

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES



UFES

PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA
PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE
COMBINATÓRIA

JHEIMYS BEZERRA BASSANI

VITÓRIA - ESPÍRITO SANTO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA PROPOSTA DE ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

JHEIMYS BEZERRA BASSANI

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho.

Vitória -Espírito Santo

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

JHEIMYS BEZERRA BASSANI

Dissertação de Mestrado apresentada
à Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFES como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática,
aprovada em DIA de MÊS de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho (Orientador)
UFES

Prof. Dr. Alancardek Pereira Araujo
UFES

Prof. Dr. Fabiana Garcia Papani

À minha esposa Mariana e ao meu filho Pedro, por trazerem alegria à minha vida, e ao meu pai pelos seus ensinamentos.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à minha família, em especial, à minha esposa, filho e irmã que sempre me apoiaram e compreenderam a minha ausência durante incontáveis noites, fins de semana e feriados.

Agradeço aos colegas de turma, com os quais dividi momentos de angústias e alegrias. Agradeço, também, a todos os professores que dedicaram tempo e conhecimento, contribuindo para nosso crescimento pessoal e profissional. Sem eles esse sonho não seria possível.

*“Tente! E não diga que a vitória está
perdida. Se é de batalhas que se vive a vida.
Tente outra vez!”*
— *Raul Seixas.*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo abordar formas que facilitem o ensino e aprendizagem de análise combinatória por meio da resolução de problemas, buscando-se soluções amplas e sequenciais. Inicia-se com a ideia intuitiva de contagem, que será complementada, em seguida, com os princípios fundamentais da adição e multiplicação. Após, são apresentados os conceitos de permutação simples, circular, com elementos repetidos e caótica. Abordaremos, também, a combinação simples, completa e os lemas de Kaplansky, estudando os principais problemas de combinação. Os problemas propostos nos capítulos foram selecionados de forma que fosse possível complementar a parte teórica - comumente omitida - e evidenciar técnicas alternativas de solução, como as de contagem por inclusão-exclusão e recorrência, orientadas sempre para a busca de soluções que promovam o raciocínio lógico e não o uso de fórmulas.

Palavras-chave: Análise combinatória, Ensino, Resolução de problemas.

Abstract

This dissertation aims to address ways that facilitate the teaching and learning of combinatorial analysis through a problem-solving approach, pursuing broad and sequential solutions. It starts with the intuitive idea of counting, which will then be complemented by the fundamental principle of addition and multiplication. After that, the concepts of simple, circular permutation will be presented, together with repeated elements and chaotic. We also address simple and complete combination, and Kaplansky's lemmas by studying the main problems of combination. The problems proposed in the chapters were selected in order to complement the theoretical part - commonly omitted - and to demonstrate alternative resolution techniques, such as counting by inclusion-exclusion and recurrence, always oriented to the pursuit of solutions that promote logical thinking and not the use of formulas.

Keywords: Combinatorial analysis, Teaching, Problem solving.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Uma breve história	14
1.2	O que é combinatória?	15
2	ESTRATÉGIAS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTA- GEM	16
2.1	Se estamos trabalhando com objetos iguais	16
2.2	Se a ordem dos elementos interessa	17
3	PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA CONTAGEM	20
3.1	Princípio da adição	20
3.2	Princípio da multiplicação	21
3.3	Oficina: Pintando para contar	23
3.4	Aplicação	33
3.5	Problemas de aprofundamento	46
4	PERMUTAÇÃO	59
4.1	Definição	59
4.2	Permutação simples ou permutação linear	60
4.3	Permutação circular	64
4.4	Permutações com elementos repetidos	68
4.5	Permutação caótica	69
4.6	Problemas de permutação	74
5	COMBINAÇÕES	80
5.1	Combinação simples	80
5.2	Combinação completa	84
5.3	Os lemas de Kaplansky	86
5.3.1	1° Lema de Kaplansky	86
5.3.2	2° Lema de Kaplansky	89
5.4	Problemas de combinação	93
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106

Lista de Figuras

1	Cardano	14
2	Tabela de decisões	21
3	Tabela de decisões	22
4	Bandeira 1	24
5	Bandeiras 2	24
6	Diagrama de árvore	25
7	Bandeira 3	25
8	Bandeira 4	26
9	Bandeira 5	27
10	Mapa	28
11	Mapa 1	29
12	Mapa 2	29
13	Mapa 3	29
14	Rotação	30
15	Tabuleiro branco	30
16	Tabuleiro com uma casa preta	31
17	Tabuleiro com duas casas pretas	31
18	Tabuleiro com uma casa branca	31
19	Tabuleiro preto	31
20	Bandeira 6	32
21	Bandeira 7	32
22	Países	33
23	Celular	33
24	Celular	34
25	Placa	35
26	Diagrama de árvore	36
27	Caminhos	43
28	Caminhos	44
29	Caminhos	44
30	Braile	45
31	Escada	53
32	Escada	54
33	Escada	54
34	Escada	55
35	Roda de ciranda	65

36	Roda de ciranda com duas crianças.	66
37	Roda de ciranda com três crianças.	66
38	Roda de ciranda com 4 crianças.	67
39	Caixa de bolas	77
40	n objetos em círculo.	89
41	Cadeiras em torno da mesa	91
42	Octógono	92
43	Plano	93
44	12 cavaleiros	100
45	Rodovias	101

Lista de Tabelas

1	Tabela de números	18
2	Tabela de Roupas	22
3	Tabela de dígitos	34
4	Tabela de possibilidades	35
5	Tabela de lanche	37
6	Tabela de horários	42
7	Tabela de horários	42
8	Envelopes	70
9	Sequência de moedas	75
10	Escolha dos sabores de sorvetes	85
11	Escolha dos sabores de sorvetes	85

1 INTRODUÇÃO

O estudo da análise combinatória, um dos temas de grande relevância da matemática discreta, é essencial para formação do senso crítico e investigativo, auxiliando-nos a tomar decisões sensatas e plausíveis diante de determinados eventos a que estamos expostos no dia a dia.

Diante da grande dificuldade apresentada por professores e alunos, surgiu o interesse em explorar esse tema de forma mais aprofundada, buscando novas técnicas e métodos que possam facilitar o ensino e a aprendizagem.

Uma forma interessante de se trabalhar com análise combinatória é por meio da resolução de problemas. Para isso, foram selecionados problemas não convencionais e que priorizam o raciocínio e não apenas o uso de fórmulas decoradas. Afinal, “matemática não se aprende passivamente” (HAZZAN, 2013).

Neste trabalho, o estudo da análise combinatória está voltado para o ensino básico. Portanto, para a resolução dos problemas de contagem, temos como pré-requisitos apenas o conhecimento de operações básicas como: soma, subtração, multiplicação e divisão. Contudo, pensando nos professores e estudantes que também tenham o interesse em aprofundar seu conhecimento sobre o tema, apresentamos o uso de recorrência como uma proposta de solução de alguns problemas de contagem.

Assim, partindo de uma breve explicação teórica e de uma sequência de problemas, abordamos temas desde o mais simples e comum ao ensino básico como: permutação e combinação simples até temas mais abstratos como combinação completa, permutações caóticas e os lemas de Kaplansky, que são cobrados em alguns vestibulares e olimpíadas de matemática.

CAPÍTULO 1

1.1 Uma breve história

Com a evolução da humanidade, surge a necessidade de contar objetos, animais, pessoas de sua comunidade, entre outros. Hoje, em nossa vida nos deparamos com diversas situações em que nos são exigidas as habilidades de contar e de tomar decisões, tarefas que nem sempre são fáceis de cumprir. Para isto, o estudo de análise combinatório pode nos ajudar no cumprimento desta tarefa.

Historicamente, a análise combinatória surge no século *XVI* em meio a uma sociedade onde a prática dos jogos de azar era muito comum. Algumas pessoas dedicavam parte de seu tempo aos estudos desses jogos, pois viam ali uma oportunidade de ganhar dinheiro.

Um dos pioneiros no estudo de jogos de azar foi o italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576), quem escreveu um pequeno manual, intitulado *liber de ludo aleae* (“O livro de jogos de azar”), que fora escrito por volta de 1550, mas só publicado em 1663. Nessa obra, pela primeira vez na história da matemática, foi introduzida a noção de probabilidade aplicada em jogos de azar com aceitável objetividade. (HAZZAN, 2013)



Figura 1: Cardano

Nesse passeio pela história, não podemos deixar de mencionar o matemático francês Blaise Pascal (1623 – 1662), eternizado por diversas contribuições na matemática, dentre as quais destacamos o famoso triângulo que recebe seu nome: o (triângulo de Pascal), publicado em seu livro *Trait du Triangle Arithmtique*. Acrescentamos, contudo, que apesar de o triângulo receber o nome de Pascal, existem registros de que os árabes e os chineses já utilizavam esse artifício antes de Pascal.

Dispensando apresentações, o matemático inglês Isaac Newton (1646 – 1727) e o matemático alemão Leonard Euler (1710 – 1761) também são protagonistas dessa história. Newton por ter mostrado numa carta a Oldenburg, em junho de 1676, como calcular $(a + 1)^n$ diretamente, isto é, sem ter que recorrer a $(a + 1)^{n-1}$ método que ficou conhecido como binômio de Newton. Já Euler, foi responsável pela criação do símbolo $\binom{n}{p}$, representando o que hoje conhecemos por $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Atualmente, a análise combinatória é um núcleo de grande relevância na matemática discreta e que serve de base para outros ramos da matemática como, por exemplo, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia etc. Além disso, possui aplicações em outras áreas como engenharia, geologia, química, biologia e informática.

1.2 O que é combinatória?

A análise combinatória é a área da matemática que trata dos problemas de contagem e pode ser descrita de diversas formas. Alguns autores a definem da seguinte forma:

Leibniz descreveu, em 1666, a combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”, enquanto Nicholson, em 1818, definiu-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”. (NOGUTI, VAZQUEZ, 2004)

Mais recentemente, em nossos livros didáticos, podemos encontrar várias definições. HAZZAN (1996) define a análise combinatória como parte da Matemática que tem como objetivo desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo esses elementos agrupamentos formados que respeitam certas condições. Para MAGALHÃES e OLIVEIRA (2004), a Análise Combinatória é um conjunto de técnicas de contagem. A utilização dessas técnicas permite saber quantos são os resultados possíveis de uma experiência, ou seja, de quantas formas diferentes uma experiência pode ser realizada. Para MORGADO et al. (1991), a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Esses autores não tratam a análise combinatória apenas como uma ferramenta de resolução de problemas de arranjo, permutação e combinação simples; a visão é mais geral, sem delimitá-la, valorizando o raciocínio e a criatividade. (SÁ, PINHEIRO, 2010)

CAPÍTULO 2

2 ESTRATÉGIAS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM

O estudo de análise combinatória no ensino médio, sem sombra de dúvida, é considerado como um dos temas mais difíceis pelos alunos e até mesmo entre os professores. Apesar da maioria dos exercícios serem resolvidos apenas com o conhecimento de aritmética básica, como adição, subtração, multiplicação e divisão, a grande dificuldade encontrada está na compreensão da questão e qual estratégia devemos utilizar para solucionar os exercícios propostos. O bom senso e a criatividade possibilitam diferentes maneiras para solucionar um mesmo problema, o que transforma esse tema desafiador em um assunto instigante e encantador.

Ao analisar um problema de combinatória devemos ter algumas estratégias em mente para ajudar na compreensão dos exercícios. Devemos observar cuidadosamente os seguintes indicativos:

2.1 Se estamos trabalhando com objetos iguais

Suponha que um professor tenha 5 livros de matemática iguais e deseja doar 3 desses livros para um aluno. Note que todas as coleções de três livros que o professor pode montar são idênticas, o que fica claro que quando se trata de objetos iguais a única coisa que diferencia uma escolha é a quantidade de objetos escolhidos. O professor pode doar um livro, dois livros, três livros, quatro livros ou cinco livros. Logo existem cinco possibilidades para doar uma certa quantidade.

Outro caso clássico são os problemas que envolvem urnas. Por exemplo, imagine uma urna com 100 bolas vermelhas, todas idênticas, da qual deseja retirar uma bola. De quantas maneiras podemos fazer isso? É evidente que a resposta correta é “uma”. Apesar da grande quantidade de bolas, o resultado observado sempre vai ser o mesmo, já que as 100 bolas vermelhas são idênticas.

Apesar do momento ainda não ser apropriado para resolução de exercícios, pois ainda não discutimos nenhuma técnica para solução de problemas de contagem, vamos mostrar um exemplo em que considerar que estamos trabalhando com objetos iguais é de grande valia para construção do raciocínio e para chegarmos a uma solução criativa.

Exemplo :

Em uma banca de revista há 5 exemplares iguais da revista A , 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C . Quantos tipos diferentes de coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar ? (CARNEIRO, RUFINO, 2010)

Solução :

O primeiro fato que devemos ter atenção é que as 5 revistas A são todas iguais entre si. Da mesma forma, as 6 revistas B são iguais entre si e o mesmo acontece com as 10 revistas C . Temos, no total, 21 revistas e devemos determinar quais as quantidades das revistas A , B e C vão fazer parte ou não dessa coleção. Podemos formar, por exemplo, uma coleção com 3 revistas B e 5 revistas C . Se formamos outro grupo pegando outras 3 revistas B e outras 5 revistas C , as coleções serão idênticas, pois a diferenciação da coleção não está na particularidade de cada revista, mas sim nas quantidades de revistas A , B e C escolhidas. Dividindo em casos a quantidade de revistas que podem fazer parte da coleção temos:

- 6 formas distintas de escolher a quantidade da revista A que vai fazer parte da coleção: 0, 1, 2, 3, 4, 5
- 7 formas distintas de escolher a quantidade da revista B que vai fazer parte da coleção: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
- 11 formas distintas de escolher a quantidade da revista C que vai fazer parte da coleção: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

E, finalmente, escolhendo a quantidade de revistas A , B e C que vão fazer parte da coleção e subtraindo 1 possibilidade para que não ocorra o caso de pegarmos 0 revistas A , 0 revistas B e 0 revistas C . O total de coleção, que podemos formar é, $6 \cdot 7 \cdot 11 - 1 = 461$. Para chegar ao resultado, utilizamos o princípio fundamental da contagem (PFC) que será abordado nos próximos capítulos

2.2 Se a ordem dos elementos interessa

Para sermos bem sucedidos na resolução de problemas de contagem, saber se a ordem em que os elementos são escolhidos interessa é fundamental. Lembrando que ainda não estamos interessados nos métodos utilizados para a soluções dos problemas, pois o foco é apenas a compreensão do texto e a identificação se a ordem em que um elemento é escolhido interessa ou não. Para ficar mais claro, vamos listar dois exemplos.

Solução 1:

Quantos e quais são os números de três algarismos distintos que podemos formar usando os algarismos 2, 4 e 6?

Solução:

Algarismo das centenas	Algarismo das dezenas	Algarismo das unidades	Número formado
2	4	6	246
2	6	4	264
4	2	6	426
4	6	2	462
6	2	4	624
6	4	2	642

Tabela 1: Tabela de números.

Nesse exemplo é fácil listar todos os casos possíveis, no entanto, observe que na primeira linha da tabela obtemos o número 246, e que na segunda linha da tabela obtemos o número 264. Isso deixa bem claro que escolher o número 4 para a dezena e escolher o número 6 para a unidade terá um resultado diferente de escolher o número 6 para a dezena e o número 4 para a unidade, ou seja, a ordem em que os elementos são escolhidos interessa.

Exemplo 2:

Suponha que uma pessoa vai a uma sorveteria para comprar um sorvete com dois sabores distintos, sendo que essa sorveteria possui sorvetes de morango, chocolate, creme e flocos. De quantas maneiras podemos escolher os dois sabores para o sorvete?

Solução:

Como foi falado anteriormente, ainda não estamos interessados na solução desse exercício. Focaremos apenas em saber se a ordem em que os elementos são escolhidos interessa ou não.

1 caso : suponha que você tenha escolhido primeiro o sabor de morango e depois o sabor de chocolate.

2 caso : Suponha que você tenha escolhido primeiro o sabor de chocolate e depois o sabor de morango.

Nota-se que em ambos os casos o sorvete que a pessoa vai tomar será de morango e chocolate, e a ordem em que os sabores foram escolhidos não interessa. Nos dois exemplos citados podemos perceber que os exercícios, intencionalmente, não deixaram claro se a ordem dos elementos interessa ou não, cabendo ao leitor fazer a análise cuidadosa desses fatos para evitar erros. Portanto, para resolver esse exercício representaremos pela letra M o sorvete de morango, C o sorvete de chocolate, R o sorvete de creme e F o sorvete de flocos. Listaremos agora todos os casos possíveis:

$$MC, MR, MF, CR, CF, RF$$

Assim, temos um total de 6 maneiras para escolher um sorvete com dois sabores distintos dentre os oferecidos. Ressaltando que as escolhas MC e CM representam o mesmo sorvete como dito no 1° e 2° caso.

CAPÍTULO 3

3 PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA CONTAGEM

3.1 Princípio da adição

Se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras, e uma decisão B pode ser tomada de n maneiras, e as decisões são independentes, então, o número de maneiras de se tomar as decisões A ou B é $m + n$.

Demonstração:

Se a decisão A pode ocorrer de m maneiras e a decisão B pode ocorrer de n maneiras, e os eventos A e B são independentes, ou seja, cada decisão não implica em uma restrição na outra, então deve-se escolher uma em um total de $m + n$ decisões, que obviamente pode ser escolhida de $m + n$ maneiras.

O princípio da adição, apesar de importante, é utilizado em uma quantidade pequena de exercícios. Vale a pena ressaltar, ainda, a sua aplicação sempre que aparecer o conectivo “**ou**” na pergunta.

Exemplo 1:

Pedro quer comprar um livro de análise combinatória que é vendido em 2 livrarias diferentes ao mesmo preço. Na livraria A , há 3 exemplares, enquanto na livraria B , há 6 exemplares. Quantas possibilidades de comprar um exemplar diferente Pedro tem ?

Solução:

Para adquirir o livro, Pedro pode ir à livraria A “ou” B . Na livraria A , há 3 opções, enquanto na livraria B , possui 6 opções. Portanto, pelo princípio da adição, o total de maneiras que Pedro pode adquirir esse livro é $3 + 6 = 9$ maneiras diferentes.

3.2 Princípio da multiplicação

Se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras, e uma decisão B pode ser tomada de y maneiras, e as decisões são independentes, então, o número de maneiras de se tomar as decisões A e B é $x \cdot y$.

Demonstração:

Supondo que a decisão A possa ser tomada de x maneiras distintas e que, uma vez tomada a decisão A , a decisão B possa ser tomada de y maneiras distintas. Supondo também que a decisão A consiste nos seguintes elementos: a_1, a_2, \dots, a_x e a decisão B consiste nos seguintes elementos: b_1, b_2, \dots, b_y . Observe a tabela abaixo:

	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots	b_y
a_1					\dots	
a_2					\dots	
a_3				*	\dots	
a_4					\dots	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_x					\dots	

Figura 2: Tabela de decisões

Podemos observar que cada casa desta tabela está associada a um par ordenado de decisões (a_i, b_j) quaisquer que sejam i e j naturais tais que $1 \leq i \leq x$ e $1 \leq j \leq y$, de acordo com cada linha e coluna. Por exemplo, a casa que está destacada com $(*)$ na tabela pertence à linha a_3 e à coluna b_4 , ou seja, está associada à decisão (a_3, b_4) . Logo, cada casa da tabela está associada a uma forma de tomar as decisões A e B e cada forma de tomar as decisões A e B está associada a uma casa da tabela. Assim, como na tabela temos x linhas e y colunas, conclui-se que o número de maneiras de tomarmos as decisões A e B é igual à $x \cdot y$.

