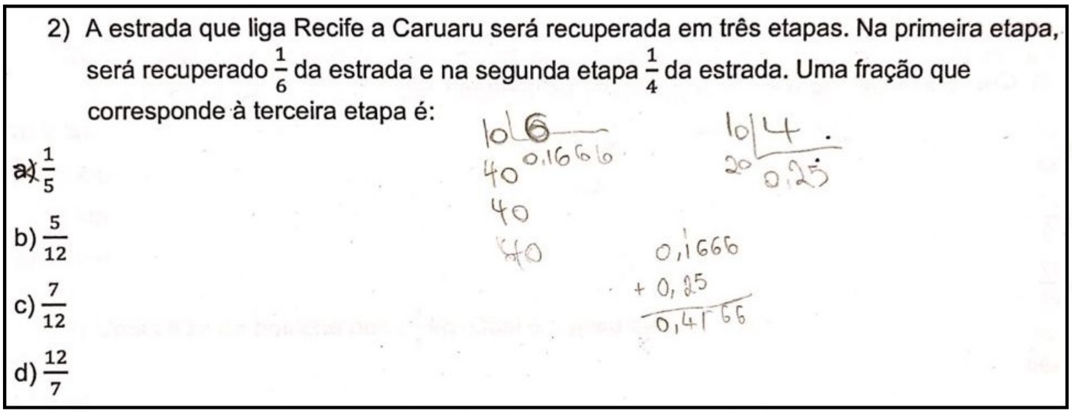
c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$

A seguir apresenta-se a resolução feita por muitos alunos que tentaram encontrar o valor decimal das frações e somá-las para conseguir identificar a resposta correta, também encontrando seu valor decimal. Porém, a fração $\frac{1}{6}$ é representada pela dízima periódica $0,1666...$, logo muitos alunos não conseguiram somar os valores decimais ou realizaram a soma utilizando uma aproximação decimal para a dízima periódica. Apesar da estratégia utilizada, nenhum aluno que optou pelos valores decimais conseguiu responder corretamente à questão.

Figura 3.52: Resolução do Aluno B2 para a Questão 2.


2) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é:

a) $\frac{1}{5}$

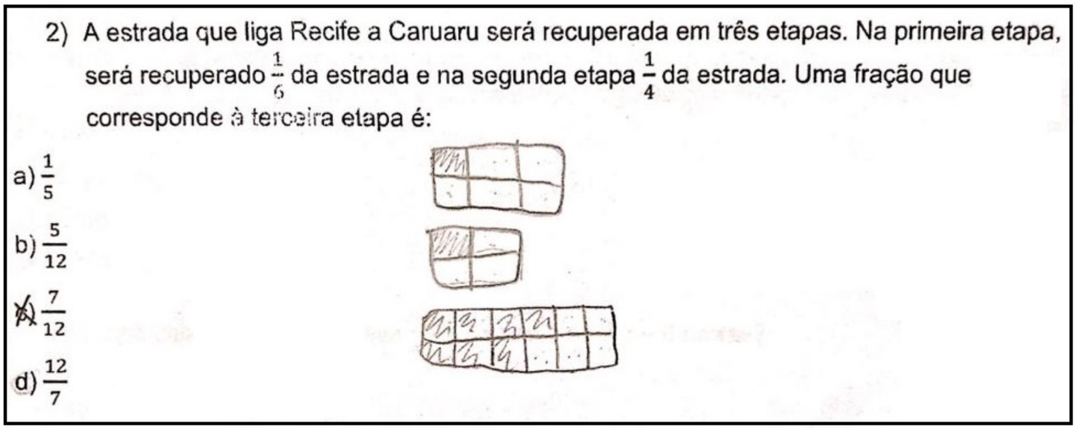
b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

Verificou-se ainda que muitos alunos tentaram solucionar a questão através da representação geométrica das frações, porém grande parte apenas representou as frações através de figuras com formatos diferentes, o que impossibilita a adição das partes e a comparação com as representações geométricas das opções de resposta. Os alunos não compreendem que por serem frações de um mesmo inteiro, o formato que representa o todo (o inteiro) deve ser o mesmo para todas as representações de frações.

Figura 3.53: Resolução do Aluno B3 para a Questão 2.


2) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{12}$

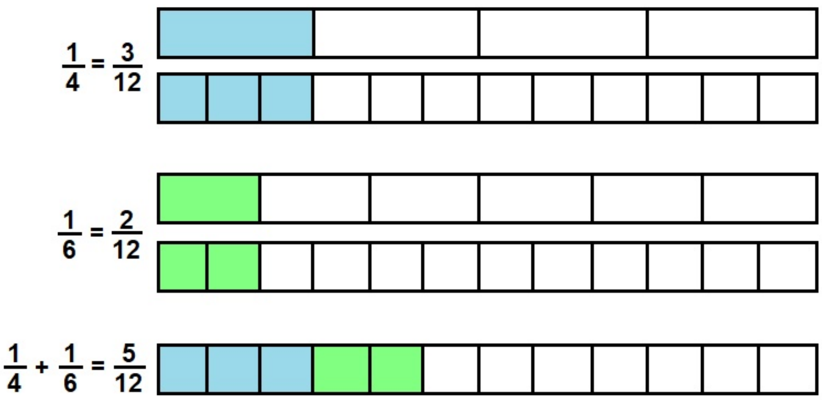
c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

A resolução desta questão através da adição de frações é realizada de acordo com a primeira solução apresentada acima relacionada ao aluno B1, porém deve-se entender que $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ representa a parte já recuperada da estrada, logo a parte que ainda deve ser recuperada é dada por $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.

É possível resolver a questão utilizando a representação geométrica das frações. Para tornar-se possível a comparação das frações, será preciso transformá-las em frações equivalentes de mesmo denominador:

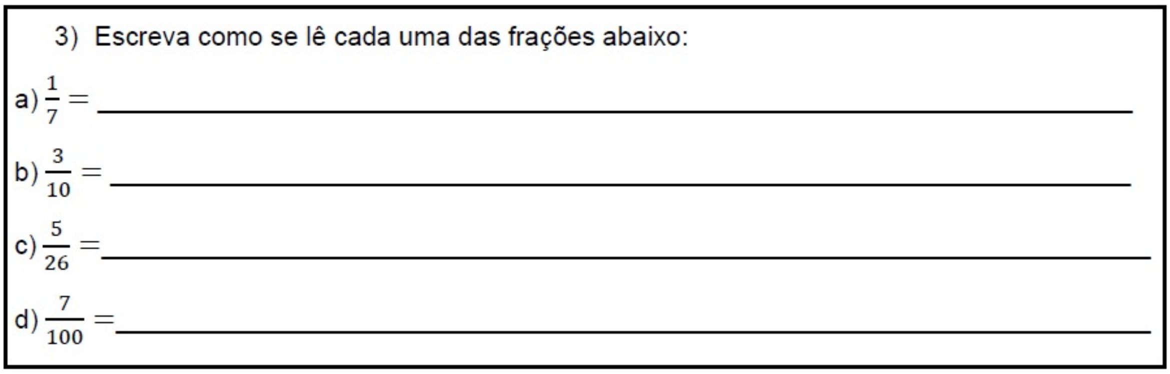
Figura 3.54: Resolução Através da Representação Geométrica para a Questão 2.



