

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
Centro de Ciências Exatas - CCE
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFIS

ALEXANDRE DALCOMUNE VENTURIM

UM MODELO DE ANIQUILAÇÃO DE PARES NA
DINÂMICA DE BOLTZMANN

VITÓRIA
2020

ALEXANDRE DALCOMUNE VENTURIM

**UM MODELO DE ANIQUILAÇÃO DE PARES NA
DINÂMICA DE BOLTZMANN**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich Junior

Coorientador: Prof. Dr. Wesley Spalenza

VITÓRIA
2020

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

V469 Venturim, Alexandre Dalcomune, 1994-
Um Modelo de Aniquilação de Pares na Dinâmica de
m Boltzmann / Alexandre Dalcomune Venturim. - 2020.
146 f. : il.

Orientador: Humberto Belich Junior.
Coorientador: Wesley Spalenza.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Teoria quântica de campos. 2. Teoria do transporte. 3. Física dos plasmas. 4. Espalhamento (Física). I. Belich Junior, Humberto. II. Spalenza, Wesley. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

"Um modelo de aniquilação de pares na dinâmica de Boltzmann"

Alexandre Dalcomune Venturim

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por webconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.
Aprovada por:

Prof. Dr. José Abdalla Helayel Neto
(CBPF)

Prof. Dr. Humberto Belich Junior
(Orientador/PPGFis)

Prof. Dr. Wesley Spalenza
(IFES/ Cariacica)

Prof. Dr. Vinícius Cândido Mota
(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 25 de setembro de 2020.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
HUMBERTO BELICH JUNIOR - SIAPE 1509380
Departamento de Física - DF/CCE
Em 05/10/2020 às 08:24

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/75214?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
VINICIUS CANDIDO MOTA - SIAPE 1969881
Departamento de Física - DF/CCE
Em 21/12/2020 às 20:53

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/115933?tipoArquivo=O>

À minha família, pela confiança e o apoio em todos os momentos difíceis da minha trajetória.

“Aprenda com o ontem, viva o hoje, espere pelo amanhã. O importante é não
parar de questionar.”
(Albert Einstein)

Resumo

A equação de Boltzmann é uma equação muito utilizada para extrair informações sobre os fenômenos de transporte de sistemas físicos, como exemplo a condutividade elétrica do plasma, que possui grande importância para diferentes tipos de aplicações. Neste trabalho são apresentados alguns conceitos e formalismos importantes sobre a teoria cinética do plasma e a construção da equação Boltzmann em sua forma clássica e relativística. Em seguida, realiza-se uma modificação na integral de colisão da equação de Boltzmann para um processo de espalhamento. Considera-se a interação $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ e obtêm-se a equação de Boltzmann que governa a dinâmica das partículas para um processo de aniquilação de pares.

Palavras-chave: Equação de Boltzmann, Física de Plasma, Física de Espalhamento, Aniquilação de Pares, Teoria Quântica de Campos.

Abstract

The Boltzmann equation is an equation widely used to extract information about the transport phenomena of physical systems, such as the electrical conductivity of plasma, which has great importance for different types of applications. In this work, some important concepts and formalisms are presented about the plasma kinetic theory and the construction of the Boltzmann equation in its classical and relativistic form. Then, a modification in the collision integral of the Boltzmann equation is performed for a scattering process. Considering the $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ interaction, one obtains the Boltzmann equation that governs the dynamics of particles for a pair annihilation process.

Keywords: Boltzmann's Equation, Plasma, Scattering, Annihilation Production.

Conteúdo

Resumo	8
Abstract	9
1 Introdução	13
2 Teoria Cinética do Plasma	17
2.1 Aspectos Teóricos	17
2.2 Espaço de Fase	17
2.2.1 Espaço de Fase para Partícula Única	18
2.2.2 Espaço de Fase para Muitas Partículas	19
2.2.3 Elementos de Volume	19
2.3 Função de Distribuição	20
2.4 Densidade Numérica e Velocidade Média	22
2.5 A Equação de Boltzmann	23
2.5.1 Equação de Boltzmann sem colisão	24
2.5.2 Transformação do Jacobiano no Espaço de Fase	26
2.6 Efeito da Interação entre Partículas	28
2.7 Equação de Vlasov	30
3 Equação Relativística de Boltzmann	33
3.1 Gás não Degenerado	33
3.2 Gás Degenerado	42
4 Espalhamento Elétron-Pósitron e a Dinâmica de Boltzmann	46
4.1 A Matriz de Transição de Primeira Ordem	46
4.2 Medidas no Espaço de Fase	54
4.3 Espalhamento e Matriz de Transição de fase Relativística	56
4.4 Solução da Equação de Dirac e os Espinores	60
4.4.1 A Eletrodinâmica Quântica do Fóton	67

4.5	Regras de Feynman para EDQ	69
4.5.1	Alguns Exemplos	72
4.5.2	Espalhamento Elétron-Pósitron	73
4.6	Processo de Produção de Fótons: Aniquilação de Pares	76
4.7	Aproximações das Funções de Distribuição	87
4.7.1	Equação de Boltzmann e o Processo de Espalhamento	88
5	Conclusão	93
Apêndice A - Notações Relativísticas		95
1.1	Cinemática Relativística Covariante	95
1.1.1	Transformação de Lorentz	95
1.1.2	Métrica de Minkowski	95
1.1.3	Transformações Quadvetoriais de Lorentz	95
1.1.4	Quadrivelocidade e Quadriaceleração	96
1.1.5	Momento, Força e Energias	97
1.2	Eletromagnetismo Covariante	100
1.2.1	Definições dos Potenciais e dos Campos	100
1.2.2	Condição de Calibre (“gauge”) e a Equação de Onda	102
1.2.3	Graus de Liberdade	104
1.3	Formulação Lagrangeana do Eletromagnetismo	107
Apêndice B - Regras de Feynman (Toy Theory)		111
2.3.1	Vida Útil da Partícula A	114
2.3.2	Espalhamento	115
Apêndice C - Invariância de Calibre e o Campo Escalar Complexo		119
3.4	Invariância de teorias sob transformações de calibre	119
3.5	Lagrangeana para o Campo Escalar Complexo	120
3.5.1	Invariância do campo escalar complexo sob transformações de gauge (calibre)	121
3.5.2	Cargas elétricas dos campos escalares	125
Apêndice D - Construção da Hamiltoniana de Dirac		129
4.5.3	Corrente Fermiônica	132
4.6	Equação de Dirac Covariante	133
4.6.1	Construção da Equação	133
4.7	Lagrangeano de Dirac e a Eletrodinâmica Espinorial Clássica	137
4.7.1	Formulação do Lagrangeano	137

4.7.2	Invariância de Calibre (“Gauge”) para Eletrodinâmica Espinorial	138
4.7.3	Parâmetro de Calibre Infinitesimal	141

Bibliografia		142
---------------------	--	------------

Capítulo 1

Introdução

O plasma descreve uma grande variedade de substâncias macroscopicamente neutras contendo muitos elétrons livres interagindo e átomos ou moléculas ionizadas, que exibem comportamento coletivo devido às forças coulombianas.

Sua primeira aplicação foi realizada por Tonks¹ e Langmuir², em 1929, para descrever a região interna de um gás ionizado brilhante produzido por descarga elétrica em um tubo, e o gás ionizado permanecendo eletricamente neutro [1].

A distinção entre sólidos, líquidos e gases está na diferença entre a força das ligações que retêm suas partículas constituintes juntas. O equilíbrio entre a energia térmica destas partículas e as forças de ligação entre partículas determina o estado.

Quando se fornece calor para uma substância sólida ou líquida, os átomos ou moléculas adquirem mais energia cinética térmica até conseguirem superar a energia potencial de ligação. Isso leva à transição de fase, que ocorre a uma temperatura constante para uma dada pressão. A quantidade de energia necessária para a transição de fase é chamada de calor latente.

Se for fornecida energia suficiente, um gás molecular se dissociará gradualmente em um gás atômico como resultado de colisões entre as partículas cuja energia cinética térmica excede a energia de ligação molecular. A temperaturas suficientemente elevadas, uma fração crescente dos átomos terá energia cinética suficiente para superar, por colisões, a energia de ligação dos elétrons mais externos, resultando em um gás ionizado ou plasma. Essa transição de um gás para um plasma não é uma transição de fase no sentido termodinâmico, pois ocorre gradualmente com o aumento de tem-

¹Lewi Tonks (Nova Iorque, 1897 — 1971) foi um físico quântico americano.

²Irving Langmuir (Brooklyn, 31 de janeiro de 1881 — Woods Hole, 16 de agosto de 1957) foi um físico-químico americano. Sua publicação mais notável foi o famoso artigo de 1919 “O Acordo de elétrons nos átomos e moléculas”. Na General Electric, de 1909-1950, Langmuir avançou vários campos básicos da física e da química, inventou a lâmpada incandescente preenchida a gás, a técnica de soldagem de hidrogênio, e foi agraciado com o Prêmio Nobel de Química em 1932 por seu trabalho em química de superfície.

peratura. Com isso, um plasma pode ser produzido elevando a temperatura de uma substância até que uma ionização fracionária razoavelmente alta seja obtida. Plasmas em equilíbrio termodinâmico local não são muito comuns em laboratórios, embora sejam encontrados em muitos lugares na natureza.

Existem muitos métodos diferentes para criar plasmas no laboratório e, dependendo do método, o plasma pode ter alta ou baixa densidade, alta ou baixa temperatura, ser estável ou instável, entre outros fatores.

Em um processo de fotoionização, a ionização ocorre pela absorção de fótons incidentes cuja energia é igual ou maior que o potencial de ionização do átomo absorvente. O excesso de energia do fóton é transformado em energia cinética do par elétron-íon formado. Por exemplo, a energia potencial de ionização para o elétron mais externo do oxigênio atômico é $13,6 eV$, que pode ser fornecido por radiação de comprimento de onda menor que cerca de $91 nm$, isto é, no ultravioleta distante. A ionização também pode ser produzida por raios x ou raios gama, que têm comprimentos de onda muito menores.

Em uma descarga de gás, um campo elétrico é aplicado através do gás ionizado, o que acelera os elétrons livres em energias suficientemente altas para ionizar outros átomos por colisões. Uma característica desse processo é que o campo elétrico aplicado transfere energia com muito mais eficiência para os elétrons leves do que para os íons relativamente pesados. A temperatura do elétron nas descargas de gás é, portanto, geralmente mais alta que a temperatura do íon, pois a transferência de energia térmica dos elétrons para as partículas mais pesadas é muito lenta.

Quando a fonte ionizante é desligada, a ionização diminui gradualmente devido à recombinação até atingir um valor de equilíbrio consistente com a temperatura do meio. No laboratório, a recombinação geralmente ocorre tão rápido que o plasma desaparece completamente em uma pequena fração de segundo.

As propriedades de um plasma são marcadamente dependentes das interações das partículas. Uma das características básicas que distinguem o comportamento dos plasmas dos fluidos e sólidos comuns é a existência de efeitos coletivos. Devido à longa gama de forças eletromagnéticas, cada partícula carregada no plasma interage simultaneamente com um número considerável de outras partículas carregadas, resultando em importantes efeitos coletivos responsáveis pela riqueza de fenômenos físicos que ocorrem no plasma.

A dinâmica das partículas em um plasma é governada pelos campos internos devido à natureza e movimento das próprias partículas e pelos campos aplicados externamente. As interações básicas das partículas são de caráter eletromagnético. Os efeitos quânticos são insignificantes, exceto em alguns casos de colisões próximas.

Em um plasma, deve-se distinguir entre interações carga-carga e carga-neutra. Uma partícula carregada é cercada por um campo elétrico e interage com as outras partículas carregadas de acordo com a lei de coulomb, com sua dependência do inverso do quadrado da distância de separação. Além disso, um campo magnético está associado a uma partícula carregada em movimento, que também produz uma força em outras cargas em movimento. As partículas carregadas e neutras interagem através dos campos de polarização elétrica produzidos pela distorção da nuvem eletrônica da partícula neutra durante uma passagem próxima da partícula carregada. O campo associado às partículas neutras envolve forças de curto alcance, de modo que sua interação é eficaz apenas para distâncias interatômicas suficientemente pequenas para perturbar os elétrons orbitais.

Uma distinção pode ser feita entre plasmas fracamente ionizados e fortemente ionizados em termos da natureza das interações das partículas. Em um plasma fracamente ionizado, as interações carga-neutra dominam as interações coulombianas múltiplas. Quando o grau de ionização é tal que as múltiplas interações de coulomb se tornam dominantes, o plasma é considerado fortemente ionizado. À medida que o grau de ionização aumenta, as interações de coulomb se tornam cada vez mais importantes, de modo que, em um plasma totalmente ionizado, todas as partículas são submetidas à múltiplas interações de coulomb.

O fato de que algumas ou todas as partículas no plasma são eletricamente carregadas e, portanto, capazes de interagir com os campos eletromagnéticos, bem como de criá-los, dá origem a muitos novos fenômenos que não estão presentes em fluidos e sólidos comuns. A presença do campo magnético usado, por exemplo, no aquecimento e confinamento de plasmas em pesquisas termonucleares controladas, acentua bastante a novidade dos fenômenos plasmáticos. Para explorar todas as características dos fenômenos plasmáticos, o comportamento do plasma é geralmente estudado na presença de campos elétricos e magnéticos.

Devido à alta mobilidade dos elétrons, os plasmas são geralmente muito bons condutores elétricos, além de bons condutores térmicos. Como consequência de sua alta condutividade elétrica, eles não suportam campos eletrostáticos, exceto, em certa medida, em uma direção normal a qualquer campo magnético presente, o que inibe o fluxo de partículas carregadas nessa direção.

A presença de gradientes de densidade no plasma faz com que as partículas se difundam de regiões densas para regiões de menor densidade. Embora o problema de difusão nos plasmas não magnetizados seja um pouco semelhante ao que ocorre nos fluidos comuns, há, no entanto, uma diferença fundamental. Devido à sua menor massa, os elétrons tendem a se difundir mais rapidamente do que os íons, gerando

um campo elétrico de polarização como resultado da separação de carga. Esse campo aumenta a difusão dos íons e diminui a dos elétrons, de maneira a fazer com que os íons e os elétrons se difundam aproximadamente na mesma taxa. Esse tipo de difusão é chamado de difusão ambipolar. Quando existe um campo magnético aplicado externamente, a difusão de partículas carregadas através das linhas de campo é reduzida, o que indica que campos magnéticos fortes são úteis no confinamento do plasma.

Uma característica importante dos plasmas é sua capacidade de sustentar uma grande variedade de fenômenos de ondas. O estudo de ondas em plasmas fornece informações significativas sobre as propriedades do plasma e é muito útil para o diagnóstico do plasma.

Outro aspecto importante do comportamento do plasma é a emissão de radiação. O principal interesse na radiação plasmática está no fato de que ela pode ser usada para inferir propriedades plasmáticas [2].

Nos primeiros capítulos do trabalho é realizada a construção da teoria cinética do plasma, definindo espaço de fase, função de distribuição e a construção da equação de transporte de Boltzmann clássica por dois meios, onde o primeiro não leva em consideração a interação entre as partículas do sistema, e o segundo considerando as colisões entre as partículas constituintes, surgindo um termo de colisão do lado direito da equação. Logo em seguida apresenta-se a equação de Vlasov. No capítulo posterior são introduzidos os efeitos relativísticos na equação de Boltzmann. Para o primeiro caso, considera-se um gás não degenerado, o qual os efeitos quânticos não são levados em consideração. E em seguida para o caso de um gás degenerado, onde são introduzidas modificações para que as partículas obedeçam à estatística quântica.

Nos capítulos finais são apresentados formalismos importantes para o estudo de processos de espalhamento, como a matriz de transição relativística, espinores e as regras de Feynman. E por último é realizada uma manipulação no termo de colisão da equação de Boltzmann para um processo de aniquilação de pares, finalizando com uma conclusão a respeito das perspectivas futuras.

Capítulo 2

Teoria Cinética do Plasma

Neste capítulo serão apresentados os elementos básicos da teoria cinética, introduzindo os conceitos de espaço de fase e função de distribuição, os quais são necessários para a descrição estatística do plasma [2]. Realiza-se a construção da equação de Boltzmann sem o efeito de colisão e em sequência sua forma quando consideramos os efeitos de interação entre as partículas. No final do capítulo, finaliza-se apresentando a equação de Vlasov.

2.1 Aspectos Teóricos

O plasma é um sistema que contém um grande número de partículas carregadas interagindo, de modo que, para sua análise é conveniente utilizar uma abordagem estatística. A função de distribuição carrega todas as informações fisicamente interessantes sobre o sistema. A equação cinética diferencial satisfeita pela função de distribuição, geralmente conhecida como equação de Boltzmann, será descrita em sua forma clássica neste capítulo e mais à frente em sua forma relativística.

Os efeitos devido às colisões das partículas são incorporados à equação cinética somente através de um termo de colisão geral não especificado. Expressões explícitas para o termo de colisão, em particular para a integral de colisão de Boltzmann e para o termo de colisão de Fokker-Planck, são trabalhados no capítulo 21 do livro do Bittencourt [2].

2.2 Espaço de Fase

Cada partícula no plasma pode ser localizada por um vetor posição \vec{r} definido da origem do sistema de coordenadas para o centro de massa da partícula. Em

coordenadas cartesianas,

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad (2.1)$$

onde \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são os vetores unitários ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente. A velocidade linear do centro de massa da partícula pode ser representada pelo vetor,

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}, \quad (2.2)$$

com $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$.

Em analogia com o espaço de configuração definido pelas coordenadas da posição (x, y, z) , é conveniente introduzir o espaço das velocidade definido pelas coordenadas da velocidade (v_x, v_y, v_z) . Nesse espaço o vetor velocidade \vec{v} pode ser visto como um vetor posição partindo da origem do sistema de coordenadas (v_x, v_y, v_z) para o centro de massa da partícula, como indicado esquematicamente na figura 2.1,

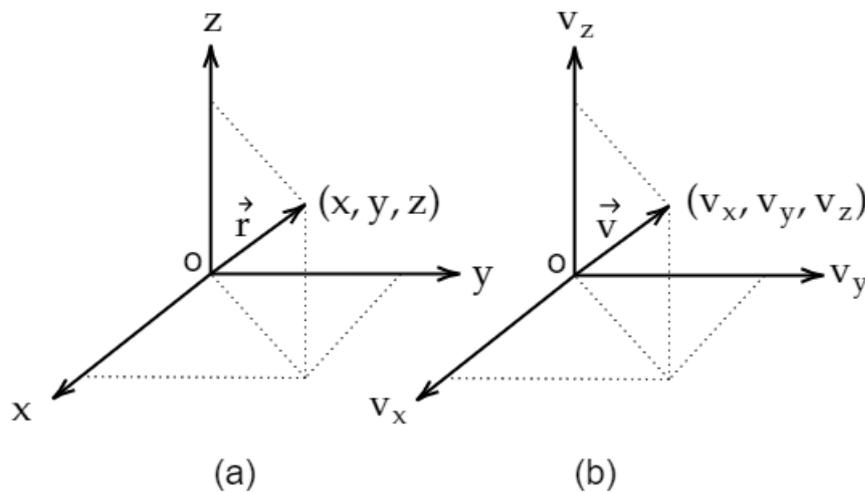


Figura 2.1: Vetor posição (a) no espaço das configurações e (b) no espaço das velocidades.

2.2.1 Espaço de Fase para Partícula Única

Partindo do ponto de vista da mecânica clássica, o estado dinâmico instantâneo de cada partícula pode ser especificado por sua posição e velocidade. É conveniente, portanto, considerar o espaço de fase definido por seis coordenadas (x, y, z, v_x, v_y, v_z) .

Nesse espaço *six-dimensional*, o estado dinâmico de cada partícula é adequadamente representado por um único ponto. As coordenadas (\vec{r}, \vec{v}) do ponto representativo fornecem a posição e a velocidade da partícula. Para uma partícula em movimento, esse ponto representativo descreve uma trajetória no espaço de fase.

Em cada instante de tempo o estado dinâmico de um sistema de N partículas é representado por N pontos no espaço de fase.

2.2.2 Espaço de Fase para Muitas Partículas

O espaço de fase para uma única partícula, que foi definido recentemente, é geralmente chamado de *espaço- μ* . O espaço de fase para muitas partículas recebe o nome de *espaço- Γ* . O sistema constituído por N partículas, sem graus internos de liberdade, é representado por um único ponto em um espaço $6N$ -*dimensões* definido por $3N$ coordenadas de posição (r_1, r_2, \dots, r_N) e $3N$ coordenadas de velocidade (v_1, v_2, \dots, v_N) . Então, um ponto no *espaço- Γ* corresponde a um único estado microscópico para todo o sistema de partículas. O espaço de fase para muitas partículas é geralmente usado em mecânica estatística e teoria cinética avançada. O espaço de fase para uma única partícula é normalmente utilizado em teoria cinética elementar e física básica do plasma.

2.2.3 Elementos de Volume

Pode-se representar um pequeno elemento de volume no espaço de configuração por $d^3r = dx dy dz$. Esse elemento diferencial de volume não deve ser tomado literalmente como uma quantidade matematicamente infinitesimal, mas como um elemento finito de volume, suficientemente grande para conter um número muito grande de partículas, mas suficientemente pequeno em comparação com os comprimentos característicos associados à variação espacial da variação física dos parâmetros de interesse como, por exemplo, densidade e temperatura. Em um gás contendo 10^{18} moléculas $/m^3$, por exemplo, definindo $d^3r = 10^{-12} m^3$, no qual em uma escala macroscópica pode ser considerado como um ponto, ainda existem 10^6 moléculas dentro de d^3r . Plasmas que não permitem a escolha de elementos diferenciais de volume, conforme indicado, não podem ser analisados estatisticamente. É preciso uma densidade mínima para uma abordagem estatística do plasma.

Referindo-se a uma partícula como estando situada dentro de d^3r , em \vec{r} , isso significa que a coordenada x da partícula está entre x e $x + dx$, a coordenada y está entre y e $y + dy$, e a coordenada z entre z e $z + dz$, ou seja, dentro do elemento de volume $dx dy dz$ situada ao redor do ponto terminal do vetor posição $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. É importante notar que as partículas localizadas dentro do elemento d^3r , em \vec{r} , podem possuir velocidades completamente arbitrárias que seriam representadas por pontos dispersos no espaço das velocidades.

Um pequeno elemento de volume no espaço das velocidades é representado por

$d^3v = dv_x dv_y dv_z$. Para que uma partícula seja incluída em d^3v , ao redor do ponto terminal do vetor velocidade \vec{v} , a componente v_x deve estar entre v_x e $v_x + dv_x$, a componente v_y entre v_y e $v_y + dv_y$, e a componente v_z entre v_z e $v_z + dv_z$. Os elementos diferenciais de volume d^3r e d^3v são esquematicamente representados pela figura 2.2.