Exemplo 1:

Marcelo tem 2 bermudas, uma de cor preta e outra de cor branca e 4 camisas de cores diferentes (verde, amarelo, cinza e roxa). De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir usando uma bermuda e uma camiseta?

solução 1:

De maneira análoga a demonstração do PFC, podemos construir a seguinte tabela:

	C_1	C_2	C_3	C_4
B_1				
B_2				

Figura 3: Tabela de decisões

Onde, B_1 e B_2 representam as duas bermudas e C_1, C_2, C_3 e C_4 as quatro camisas e a solução é dada pelo número de casas dessa tabela que é igual a 8.

solução 2:

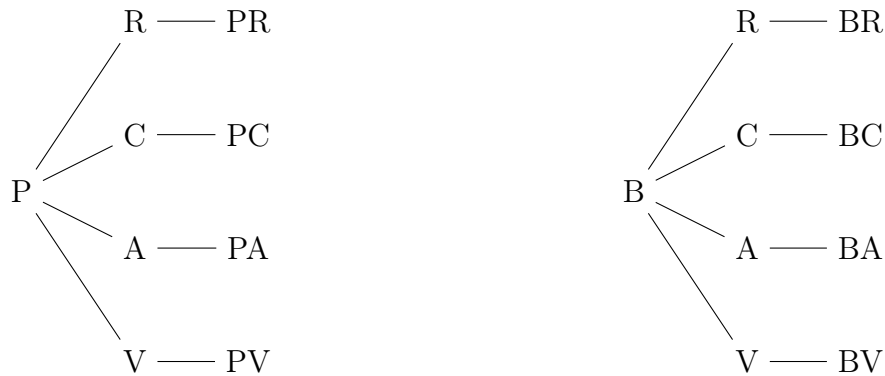
Acontecimento	Descrição das possibilidades	Número de possibilidades
Escolha da bermuda	P, B	2
Escolha da camisa	V, A, C, R	4

Tabela 2: Tabela de Roupas

Nota-se que há duas possibilidades para escolher uma bermuda. Feita a escolha de uma das bermudas, existem 4 possibilidades para a escolha de uma das camisas. Logo, pelo princípio multiplicativo temos que o total de maneiras diferentes de Marcelo se vestir é $2 \cdot 4 = 8$. Percebe-se neste exemplo que de forma prática o conectivo “e” indica que devemos usar o princípio da multiplicação.

solução 3:

Outro método eficiente para resolver problemas é usar o diagrama de árvore. Veja a solução do exemplo anterior por esse método.



Pelo diagrama de árvore podemos perceber que o total de resultados possíveis é 8.

3.3 Oficina: Pintando para contar

Usar métodos recreativos, como uma oficina, é uma boa maneira para que qualquer aluno, independentemente do nível de conhecimentos matemáticos, resolva exercícios relacionados ao PFC. O objetivo é, através de desenhos e pinturas, estimular a criatividade e o desenvolvimento do raciocínio. Apesar dos alunos inicialmente serem induzidos a resolverem os exercícios de uma forma lúdica, posteriormente, será exigido o rigor matemático. O intuito é que essas atividades sirvam de base para que exercícios e teorias mais complexos sejam compreendidos de uma forma mais leve e atrativa.

Essa oficina será composta por 7 (sete) exercícios de diferentes níveis para gradualmente alcançarmos a aprendizagem do conteúdo com uma importante combinação entre o concreto e o abstrato.

Exercício 1

Material necessário: folha A4 e lápis de cor.

Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas. Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas ? (Lima et al.,2006)

Soluções:

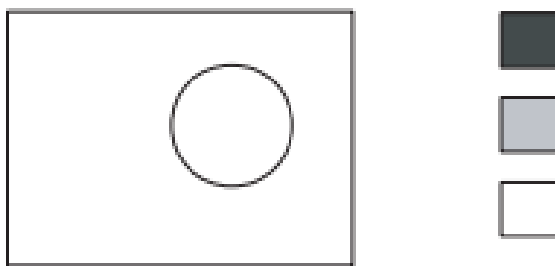


Figura 4: Bandeira 1

1° **Solução:** Nesta etapa, veremos uma solução natural em que não é exigida nenhuma técnica de contagem, valorizando apenas o raciocínio e a criatividade.

A maneira mais simples é listar através de desenhos todos os casos. Primeiramente, devemos escolher qual será a cor da parte externa. Em seguida, devemos escolher a cor da parte interna.

Podemos ver todas as possíveis maneiras nas 6 bandeiras conforme a figura abaixo:

Cor externa	Bandeiras	
<i>Preta</i>		
<i>Cinza</i>		
<i>Branca</i>		

Figura 5: Bandeiras 2

2° **Solução:** A solução acima poderia ser feita de maneira mais rápida e elegante através de um diagrama de árvore:

3° **Solução:** Outra forma de resolver o problema proposto seria a aplicação direta do princípio fundamental da contagem (PFC).

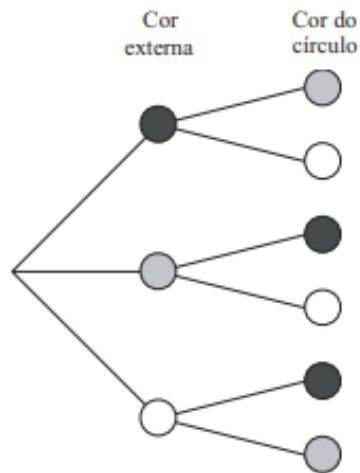


Figura 6: Diagrama de árvore

A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes e a cor interna de dois modos diferente. Logo, pelo PFC temos que o total de bandeiras que podem ser formadas é de $3 \times 2 = 6$.

Seguindo o raciocínio do exercício anterior, resolveremos o exercício abaixo.

Exercício 2

Material necessário: folha A4 e lápis de cor.

Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre as 4 dadas?

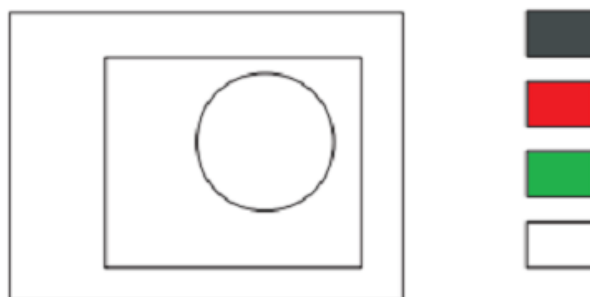


Figura 7: Bandeira 3

1º **Solução:** Percebe-se que neste exemplo podemos resolvê-lo utilizando as mesmas táticas que o exercício anterior:

- a) Desenhar e verificar todas as possíveis bandeiras.
- b) Utilizar uma árvore.
- c) Aplicar o PFC.

Ao optarmos por desenhar todas as bandeiras temos:

RETÂNGULO MAIOR PRETO	RETÂNGULO MAIOR VERMELHO	RETÂNGULO MAIOR VERDE	RETÂNGULO MAIOR BRANCO

Figura 8: Bandeira 4

Concluimos que o total de bandeiras que podemos confeccionar, seguindo as regras do problema, é igual a 24. Apesar de todo trabalho braçal, chegamos à solução. Vale a pena ressaltar que o objetivo inicial é encontrarmos uma solução para o exercício proposto sem utilizar técnicas de contagem e, depois de listados todos os possíveis resultados, apli-

car o PFC para que o aluno observe e compare os resultados. Assim, em problemas de maior complexidade será possível utilizar o PFC com clareza e confiança, sem a necessidade de listar todos os casos possíveis.

No caso de a atividade ser aplicada para o ensino fundamental, uma sugestão é dar a tabela com todas as bandeiras em branco e pedir para que o aluno pinte seguindo as regras da atividade proposta.

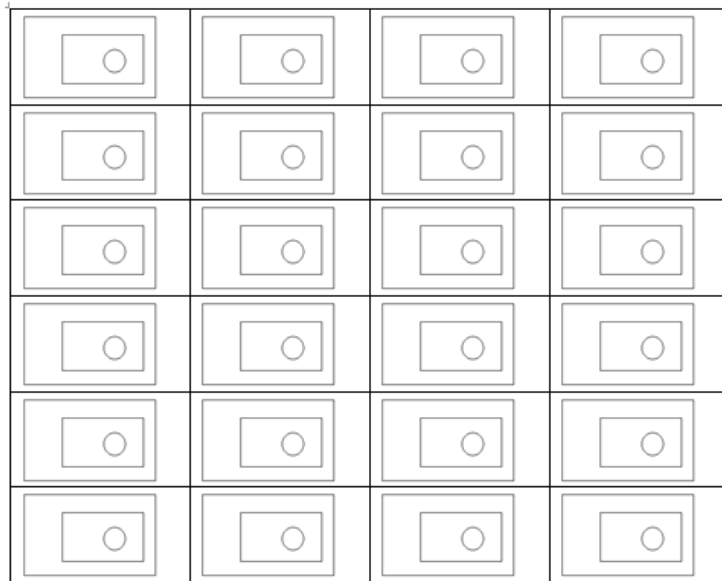
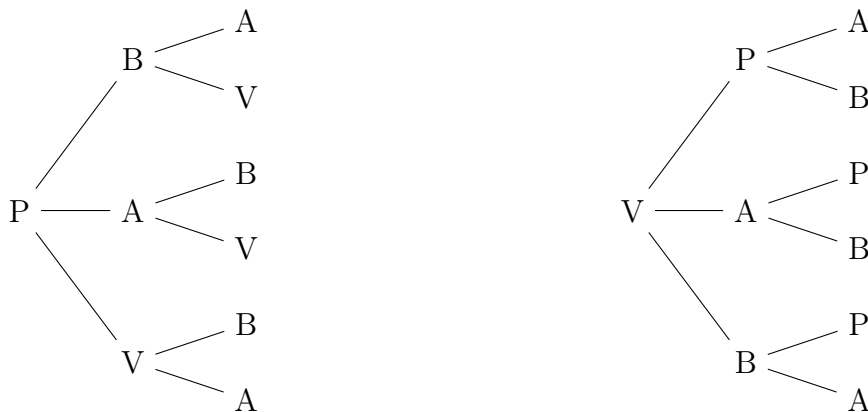
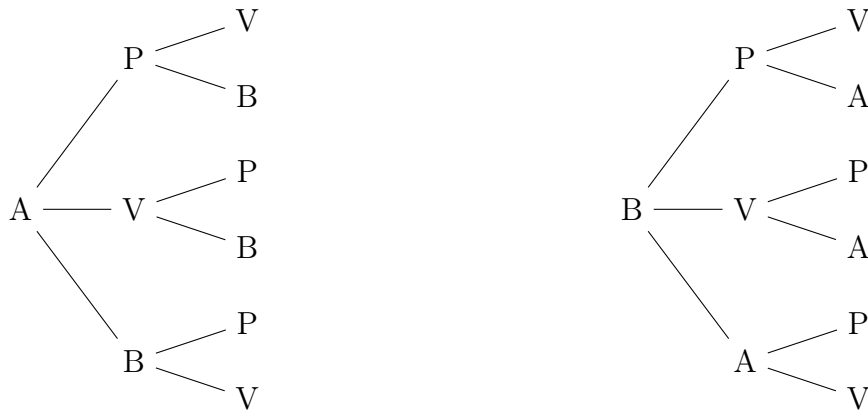


Figura 9: Bandeira 5

2° **Solução:** Pelo diagrama de árvore.

Representando a cor preta por P , vermelha por V , verde por A e branca por B obtemos o um diagrama em que a 1° letra representa a cor do retângulo maior, a 2° letra a cor do retângulo menor e a 3° letra a cor do círculo.





Logo, o total de bandeiras que podem ser formadas é igual a 24.

3º Solução: A solução pelo PFC ficaria da seguinte maneira:

- 1º- Número de escolhas que podemos fazer para pintar o retângulo maior: 4 modos
- 2º- Número de escolhas que podemos fazer para pintar o retângulo menor: 3 modos
- 3º- Número de escolhas que podemos fazer para pintar o círculo: 2 modos

Finalmente pelo PFC, o número de bandeiras que podem ser formadas é dado por:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

Exercício 3

Material necessário: folha A4 e lápis de cor.

(OBM - 2004) O desenho ao lado mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarela, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?

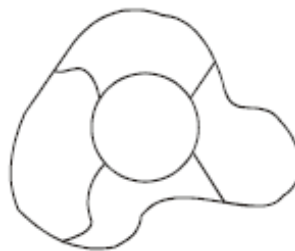


Figura 10: Mapa

1° **Solução:** Pela tabela abaixo temos que o total de modos para colorir os 5 países imaginários é igual a 6.

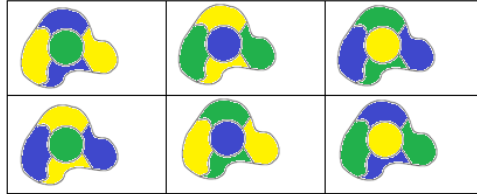


Figura 11: Mapa 1

Lembrando que, se necessário, pode-se sugerir aos alunos que usem a tabela em branco para colorirem todos os possíveis países.

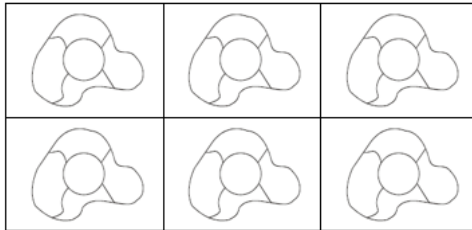


Figura 12: Mapa 2

2° **Solução:** Utilizando o PFC.

Nessa solução é fundamental começar pelo círculo, pois ele é vizinho de todos os outros países, caso contrário se optássemos por pintar primeiro os países B,C e D poderíamos utilizar as três cores disponíveis, dessa forma não seria mais possível pintar o país A de uma cor diferente de seus vizinhos. O estado A pode ser pintado de 3 formas: verde, azul ou amarelo. Para qualquer estado vizinho, por exemplo, o estado B, temos duas possibilidades. Os demais estados têm suas cores determinadas (1 possibilidade). Logo, podemos colorir o mapa de $3 \times 2 = 6$ maneiras.

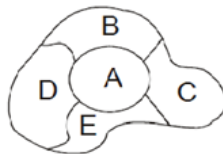


Figura 13: Mapa 3

Para solucionar problemas de colorir mapas, há um teorema conhecido como o Teorema das 4 Cores - Em um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes

para colori-lo de forma que as regiões vizinhas que não se toquem apenas em um ponto não partilhem a mesma cor. A demonstração desse teorema é complexa e utiliza-se de recursos computacionais.

Exercício 4

Material necessário: folha A4 e lápis de cor.

(OBM - 2003) As 4 colorações a seguir são consideradas iguais por coincidirem por rotação.

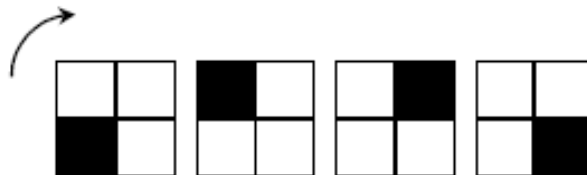


Figura 14: Rotação

De quantos modos diferentes é possível colorir as casas de um tabuleiro 2×2 de branco ou preto de modo que não existam dois tabuleiros que coincidam por rotação?

Solução:

Nesse exercício é importante manter-se atento pois a rotação da figura é responsável por diferenciações que não alteram a forma como o tabuleiro é pintado e por isso não devem ser contados como casos diferentes.

1º Opção: deixar o tabuleiro todo em branco:



Figura 15: Tabuleiro branco

2º Opção: pintar apenas uma casa do tabuleiro de preto:

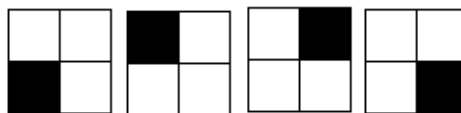
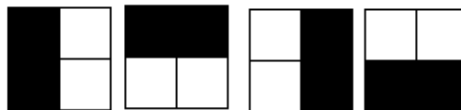


Figura 16: Tabuleiro com uma casa preta

3° Opção: pintar duas casas do tabuleiro de preto:



ou



Figura 17: Tabuleiro com duas casas pretas

4° Opção: pintar três casas do tabuleiro de preto:



Figura 18: Tabuleiro com uma casa branca

5° Opção pintar o tabuleiro todo de preto:



Figura 19: Tabuleiro preto

Portanto, existem 6 modos diferentes de colorir as casas de um tabuleiro 2×2 de branco ou preto de modo que não existam dois tabuleiros que coincidam por rotação.

Não apresentaremos as soluções das atividades 5, 6, e 7 nesta dissertação pois são análogas aos exercícios anteriores.

Exercício 5

Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de forma que faixas adjacentes tenham cores distintas? **R:36**



Figura 20: Bandeira 6

Exercício 6

Para pintar a bandeira abaixo, estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.

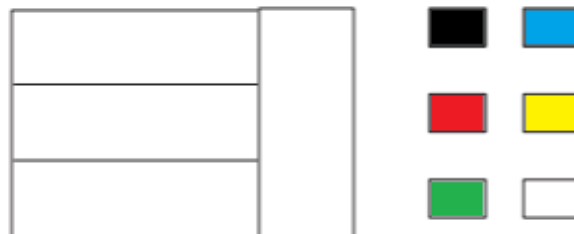


Figura 21: Bandeira 7

- a) De quantos modos a bandeira pode ser pintada? **R: 480**
- b) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas? **R: 3 cores**

Nesse exercício, o item *a* é um exemplo no qual a solução por tentativa de listar todos os possíveis casos torna -se impraticável devido ao grande número de possibilidades. Aqui, vale a pena fazer uma pausa na parte lúdica e ressaltar a verdadeira utilidade do PFC, que é contar grandes quantidades de objetos de maneira rápida e fácil.

Exercício 7:

(Vunesp-SP/2003) Dispostos de 4 cores distintas e temos que colorir o mapa mostrado na figura com os países P, Q, R e S , de modo que países cuja fronteira é uma linha não sejam coloridos com a mesma cor. De quantas maneiras é possível colorir o mapa se os países P e S forem coloridos da mesma cor? **R: 36**

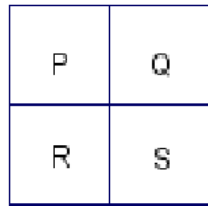


Figura 22: Países

3.4 Aplicação

Nesta seção, apresentamos uma série de exercícios contextualizados e suas soluções, com o objetivo de exemplificar e praticar problemas relacionados ao princípio fundamental da contagem.

Problema 1: Descobrindo a senha do banco.

(SAE - Modificada) Maria Lúcia é cliente do banco Delta, que fornece vários serviços que podem ser realizados por meio de um aplicativo de celular. Para utilizá-los, Maria deve digitar sua senha de 4 dígitos, escolhendo os números conforme o que aparece na tela. Se sua senha fosse 2831, por exemplo, ela deveria pressionar as teclas “2 ou 8”, “2 ou 8”, “3 ou 9” e “1 ou 4”, nessa ordem.



Figura 23: Celular

Maria, então, de acordo com a tela anterior, conseguiu entrar em sua conta após digitar, respectivamente, as teclas “0 ou 5”, “0 ou 5”, “2 ou 8” e “1 ou 4”. Passados alguns dias, Maria precisou efetuar outra transação e, ao abrir o aplicativo do banco em seu celular, se deparou com a tela da seguinte forma:



Figura 24: Celular

Para entrar na sua conta ela digitou, respectivamente, as teclas “1 ou 5”, “1 ou 5”, “2 ou 9” e “1 ou 5”.

a) De acordo com a primeira tela Maria digitou respectivamente as teclas “0 ou 5”, “0 ou 5”, “2 ou 8” e “1 ou 4”. Quantas possibilidades de senha existem para Maria?

b) Qual a senha de Maria Lúcia?

Solução:

a) Como a senha de Maria é formada por 4 dígitos e para cada dígito existem 2 possibilidades, então pelo PFC o total de senhas é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

b) Vejamos a tabela a seguir:

	1° dígito	2° dígito	3° dígito	4° dígito
Primeira vez	0 ou 5	0 ou 5	2 ou 8	1 ou 4
Segunda vez	1 ou 5	1 ou 5	2 ou 9	1 ou 5
Em comum	5	5	2	1

Tabela 3: Tabela de dígitos

Escolhendo os números em comum da 1° e 2° opções chegamos à senha: 5521

Problema 2: Novos modelos de placas.

(IFES - Modificada) O Departamento Nacional de Trânsito (DENATRAN) apresentou o novo modelo de placas de veículos que será usado no Brasil e demais países do Mercado Comum do Sul (MERCOSUL): Argentina, Uruguai, Paraguai e Venezuela. No Brasil, a placa será obrigatória para veículos novos a partir de janeiro de 2017. Em vez de três letras e quatro números, como é hoje, as novas placas terão quatro letras e três números, e poderão estar embaralhados, assim como mostrado na figura abaixo.

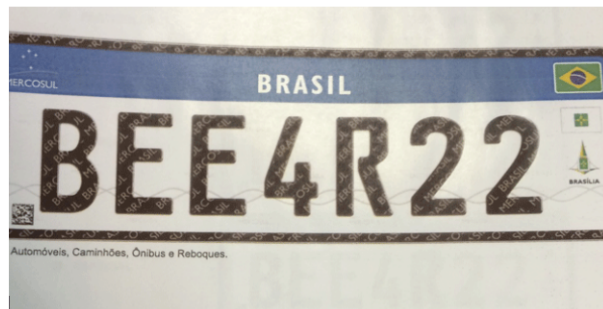


Figura 25: Placa

O objetivo da mudança é ampliar o número de combinações. O atual modelo brasileiro apresenta pouco mais de 175 milhões de possibilidades. Se no Brasil for adotada a placa com quatro letras (das vinte e seis letras do alfabeto) e três números (dos dez algarismos existentes), nessa ordem, qual o número de placas que teremos nesse novo modelo?