As questões de 3 a 15 desta avaliação diagnóstica são as mesmas aplicadas na avaliação diagóstica do 6º ano, inclusive seguindo as mesmas numerações por questão. Portanto, nos limitaremos a analisar os resultados gerais e discutir resoluções interessantes e diferentes das já apresentadas no estudo da avaliação diagnóstica do 6º ano.

A figura em sequência apresenta a questão 3 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.55: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 3.


3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = ____________________

b) $\frac{3}{10}$ = ____________________

c) $\frac{5}{26}$ = ____________________

d) $\frac{7}{100}$ = ____________________

Os resultados desta questão foram:

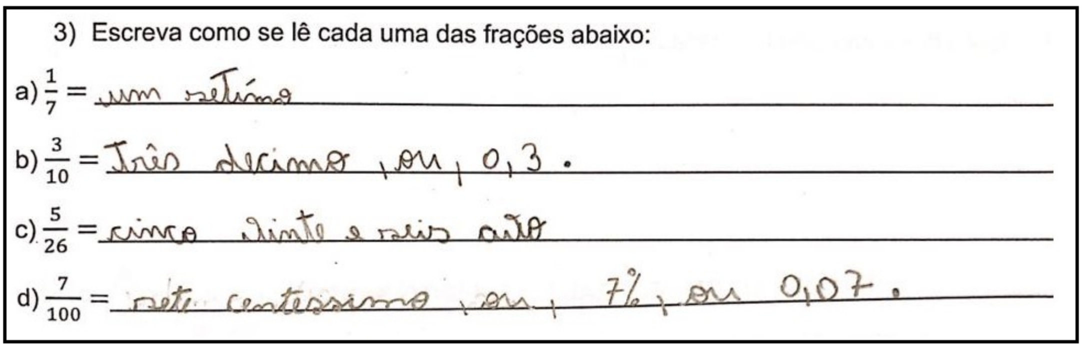
Tabela 3.20: Distribuição das Respostas - Questão 3 - 7º Ano

	4 Acertos	3 Acertos	2 Acertos	1 Acerto	Nenhum Acerto
Frequência	85	73	13	13	25
Percentual	41%	35%	6%	6%	12%

Nesta questão avaliou-se o conhecimento dos alunos sobre a nomenclatura das frações. Os resultados demonstraram que a maioria dos alunos tem conhecimento sobre a nomenclatura das frações, porém cerca de 30% dos alunos não souberam escrever a nomenclatura correta para as frações propostas. Os erros mais comuns estão relacionados às frações $\frac{5}{26}$, denominada por muitos em cinco vigésimo sexto, e $\frac{7}{100}$, denominada por muitos em sete cem avos.

A figura abaixo apresenta a resposta correta dada por um alunos que relacionou as frações decimais e centesimais às suas representações decimais.

Figura 3.56: Resolução do Aluno B4 para a Questão 3.


3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = um setimo

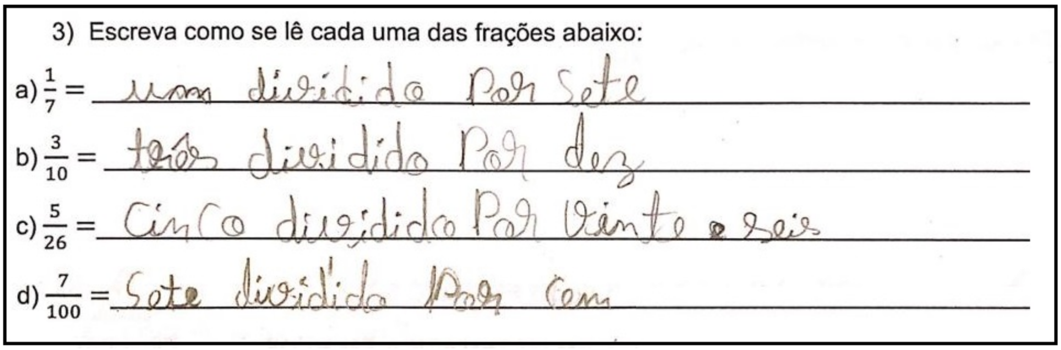
b) $\frac{3}{10}$ = Três decimo, ou, 0,3.

c) $\frac{5}{26}$ = cinco vinte e seis avos

d) $\frac{7}{100}$ = sete centessimo, ou, 7%, ou 0,07.

A seguir apresenta-se uma resolução feita por alguns alunos que associaram a fração a uma divisão de dois números inteiros. Acostumados a associar uma fração a uma divisão, ao descreverem a forma como leem as frações, utilizaram a palavra “dividido”.

Figura 3.57: Resolução do Aluno B5 para a Questão 3.



3) Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{7}$ = um dividido Por sete

b) $\frac{3}{10}$ = três dividido Por dez

c) $\frac{5}{26}$ = Cinco dividido Por vinte e seis

d) $\frac{7}{100}$ = Sete dividido Por cem

A figura em sequência apresenta a questão 4 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.58: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 4.

4) Assinale a alternativa composta apenas por frações próprias:

a) $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{10}$ e $\frac{2}{5}$

c) $\frac{5}{2}$ e $\frac{7}{7}$

d) $\frac{3}{6}$ e $\frac{50}{20}$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.21: Distribuição das Respostas - Questão 4 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	31	117	27	19	15
Percentual	15%	56%	13%	9%	7%

Esta questão exigia que o aluno compreendesse o conceito de frações próprias. Frações próprias são as que apresentam o numerador menor do que o denominador e alguns alunos escreveram a definição em suas resoluções. A resposta correta é a letra b).

Nesta questão os alunos apenas assinalaram a resposta, não realizaram cálculos.

A figura em sequência apresenta a questão 5 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.59: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 5.

5) Toda fração imprópria pode ser escrita como número misto. A fração imprópria $\frac{7}{3}$ pode também ser escrita na forma mista em qual das alternativas abaixo:

a) $2\frac{1}{3}$

b) $3\frac{4}{5}$

c) $1\frac{1}{2}$

d) $3\frac{1}{3}$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.22: Distribuição das Respostas - Questão 5 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	62	50	27	50	20
Percentual	30%	24%	13%	24%	9%

Para resolver esta questão os alunos deveriam conhecer frações impróprias, números mistos e saber realizar a transformação de uma representação para a outra. Os resultados mostram o desconhecimento de muitos alunos sobre o conceito de frações mistas. Isto decorre do desconhecimento do conceito de frações, o que implica em dificuldades de aprendizagem de conteúdos subsequentes.

Para esta questão, não identificou-se resoluções diferentes das apresentadas na análise do 6º ano.

A figura em sequência apresenta a questão 6 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.60: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 6.

6) Qual é a fração equivalente a $\frac{15}{20}$ que tem numerador 27?

a) $\frac{27}{30}$

b) $\frac{27}{9}$

c) $\frac{27}{36}$

d) $\frac{27}{100}$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.23: Distribuição das Respostas - Questão 6 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	62	31	73	16	27
Percentual	30%	15%	35%	8%	12%

Nesta questão, o aluno deveria utilizar a equivalência de frações para obter uma fração equivalente com o numerador desejado. Em nenhuma prova identificou-se a utilização da equivalência de frações. Alguns alunos realizaram os cálculos mediante a divisão dos termos das frações e comparando resultados na forma decimal. Mais uma vez, percebe-se uma tendência nos alunos quanto ao uso dos números decimais.

Não identificamos resoluções diferentes das já apresentadas ao longo da análise da avaliação diagnóstica do 6º ano.

A figura em sequência apresenta a questão 7 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.61: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 7.