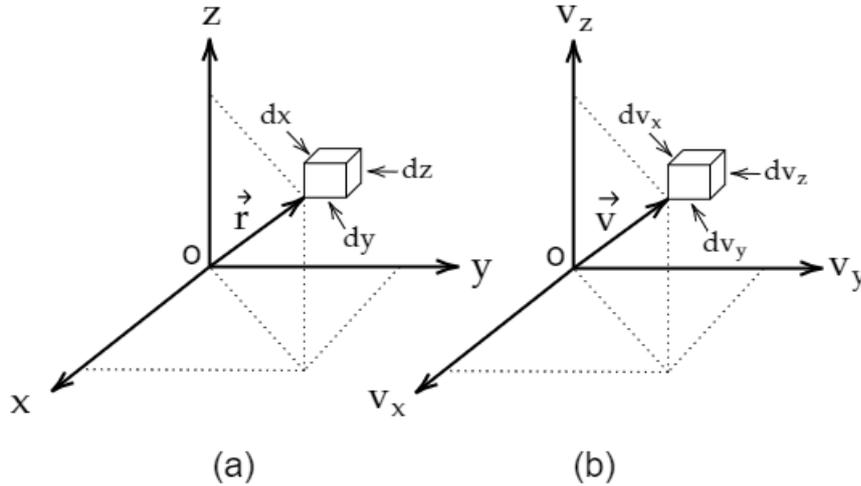


Figura 2.2: (a) Elemento de volume $d^3r = dx dy dz$ ao redor do ponto terminal \vec{r} , no espaço da configuração, e (b) elemento de volume $d^3v = dv_x dv_y dv_z$, no espaço das velocidades, ao redor do ponto terminal \vec{v} .

No espaço de fase (espaço- μ) o elemento diferencial de volume pode ser imaginado como um cubo de seis dimensões, dado por,

$$d^3r d^3v = dx dy dz dv_x dv_y dv_z, \quad (2.3)$$

e representado pela figura 2.3. Note que dentro de $d^3r d^3v$, a uma posição (\vec{r}, \vec{v}) no espaço de fase, existem somente partículas dentro de d^3r em torno de \vec{r} cujas velocidades estão dentro de d^3v em torno de \vec{v} . O número de pontos representativos dentro do elemento de volume $d^3r d^3v$ é, em geral, uma função do tempo e da posição desse elemento no espaço de fase. É importante notar que as coordenadas \vec{r} e \vec{v} do espaço de fase são consideradas variáveis independentes, desde que elas representem as posições individuais dos elementos de volume (contendo muitas partículas) no espaço de fase.

2.3 Função de Distribuição

O termo $d^6\mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ denota o número de partículas do tipo α dentro do elemento de volume $d^3r d^3v$ em torno das coordenadas do espaço de fase (\vec{r}, \vec{v}) , em um instante

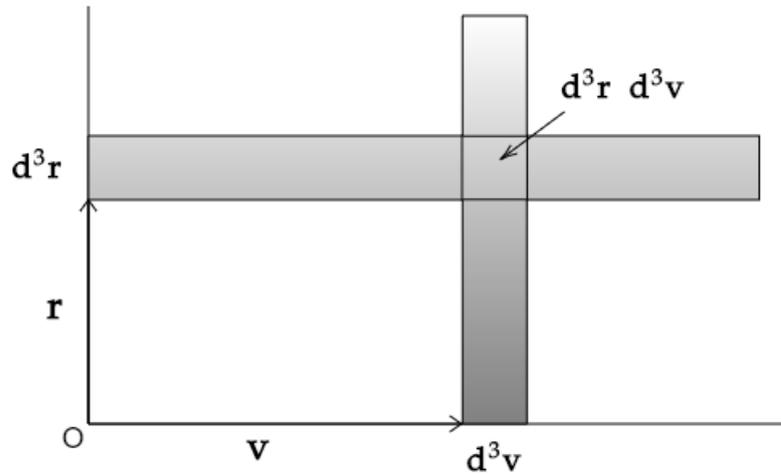


Figura 2.3: Representação esquemática do elemento de volume $d^3r d^3v$ no espaço de fase de seis dimensões, ao redor do ponto representativo (\vec{r}, \vec{v}) .

t . A função de distribuição no espaço de fase, $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, é definida como a densidade de pontos representativos de partículas do tipo α no espaço de fase, isto é,

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d^6 \mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{d^3r d^3v}. \quad (2.4)$$

É realizada uma suposição de que a densidade de pontos representativos no espaço de fase não varia rapidamente de um elemento de volume para outro elemento de volume vizinho, então $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pode ser considerada como uma função contínua. De acordo com essa definição, a função de distribuição é também positiva e uma função finita em qualquer instante de tempo. Em um elemento de volume $d^3r d^3v$, no qual as coordenadas da velocidade (v_x, v_y, v_z) são muito grandes, o número de pontos representativos é relativamente pequeno, desde que, em qualquer sistema macroscópico, deve haver relativamente poucas partículas com velocidades muito grandes. Considerações físicas requerem portanto que $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ deve tender a zero à medida que a velocidade se torna infinitamente grande.

A função de distribuição é, no geral, uma função da posição do vetor \vec{r} . Nesse caso, diz-se que o plasma correspondente é não homogêneo. Na ausência de forças externas, no entanto, um plasma inicialmente não homogêneo atinge, ao longo do tempo, um estado de equilíbrio como resultado das interações mútuas que ocorrem entre as partículas. Nesse estado homogêneo a função de distribuição não depende de \vec{r} .

No espaço das velocidades, a função de distribuição pode ser anisotrópica, quando depende da orientação do vetor velocidade \vec{v} , ou isotrópica, quando não depende da orientação do vetor velocidade \vec{v} , mas apenas da sua magnitude.

A descrição estatística de diferentes tipos de plasma requer o uso de funções não homogêneas ou homogêneas, bem como de distribuição anisotrópica ou isotrópica. Um plasma em equilíbrio térmico, por exemplo, é caracterizado por uma função de distribuição homogênea, isotrópica e independente do tempo.

No ponto de vista estatístico, a função de distribuição fornece uma descrição completa do sistema em consideração. Sabendo a função de distribuição, pode-se deduzir todas as variáveis macroscópicas de interesse físico para partículas do tipo α . Um dos principais problemas da teoria cinética consiste em determinar a função de distribuição para um determinado sistema. A equação diferencial que governa a variação temporal e espacial da função de distribuição sob determinadas condições, é conhecida geralmente como equação de Boltzmann. A equação de Boltzmann é utilizada para a análise dos diversos tipos de fenômenos de transporte envolvendo gradientes de temperatura e densidade. Essa equação é muito importante na física estatística e amplamente aplicada no estudo de sistemas fora do equilíbrio termodinâmico. Foi desenvolvida originalmente por Ludwing Boltzmann¹.

2.4 Densidade Numérica e Velocidade Média

A densidade numérica $n_\alpha(\vec{r}, t)$ é uma variável macroscópica definida no espaço das configurações como o número de partículas do tipo α por unidade de volume, independentemente da velocidade. Pode ser obtida integrando $d^6\mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ sobre todo o espaço da velocidade e dividindo o resultado pelo elemento de volume d^3r do espaço das configurações,

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{d^3r} \int_v d^6\mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (2.5)$$

ou, usando a definição (2.4),

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \int_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v. \quad (2.6)$$

A integral única indicada aqui representa de fato uma integral tripla que se estende por todo o espaço de velocidade, isto é, sobre cada uma das variáveis v_x, v_y , e v_z de $-\infty$ a $+\infty$. Por conveniência e simplificação da notação, apenas a integral única será indicada, estando implícito o fato de que a integral se estende por todo o espaço de velocidade.

¹Ludwing Eduard Boltzmann (Viena, 20 de fevereiro de 1844 — Durino-Aurisina, 5 de setembro de 1906) foi um físico austríaco, conhecido pelo seu trabalho no campo da termodinâmica estatística.

A velocidade média $\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t)$ é definida como uma velocidade de fluxo macroscópico das partículas do tipo α na vizinhança do vetor posição \vec{r} em um instante t . Para relacionar $\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t)$ à função de distribuição, considere as partículas do tipo α contidas em um elemento de volume $d^3r d^3v$ sobre (\vec{r}, \vec{v}) em um instante t , que denota-se por $d^6\mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$. A velocidade média das partículas do tipo α pode ser obtida da seguinte forma. Primeiro multiplica-se $d^6\mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pela velocidade da partícula \vec{v} , integra-se sobre todas as velocidades possíveis, e finalmente divide-se o resultado pelo número total de partículas do tipo α contidas em d^3r , independente da velocidade. Resultando,

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t) d^3r} \int_v \vec{v} d^6\mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (2.7)$$

O procedimento descrito é a definição estatística usual dos valores médios. Usando a definição da função de distribuição (2.4), obtêm-se,

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int_v \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v. \quad (2.8)$$

Note que ambos $n_\alpha(\vec{r}, t)$ e $\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t)$ são variáveis macroscópicas que dependem somente das coordenadas \vec{r} e t .

Existem métodos para se deduzir as variáveis macroscópicas (tal como fluxo de momento, pressão, temperatura, fluxo de calor, e assim por diante) em termos da função de distribuição.

Na próxima seção, será realizada a construção da equação de Boltzmann na ausência dos efeitos de interação entre as partículas e logo em seguida o caso onde são introduzidos os efeitos de interação, surgindo um termo de colisão devido às interações, sem derivar explicitamente nenhuma expressão específica para o termo de colisão.

2.5 A Equação de Boltzmann

A equação de Boltzmann é frequentemente utilizada para calcular as propriedades de transporte em metais e semicondutores. Utilizada também para calcular o fluxo de calor em um sólido que surge devido à uma diferença de temperatura, e à condutividade térmica. O efeito Hall e fenômenos complexos também são possíveis. Propriedades de não equilíbrio de gases atômicos ou moleculares, como viscosidade, condução térmica e difusão, têm sido tratados com a equação de Boltzmann. Embora muitos resultados úteis como a independência da viscosidade na pressão, podem ser obtidos por métodos aproximados. Outra aplicação da equação de Boltzmann é

no estudo de plasmas. Muitas das propriedades dos plasmas podem ser calculadas estudando o movimento das partículas individuais em campos elétricos e magnéticos, ou considerando equações hidrodinâmicas ou a equação Vlasov, juntamente com as equações de Maxwell. No entanto, propriedades sutis de plasmas, como processos de difusão e de amortecimento de ondas, podem ser melhor compreendidas partindo da equação de Boltzmann.

Para calcular os valores médios das propriedades físicas das partículas (as variáveis macroscópicas de interesse), é necessário conhecer a função de distribuição para o sistema em consideração. A dependência da função de distribuição nas variáveis independentes \vec{r} , \vec{v} , e t é governada por uma equação conhecida como equação de Boltzmann.

2.5.1 Equação de Boltzmann sem colisão

Lembrando que,

$$d^6 \mathcal{N}_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v, \quad (2.9)$$

representa o número de partículas do tipo α , em um instante de tempo t , que estão situadas dentro de um elemento de volume $d^3 r d^3 v$ do espaço de fase, sobre as coordenadas (\vec{r}, \vec{v}) . Supõe-se que cada partícula está sujeita a uma força externa \vec{F} . Na ausência da interação entre as partículas, uma partícula do tipo α com coordenada sobre (\vec{r}, \vec{v}) no espaço de fase, em um instante t , deverá ser encontrada depois em um intervalo de tempo dt sobre uma nova coordenada (\vec{r}', \vec{v}') , tal que,

$$\vec{r}'(t + dt) = \vec{r}(t) + \vec{v} dt, \quad (2.10)$$

$$\vec{v}'(t + dt) = \vec{v}(t) + \vec{a} dt, \quad (2.11)$$

onde $\vec{a} = \vec{F}/m_\alpha$ é a aceleração da partícula e m_α é a massa. Então, todas as partículas do tipo α dentro do elemento de volume $d^3 r d^3 v$ do espaço de fase, sobre (\vec{r}, \vec{v}) em um instante t , ocuparão um novo elemento de volume $d^3 r' d^3 v'$, sobre (\vec{r}', \vec{v}') após um intervalo dt , como representado na figura 2.4. Já que são consideradas as mesmas partículas em t e em $t + dt$, logo, na ausência das colisões,

$$f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t) d^3 r' d^3 v' = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v. \quad (2.12)$$

O elemento de volume $d^3 r d^3 v$ pode ficar distorcido como resultado do movimento das partículas. A relação entre o novo elemento de volume e o inicial é descrita por,

$$d^3 r' d^3 v' = |J| d^3 r d^3 v, \quad (2.13)$$

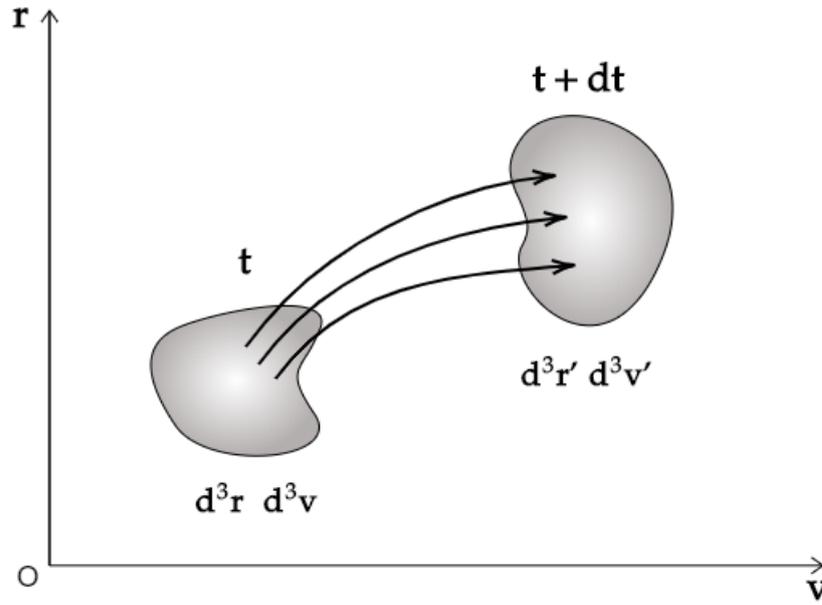


Figura 2.4: Na ausência das colisões as partículas dentro do elemento de volume $d^3r d^3v$ sobre (\vec{r}, \vec{v}) , em um instante de tempo t , ocupará após um intervalo de tempo dt um novo elemento de volume $d^3r' d^3v'$, sobre (\vec{r}', \vec{v}') .

onde J é o Jacobiano da transformação das coordenadas iniciais (\vec{r}, \vec{v}) para as finais (\vec{r}', \vec{v}') . Mostra-se na próxima subseção que, para as transformações (2.10) e (2.11) tem-se $|J| = 1$, de modo que,

$$d^3r' d^3v' = d^3r d^3v, \quad (2.14)$$

e a relação (2.12) torna-se,

$$[f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) - f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)] d^3r d^3v = 0. \quad (2.15)$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.15) pode ser expandido em uma série de Taylor em torno de $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$,

$$\begin{aligned} f_\alpha(\vec{r} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{a}dt, t + dt) &= f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt + \\ &+ \left(v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right) dt + \left(a_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} + a_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y} + a_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_z} \right) dt, \end{aligned} \quad (2.16)$$

desconsiderando os termos de ordem $(dt)^2$ e superior. Usando a notação do operador,

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.17)$$

e, de maneira semelhante, definindo um operador no espaço de velocidade,

$$\nabla_v = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z}. \quad (2.18)$$

Com isso, da relação (2.16),

$$f_\alpha(\vec{r} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{a}dt, t + dt) = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \left[\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \right] dt. \quad (2.19)$$

Substituindo esse resultado na relação (2.15), obtêm-se,

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0, \quad (2.20)$$

que é a equação de Boltzmann na ausência de colisões. Esta equação pode ser reescrita como,

$$\frac{\mathcal{D}f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\mathcal{D}t} = 0, \quad (2.21)$$

onde o operador,

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + \vec{a} \cdot \nabla_v, \quad (2.22)$$

representa a derivada total em relação ao tempo, no espaço de fase. A equação (2.21) é uma declaração da conservação da densidade de pontos representativos no espaço de fase. Avançando com um ponto representativo no espaço de fase e observando a densidade de pontos representativos $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ em sua vizinhança, descobre-se que esta densidade permanece constante no tempo. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Liouville*². Note que esse resultado aplica-se apenas para o caso especial em que colisões, assim como perda de radiação, processos de produção e perda de partículas, não são importantes.

2.5.2 Transformação do Jacobiano no Espaço de Fase

Para determinar o Jacobiano da transformação definida por (2.10) e (2.11) lembre-se que, a partir da sua definição,

$$J = \frac{\partial(\vec{r}', \vec{v}')}{\partial(\vec{r}, \vec{v})} = \frac{\partial(x', y', z', v'_x, v'_y, v'_z)}{\partial(x, y, z, v_x, v_y, v_z)}, \quad (2.23)$$

²Uma evolução dinâmica de uma região do espaço de fase, apesar de se expandir e contrair com a evolução no tempo, manterá invariante seu volume.

que corresponde ao determinante de uma matriz 6×6 ,

$$J = \begin{bmatrix} \partial x' / \partial x & \partial y' / \partial x & \dots & \partial v'_z / \partial x \\ \partial x' / \partial y & \partial y' / \partial y & \dots & \partial v'_z / \partial y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial x' / \partial v_z & \partial y' / \partial v_z & \dots & \partial v'_z / \partial v_z \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Pode-se separar a força externa \vec{F} em duas partes,

$$\vec{F} = \vec{F}' + q_\alpha (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.25)$$

onde \vec{F}' representa a força independente da velocidade e o segundo termo é a força dependente da velocidade devido a um campo magnético externo aplicado \vec{B} , a única força dependente da velocidade que pode interessar nesse tratamento. As derivadas parciais que aparecem na matriz J são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij}, & \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial F'_i}{\partial x_j} dt, \\ \frac{\partial x'_i}{\partial v_j} &= \delta_{ij} dt, & \frac{\partial v'_i}{\partial v_j} &= \delta_{ij} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial (\vec{v} \times \vec{B})_i}{\partial v_j} dt, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde (2.10), (2.11) e (2.25) foram usadas, e $x_{i,j} = x, y, z$ e $v_{i,j} = v_x, v_y, v_z$. O símbolo δ_{ij} é o *Delta de Kronecker*. A matriz (2.24) pode ser reescrita na forma,

$$J = \begin{bmatrix} (J)_1 & (J)_2 \\ (J)_3 & (J)_4 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

onde os $(J)'_i$ s, com $i = 1, 2, 3, 4$, representam as seguintes submatrizes 3×3 :

$$(J)_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$(J)_2 = \frac{dt}{m_\alpha} \begin{bmatrix} \partial F'_x / \partial x & \partial F'_y / \partial x & \partial F'_z / \partial x \\ \partial F'_x / \partial y & \partial F'_y / \partial y & \partial F'_z / \partial y \\ \partial F'_x / \partial z & \partial F'_y / \partial z & \partial F'_z / \partial z \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$(J)_3 = \begin{bmatrix} dt & 0 & 0 \\ 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & dt \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$(J)_4 = \begin{bmatrix} 1 & -aB_z & aB_y \\ aB_z & 1 & -aB_x \\ -aB_y & aB_x & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

onde a constante a é definida como $(q_\alpha/m_\alpha)dt$. Desconsiderando os termos de ordem $(dt)^2$, pode ser facilmente verificado que $|J| = 1$. Com isso, incluindo os termos de primeira ordem em dt , chega-se à relação,

$$d^3r' d^3v' = d^3r d^3v, \quad (2.32)$$

que é o resultado (2.14) usado na subseção anterior.

2.6 Efeito da Interação entre Partículas

Quando os efeitos devido a interação entre as partículas são levados em consideração, a equação (2.20) precisa ser modificada. Como resultado das colisões durante o intervalo de tempo dt , algumas das partículas do tipo α que estão inicialmente dentro do elemento de volume $d^3r d^3v$ do espaço de fase podem ser removidas dele, enquanto que partículas do tipo α inicialmente fora desse elemento de volume podem acabar dentro dele. Esse processo é indicado esquematicamente na figura 2.5. Geralmente, o número de partículas do tipo α dentro de $d^3r d^3v$ sobre a coordenada (\vec{r}, \vec{v}) , em um instante t , deve ser diferente do número de partículas do tipo α dentro desse mesmo elemento de volume sobre a coordenada (\vec{r}', \vec{v}') a um instante $t + dt$. Indica-se esse ganho ou perda líquida de partículas do tipo α , como resultado das

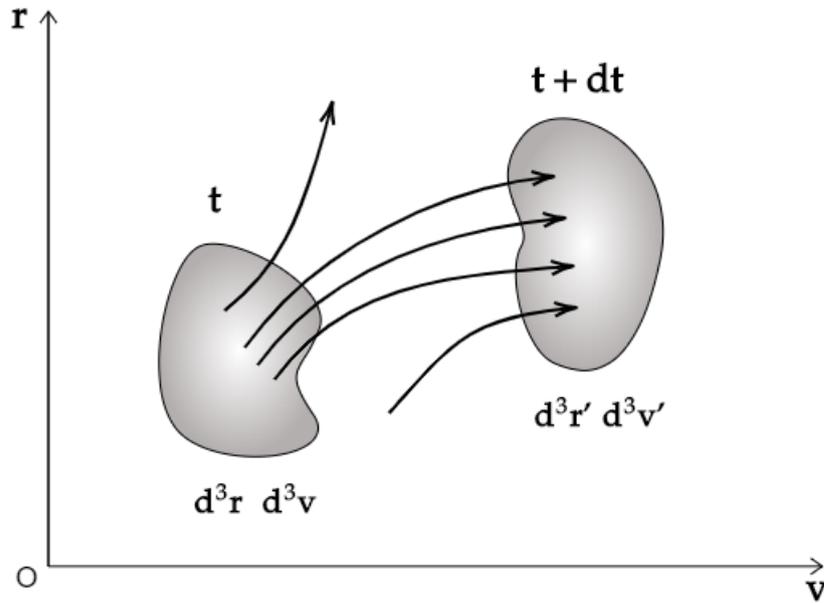


Figura 2.5: Representação esquemática do movimento do elemento de volume $d^3r d^3v$ no espaço de fase, mostrando as partículas entrando e saindo desse elemento de volume, como resultado das colisões durante o intervalo de tempo dt .

colisões durante o intervalo de tempo dt , no elemento de volume $d^3r d^3v$, pelo termo,

$$\left[\frac{\delta f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\delta t} \right]_{coll} d^3r d^3v dt, \quad (2.33)$$

onde $(\delta f_\alpha / \delta t)_{coll}$ representa a taxa de variação da função de distribuição $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ devido às colisões. Então, quando as colisões são consideradas, a equação (2.15) torna-se,

$$[f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) - f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)] d^3r d^3v = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} d^3r d^3v dt, \quad (2.34)$$

e a forma modificada da equação (2.20) resulta em,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll}. \quad (2.35)$$

Usando a operador derivada total do tempo, pode-se reescrever esta equação na forma compacta,

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll}. \quad (2.36)$$

A equação (2.36) é incompleta, pois a forma precisa do termo de colisão não é conhecida, ou seja, precisa-se utilizar alguns métodos conhecidos para se analisar e

estudar o termo de colisão. Uma expressão para o termo de colisão muito simples apresentada brevemente no capítulo 5 do livro do Bittencourt [2] é o *modelo de Krook* ou também conhecido como *modelo de relaxação*. Expressões mais elaboradas, tal como a *integral de colisão de Boltzmann* e o *termo de colisão de Fokker-Planck*, são apresentadas também no livro do Bittencourt. Lembrando que cada diferente tratamento do termo de colisão vai de acordo com o tipo de partícula e interação que estão sendo levadas em consideração.