Solução:

As placas são formadas por 3 letras, 1 número, 1 letra e 2 números, nessa ordem.

	Possibilidades
1° Letra	26
2° Letra	26
3° Letra	26
1° Número	10
4° Letra	26
2° Número	10
3° Número	10

Tabela 4: Tabela de possibilidades

Então, pelo PFC temos: $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 = 456.976.000$.

Podemos perceber pelo PFC que a ordem em que as letras e os números ocupam não altera a quantidade de placas que podem ser confeccionadas. No sistema antigo podemos confeccionar um total de $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$ placas. Portanto, com o novo modelo passamos a ter $\frac{456.976.000}{175.760.000} = 2,6$ vezes o número de placas, ou seja, produzimos agora mais do que o dobro do números de placas.

Problema 3: Configurando o computador

Para montar a configuração de um computador, uma loja oferece 3 tipos de processadores: celeron, dualcore e o core 2 duo. Dois tipos de Hard Disk (HD) um de 160 GB e outro de 250 GB e também Dois tipos de configuração de Memória RAM uma de 2 GB e outra de 4 GB. Com essas opções quantas configurações diferentes podemos obter?

1° Solução:

Através do Princípio Fundamental da Contagem, é possível chegarmos a este número sem a necessidade da análise do diagrama, pois podemos nos utilizar da multiplicação de todas as possibilidades (ou escolhas). Temos: 3 opções de processador, 2 opções de hard disk e 2 opções de memória. Logo, pelo PFC, temos: $3 \times 2 \times 2 = 12$ possibilidades.

2° Solução:

Vejam, com auxílio de um diagrama, todas as diferentes possibilidades que temos para montarmos um equipamento:

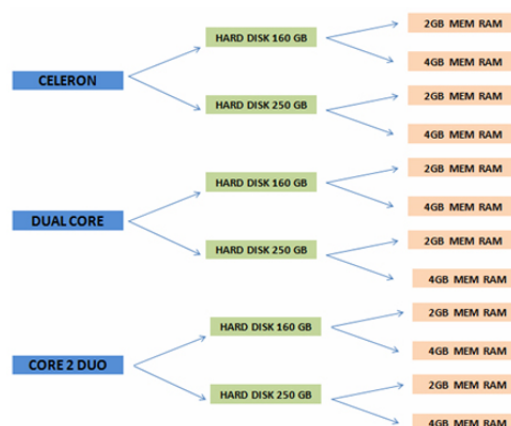


Figura 26: Diagrama de árvore

Logo, pela análise do diagrama, concluímos que existem 12 possibilidades.

Problema 4: Montando o lanche.

Uma lanchonete oferece em seu cardápio o lance “X-Quase Tudo”. O comprador escolhe um de cada tipo de ingrediente conforme a tabela:

Pães	Molho	Salada	Recheio	Acompanhamento
Francês	Tártaro	Alface	Carne Bovina	Batata frita
Sírio	Maionese	Rúcula	Carne suína	Polenta
Pão de forma	Rosê	Chicória	Frango	
Baguete	Queijos		Peixe	
	Vinagrete			

Tabela 5: Tabela de lanche

De quantas formas diferentes um lanche pode ser pedido?

Solução:

Para resolver esse problema vamos usar o PFC.

- Escolher o tipo de pão: 4 modos.
- Escolher o tipo de molho: 5 modos.
- Escolher o tipo de salada: 3 modos.
- Escolher o tipo de recheio: 4 modos.
- Escolher o tipo de acompanhamento: 2 modos.

Assim, pelo PFC, temos: $\underline{4} \times \underline{5} \times \underline{3} \times \underline{4} \times \underline{2} = 480$

Problema 5: Nono dígito do celular

(CESPE - 2012 - TRE-RJ) A Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL) elevou para nove a quantidade de dígitos dos números dos telefones celulares da região de São Paulo, com o objetivo de evitar a escassez de combinações numéricas. De acordo com a ANATEL, a principal razão de se adotar o nono dígito como forma de ampliar as possibilidades numéricas para os números dos celulares é preservar a padronização da

forma de discagem utilizada pelos usuários para a realização de chamadas locais e de longa distância. Com a inclusão do nono dígito, que corresponde ao algarismo 9 no início do número, ficam liberadas, para os números de celulares, as combinações com os oito algarismos dos números que só eram usados para telefones fixos e que começavam com 2, 3, 4 e 5, além do 1. O zero após o 9 não será usado, a fim de não haver confusão com as chamadas a cobrar, que são ativadas mediante o número 90. Com base nas informações acima, a quantidade de possíveis linhas de telefone celular na referida região será superior ao dobro da quantidade máxima que era possível antes da adoção dessa medida?

Solução:

Nos telefones fixos temos 8 dígitos que podem iniciar pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Então, os números de celulares de 8 dígitos podem iniciar pelos números 6, 7, 8 e 9. Assim, a quantidade de números de celulares que podemos formar com 8 dígitos é:

$$\underline{4} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} = 4 \times 10^7$$

Com a adição do 9º dígito temos:

- Para o 1º dígito: 1 opção que é o algarismo 9.
- Para o 2º dígito: 9 opções, a única restrição é o algarismo 0.

Para cada dígito restante, temos 10 opções. Assim, o total de números de telefones com 9 dígitos será:

$$\underline{1} \times \underline{9} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} = 9 \times 10^7$$

Portanto, a nova quantidade de números telefônicos será:

$$\frac{9 \times 10^7}{4 \times 10^7} = 2,25$$

Dessa forma podemos concluir que a nova quantidade de telefones é 2,25 vezes maior que a antiga.

Problema 6: Distribuir presentes para duas pessoas.

Paulo comprou 6 camisas diferentes. De quantas maneiras pode presentear seus dois filhos, de modo que todas as camisetas sejam distribuídas e cada filho receba pelo menos 1 ?

Solução:

Podemos considerar que cada camisa pode ser distribuída para os dois filhos de 2 maneiras diferentes: “ganhar” ou “não ganhar”. Por exemplo, supondo que os filhos sejam A e B , então, A ganha a camisa ou A não ganha a camisa (neste caso fica determinado que B ganhou). Portanto, para cada camisa comprada pelo pai, existe para A duas possibilidades: “ganhar” ou não ganhar”. Como são 6 camisas, o total de possibilidades de presentear seus dois filhos são:

$$\underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} = 2^6 = 64$$

Na situação acima, estamos levando em consideração a possibilidade de todas as camisas irem para o mesmo filho (filho A ganha as 6 camisas e filho B fica sem camisa ou filho A fica sem camisa e o filho B ganha 6 camisas). Logo, para garantir que todos ganhem pelo menos uma camisa teremos que excluir esses 2 casos.

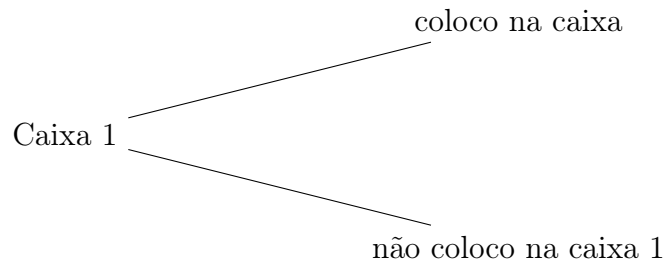
Portanto, existem $64 - 2 = 62$ maneiras de presentear seus dois filhos.

Este problema poderia ser generalizado da seguinte forma:

De quantas maneiras podemos distribuir n objetos diferentes em duas caixas diferentes, de modo que nenhuma caixa fique vazia?

Solução:

De modo análogo ao problema anterior, podemos usar o raciocínio a seguir. Para cada objeto temos duas opções: colocar na caixa 1 ou colocar na caixa 2, ou ainda, colocar na caixa 1 ou não colocar na caixa 1. Dado um objeto temos que tomar a seguinte decisão como mostramos na figura abaixo.



Como temos n objetos, podemos distribuir todos da seguinte forma:

$$\underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \cdots \times \underline{2} \times \underline{2} = 2^n$$

Como cada caixa deve conter pelo menos um objeto, devemos excluir os casos em que as caixas fiquem com todos os objetos ou sem nenhum objeto. Isso pode ocorrer apenas de 2 modos.

- Se a caixa 1 estiver com todos os objetos, então, a caixa 2 estará vazia.
- Se a caixa 2 estiver com todos os objetos, então, a caixa 1 estará vazia.

Portanto, o total de modos de distribuir os n objetos sem que nenhuma fique vazia é de $2^n - 2$.

Problema 7: Arrumando as roupas.

Paulo comprou 6 camisas diferentes. De quantas maneiras ele pode arrumar suas camisas em duas gavetas iguais, de modo que nenhuma fique vazia?

Solução:

Sejam C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6 as 6 camisas compradas por Paulo. Percebemos que arrumar em uma gaveta $C_1C_2|C_3C_4C_5C_6$ é idêntico a arrumar $C_3C_4C_5C_6|C_1C_2$ em outra. Podemos dizer que C_1, C_2 formam um conjunto, enquanto C_3, C_4, C_5, C_6 formam outro conjunto. Nota-se que, em relação ao problema 6, esses casos seriam considerados distintos. Exemplo:

- Filho “A” ganhar C_1, C_2 e filho “B” ganhar C_3, C_4, C_5, C_6

é diferente de

- Filho “A” ganhar C_3, C_4, C_5, C_6 e filho “B” ganhar C_1, C_2 .

Portanto, podemos concluir que para cada 2 maneiras de distribuir uma camisa entre duas pessoas, existe uma única maneira de arrumar uma camisa em 2 gavetas iguais. Logo, o número de soluções para esse problema corresponde à metade dos casos anteriores. Dessa forma, teremos 31 maneiras de arrumar as 6 camisas em duas gavetas iguais.

Esse problema pode ser generalizado da seguinte forma:

De quantas maneiras podemos distribuir n objetos diferentes em duas caixas iguais, de modo que nenhuma fique vazia?

Solução:

A partir da generalização do problema anterior, sabemos que para cada 2 maneiras de distribuirmos os n objetos diferentes em caixas diferentes, sem que nenhuma fique vazia, há uma maneira de distribuirmos os n objetos em duas caixas iguais de modo que nenhuma fique vazia.

Portanto, o número de maneiras de distribuirmos os n objetos diferentes em duas caixas iguais é:

$$\frac{2^n - 2}{2} = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Problema 8: Horário de estudos

Uma turma tem aulas às segundas, quartas e sextas, das 13h às 14h e das 14h às 15h. As matérias são Física, Matemática e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos poderá ser feito o horário dessa turma? (CARVALHO, MORGADO, 2013)

Solução 1:

Como não podemos ter aula de uma mesma disciplina no mesmo dia, os possíveis horários serão da seguinte forma:

$$\frac{M}{F}, \frac{M}{Q}, \frac{F}{M}, \frac{F}{Q}, \frac{Q}{M} \text{ e } \frac{Q}{F}$$

Para facilitar, vamos pensar em cada caso acima como uma peça de dominó, e que desejamos preencher as três colunas abaixo:

$\frac{M}{F}$	$\frac{M}{Q}$	
---------------	---------------	--

Tabela 6: Tabela de horários

- d_1 : para preencher a 1° coluna temos 6 opções. Supondo que usamos a peça: $\frac{M}{F}$
- d_2 : para preencher a 2° coluna, não podemos usar a peça $\frac{F}{M}$, pois, caso contrário, na terceira coluna teríamos que usar a peça $\frac{Q}{Q}$, que não existe. Assim, excluindo a sequência de peça $\frac{F}{M}$ e $\frac{M}{F}$ que já foi usada, restam 4 opções. Desse modo, imagine que usamos a peça $\frac{M}{Q}$.
- d_3 : Como usamos as peças $\frac{M}{F}$ e $\frac{M}{Q}$, não podemos utilizar as peças $\frac{F}{M}$ e $\frac{Q}{M}$. Logo, restam apenas 2 opções.

Portanto, pelo PFC temos que o total de possibilidades para montar o Horário é de $6 \times 4 \times 2 = 48$.

Solução 2:

A tabela a seguir ilustra um possível horário:

	SEG	QUA	SEX
13H - 14H	Matemática	Física	
14H - 15H		Matemática	Física

Tabela 7: Tabela de horários

- d_1 : Para escolher o horário para uma aula de matemática, temos 6 opções. Suponha que escolhemos a 1° aula de segunda.
- d_2 : Para escolher o horário para a 2° aula de matemática, temos 4 opções. Considerando que não pode ser na segunda feira, usaremos por exemplo, o segundo horário a quarta feira.

- d_3 : Em seguida vamos escolher os dias que terão aulas de física. Nota-se que obrigatoriamente uma aula de física terá que ser na sexta feira para que não ocorra duas aulas seguidas da mesma disciplina. Para a aula de física na sexta feira, temos 2 opções. Suponha no 2º horário.
- d_4 : Para próxima aula de física temos 2 opções. Considere que escolhemos a quarta feira.
- d_5 : Dessa forma, os horários para as aulas de química ficam definidos. Devemos tomar cuidado com os casos repetidos. Considerando que a ordem em que os dias foram escolhidos não é importante, bem como que segunda e quarta é o mesmo caso que quarta e segunda, concluímos que o total de maneiras que podemos elaborar esse horário é:

$$\frac{6 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1}{2} = 48$$

Problema 9: Total de caminhos.

Três carretas partem de Vitória em direção a Belo Horizonte. O trajeto é cortado por três estradas verticais, tal como mostra a figura no seguinte esquema.

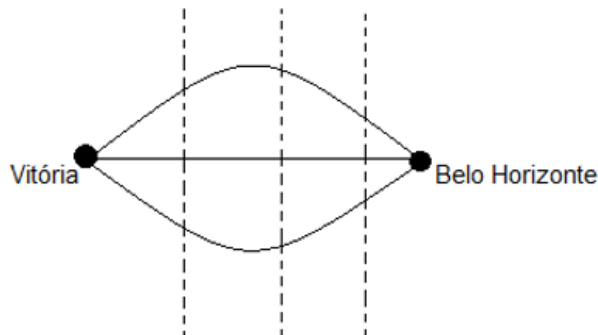


Figura 27: Caminhos

De quantas maneiras os três motoristas podem viajar de Vitória a Belo Horizonte, sabendo que não é permitido retroceder em nenhuma parte do trajeto?

Solução:

Partindo de Vitória os motoristas têm 1 possibilidade de chegar a C_1 e C_3 e 3 possibilidades para chegar até C_2 . Observe a figura a baixo:

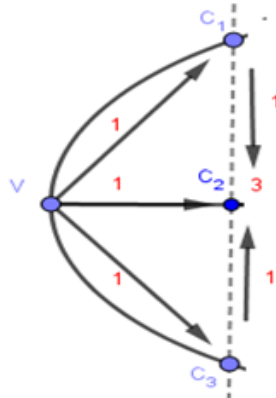


Figura 28: Caminhos

As setas indicam a direção em que os caminhões podem seguir, perceba que então não é possível fazer os caminhos de C_2 para C_1 e C_2 para C_3 . Seguindo o raciocínio podemos concluir que o total de caminhos até Belo horizonte será igual a 9. Veja a figura a baixo:

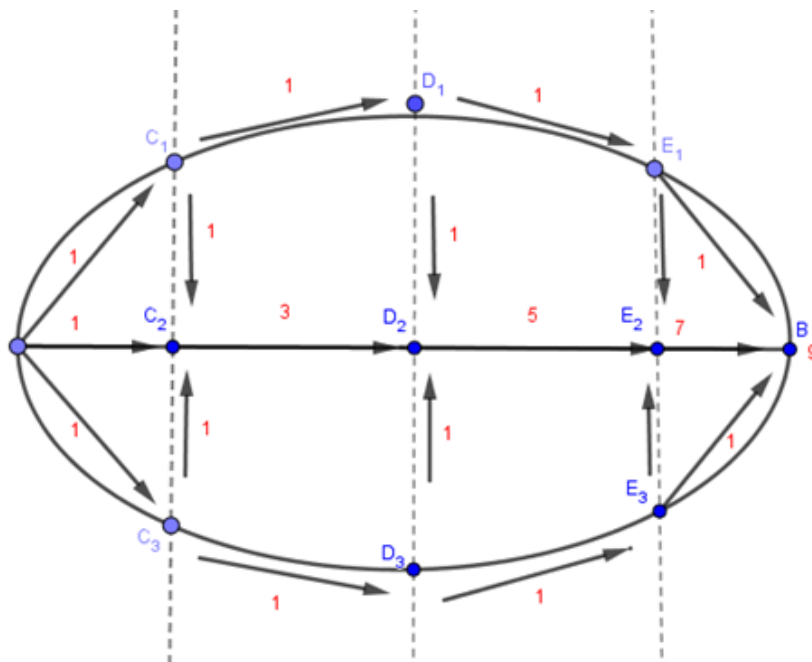


Figura 29: Caminhos

Problema 10: Escrita braile.

(ENEM-2005) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de seis pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra *A* é representada por:



Figura 30: Braile

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

- a) 12
- b) 31
- c) 36
- d) 63
- e) 720

Solução:

Para cada bolinha temos duas opções: grande ou pequena. Como temos um total de 6 bolinhas, o total de caracteres que podemos formar é de 2^6 . Como devemos ter pelo menos um caractere destacado em relação aos outros, devemos excluir o caso em que todas bolinhas possuem o mesmo tamanho (todas grandes ou todas pequenas). Assim, o total de caractere formado é de: $2^6 - 2 = 64 - 2 = 62$.

No gabarito oficial a resposta correta é a letra *d* pois considera o caso em que todas as bolinhas grandes são destaques, dessa forma a resposta é $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$.

3.5 Problemas de aprofundamento

Nesta seção, temos como objetivo aprofundar o conhecimento sobre o princípio fundamental de contagem através de problemas, além de mostrar suas aplicações em diferentes áreas da matemática. Para a solução dos problemas, vamos nos basear em 4 métodos: contagem direta, contagem indireta, divisão em casos e contagem por recorrência.

- Contagem direta: aplicação direta do PFC.
- Contagem indireta: conta-se todos os casos possíveis depois retira-se os casos indesejáveis.
- Divisão em casos: alguns problemas se tornam mais simples analisando casos separados.
- Contagem por recorrência: define-se uma sequência que estabelece uma relação com os termos anteriores da sequência.

Antes de partir para os exercícios, é importante ressaltar algumas considerações feitas pelo professor Augusto César Morgado em (Lima, 2006):

- Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
- Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisões.
- Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Problema 1: Considere o número $n = 2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^6$.

- Quantos divisores positivos possuem n ?
- Quantos são pares?
- Quantos são quadrados perfeitos?
- Cubos perfeitos?
- Quantos desses divisores são divisíveis por 6?

Solução:

O método utilizado para solução desse problema foi por contagem direta.

a) Todos os divisores de n são da forma $n = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^t$, onde:

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow 6 \text{ opções}$$

$$y \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow 5 \text{ opções}$$

$$z \in \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow 4 \text{ opções}$$

$$t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow 7 \text{ opções}$$

Portanto, pelo PFC temos que o número de divisores de n é $6 \times 5 \times 4 \times 7 = 840$.

b) Para um divisor de n ser par, basta garantir que o algarismo 2 esteja em sua fatoração. Assim para $n = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^t$, temos:

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow 5 \text{ opções}$$

$$y \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow 5 \text{ opções}$$

$$z \in \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow 4 \text{ opções}$$

$$t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow 7 \text{ opções}$$

Portanto, pelo PFC temos que o número de divisores pares de n é $5 \times 5 \times 4 \times 7 = 700$.

c) Para um divisor de n ser quadrado perfeito, basta que o expoente de cada número na fatoração de n seja par. Assim, para $n = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^t$, temos:

$$x \in \{0, 2, 4\} \rightarrow 3 \text{ opções}$$

$$y \in \{0, 2, 4\} \rightarrow 3 \text{ opções}$$

$$z \in \{0, 2\} \rightarrow 2 \text{ opções}$$

$$t \in \{0, 2, 4, 6\} \rightarrow 4 \text{ opções}$$

Portanto, pelo PFC temos que o número de divisores pares de n é $3 \times 3 \times 2 \times 4 = 72$.

d) Para um divisor de n ser um cubo perfeito, basta que o expoente de cada número na fatoração de n seja um múltiplo de 3. Assim para $n = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^t$, temos:

$$x \in \{0, 3\} \rightarrow 2 \text{ opções}$$

$$y \in \{0, 3\} \rightarrow 2 \text{ opções}$$

$$z \in \{0, 3\} \rightarrow 2 \text{ opções}$$

$$t \in \{0, 3, 6\} \rightarrow 3 \text{ opções}$$

Portanto, pelo PFC o número de divisores de n que são cubo perfeito é $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$.

e) Para que n seja divisível por 6, basta que apareçam os números 2 e 3 em sua fatoração. Assim para $n = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^t$, temos:

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow 5 \text{ opções}$$

$$y \in \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow 4 \text{ opções}$$

$$z \in \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow 4 \text{ opções}$$

$$t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow 7 \text{ opções}$$

Portanto, pelo PFC temos que o número de divisores de n que são divisíveis por 6 é $5 \times 4 \times 4 \times 7 = 560$.

$$\text{Seja } S = A + B + C. \text{ Se } S = \begin{cases} 9k, & \text{temos uma opção para } D = 9 \\ 9k + 1, & \text{temos uma opção para } D = 8 \\ 9k + 2, & \text{temos uma opção para } D = 7 \\ \vdots & \\ 9k + 8, & \text{temos uma opção para } D = 1 \end{cases}$$

Portanto, em todos os casos para S temos apenas uma opção para D . Assim, pelo PFC o total de números Paladinos de 4 dígitos é $9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$.