7) Qual a forma irredutível da fração $\frac{150}{210}$?

a) $\frac{15}{21}$

b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{35}{70}$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.24: Distribuição das Respostas - Questão 7 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	119	39	23	8	20
Percentual	57%	19%	11%	4%	9%

Percebeu-se com os resultados desta questão que os alunos compreendem o conceito de equivalência e simplificação, mas desconhecem o processo para obtenção de frações irredutíveis. Percebendo que 150 e 210 são ambos divisíveis por 10, compreendem que as frações $\frac{150}{210}$ e $\frac{15}{21}$ são equivalentes, mas não perceberam que 15 e 21 possuem um divisor comum e que esta fração ainda não é irredutível.

Todas as resoluções desta questão estão similares às verificadas na avaliação diagnóstica do 6º ano.

A figura em sequência apresenta a questão 8 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.62: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 8.

8) Compare as frações abaixo utilizando um dos sinais: >, < ou =.

a) $\frac{1}{7}$ ____ $\frac{2}{14}$

b) $\frac{3}{2}$ ____ $\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ ____ $\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{4}$ ____ $\frac{3}{12}$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.25: Distribuição das Respostas - Questão 8 - 7º Ano

	4 Acertos	3 Acertos	2 Acertos	1 Acertos	Nenhum Acerto
Frequência	39	17	35	67	51
Percentual	19%	8%	17%	32%	24%

Como consequência das dificuldades apresentadas em equivalência de frações, os alunos não conseguiram comparar corretamente as frações dadas. Percebeu-se que apenas uma pequena parte conseguiu comparar de forma correta todas as frações, porém ninguém apresentou cálculos não permitindo verificar o processo de raciocínio.

A figura em sequência apresenta a questão 9 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.63: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 9.

9) Sara fez um bolo para seus filhos e o repartiu em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo foi consumida?

a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.26: Distribuição das Respostas - Questão 9 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	43	27	31	81	27
Percentual	21%	13%	15%	39%	12%

Esta questão busca trabalhar com o significado de fração parte-todo. Além disso, é necessário o conhecimento de simplificação de frações. Novamente, verificou-se um percentual baixo de acertos.

A figura abaixo apresenta a resolução de um aluno que representou geometricamente a fração consumida e na sequência realizou corretamente o processo de simplificação a fim de obter a resposta do item d).

Figura 3.64: Resolução do Aluno B6 para a Questão 9.

9) Sara fez um bolo para seus filhos e o repartiu em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo foi consumida?

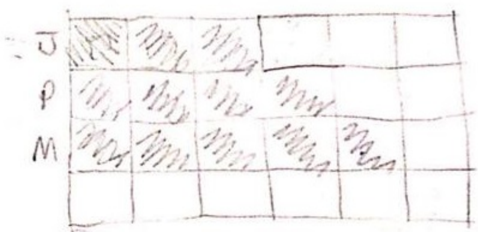
a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{1}{4}$

$$\frac{12 \div 3}{24 \div 3} = \frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$



A figura em sequência apresenta a questão 10 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.65: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 10.

10)João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

a) 9 km

b) 10 km

c) 12 km

d) 15 km

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.27: Distribuição das Respostas - Questão 10 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	35	23	23	110	18
Percentual	17%	11%	11%	53%	8%

O objetivo desta questão era saber se o aluno compreende o significado de fração de uma quantidade. Nesta questão, a maioria dos alunos respondeu de forma correta.

A seguir, apresenta-se a resolução de um aluno que respondeu corretamente à questão.

Figura 3.66: Resolução do Aluno B7 para a Questão 10.

10) João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

a) 9 km

b) 10 km

c) 12 km

d) 15 km

$$\frac{45}{3} \cdot \frac{3}{3} = \frac{45}{3} \; 15.$$

A figura em sequência apresenta a questão 11 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.67: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 11.

11)Uma caixa de bolacha pesa $\frac{3}{4}$ kg. Qual é o peso de 8 caixas?

a) 6 kg

b) 12 kg

c) 10 kg

d) 5 kg

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.28: Distribuição das Respostas - Questão 11 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	54	107	16	16	16
Percentual	25%	51%	8%	8%	8%

Esta questão buscava verificar se o aluno compreende e consegue calcular a adição de frações. A questão também pode ser resolvida por uma multiplicação de uma fração por um inteiro. Os alunos apresentaram baixo percentual de acertos nesta questão.

Novamente, as resoluções verificadas, correspondem as já analisadas na avaliação diagnóstica do 6º ano.

A figura em sequência apresenta a questão 12 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.68: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 12.

12)A dona Angélica tem 5 xícaras de balas que ela vai servir no lanche para um grupo de crianças. Cada porção é de $\frac{1}{4}$ de xícara. Quantas crianças vão receber uma porção de balas no lanche?

a) 12

b) 20

c) 15

d) 16

Os resultados desta questão foram:

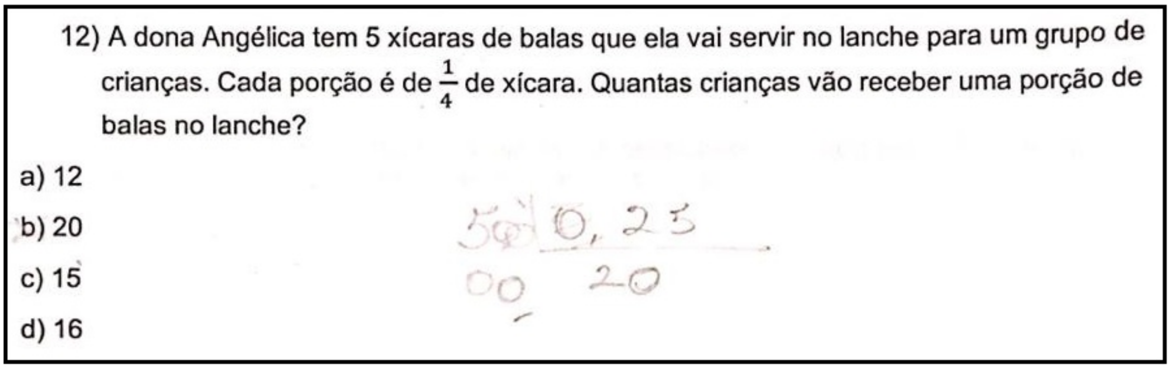
Tabela 3.29: Distribuição das Respostas - Questão 12 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	27	100	35	14	33
Percentual	13%	48%	17%	7%	15%

Esta questão pretendia explorar a divisão de um inteiro por uma fração, mas para isso o aluno precisaria compreender o significado de fração como parte do inteiro 5. Muitos alunos responderam corretamente.

Abaixo apresenta-se a solução mais comum dentre os alunos que acertaram a solução. Os alunos identificaram, por meio da divisão, o valor decimal da fração $\frac{1}{4}$, dividindo posteriormente 5 xícaras em porções de $0,25$.

Figura 3.69: Resolução do Aluno B8 para a Questão 12.