O objetivo não é demonstrar os métodos, pois são processos que demandam tempo e não são o enfoque do trabalho. Para isso, são apresentadas algumas referências com o objetivo de encaminhar o leitor para um estudo mais aprofundado sobre os termos de colisão.

2.7 Equação de Vlasov

Uma maneira aproximada e muito útil pra descrever a dinâmica do plasma é considerar que os movimentos das partículas do plasma são governados pelos campos externos aplicados mais os campos internos médios macroscópicos, suavizados no espaço e tempo, devido à presença e movimento de todas as partículas do plasma. O problema de obter os campos eletromagnéticos internos macroscópicos (suavizados), no entanto, ainda é complexo e requer que seja obtida uma solução autoconsistente.

A equação de Vlasov é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução temporal da função de distribuição no espaço de fase e que incorpora diretamente os campos eletromagnéticos internos macroscópicos suavizados. Foi proposta inicialmente para a descrição de plasma por Anatoly Vlasov³ em 1938. Pode ser obtida da equação de Boltzmann (2.35) com o termo de colisão igual a zero, mas incluindo o campo interno suavizado no termo de força,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \left[\vec{F}_{ext} + q_\alpha (\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i) \right] \cdot \nabla_v f_\alpha = 0. \quad (2.37)$$

Aqui \vec{F}_{ext} representa a força externa, incluindo a força de Lorentz associada com qualquer campo elétrico e magnético aplicado externamente, e \vec{E}_i e \vec{B}_i são campos elétricos e magnéticos suavizados internos devido à presença e movimento de todas as partículas carregadas no interior do plasma. Para que os campos eletromagnéticos macroscópicos internos \vec{E}_i e \vec{B}_i sejam consistentes com as densidades de carga e

³Anatoly Alexandrovich Vlasov (Balashov, Império Russo, 20 de agosto de 1908 — Moscou, 22 de dezembro de 1975) foi um físico teórico russo que atuou nos campos da mecânica estatística, cinética e em especial física de plasmas.

de corrente macroscópicas existentes no próprio plasma, eles devem satisfazer as equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \vec{E}_i = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.38)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_i = 0, \quad (2.39)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t}, \quad (2.40)$$

$$\nabla \times \vec{B}_i = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \right), \quad (2.41)$$

com a densidade da carga ρ e a densidade de corrente do plasma \vec{J} dadas pelas expressões,

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v, \quad (2.42)$$

$$J(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) \vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v, \quad (2.43)$$

com os somatórios sendo sobre as diferentes espécies de partículas carregadas no plasma. Aqui $\vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t)$ indica a velocidade média macroscópica para as partículas do tipo α , dadas em (2.8).

As equações (2.37) a (2.43) constituem um conjunto completo de equações autoconsistentes a serem resolvidas simultaneamente. Por exemplo, em um procedimento iterativo, assumindo valores aproximados iniciais para $E_i(\vec{r}, t)$ e $B_i(\vec{r}, t)$, a equação (2.37) pode ser resolvida para encontrar $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ para as várias espécies diferentes. Substituindo as funções de distribuição nas equações (2.42) e (2.43) calcula-se os valores para a carga e a densidade de corrente no plasma, que podem ser substituídos nas equações de Maxwell e resolvidos para os campo \vec{E}_i e \vec{B}_i . Esses valores são então substituídos na equação de Vlasov e assim por diante, repetidas vezes, a fim de obter uma solução autoconsistente para a função de distribuição.

Embora a equação de Vlasov não inclua explicitamente um termo de colisão no seu lado direito e, portanto, não leve em consideração colisões de curta distância, ela não é tão restritiva quanto parece, pois uma parte significativa dos efeitos das interações das partículas já foi incluído na força de Lorentz, através dos campos eletromagnéticos suavizados internos.

Compreende-se neste capítulo os conceitos por trás da teoria cinética do plasma, espaço de fase, função de distribuição, densidade numérica e velocidade média. Abrindo caminho para apresentação da equação de Boltzmann, sua construção e a im-

portância para aplicações futuras no estudo do plasma, finalizando com a equação de Vlasov. No próximo capítulo, serão introduzidos os efeitos relativísticos na equação de Boltzmann, realizando a construção inicial para um caso clássico, onde não são considerados os efeitos quânticos. Em seguida, realiza-se os cálculos para um caso quasi-clássico, onde considera-se um gás degenerado no qual as partículas obedecem à estatística quântica.

Capítulo 3

Equação Relativística de Boltzmann

Neste capítulo realiza-se a construção da teoria com base no livro *The Relativistic Boltzmann Equation Theory and Applications* [3]. O processo de construção é baseado na demonstração e comprovação da invariância de escala dos termos e propriedades relativísticas, com o objetivo de comprovar a invariância escalar da equação de Boltzmann relativística. O passo inicial é realizar a construção da teoria para o caso do gás não degenerado, onde não se leva em consideração os efeitos quânticos. Finaliza-se com um gás degenerado, onde apresenta-se a derivação da equação relativística de Uehling-Uhlenbeck, que é uma equação quase-clássica, onde os efeitos quânticos são incorporados no termo de colisão da equação de Boltzmann.

3.1 Gás não Degenerado

A proposta do capítulo é introduzir os conceitos básicos da teoria cinética relativística e a equação de Boltzmann relativística, que governa a evolução temporal da função de distribuição.

Nesta seção, considera-se um gás único relativístico não degenerado, isto é, um gás onde os efeitos quânticos não são levados em consideração.

Uma partícula de gás de massa de repouso m é caracterizada pelas coordenadas espaço-tempo $(x^\alpha) = (ct, \vec{x})$ e pelo momento quadrivetorial $(p^\alpha) = (p^0, \vec{p})$. Devido à restrição de que o comprimento do vetor quadrimomento é mc , p^0 é dado em termos

de \vec{p} pela relação,

$$\begin{aligned} p_\alpha p^\alpha &= m^2 c^2 \\ (p_0, -\vec{p}) (p^0, \vec{p}) &= m^2 c^2 \\ (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 &= m^2 c^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

resultando em,

$$p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}. \quad (3.2)$$

A função de distribuição de uma partícula, definida em termos do espaço-tempo e das coordenadas do momento $f(x^\alpha, p^\alpha) = f(\vec{x}, \vec{p}, t)$, é descrita por,

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3x d^3p = f(\vec{x}, \vec{p}, t) dx^1 dx^2 dx^3 dp^1 dp^2 dp^3. \quad (3.3)$$

A relação acima fornece, no momento t , o número de partículas no elemento de volume d^3x sobre \vec{x} e com momento d^3p sobre \vec{p} .

O número de partículas em um elemento de volume é um invariante escalar¹ pois todos os observadores deverão contar o mesmo número de partículas, independente da escolha de referencial. Para examinar a invariância do elemento de volume $d^3x d^3p$, utiliza-se a propriedade de invariância de elementos de volume,

$$\frac{dA'^1 dA'^2 dA'^3}{A'_0} = \frac{dA^1 dA^2 dA^3}{A_0}. \quad (3.4)$$

A relação (3.4) é demonstrada passo a passo no livro do Carlo Cercignani [3].

Voltando para a análise do elemento de volume $d^3x d^3p$, utilizando a propriedade (3.4), tem-se que,

$$\frac{d^3p'}{p'_0} = \frac{d^3p}{p_0}, \quad (3.5)$$

é um invariante escalar. Escolhendo o referencial de repouso, onde $\vec{p}' = \vec{0}$. Nesse caso d^3x' é o próprio elemento de volume, e da relação de volume próprio obtêm-se,

$$d^3x = \sqrt{1 - v^2/c^2} d^3x' = \frac{1}{\gamma} d^3x'. \quad (3.6)$$

Por outro lado, da transformação de componentes do quadrimomento,

$$p^\alpha = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = (p^0, \vec{p}), \quad (3.7)$$

¹A invariância de escala é uma característica de objetos ou leis que não mudam se as escalas de comprimento, energia ou outras variáveis são multiplicadas por um fator comum.

que no referencial de repouso ($v = 0$),

$$p'_0 = \frac{1}{\gamma} p_0, \quad (3.8)$$

desde que $p^0 = p_0$. Agora, realizando o produto,

$$d^3x d^3p = \frac{1}{\gamma} d^3x' \frac{p^0}{p'^0} d^3p' = d^3x' d^3p', \quad (3.9)$$

conclui-se que $d^3x d^3p$ é um invariante escalar, desde que o número de partículas no elemento de volume $d^3x d^3p$ é um invariante escalar e também que a função de distribuição de uma partícula $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ é um invariante escalar.

Definindo o elemento de volume em um instante t por,

$$d\mu(t) = d^3x d^3p. \quad (3.10)$$

O número de partículas nesse elemento de volume é,

$$N(t) = f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\mu(t). \quad (3.11)$$

Além disso, o número de partículas em um elemento de volume $d\mu(t + \Delta t)$ em um tempo $t + \Delta t$ é descrito por,

$$N(t + \Delta t) = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t). \quad (3.12)$$

As colisões entre as partículas implicam que $N(t)$ não é igual a $N(t + \Delta t)$ e a diferença no número de partículas devido as colisões é descrita pela relação,

$$\begin{aligned} \Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) \\ &= f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t) - f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde a variação na posição e no momento são definidos por,

$$\Delta\vec{x} = \vec{v}\Delta t \quad \text{e} \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \quad (3.14)$$

$\vec{F}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ representa a força externa que atua sobre as partículas e $\vec{v} = c\vec{p}/p^0$ é a velocidade da partícula com momento \vec{p} .

A relação entre $d\mu(t + \Delta t)$ e $d\mu(t)$ é descrita por,

$$d\mu(t + \Delta t) = |J|d\mu(t), \quad (3.15)$$

com J sendo o Jacobiano da transformação,

$$J = \frac{\partial (x^1(t + \Delta t), x^2(t + \Delta t), \dots, p^3(t + \Delta t))}{\partial (x^1(t), x^2(t), \dots, p^3(t))}. \quad (3.16)$$

Considerando-se apenas termos lineares em Δt , obtêm-se que o Jacobiano se reduz para,

$$J = 1 + \frac{\partial F^i}{\partial p^i} \Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]. \quad (3.17)$$

Agora, expandindo o termo $f(\vec{x} + \Delta \vec{x}, \vec{p} + \Delta \vec{p}, t + \Delta t)$ em série de Taylor sobre o ponto (\vec{x}, \vec{p}, t) e considerando apenas termos lineares em Δt ,

$$f(\vec{x} + \Delta \vec{x}, \vec{p} + \Delta \vec{p}, t + \Delta t) \approx f(\vec{x}, \vec{p}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial f}{\partial p^i} \Delta p^i. \quad (3.18)$$

Combinando a equação (3.13) com a (3.18) e obtendo a alteração total do número de partículas por unidade de tempo,

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) - N &= \left(f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial f}{\partial p^i} \Delta p^i \right) \left(1 + \frac{\partial F^i}{\partial p^i} \Delta t \right) d\mu(t) - f d\mu(t) \\ \Delta N &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial f}{\partial p^i} \Delta p^i \right) d\mu(t) + \left(f \frac{\partial F^i}{\partial p^i} \Delta t + \dots \right) d\mu(t) \\ \frac{\Delta N}{\Delta t} &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + F^i \frac{\partial f}{\partial p^i} + f \frac{\partial F^i}{\partial p^i} \right] d\mu(t) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f F^i}{\partial p^i} \right] d\mu(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

ΔN é um invariante escalar, bem como o tempo próprio $\Delta \tau = \Delta t / \gamma$. Consequentemente,

$$\gamma \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta \tau} = \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f F^i}{\partial p^i} \right] d\mu(t), \quad (3.20)$$

é também um invariante escalar. Mostra-se em (3.9) que $d\mu = d^3 d^3 p$ é um invariante escalar e, como consequência, a expressão multiplicada por (3.20) deverá ter a mesma propriedade. Para comprovar a invariância, primeiro considera-se o termo,

$$\gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{cp^i}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = \frac{c\gamma}{p^0} p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{m} p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \quad (3.21)$$

usando que $v^i = cp^i/p^0$ e $\gamma = p^0/mc$. Devido ao fato de que f é um invariante escalar, $\partial f/\partial x^\alpha$ é um quadri-vector e o produto escalar $p^\alpha \partial f/\partial x^\alpha$ é um invariante escalar. Precisa-se apenas provar que o termo $\gamma \partial f F^i/\partial p^i$ possui a mesma propriedade. Para provar que o termo é um escalar invariante, considera-se a força de Minkowski (Veja

a seção 1.4.2 do livro do Carlo Cercignani [3]) definida como,

$$\begin{aligned} K^\alpha &= \left(\frac{m\vec{a} \cdot \vec{v}}{c(1 - v^2/c^2)^2}, \frac{m[\vec{a} + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})/c^2]}{(1 - v^2/c^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\vec{F}}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

que satisfaz a relação,

$$K^\alpha p_\alpha = K^0 p_0 - \vec{K} \cdot \vec{p} = 0, \quad (3.23)$$

e a relação,

$$\vec{F} = \frac{\vec{K}}{\gamma} = \frac{mc\vec{K}}{p^0}, \quad (3.24)$$

onde m é a massa de repouso. Considerando p^0 como uma variável independente e utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial p^i} \rightarrow \frac{\partial p^0}{\partial \vec{p}} \frac{\partial}{\partial p^0} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{p^0} \frac{\partial}{\partial p^0} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}}, \quad (3.25)$$

pode-se escrever a seguinte expressão,

$$\gamma \frac{\partial f F^i}{\partial p^i} = \gamma mc \left[\frac{\vec{p}}{p^0} \cdot \frac{\partial}{\partial p^0} \left(\frac{f \vec{K}}{p^0} \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \left(\frac{f \vec{K}}{p^0} \right) \right]. \quad (3.26)$$

Como p^0 e \vec{p} são tratadas como variáveis independentes, a equação abaixo se reduz para,

$$\gamma \frac{\partial f F^i}{\partial p^i} = \gamma mc \left[\frac{1}{p^0} \cdot \frac{\partial}{\partial p^0} \left(\frac{f \vec{K} \cdot \vec{p}}{p^0} \right) + \frac{1}{p^0} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot (f \vec{K}) \right].$$

Usando a relação (3.23),

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial f F^i}{\partial p^i} &= \frac{\gamma mc}{p^0} \left[\frac{\partial f K^0}{\partial p^0} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot (f \vec{K}) \right] \\ &= \frac{\gamma mc}{p^0} \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

comprova-se que o termo é um invariante escalar.

De acordo com (3.21) e (3.23), partindo da equação (3.19), obtêm-se que,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c}{p^0} \left[p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha} \right] d\mu(t), \quad (3.28)$$

que descreve a diferença do número de partículas por unidade de tempo. Para determinar $\Delta N/\Delta t$, decompõe-se em dois termos,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{(\Delta N)^+}{\Delta t} - \frac{(\Delta N)^-}{\Delta t}, \quad (3.29)$$

onde $(\Delta N)^-/\Delta t$ corresponde às partículas que deixam o elemento de volume $d^3x d^3p$, e $(\Delta N)^+/\Delta t$ corresponde às partículas que entram no mesmo elemento de volume. Além disso, assume-se o seguinte:

- I - Somente colisões entre pares de partículas são levadas em consideração, ou seja, apenas colisões binárias são consideradas. Isso é razoável se o gás considerado estiver diluído, ou seja, se o volume ocupado pelas moléculas é muito menor que o volume do gás;
- II - Se \vec{p} e \vec{p}_* indicam o momento de duas partículas antes da colisão, elas não estão correlacionadas. Isso será aplicado ao momento \vec{p} da partícula que estamos seguindo, e \vec{p}_* do seu parceiro de colisão, bem como os dois momentos \vec{p}' e \vec{p}'_* possuídos pelas duas partículas antes de uma colisão que as transformará em partículas com momento \vec{p} e \vec{p}_* após a colisão. Essa hipótese é a chamada suposição do caos molecular;
- III - A função de distribuição de uma partícula $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ não varia muito ao longo de um intervalo de tempo maior que a duração de uma colisão mas menor que o tempo entre as colisões. O mesmo se aplica à variação de f a uma distância da ordem do intervalo de interação.

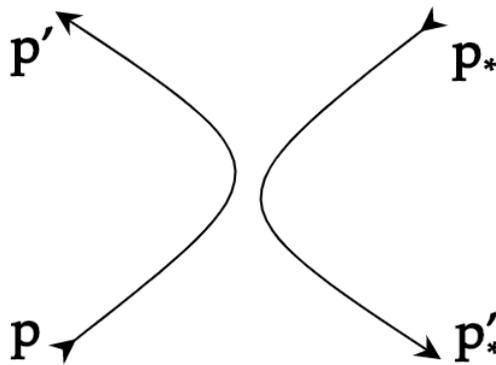


Figura 3.1: Representação de uma colisão binária.

Considera-se a colisão de dois feixes de partículas com velocidades $\vec{v} = c\vec{p}/p^0$ e $\vec{v}_* = c\vec{p}_*/p_*^0$. As densidades numéricas desses dois feixes em seus referenciais são definidas por dn e dn_* . O d na frente do n e n_* indica que as densidades numéricas

são infinitesimais porque elas se referem aos elementos de volume d^3p e d^3p_* do espaço dos momentos ($dn = f d^3p$ e $dn_* = f_* d^3p_*$). Primeiro considera-se o referencial onde as partículas sem rótulo² estão em repouso, ou seja, $\vec{v} = \vec{0}$. O número total dessas partículas sobre \vec{x} é $dn d^3x$. O número total de partículas que irão colidir com as primeiras e estão em um elemento de volume dV_* será $dn_* dV_* = dn_* dV / \sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}$, onde v_{rel} é a velocidade relativa e $dV / \sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}$ é o volume próprio.

As partículas com densidade dn_* no elemento de volume dV são diferentemente dispersas pelos seus parceiros na colisão através de diferentes ângulos. Cada colisão ocorrerá em um plano com algum ângulo de dispersão Θ ; outro ângulo é necessário para destacar o plano (que deve conter a velocidade relativa) e duas vizinhanças infinitesimais dos dois ângulos juntos para destacar um elemento de ângulo sólido $d\Omega$. O elemento de volume dV pode ser reescrito em termos do chamado cilindro de colisão de base $\sigma d\Omega$ e comprimento $v_{rel} \Delta t$, representado pela figura 3.2. Δt é identificado como o diferencial do tempo próprio, por conta da escolha do referencial. O fator σ possui claramente dimensões de área e é chamado seção transversal diferencial do processo de espalhamento correspondente à velocidade relativa e ao ângulo Θ . Em outro sistema de referência onde $\vec{v} \neq \vec{0}$, $d^3x \Delta t$, σ , $d\Omega$ e v_{rel} são invariantes escalares.

O número total de colisões será representado pelo produto dos números de partículas correspondentes às velocidades \vec{v} e \vec{v}_* ,

$$dn d^3x \frac{dn_*}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} dV = dn d^3x \frac{dn_*}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} (\sigma d\Omega v_{rel} \Delta t), \quad (3.30)$$

onde reescreve-se o elemento de volume dV em termos do cilindro de colisão como discutido acima.

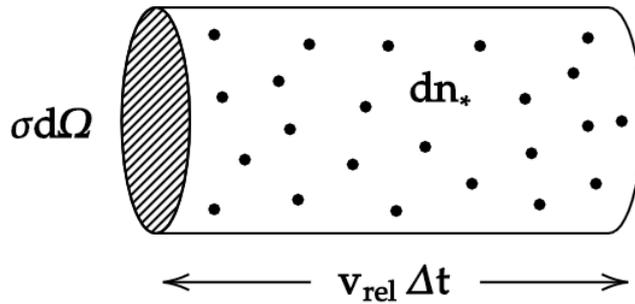


Figura 3.2: Representação do cilindro de colisão.

Considerando o produto entre as densidades numéricas das partículas em um

²Definimos α_* = partículas com rótulo e α = partículas sem rótulo.

sistema onde $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\begin{aligned} \frac{dn dn_*}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} &= \frac{dn}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dn_*}{\sqrt{1 - v_*^2/c^2}} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - v_*^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} \\ &= f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) d^3p_* \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - v_*^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Usando $p_\alpha p_*^\alpha = \frac{m^2 c^2}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}}$, $p^0 = \gamma m c$ e $p_*^0 = \gamma_* m c$,

$$\frac{dn dn_*}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} = f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) d^3p_* \frac{p_\alpha p_*^\alpha}{p^0 p_*^0}. \quad (3.31)$$

A densidade numérica das partículas acima foi escrita em termos das funções de distribuição,

$$\frac{dn}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad \frac{dn_*}{\sqrt{1 - v_*^2/c^2}} \equiv f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) d^3p_*. \quad (3.32)$$

Portanto, em vez de (3.30), temos que o número total de colisões se torna,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) d^3p_* v_{rel} \frac{p_\alpha p_*^\alpha}{p^0 p_*^0} \sigma d\Omega d^3x \Delta t = \\ = f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) d^3p_* g_\phi \sigma d\Omega d^3x \Delta t, \end{aligned} \quad (3.33)$$

aqui se introduz a velocidade relativa de *Møller*, onde $g_\phi = v_{rel} \frac{p_\alpha p_*^\alpha}{p^0 p_*^0}$.