Problema 4: (Olimpíada Norueguesa) Quantas contas de banco de 11 dígitos existem usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1's consecutivos.

Solução:

O método utilizado para solução desse problema foi contagem por recorrência. Os problemas que envolvem contagem por recorrência dificilmente são encontrados nos livros de ensino médio. Então, como sugestão vamos iniciar a solução pelos casos simples de se contar.

1° caso: contas de um dígito: 1 ou 2. Portanto, temos 2 contas.

2° caso: contas de dois dígitos: 12, 21 ou 22. Portanto, temos 3 contas.

3° caso: contas com três dígitos: 121, 122, 212, 221 e 222. Portanto, temos 5 contas.

Seja a_n o número de contas ou (sequências) com n dígitos que satisfazem a condição proposta, assim:

$a_1 = 2 \rightarrow$ número de sequências com 1 dígito.

$a_2 = 3 \rightarrow$ número de sequências com 2 dígitos.

$a_3 = 5 \rightarrow$ número de sequências com 3 dígitos.

\vdots

$a_n \rightarrow$ número de sequências com n dígitos que satisfazem a condição do problema.

Nos casos abaixo podemos observar as sequências tendo como primeiro dígito 1 e 2 respectivamente:

$\underline{1} _ _ \dots _ _ \rightarrow$ se a sequência se inicia pelo dígito 1, então, o próximo dígito obrigatoriamente será o 2, restando $n - 2$ espaços. Assim, teremos uma sequência com a_{n-2} dígitos satisfazendo a condição do enunciado.

$\underline{2} _ _ \dots _ _ \rightarrow$ se a sequência se inicia pelo dígito 2, restam $n - 1$ espaços, ou seja, temos uma sequência a_{n-1} dígitos satisfazendo a condição do enunciado.

Então, podemos dizer que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, chegando assim em uma relação que nos permite achar o número de contas em função das outras duas anteriores. Podemos contar o número de contas de 11 dígitos sem muito trabalho da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 3 = 5 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13 \\ a_6 &= a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21 \\ a_7 &= a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34 \\ a_8 &= a_7 + a_6 = 34 + 21 = 55 \\ a_9 &= a_8 + a_7 = 55 + 34 = 89 \\ a_{10} &= a_9 + a_8 = 89 + 55 = 144 \\ a_{11} &= a_{10} + a_9 = 144 + 89 = 233 \end{aligned}$$

Dessa forma, existem 233 contas com 11 dígitos.

Problema 5: Quantas são as sequências de 10 termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução:

O método utilizado para solução foi de contagem por recorrência.

Esse problema é análogo ao anterior. O objetivo é fixar melhor a ideia de como podemos resolver problemas de contagem por recorrência.

1° caso : Sequências formadas apenas com um dígito: 0, 1 ou 2. Portanto, existem 3 sequências com um único dígito.

2° caso: Sequências formadas por dois dígitos que não possuem dois zeros consecutivos: 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21 e 22. Portanto, existem 8 sequências com 2 dígitos.

Seja a_n o número de sequências com n dígitos formados pelos algarismos 0, 1 e 2 que não possuem dois zeros consecutivos.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 8$$

Vamos pensar nas sequências de $a_n + 1$ dígitos que podem ser representadas do seguinte modo:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \underline{2} _ _ \dots _ _ & \text{inicia pelo dígito 2, seguida por uma sequência } a_n \text{ dígitos} \\ \underline{1} _ _ \dots _ _ & \text{inicia pelo dígito 1, seguida por uma sequência } a_n \text{ dígitos} \\ \underline{0} \underline{1} _ _ \dots _ _ & \text{inicia pelos dígitos 01, seguida por uma sequência } a_{n-1} \text{ dígitos} \\ \underline{0} \underline{2} _ _ \dots _ _ & \text{inicia pelos dígitos 02, seguida por uma sequência } a_{n-1} \text{ dígitos} \end{cases}$$

Assim, $a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1} = 2(a_n + a_{n-1})$. Portanto, temos que:

$$a_3 = 2(8 + 3) = 22$$

$$a_4 = 2(22 + 8) = 60$$

$$a_5 = 2(60 + 22) = 164$$

$$a_6 = 2(164 + 60) = 448$$

$$a_7 = 2(448 + 164) = 1224$$

$$a_8 = 2(1224 + 448) = 3344$$

$$a_9 = 2(3344 + 1104) = 9136$$

$$a_{10} = 2(9136 + 3344) = 24960$$

Problema 6: (UFRJ-2009) Uma pessoa pode subir uma escada da seguinte forma: a cada degrau, ou ela passa ao degrau seguinte ou galga dois degraus de uma só vez, pulando um degrau intermediário. A exceção dessa regra ocorre se a pessoa estiver no penúltimo degrau, quando ela só tem a opção de passar ao último degrau. Seja a_n o número de modos diferentes que a pessoa tem de subir uma escada de N degraus dessa maneira.

a) Calcule a_7

b) Determine N tal que $a_n = 987$

Solução:

O método utilizado para solução foi de contagem por recorrência. Vamos dividir esse problema em casos para facilitar a compreensão.

1° caso: vamos imaginar uma escada com um degrau.

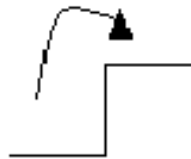


Figura 31: Escada

Nesse caso, temos apenas 1 possibilidade para subir a escada.

2° caso: vamos imaginar uma escada com dois degraus.

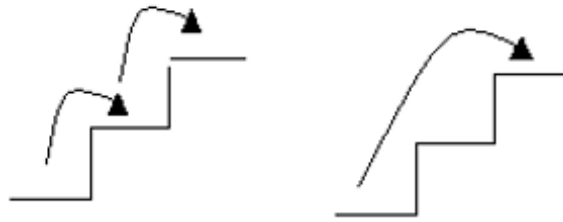


Figura 32: Escada

Nesse caso, temos 2 possibilidades para subir essa escada.

3° caso: vamos imaginar uma escada com três degraus.

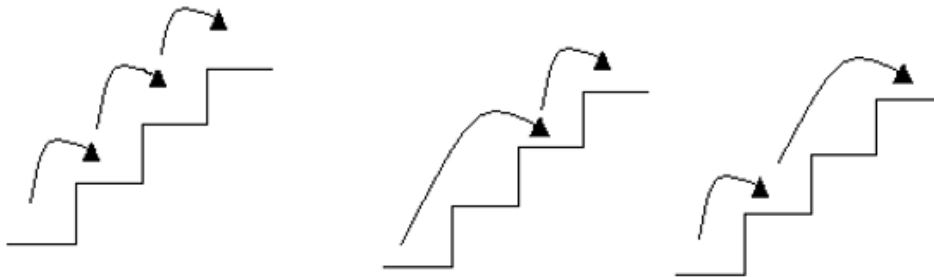


Figura 33: Escada

Nesse caso, temos 3 possibilidades para subir essa escada.

Seja a_n uma sequência que representa o número de modos de subir uma escada com n degraus, assim:

$a_1 = 1$ representa o número de modos de subir uma escada com 1 degrau.

$a_2 = 2$ representa o número de modos de subir uma escada com 2 degraus.

$a_3 = 3$ representa o número de modos de subir uma escada com 3 degraus.

Nosso objetivo é definir uma relação para a_n . Suponha-se, então, uma escada de n degraus.

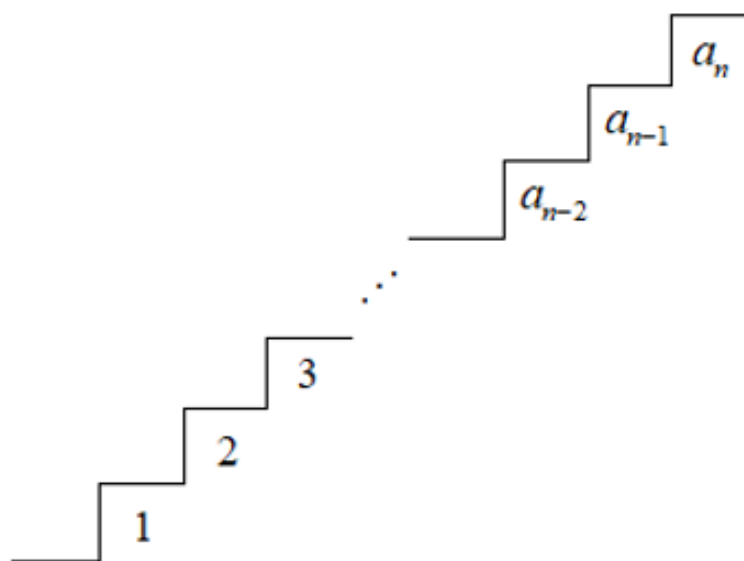


Figura 34: Escada

Percebemos que para chegar em a_n temos duas opções que são: partir de a_{n-1} ou partir de a_{n-2} . Desse modo, podemos definir a_n como:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow \text{Recorrência de Fibonacci.}$$

Assim, podemos montar a sequência $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots)$ com:

$$a_7 = 21$$

$$a_{15} = 987$$

Problema 7: (OBM-1999) Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo; 52 e 566 não).

Solução:

O método utilizado para solução foi por divisão em casos.

1° caso: vamos pensar inicialmente nos números de dois algarismos $\underline{A} \underline{B}$. Como seus dígitos estão em uma ordem estritamente crescente, segue que $0 < A < B$, o que

significa que devemos escolher dois números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A forma de escolher dois números desse conjunto é $\frac{9 \times 8}{2} = 36$. Feita a escolha dos dois números, o menor será o A e o maior será o B .

2° caso: Vamos pensar nos números de três algarismos $\underline{A} \underline{B} \underline{C}$. Como os dígitos estão em ordem estritamente crescente, segue que $0 < A < B < C$, o que significa que devemos escolher três números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A forma de escolher três números desse conjunto é $\frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$. Escolhidos os três números, automaticamente, está definido quem é A , B e C . O A representará o menor número, C o maior número e B o número maior que A e menor que C .

Portanto, o total de formas é: $36 + 84 = 120$ formas.

Problema 8: (UFC-CE/1998) Qual a quantidade de números inteiros positivos de 8 algarismos formados somente pelos algarismos 1, 2 e 3, nos quais cada um desses algarismos aparece pelo menos uma vez?

Solução:

O método utilizado para solução foi por contagem indireta.

1° caso: vamos contar todos os números de 8 dígitos que podemos formar:

— — — — — — — — → para cada traço temos 3 opções. Logo, o total de números que podemos formar é 3^8 .

2° caso: Contar todos os números de 8 dígitos formados apenas pelos números $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$

- Com os algarismos $\{1, 2\}$, temos para cada traço 2 opções.

— — — — — — — —

Portanto, pelo PFC temos 2^8 modos. Desse total vamos excluir os números formados apenas de 1's e 2's. Assim, temos um total de $2^8 - 2$ números.

- Para os algarismos $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$, o raciocínio é análogo ao anterior. Logo, o total de números formados pelos conjuntos $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$ é $3 \times (2^8 - 2)$ números.

3° caso: dos números de 8 dígitos de $\{1, 2, 3\}$ também devemos excluir os números formados apenas de 1's, 2's e 3's, que são apenas 3 números. Portanto, o total de números que satisfaz o problema é $3^8 - 3(2^8 - 2) - 3 = 3^8 - 3 \times 2^8 + 3$.

Problema 9: Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras, nas quais a letra A figura, mas não é a letra inicial da palavra?

Solução:

O método utilizado para a solução foi por contagem indireta.

1° caso: total de palavras com 5 letras distintas: $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$

2° caso: total de palavras com 5 letras distintas que começam por A : $1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 303600$

3° caso : total de palavras com 5 letras distintas que não têm A : $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6375600$

Assim, o total de palavras de 5 dígitos que começam por A são:

$$7893600 - 303600 - 6375600 = 1214400$$

Problema 10: Responda os itens abaixo:

- Qual é a soma dos divisores inteiros e positivos de 720?
- De quantos modos o número 720 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos?

Solução:

O método utilizado para a solução foi o de divisão em casos.

A decomposição de 720 em fatores primos é $2^4 \times 3^2 \times 5^1$. Os divisores inteiros e positivos de 720 são números da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$. O número de divisores de 720 é $5 \times 3 \times 2 = 30$.

a) A soma dos divisores é $s = \sum (2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma)$, com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$. Para calcular essa soma, dividimos as parcelas em dois grupos, conforme seja $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$.

$$s = \sum (2^\alpha \times 3^\beta \times 5^0) + \sum (2^\alpha \times 3^\beta \times 5^1) = 6 \sum (2^\alpha \times 3^\beta)$$

Agora, dividimos as parcela em grupos, conforme seja $\beta = 0$, $\beta = 1$ ou $\beta = 2$.

$$\begin{aligned} s &= 6 \left[\sum (2^\alpha \times 3^0) + \sum (2^\alpha \times 3^1) + \sum (2^\alpha \times 3^2) \right] \\ &= 6 \left[\sum 2^\alpha + 3 \sum 2^\alpha + 9 \sum 2^\alpha \right] = 6 \left[13 \sum 2^\alpha \right] = 78 \sum 2^\alpha \end{aligned}$$

Agora, para $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ temos:

$$78 [2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4] = 78 \times 31 = 2418$$

b) As soluções inteiras e positivas da equação $720 = x \cdot y$ são: $y = \frac{720}{x}$, x divisor inteiro positivo de 720. Como 720 tem 30 divisores inteiros e positivos, o número de soluções inteiras e positivas é 30.

Observa-se que cada decomposição de 720 em um produto de dois inteiros positivos dá origem a duas soluções inteiras e positivas de $720 = x \cdot y$. Assim, por exemplo, a decomposição de 720 no produto de 2 e 360 dá origem às soluções $x = 2$, $y = 360$ e $x = 360$, $y = 2$. Portanto, o número de decomposições é $\frac{30}{2} = 15$.

CAPÍTULO 4

4 PERMUTAÇÃO

4.1 Definição

1 - Ação ou efeito de permutar; 2 - Troca de uma coisa por outra; 3- Mecanismo pelo qual um elemento do todo se altera para formar nova combinação.

DICIONÁRIO - MICHAELIS

Na matemática, se possuímos uma sequência ordenada qualquer com um número “ n ” de elementos distintos, então, qualquer outra sequência formada pelos mesmos “ n ” elementos reordenados é chamada de permutação. Nas atividades envolvendo permutação, há diferentes formas e estratégias de resolução específicas e singulares para cada problema. Assim, para que nosso estudo fique simples e didático dividiremos os casos de permutação da seguinte forma:

$$\text{Permutação} \left\{ \begin{array}{l} \text{Simples ou linear} \\ \text{Circular} \\ \text{Com repetição} \\ \text{Caótica} \end{array} \right.$$

Antes de formalizarmos a ideia de permutação, definiremos o conceito de fatorial de um número. O fatorial de um número natural é uma função matemática definida da seguinte maneira:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n. \text{ (Lê-se a expressão } n! \text{ como “} n \text{ fatorial” ou “fatorial de } n \text{”).}$$

Exemplos:

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

4.2 Permutação simples ou permutação linear

Considere o seguinte problema: Dados n objetos distintos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ de quantos modos é possível ordená-los ?

Responder esse problema de imediato não é algo simples. Para que possamos compreender melhor o número de maneiras de ordenar objetos distintos, vamos inicialmente analisar casos menores até chegarmos a uma definição.

Em nosso primeiro caso, suponha-se que dispomos de três objetos distintos. Para facilitar a compreensão, definiremos esses objetos como sendo A, B e C , os quais podemos organizar da seguinte forma:

ABC	BAC	CAB
ACB	BCA	CBA

Assim, concluímos que existem 6 formas de organizar 3 objetos distintos. Como A, B e C representam três objetos distintos quaisquer, sempre que tivermos três objetos o número de maneiras de organizá-los será de 6 modos; ou ainda podemos dizer que para três objetos distintos, existem 6 permutações. O símbolo P_n significa a quantidade de permutação simples de n objetos distintos, portanto, o primeiro caso poderia ser representado por $P_3 = 3! = 6$.

Para o segundo caso, considera-se a seguinte situação: suponhamos que se deseja calcular a quantidade de números distintos formados a partir dos dígitos 1, 2, 3 e 4. Resolveremos esse problema listando todos os casos possíveis. Observe os resultados:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Assim, concluímos que existem 24 números de quatro algarismos distintos formado pelos dígitos 1, 2, 3 e 4. De maneira análoga ao primeiro caso, podemos afirmar que para 4 objetos distintos quaisquer existem 24 permutações, que podemos representar por $P_4 = 4! = 24$.

Pelos casos anteriores, podemos perceber que, se tivermos uma quantidade grande de objetos, não será uma tarefa fácil listar todas as soluções possíveis. Além de demandar tempo e paciência, teríamos muito trabalho pela frente. Para o primeiro caso, poderíamos usar o seguinte raciocínio:

Para a primeira letra temos 3 possibilidades, para a segunda letra temos 2 possibilidades e para a escolha da terceira letra temos 1 possibilidade. Pelo princípio fundamental da contagem temos $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Usando o mesmo raciocínio para o segundo caso concluímos que $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutações simples.

Voltando ao problema inicialmente exposto, podemos perceber que ele trata de uma generalização do primeiro e do segundo caso. Assim, o cálculo para a permutação de n objetos distintos pode ser representado do seguinte modo:

$$\underline{(1^\circ \text{ objeto})} \cdot \underline{(2^\circ \text{ objeto})} \cdot \underline{(3^\circ \text{ objeto})} \cdots \underline{(n^\circ \text{ objeto})}$$

Para a escolha do 1° objeto temos n possibilidades; e para a escolha do 2° objeto temos $n - 1$ possibilidades; e para a escolha do 3° objeto temos $n - 2$ possibilidades. E assim sucessivamente até a escolha do n° objeto, em que temos 1 possibilidade. Pelo princípio fundamental da contagem, podemos concluir que $P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 1 = n!$. Dessa forma, definimos que o número de permutação de n elementos distintos quaisquer é dado por $P_n = n!$.

Proposição: O número de permutações simples de n elementos denotado por P_n , é dado por $n!$.

Demonstração:

Sejam $1, 2, 3, \dots, n, n + 1$ uma sequência com $n + 1$ elementos, então, P_{n+1} é o número de permutações simples dessa sequência. É evidente que se dispomos apenas de 1 elemento temos apenas uma permutação que é representada por $P_1 = 1$.

As permutações podem ser divididas em dois grupos: aquelas que começam pelo elemento x e aquelas que não começam por x . Vejamos uma ilustração:

(i) $\underline{\mathcal{X}} \quad \dots \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \rightarrow$ para esse grupo o número de permutações é P_n .

(ii) $\underline{\mathcal{N}} \quad \dots \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \rightarrow$ para esse grupo o número de permutações é $n \cdot P_n$.