12) A dona Angélica tem 5 xícaras de balas que ela vai servir no lanche para um grupo de crianças. Cada porção é de $\frac{1}{4}$ de xícara. Quantas crianças vão receber uma porção de balas no lanche?

a) 12

b) 20

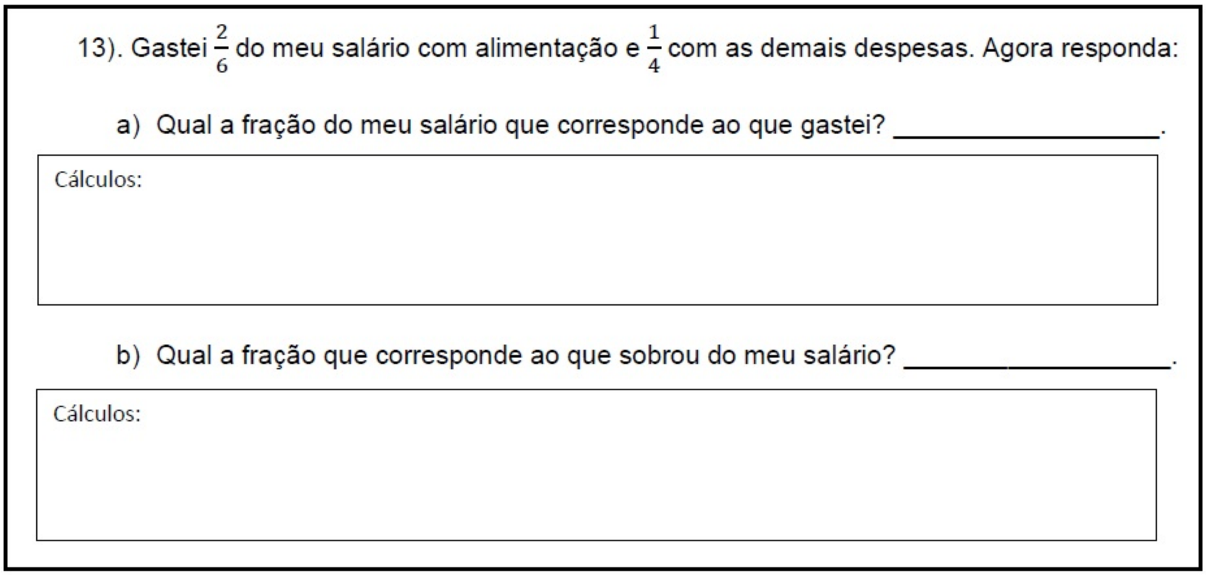
c) 15

d) 16

5,0 | 0,25
00 20

A figura em sequência apresenta a questão 13 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.70: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 13.



13). Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? __________.

Cálculos:

b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? __________.

Cálculos:

Os resultados desta questão foram:

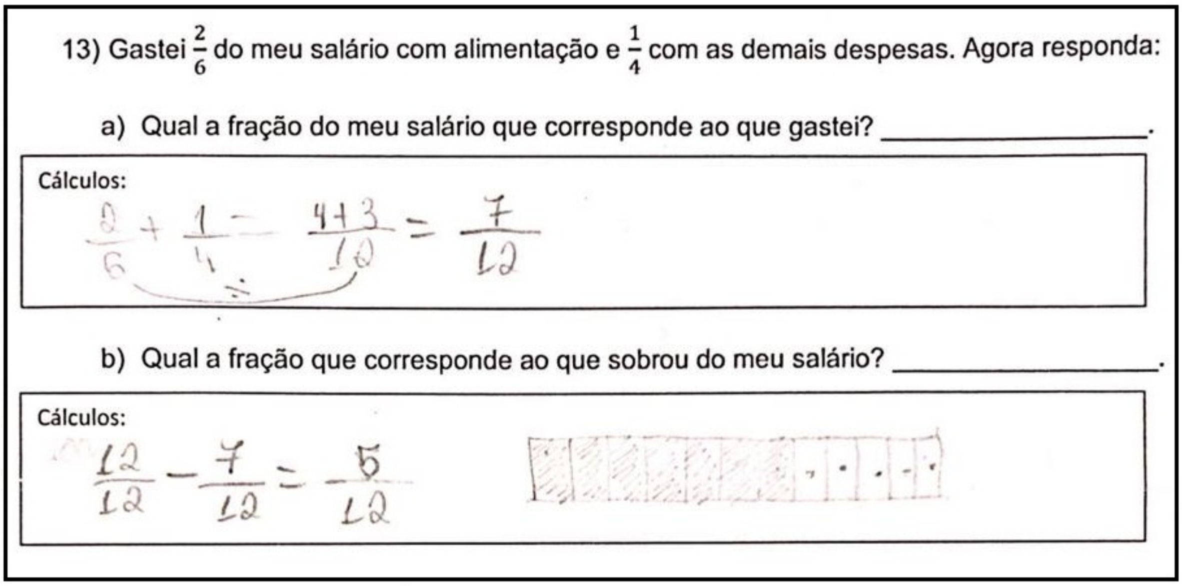
Tabela 3.30: Distribuição das Respostas - Questão 13 - 7º Ano

	2 Acertos	1 Acerto	Nenhum Acerto
Frequência	10	0	199
Percentual	5%	0%	95%

O objetivo desta questão é realizar cálculos de adição e subtração de frações mediante problema contextualizado. Percebe-se que os alunos ainda apresentam dificuldades em interpretar enunciados.

Abaixo apresenta-se a resolução de um aluno que respondeu corretamente a questão, associando a fração com sua representação geométrica.

Figura 3.71: Resolução do Aluno B9 para a Questão 13.



13) Gastei $\frac{2}{6}$ do meu salário com alimentação e $\frac{1}{4}$ com as demais despesas. Agora responda:

a) Qual a fração do meu salário que corresponde ao que gastei? ________________.

Cálculos:

$\frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$

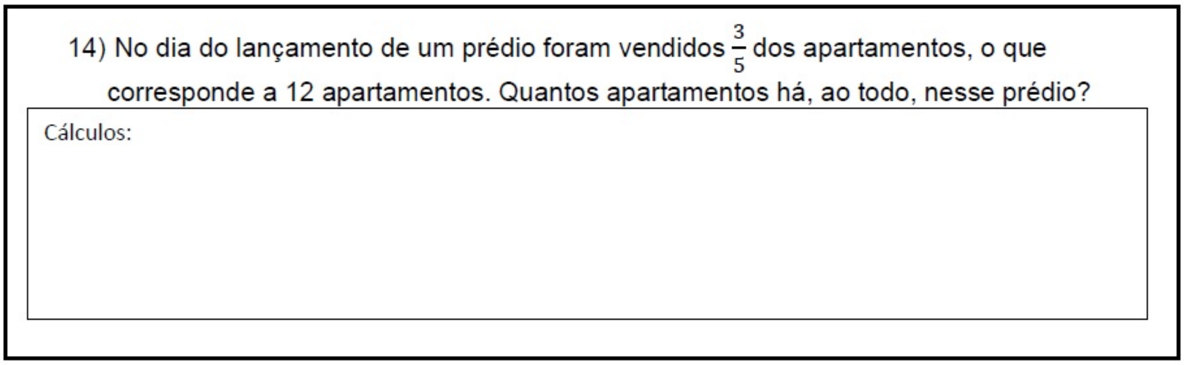
b) Qual a fração que corresponde ao que sobrou do meu salário? ________________.

Cálculos:

$\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

A figura em sequência apresenta a questão 14 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.72: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 14.



14) No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{3}{5}$ dos apartamentos, o que corresponde a 12 apartamentos. Quantos apartamentos há, ao todo, nesse prédio?

Cálculos:

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.31: Distribuição das Respostas - Questão 14 - 7º Ano

	Acerto	Erro
Frequência	23	186
Percentual	11%	89%

Nesta questão o aluno deveria entender a equivalência entre a fração $\frac{3}{5}$ e a quantidade 12 de apartamentos. Apenas 23 alunos conseguiram acertar esta questão.