Agora, o número total de partículas que deixam o elemento de volume $d^3x d^3p$ é obtido de (3.1) por integração sobre todo momento p_* e sobre todo ângulo sólido $d\Omega$,

$$(\Delta N)^- = \int_{\Omega} \int_{p_*} f(\vec{x}, \vec{p}, t) f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) g_\phi \sigma d\Omega d^3p_* d^3x d^3p \Delta t, \quad (3.34)$$

chamado de termo de perda, onde se tem perda de partículas p_* em $d^3x d^3p$.

Considera-se uma colisão entre dois feixes de partículas com velocidades $\vec{v}'_* = c\vec{p}'_*/p_*'^0$ e $\vec{v}' = c\vec{p}'/p'^0$. Com isso, escreve-se o número total de partículas que entram no elemento de volume $d^3x' d^3p'$ como,

$$(\Delta N)^+ = \int_{\Omega'} \int_{p_*'} f(\vec{x}, \vec{p}', t) f(\vec{x}, \vec{p}'_*, t) g'_\phi \sigma' d\Omega' d^3p_*' d^3x' d^3p' \Delta t', \quad (3.35)$$

o qual é chamado de termo de ganho, uma vez que descreve o ganho de partículas em um elemento de volume $d^3x' d^3p'$.

Algumas vezes essa equação é escrita com um fator 1/2 antes da integral. Isso

está claramente relacionado à definição de seção transversal. O fato é que se trabalha com partículas idênticas. Enquanto na mecânica clássica partículas idênticas podem ser consideradas distinguíveis (porque pode-se seguir sua trajetória de maneira contínua), esse não é o caso da mecânica quântica. Assim, começando com dois estados para as partículas em colisão, encontra-se para cada par de estados finais um número que é o dobro do que se espera de uma analogia com um cálculo não quântico. Isso se deve ao fato de que calcula-se dois processos de espalhamento que conduzem as partículas dos estados (p', p'_*) para os estados (p, p_*) e dos estados (p', p'_*) para os estados (p_*, p) , respectivamente, como o mesmo processo, devido à indistinguibilidade das partículas envolvidas. A definição de seção transversal em mecânica quântica leva a um resultado que é o dobro do resultado esperado de uma analogia com a mecânica clássica. Portanto, usando a seção quântica, deve-se dividir por dois o resultado do termo de perda obtido acima. Lida-se principalmente com efeitos não quânticos e escreve-se os termos de colisão sem o fator $1/2$. Observa-se que, ao considerar uma mistura, trata-se de colisões de partículas distinguíveis. Livros que utilizam o fator $1/2$ diante dos termos de colisão, tratam de partículas de mesma espécie, enquanto que esse fator está ausente nos termos de colisão referentes a partículas de diferentes espécies.

- Seção de choque quântica = Indistinguível.
- Seção de choque clássica = Distinguível.

Para partículas relativísticas, tem-se que $g_\phi \neq g'_\phi$. No entanto, o *teorema de Liouville* afirma que, se seguir a evolução de um elemento de volume no espaço de fase, seu volume não mudará ao longo do tempo. Aqui,

$$g_\phi \Delta t \sigma d\Omega d^3 p_* d^3 x d^3 p = g'_\phi \Delta t' \sigma' d\Omega' d^3 p'_* d^3 x' d^3 p'. \quad (3.36)$$

Desde que $d^3 x \Delta t = d^3 x' \Delta t'$ é um invariante, obtêm-se da relação (3.36),

$$\int_\Omega g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_* d^3 p = \int_{\Omega'} g'_\phi \sigma' d\Omega' d^3 p'_* d^3 p'. \quad (3.37)$$

Agora, partindo da relação (3.28) junto com (3.29), (3.34), (3.35) e (3.37), tem-se que,

$$\begin{aligned} \frac{c}{p^0} \left[p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha} \right] d^3 x d^3 p &= \frac{(\Delta N)^+ - (\Delta N)^-}{\Delta t} \\ &= \int (f'_* f' - f_* f) g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_* d^3 x d^3 p, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde são introduzidas as abreviações,

$$f'_* \equiv f(\vec{x}, \vec{p}'_*, t), \quad f' \equiv f(\vec{x}, \vec{p}', t), \quad f_* \equiv f(\vec{x}, \vec{p}_*, t), \quad f \equiv f(\vec{x}, \vec{p}, t). \quad (3.39)$$

Indicando F como o fluxo invariante,

$$F = \frac{p^0 p_*^0}{c} g_\phi, \quad (3.40)$$

a equação (3.1) se reduz para,

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha} = \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_*^0}, \quad (3.41)$$

que é a forma final da equação de Boltzmann relativística para um gás único relativístico não degenerado. Em (3.41) foi definido um único símbolo para as integrais sobre Ω e p_* .

Outra expressão para equação de Boltzmann (3.41) é obtida pela combinação de (3.19), (3.28) e (3.1), resultando na equação,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f F^i}{\partial p^i} = \int (f'_* f' - f_* f) g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_*. \quad (3.42)$$

A equação acima tem a mesma expressão que a equação de Boltzmann clássica.

Nesta seção foi realizada a construção da equação de Boltzmann relativística para o caso de um gás não degenerado, onde os efeitos quânticos não são levados em consideração. Na próxima seção estuda-se o caso de um gás degenerado, onde são introduzidos os efeitos quânticos na teoria e realiza-se alguns ajustes na função de distribuição com o intuito de construir a equação de Boltzmann relativística para um gás único degenerado.

3.2 Gás Degenerado

Aqui, o interesse é apenas na derivação da equação relativística de Uehling-Uhlenbeck, que é uma equação de Boltzmann quase-clássica [4], a qual incorpora as modificações no termo de colisão da equação de Boltzmann desde que as partículas obedecem a estatística quântica. As modificações apresentadas neste trabalho são para o caso quase-clássico. Para uma descrição completa da mecânica quântica baseada nas funções de distribuição de Wigner é referenciado o livro do de Groot van Leeuwen e van Weert [5].

Nota-se que de acordo com a relação (3.9) o elemento de volume no espaço de

fase é um invariante escalar. Quando leva-se em consideração os efeitos quânticos em uma descrição semiclássica, frequentemente se divide o elemento de volume por h^3 , onde $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js é a constante de Planck. Com isso,

$$\frac{d^3x d^3p}{h^3} = \frac{d^3x' d^3p'}{h^3}, \quad (3.43)$$

que também é um invariante escalar. Aqui $d^3x d^3p/h^3$ pode ser interpretado como o número de estados disponíveis em um elemento de volume $d^3x d^3p$. Para partículas com spin s , existem mais estados. Correspondendo aos valores que a componente de rotação em um determinado eixo pode assumir, é preciso introduzir o fator de degenerescência³ g_s . Feito isso, reescreve-se o número de estados disponíveis como,

$$g_s \frac{d^3x d^3p}{h^3}, \quad \text{onde} \quad g_s = \begin{cases} 2s + 1 & \text{para } m \neq 0, \\ 2s & \text{para } m = 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

onde m é a massa de repouso da partícula.

De acordo com a mecânica quântica, um sistema de partículas indênticas é descrito por dois tipos de partículas, os bósons e os férmions. Os Bósons possuem spin inteiro, obedecem à estatística de Bose-Einstein⁴ e inclui os mésons (píons e káons), fótons, glúons e núcleos de número de massa par como o Hélio-4. Férmions possuem spin semi-inteiro, obedecem à estatística de Fermi-Dirac⁵ e inclui os léptons (elétrons e múons), bárions (nêutrons, prótons e partículas lambda) e núcleos de número de massa ímpar como o Hélio-3.

De outro ponto de vista, a principal diferença entre bósons e férmions diz respeito ao número de ocupação de um estado. Qualquer número de bósons pode ocupar o mesmo estado, enquanto férmions obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, o qual diz que no máximo uma partícula pode ocupar cada estado.

Realiza-se agora as modificações que devem ser introduzidas no termo de colisão da equação de Boltzmann com o objetivo de incorporar a estatística de bósons e férmions. Primeiro nota-se que devido ao fato de que férmions obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, pode-se concluir que o espaço de fase está completamente ocu-

³Um nível degenerado de energia ou sua degenerescência é o fator de que vários estados quânticos distintos encontrarem-se ao mesmo nível de energia, ou em outras palavras, um nível de energia é dito ser degenerado se ele contém dois ou mais estados diferentes.

⁴A estatística de Bose-Einstein determina a distribuição estatística de bósons idênticos indistinguíveis sobre os estados de energia em equilíbrio térmico.

⁵A estatística de Fermi-Dirac é uma estatística quântica que rege as partículas idênticas e indistinguíveis de spin semi-inteiro, os férmions.

pado se o número de partículas em $d^3x d^3p$ é igual ao número de estados disponíveis,

$$f d^3x d^3p = g_s \frac{d^3x d^3p}{h^3}, \quad \text{isto é,} \quad f = \frac{g_s}{h^3}. \quad (3.45)$$

Como consequência,

$$\left(1 - \frac{fh^3}{g_s}\right), \quad (3.46)$$

fornece o número de estados vagos no espaço de fase. Se o número de partículas que entram no elemento de volume $d^3x d^3p$ no espaço de fase como consequência das colisões é proporcional a $f'f'_*$, deve-se multiplicar esse termo pelo número de estados vagos que é proporcional a $(1 - fh^3/g_s)(1 - f_*h^3/g_s)$. Nesse sentido, é preciso realizar a seguinte substituição no termo de colisão da equação de Boltzmann,

$$f'f'_* \rightarrow f'f'_* \left(1 - \frac{fh^3}{g_s}\right) \left(1 - \frac{f_*h^3}{g_s}\right). \quad (3.47)$$

Baseando-se na mesma razão, para as partículas que deixam o elemento de volume $d^3x d^3p$ no espaço de fase, é preciso substituir por,

$$ff_* \rightarrow ff_* \left(1 - \frac{f'h^3}{g_s}\right) \left(1 - \frac{f'_*h^3}{g_s}\right). \quad (3.48)$$

Para bósons, o fator $(1 - fh^3/g_s)$ deve ser substituído por $(1 + fh^3/g_s)$ para incluir a atração aparente entre as partículas (devido à estatística das partículas indistinguíveis sem restrições de estados de ocupação). Agora, pode-se determinar da equação de Boltzmann (3.41) e das conclusões acima, a equação relativística de Uehling-Uhlenbeck,

$$\begin{aligned} p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha} = \\ \int \left[f'f'_* \left(1 + \varepsilon \frac{fh^3}{g_s}\right) \left(1 + \varepsilon \frac{f_*h^3}{g_s}\right) - f_*f \left(1 + \varepsilon \frac{f'h^3}{g_s}\right) \left(1 + \varepsilon \frac{f'_*h^3}{g_s}\right) \right] \times \\ \times \left(F \sigma d\Omega \frac{d^3p_*}{p_*^0} \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde ε é definido como,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{para estatística de Bose-Einstein,} \\ -1 & \text{para estatística de Fermi-Dirac, e} \\ 0 & \text{para estatística de Maxwell-Boltzmann}^6. \end{cases}$$

Frequentemente fh^3/g_s é substituído por f ; então f torna-se a probabilidade (que um estado está ocupado) em vez de uma densidade de probabilidade no espaço de fase.

No capítulo seguinte é realizado o estudo do espalhamento elétron-pósitron, conhecido como processo de aniquilação de pares, e a construção do termo de colisão da equação de Boltzmann para esse tipo de processo.

⁶A estatística Maxwell-Boltzmann descreve a distribuição estatística de partículas em vários estados de energia em equilíbrio térmico, quando a temperatura é alta o suficiente e a densidade é baixa suficiente para tornar os efeitos quânticos negligenciáveis.

Capítulo 4

Espalhamento Elétron-Pósitron e a Dinâmica de Boltzmann

O objetivo deste capítulo é introduzir o formalismo da matriz de transição relativística, que tem grande importância para o estudo dos processos de espalhamento; a solução da equação de Dirac e os espinores, e as regras de Feynman para eletrodinâmica quântica, as quais são utilizadas para a determinação das matrizes de espalhamento para diferentes processos. Em seguida apresenta-se uma manipulação na integral de colisão da equação de Boltzmann para um processo de aniquilação de pares, considerando a estatística das partículas constituintes para as funções de distribuição e a matriz de espalhamento para o processo de aniquilação de pares. Para analisar o comportamento da dinâmica de Boltzmann, realiza-se um pequeno desvio do equilíbrio para função de distribuição e determina-se a equação de transporte de Boltzmann para processos de espalhamento.

4.1 A Matriz de Transição de Primeira Ordem

A física de partículas sempre foi estudada sob o âmbito das colisões, principalmente relacionada às taxas de decaimento e seções transversais de espalhamentos, que na mecânica quântica, correspondem a transições entre estados. Na mecânica quântica não relativística, calculam-se as taxas de transição partindo da regra de Fermi. Seja uma solução da equação de Schroedinger $\Psi_n(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar}$, normalizada,

$$\hat{H}^{(0)}\Psi_n(\vec{r}, t) = E_n\Psi_n(\vec{r}, t),$$

sendo $\hat{H}^{(0)}$ o Hamiltoniano não perturbado do sistema e E_n estados ou autovalores de energia do sistema em questão. Inicialmente, é realizada uma perturbação do

sistema com o Hamiltoniano $\hat{H}^{(1)}$, de modo que a equação tome a forma,

$$i\hbar \frac{d\Psi(\vec{r}, t)}{dt} = [\hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}]\Psi(\vec{r}, t), \quad (4.1)$$

e que a nova solução da função de onda possa ser expressa em termos dos autoestados não perturbados,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (4.2)$$

ou, no formalismo vetorial,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (4.3)$$

de modo que os coeficientes $c_n(t)$ descrevem a transição de estados em mecânica quântica [6, 7]. Substituindo (4.2) em (4.1),

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left[\sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \right] = [\hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}] \left\{ \sum_n i\hbar c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \right\},$$

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_n \left[\frac{d}{dt} c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} + c_n(t) \psi_n(\vec{r}) \frac{d}{dt} e^{-iE_n t/\hbar} \right] &= \\ &= \hat{H}^{(0)} \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} + \hat{H}^{(1)} \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_n \left[\frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} + (-iE_n/\hbar) c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \right] &= \\ &= \hat{H}^{(0)} \sum_n \Psi_n(\vec{r}, t) + \hat{H}^{(1)} \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_n \left[\frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} + E_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \right] &= \\ &= \sum_n \hat{H}^{(0)} \Psi_n(\vec{r}, t) + \hat{H}^{(1)} \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} + \sum_n E_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} &= \\
 &= \sum_n \hat{H}^{(0)} \Psi_n(\vec{r}, t) + \hat{H}^{(1)} \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} + \sum_n E_n \Psi_n(\vec{r}, t) &= \\
 &= \sum_n \hat{H}^{(0)} \Psi_n(\vec{r}, t) + \hat{H}^{(1)} \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar},
 \end{aligned}$$

de modo que o segundo termo do lado esquerdo se cancela com o primeiro do lado direito, resultando,

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} = \hat{H}^{(1)} \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (4.4)$$

Supondo uma condição inicial em $t = 0$, e que $c_n(0) = \delta_{in}$, obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} &= \sum_n c_n(0) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n \cdot 0/\hbar}, \\
 &= \sum_n \delta_{ni} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n \cdot 0/\hbar}, \\
 &= \sum_n \delta_{ni} \psi_n(\vec{r}), \\
 &= \psi_i(\vec{r}).
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Agora, para $t > 0$, considerando também a normalização $c(t) = \delta_{ni}$,

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{r}, t) &= \sum_n c_n(t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \\
 &= \sum_n \delta_{ni} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \\
 &= \sum_n \delta_{ni} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \\
 &= \psi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar},
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

que se justifica pelo fato da perturbação. Desta forma, a equação (4.4) fica,

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \approx \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar}. \quad (4.7)$$

Para isolar a derivada do coeficiente, pode-se tomar o produto interno pelo lado esquerdo,

$$\begin{aligned}
 i\hbar \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} &= \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar}, \\
 i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} &= \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar}, \\
 i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \delta_{fn} e^{-iE_n t/\hbar} &= \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar}, \\
 i\hbar \frac{dc_f(t)}{dt} e^{-iE_f t/\hbar} &= \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar}, \\
 \frac{dc_f(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar} e^{iE_f t/\hbar},
 \end{aligned}$$

onde tem-se que,

$$\frac{dc_f(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}) e^{i(E_f - E_i)t/\hbar}. \quad (4.8)$$

No formalismo de braket, a integral acima pode ser escrita como,

$$\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle = \int_V dV \psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{H}^{(1)} \psi_i(\vec{r}). \quad (4.9)$$

Esta quantidade refere-se a matriz de transição de fase do estado inicial $|\psi_i\rangle$ para o estado final $|\psi_f\rangle$,

$$\mathcal{T}_{fi} = \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle, \quad (4.10)$$

que são quantidades complexas escalares. Com isso, a equação diferencial fica,

$$\frac{dc_f(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{T}_{fi} e^{i(E_f - E_i)t/\hbar}. \quad (4.11)$$

Pode-se encontrar a solução para um tempo $t = T$ no estado quântico final,

$$\begin{aligned}
 c_f(T) - c_f(0) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \mathcal{T}_{fi} e^{i(E_f - E_i)t/\hbar}, \\
 c_f(T) &= c_f(0) - \frac{i}{\hbar} \mathcal{T}_{fi} \int_0^T dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar}.
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tomando o coeficiente $c_f(0) = 0$,

$$c_f(T) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{F}_{fi} \int_0^T dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar}. \quad (4.13)$$

A probabilidade para a transição de fase entre o estado inicial e o final é o módulo quadrático do coeficiente, dado por $c_f^* c_f$, onde,

$$\begin{aligned} P_{fi} &= c_f^*(T) c_f(T), \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{F}_{fi} \int_0^T dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \right)^* \left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{F}_{fi} \int_0^T dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \right), \\ &= \frac{1}{\hbar^2} |\mathcal{F}_{fi}|^2 \int_0^T \int_0^T dt dt' e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} e^{-i(E_f - E_i)t'/\hbar}. \end{aligned}$$

A taxa de transição de fase pode ser escrita como sendo a razão entre a probabilidade pelo tempo total,

$$\begin{aligned} d\Gamma_{fi} &= \frac{P_{fi}}{T}, \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\mathcal{F}_{fi}|^2}{T} \int_0^T \int_0^T dt dt' e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} e^{-i(E_f - E_i)t'/\hbar}. \end{aligned}$$

Para resolver esta integral, modifica-se os limites de integração. Como se tem um sistema oscilatório de funções de onda, é possível realizar as seguintes redefinições, $t \rightarrow t + T/2$ e $t' \rightarrow t' + T/2$. Assim,

$$d\Gamma_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\mathcal{F}_{fi}|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} dt dt' e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} e^{-i(E_f - E_i)t'/\hbar}. \quad (4.14)$$

Definindo $\alpha = (E_f - E_i)/\hbar$ e resolvendo as integrais,

$$\begin{aligned}
 \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} &= \int_{-T/2}^{T/2} dt [\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)], \\
 &= \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\alpha t) + i \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin(\alpha t), \\
 &= \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \Big|_{-T/2}^{T/2} - i \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha t) \Big|_{-T/2}^{T/2}, \\
 &= \frac{1}{\alpha} [\sin(\alpha T/2) - \sin(\alpha(-T/2))] - i \frac{1}{\alpha} [\cos(\alpha T/2) - \cos(\alpha(-T/2))], \\
 &= \frac{1}{\alpha} [\sin(\alpha T/2) + \sin(\alpha(T/2))] - i \frac{1}{\alpha} [\cos(\alpha T/2) - \cos(\alpha(T/2))], \\
 &= \frac{1}{\alpha} [2\sin(\alpha T/2)] - i \frac{1}{\alpha} [0], \\
 &= \frac{1}{\alpha} [\sin(\alpha T/2) + \sin(\alpha(T/2))] - i \frac{1}{\alpha} [\cos(\alpha T/2) - \cos(\alpha(T/2))], \\
 &= \frac{1}{\alpha} [2\sin(\alpha T/2)] + -i \frac{1}{\alpha} \cdot 0, \\
 &= \frac{2}{(E_f - E_i)/\hbar} \sin \left[\frac{(E_f - E_i)T}{2\hbar} \right]. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$d\Gamma_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\mathcal{J}_{fi}|^2}{T} \frac{1}{(E_f - E_i)^2/4\hbar^2} \sin^2 \left[\frac{(E_f - E_i)T}{2\hbar} \right]. \tag{4.16}$$

Graficamente, é possível expressar a relação (4.16) pela figura 4.1, em um tempo de um segundo,

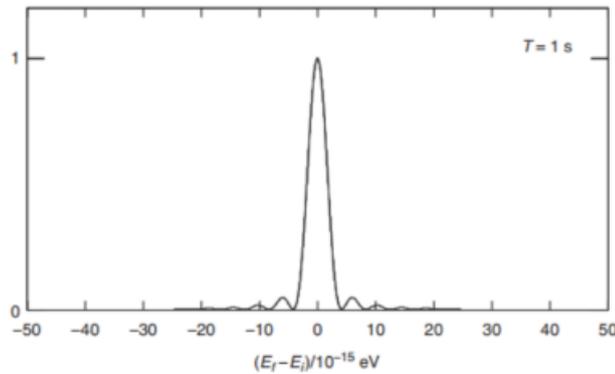


Figura 4.1: Transição de fase em $T = 1$ s de tempo para amplitude.

A solução expressada na figura 4.1 é mostrada para $T = 1$ s, a partir da qual pode ser visto que a taxa de transição é apenas significativa para estados finais onde $E_f \approx E_i$, e essa energia é conservada dentro dos limites da relação de incerteza

energia-tempo $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$.