Assim, a equação de recorrência pode ser definida do seguinte modo:

$$P_{n+1} = P_n + nP_n \Rightarrow P_{n+1} = (n+1)P_n \Rightarrow \frac{P_{n+1}}{P_n} = (n+1).$$

Trocando os índices temos: $\frac{P_{i+1}}{P_i} = (i+1)$, com $i \geq 1$. Aplicando o produtório em ambos os lados obtemos:

$$\prod_{i=1}^n \frac{P_{i+1}}{P_i} = \prod_{i=1}^n (i+1)$$

Observa-se que no primeiro produtório temos um produto telescópico. Desenvolvendo chegamos a:

$$\frac{P_{n+1}}{P_1} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1), \text{ como } P_1 = 1$$

$$P_{n+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1), \text{ como } P_{n+1} = (n+1)P_n$$

$$(n+1)P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

$$P_n = n!$$

Definiremos agora a palavra anagrama.

anagrama

a·na·gra·ma sm Palavra ou frase formada com a transposição ou inversão das letras de outra: “Esse anagrama (‘devem’ – inversão de sílabas e contraste semântico com ‘vende’) amplia as possibilidades de leitura [...]” (AAn).

Um fato interessante sobre a permutação é que quando os objetos a serem permutados são letras de uma palavra, chamamos de anagrama essas permutações. Vale ressaltar que um anagrama pode ser uma palavra com significado presente no dicionário

ou não. Por exemplo, vejamos algumas permutações da palavra ROMA:

1) Anagramas com significados presentes no dicionário:

ROMA, RAMO, MORA, AMOR.

2) Anagramas que não possuem significados no dicionário:

RMAO, MRAO, RMOA, MROA, AOMR, OAMR

No exemplo acima, foram listados apenas alguns anagramas da palavra ROMA. O total de anagramas que podemos formar com as letras dessa palavra pode ser calculado por $P_4 = 4! = 24$ anagramas, pois se trata da permutação de quatro objetos distintos, como foi explicado anteriormente em nosso segundo caso de permutação quando as letras da palavra são todas distintas.

Em sala de aula, os exercícios que envolvem anagramas podem ser introduzidos de maneira lúdica e geralmente despertam interesse dos alunos, sobretudo, quando a palavra a ser permutada é o seu próprio nome. Existem filmes e programas de televisão que exploram essas ideias para prender a atenção do telespectador. Por exemplo, o filme O Código da Vinci, em que os anagramas são peças fundamentais para que o personagem principal decifre as pistas para solucionar um importante caso; ou como no Fantástico, programa de domingo transmitido na rede Globo, em que o apresentador trata o tema com humor, escrevendo o nome do jogador de futebol ao contrário quando o mesmo faz um gol contra.

Um fato que devemos ficar atento é que as permutações lineares nos possibilitam organizar (arrumar) elementos diferentes em filas e um grande número de exercícios exploram essa ideia. Vejamos os exemplos abaixo:

Exemplo 1:

De quantas maneiras diferentes podemos organizar 6 pessoas em fila?

Solução:

Utilizando o princípio fundamental da contagem:

Para o primeiro da fila temos 6 possibilidades; para o segundo temos 5 possibilidades; para o terceiro temos 4 possibilidades; e assim sucessivamente até o último da fila, onde resta apenas 1 possibilidade. O total de filas é $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Exemplo 2:

Luiz possui 4 livros de física diferentes e 3 livros de química também diferentes. Determine de quantas maneiras diferentes Luiz poderá arrumar esses livros de modo que os livros de química permaneçam juntos.

Solução:

Suponha-se que os livros de física sejam: F_1, F_2, F_3, F_4 .

Suponha-se que os livros de Química sejam: Q_1, Q_2, Q_3 .

Uma das possíveis arrumação é: $\underline{F_1} \ \underline{F_2} \ \underline{F_3} \ \underline{F_4} \ \boxed{Q_1 \ Q_2 \ Q_3}$

Se considerarmos os livros dentro do retângulo como um único livro, teríamos então 5 livros distintos. O número de maneiras de permutar 5 objetos distintos é $P_5 = 5! = 120$ modos. Observamos, ainda, que também podemos permutar os livros de química dentro do retângulo e eles ainda permanecerão juntos, satisfazendo a condição do problema. O número de maneiras de permutar 3 objetos distintos é $P_3 = 3! = 6$. Portanto, o número de maneiras de arrumar os 4 livros de física e os três livros de química em uma estante de modo que os livros de química sempre permaneçam juntos é $120 \times 6 = 720$.

4.3 Permutação circular

Considere o seguinte problema: Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com n crianças?

Assim como na permutação linear, para responder essa pergunta partiremos de caso mais simples, por exemplo, supondo $n = 3$. Ou seja, quantas rodas de ciranda podemos formar com três crianças?

Designaremos as crianças pelas letras A, B e C . Sabemos que o total de filas que podemos formar com essas três crianças é $P_3 = 6$ filas. Vamos representar essas filas da seguinte forma:

Fila 1: ABC

Fila 2: BCA

Fila 3: CAB

Fila 4: ACB

Fila 5: BAC

Fila 6: CBA

Se para cada fila fosse pedido para formar uma roda, teríamos os seguintes casos:

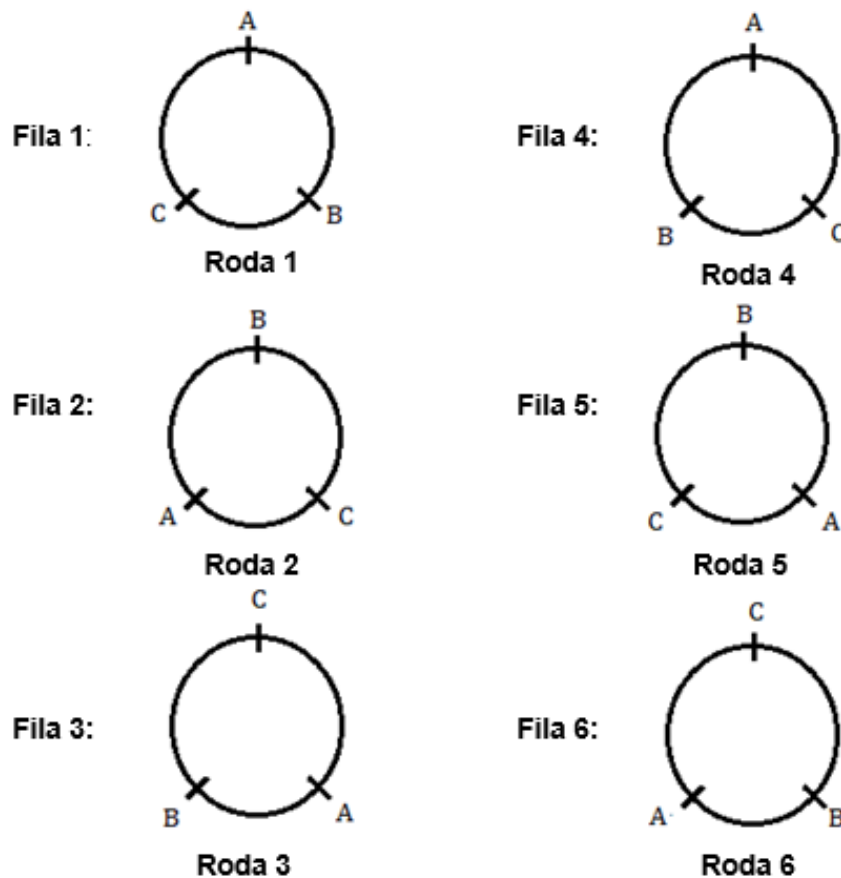


Figura 35: Roda de ciranda

Fixando a letra A em cada roda e seguindo sempre no sentido horário, observamos que as rodas 1, 2 e 3 são iguais e geram a mesma sequência ABC . De maneira análoga, as rodas 4, 5 e 6 são iguais e geram a mesma sequência ACB . Portanto, conseguimos formar apenas duas rodas distintas.

Considerando X o total de rodas distintas e que cada roda possui três equivalentes, o número total de rodas pode ser dado por $3X = 3!$. Dessa forma, podemos concluir que o número de rodas distintas é $X = \frac{3!}{3} = 2$.

Para descobrirmos o total de rodas distintas, temos que considerar que com n crianças podemos formar $n!$ filas; e que a partir de cada fila podemos formar uma roda; além disso, que cada roda gera n rodas iguais. Sendo X o número de rodas distintas, o total de filas é dado por $nX = n!$. Dessa maneira, concluímos que o total de rodas distintas é $X = \frac{n!}{n}$ ou $X = (n - 1)!$.

Chamaremos o números de rodas distintas de permutação circular e representaremos por $(PC)_n$ que significa o número de permutações circulares de n objetos distintos.

Uma outra maneira de resolver esse exercício é usando a recorrência. Seja a_n o número de maneiras de formar uma roda com n crianças (ou objetos distintos), então, temos: $a_2 = 1$ e $a_3 = 2$. Antes de formularmos uma equação de recorrência, vejamos os exemplos a seguir:

1° **caso:** ($n = 2$) Se temos duas crianças A e B é possível formar uma única roda. Ilustraremos da seguinte forma:

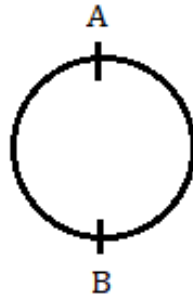


Figura 36: Roda de ciranda com duas crianças.

2° **caso:** ($n = 3$) Neste caso acrescentamos uma nova criança C na roda. Observa-se que existem dois espaços que C poderá ocupar. Assim, pelo PFC temos que número de rodas distintas que formamos com 3 crianças é $2 \cdot 1 = 2$. Podemos representar esse caso por $a_3 = 2 \cdot a_2$, ou seja, $a_3 = 2 \cdot 1 = 2$. Vejamos a ilustração:

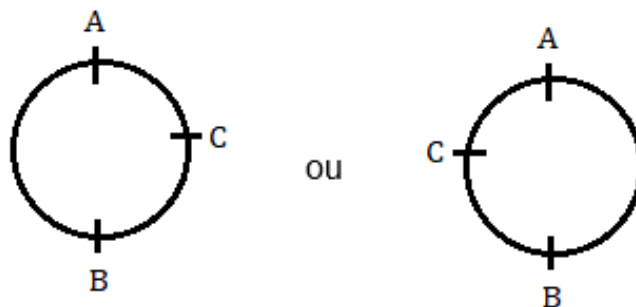


Figura 37: Roda de ciranda com três crianças.

3° **caso:** ($n = 4$) Neste caso acrescentamos uma nova criança D . Observa-se que

D possui duas opções para a escolha da roda que irá fazer parte. Feita a escolha, existem 3 opções de lugares para ocupar na roda. Assim, pelo PFC será possível formar $3 \cdot 2 = 6$ rodas de ciranda com 4 crianças.

Podemos representar esse caso como $a_4 = 3 \cdot a_3$ ou seja $a_4 = 3 \cdot 2 = 6$ rodas. vejamos a ilustração:

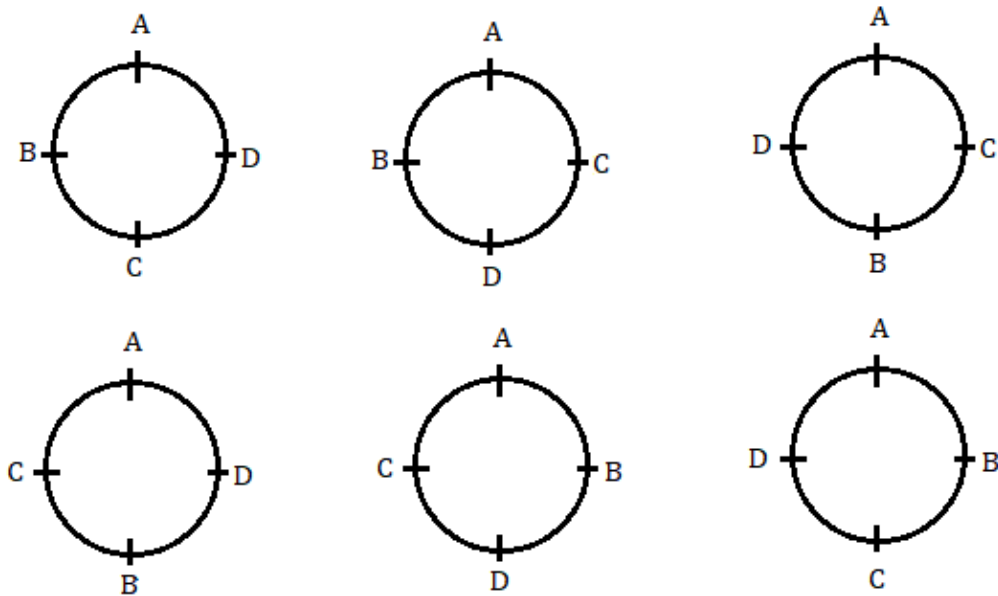


Figura 38: Roda de ciranda com 4 crianças.

Para o caso $n + 1$, imagine que temos uma roda com n crianças e queremos adicionar mais uma criança. O número de rodas de ciranda que podemos formar com n crianças é representado por a_n . Como em cada roda existem n escolhas de espaços para adicionar a nova criança, pelo PFC, temos que $a_{n+1} = n \cdot a_n$, definindo dessa forma a equação de recorrência. A partir da equação podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 1 \\
 a_3 &= 2 \cdot a_2 \\
 a_4 &= 3 \cdot a_3 \\
 a_5 &= 4 \cdot a_4 \\
 \dots &\quad \dots \\
 a_{n-1} &= (n-2) \cdot a_{n-2} \\
 a_n &= (n-1) \cdot a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Multiplicando obtemos $a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1)$ ou ainda $a_n = (n-1)!$.

4.4 Permutações com elementos repetidos

Analisaremos agora as permutações dos elementos em que nem todos são distintos como, por exemplo, na formação dos anagramas da palavra *SALA*. Para descobrirmos quantos anagramas possui essa palavra, vamos enumerar todas as permutações:

SALA, SAAL, SLAA, LSAA, LAAS, LASA, AASL, AALS, ASLA, ALSA, ALAS, ASAL.

Portanto, existem 12 anagramas da palavra *SALA*. Sabemos que a permutação de 4 objetos distintos é dada por $P_4 = 24$. Nesse momento, é comum ouvirmos as seguintes perguntas: como temos dois elementos repetidos, basta dividir por 2? E se forem 3 objetos repetidos, basta dividir por 3?

Nessas situações, devemos ter um pouco de cautela e analisar cada caso com muita atenção. Para ficar mais fácil de analisar, serão colocados índices diferentes nas letras *A* para que fique clara cada permutação. Nossa palavra ficará da seguinte forma SA_1LA_2 . Embora tenham sido colocados índices diferentes nas letras *A*, estas ainda são consideradas elementos iguais.

Considere o seguinte anagrama SA_1A_2L . Permutando as duas letras *A*, obtemos SA_2A_1L . Observa-se que estes dois anagramas são iguais, pois A_1 e A_2 são idênticos. No caso em que consideramos A_1 diferente de A_2 teríamos então duas palavras distintas. Desse modo, cada anagrama da palavra *SALA* é contado duas vezes se considerarmos A_1 diferente de A_2 . No entanto, como eles não são considerados diferentes, temos que o número de permutações da palavra *SALA* é $\frac{4!}{2} = 12$.

Já no caso de 4 objetos em que 3 objetos são repetidos, como ocorre na palavra *ABBB*, existem $4!$ permutações simples de 4 elementos distintos, considerando que as letras *B* são distintas. Em cada anagrama elas serão contadas $3!$ vezes. Por exemplo, vejamos os anagramas que começam pela letra *A*:

$$\begin{array}{ll} AB_1B_2B_3 & AB_1B_3B_2 \\ AB_2B_1B_3 & AB_2B_3B_1 \\ AB_3B_1B_2 & AB_3B_2B_1 \end{array}$$

Portanto, o número de anagramas em que as letras *B* são consideradas iguais é dada por $\frac{4!}{3!} = 4$.

Suponhamos agora que desejamos calcular o número de anagramas formado pelas 10 letras $KKKKXXXYZZ$. Se considerarmos todas as letras distintas, o número de permutações é $10!$. Analisando somente a repetição das letras K , para cada uma das $10!$ permutações obtidas, elas se repetem $4!$ vezes. Assim, o número de permutações em que elas são consideradas iguais é $\frac{10!}{4!}$.

Analisando agora as repetições das letras X em cada uma dos $\frac{10!}{4!}$ anagramas em que as letras X foram consideradas distintas, elas se repetiram $3!$ vezes. Assim, o número de permutações em que as 4 letras k são iguais e as 3 letras X são iguais e as 2 letras Y são distintas é $\frac{10!}{4! \cdot 3!}$.

Analogamente, se considerarmos as letras Y iguais, o número de anagramas que teremos que com as 10 letras $KKKKXXXYZZ$ é $\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$. Generalizando, se desejamos permutar n elementos em que α_1 deles são iguais, α_2 deles são iguais, \dots , α_r deles são iguais, o número de permutações é:

$$p_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} = \frac{n!}{(\alpha_1!) \cdot (\alpha_2!) \cdot \dots \cdot (\alpha_r!)}$$

4.5 Permutação caótica

Considere o seguinte problema: de quantas maneiras distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes endereçados a destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto?

Esse problema é popularmente conhecido como “O Problema das Cartas mal endereçadas” proposto por Nicolaus Bernoulli (1687 – 1759), solucionado por Leonard Euler (1707 – 1783), dando origem ao que chamamos hoje de permutação caótica.

Uma permutação caótica dos números $(1, 2, 3, \dots, n)$ é uma permutação em que nenhum número está em seu lugar primitivo. Por exemplo, as permutações $(2, 1, 4, 3)$ e $(4, 3, 2, 1)$ são caóticas, enquanto $(3, 2, 1, 4)$ não é, pois os números 2 e 4 estão em seus lugares de origem.

Como de praxe, antes de resolver o problema inicial, vamos pensar em um caso mais simples. Imaginando que um carteiro atrapalhado vai entregar os envelopes E_1, E_2 e E_3 em uma rua que tem três casas, denominadas C_1, C_2 e C_3 , de quantas formas distintas é possível entregar todos os envelopes nas casas erradas? Considere que o envelope E_1 é

destinado à casa C_1 , o envelope E_2 é destinado à casa C_2 e o envelope E_3 é destinado à casa C_3 .

Solução:

Como temos 3 envelopes, o número de maneiras de distribuímos esses envelopes é $3! = 6$ modos. Observe a tabela abaixo:

	C_1	C_2	C_3
1° distribuição,	E_1	E_2	E_3
2° distribuição,	E_1	E_3	E_2
3° distribuição,	E_2	E_1	E_3
4° distribuição,	E_2	E_3	E_1
5° distribuição,	E_3	E_1	E_2
6° distribuição,	E_3	E_2	E_1

Tabela 8: Envelopes

- Na 1° Distribuição todos os envelopes foram entregues corretamente.
- Na 2° Distribuição, apenas o envelope E_1 foi entregue corretamente.
- Na 3° Distribuição, apenas o envelope E_3 foi entregue corretamente.
- Na 4° e 5° Distribuição nenhum envelope foi entregue corretamente.
- Na 6° Distribuição, apenas o envelope E_2 foi entregue corretamente.

Portanto, existem 2 possibilidades de todos os envelopes serem entregues nas casas erradas, que vamos denotar por $D_3 = 2$.

Teorema: Seja D_n o número de permutações caóticas de $(1, 2, 3, \dots, n)$. Então, temos a seguinte fórmula para D_n para todo natural não nulo.

$$D_n = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \text{ ou } D_n = n! \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!} + 1 \right).$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por recorrência.

Calculemos D_n , ou seja, o número de permutações simples de $1, 2, 3, \dots, n$, nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. Se temos apenas 1 elemento, então, $D_1 = 0$. Se temos 2 elementos, $D_2 = 1$. As permutações podem ser divididas em dois grupos: aquelas nas quais o 1 fica no lugar do número que ocupa a primeira posição; e aquelas nas quais isso não ocorre.

Para formar a permutação do primeiro grupo, devemos escolher o número que trocará de lugar com o 1, o que pode ser feito de $n - 1$ modos. Em seguida, devemos arrumar os $n - 2$ elementos nos restantes $n - 2$ lugares, sem que nenhum elemento ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n-2} modos. Há, portanto, $(n - 1)D_{n-2}$ permutações do primeiro grupo. Vejamos uma ilustração:

$$\underline{i} \dots \underline{1} \dots \underline{\quad}$$

o número 1 foi trocado de posição com o número i e, depois, fizemos a permutação caótica dos $n - 2$ números restantes, que é representada por D_{n-2} .