Não identificamos resoluções diferentes das já apresentadas na avaliação diagnóstica do 6º ano.

A figura em sequência apresenta a questão 15 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.73: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 15.

15) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

a) 30

b) 40

c) 50

d) 60

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.32: Distribuição das Respostas - Questão 15 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	8	31	27	119	24
Percentual	4%	15%	13%	57%	11%

Nesta questão esperava-se que o aluno compreendesse o conceito de porcentagem como uma fração com denominador 100 e fosse capaz de calcular a porcentagem de uma quantidade. Muitos alunos responderam corretamente à questão.

Todas as soluções verificadas correspondem às apresentadas na avaliação do 6º ano.

A figura em sequência apresenta a questão 16 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.74: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 16.

16) Veja a relação de compras de Antônio e calcule quanto ele vai gastar.

Produto	Preço Unitário (R$)
1 lata de molho de tomate	2,50
1 pacote de café	3,85
1 lata de leite condensado	5,90
1 lata de óleo de soja	3,12
2 pacotes de bolachas	3,70
2 latas de leite em pó	8,23

a) R$ 29,50

b) R$ 30,90

c) R$ 40,00

d) R$ 39,23

Os resultados desta questão foram:

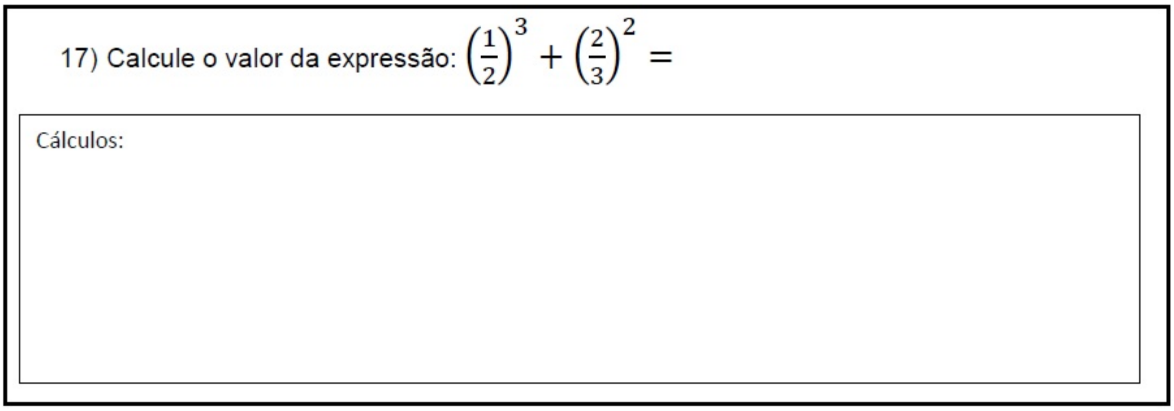
Tabela 3.33: Distribuição das Respostas - Questão 16 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	58	16	5	94	36
Percentual	28%	8%	4%	45%	15%

Nesta questão esperava-se que o aluno fosse capaz de calcular o gasto de uma compra. Percebeu-se que mais da metade dos alunos não responderam corretamente. Muitos alunos limitaram-se a somar os preços unitários da tabela, que resultaria em $R\$27,30$, porém encontraram como resultado $R\$29,50$. Outros, sequer conseguiram interpretar a tabela e esboçar algum cálculo.

A figura em sequência apresenta a questão 17 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.75: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 17.



17) Calcule o valor da expressão: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

Cálculos:

Os resultados desta questão foram:

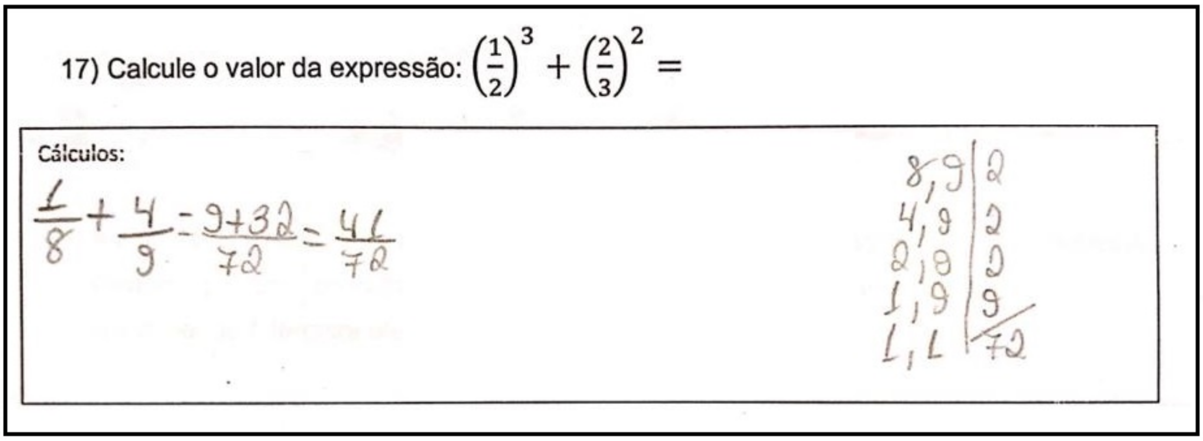
Tabela 3.34: Distribuição das Respostas - Questão 17 - 7º Ano

	Acerto	Erro
Frequência	9	200
Percentual	4%	96%

Nesta questão o aluno deveria demonstrar conhecimento sobre operações com frações de potenciação e adição. O resultado verificado reflete que muitos alunos por não compreenderem o conceito de fração, não conseguem avançar nos estudos deste conceito. Desta forma, o aluno não consegue compreender os processos envolvidos nas operações básicas com frações, que são distintos dos processos já conhecidos para números naturais.

A figura abaixo apresenta a solução correta realizada pelos 9 alunos que acertaram a questão.

Figura 3.76: Resolução do Aluno B10 para a Questão 17.



17) Calcule o valor da expressão: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

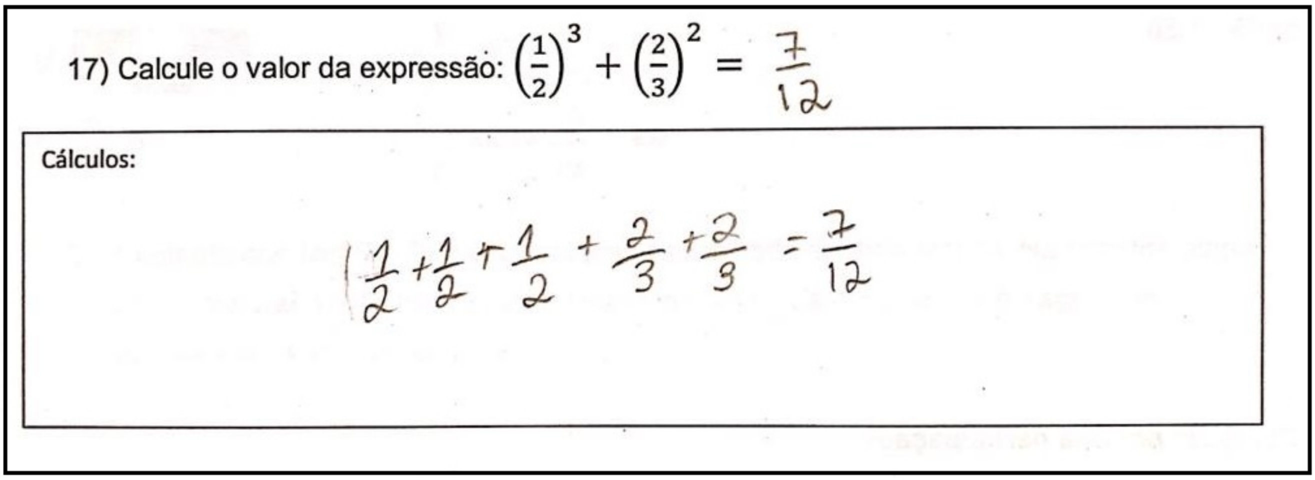
Cálculos:

$\frac{1}{8} + \frac{4}{9} = \frac{9+32}{72} = \frac{41}{72}$

$$\begin{array}{c|c} 8,9 & 2 \\ 4,9 & 2 \\ 2,9 & 2 \\ 1,9 & 9 \\ 1,1 & 72 \end{array}$$

Na figura em sequência, apresenta-se uma solução comum entre os alunos que erraram a questão. Os alunos demonstraram desconhecer o significado de potenciação, transformando a potência em uma soma da frações. Quando calcularam a soma de frações, limitaram-se a somar numeradores e denominadores como costumam fazer para os números naturais.

Figura 3.77: Resolução do Aluno B11 para a Questão 17.

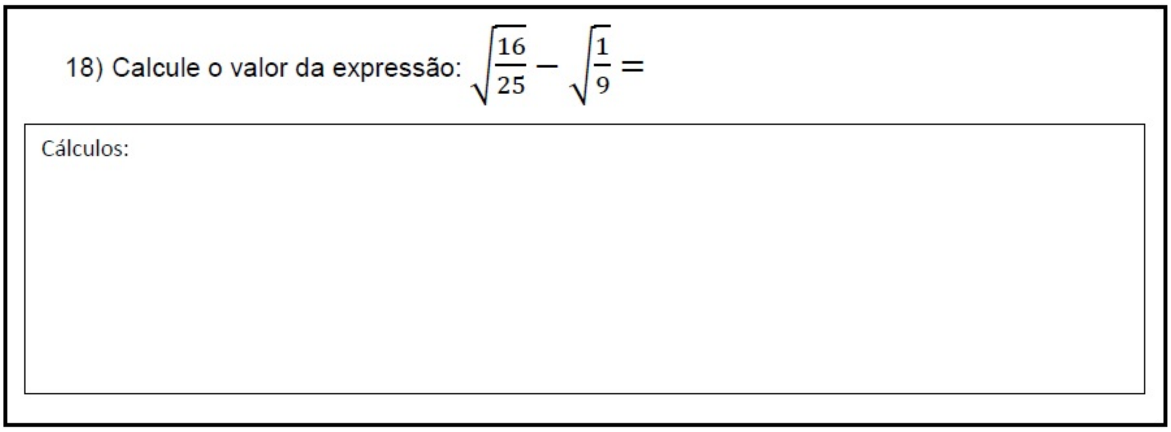

17) Calcule o valor da expressão: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{12}$

Cálculos:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$

A figura em sequência apresenta a questão 18 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.78: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 18.


18) Calcule o valor da expressão: $\sqrt{\frac{16}{25}} - \sqrt{\frac{1}{9}} =$

Cálculos:

Os resultados desta questão foram:

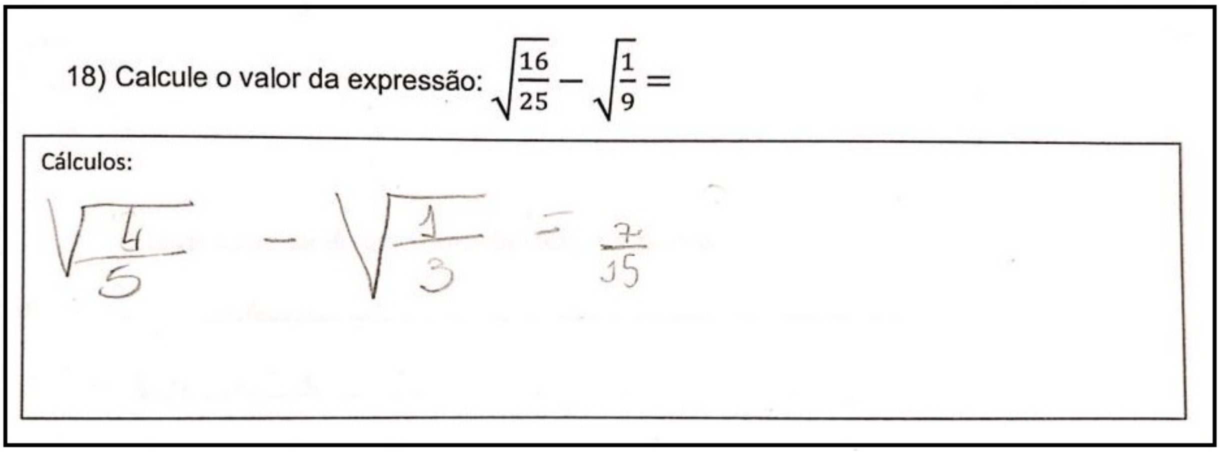
Tabela 3.35: Distribuição das Respostas - Questão 18 - 7º Ano

	Acerto	Erro
Frequência	1	208
Percentual	0,5%	99,5%

Nesta questão o aluno novamente deveria demonstrar conhecimento nas operações com frações, especificamente nas operações de radiciação e subtração. O resultado já era esperado em virtude das dificuldades já mencionadas anteriormente.

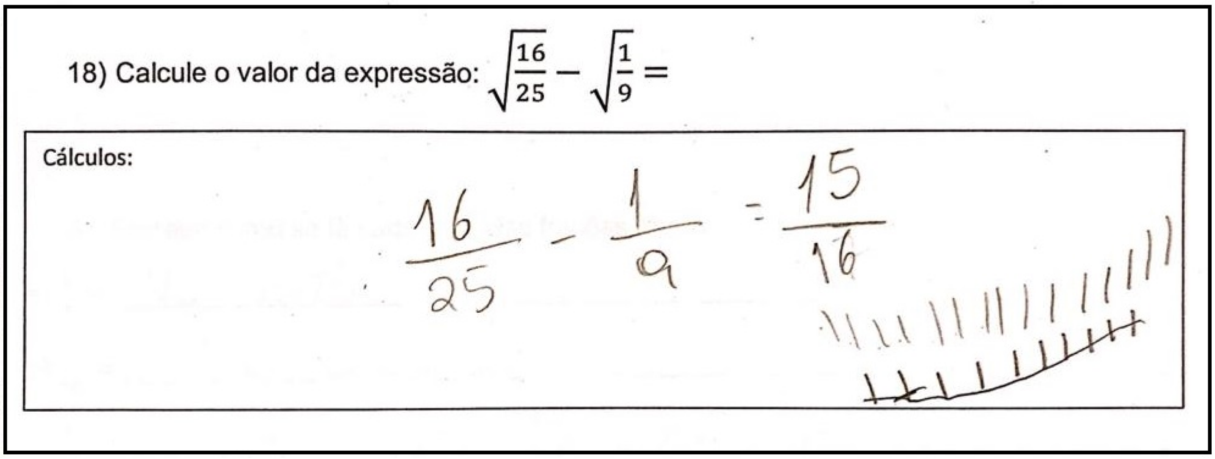
A figura abaixo apresenta a resolução do único aluno que encontrou o resultado correto, porém percebe-se que ao calcular a raiz quadrada das frações, escreve os resultados ainda dentro do símbolo de raiz, finalizando com o cálculo correto, sem considerar as raízes.