A taxa de transição $d\Gamma_{fi}$ pode ser escrita tomando o limite para todo o tempo possível,

$$d\Gamma_{fi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} dt dt' e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} e^{-i(E_f - E_i)t'/\hbar}. \quad (4.17)$$

Definindo uma das integrais como função de Dirac, onde a explicação para definição vem do resultado da integral (4.15) quando se aplica o limite para $T \rightarrow \infty$, com $\cos T \rightarrow 2\pi$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{-i(E_f - E_i)t'/\hbar} = 2\pi \delta(E_f - E_i), \quad (4.18)$$

e substituindo em (4.17), obtêm-se,

$$d\Gamma_{fi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} 2\pi \delta(E_f - E_i). \quad (4.19)$$

Estatisticamente, pode-se considerar o número de estados finais entre $E_f \rightarrow E_f + dE_f$, dado por $dn(E)$, de modo que é possível inserir um novo termo $\int \frac{dn(E)}{dE_f} dE_f$, integrando a taxa de transição e omitindo a dependência funcional de n , forncendo,

$$\begin{aligned} \Gamma_{fi} &= \int d\Gamma_{fi} dn, \\ &= \int d\Gamma_{fi} \frac{dn}{dE_f} dE_f, \\ &= \int \frac{dn}{dE_f} dE_f \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} 2\pi \delta(E_f - E_i), \\ &= \int \frac{dn}{dE_f} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} 2\pi \delta(E_f - E_i) dE_f, \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{S}_{fi}|^2 \int \frac{dn}{dE_f} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \delta(E_f - E_i) dE_f. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pensando no fato de que a função delta deve definir $E_f = E_i$ nas funções, pode-se escrever a exponencial nesses termos, o que fornece $e^{i(E_f - E_i)t} = 1$, para qualquer valor de t . Portanto, as integrais são escritas separadas, lembrando que n é uma

função da energia,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{fi} &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \int \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt, \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \int \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [(T/2 - (-T/2))], \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \int \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [T/2 - (-T/2)], \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \int \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f, \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \left. \frac{dn(E)}{dE_f} \right|_{E_i}. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

Escrevendo a densidade de estados como,

$$\rho(E_i) = \left. \frac{dn(E)}{dE_f} \right|_{E_i} \tag{4.22}$$

chega-se à relação de Fermi, a taxa de transições de fase,

$$\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \rho(E_i), \tag{4.23}$$

onde, para primeira ordem, $\mathcal{T}_{fi} = \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle$. Na derivação acima, foi assumido que $c_{k \neq i}(t) \approx 0$. Uma aproximação pode ser obtida tomando novamente $c_i(t) \approx 1$ e substituindo a expressão $c_{k \neq i}(t)$ de (4.7) em (4.13), que após levar o produto interno com um estado final específico $\psi_f(\vec{r})$ fornece,

$$\begin{aligned}
 \frac{dc_f}{dt} &\approx -i \langle \psi_f | \hat{H} | \psi_i \rangle e^{i(E_f - E_i)t} + \\
 &+ (-i)^2 \sum_{k \neq i} \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle e^{i(E_f - E_k)t} \int_0^t \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle e^{i(E_k - E_i)t'} dt'. \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Como a perturbação não está presente em $t = 0$, e para $t > 0$ é constante, a integral na equação anterior pode ser escrita como,

$$\int_0^t \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle e^{i(E_k - E_i)t'} dt' = \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle \frac{e^{i(E_k - E_i)t}}{i(E_k - E_i)}. \tag{4.25}$$

Portanto, a aproximação aprimorada para a evolução dos coeficientes $c_f(t)$ é dada

por,

$$\frac{dc_f}{dt} = -i \left(\langle \psi_f | \hat{H} | \psi_i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle}{E_i - E_k} \right) e^{i(E_f - E_i)t}.$$

A comparação com (4.10) mostra que, para segunda ordem, o elemento da matriz de transição de segunda ordem \mathcal{T}_{fi} é,

$$\mathcal{T}_{fi} = \langle \psi_f | \hat{H} | \psi_i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle}{E_i - E_k}. \quad (4.26)$$

O segundo termo da relação acima corresponde à transição que ocorre através de um estado intermediário $|\psi_i\rangle$. A expansão completa da perturbação pode ser obtida por sucessivas substituições. Contanto que a perturbação seja suficientemente pequena, os termos sucessivos na expansão da perturbação diminuem rapidamente, e é possível obter previsões precisas usando apenas o termo de menor ordem que contribui para um determinado sistema.

4.2 Medidas no Espaço de Fase

O próximo passo é verificar a transição de fase no espaço dos momentos. Para isso, considera-se uma transição de fase de um processo de decaimento de uma quantidade em duas,

$$\vec{p}_i \rightarrow \vec{p}_{f(1)} + \vec{p}_{f(2)}, \quad (4.27)$$

onde a matriz de transição é,

$$\mathcal{T}_{fi} = \langle \psi_{f(1)} \psi_{f(2)} | \hat{H}' | \psi_i \rangle = \int_V \psi_{f(1)}^* \psi_{f(2)}^* \hat{H}' \psi_i dV. \quad (4.28)$$

Pode-se aproximar a função de onda como plana em interações cuja perturbação é pequena, $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - E.t)]$, sendo ψ_0 uma função de onda normalizada, de modo que se a integral sobre todo o volume vale a unidade, então $|\psi_0|^2 = 1/V$. Considerando a função definida em uma caixa cúbica de lado L , a função ψ pode ter uma condição de borda periódica no início, onde $\exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - E.t)] \Big|_{t=0} = \exp\{i[\vec{p} \cdot (\vec{r} + \vec{L}) - E.t]\} \Big|_{t=0}$, permitindo definir um momento quantizado,

$$\vec{p} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}, \quad (4.29)$$

com $\vec{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$, em que cada componente possui números inteiros, 0, 1, 2... Isso sugere uma rede discreta no momento, dividida em sítios, em que cada comprimento é discreto e constante, de modo que $d^3\vec{p} = dp_x dp_y dp_z = (2\pi)^3 dn_x dn_y dn_z / L^3 = (2\pi)^3 dn_x dn_y dn_z / V$. Passando para coordenadas esféricas, tem-se a relação $d^3\vec{p} = 4\pi p^2 dp$, sendo p a componente radial do momento e ainda considerando o número total como sendo $dn = dn_x dn_y dn_z$. Desta forma, escreve-se a relação entre os elementos de volume para cada sítio como,

$$4\pi p^2 dp = \frac{(2\pi)^3}{V} dn. \quad (4.30)$$

Assim, a relação na densidade de estados (4.1), $\rho(E) = dn/dE$, onde $E = E(n)$, fornece $\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp} \frac{dp}{dE}$. A densidade de estados corresponde ao número de estados de momento acessíveis a um determinado decaimento, aumentando os momentos de estados finais. Isso mostra que o decaimento sempre ocorre carregando as partículas mais leves, que serão produzidas com maior momento em relação as mais pesadas (iniciais).

Como visto, não há dependência no volume, e assim pode-se definir volumes unitários para cada sítio de estados com o objetivo de facilitar os cálculos. Portanto, para qualquer tipo de geometria, considera-se para cada sítio, $dn_k = d^3\vec{p}_k / (2\pi)^3$, e se cada partícula do sistema ocupar um sítio, um sistema de N partículas possui $N - 1$ momentos independentes, isto é, a N -ésima partícula em função das $N - 1$. Então, a medida de estados total pode ser escrita como,

$$dn = \prod_{k=1}^{N-1} dn_k = \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3\vec{p}_k}{(2\pi)^3}. \quad (4.31)$$

Se considerar o estado inicial como sendo a N -ésima partícula, pode-se reescrever o produtório acima, considerando,

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{f(1)} + \vec{p}_{f(2)} + \dots = \sum_k^N \vec{p}_k, \quad (4.32)$$

sendo que o índice “ i ” aqui se refere ao estado inicial. Desta forma, o elemento de volume pode ser escrito em termo de uma integração de uma delta de Dirac entre os estados finais e iniciais,

$$dn = \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3\vec{p}_k}{(2\pi)^3} \cdot (2\pi)^3 \delta^3 \left(\vec{p}_i - \sum_k^N \vec{p}_k \right). \quad (4.33)$$

Esse resultado contribui para se tratar várias situações de integração, inclusive para cálculos de matriz de transição. Utilizado também em cálculos de seção de choque de partículas.

4.3 Espalhamento e Matriz de Transição de fase Relativística

A normalização da função de onda de uma partícula por unidade de volume não é um invariante de Lorentz perante todos os referenciais inerciais, pois a formulação até o momento foi não relativística. Pensando em um cubo de aresta L se movendo em uma dada direção com velocidade próxima da luz, esse lado, paralelo à direção de movimento será contraído, segundo a teoria da relatividade de γ^{-1} , isto é, $L_{\text{contraído}} = L/\gamma$, que pode ser visto na figura 4.2.

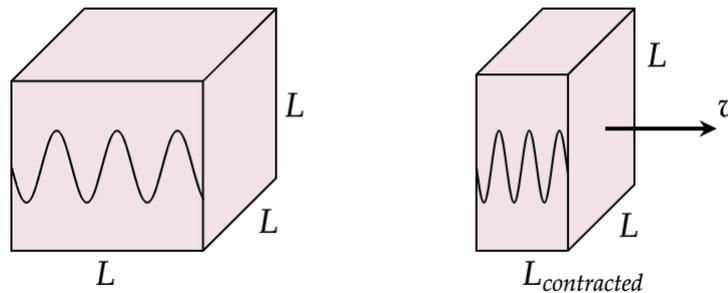


Figura 4.2: Cubo movendo-se com velocidade próxima à velocidade da luz.

Pode-se escrever o fator de Lorentz em termos da energia total, $\gamma = E/mc^2$. Então, o volume pode ser escrito como $V_{\text{contraído}} = V/\gamma = mc^2V/E$ para uma função de onda normalizada, ψ , onde $\int_V \psi^* \psi d^3\vec{r} = 1$, que descreve as condições de transição de fase e aparece na matriz \mathcal{T}_{fi} . Como deve-se manter a condição de normalização, e o elemento de volume se transforma como $d^3\vec{r}' = d^3\vec{r}/\gamma = d^3\vec{r} mc^2/E$, a função de onda transformada de Lorentz deve se transformar de acordo com a relação,

$$\psi' = \sqrt{\frac{2E}{c^2}} \psi, \quad (4.34)$$

onde é omitida a massa, pois o Lagrangeano é definido com unidade de massa. O fator “2” vem do fato de que é realizada uma transformação para o espaço de momentos, onde ocorre uma conversão entre a medida de energia e de momento. Partindo da equação (1.34), diferencia-se em ambos os lados da igualdade e tira-se a relação

$2EdE = c^2d(p^2) + 0$, pois a massa é constante. Então,

$$\begin{aligned}
 c^2d(p^2) &= c^2d(\vec{p} \cdot \vec{p}), \\
 &= dc^2\vec{p} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot d\vec{p}, \\
 &= 2c^2\vec{p} \cdot d\vec{p}, \\
 &= 2EdE,
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde tem-se o fator “2” aparecendo. Omitindo agora a consante c , a matriz de transição de fase para um processo de espalhamento do tipo,

$$1i + 2i + 3i + \dots \rightarrow 1f + 2f + 3f + \dots, \tag{4.36}$$

é dada por,

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi'_{1f}\psi'_{2f}\dots | \hat{H}' | \psi'_{1i}\psi'_{2i}\dots \rangle = \sqrt{2E_{1f} \cdot 2E_{2f}\dots 2E_{1i} \cdot 2E_{2i}\dots} \mathcal{T}_{fi}, \tag{4.37}$$

ou,

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = (2E_{1f} \cdot 2E_{2f}\dots 2E_{1i} \cdot 2E_{2i}\dots) |\mathcal{T}_{fi}|^2. \tag{4.38}$$

Desta forma, a relação de transição (4.21), agora em mecânica quântica, pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{fi} &= 2\pi \int |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta(E_i - \sum_k E_k) dn, \\
 &= 2\pi \int |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta(E_i - \sum_k E_k) dE_i \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3\vec{p}_k}{(2\pi)^3} \cdot (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_i - \sum_k \vec{p}_k), \\
 &= 2\pi(2\pi)^3 \int |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta(E_i - \sum_k E_k) dE_i \cdot \delta^3(\vec{p}_i - \sum_k \vec{p}_k) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3\vec{p}_k}{(2\pi)^3}.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

E a invariante de Lorentz, usando a relação (4.38),

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(E_i - \sum_k E_k) \frac{1}{2E_i} dE_i \cdot \delta^3(\vec{p}_i - \sum_k \vec{p}_k) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3\vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k}, \tag{4.40}$$

onde percebe-se que o elemento de volume no espaço de fase se torna,

$$\frac{d^3\vec{p}_k}{(2\pi)^3} \longrightarrow \frac{d^3\vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \quad \text{e} \quad dE_i \longrightarrow \frac{dE_i}{2E_i}. \tag{4.41}$$

Esse resultado pode ser demonstrado utilizando as transformações de Lorentz no quadrimomento (1.38). O elemento de volume é $d^3\vec{p} = dp_x dp_y dp_z$, de modo que o volume transformado fica,

$$\begin{aligned} d^3\vec{p}' &= dp'_x dp'_y dp'_z, \\ &= dp'_x dp_y dp_z, \\ &= \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} dp_x dp_y dp_z. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Derivando (1.38), obtêm-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} &= \frac{\partial}{\partial p_x} \left[\gamma \left(p_x - \frac{u}{c^2} E \right) \right], \\ &= \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{\partial E}{\partial p_x} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

usando a relação anterior $2c^2\vec{p} \cdot d\vec{p} = 2EdE$ ou $EdE = c^2(p_x dp_x + p_y dp_y + p_z dp_z = p_x dp_x$. Considerando um referencial em que $\vec{p} = (p_x, 0, 0)$, tem-se $EdE = c^2 p_x dp_x$, ou melhor $dE/dp_x = c^2 p_x/E$, que substituindo em (4.43), resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} &= \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{\partial E}{\partial p_x} \right), \\ &= \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dE}{dp_x} \right), \\ &= \gamma \left(1 - u \frac{dE}{c^2 dp_x} \right), \\ &= \gamma \left(1 - u \frac{p_x}{E} \right), \\ &= \frac{1}{E} \gamma (E - up_x), \\ &= \frac{1}{E} E', \\ \frac{dp'_x}{dp_x} &= \frac{E'}{E}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Então, o elemento de volume invariante de Lorentz tem a forma,

$$d^3\vec{p}' = \frac{E'}{E} dp_x dp_y dp_z \quad \longrightarrow \quad \frac{d^3\vec{p}'}{E'} = \frac{d^3\vec{p}}{E}.$$

Uma outra quantidade que é importante verificar sua invariância frente às transformações de Lorentz, é a delta de Dirac, já que esta quantidade está nas relações que usa-se para calcular o espalhamento de partículas. Uma relação importante para

a função delta [8–10] é,

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|df(x_0)/dx|} \delta(x - x_0). \quad (4.45)$$

Aplicando a delta onde as funções são momentos lineares, em que o momento inicial é \vec{q} e o final \vec{p} . Os momentos transformados de Lorentz são \vec{q}' e \vec{p}' , e a relação entre as deltas,

$$\begin{aligned} \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') &= \frac{1}{|\nabla_{\vec{p}} \vec{p}'|} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \\ &= \frac{1}{|dp'_x/dp_x|} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \\ &= \frac{1}{|E'/E|} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \\ E' \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') &= E \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Agora, é preciso escrever a relação (4.40) no espaço quadridimensional de fase, em termos de E e \vec{p} . Para isso, considera-se a relação do quadrimomento,

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (4.47)$$

Também tem-se como resultado importante, a integração normalizada da energia,

$$\int \delta(E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 c^2 - m^2 c^4) dE_i = \frac{1}{2E_i}. \quad (4.48)$$

Assim, a relação (4.40), omitindo a constante c , assume a forma,

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta^4(p_i - \sum_k p_k) \cdot \prod_{j=1}^{N-1} \delta^4(p_i - m_j) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^3}. \quad (4.49)$$

Em decaimentos de partículas ou núcleos, usa-se a relação Γ_{fi} para determinar a quantidade de partículas que sobram na reação.

A taxa de decaimento total é simplesmente a soma das taxas de decaimento para os modos individuais. Por exemplo, se houver N partículas de um tipo particular, o número que decai no tempo dt é dado pela soma dos números de decaimentos em

cada canal,

$$\begin{aligned}
 dN &= -N \Gamma_1 dt - N \Gamma_2 dt - \dots, \\
 &= -N \sum_j \Gamma_j dt, \\
 &= -N \Gamma_T dt, \quad \text{sendo} \quad \Gamma_T = \sum_j \Gamma_j.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Resolvendo esta equação diferencial para um número de partículas N_0 em um tempo inicial $t_0 = 0$, obtêm-se,

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma_T t}, \tag{4.51}$$

onde o parâmetro de tempo $\tau = 1/\Gamma_T$, que também pode se relacionar com λ . A frequência relativa de um modo de decaimento específico é referida como a taxa de ramificação (ou fração de ramificação). A taxa de ramificação para um modo de decaimento específico $T_r(j)$ é dada pela taxa de decaimento para o modo j em relação à taxa de decaimento total, $T_r(j) = \Gamma_j/\Gamma_T$. Por exemplo, a fração de ramificação para o decaimento tau-lépton $\tau^- \rightarrow e^- + \nu_e + \nu_\tau$ é 0.17, o que significa que em média 17% do tempo o tau irá decair nas partículas resultantes [11].

Esse tipo de tratamento foge da linha de estudo da dissertação, pois trata-se de uma investigação fenomenológica de decaimentos de partículas. Apresenta-se apenas uma aplicação direta de todo o ferramental matemático apresentado.

4.4 Solução da Equação de Dirac e os Espinores

Nesta seção, serão apresentados alguns formalismos, relações matemáticas e conceitos necessários para o desenvolvimento dos cálculos.

Partindo da equação de Dirac, com $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$,

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0, \tag{4.52}$$

onde ψ é uma matriz coluna de quatro elementos,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \tag{4.53}$$

conhecido como “bispinor” ou “espinor de Dirac” (Embora tenha quatro componentes, esse objeto não é um quadrivetor).

Para uma simples solução da equação de Dirac, considera-se primeiro que ψ é independente da posição,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (4.54)$$

Isso descreve o estado com momento zero ($\mathbf{p} = 0$). A equação de Dirac se reduz para,

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0, \quad (4.55)$$

ou,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} = i\frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

onde,

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Aqui, ψ_A carrega os dois componentes superiores do espinor e ψ_B carrega os dois componentes inferiores. Então,

$$\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_A, \quad -\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_B, \quad (4.58)$$

e as soluções são,

$$\psi_A(t) = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\psi_A(0), \quad \psi_B(t) = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\psi_B(0). \quad (4.59)$$

Para uma partícula em repouso, $E = mc^2$, então ψ_A é exatamente o esperado para o caso $p = 0$. ψ_B representa um estado de energia negativa $E = -mc^2$. Esse é um famoso desastre, que Dirac inicialmente tentou evitar postulando um “mar” infinito invisível de partículas de energia negativa, que preenchem todos esses estados indesejados. Agora, as soluções de “energia negativa” são representadas por uma antipartícula de energia positiva. Assim, ψ_A descreve elétrons (por exemplo), enquanto ψ_B descreve pósitrons. Cada um é um espinor de duas componentes, ideal para um sistema de spin 1/2. Concluindo, a equação de Dirac com $p = 0$ admite quatro

soluções independentes (ignorando os fatores de normalização, por enquanto),

$$\psi^{(1)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(2)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

$$\psi^{(3)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(4)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

descrevendo, respectivamente, um elétron com spin up, um elétron com spin down, um pósitron com spin up, e um pósitron com spin down.

Agora, considerando uma solução de ondas planas da forma,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{-i/\hbar(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} u(E, \mathbf{p}), \quad (4.62)$$

ou, em uma notação mais compacta,

$$\psi(x) = ae^{-(i/\hbar)x \cdot p} u(p). \quad (4.63)$$

Aqui a é uma constante de normalização. Espera-se encontrar um espinor $u(p)$ tal que $\psi(x)$ satisfaça a equação de Dirac. Nesse estágio, $p = (E/c, \mathbf{p})$ é simplesmente um conjunto de quatro parâmetros arbitrários, mas como eles representam energia e momento, é mais simples atribuir-lhes as letras apropriadas desde o início. Como a dependência em x está confinada ao expoente, obtêm-se que,

$$\partial_\mu \psi = -\frac{i}{\hbar} p_\mu a e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u. \quad (4.64)$$

Introduzindo a relação acima na equação de Dirac (4.52),

$$\gamma^\mu p_\mu a e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u - mca e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u = 0, \quad (4.65)$$

ou,

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0. \quad (4.66)$$

Essa relação é conhecida como “equação de Dirac no espaço dos momentos”. Observe-se que é puramente algébrica, sem derivadas. Se u satisfaz a equação (4.66), então a solução de ondas planas (4.63) satisfaz a equação de Dirac (4.52).

Expandindo o termo $\gamma^\mu p_\mu$ da equação (4.66), encontra-se a relação,

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \mathbf{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -E/c \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Então,

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - mc)u &= \begin{pmatrix} (\frac{E}{c} - mc) & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & (-\frac{E}{c} - mc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (\frac{E}{c} - mc) u_A - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_B \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_A - (\frac{E}{c} + mc) u_B \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde, como antes, o subscrito A representa as duas componentes superiores e B as duas inferiores. Para satisfazer a equação (4.66), deve-se ter,

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u_B, \quad u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u_A. \quad (4.69)$$

Substituindo a segunda na primeira, obtêm-se,

$$u_A = \frac{c^2}{E^2 - m^2 c^4} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 u_A. \quad (4.70)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde,

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{p}^2. \quad (4.72)$$

Então,

$$u_A = \frac{\mathbf{p}^2 c^2}{E^2 - m^2 c^4} u_A, \quad (4.73)$$

e, portanto,

$$E^2 - m^2 c^4 = \mathbf{p}^2 c^2. \quad (4.74)$$

Ou seja, para satisfazer a equação de Dirac, E e \mathbf{p} devem obedecer à relação de energia-momento relativística usual. Isso não é surpreendente, mas é interessante ver como a equação de Dirac impõe esse requisito. A equação acima para E admite

duas soluções,

$$E = \pm \sqrt{(m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2)}. \quad (4.75)$$

A raiz positiva está associada ao estado das partículas, e a raiz negativa ao estado das antipartículas.

Retornando para equação (4.69), e usando a relação (4.71), pode-se construir quatro soluções independentes para a equação de Dirac (ignorando o fator de normalização por enquanto),

$$\begin{aligned} (1) \quad u_A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{então} \quad u_B &= \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \\ (2) \quad u_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{então} \quad u_B &= \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \\ (3) \quad u_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{então} \quad u_A &= \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \\ (4) \quad u_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{então} \quad u_A &= \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para (1) e (2) deve-se usar o sinal de mais na equação (4.75), caso contrário, u_B explode; essas são as soluções das partículas. Para (3) e (4) é obrigado utilizar o sinal de menos; essas são as soluções da antipartículas. É conveniente normalizar esses espinores de maneira que,

$$u^\dagger u = 2|E|/c, \quad (4.77)$$

onde o operador adaga que significa o transposto conjugado (ou “conjugado Hermitiano”),

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \rightarrow u^\dagger = (\alpha^* \quad \beta^* \quad \gamma^* \quad \delta^*). \quad (4.78)$$

Então,

$$u^\dagger u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2. \quad (4.79)$$

Com isso, as quatro soluções são,

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

com $E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$.