Para formar a permutação do segundo grupo, temos de escolher o lugar que será ocupado pelo número 1 (chamaremos esse lugar de K), o que pode ser feito de $n - 1$ modos. Em seguida, devemos arrumar os restantes $n - 1$ elementos nos demais $n - 1$ lugares, sem que o elemento k ocupe o primeiro lugar e sem que nenhum dos demais elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n-1} modos. Há, portanto, $(n - 1)D_{n-1}$ permutações no segundo grupo. Consequentemente, $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

Portanto, chegamos na relação de recorrência $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ com $n \geq 3$. Trocando os índices temos:

$$D_i = (i - 1)(D_{i-1} + D_{i-2}), \text{ com } i \geq 3. \text{ Desenvolvendo essa relação temos:}$$

$$D_i = iD_{i-1} + iD_{i-2} - D_{i-1} - D_{i-2} \Rightarrow D_i - iD_{i-1} = iD_{i-2} - D_{i-1} - D_{i-2}$$

$$\Rightarrow D_i - iD_{i-1} = (i - 1)D_{i-2} - D_{i-1} \Rightarrow D_i - iD_{i-1} = -[D_{i-1} - (i - 1)D_{i-2}].$$

Definido uma sequência auxiliar $E_j = D_j - jD_{j-1}$, para $j \geq 2$ temos:

$E_i = -E_{i-1}$, para $i \geq 3$. Daí, $\frac{E_i}{E_{i-1}} = -1$. Aplicando o produtório em ambos os lados temos:

$$\prod_{i=3}^n \frac{E_i}{E_{i-1}} = \prod_{i=3}^n (-1)$$

Observe que no primeiro produtório temos um produto telescópico. Desenvolvendo esse produto chegamos a:

$$\frac{E_n}{E_2} = (-1)^{n-2}, \text{ como } E_2 = 1 \text{ então, } E_n = (-1)^n \Rightarrow D_n - nD_{n-1} = (-1)^n; n \geq 3.$$

Trocando os índices novamente temos:

$D_i - iD_{i-1} = (-1)^i$, com $i \geq 3$. Dividindo todos os termos por $i!$ temos:

$$\frac{D_i}{i!} - \frac{D_{i-1}}{(i-1)!} = \frac{(-1)^i}{i!}$$

Definindo uma nova sequência auxiliar $F_j = \frac{D_j}{j!}$, com $j \geq 1$, temos:

$F_i - F_{i-1} = \frac{(-1)^i}{i!}$, $i \geq 3$. Aplicando o somatório de ambos os lados, obtemos:

$$\sum_{i=3}^n F_i - F_{i-1} = \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

Observe que o primeiro somatório é uma soma telescópica, que desenvolvendo temos:

$$\begin{aligned} F_n - F_2 &= \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i}{i!} \\ \Rightarrow \frac{D_n}{n!} - \frac{D_2}{2!} &= \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i}{i!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{D_n}{n!} &= \frac{1}{2!} + \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i}{i!} \\
\Rightarrow \frac{D_n}{n!} &= \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} \\
\Rightarrow \frac{D_n}{n!} &= \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} - 1 + 1 \\
\Rightarrow \frac{D_n}{n!} &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!} + 1 \\
\Rightarrow D_n &= n! \left(\sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} + 1 \right) \square
\end{aligned}$$

Conhecendo a fórmula, o exercício do carteiro atrapalhado é resolvido facilmente apenas aplicando a fórmula, e sua solução é dada por:

$$D_3 = 3! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right)$$

$$D_3 = 6 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right)$$

$$D_3 = 3 - 1 = 2.$$

Exemplo: Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra *GATO*, de modo que não apareçam na primeira posição a letra *G*; na segunda, a letra *A*; na terceira, a letra *T*; e na quarta, a letra *O*.

Solução:

Queremos formar anagramas com a palavra *GATO* de modo que cada letra não ocupe a sua posição primitiva, portanto, trata-se de um problema de permutação caótica. Assim, temos:

$$D_4 = 4! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right)$$

$$D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right)$$

$$D_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1$$

$$D_4 = 9.$$

4.6 Problemas de permutação

Problema 1: Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem se sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem se sentar juntos? (MORGADO et al.,2005).

Solução:

Representaremos por B o delegado do Brasil, por P o delegado de Portugal, por E o delegado do Estados Unidos e por I o delegado do Iraque. Os demais delegados representaremos por: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 . Resolveremos esse problema em duas etapas.

A primeira etapa consiste em contar os casos em que os delegados do Brasil e Portugal estão juntos sem se preocupar com os demais delegados.

$$\underline{P_1} \ \underline{P_2} \ \underline{P_3} \ \underline{P_4} \ \underline{P_5} \ \underline{P_6} \ \underline{E} \ \underline{I} \ \boxed{\underline{B} \ \underline{P}}$$

Considerando a caixa $\boxed{\underline{B} \ \underline{P}}$ como um único elemento garantimos que B e P sempre fiquem juntos. Assim, a nossa lista passa a ter 9 elementos e o número de permutações é $9!$. Lembrando que devemos permutar os dois elementos dentro da caixa que é $2!$. Assim, o número de permutações em que os delegados do Brasil e Portugal estão juntos é de $9! \cdot 2!$.

A segunda etapa consiste em retirar os casos indesejados, que são as filas em que os delegados dos Estados Unidos e do Iraque estão juntos. Contaremos agora esses casos. Vejamos a ilustração abaixo:

$$\underline{P_1} \underline{P_2} \underline{P_3} \underline{P_4} \underline{P_5} \underline{P_6} \boxed{\underline{E} \underline{I}} \boxed{\underline{B} \underline{P}}$$

Considerando cada caixa como um único elemento, nossa lista passa a ter 8 elementos e o número de permutações é $8!$. Como devemos permutar os elementos dentro de cada caixa, temos que o número de permutações em que os delegados do Brasil e de Portugal estão juntos e que os delegados dos Estados Unidos e do Iraque também estão juntos é $8! \cdot 2! \cdot 2!$.

Dessa forma, podemos concluir que o número de filas em que os delegados do Brasil e de Portugal estão juntos e que os delegados dos Estados Unidos e do Iraque não estão juntos é: $9! \cdot 2! - 8! \cdot 2! \cdot 2! = 564.480$.

Problema 2: (AFA - MODIFICADA/2003) Deseja-se comprar algo que custa cinquenta e cinco centavos em uma máquina automática, dispondo de oito moedas de cinco centavos do mesmo modelo e cinco de dez centavos, também do mesmo modelo. Existem n modos possíveis de introduzir as moedas para totalizar cinquenta e cinco centavos. Qual o valor de n ?

Solução:

Temos 8 moedas de 5 centavos e 5 moedas de 10 centavos. Cada moeda de 5 centavos representaremos pela letra C e cada moeda de 10 centavos representaremos pela letra D . Com essas moedas queremos descobrir quantas sequências formam no total 55 centavos. Para isso, observe a tabela abaixo:

	5D + 1C	4D + 3C	3D + 5C	2D + 7C
Sequência	$DDDDDC$	$DDDDCCC$	$DDDCCCCC$	$DDCCCCCCC$
Permutação da sequência	$\frac{6!}{5!} = 6$	$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$	$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$	$\frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

Tabela 9: Sequência de moedas

Portanto, o total de sequências é $n = 6 + 35 + 56 + 36 = 133$.

Problema 3: Em uma brincadeira em um programa de TV, 6 casais devem se sentar em bancos arrumados de modo circular com a seguinte restrição: homens e mulheres devem se sentar de modo alternado, cada homem ao lado apenas de mulheres e

vice-versa. De quantas maneiras esses casais podem se arrumar para a brincadeira?

Solução:

Primeiro, organizam-se os homens na roda deixando sempre um banco vazio entre cada um deles. Isso pode ser feito de $PC_6 = 5! = 120$ modos. Depois, nos 6 espaços entre os homens, deve-se arrumar as mulheres. Para arrumar as mulheres, basta usar uma permutação simples ou o PFC. A primeira mulher tem 6 escolhas para decidir onde vai se sentar; a segunda, 5 escolhas; a terceira, 4 escolhas; e assim sucessivamente até a sexta mulher, que terá apenas uma escolha. Portanto, o número de maneiras para arrumar esses casais é $PC_6 \cdot P_6 = 5! \cdot 6! = 120 \cdot 720 = 8640$ distribuições.

Problema 4: (FUVEST-MODIFICADA / 2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. Qual o número de maneiras de sortear os pedaços de papéis de modo que nenhum participante retire seu próprio nome?

Solução:

Representaremos no pedaço de papel a letra inicial de cada pessoa. Cláudia pela letra C , Paulo por P , Rodrigo por R e Ana por A . Considere a seguinte sequência C, P, R, A em que cada letra está em sua posição primitiva. Para que nenhuma pessoa retire a letra inicial de seu nome, basta fazermos uma permutação caótica de 4 elementos.

$$D_4 = 4! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right)$$

$$D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right)$$

$$D_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1$$

$$D_4 = 9.$$

Portanto, existem 9 modos para que nenhum participante retire seu próprio nome.

Problema 5: (OBEMP-2018) Helena tem três caixas com 10 bolas em cada uma. As bolas dentro de uma mesma caixa são idênticas, e as bolas em caixas diferentes possuem cores distintas. De quantos modos ela pode escolher 15 bolas dessas três caixas?

- a) 91
- b) 136
- c) 150
- d) 200
- e) 210

Solução:

sejam x , y e z as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas. Logo, deve valer a seguinte equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 15, \text{ com as restrições } 0 \leq x, y, z \leq 10.$$

Considere 15 bolas e 2 barras. Qualquer permutação desses 17 objetos pode ser associada a uma solução da equação anterior em inteiros não negativos: as bolas à esquerda da primeira barra correspondem ao x ; as bolas entre as duas barras correspondem ao y ; e as bolas à direita da segunda barra correspondem ao z . Por exemplo, a escolha de 9 bolas da primeira caixa, nenhuma da segunda e 6 da terceira pode ser representada por:



Figura 39: Caixa de bolas

Com 15 bolas e 2 barras, há $\frac{17!}{2! \cdot 15!} = 136$ formas de separá-las. Entretanto, dentre essas soluções, é possível que uma das três variáveis assuma um valor maior que 10. Como apenas uma das três pode assumir um valor maior que 10, para eliminar as soluções indesejadas, escolhemos uma das três variáveis com valor maior que 10 e subtraímos 11 dela. A solução então passará a satisfazer a equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 4$$

Usando agora 4 bolas e 2 barras, concluímos que a equação anterior possui $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ soluções. Portanto, o total de soluções é $136 - 3 \cdot 15 = 91$.

Problema 6: (ITA-2015) Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

- a) Determine o número de elementos de S .
- b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

Solução:

a) Todo polinômio de grau 4 é da forma $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ com $a \neq 0$. O número total S de polinômios de grau 4 cujos coeficientes são formados pelos números 1, 1, 2, 2, 2 é $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.

b) Se -1 é raiz, então, $P(-1) = 0$. Daí, $a - b + c - d + e = 0 \Leftrightarrow a + c + e = b + d$.

Dessa forma, podemos concluir que $4 \leq a + c + e = b + d \leq 4$, ou seja, $4 \leq b + d \leq 4$. Logo, $b + d = 4$, e a única forma para isso acontecer é $b = d = 2$. Portanto, o número de subconjuntos S que possui -1 como raiz é dada pela permutação dos números restantes 1, 1, 2. Os possíveis valores que a, c, e podem assumir é $P_3^2 = \frac{3!}{2} = 3$, e os polinômios que satisfazem o problema são: $P_1(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, $P_2(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ e $P_3(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$.

Problema 7: (ENQ-2017.1) Uma permutação de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está na posição original. Por exemplo, $(2, 1, 4, 5, 3)$ e $(3, 4, 5, 2, 1)$ são permutações caóticas de $(1, 2, 3, 4, 5)$, mas $(3, 2, 4, 5, 1)$ não é, pois 2 está no lugar original. O número de permutações caóticas de n elementos é denotado por D_n .

- a) Determine D_4 listando todas as permutações caóticas de $(1, 2, 3, 4)$.
- b) Quantas são as permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ que têm exatamente três números em suas posições originais?

Solução:

a) Nesse item é pedido para listar todas as permutações de 4 elementos da lista $(1, 2, 3, 4)$. O uso da fórmula é necessário apenas se quisermos conferir se não deixamos faltar nenhuma permutação. Pela fórmula sabemos que $D_4 = 9$ e que as permutações são:

Iniciando por 2: 2341, 2413, 2143

Iniciando por 3: 3142, 3412, 3421

Iniciando por 4: 4132, 4321, 4312.

b) Iniciaremos a solução desse item com um exemplo particular. Vejamos a ilustração:

— 2 — 4 — — 7

Feita a escolha dos três números que vão ocupar as suas posições primitivas, só precisamos permutar caoticamente os quatro números restantes, o que pode ser feito de $D_4 = 9$ modos. Dessa forma, basta sabermos de quantas formas podemos escolher três números de modo que eles ocupem a sua posição primitiva. Podemos fazer isso da seguinte forma:

- O primeiro número pode ser escolhido de 7 modos.
- O segundo número pode ser escolhido de 6 modos.
- O terceiro número pode ser escolhido de 5 modos.

Pelo PFC, o número de modos que temos para escolher esses três números é $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Porém, queremos que esses números ocupem as suas posições primitivas, então, devemos excluir os casos indesejáveis. Por exemplo, suponha-se que os três números escolhidos sejam 2, 4, 7, como na ilustração feita acima. Com esses números podemos formar os números 247, 274, 427, 472, 724 e 742, em que apenas um deles mantém todos os números nas suas posições primitivas. Portanto, o total de maneiras de escolher três números e eles ocuparem a sua posição primitiva é $\frac{210}{6} = 35$. O total de permutações em que exatamente três números estão em suas posições originais é $35 \cdot 9 = 315$.

CAPÍTULO 5

5 COMBINAÇÕES

1 - Ação ou efeito de combinar; 2 - Disposição ordenada de quaisquer coisas ou objetos, semelhantes ou diferentes, que se encontram reunidos; 3- ÁLG. Subconjunto de um conjunto discreto e finito tomado de forma não ordenada.

DICIONÁRIO - MICHAELIS

Neste capítulo partiremos de um problema motivador para construirmos o conceito de combinação a partir da sua solução.

5.1 Combinação simples

Considere o seguinte problema: Seja A um conjunto com n elementos. Determine:

- a) O número de subconjuntos de A com dois elementos.
- b) O número de subconjunto de A com três elementos.
- c) O número de subconjuntos de A com K elementos.

Solução:

a) Considere $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Sabemos que a quantidade de números de 2 algarismos distintos que podemos formar com n números é $n \cdot (n - 1)$. Percebemos que para qualquer subconjunto de A com dois elementos distintos é possível formar dois números distintos:



Seja X o total de subconjuntos de A com dois elementos, então, a quantidade de números distintos de 2 algarismos é $2 \cdot X = n \cdot (n - 1)$. Logo, $X = \frac{n \cdot (n - 1)}{2!}$.

b) Considere $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Sabemos que quantidade de números de 3 algarismos distintos que podemos formar com n números é $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$. Percebemos

que para qualquer subconjunto de A com três elementos distintos é possível formar $3! = 6$ números distintos:

$$\{a_1, a_2, a_3\} \begin{cases} a_1 a_2 a_3 \\ a_1 a_3 a_2 \\ a_2 a_1 a_3 \\ a_2 a_3 a_1 \\ a_3 a_1 a_2 \\ a_3 a_2 a_1 \end{cases}$$

Seja X o total de subconjuntos de A com três elementos, então, a quantidade de números distintos de 3 algarismos é $6 \cdot X = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$. Logo, $X = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}$.

c) Considere $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. A quantidade de números de K algarismos distintos que podemos formar com n elementos é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-K+1)$. Dado um subconjunto de A com K elementos $\{a_1, a_2, \dots, a_K\}$ conseguimos formar $k!$ números distintos. Seja X o total de subconjunto de A com k elementos, então, o total de números distintos é:

$$K! \cdot X = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-K+1)$$

$$X = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-K+1)}{K!}$$

Para melhorar essa fórmula, vamos multiplicar o numerador e o denominador por $(n-K) \cdot (n-K-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Assim, temos:

$$X = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{K!} \cdot \frac{(n-K) \cdot (n-K-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-K) \cdot (n-K-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$X = \frac{n!}{K! \cdot (n-K)!} = C_n^K$$

Assim, considerando A um conjunto com n elementos, isto é, $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Chama-se combinação dos n elementos tomados K a K , aos subconjuntos de A constituídos de K elementos.

Proposição: O número de combinações dos n elementos de A tomados K a K é denotado por

$$C_n^K = \frac{n!}{K! \cdot (n - K)!}$$

A demonstração dessa proposição é o item (c) do exercício inicial. O símbolo C_n^K lê-se: combinação de n elementos tomado K a K . Uma outra maneira de representarmos esse símbolo é dada por $\binom{n}{K} = C_n^K$ e a notação $\binom{n}{K}$ lê-se de n objetos escolhe K .

É claro que o número de combinações dos n elementos de A tomados K a K não depende do conjunto A , e sim apenas de n e de K . Isso está implícito na notação escolhida. Assim, chamamos o número de combinações dos n elementos de A tomados K a K simplesmente de número de combinações de n tomados K a K .

Exemplo 1: De quantas maneiras podemos distribuir 11 brinquedos distintos para 10 crianças de modo que toda criança receba pelo menos um brinquedo?

Solução:

Temos 11 brinquedos e 10 crianças. Como toda criança deve receber pelo menos um, podemos concluir que uma das crianças ficará com 2 brinquedos.

Primeiro, vamos escolher a criança que ficará com 10 brinquedos. Isso pode ser feito de 10 maneiras. Feita essa escolha, agora vamos determinar quais os brinquedos ela receberá. Como temos 11 brinquedos e queremos escolher dois, isso pode ser feito de $\binom{11}{2}$ maneiras. Agora, restam 9 brinquedos e 9 crianças e o número de maneiras de distribuir 1 brinquedo para cada é $9!$. Dessa forma, o total de maneiras que podemos distribuir 11 brinquedos para 10 crianças, de modo que cada criança receba pelo menos um, é:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{11}{2} \cdot 9! = \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot \frac{11!}{2! \cdot 9!} \cdot 9! = 10 \cdot \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot 9! = 5 \cdot 11! = 199.584.000$$

Exemplo 2: (Mackezie-2005) Uma padaria faz sanduíches segundo a escolha dos clientes oferecendo 3 tipos diferentes de pães e 10 tipos diferentes de recheios. Se o cliente pode escolher o tipo de pão e 1, 2 ou 3 recheios diferentes. Qual o número de possibilidades para compor o sanduíche?

Solução:

Como temos 3 tipos de pães, dentre os quais temos que escolher 1, evidentemente, temos 3 possibilidades de escolha. Se quisermos escolher exatamente 1 recheio temos $\binom{10}{1} = 10$ possibilidades. Mas se quisermos escolher dois tipos de recheios, temos $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$ possibilidades. Por outro lado, se quisermos escolher 3 tipos de recheios, temos $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ possibilidades.

Como devemos escolher o tipo de pão e os recheios (que podem ser 1 recheio ou 2 recheios ou 3 recheios), pelo PFC temos $3 \cdot (10 + 45 + 120) = 525$ possibilidades.

Exemplo 3: (UFMG-2004) Numa escola, há 10 professores de Matemática e 15 de Português. Pretende-se formar com esses professores uma comissão de sete membros.

- Quantas comissões distintas podem ser formadas ?
- Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, um professor de matemática?
- Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, dois professores de matemática e, pelo menos, três professores de Português ?

Solução:

a) Como temos 25 professores para escolher 7, então temos $\binom{25}{7}$ comissões possíveis.

b) Pelo método indireto de contagem, podemos calcular o número de comissões sem restrições, e então, subtrair o número de comissões com nenhum professor de matemática. Dessa forma, temos $\binom{25}{7} - \binom{15}{7}$ comissões com pelo menos um professor de matemática.

c) Separamos a análise em casos:

1° caso: Comissões com 4 professores de matemática e 3 de português: $\binom{10}{4} \cdot \binom{15}{3}$ possibilidades.

2° caso: Comissões com 3 professores de matemática e 4 de português: $\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{4}$ possibilidades.

2° caso: Comissões com 2 professores de matemática e 5 de português: $\binom{10}{2} \cdot \binom{15}{5}$ possibilidades.

Esses são os únicos casos que satisfazem a condição exigida pelo problema. Portanto, temos no total, $\binom{10}{4} \cdot \binom{15}{3} + \binom{10}{3} \cdot \binom{15}{4} + \binom{10}{2} \cdot \binom{15}{5}$ possibilidades.

5.2 Combinação completa

Considere o seguinte problema: de quantos modos é possível comprar um casquinha de sorvete de dois sabores em uma sorveteria que oferece os seguintes sabores: abacaxi, baunilha, chocolate e damasco?