Figura 3.79: Resolução do Aluno B12 para a Questão 18.



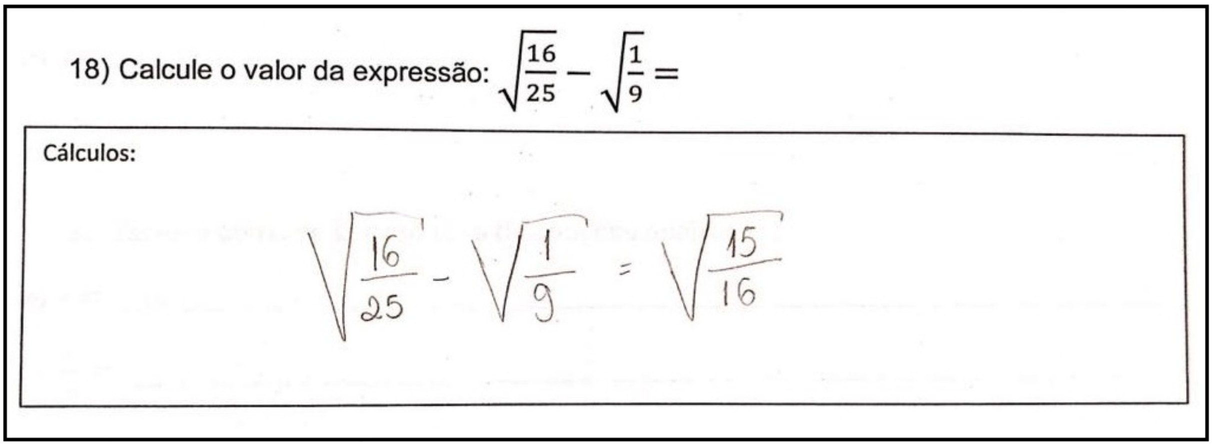
Já na figura abaixo, tem-se uma resolução comum dos alunos avaliados onde simplesmente desconsideram-se o símbolo da raiz quadrada e realiza-se a subtração das frações internas às raízes. Percebe-se ainda que este aluno repetiu o procedimento de subtrair numeradores e denominadores para realizar a subtração das frações.

Figura 3.80: Resolução do Aluno B13 para a Questão 18.



Abaixo encontra-se mais uma solução realizada por alguns alunos. Os alunos, desconhecendo a ordem para solução de uma expressão numérica, onde o cálculo de raiz ocorre antes de uma subtração, subtraiu as frações (diminuindo numeradores e denominadores), para depois tentar resolver a raiz da fração resultante.

Figura 3.81: Resolução do Aluno B14 para a Questão 18.



A figura em sequência apresenta a questão 19 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.82: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 19.

19) Um prédio tem 18,75 metros de altura. Um segundo prédio tem o triplo dessa altura. Qual é a altura do segundo prédio?

a) 56,25 metros

b) 53,25 metros

c) 57,75 metros

d) 54,50 metros

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.36: Distribuição das Respostas - Questão 19 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	119	35	27	4	24
Percentual	57%	17%	13%	2%	11%

Nesta questão, os alunos deveriam realizar um multiplicação de um inteiro por um número decimal. A maior parte dos alunos conseguiu realizar a operação de forma correta e os que erraram não apresentaram cálculos, impossibilitando a análise dos motivos para o erro.

A figura em sequência apresenta a questão 20 da avaliação diagnóstica.

Figura 3.83: Avaliação Diagnóstica do 7º Ano - Questão 20.

20) José comprou uma camiseta de R$ 80,00 e como ele fez o pagamento a vista conseguiu um desconto de 8%. Quanto José pagou pela camisa após o desconto?

a) R$ 59,10

b) R$ 74,60

c) R$ 73,60

d) R$ 71,56

Os resultados desta questão foram:

Tabela 3.37: Distribuição das Respostas - Questão 20 - 7º Ano

	a)	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequência	16	66	66	27	34
Percentual	8%	32%	32%	13%	15%

Nesta questão, o aluno deveria calcular a porcentagem de um valor inteiro. Muitos alunos responderam incorretamente esta questão, mas não apresentaram cálculos para análise.

Na imagem abaixo apresenta-se a resolução de um aluno que respondeu corretamente esta questão.

Figura 3.84: Resolução do Aluno B15 para a Questão 20.

20) José comprou uma camiseta de R$ 80,00 e como ele fez o pagamento a vista conseguiu um desconto de 8%. Quanto José pagou pela camisa após o desconto?

a) R$ 59,10

b) R$ 74,60

c) R$ 73,60

d) R$ 71,56

$$\frac{8}{100} \cdot \frac{80}{1} = \frac{640}{100} = 6,40$$

$$\begin{array}{r} 80,00 \\ -\ 6,40 \\ \hline 73,60 \end{array}$$

Analisando os resultados da avaliação diagnóstica do 7º ano, os alunos demonstraram não conseguir relacionar frações como partes de um mesmo inteiro para que, fosse possível realizar a adição das frações.

As questões de 3 a 15 das avaliações diagnósticas do 6º e 7º anos são as mesmas, inclusive na numeração. Desta forma, será possível, além de avaliar o desempenho do 7º ano na resolução dos problemas, fazer comparação com os resultados apresentados pelo 6º ano.

Percebe-se que pouco mais da metade dos alunos souberam atribuir a nomenclatura correta para as frações, mas preocupa que ainda no 7º ano existam alunos que não sabem realizar a leitura correta das frações.

Mais da metade dos alunos compreendeu bem o conceito de fração própria.

Grande parte dos alunos não conseguiu converter uma fração imprópria em número misto, evidenciando incompreensão do conceito de fração e o que representa de um inteiro.

Os alunos demonstraram incompreensão do processo de equivalência de frações e também na simplificação de frações. É possível perceber tanto nos alunos do 6º quanto do 7º ano dificuldades nestas questões. Os alunos compreendem a definição de equivalência de frações, pois muitos tentam encontrar os valores decimais e associam como equivalentes as frações com mesmo valor, porém, desconhecem o processo realizado apenas com frações.

Em relação a comparação de frações, os alunos apresentaram dificuldades. Porém, verificou-se uma melhora percentual no desempenho da questão de comparação de frações em relação aos resultados do 6º ano, enquanto no 6º ano apenas 2% havia conseguido responder a todas as questões corretamente, no 7º ano esse percentual subiu para 19%. Porém, mais uma vez preocupa o fato dos alunos estarem no 7º ano e não conseguirem realizar a comparação de frações.

As dificuldades verificadas no 6º ano em relação a interpretação de enunciados e representação de uma fração como parte de inteiros se mantiveram presentes nas turmas de 7º ano avaliadas. Isso mostra que os alunos avançam de série escolar sem compreender o conceito de fração e com dificuldades em interpretação de enunciados.

Em relação a porcentagem, os resultados do 7º ano comparando-se com os do 6º ano foram melhores, porém esperava-se que os alunos desta série já compreendessem a porcentagem como fração centesimal e soubessem calcular a porcentagem de um determinado valor.

Os alunos demonstraram dificuldades na adição de números em forma decimal, o que se torna preocupante, já que muitas vezes os alunos recorrem a representação decimal para efetuarem operações com frações.