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

com $E = -\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$, e a constante de normalização é [12],

$$N = \sqrt{(|E| + mc^2)/c}. \quad (4.82)$$

Pode-se imaginar que $u^{(1)}$ descreve um elétron com spin up, $u^{(2)}$ um elétron com spin down, e assim por diante, mas esse não é o caso. Para partículas de Dirac, as matrizes de spin são,

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}, \quad \text{com } \boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

é fácil verificar se $u^{(1)}$, por exemplo, não é um autoestado de Σ_z . No entanto, se orientar o eixo z para que ele aponte na direção do movimento (onde $p_x = p_y = 0$) então $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, e $u^{(4)}$ são autoespinores de \mathbf{S}_z ; $u^{(1)}$ e $u^{(3)}$ são spin up, e $u^{(2)}$ e $u^{(4)}$ são spin down¹.

Foi definido anteriormente que E e \mathbf{p} são parâmetros matemáticos que corresponde fisicamente à energia e momento, e isso é verdade para os estados do elétron, $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$. No entanto, a energia E em $u^{(3)}$ e $u^{(4)}$ não pode representar a energia do pósitron; todas as partículas livres, pósitrons e elétrons carregam energia positiva. As soluções de “energia negativa” devem ser reinterpretadas como estados de anti-partículas com energia positiva. Para expressar essas soluções em termos da energia

¹De fato, é impossível construir espinores que satisfaçam a equação (4.66) e sejam, ao mesmo tempo, autoestados de \mathbf{S}_z (exceto no caso especial $\mathbf{p} = p_z\hat{z}$). A razão é que \mathbf{S} por si só não é uma quantidade conservada [12]. É mais fácil trabalhar com espinores como em (4.80) e (4.81), mesmo que a interpretação física não seja tão clara. O que realmente importa é que se tem um conjunto completo de soluções.

e momento do pósitron, inverte-se os sinais de E e \mathbf{p} ,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{i/h(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} u(-E, -\mathbf{p}), \quad \text{para as soluções (3) e (4).} \quad (4.84)$$

Essas são as mesmas soluções antigas para a equação de Dirac; simplesmente adotou-se uma convenção de sinais diferente para os parâmetros, uma que melhor se adapte à sua interpretação física. É habitual usar a letra v para os estados do pósitron, expressos em termos da energia e momento físicos²,

$$\begin{aligned} v^{(1)}(E, \mathbf{p}) &= u^{(4)}(-E, -\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v^{(2)}(E, \mathbf{p}) &= -u^{(3)}(-E, -\mathbf{p}) = -N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

com $E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^4}$.

As soluções $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ representam os dois estados de spin de um elétron com energia E e momento \mathbf{p} , e $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ representam dois estados de spin de um pósitron com energia E e momento \mathbf{p} . Os espinores u 's satisfazem a equação de Dirac no espaço dos momentos, na forma,

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0, \quad (4.86)$$

e os v 's obedecem à equação com o sinal de p_μ invertido,

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0. \quad (4.87)$$

As ondas planas são, é claro, soluções bastante especiais para equação de Dirac. Elas descrevem partículas com energias e momentos específicos, e em um experimento típico esses são os parâmetros que podem ser controlados e medidos.

²É convencional associar $v^{(1)}$ com $u^{(4)}$, e $v^{(2)}$ com $-u^{(3)}$. No caso especial $p_x = p_y = 0$, então, $v^{(1)}$ é spin down e $v^{(2)}$ é spin up. Há uma razão para isto: O operador de conjugação de carga leva um elétron com spin up em pósitron com spin down, então, dessa forma $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$ são um par “partícula-antipartícula”, como são também $u^{(2)}$ e $v^{(2)}$ [12].

4.4.1 A Eletrodinâmica Quântica do Fóton

As equações de Maxwell escritas em termos de quadrivetores e quadritensores na forma covariante são representadas pela relação,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (4.88)$$

onde $J^\nu = (c\rho, \mathbf{J})$ é a quadricorrente e $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético, definido por,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \text{ou} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.89)$$

Esse tensor é antissimétrico, ou seja, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, e suas componentes são descritas pela matriz (1.43). O tensor A^μ é o quadripotencial,

$$A^\mu = (A^0, A^i) = \left(\frac{1}{c}V(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t) \right). \quad (4.90)$$

Em termos do quadripotencial, as equações de Maxwell podem ser reescritas como,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 J^\nu. \quad (4.91)$$

Considerando a condição de Lorentz,

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (4.92)$$

a equação (4.91) se torna,

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu, \quad (4.93)$$

onde $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$; chamado de operador d'Alembertiano.

Na Eletrodinâmica Quântica, A^μ se torna a função de onda do fóton. O fóton livre satisfaz a equação (4.93) com $J^\mu = 0$,

$$\square A^\mu = 0, \quad (4.94)$$

que é reconhecida como a equação de Klein-Gordon para uma partícula sem massa. Como no caso da equação de Dirac, procura-se soluções de ondas planas com momento $p = (E/c, \mathbf{p})$,

$$A^\mu(x) = a e^{-(i/\hbar)p \cdot x} \epsilon^\mu(p). \quad (4.95)$$

Aqui ϵ^μ é o vetor polarização, que caracteriza o spin do fóton, e a é o fator de

normalização. Substituindo (4.95) em (4.94), obtêm-se uma restrição em p^μ ,

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad (4.96)$$

de modo que $E = |\mathbf{p}|c$, que é exatamente o esperado para uma partícula sem massa. Enquanto isso, ϵ^μ possui quatro componentes, mas nem todas são independentes. A condição de Lorentz (4.92) exige que,

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0. \quad (4.97)$$

Além disso, no gauge de Coulomb $\nabla \cdot A(\mathbf{r}, t) = 0$, têm-se as relações,

$$\epsilon^0 = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0, \quad (4.98)$$

onde o vetor tridimensional de polarização é perpendicular à direção de propagação; diz-se que o fóton livre é polarizado transversalmente. Existem dois vetores independentes linearmente perpendiculares a \mathbf{p} ; por exemplo, se \mathbf{p} aponta para direção z , pode-se escolher,

$$\epsilon_{(1)} = (1, 0, 0), \quad \epsilon_{(2)} = (0, 1, 0). \quad (4.99)$$

Assim, em vez de quatro soluções independentes para um determinado momento (são muitas para uma partícula de spin 1), têm-se apenas duas. Isso parece muito pouco: o fóton não deveria ter três estados de rotação? A resposta é não: uma partícula massiva de spin s admite $2s + 1$ orientações de spin diferentes, mas uma partícula sem massa possui apenas dois, independentemente de seu spin (exceto para $s = 0$, que possui apenas uma). Ao longo de sua direção de movimento, ele pode ter apenas $m_s = +s$ ou $m_s = -s$; sua helicidade³, em outras palavras, pode ser apenas $+1$ ou -1 .

Os estados dos fótons com $m_s = \pm 1$ correspondem à polarização circular direita e esquerda; os respectivos vetores de polarização são,

$$\epsilon_\pm = \mp \frac{(\epsilon_1 \pm i\epsilon_2)}{\sqrt{2}}. \quad (4.100)$$

Observa-se que, especificando uma condição de gauge particular, elimina-se a solução não física ($m_s = 0$).

Na seção seguinte, demonstram-se as regras de Feynman para Eletrodinâmica Quântica (EDQ). Para leitores com pouco conhecimento sobre as regras de Feynman,

³Na física de partículas, helicidade é a projeção do spin na direção do momento.

é aconselhável realizar uma leitura do apêndice regras de Feynman (Toy Theory).

4.5 Regras de Feynman para EDQ

Na seção passada, encontrou-se que elétrons e pósitrons livres de momento $p = (E/c, \mathbf{p})$, com $E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$, são representados por funções de ondas⁴,

$$\begin{array}{ll} \text{Elétrons} & \text{Pósitrons} \\ \psi(x) = ae^{-(i/\hbar)p \cdot x} u^{(s)}(p), & \psi(x) = ae^{(i/\hbar)p \cdot x} v^{(s)}(p), \end{array} \quad (4.101)$$

onde $s = 1, 2$ para os dois estados de spin. Os espinores $u^{(s)}$ e $v^{(s)}$ satisfazem as equações de Dirac no espaço dos momentos,

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0, \quad (\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0, \quad (4.102)$$

e seus adjuntos, $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$, $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$, satisfazem,

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0, \quad \bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0. \quad (4.103)$$

São ortogonais,

$$\bar{u}^{(1)}u^{(2)} = 0, \quad \bar{v}^{(1)}v^{(2)} = 0, \quad (4.104)$$

e normalizados,

$$\bar{u}u = 2mc, \quad \bar{v}v = -2mc. \quad (4.105)$$

Um conjunto explícito conveniente ($u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$) é dado pelas equações (4.80) e (4.85).

Enquanto isso, um fóton livre de momento $p = (E/c, \mathbf{p})$, com $E = |\mathbf{p}|c$, é representado por uma função de onda,

Fótons

$$A^\mu(x) = ae^{-(i/\hbar)p \cdot x} \epsilon_{(s)}^\mu,$$

onde $s = 1, 2$ para os dois estados de spin (ou “polarizações”) do fóton. Os vetores de polarização $\epsilon_{(s)}^\mu$ satisfazem a condição de Lorentz no espaço dos momentos,

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0. \quad (4.106)$$

⁴Por uma questão de argumento, fala-se de “elétrons” e “pósitrons”, mas também poderiam ser μ^- e μ^+ , ou τ^- e τ^+ , ou (com as cargas elétricas apropriadas) quarks e antiquarks; em suma, qualquer carga pontual de spin 1/2.

Eles são ortogonais, no sentido de que,

$$\epsilon_{(1)}^{\mu*} \epsilon_{\mu(2)} = 0, \quad (4.107)$$

e normalizado,

$$\epsilon^{\mu*} \epsilon_{\mu} = 1. \quad (4.108)$$

No gauge de Coulomb,

$$\epsilon^0 = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (4.109)$$

Um par explícito conveniente $(\epsilon_{(1)}, \epsilon_{(2)})$ é dado pela equação (4.99).

Para calcular a amplitude \mathcal{M} associada a um diagrama de Feynman específico, é preciso proceder da seguinte maneira:

1. *Notação:* Nomeia-se os quadrimomentos de entrada e saída como p_1, p_2, \dots, p_n , e os spins correspondentes s_1, s_2, \dots, s_n ; e os quadrimomentos internos como q_1, q_2, \dots, q_n . Atribui-se setas da seguinte forma: as setas nas linhas externa de um férmion indicam se é um elétron ou um pósitron; as setas nas linhas internas do férmion são atribuídas para que a “direção do fluxo” através do diagrama seja preservada (ou seja, todo vértice deve ter uma seta entrando e uma seta saindo). As setas nas linhas externas de fótons apontam “para frente”; para linhas internas de fótons, a escolha é arbitrária.

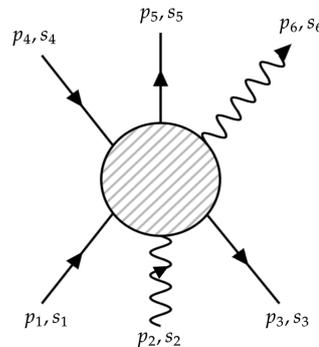
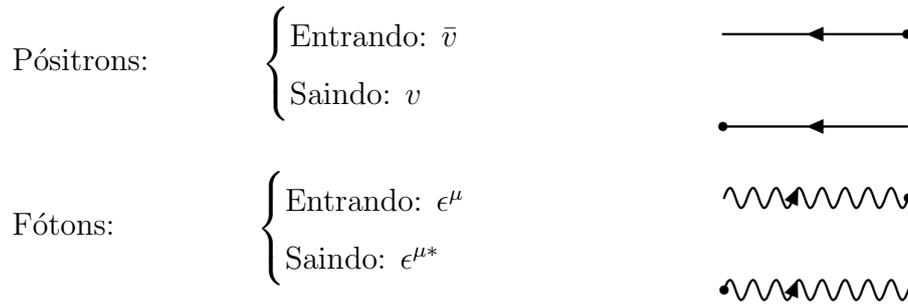


Figura 4.3: Um diagrama EDQ típico, com linhas externas. (linhas internas não são mostradas.)

2. *Linhas Externas:* Contribuem da seguinte maneira,

$$\text{Elétrons: } \begin{cases} \text{Entrando: } u \\ \text{Saindo: } \bar{u} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \bullet \\ \bullet \longrightarrow \end{array}$$



3. *Fatores de Vértice:* Cada vértice contribui com um fator,

$$ig_e \gamma^\mu. \quad (4.110)$$

A constante de acoplamento adimensional g_e está relacionada à carga do pósitron: $g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = \sqrt{4\pi\alpha}$.⁵

4. *Propagadores:* Cada linha interna contribui com um fator,

$$\text{Elétrons e Pósitrons: } \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2}, \quad (4.111)$$

$$\text{Fótons: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}. \quad (4.112)$$

5. *Conservação da Energia e Momento:* Para cada vértice, escreve-se uma função delta,

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3), \quad (4.113)$$

onde os k 's são os três quadrimomentos que entram no vértice (se uma flecha leva para fora, então k é menos o quadrimomento dessa linha, exceto pósitrons externos⁶). Esse fator impõe a conservação de energia e momento no vértice.

6. *Integrar sobre todo Momento Interno:* Para cada momento interno q , escreve-se um fator,

$$\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \quad (4.114)$$

⁵Nas unidades Heaviside-Lorentz, com \hbar e c definido como 1, g_e é a carga do pósitron, e, portanto, escreve-se apenas “ e ” em algumas literaturas. Aqui, usa-se as unidades Gaussianas e mantêm-se os fatores \hbar e c . A maneira mais fácil de evitar problemas nas unidades é expressar todos os resultados em termos de uma quantidade adimensional α . Em geral, a constante de acoplamento em EDQ é $-q\sqrt{4\pi/\hbar c}$, onde q é a carga da partícula (em oposição à antipartícula). Para elétrons, $q = -e$, mas para quarks “up”, tem-se $q = \frac{2}{3}e$.

⁶O problema aqui é que as flechas estão sendo utilizadas para tarefas duplas: elas estabelecem a convenção para o sinal de momento e, no caso de linhas externas de férmion, informam se é uma partícula ou uma antipartícula (para linhas internas não precisa distinguir). O último papel tem precedência; portanto, para pósitrons externos, a direção “positiva” para o momento é oposta à direção da seta.

e integra-se.

7. *Cancelar a Função Delta:* O resultado deverá incluir um fator,

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n), \quad (4.115)$$

que corresponde à conservação geral do momento energia. Cancela-se esse fator, e o resultado restante é igualado a $-i\mathcal{M}$.

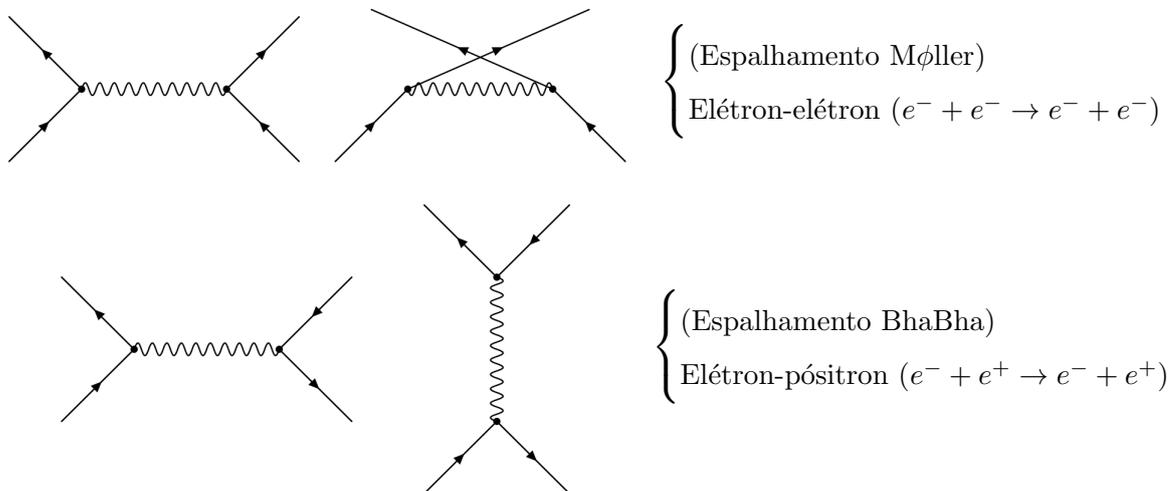
Como antes, o procedimento é escrever todos os diagramas que contribuem para o processo em questão (até a ordem desejada), calcular a amplitude (\mathcal{M}) de cada um e adicioná-los para obter a amplitude total, que é inserida na fórmula apropriada para a seção transversal ou a vida útil, conforme o caso. Há apenas uma nova reviravolta, aqui: a antissimetriação das funções de onda de um férmion requer a inserção de um sinal de menos na combinação das amplitudes que diferem apenas no intercâmbio de dois férmions externos idênticos (isso fica claro mais à frente). Não importa em qual diagrama você associe o sinal de menos, já que o total será ao quadrado eventualmente; mas deve haver um sinal de menos relativo entre eles.

8. *Antissimetriação:* Inclui-se um sinal de menos entre diagramas que diferem apenas no intercâmbio de dois elétrons de entradas (ou saída) (ou pósitron) ou de um elétron de entrada com um pósitron de saída (ou vice-versa).

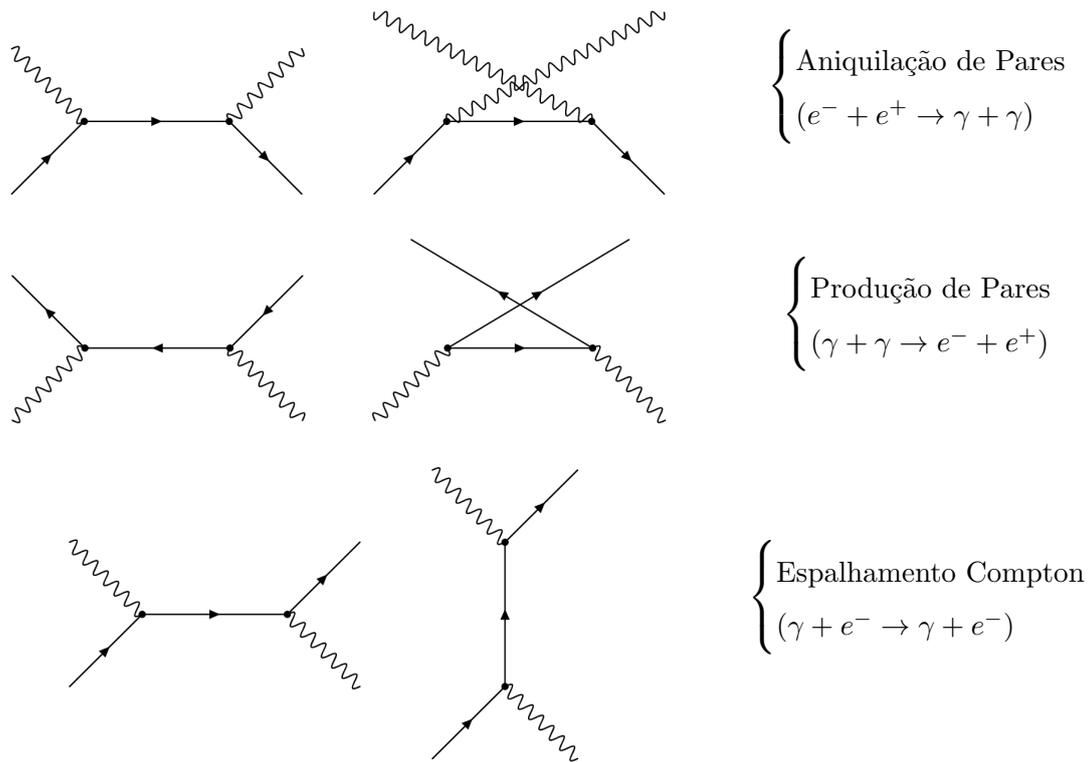
4.5.1 Alguns Exemplos

Para não se perder nos detalhes, existem um catálogo dos processos de segunda ordem mais importantes, descritos pelos diagramas abaixo,

Processo Elástico:



Processo Inelástico:



4.5.2 Espalhamento Elétron-Pósitron

O diagrama para um espalhamento elétron-pósitron é representado pela figura (4.4),

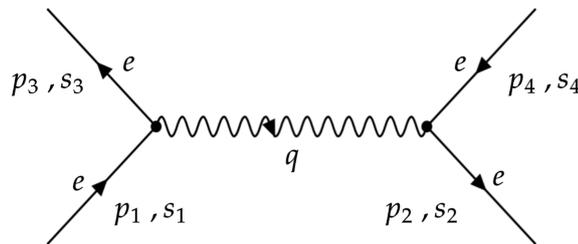


Figura 4.4: Espalhamento Elétron-Pósitron.

Utilizando as regras de Feynman para Eletrodinâmica Quântica, no vertice da esquerda, obtêm-se que (monta-se sempre contra o sentido do caminho, elétron saindo $\bar{u}(3)$ - elétron entrando $u(1)$),

$$[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1)](2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_3 - q). \quad (4.116)$$

Para o vértice da direita,

$$[\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)v(4)](2\pi)^4\delta^4(p_2 + q - p_4). \quad (4.117)$$

Um propagador, que é o fóton,

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}. \quad (4.118)$$

Usando a (regra 6),

$$(2\pi)^4 \int [\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)v(4)] \times \\ \times \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4)d^4q, \quad (4.119)$$

onde define-se $q = p_1 - p_3$ da primeira delta (se a escolha da delta foi feita onde há o momento p_1 , em caso de segunda configuração de diagrama, a escolha da delta deve ser a que exista o momento p_1 também. Isso vale também se o momento escolhido for o p_2), tem-se que,

$$[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)v(4)] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (4.120)$$

Usando a (regra 7),

$$-i\mathcal{M}_1 = -i \left(\frac{-g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} \right) [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)], \quad (4.121)$$

obtêm-se então a amplitude,

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)]. \quad (4.122)$$

Observa-se que “avançar para trás” ao longo de uma linha da antipartícula significa avançar no tempo. Com isso, a ordem utilizada é sempre espinor/matriz gamma/espinor adjacente.

O outro diagrama representa uma aniquilação virtual do elétron e do pósitron, seguida pela produção de pares, descrito pela figura 4.5,

No vértice de cima, (elétron saindo $\bar{u}(3)$ - pósitron saindo $v(4)$),

$$[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)v(4)] (2\pi)^4 \delta^4(q - p_3 - p_4). \quad (4.123)$$

No vértice de baixo, (pósitron entrando $\bar{v}(2)$ - elétron entrando $u(1)$),

$$[\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)u(1)] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q). \quad (4.124)$$

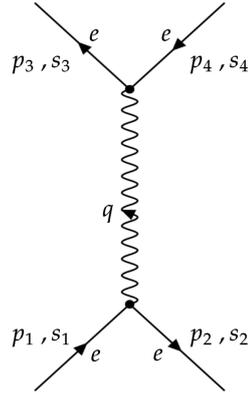


Figura 4.5: Segundo diagrama de contribuição para o espalhamento elétron-pósitron.