Um erro comum é achar que a solução é $C_4^2 = 6$. Essa combinação seria o número de modos de escolhermos 2 sabores diferentes entre os 4 sabores oferecidos. Representando cada sabor por sua letra inicial vamos listar todas as soluções possíveis.

$AA \quad BB \quad CC \quad DD$
 $AB \quad BC \quad CD$
 $AC \quad BD$
 AD

Portanto, existem 10 modos de escolhermos 2 sabores entre os 4 oferecidos. Percebemos que neste problema podemos escolher dois sabores iguais, e que a escolha $AB = BA$ representa o mesmo sorvete. A solução deste problema sem precisar de listar todos os casos é dada por CR_4^2 e lê-se: combinação completa de classe 2 de 4 objetos. De modo geral, CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados.

Uma outra maneira de interpretar esse problema, é resolvendo a equação $x_a + x_b + x_c + x_d = 2$, onde x_a é a quantidade de sorvete de abacaxi; x_b é a quantidade de sorvete de baunilha; x_c é a quantidade de sorvete de chocolate; e x_d é quantidade de sorvete de damasco. Vejamos a tabela abaixo:

x_a	x_b	x_c	x_d
2	0	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	2	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	2	0
0	0	1	1
0	0	0	2

Tabela 10: Escolha dos sabores de sorvetes

Agora, em uma nova tabela representaremos cada solução utilizando os símbolos “+” ou “•”. O símbolo “+” tem a função de separar as quantidades relativas para x_a, x_b, x_c e x_d . Vejamos a ilustração:

x_a	x_b	x_c	x_d	Representação
2	0	0	0	••+++
1	1	0	0	•+•++
1	0	1	0	•+++•+
1	0	0	1	•++++•
0	2	0	0	+••+++
0	1	1	0	+•+•+
0	1	0	1	+•+++•
0	0	2	0	++••+
0	0	1	1	++•+•
0	0	0	2	+++••

Tabela 11: Escolha dos sabores de sorvetes

Percebemos que podemos pensar cada solução dessa equação como um anagrama da “palavra” ••+++ , ou seja, temos uma palavra de 5 letras onde 2 são do tipo (•) e 3 são do tipo (+). Sendo assim, o número de anagramas que podemos formar com essa palavra é $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.

Desse modo, se nos fosse pedido para calcular o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, bastaria pensar no número de anagramas da “palavra” $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet + + +$, que é $P_{15}^{12,3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} = 455$.

Podemos, portanto, interpretar CR_n^p de dois modos:

- a) CR_n^p é o número de modos de selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados.
- b) CR_n^p é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ em inteiros não negativos.

Assim, considerando A um conjunto com $n \geq 1$ elementos, qualquer escolha de p elementos de A , não necessariamente distintos, é uma combinação completa de classe p dos elementos de A .

Proposição: O número de soluções inteiras não negativas da equação representada por $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ é $CR_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p! \cdot (p-1)!}$.

Demonstração:

O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ pode ser pensado como o número de maneiras de distribuímos p objetos entre os $n - 1$ sinais de $+$. Os p objetos representaremos por (\bullet) . Dessa forma, temos a seguinte representação:

$$\underbrace{\bullet \bullet \bullet \dots \bullet}_{p \text{ vezes}} \underbrace{+ + + \dots +}_{(n-1) \text{ vezes}}$$

Sendo assim, o número de soluções inteiras não negativas da equação é $\frac{(n+p-1)!}{p! \cdot (n-1)!}$.

5.3 Os lemas de Kaplansky

Em análise combinatória, é comum encontrarmos problemas com o objetivo de se escolher alguns objetos, de modo que os objetos escolhidos não sejam consecutivos dentro de uma ordem dada. Para a resolução desse problema, veremos os lemas de Kaplansky.

5.3.1 1º Lema de Kaplansky

Considere o seguinte problema: quantos subconjuntos de p elementos existem no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ sem elementos consecutivos?

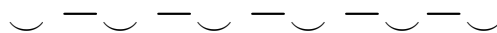
Antes de responder a essa pergunta, suponhamos inicialmente que $n = 8$ e $p = 3$, desconsiderando a restrição dos elementos consecutivos. Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, vamos atribuir o sinal de (+) aos elementos que fazem parte do subconjunto de 3 elementos e o sinal (-) aos elementos que não fazem parte desse subconjunto. Exemplo:

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} &= \begin{cases} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ + + + - - - - - \end{cases} \\ \{3, 5, 7\} &= \begin{cases} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ - - + - + - + - \end{cases} \\ \{1, 4, 8\} &= \begin{cases} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ + - - + - - - + \end{cases} \end{aligned}$$

Percebemos que existe uma bijeção dos subconjuntos e da representação de sinais. Dessa forma, o total de subconjuntos que podemos formar (podendo existir elementos consecutivos) pode ser pensado como o número de anagramas da “palavra” $+ + + - - - - -$ que é: $P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = C_8^3$.

No caso do problema em que $n = 8$ e $p = 3$, porém sem elementos consecutivos, o que muda é que na hora de permutar não podemos ter sinais (+) adjacentes e aí caímos em outro problema: quantas permutações de três sinais (+) e cinco sinais (-) existem sem sinais (+) adjacentes?

Para resolver esse problema de maneira simples e criativa, basta fixar os 5 sinais de (-) e espalhar os sinais (+) entre os 6 espaços abaixo:



Dessa forma, garantimos que os sinais (+) não fiquem juntos. Devemos, então, escolher 3 espaços entre os 6, ou seja, temos: $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ escolhas.

No problema inicial, têm-se p sinais (+) e $n - p$ sinais (-). Fixando os sinais (-) teríamos $n - p + 1$ espaços para p sinais (+), ou seja, temos C_{n-p+1}^p escolhas de subconjuntos com p elementos sem elementos consecutivos.

Portanto, podemos enunciar o primeiro Lema de Kaplansky da seguinte forma.: O número de subconjuntos de p elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos, denotados por $F(n, p)$ é C_{n-p+1}^p .

Exemplo 1: (EFOMM-2016) A quantidade de anagramas da palavra “MERCANTE” que não possui vogais juntas é?

Solução:

Mesmo com a fórmula do 1° Lema de Kaplansky estabelecida, vamos priorizar o raciocínio utilizado em sua demonstração para a solução dos problemas. Vamos dividir a solução desse problema em 3 etapas.

1° Etapa: Como não queremos vogais juntas vamos inicialmente formar anagramas apenas com as consoantes da palavra MERCANTE. Logo, o número de anagramas que podemos formar com as consoantes M,R,C,N,T é $5! = 120$.

2° Etapa: Formados os anagramas com as consoantes da palavra MERCANTE, basta arrumarmos as vogais entre os espaços deixados. Vejamos uma ilustração:

_ M _ R _ C _ N _ T _

Portanto, dos 6 espaços devemos escolher 3 e isso pode ser feito de $\binom{6}{3} = 20$ modos.

3° Etapa: Feita a escolha dos lugares que as vogais A, E, E vão ocupar, basta permutá-las. O número de maneiras que isso pode ser feito é $\frac{3!}{2!} = 3$ modos.

Portanto, o número de maneiras de permutarmos a palavra MERCANTE sem que duas vogais fiquem juntas é $5! \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{3!}{2!} = 120 \cdot 20 \cdot 3 = 7200$.

Exemplo 2: Uma fila tem 15 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens, de modo que não fiquem 2 homens sentados em cadeiras contíguas. De quantos modos isso pode ser feito? (MORGADO et al.,2005).

Solução:

Vamos representar as cadeiras por traços “_”. Para resolver esse problema, basta colocarmos 10 cadeiras em fila em que os espaços entre elas serão os lugares onde os 5 homens poderão se sentar. Vejamos a ilustração:

_ — _ — _ — _ — _ — _ — _ — _ — _ — _ — _

Dessa maneira, temos 11 espaços dos quais devemos escolher 5. Isso pode ser feito de $\binom{11}{5}$ modos. Além disso, devemos designar a cada homem uma cadeira, o que pode ser feito de $P_5 = 5!$ modos. Portanto, a resposta para esse problema é $\binom{11}{5} \cdot 5! = 55440$.

5.3.2 2° Lema de Kaplansky

Considere o seguinte problema: determine o número de subconjuntos de p elementos que se pode formar com n elementos distribuídos em círculo, como na figura a seguir:

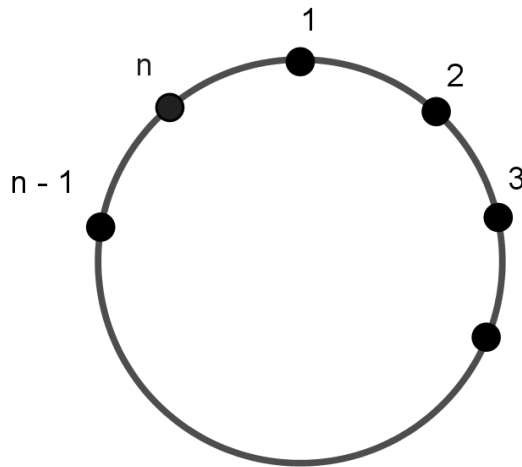


Figura 40: n objetos em círculo.

Solução:

Como os n elementos estão distribuídos em círculo, devemos considerar 1 e n como elementos consecutivos. Dessa forma, a única mudança em relação ao 1° lema é que, ao entrar o elemento n , o 1 não pode mais ser escolhido. Vamos abrir em casos:

1° Caso: O elemento n entra no subconjunto.

Como o elemento n faz parte do subconjunto, faltam escolher $p - 1$ elementos no conjunto $\{2, 3, 4, \dots, n - 2\}$ sem dois consecutivos, em que as extremidades não são consecutivas. Pelo 1° lema de Kaplansky, isso pode ser feito da seguinte maneira:

$$f(n - 3, p - 1) = C_{(n-3)-(p-1)+1}^{p-1} = C_{n-p-1}^{p-1}.$$

2° Caso: O elemento n não entra no subconjunto.

Como n não faz parte do subconjunto devemos escolher p elementos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n-1\}$ sem dois consecutivos, em que as extremidades não são consecutivas. Pelo 1º lema de Kaplansky isso pode ser feito da seguinte maneira:

$$f(n-1, p) = C_{(n-1)-p+1}^p = C_{n-p}^p.$$

Definindo $g(n, p)$ como resposta desse problema, esse resultado é chamamos de 2º Lema de Kaplansky, tem-se:

$$g(n, p) = f(n-3, p-1) + f(n-1, p)$$

$$g(n, p) = C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^p$$

temos que:

$$C_{n-p}^p = \frac{(n-p)!}{p! \cdot (n-2p)!} \text{ e } C_{n-p-1}^{p-1} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)! \cdot (n-2p)!}.$$

Nota-se que com um pouco de algebrismos podemos escrever C_{n-p-1}^{p-1} do seguinte modo:

$$\begin{aligned} C_{n-p-1}^{p-1} &= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)! \cdot (n-2p)!} = \frac{p \cdot (n-p)(n-p-1)!}{p \cdot (n-p) \cdot (p-1)! \cdot (n-2p)!} = \\ &= \frac{p}{(n-p)} \cdot \frac{(n-p)!}{(p! \cdot (n-2p)!)} = \frac{p}{(n-p)} \cdot C_{n-p}^p. \end{aligned}$$

$$g(n, p) = \frac{p}{(n-p)} \cdot C_{n-p}^p + C_{n-p}^p \Rightarrow g(n, p) = \frac{n}{(n-p)} \cdot C_{n-p}^p.$$

Exemplo 1: Cinco pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes? (MORGADO et al.,2005)

Solução:

De maneira análoga ao 1° Lema de kaplansky, não vamos priorizar o uso da fórmula e sim o raciocínio usado em sua demonstração. A solução desse problema será feita em duas etapas, considerando a figura abaixo como uma ilustração do problema.

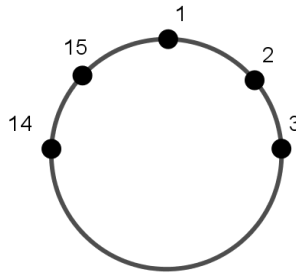


Figura 41: Cadeiras em torno da mesa

1° Etapa: Vamos considerar que a cadeira da posição 1 está ocupada.

Como a cadeira da posição 1 está ocupada, devemos escolher 4 cadeiras não consecutivas entre as posições $\{3, 4, 5, \dots, 14\}$. Pelo 1° Lema de Kaplansky isso pode ser feito de $C_{12-4+1}^4 = C_9^4 = 126$ modos.

2° Etapa: Vamos considerar que a cadeira da posição 1 não está ocupada.

Como a cadeira da posição não está ocupada, devemos escolher 5 lugares não consecutivos entre as posições $\{2, 3, 4, \dots, 15\}$. Novamente, pelo 1° Lema de kaplansky, isso pode ser feito de $C_{14-5+1}^5 = C_{10}^5 = 252$ modos.

Portanto, o número de modos para escolher as cadeiras que serão usadas é $126 + 252 = 378$. Feita a escolha das cadeiras, há $5! = 120$ maneiras de designá-las em seus lugares. Portanto, o número de maneiras dessas 5 pessoas se sentarem nessa mesa é: $378 \times 120 = 45.360$.

Exemplo 2: Dado um octógono, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não consecutivos do octógono?

Solução 1:

Como o problema se trata do 2° Lema de kaplansky, basta aplicar a fórmula:

$$g(n, p) = \frac{n}{(n-p)} \cdot C_{n-p}^p, \text{ onde } n = 8 \text{ e } p = 3. \text{ Logo, } g(8, 3) = \frac{8}{5} \cdot C_8^3 = 16.$$

Solução 2:

Considere o octógono abaixo:

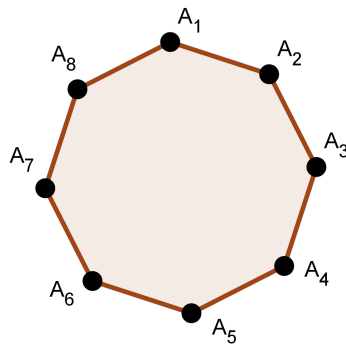
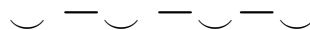


Figura 42: Octógono

Vamos dividir o problema em 2 etapas.

1º Etapa: Suponhamos que o vértice A_1 faça parte do triângulo.

Como A_1 faz parte do triângulo, basta escolhermos 2 vértices não consecutivos do conjunto $\{A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$. Para escolhermos dois vértices não consecutivos, podemos imaginar a seguinte situação:



Dos 4 espaços entre os traços devemos escolher 2. Isso pode ser feito de $\binom{4}{2} = 6$ modos.

2º Etapa: O vértice A_1 não faz parte do triângulo.

Como o vértice A_1 não faz parte do triângulo, devemos escolher 3 vértices não consecutivos do conjunto $\{A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$. Para isso, consideramos a situação a seguir:



Dos 5 espaços devemos escolher 3. Isso pode ser feito de $\binom{5}{3} = 10$ modos. Portanto, a resposta para esse problema é $6 + 10 = 16$.

5.4 Problemas de combinação

Problema 1: Em um plano há 7 pontos em uma reta e 5 pontos fora dela. Exce-
tuando os pontos da reta, não há 3 pontos colineares.

- Quantos triângulos podem ser formados?
- Quantas retas podem ser formadas?

Solução:

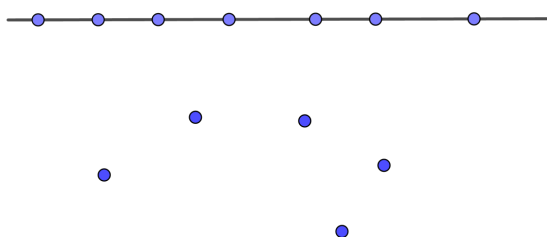


Figura 43: Plano

a) O número de maneiras para escolher três pontos é $C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$. Para garantir que esses três pontos escolhidos formem um triângulo, eles não podem ser colineares e o número de pontos colineares é $C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$. Dessa forma, o número de triângulos que podemos formar é $C_{12}^3 - C_7^3 = 220 - 35 = 185$.

b) Para formar uma reta, basta escolhermos dois pontos distintos. O número de maneiras para escolher esses dois pontos é $C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = 66$. Percebemos, no entanto, que para quaisquer dois pontos escolhidos na reta, eles formaram a mesma reta. Dessa forma, devemos excluir $C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$, ou seja, 20 dos 21 casos, dos pontos que fornecem a mesma reta. Assim, o número de retas distintas que podemos formar é $C_{12}^2 - C_7^2 + 1 = 66 - 21 + 1 = 46$ retas.

Problema 2: De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos ? (MORGADO et al.,2005).

Solução:

O primeiro passo é determinar quantos anéis haverá em cada dedo, o que equivale a resolver em inteiros não negativos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Sabemos que resolver essa equação é o mesmo que calcular o número de anagramas da palavra “+++●●●●●”, ou seja, $\frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ soluções. Determinados, então, os seis lugares para colocar os anéis, considerando que eles são distintos, isso poderá ser feito de $6! = 720$ modos. Portanto, o número de maneiras de colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos é $84 \times 720 = 60.480$.

Problema 3: Quantas são as soluções:

- a) inteiras e não negativas de $x + y + z + w = 3$?
- b) inteiras e não negativas de $x + y + z + w < 6$?
- c) inteiras positivas de $x + y + z = 10$?
- d) inteiras positivas de $x + y + z < 10$?
- e) inteiras de $x + y + z = 20$ com $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$?

Solução:

a) Trata-se de um problema de permutação completa, logo, sua solução é dada por $CR_4^3 = P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$. Uma outra maneira fácil de resolver esse exercício, é lembrar de permutar o símbolo “+++●●●”, formado pelos três sinais de “(+)” e pelos três sinais “●” referentes ao resultado da igualdade.

b) Observe que trabalhar com a desigualdade $x + y + z + w < 6$ é o mesmo que trabalhar com a desigualdade $x + y + z + w \leq 5$. Dessa forma, vamos definir uma folga “ f ” da solução, onde $f = 5 - (x + y + z + w)$. Nossa desigualdade passa a ser $x + y + z + w + f = 5$, e a solução dessa equação é dada por: $CR_5^5 = P_9^{4,5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$. Alternativamente, podemos apenas permutar os símbolo “++++●●●●●”.

c) Nessa equação nenhuma incógnita pode ser nula, então, definiremos $x = a + 1, y = b + 1$ e $z = c + 1$. Substituindo esses valores na equação original, nosso problema passa a descobrir o número de soluções inteiras e não negativa da equação $(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) = 10$, ou seja, $a + b + c = 7$, o que equivale a calcular o número de anagramas da palavra “+●●●●●●●”, que é $P_9^{2,7} = 36$.

d) Nessa equação, nenhuma incógnita pode ser nula, então, definiremos $x = a + 1, y = b + 1$ e $z = c + 1$. Substituindo esses valores na equação original, nosso problema passa a

descobrir o número de soluções inteiras e não negativa da equação $(a+1)+(b+1)+(c+1) < 10$, ou seja, $a + b + c < 7$, ou ainda, $a + b + c \leq 6$. Agora, basta definir uma folga f e transformar essa desigualdade na equação $a + b + c + f = 6$. Logo, a sua solução é o número de anagramas formados pelos símbolos ‘+++●●●●●’, que é $P_9^{3,6} = 84$.

e) Como $x \geq 2$, $y \geq 2$ e $z \geq 2$, vamos definir $x = a + 2$, $y = b + 2$ e $z = c + 2$. Substituindo esses valores na equação original, temos $a + b + c = 14$. Logo, a solução desse problema é $CR_3^{14} = P_{17}^{3,14} = 120$.

Problema 4: Quantos números inteiros entre 1 e 100000 têm soma dos algarismos igual a 6? (MORGADO et al.,2005)

Solução:

Seja $xyzwt$ um número de 5 dígitos tal que $1 < xyzwt < 100000$. Percebemos que este número pode começar por zero. Por exemplo, 121 pode ser considerado como 00121. Queremos que a soma dos seus algarismos seja igual a 6, ou seja, $x + y + z + w + t = 6$. Como x, y, z, w e t são inteiros e não negativos, a solução desse problema é dada por $CR_5^6 = P_{10}^{4,6} = 210$.

Problema 5: (ESCOLA NAVAL-2014) A Escola Naval irá distribuir 4 viagens para a cidade de Fortaleza, 3 para a cidade de Natal e 2 para a cidade de Salvador. De quantos modos diferentes podemos distribuí-las entre 9 aspirantes, dando somente uma viagem para cada um?

Solução:

Vamos dividir a solução desse problema em três etapas.

1º Etapa: Escolher os 4 aspirantes que irão para Fortaleza.

Como temos 9 aspirantes e queremos escolher 4, isso pode ser feito de $\binom{9}{4} = 126$ modos.