Também se verificou o desconhecimento dos procedimentos para adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, racionalizar e potencializar frações. Considerando que as operações de adição e subtração de frações vem sendo trabalhadas desde o 6º ano, surpreende verificar que os alunos ainda não compreendem os processos e ainda tentam relacionar as operações com frações às operações realizadas com inteiros.

Percebe-se que na maioria das questões comuns o percentual de acertos no 7º ano é similar ao verificado no 6º ano, portanto, é possível concluir que muitos alunos estão seguindo sua formação escolar com deficiências em relação a aprendizagem de fração e que, mesmo os conteúdos terem sido trabalhados nas duas séries, as dificuldades persistem. É preciso que se identifique as lacunas existentes na aprendizagem e possíveis maneiras de superá-las, porém, esta análise, será objeto de estudo continuado a esta pesquisa.

Capítulo 4

Considerações finais

Esta pesquisa, cujo público alvo são os professores de matemática que atuam no ensino fundamental, buscou investigar a aprendizagem de frações no ensino fundamental II. Por meio de uma pesquisa histórica, verificou-se que as frações têm sua origem desde antes de Cristo e já eram utilizadas por diferentes civilizações para realizar medições. Trata-se de um conceito elementar, muito antigo, mas que até hoje não é bem compreendido.

Para entender as causas para as dificuldades verificadas no dia a dia de sala de aula quanto ao conceito de fração, buscou-se realizar uma pesquisa qualitativa diagnóstica com turmas de 6º e 7º anos de diferentes escolas de redes de ensino e municípios distintos do Espírito Santo. Procurou-se observar o processo de resolução dos alunos para compreender raciocínio e dificuldades, a fim de associá-las as dificuldades presentes no referencial teórico.

Ainda que frações sejam bastante aplicadas ao longo de todas as séries escolares e mesmo com a certeza de que todos os alunos avaliados tenham estudado o conteúdo de frações no ensino fundamental, percebeu-se com este estudo que, para muitos, as frações ainda são números incompreendidos.

Percebeu-se com a análise minuciosa dos resultados que muitas dificuldades apresentadas pelos alunos do 6º ano se mantinham em proporções parecidas nos alunos do 7º ano. Preocupa o fato dos alunos avançarem o 6º ano e terem atingido o 7º ano do ensino fundamental apresentando tantas dificuldades acerca de frações.

Foi possível perceber nos alunos de ambas as séries problemas conceituais relacionados a fração. A maioria dos alunos demonstrou não compreender o conceito de fração, o que impossibilitou identificar a fração e como utilizá-la em problemas contextualizados. Isso corrobora com as ideias de Bertoni (2009, p. 16). Muitas vezes, segundo a autora, preocupamo-nos com a representação geométrica e com regras operatórias e esquecemos de proporcionar ao aluno o conhecimento mais importante que é o próprio significado de fração (BERTONI, 2009, p. 16). Se o aluno não consegue perceber o que significa por exemplo $\frac{1}{4}$ de um chocolate, ele não será capaz de realizar cálculos ou resolver problemas com essa fração.

Conforme apresentado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, os alunos, diversas vezes, tentaram associar os procedimentos operatórios dos números naturais para as frações (BRASIL, 1998, p. 101). Ao somar frações mediante a soma dos numeradores e denominadores, encontrar um resultado equivocado e concordar com o mesmo, o aluno demonstra não compreender o significado das frações envolvidas. As representações geométricas das frações, se bem compreendidas, auxiliam neste processo e permitem perceber o equívoco cometido e adicionar as frações de forma correta.

Os alunos também apresentaram muitas dificuldades em reconhecer e encontrar frações equivalentes. Isso também é descrito pelos PCN's Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 101) que relaciona esta dificuldade ao fato dos números naturais, até então único conjunto numérico conhecido pelos alunos, terem uma representação única, enquanto as frações podem ser representadas por meio de frações equivalentes e ainda por seu valor decimal. Pelo mesmo motivo, os alunos apresentaram dificuldades na comparação de frações.

Uma questão polêmica, mas muito observada nas resoluções dos alunos foi a constante recorrência aos valores decimais das frações. Muitas vezes, quando os alunos não conseguiam realizar cálculos com frações ou interpretar o significado de uma fração em uma questão, recorriam ao seu valor decimal. Isso mostra que os alunos compreendem a fração como um número e conseguem atribuir a ela um valor por meio da divisão do numerador pelo denominador, mas ainda não conseguem perceber os diferentes significados de fração como parte de inteiros, razão e operador. Ainda que demonstrassem dificuldades em realizar cálculos com números decimais, notou-se maior segurança nos alunos em trabalhar com decimais no lugar de frações. Esta realidade já havia sido apresentada por Fernandes (2008, p. 6). O autor defende o ensino de frações, com cuja opinião compactuamos, tratando-se de conceito indispensável para a aprendizagem de outros conceitos matemáticos e de outras áreas de conhecimento. Porém, destaca que o uso da forma fracionária diminuiu consideravelmente no cotidiano devido ao uso de calculadoras nas ferramentas tecnológicas (FERNANDES, 2008, p. 6). Como as frações aparecem de forma menos frequente que os números racionais em situações do dia a dia, isso acaba influenciando o comportamento do aluno, que prefere optar pelo racional na forma decimal do que na forma fracionária.

Esta pesquisa dedicou-se a investigação diagnóstica e análise dos resultados a fim de identificar as principais dificuldades dos alunos em relação ao conceito de frações. Mediante os resultados, torna-se indispensável a continuação desta pesquisa, mediante publicação de artigos, para que seja possível identificar métodos que possam suprir as dificuldades verificadas neste estudo. Neste sentido, pretende-se elaborar proposta de intervenção futura para o ensino de frações a fim de comparar os resultados obtidos aos apresentados nesta pesquisa. Afinal, ainda que fração seja considerada um dos grandes "monstros" do ensino fundamental, é necessário mudar esta realidade a fim de promover uma aprendizagem mais consistente da matemática elementar, tão importante para estudos subsequentes.

Referências Bibliográficas

BERTONI, N. E. *Educação e Linguagem Matemática IV:* Frações e Números Fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 2013.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. *História da matemática.* Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Saeb.* Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb>. Acesso em: 25 de ago. de 2019.

BRASIL, Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília. SEF/MEC, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CELESTINO, K. G. *As frações em algumas civilizações antigas.* In: XIV EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, Cascavel: Unioeste de Cascavel, p. 1-16, 2017.

DANTE, L. R. *Matemática* - Projeto Teláris - 6º ano do Ensino Fundamental. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2018.

DANTE, L. R. *Matemática* - Projeto Teláris - 7º ano do Ensino Fundamental. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2018.

FERNANDES, S. F. H. *As frações do dia-a-dia – Operações.* Projeto de intervenção pedagógica na escola realizado pelo Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. Ponta Grossa, PR. 2008.

GOMES, A. *O Estudo de Frações em Seus Diferentes Contextos*: Um Diagnóstico com Alunos de 6º Ano da Rede Municipal de Ensino de Alto Santo – CE. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - PROFMAT, UFERSA, 2019.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

RIPOLL, C. C., et al. *Frações no Ensino Fundamental* – Volume I. 2016 / versão 2.0 de Fevereiro de 2017. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

THOMAZ, T.C. *Não gostar de Matemática: que fenômeno é este?* Cadernos de Educação/UFPel, Pelotas, n. 12, 1999.