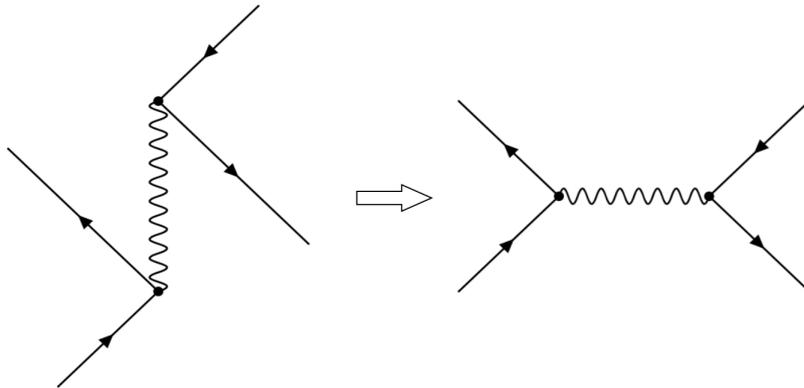
Aplicando a (regra 6), obtêm-se,

$$(2\pi)^4 \int [\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)v(4)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)u(1)] \times \\ \times \delta^4(q - p_3 - p_4)\delta^4(p_1 + p_2 - q)d^4q. \quad (4.125)$$

Realizando os mesmo procedimentos, tem-se então a amplitude para o segundo diagrama,

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)][\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)]. \quad (4.126)$$

Agora, adiciona-se esses diagramas ou subtrai-se? Trocando o pósitron de entrada e o elétron de saída (intercâmbio) no segundo diagrama 4.5, e redesenhando-o em uma configuração mais usual, descrito pela figura abaixo,



recupera-se o primeiro diagrama 4.4. De acordo com a (regra 8), precisa-se de um

sinal de menos,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & - \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)] + \\ & + \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)][\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)]. \end{aligned} \quad (4.127)$$

A relação acima é a amplitude total para um espalhamento elétron-pósitron.

Na próxima seção, realiza-se o cálculo e a análise para um processo de produção de fótons, conhecido como processo de aniquilação de pares. As regras de Feynman para Eletrodinâmica Quântica são utilizadas para o cálculo da amplitude.

4.6 Processo de Produção de Fótons: Aniquilação de Pares

Nesta seção será analisado o processo de aniquilação de pares e se realizará o cálculo da amplitude \mathcal{M} para o processo de interação $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$, assumindo que o elétron e o pósitron estejam em repouso e na configuração de spin singleto. Os diagramas são representados pela figura 4.6. Lembrando que o segundo diagrama não representa um diagrama novo, a opção é se p_3 se conecta com p_1 ou com p_2 . No processo de aniquilação do elétron com o pósitron, “são produzidos” dois fótons com momentos p_3 e p_4 , a questão aqui é se eles se conectam com p_1 ou com p_2 , não se sabe ao certo. Então, soma-se as amplitudes referentes a cada diagrama para se obter a amplitude total.

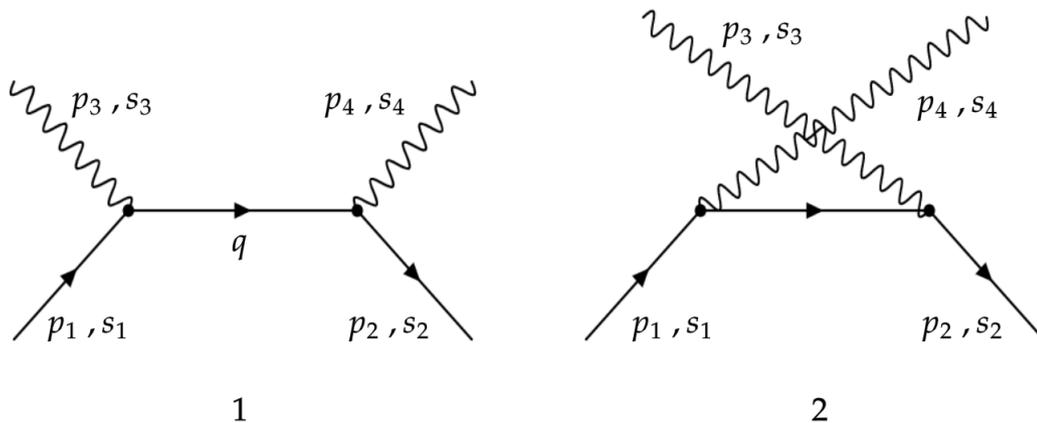


Figura 4.6: Duas contribuições para aniquilação de pares.

Para o primeiro diagrama, utilizando as regras de Feynman para EDQ, obedecendo o sentido contrário da linha da antipartícula e a ordem espinor/matriz gamma/espinor

adjacente. No vértice da direita, tem-se que (pósitron entrando e fóton saindo),

$$[\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\mu)\epsilon_{\mu^*}(4)](2\pi)^4\delta^4(p_2 + q - p_4). \quad (4.128)$$

No vértice da esquerda (fóton saindo e elétron entrando),

$$[\epsilon_{\mu^*}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1)](2\pi)^4\delta^4(p_1 - q - p_3). \quad (4.129)$$

Pela (regra 4), o propagador aqui é,

$$\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2c^2}. \quad (4.130)$$

Utilizando a (regra 6), obtêm-se que,

$$(2\pi)^4 \int [\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\mu)\epsilon_{\mu^*}(4)] \left(\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2c^2} \right) [\epsilon_{\mu^*}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1)] \times \\ \times \delta^4(p_2 + q - p_4)\delta^4(p_1 - q - p_3)d^4q. \quad (4.131)$$

Utilizando $q = p_1 - p_3$, e que $\not{p} = \gamma^\mu \hat{p}_\mu$, chamado de operador “slash” ou corte de Dirac, e $\not{\epsilon} = \gamma^\mu \epsilon_\mu$, onde ϵ é o vetor de polarização,

$$\frac{-ig_e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2c^2} \bar{v}(2)\not{\epsilon}_4(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3u(1)(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (4.132)$$

Por simplicidade, suprimi-se os sinais de complexo conjugado dos ϵ 's. Com isso, utilizando a (regra 7), encontra-se a amplitude \mathcal{M}_1 ,

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2c^2} \bar{v}(2)\not{\epsilon}_4(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3u(1). \quad (4.133)$$

Para a amplitude \mathcal{M}_2 referente ao segundo diagrama, como ocorre um intercâmbio entre $p_3 \leftrightarrow p_4$, não é preciso realizar o cálculo todo novamente, basta fazer o intercâmbio. Logo, a amplitude \mathcal{M}_2 é,

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2c^2} \bar{v}(2)\not{\epsilon}_3(\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc)\not{\epsilon}_4u(1), \quad (4.134)$$

onde,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \quad (4.135)$$

Com as partículas iniciais em repouso, os fótons saem lado a lado, e também pode-se escolher o eixo z para coincidir com a direção do primeiro fóton; então,

$$\begin{aligned} p_1 &= mc(1, 0, 0, 0), & p_2 &= mc(1, 0, 0, 0), \\ p_3 &= mc(1, 0, 0, 1), & p_4 &= mc(1, 0, 0, -1), \end{aligned} \quad (4.136)$$

onde,

$$\begin{aligned} (p_1 - p_3)^2 - m^2c^2 &= m^2c^2(1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m^2c^2(1 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &\quad - 2m^2c^2(1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - m^2c^2, \\ &= (p_1 - p_4)^2 - m^2c^2 = -2m^2c^2. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Utilizando a regra associada para produtos “slash”, regra 5’ da seção 7.7 do livro *Introduction to Elementary Particles*[12],

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b, \quad (4.138)$$

obtêm-se que,

$$\not{p}_1\not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3\not{p}_1 + 2(p_1 \cdot \epsilon_3). \quad (4.139)$$

Mas ϵ_3 possui apenas componentes espaciais (no medidor de Coulomb), enquanto que p_1 é puramente temporal. Então, $p_1 \cdot \epsilon_3 = 0$ e, portanto,

$$\not{p}_1\not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3\not{p}_1. \quad (4.140)$$

Similarmente,

$$\not{p}_3\not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3\not{p}_3 + 2(p_3 \cdot \epsilon_3), \quad (4.141)$$

mas $p_3 \cdot \epsilon_3 = 0$ em virtude da condição de Lorentz (4.98), resultando,

$$\not{p}_3\not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3\not{p}_3. \quad (4.142)$$

Portanto, tem-se que,

$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 = \not{\epsilon}_3(-\not{p}_1 + \not{p}_3 + mc). \quad (4.143)$$

Mas, pela relação (4.102), onde $(\not{p}_1 - mc)u(1) = 0$, obtêm-se,

$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 u(1) = \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 u(1). \quad (4.144)$$

Pela mesma razão,

$$(\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc)\not{\epsilon}_4 u(1) = \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 u(1). \quad (4.145)$$

Logo, a amplitude total resultante fica,

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{2m^2 c^2} \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4] u(1). \quad (4.146)$$

Agora,

$$\not{p}_3 = \gamma^\mu p_{3\mu} = mc \begin{pmatrix} \gamma^0 & \gamma^1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = mc(\gamma^0 - \gamma^3), \quad (4.147)$$

e,

$$\not{p}_4 = \gamma^\mu p_{4\mu} = mc(\gamma^0 + \gamma^3). \quad (4.148)$$

Com isso, a amplitude (4.146) se torna,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{g_e^2}{2m^2 c^2} \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4] u(1), \\ &= -\frac{g_e^2}{2mc} \bar{v}(2) [(\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4) \gamma^0 - (\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 - \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4) \gamma^3] u(1). \end{aligned} \quad (4.149)$$

Sabe-se que,

$$\begin{aligned} \not{\epsilon} &= \gamma^\mu \epsilon_\mu, \\ &= \gamma^0 \epsilon_0 + \gamma^i \epsilon_i, \\ &= \gamma^0 \cdot 0 + \gamma^i (-\epsilon^i), \end{aligned} \quad (4.150)$$

onde,

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.151)$$

resultando,

$$\begin{aligned}
 &= -\vec{\gamma} \cdot \vec{\epsilon}, \\
 &= - \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.152}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
 \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 &= - \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_3 \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_3 & 0 \end{bmatrix} \times (-1) \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_4 \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_4 & 0 \end{bmatrix}, \\
 &= - \begin{bmatrix} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_3)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_4) & 0 \\ 0 & (\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_3)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_4) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Usando a identidade,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \tag{4.153}$$

o termo $\not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4$ fica,

$$\not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 = - \begin{bmatrix} \vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) & 0 \\ 0 & \vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \end{bmatrix}. \tag{4.154}$$

Fazendo o mesmo para $\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3$, obtêm-se,

$$\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 = - \begin{bmatrix} \vec{\epsilon}_4 \cdot \vec{\epsilon}_3 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\epsilon}_4 \times \vec{\epsilon}_3) & 0 \\ 0 & \vec{\epsilon}_4 \cdot \vec{\epsilon}_3 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\epsilon}_4 \times \vec{\epsilon}_3) \end{bmatrix}. \tag{4.155}$$

Sabendo que $(\vec{\epsilon}_4 \times \vec{\epsilon}_3) = -(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)$, e que $(\vec{\epsilon}_4 \cdot \vec{\epsilon}_3) = (\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4)$. Então,

$$(\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4) = -2(\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4) \mathbb{1}_{2 \times 2}, \tag{4.156}$$

e, da mesma forma,

$$(\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 - \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4) = 2i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma}, \tag{4.157}$$

onde,

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \tag{4.158}$$

Portanto, a amplitude (4.149) resulta em,

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{mc} \bar{v}(2) [(\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4) \gamma^0 + i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma} \gamma^3] u(1). \quad (4.159)$$

Até o momento nada foi falado sobre os spins do elétron e do pósitron. Lembrando inicialmente que, o interesse é o estado de configuração *singlete* $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$. Simbolicamente,

$$\mathcal{M}_{singlet} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}). \quad (4.160)$$

O termo de amplitude $\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow}$ é obtido a partir da equação (4.159) com “spin up” para o elétron,

$$u(1) = \sqrt{2mc} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.161)$$

e “spin down” para o pósitron, sabendo que $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$,

$$\begin{aligned} \bar{v}(2) &= -\sqrt{2mc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ &= \sqrt{2mc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.162)$$

Acima, lembra-se que $v^{(2)}$ se relaciona com $-u^{(3)}$,

$$v^{(2)} = -u^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.163)$$

Portanto, usando esses espinores, obtêm-se,

$$\bar{v}(2) \gamma^0 u(1) = 0, \quad (4.164)$$

$$\bar{v}(2) \vec{\Sigma} \gamma^3 u(1) = -2m\hat{c}k. \quad (4.165)$$

A amplitude $\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow}$ fica,

$$\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} = -2ig_e^2 (\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z. \quad (4.166)$$

Agora, pode-se calcular a amplitude $\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}$ com elétron “spin down”,

$$u(1) = \sqrt{2mc} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.167)$$

e “spin up” para o pósitron,

$$\begin{aligned} \bar{v}(2) &= \sqrt{2mc} [0 \ 0 \ 0 \ -1], \\ &= -\sqrt{2mc} [0 \ 0 \ 0 \ 1], \end{aligned} \quad (4.168)$$

onde $v^{(1)}$ se relaciona com $u^{(4)}$,

$$v^{(1)} = u^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.169)$$

Logo, a amplitude $\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}$ fica,

$$\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow} = +2ig_e^2(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z, \quad (4.170)$$

onde $\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow} = -\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow}$. Com isso, a amplitude para a aniquilação de um par elétron-pósitron estacionário em dois fótons (4.160), que emergem nas direções $\pm\hat{k}$, utilizando os resultados (4.166) e (4.170), é descrita pela relação abaixo,

$$\mathcal{M}_{singlet} = -2\sqrt{2} ig_e^2(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z. \quad (4.171)$$

Observa-se então, de acordo com a relação $\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow} = -\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow}$, que a configuração tripleto $(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$ é zero,

$$\mathcal{M}_{triplet} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} + \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}) = 0, \quad (4.172)$$

o que confirma que o decaimento de dois fótons é proibido nesse caso.

Agora, deve-se introduzir os vetores de polarização apropriados para os fótons.

Lembrando que, para “spin up” ($m_s = +1$),

$$\vec{\epsilon}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.173)$$

e para spin down ($m_s = -1$),

$$\vec{\epsilon}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.174)$$

Se o fóton estiver viajando na direção $+z$, eles correspondem à polarização circular direita e esquerda, respectivamente. Como o componente z do momento angular total deve ser zero, os spins dos fótons devem estar alinhados de maneira oposta: $\uparrow\downarrow$ ou $\downarrow\uparrow$. No primeiro caso,

$$\vec{\epsilon}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.175)$$

Então,

$$(\uparrow\downarrow) : \vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4 = i\hat{k}. \quad (4.176)$$

No segundo caso, 3 e 4 são trocados,

$$(\downarrow\uparrow) : \vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4 = -i\hat{k}. \quad (4.177)$$

Evidentemente, precisa-se da combinação antissimétrica $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$, que não deve surpreender: isso corresponde a um spin total zero, exatamente quando combina-se duas partículas de spin opostos. Novamente, a amplitude,

$$\mathcal{M}_{singlet} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}), \quad (4.178)$$

onde,

$$\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} = -2ig_e^2(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow} = +2ig_e^2(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z. \quad (4.179)$$

Com as relações (4.176) e (4.177),

$$\begin{aligned} (\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow), \\ &= i\sqrt{2}\hat{k}. \end{aligned} \quad (4.180)$$

Utilizando as relações (4.179) e a relação (4.180),

$$\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} = -2\sqrt{2}g_e^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow} = +2\sqrt{2}g_e^2, \quad (4.181)$$

só que desta vez as setas se referem à polarização dos fótons. Com isso, substituindo na relação (4.178), resulta na amplitude para o estado singlete,

$$\mathcal{M}_{singlet} = -4g_e^2. \quad (4.182)$$

Esse resultado modesto demandou um pouco de trabalho matemático. E agora, o que é possível retirar desse resultado? Em primeiro lugar, pode-se calcular a seção transversal total da aniquilação de elétrons-pósitrons e mais a frente será usado para definir um modelo para estudar a dinâmica de Boltzmann.

Exemplo: No referencial do CM, a seção transversal diferencial é [12],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{\hbar c}{8\pi(E_1 + E_2)} \right]^2 \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\mathcal{M}|^2. \quad (4.183)$$

Aqui, $E_1 = E_2 = mc^2$, $|\vec{p}_f| = mc$ e se a colisão é não relativística $|\vec{p}_i| = mv$, onde v é a velocidade incidente do elétron (ou pósitron). Relembrando também que $g_e = e\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}} = \sqrt{4\pi\alpha}$. Substituindo,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar\alpha}{m} \right)^2 \frac{1}{cv}. \quad (4.184)$$

Como não há dependência angular, com $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, a seção transversal total é,

$$\sigma = \left(\frac{\hbar\alpha}{m} \right)^2 \frac{4\pi}{cv}. \quad (4.185)$$

Faz sentido que a seção transversal seja inversamente proporcional à velocidade de entrada? Sim, a justificativa é que quanto mais lentamente o elétron e o pósitron se aproximam, mais tempo há para eles interagirem e maior a probabilidade de aniquilação.

Finalmente, pode-se calcular a vida útil do positrônio, no estado singlete. Isso está claramente relacionado à seção transversal para a aniquilação de pares (4.185), mas qual é a conexão precisa? Considerando a relação abaixo, onde é conveniente pensar na seção transversal diferencial como o número de partículas por unidade de tempo espalhadas no ângulo sólido $d\Omega$, dividido por $d\Omega$ e pela luminosidade. (Ou, como os físicos dos aceleradores gostam de dizer, “a taxa de eventos é a seção transversal vezes a luminosidade $dN = \mathcal{L}d\sigma$.”),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}, \quad (4.186)$$

observa-se que o número total de eventos de dispersão por unidade de tempo é igual a luminosidade e a seção transversal total $N = \mathcal{L}\sigma$. Se ρ é o número de partículas incidentes por unidade de volume e se estiverem viajando na velocidade v , a luminosidade representada pela figura 4.7 é $\mathcal{L} = \rho v$.

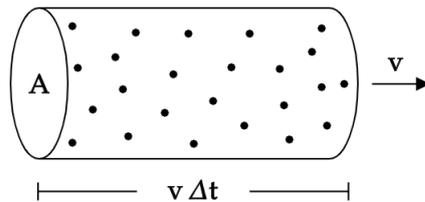


Figura 4.7: O número de partículas no cilindro é $\rho Avdt$, portanto a luminosidade (número por unidade de área por unidade de tempo) é ρv .

Para um único “átomo”, a densidade de elétrons é $\rho \rightarrow |\psi(0)|^2$, e N representa a probabilidade de uma desintegração por unidade de tempo, ou seja, a taxa de decaimento,

$$N = v\sigma\rho \rightarrow \Gamma = v\sigma|\psi(0)|^2. \quad (4.187)$$

Assim, em termos da seção de choque, a taxa de decaimento é,

$$\begin{aligned} \Gamma &= v\sigma|\psi(0)|^2, \\ &= \left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2 \frac{4\pi}{c} |\psi(0)|^2. \end{aligned} \quad (4.188)$$

O estado fundamental (ground state) é descrito pela equação 5.61 do livro *Introduction to Elementary Particles*[12],

$$|\psi_{n00}(0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3 a^3}, \quad (4.189)$$

onde a constante $a = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm}$ é o raio de Bohr. Para o estado fundamental, $n = 1$. Logo,

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3}. \quad (4.190)$$

A diferença mais visível entre o positrônio e o hidrogênio é que não se lida mais com um núcleo pesado, essencialmente estacionário, ao redor do qual o elétron orbita, mas com duas partículas de igual massa, ambas orbitando em torno do centro comum. Como na mecânica clássica, esse problema de dois corpos pode ser convertido em um problema equivalente de um corpo com a massa reduzida,

$$m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.191)$$

O Hamiltoniano de dois corpos possui a forma,

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (4.192)$$

Se o potencial depende apenas da distância de separação, $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, e no sistema do CM $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. Então,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_{\text{red}}} + V(r), \quad (4.193)$$

que é o Hamiltoniano para uma única partícula de momento \mathbf{p} e massa m_{red} , cuja coordenada radial, r , é a distância entre as partículas. A Hamiltoniana não perturbada para o positrônio é da forma (4.192), com $m_1 = m_2 = m$, então a massa reduzida fica $m_{\text{red}} = m/2$ e $V = -e^2/r$, o mesmo que o átomo de Hidrogênio. Portanto, obtêm-se os níveis de energia imperturbáveis do positrônio pela simples substituição de $m \rightarrow m/2$ na fórmula de energia,

$$E_n \longrightarrow \frac{1}{2}E_n = -\alpha^2 mc^2 \frac{1}{4n^2}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.194)$$

Por exemplo, a energia de ligação no estado fundamental é $13,6 \text{ eV}/2 = 6,8 \text{ eV}$. As funções de onda são as mesmas que as do átomo de Hidrogênio, exceto agora que o raio de Bohr, que é $1/m$, é o dobro,

$$a \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} \longrightarrow \frac{2\hbar^2}{me^2} \longrightarrow 2a. \quad (4.195)$$

Com isso, a relação (4.190) fica,

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{8\pi a^3}. \quad (4.196)$$

Sabendo que a constante de estrutura fina é $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.036}$ e que $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$, pode-se escrever a relação,

$$\frac{1}{a^3} = \alpha^3 \frac{m^3 c^3}{\hbar^3}. \quad (4.197)$$

Substituindo a relação (4.197) em (4.196),

$$|\psi(0)|^2 = \frac{\alpha^3 m^3 c^3}{8\pi \hbar^3}, \quad (4.198)$$

e substituindo a relação acima na equação da taxa de decaimentos (4.188), obtêm-se,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2 \frac{4\pi}{c} |\psi(0)|^2, \\ &= \left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2 \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\alpha^3 m^3 c^3}{8\pi \hbar^3}\right), \\ \Gamma &= \frac{\alpha^5 m c^2}{2\hbar^2}. \end{aligned} \quad (4.199)$$

Com isso, a vida útil do positrônio é dada pela relação,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\Gamma}, \\ &= \frac{2\hbar}{\alpha^5 m c^2}, \\ &= 1.25 \times 10^{-10} \text{ s}. \end{aligned} \quad (4.200)$$

4.7 Aproximações das Funções de Distribuição

Nesta seção, o objetivo é manipular o termo de colisão da equação de Boltzmann para um processo do tipo aniquilação de pares, considerando a estatística dos férmions para as funções de distribuição e a matriz de espalhamento para o evento. Realiza-se um pequeno desvio do equilíbrio e lineariza-se a integral de colisão para determinar a equação de transporte de Boltzmann que governa a dinâmica das partículas para o processo de espalhamento.