2º Etapa: Escolher os 3 aspirantes que irão para Natal.

Escolhido os 4 aspirantes que vão para cidade de Fortaleza, restam 5 aspirantes e

devemos escolher 3 para irem para cidade de Natal. Isso pode ser feito de $\binom{5}{3} = 10$ modos.

3° Etapa: Escolher os 2 aspirantes que irão para Salvador.

Como já definimos os aspirantes que irão para as cidades de Fortaleza e Natal, restam, então, apenas dois aspirantes que devem ir para cidade de Salvador. Isso pode ser feito $\binom{2}{2} = 1$ modo.

Portanto, a resposta para esse problema é $126 \times 10 \times 1 = 1260$ modos.

Problema 6: (ITA-2007) Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. Qual o número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B ?

Solução:

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots, a_{14}\}$. Sem perda de generalidade, suponhamos $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Seja $C = \{a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\}$, um subconjunto de A tal que B e C sejam disjuntos, ou seja, $B \cap C = \phi$. Dado um conjunto qualquer com n elementos, o número de subconjuntos é calculado por: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Dessa forma, o número de subconjuntos de C é dado por:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8$$

Como queremos subconjuntos que possuem o número de elementos menor igual a 6 temos que:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 2^8 - \binom{8}{7} - \binom{8}{8}$$

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 2^8 - 8 - 1$$

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 247$$

Problema 7: (AFA) Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco. Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra somente pela cor do carros, o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as 10 vagas é?

Solução:

Vamos resolver esse problema em duas etapas.

1° Etapa: Número de maneiras de colocar os seis carros nas 10 vagas.

Considerando todos os carros iguais, o número de maneiras de se ocupar seis vagas é dado por: $\binom{10}{6} = 210$ modos.

2° Etapa: Permutar os carros.

Definidas as vagas ocupadas pelos carros e considerando que cada carro se distingue apenas pela cor, devemos agora permutá-los. Representaremos o carro preto por P , o carro vermelho por V e o branco por B . Devemos, então, permutar a sequência $PPPVVB$ que é $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ modos.

Portanto, a resposta para o problema é $210 \times 60 = 12600$.

Problema 8: (ENA - 2016) De quantas maneiras distintas podemos colocar, em cada espaço abaixo, os algarismos 2, 3, 4; 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfaçam as duas desigualdades?

$$_ _ > _ _ > _ _$$

Solução:

Como os algarismos são distintos, primeiro devemos determinar os números que irão ocupar as primeiras posições da desigualdade $\underline{a} _ > \underline{b} _ > \underline{c} _$. Devemos escolher 3 números entre os 6 números disponíveis, o que pode ser feito de $\binom{6}{3}$ modos. Assim, temos uma única forma de ordená-los de modo que $a > b > c$.

Agora, vamos escolher os números que preencherão os espaços vazios de $\underline{a} _ > \underline{b} _ > \underline{c} _$. Para o primeiro espaço, temos 3 opções; para o segundo espaço, 2 opções; e

para o último espaço, 1 opção; logo, pelo PFC temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos de preencher esses espaços. Portanto, temos $\binom{6}{3} \times 6 = 120$ modos para colocar os algarismos.

Problema 9: (ENA-2016) Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meio-campistas e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio-campistas e 2 atacantes?

Solução:

Para a escolha do goleiro, temos duas opções; dos zagueiros temos $\binom{6}{4} = 15$ opções; dos meios-campistas, temos $\binom{7}{4} = 35$; dos atacantes, temos $\binom{4}{2} = 6$. Portanto, o número de maneiras para escalar essa seleção é $2 \times 15 \times 35 \times 6 = 6300$.

Problema 10: (IME-2006) Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é?

Solução:

Primeiro, vamos calcular o total de equipes que podemos formar sem restrição. Considere a seguinte configuração: equipe 1, com 2 pessoas; equipe 2, com 3 pessoas; e a equipe 3, com 4 pessoas. O total de maneiras de formar essas equipes é:

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 1 = 1260$$

Agora, vamos calcular os casos em que os dois irmãos fazem parte da mesma equipe.

1° caso: Os dois irmãos fazem parte da Equipe 1.

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = 1 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 1 = 35$$

2° caso: Os dois irmãos fazem parte da Equipe 2.

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{4} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 105$$

3° caso: Os dois irmãos fazem parte da Equipe 3.

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot 1 = 210$$

Portanto, o total de modos para organizar essas três equipes em que os irmãos não façam parte das mesma equipe é:

$$1260 - 35 - 105 - 210 = 910.$$

Problema 11: De quantos modos podemos formar uma sequência de p elementos iguais a 1 e q elementos iguais a 0, se dois elementos iguais a zero não podem ser adjacentes? (MORGADO et al.,2005)

Solução:

Para resolver esse problema, vamos usar a ideia do 1° Lema de Kaplansky. Iniciaremos fixando os p elementos iguais a 1 e representaremos esses elementos por “_”.

$$\underbrace{\text{---...---}}_{p \text{ vezes}}$$

Como não queremos zeros consecutivos, basta escolhermos os $p + 1$ espaços entre os p traços fixados. Dessa maneira, o número de modos para formamos a sequência sem que haja zeros consecutivos é:

$$\binom{p+1}{q} = \frac{(p+1)!}{q! \cdot (p-q+1)!}$$

Problema 12: (IME - 1985/1986) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Solução:

Considere a seguinte ilustração:

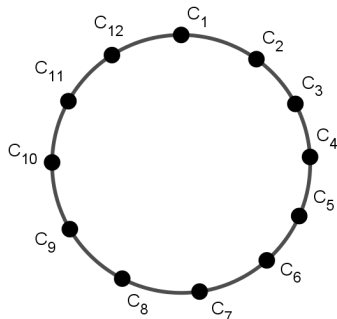


Figura 44: 12 cavaleiros

Para resolver esse problema, usaremos a ideia do 2º Lema de Kaplansky. Primeiro vamos supor que o cavaleiro C_1 faz parte do grupo que irá salvar a princesa. Dessa forma, os cavaleiros C_2 e C_{12} não poderão fazer parte desse grupo, pois estes são considerados rivais de C_1 . Assim, devemos escolher 4 cavaleiros não consecutivos do grupo $\{C_3, C_4, C_5, \dots, C_{11}\}$. Pelo 1º Lema de Kaplansky, isso pode ser feito de $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ modos.

Suponhamos agora que o cavaleiro C_1 não faça parte do grupo que irá salvar a princesa. Precisaremos, então, escolher 5 cavaleiros não consecutivos do grupo $\{C_2, C_3, C_4, \dots, C_{12}\}$. Pelo 1º Lema de Kaplansky isso pode ser feito de $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ modos.

Portanto, o número de maneiras possível para escolher esse grupo é $15 + 21 = 36$ modos.

Problema 13: (OBM - 2008) Um país tem 8 cidades, $A_1, A_2, \dots, A_6, B, C$, ligadas por rodovias de mão dupla satisfazendo as seguintes condições: B e C são ambas ligadas às cidades A_1, A_2, \dots, A_6 , mas não são ligadas uma à outra; A_1, A_2, \dots, A_6 são ligadas duas a duas. Calcule o número de maneiras distintas de viajar de carro de B a C , sem passar duas vezes por uma mesma cidade.

Solução:

Considere a seguinte ilustração do problema:

Percebemos que se pode viajar de B para C passando por 1 cidade apenas ou passando por 2, 3, 4, 5 ou 6 cidades. Vejamos alguns trajetos possíveis:

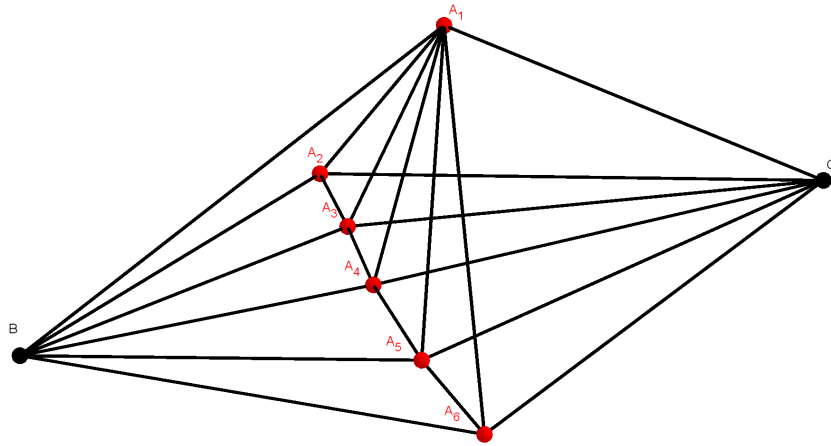


Figura 45: Rodovias

- Trajeto passando por 1 cidade: $B - A_3 - C$
- Trajeto passando por 2 cidades: $B - A_1 - A_2 - C$
- Trajeto passando por 3 cidades: $B - A_1 - A_2 - A_3 - C$
- Trajeto passando por 4 cidades: $B - A_2 - A_3 - A_4 - A_1 - C$
- Trajeto passando por 5 cidades: $B - A_2 - A_3 - A_4 - A_1 - A_6 - C$
- Trajeto passando por 6 cidades: $B - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - A_1 - C$.

Portanto, temos que decidir primeiro por quantas cidades vamos passar. Como temos 6 cidades, isso pode ser feito de $\binom{6}{k}$ com $1 \leq k \leq 6$. Feita a escolha de quantas cidades iremos passar, o próximo passo é definir a ordem que será feita a viagem, que é $k!$ modos.

Logo, o número de maneiras distintas de viajar de carro de B a C , sem passar duas vezes por uma mesma cidade é:

$$\sum_1^6 \binom{6}{k} \cdot k! = \binom{6}{1} \cdot 1 + \binom{6}{2} \cdot 2 + \binom{6}{3} \cdot 6 + \binom{6}{4} \cdot 24 + \binom{6}{5} \cdot 120 + \binom{6}{6} \cdot 720$$

$$\sum_1^6 \binom{6}{k} \cdot k! = 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1596.$$

Problema 14: (OBM - 2015) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos tais que $n(A) = 5$ e $n(B) = 7$, em que $n(X)$ é quantidade de elementos do conjunto X . Quantos subconjuntos não-vazios C de $A \cup B$ são tais que $n(A \cap C) = n(B \cap C)$?

Solução:

Como $n(A) = 5$ então, $n(A \cap C) \leq 5$ e o número de subconjuntos não vazios que podemos formar é $\binom{5}{k}$ com $1 \leq k \leq 5$. Como $n(A \cap C) = n(B \cap C)$, temos que $n(B \cap C) \leq 5$ e o número de subconjuntos não vazios que podemos formar é $\binom{7}{k}$.

Portanto, o número de subconjuntos não vazios que satisfaz $n(A \cap C) = n(B \cap C)$ é:

$$\sum_1^5 \binom{5}{k} \cdot \binom{7}{k} = \binom{5}{1} \cdot \binom{7}{1} + \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} + \binom{5}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{5}{4} \cdot \binom{7}{4} + \binom{5}{5} \cdot \binom{7}{5}$$

$$\sum_1^5 \binom{5}{k} \cdot \binom{7}{k} = 5 \cdot 7 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + 5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + 1 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2}$$

$$\sum_1^5 \binom{5}{k} \cdot \binom{7}{k} = 35 + 210 + 350 + 175 + 21 = 791.$$

Problema 15: (OBM/2008) Determine a quantidade de funções $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tais que $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Solução:

Primeiro, vamos definir o conceito de ponto fixo.

Seja $f : A \rightarrow A$ uma função. Um elemento $x \in A$ é chamado de ponto fixo se $f(x) = x$, ou seja, se x é levado em x .

Agora, faça $f(x) = y$. Assim, podemos escrever $f(f(x)) = f(x)$ como $f(y) = y$. Tomando $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então, $Im(f) = \{y \in A / y = f(x), x \in A\}$, que é formada por

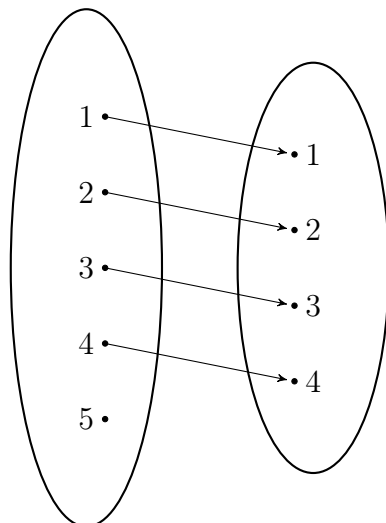
pontos fixos. Para resolver esse problema, dividiremos em 5 casos.

1° Caso: A imagem possui 5 pontos fixos.

Neste caso, existe apenas uma função onde $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4$ e $f(5) = 5$.

2° Caso: A imagem possui 4 pontos fixos.

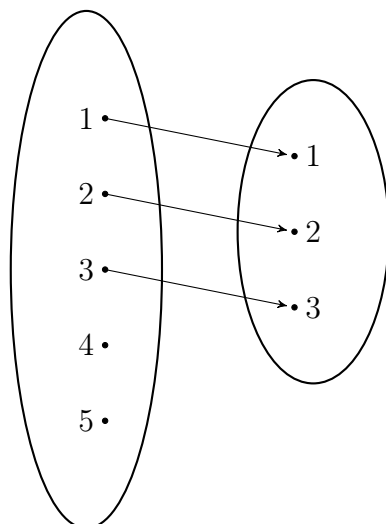
Neste caso, devemos escolher dos 5 elementos quais serão os 4 pontos fixos e isso pode ser feito de $\binom{5}{4}$ modos. Suponhamos que os elementos escolhidos foram 1, 2, 3 e 4 então:



Percebemos que o elemento 5 não faz parte da imagem. Portanto, esse elemento, que faz parte do domínio, poderá mandar flecha apenas para um dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, o que pode ser feito de 4 modos. Dessa forma, o total de funções que podemos formar nesse caso é $\binom{5}{4} \cdot 4$.

3° Caso: A imagem possui 3 pontos fixos.

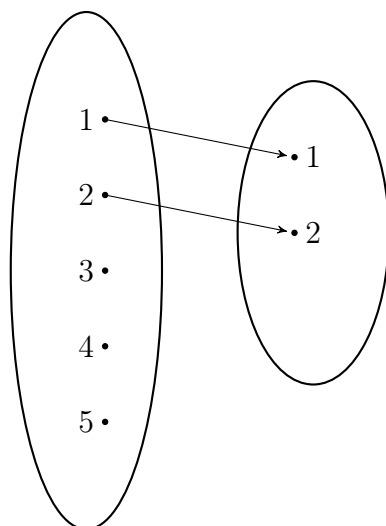
Neste caso, devemos escolher dos 5 elementos quais 3 serão pontos fixos e isso pode ser feito de $\binom{5}{3}$ modos. Suponhamos que os elementos escolhidos foram 1, 2 e 3, então:



Percebemos que os elementos 4 e 5 não pertencem a imagem da função. Logo, os elementos 4 e 5 do domínio deverão mandar uma flecha para um desses elementos da imagem, ou seja, temos três opções para cada e o total de funções que podemos formar é $\binom{5}{3} \cdot 3^2$.

4° Caso: A imagem possui 2 pontos fixos.

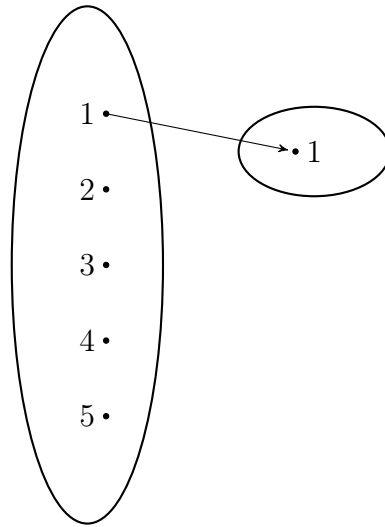
Neste caso, devemos escolher dos 5 elementos quais serão os 2 pontos fixos e isso pode ser feito de $\binom{5}{2}$ modos. Suponhamos que os elementos escolhidos foram 1 e 2, então:



Como os elementos 3, 4 e 5 não pertencem a imagem da função, os elementos 3, 4 e 5 do domínio deverão mandar uma flecha para um desses elementos da imagem, ou seja, temos duas opções para cada e o total de funções que podemos formar é $\binom{5}{2} \cdot 2^3$.

5° Caso: A imagem possui 1 ponto fixo.

Neste caso, devemos escolher entre os 5 elementos qual será seu ponto fixo. Isso pode ser feito de 5 modos. Suponhamos que o elemento escolhido foi o número 1, então:



Como os elementos 2, 3, 4 e 5 não pertencem a imagem da função, os elementos 2, 3, 4 e 5 do domínio deverão mandar uma flecha para o número 1 da imagem, ou seja, o total de funções que podemos formar neste caso é igual a 5.

Portanto, o total de funções que podemos formar é:

$$1 + \binom{5}{4} \cdot 4 + \binom{5}{3} \cdot 3^2 + \binom{5}{2} \cdot 2^3 + 5 = 196.$$

CAPÍTULO 6

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procuramos conduzir o ensino da análise combinatória por meio da metodologia da resolução de problemas. Um dos objetivos buscados na escolha das soluções apresentadas é a valorização do raciocínio em detrimento da mera aplicação de fórmulas ou pensamento vazio, em que se busca padrões ou uma forma única para resolver qualquer questão do tema.

Percebemos com o desenvolvimento desta dissertação que é possível fomentar o ensino de análise combinatória fazendo uso de uma abordagem diferenciada baseada nos conhecimentos adquiridos com o PROFMAT, de modo que sejam aplicados de forma didática e interessante nas aulas do ensino básico.

A metodologia utilizada, baseada nas definições e técnicas de Polya, permitiu-nos desenvolver a solução dos problemas em quatro fases: entender o problema, construir uma estratégia para resolvê-lo, executar o plano e fazer o retrospecto. Assim, foi possível acompanhar, no decorrer das soluções, as diferentes fases da estratégia abordada.

Após a busca em diversos materiais, voltados para ensino médio e também ensino superior, com um olhar sobre as soluções orientado pelas estratégias de resolução de problemas de Polya, selecionamos alguns exercícios com o objetivo de explorar as diferentes técnicas de solução.

A partir das soluções apresentadas, pretendemos que os estudantes desenvolvam a competência de solucionar questões que envolvam análise combinatória, assim como o prazer em fazê-las. Além disso, acreditamos que a abordagem proposta nesta dissertação pode estimular a análise e o senso crítico na busca da melhor resposta diante da grande variedade de problemas de contagem que perpassam por diferentes vertentes da matemática.

Referências

- [1] MORGADO; A. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 7 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [2] MORGADO; A. et al. *Matemática Discreta*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [3] MANZANILLA; Alex M. *Análisis Combinatorio Teoría y práctica*. 1 ed. Lima: Lumbreras, 2012.
- [4] CARVALHO; Augusto C., MORGADO; Paulo C. P. Coleção profmat: Matemática discreta, 2013.
- [5] SÁ; Carlos A. M., PINHEIRO; Pedro F. Coleção educação matemática na amazônia: O ensino de análise combinatória a partir de problemas. Belém: SBEM, 2010.
- [6] NOGUTI; Cristiane M. R., VAZQUEZ; Fabiane C. H. Análise combinatória: Alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. 2004.
- [7] FOMIN; Dimitri. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa*. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [8] LIMA; E. et al. *Coleção do professor de matemática: Temas e Problemas Elementares*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [9] LIMA; Elon L. *Curso de análise*. 7 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1992.
- [10] INSTITUTO DE CIENCIA Y HUMANIDADES. *Aritmética Análisis del números y sus aplicaciones*. 6 ed. Lima: Lumbreras, 2012.
- [11] BORJONO; J. et al. *Matemática Fundamental Uma Nova Abordagem*. 1. ed. São Paulo: FDT, 2011.
- [12] FERNÁNDEZ; Krerley I. M., OLIVEIRA; Adán J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e solução*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [13] SILVA; Luís., LOPES; Josimar. *É divertido resolver problemas*. 1 ed. Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2000.
- [14] CARNEIRO; Marcelo., RUFINO; Manoel L. *Coleção elementos da matemática*, volume 3, 3 ed. Fortaleza: Vestiseller, 2010.
- [15] SOUZA; Maria H. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. 1 ed. São Paulo: Planeta do Brasil LTDA, 2018.

[16] JR; Mauro M. *Combinatória: números de soluções inteiras e não negativas de uma equação*. 3 ed. São Paulo: RPM, 2010.

[17] HAZZAN; Samuel. *Fundamentos de matemática elementar: Combinatória Probabilidade*, volume 5, 8.ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.