4.7.1 Equação de Boltzmann e o Processo de Espalhamento

Observa-se que, para se obter um coeficiente de transporte na ordem inicial da constante de acoplamento, utiliza-se a equação cinética de Boltzmann que descreve a dinâmica da função de distribuição do espaço de fase. Considerando-se um plasma abeliano que consiste em vários constituintes, definidos pelos índices latinos a, b, c , etc. Na eletrodinâmica escalar, esses constituintes são: as partículas, antipartículas e os fótons. Para cada constituinte existe uma função de distribuição no espaço de fase $f^a(\mathbf{X}, \vec{k})$, onde $\mathbf{X} = (ct, \vec{x})$ e \vec{k} é o momento da partícula. Com isso, considerando a equação de Boltzmann com o termo de colisão,

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}})f^a(\mathbf{X}, \vec{k}) = -C^a[f], \quad (4.201)$$

onde $\vec{v} = \vec{k}/|\vec{k}|$ é a velocidade da partícula e \vec{F} é a força externa. Para se calcular coeficientes de transporte, é suficiente considerar apenas processos $2 \leftrightarrow 2$, por exemplo, a dispersão de Møller, Bhabha ou Compton, aniquilação de pares e assim por diante. A integral de colisão para uma partícula do tipo a é descrita pela relação,

$$\begin{aligned} C^a[f] = & \sum_{bcd} \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}_{cd}^{ab}(KP \rightarrow K'P')|^2}{16\epsilon_k\epsilon_{k'}\epsilon_p\epsilon_{p'}} (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{K} + \mathbf{P} - \mathbf{K}' - \mathbf{P}') \times \\ & \times \left[f^a(\vec{k})f^b(\vec{p})(1 \pm f^c(\vec{k}'))(1 \pm f^d(\vec{p}')) - (1 \pm f^a(\vec{k}))(1 \pm f^b(\vec{p}))f^c(\vec{k}')f^d(\vec{p}') \right], \end{aligned} \quad (4.202)$$

onde $\mathbf{K} = (k^0, \vec{k})$ é o quadrimomento, com $k^0 = \epsilon_k = |\vec{k}|$. Em casos gerais, é normal que as partículas possuam massa. Em um plasma quente, por exemplo, com temperatura $T \gg m$ as partículas com $k > T$ podem ser tratadas efetivamente como sem massa. A função delta possui o papel de conservar o momento energético na dispersão, e os sinais correspondem às estatísticas de partículas bosônicas ou fermiônicas, respectivamente, como visto anteriormente. O somatório das espécies de partículas considera todos os processos de colisões possíveis para a partícula a . O termo $|\mathcal{M}|^2$ é o elemento da matriz correspondente que leva em consideração os fatores de simetria no caso de partículas idênticas no estado final e o número de graus de liberdade de rotação ou polarização, como por exemplo o cálculo realizado para o processo de produção de fótons. Os dois termos em colchetes levam em conta o fato de que a partícula do tipo a com momento \vec{k} pode desaparecer no evento de espalhamento $a + b \rightarrow c + d$, termo de perda, ou pode aparecer no processo inverso $c + d \rightarrow a + b$, termo de ganho. Todas as funções de distribuição que aparecem no termo de colisão são tomadas no mesmo ponto \mathbf{X} do espaço-tempo, que por

simplicidade esse termo foi omitido.

O próximo passo é realizar um pequeno desvio do equilíbrio e em seguida linearizando a integral de colisão em relação a esse pequeno desvio. Dito isso, é conveniente usar a decomposição,

$$f^a(\mathbf{X}, \vec{k}) = f_{eq}^a(\epsilon_k) + \frac{\partial f_{eq}^a}{\partial \epsilon_k} W^a(\mathbf{X}, \vec{k}). \quad (4.203)$$

Dependendo da estatística, seja a função de distribuição em equilíbrio uma função de distribuição de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac, tem-se a relação,

$$n_{B,F}(\epsilon_k) = \frac{1}{\exp(\epsilon_k/k_B T) \mp 1} = f_{eq}^a(\epsilon_k). \quad (4.204)$$

É possível reescrever a derivada como sendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{eq}^a}{\partial \epsilon_k} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \left[\frac{1}{\exp(\epsilon_k/k_B T) \mp 1} \right], \\ &= (-1) [\exp(\epsilon_k/k_B T) \mp 1]^{-2} \frac{1}{k_B T} \exp(\epsilon_k/k_B T), \\ &= -\frac{1}{k_B T} \frac{\exp(\epsilon_k/k_B T)}{[\exp(\epsilon_k/k_B T) \mp 1]^2}, \end{aligned} \quad (4.205)$$

e a exponencial em termos de f usando a relação (4.204),

$$\exp(\epsilon_k/k_B T) = \frac{1 \pm f_{eq}^a}{f_{eq}^a}. \quad (4.206)$$

Logo, a derivada (4.205) torna-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{eq}^a}{\partial \epsilon_k} &= -\frac{1}{k_B T} \left[\frac{\frac{1 \pm f_{eq}^a}{f_{eq}^a}}{\frac{1 \pm f_{eq}^a}{f_{eq}^a} \mp 1} \right], \\ &= -\frac{1}{k_B T} \left[\frac{1 \pm f_{eq}^a}{f_{eq}^a} \right] (f_{eq}^a)^2, \\ &= -\frac{1}{k_B T} f_{eq}^a (1 \pm f_{eq}^a). \end{aligned} \quad (4.207)$$

Feito isso, a função de distribuição toma a forma,

$$f^a(\mathbf{X}, \vec{k}) = f_{eq}^a(\epsilon_k) - \frac{1}{k_B T} f_{eq}^a(\epsilon_k) (1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) W^a(\mathbf{X}, \vec{k}). \quad (4.208)$$

Pode-se escrever uma relação equivalente $f^a(\mathbf{X}, \vec{k}) \approx f_{eq}^a(\epsilon_k + W^a)$ para primeira

ordem em W , onde o comportamento físico da função W se comporta como a modificação local da relação de dispersão da partícula sob o impacto da força externa. Em seguida é introduzida a decomposição acima na expressão (4.202) e apenas os termos de primeira ordem em W são considerados. A integral de colisão calculada com as funções de distribuição em equilíbrio (contribuição da ordem zero em W) desaparece. Pode-se ver isso diretamente na identidade abaixo,

$$\frac{f_{eq}^a(\epsilon_k) f_{eq}^b(\epsilon_p) (1 \pm f_{eq}^c(\epsilon_{k'})) (1 \pm f_{eq}^d(\epsilon_{p'}))}{(1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) (1 \pm f_{eq}^b(\epsilon_p)) f_{eq}^c(\epsilon_{k'}) f_{eq}^d(\epsilon_{p'})} = e^{(-\epsilon_k - \epsilon_p + \epsilon_{k'} + \epsilon_{p'})} = 1, \quad (4.209)$$

que representa uma relação do princípio do equilíbrio, que nos fornece a conservação de energia,

$$\epsilon_k + \epsilon_p = \epsilon_{k'} + \epsilon_{p'}. \quad (4.210)$$

Dessa forma, a integral de colisão parece ser uma função linear das funções W ,

$$\begin{aligned} C^a[f] &= \sum_{bcd} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}_{cd}^{ab}(KP \rightarrow K'P')|^2}{16\epsilon_k \epsilon_{k'} \epsilon_p \epsilon_{p'}} (2\pi)^4 \delta^4(K + P - K' - P') \times \\ &\times [f_{eq}^a(\epsilon_k) f_{eq}^b(\epsilon_p) (1 \pm f_{eq}^c(\epsilon_{k'})) (1 \pm f_{eq}^d(\epsilon_{p'}))] \times \\ &\times [W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) + W^b(\mathbf{X}, \vec{p}) - W^c(\mathbf{X}, \vec{k}') - W^d(\mathbf{X}, \vec{p}')]. \end{aligned} \quad (4.211)$$

É possível reescrever o termo do lado esquerdo da equação de Boltzmann (4.201) considerando a função W , assumindo que a força externa que empurra as partículas

do equilíbrio tenha a mesma ordem que a função W . Com isso,

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) f^a(\mathbf{X}, \vec{k}) &= \\
 &= (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \left[f_{eq}^a(\epsilon_k) - \frac{1}{k_B T} f_{eq}^a(\epsilon_k) (1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) \right], \\
 &= (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) f_{eq}^a(\epsilon_k) + \\
 &\quad - \frac{1}{k_B T} (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \left[f_{eq}^a(\epsilon_k) (1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) \right], \\
 &= - \frac{1}{k_B T} f_{eq}^a(\epsilon_k) (1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) W^a(\mathbf{X}, \vec{k}), \\
 &= - \frac{1}{k_B T} f_{eq}^a(\epsilon_k) (1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) \left[\partial_t W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) + \right. \\
 &\quad \left. + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) \right], \\
 &= - \frac{1}{k_B T} f_{eq}^a(\epsilon_k) (1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) \left[\mathbf{v} \cdot \mathbf{D} W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) \right],
 \end{aligned}$$

onde são considerados os quadrivetores $\mathbf{v} = (1, \vec{v})$ e $\mathbf{D} = (\partial_t, \nabla_{\vec{x}})$, com $c = 1$.

Portanto, a equação geral de Boltzmann que governa o movimento das partículas para um processo de espalhamento é,

$$\begin{aligned}
 &- \frac{1}{k_B T} f_{eq}^a(\epsilon_k) (1 \pm f_{eq}^a(\epsilon_k)) \left[\mathbf{v} \cdot \mathbf{D} W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) \right] = \\
 &= \sum_{bcd} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}_{cd}^{ab}(KP \rightarrow K'P')|^2}{16\epsilon_k \epsilon_{k'} \epsilon_p \epsilon_{p'}} (2\pi)^4 \delta^4(K + P - K' - P') \times \\
 &\quad \times \left[f_{eq}^a(\epsilon_k) f_{eq}^b(\epsilon_p) (1 \pm f_{eq}^c(\epsilon_{k'})) (1 \pm f_{eq}^d(\epsilon_{p'})) \right] \times \\
 &\quad \times \left[W^a(\mathbf{X}, \vec{k}) + W^b(\mathbf{X}, \vec{p}) - W^c(\mathbf{X}, \vec{k}') - W^d(\mathbf{X}, \vec{p}') \right]. \tag{4.212}
 \end{aligned}$$

A partir do processo de aniquilação de pares, em que a conservação do quadrimomento fica $p + k = p' + k'$ e $k - k' = q = p' - p$, fornecendo a conservação de energia (4.210), tem-se que $f_{eq}(\epsilon_k) = n_F(\epsilon_k)$. Considera-se também que $\bar{W} = -W$, sendo \bar{W} das antipartículas, e $W^\gamma = 0$ (pois o fóton é a sua própria anti-partícula). Com essas considerações, e usando o resultado da amplitude de espalhamento no estado

singleto (4.182), a equação de Boltzmann torna-se,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}W(\mathbf{X}, \vec{k}) + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}W(\mathbf{X}, \vec{k}) &= \\
 &= k_B T \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{g_e^2}{\epsilon_k \epsilon_{k+q} \epsilon_p \epsilon_{p+q}} \delta(\epsilon_k - \epsilon_{k+q} + \epsilon_p - \epsilon_{p+q}) \times \\
 &\times \frac{n_F(\epsilon_p)(1 - n_F(\epsilon_{k+q}))(1 - n_F(\epsilon_{p+q}))}{1 - n_F(\epsilon_k)} \left[W(\vec{k}) - W(\vec{k} - \vec{q}) \right].
 \end{aligned} \tag{4.213}$$

Esse modelo pode ser aplicado em vários casos, como estudar grandezas físicas em plasmas relativísticos, que será discutido melhor na conclusão.

Capítulo 5

Conclusão

A equação de transporte de Boltzmann na forma (4.213) descreve a dinâmica das partículas para um processo de aniquilação de pares. Em um plasma relativístico, existem diversas interações acontecendo a todo momento entre suas partículas constituintes. Logo, é preciso levar em consideração alguns tipos de espalhamentos para uma descrição mais geral, como por exemplo, o espalhamento Møller, espalhamento Bhabha, espalhamento Compton e aniquilação de pares. O objetivo aqui é ganhar conhecimento suficiente para futuros estudos, familiarizando-se com a teoria cinética do plasma, a equação de Boltzmann, as regras de Feynman para EDQ e as matrizes de espalhamento para alguns tipos de processos. A proposta foi realizar a construção da equação de Boltzmann para um processo de aniquilação de pares inicialmente, como ponto de partida, onde o objetivo é incluir outros processos e calcular a condutividade de um plasma, por exemplo. Para isso, é preciso implementar cálculos computacionais para resolução da equação de Boltzmann e extrair informações sobre os coeficientes de transporte. A condutividade elétrica é uma propriedade que descreve a transferência de carga elétrica em um material se um campo elétrico externo for aplicado ao sistema. Os coeficientes de transporte são características muito importantes de qualquer meio, fornecendo informações sobre sua resposta à perturbações externas. O conhecimento dos coeficientes de transporte, em particular a condutividade do plasma, possui uma grande importância para diferentes tipos de aplicações cosmológicas.

Uma das primeiras tentativas de extrair a condutividade da abordagem cinética foram feitas usando a aproximação- τ mais simples para integral de colisão [13–15] ou executando a expansão de Chapman-Enskog [16]. Logo em seguida, a equação de Boltzmann foi resolvida numericamente usando as simulações de Monte Carlo da integral de colisão [17, 18]. Como dito, essas simulações não foram realizadas no presente trabalho. A proposta seguinte é aprimorar a equação de transporte de

Boltzmann, realizar cálculos numéricos e extrair informações da teoria para futuras aplicações em diversas áreas de atuação, não se limitando apenas ao estudo dos plasmas.

Apêndice A - Notações Relativísticas

1.1 Cinemática Relativística Covariante

1.1.1 Transformação de Lorentz

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (1.1)$$

onde a matriz é definida como,

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

1.1.2 Métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e sua inversa, } g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Percebe-se que $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ pelo fato da métrica ser constante e unitária, isto é, pode-se provar que $g^{-1} = g$.

1.1.3 Transformações Quadrivetoriais de Lorentz

As transformações de Lorentz também podem se escritas na forma covariante a partir da notação matricial,

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

onde define-se,

$$\mathbf{x}' = \Lambda(v) \cdot \mathbf{x}. \quad (1.5)$$

Em componentes,

$$x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (1.6)$$

ou a inversa,

$$x^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} x'^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu}. \quad (1.7)$$

O mesmo para sua forma covariante,

$$x'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} x_{\nu} = (\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu} x_{\nu}, \quad (1.8)$$

e sua inversa,

$$x_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} x'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x'_{\nu}. \quad (1.9)$$

Isso mostra que,

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad \text{e} \quad (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}. \quad (1.10)$$

O produto escalar entre quadrivetores resulta em,

$$\begin{aligned} x'^{\mu} x'_{\mu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} x_{\lambda}, \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} x^{\nu} x_{\lambda}, \\ &= \delta^{\lambda}_{\nu} x^{\nu} x_{\lambda}, \\ &= x^{\lambda} x_{\lambda}. \end{aligned}$$

1.1.4 Quadrivelocity and Quadriacceleration

$$v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt}. \quad (1.11)$$

A quadri-velocidade pode ser escrita também como,

$$\begin{aligned} v^\mu &= (\gamma c, \gamma \vec{v}) & v_\mu &= (\gamma c, -\gamma \vec{v}) \\ v^\mu &= (v^0, v^i) & v_\mu &= (v_0, v_i) \end{aligned} \quad ; \quad (1.12)$$

Produto interno da velocidade,

$$v^\mu v_\mu = \frac{c^2 - v^2}{c^2 - u^2} c^2. \quad (1.13)$$

Transformação de Lorentz para as componentes da velocidade,

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \quad \text{ou} \quad v'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} v^\nu. \quad (1.14)$$

Quadri-aceleração,

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau}. \quad (1.15)$$

A quadri-aceleração pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} a^\mu &= (\gamma \dot{\gamma} c, \gamma \dot{\gamma} \vec{v} + \gamma^2 \dot{\vec{v}}) & a_\mu &= (\gamma \dot{\gamma} c, -\gamma \dot{\gamma} \vec{v} - \gamma^2 \dot{\vec{v}}) \\ a^\mu &= (a^0, a^i) & a_\mu &= (a_0, a_i) \end{aligned} \quad ; \quad (1.16)$$

Produto interno da quadri-aceleração com a quadri-velocidade,

$$a^\mu v_\mu = 0. \quad (1.17)$$

Esse resultado indica uma ortogonalidade entre a quadri-velocidade e a quadri-aceleração, sendo que o significado geométrico da quadri-aceleração é o vetor curvatura no espaço de Minkowski.

1.1.5 Momento, Força e Energias

O momento é,

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}. \quad (1.18)$$

A Segunda lei de Newton, porém, com características relativísticas,

$$\vec{F} = \gamma \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}), \quad (1.19)$$

Escreve-se o quadrimomento como a massa da partícula vezes a quadrivelocidade,

$$p^\mu = mv^\mu = m(\gamma c, \gamma \vec{v}), \quad (1.20)$$

Pode ser escrito também como,

$$\begin{aligned} p^\mu &= (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) & ; & & p_\mu &= (m\gamma c, -m\gamma \vec{v}) \\ p^\mu &= (p^0, p^i) & & & p_\mu &= (p_0, p_i) \end{aligned} \quad (1.21)$$

O produto interno do quadrimomento é dado por,

$$p^\mu p_\mu = m^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (1.22)$$

Se $v = u$, tem-se que,

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (1.23)$$

A quadriforça resultante é,

$$F^\mu = ma^\mu. \quad (1.24)$$

Com isso, usando o resultado obtido da quadriaceleração,

$$\begin{aligned} F^\mu &= (m\gamma \dot{\gamma} c, m\gamma \dot{\gamma} \vec{v} + m\gamma^2 \dot{\vec{v}}) & ; & & F_\mu &= (m\gamma \dot{\gamma} c, -m\gamma \dot{\gamma} \vec{v} - m\gamma^2 \dot{\vec{v}}) \\ F^\mu &= (F^0, F^i) & & & F_\mu &= (F_0, F_i) \end{aligned} \quad (1.25)$$

A segunda lei de Newton quadridimensional pode ser escrita como sendo,

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (1.26)$$

Sabendo que a segunda lei de Newton é válida para quatro dimensões, pode-se reescrever a quadriforça em termos dela,

$$F^0 = \gamma \frac{dp^0}{dt}, \quad (1.27)$$

e,

$$F^i = \gamma \frac{dp^i}{dt}. \quad (1.28)$$

Usando a relação de ortogonalidade entre a quadriaceleração e quadrivelocidade

$a^\mu v_\mu = 0$ e que $a^\mu = \frac{F^\mu}{m}$,

$$\begin{aligned} a^\mu v_\mu &= 0, \\ \left(\frac{F^0}{m}, \frac{F^i}{m} \right) \cdot (\gamma c, \gamma \vec{v}) &= 0, \\ F^0 &= \frac{F^i \vec{v}}{c}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde $F^i v^i = Pot$ é a parte espacial de uma quadripotência. Portanto,

$$F^0 = \frac{1}{c}(Pot^i). \tag{1.30}$$

Juntando a equação (1.26) com a equação (1.30),

$$\begin{aligned} \frac{Pot}{c} &= \frac{dp^0}{d\tau}, \\ &= \frac{d}{d\tau}(m\gamma c^2), \end{aligned}$$

onde tem-se a energia total relativística como,

$$E = m\gamma c^2, \tag{1.31}$$

e definindo a parte espacial da quadripotência,

$$Pot = \frac{dE}{d\tau}, \tag{1.32}$$

Com isso, pode-se reescrever o quadrimomento como,

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, p^i \right). \tag{1.33}$$

Realizando o produto interno do quadrimomento, obtêm-se a equação da energia,

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2,$$

resultado na relação da energia relativística total,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \tag{1.34}$$

A função energia cinética tem a forma,

$$K = m(\gamma - 1)c^2, \quad (1.35)$$

que satisfaz o limite relativístico. Pode-se escrevê-la em termos da energia total e da energia de repouso,

$$K = m\gamma c^2 - mc^2 = E - E_0. \quad (1.36)$$

A partir das equações (1.35) e (1.34), é possível obter a relação entre energia cinética e momento linear,

$$p^2 c^2 = K^2 + 2m\gamma c^2 K, \quad (1.37)$$

muito utilizada em cálculos da energia cinética de partículas em colisões, quando fornecido o momento linear.

As transformações de Lorentz para o quadrimomento são dadas por,

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c}p_x\right), \\ p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{u}{c}\frac{E}{c}\right), \\ p'_y = p_y, \\ p'_z = p_z. \end{cases} \quad (1.38)$$

1.2 Eletromagnetismo Covariante

1.2.1 Definições dos Potenciais e dos Campos

O quadripotencial assume a forma,

$$A^\mu = (A^0, A^i) = \left(\frac{1}{c}V(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)\right), \quad (1.39)$$

Paralelamente, define-se a quadricorrente,

$$J^\mu = (J^0, J^i) = (c\rho(\vec{r}, t), \vec{J}(\vec{r}, t)), \quad (1.40)$$

O quadrigradiente, que também pode ser chamado de quadriderivada, é descrito pelas relações em suas formas covariante e contravariante,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \text{ou} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (1.41)$$

O produto interno desses operadores é $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square$, definido como o operador d'Alambertiano. Define-se o tensor eletromagnético pela relação,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \text{ou} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.42)$$

e a antisimetria, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ e na forma matricial,

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

ou ainda,

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & +B_y \\ -\frac{E_y}{c} & +B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & +B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

As equações de Maxwell ficam,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (1.45)$$

Para as equações com fonte,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.46)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.47)$$

Para as equações sem fonte,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.48)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Para estas equações, aplica-se o operador dual¹ em (1.45),

$$\begin{aligned} *(\partial_\mu F^{\mu\nu}) &= \mu_0 *J^\nu, \\ \partial_\mu (*F^{\mu\nu}) &= \mu_0(*J^\nu), \end{aligned} \quad (1.50)$$

sendo $*J^\nu = 0$, indicando a inexistência de fonte magnética, e $*F^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$. Com isso, o dual do tensor eletromagnético resulta,

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Calculando para os índices ν , da mesma maneira que para $F^{\mu\nu}$, obtêm-se então as seguintes equações do eletromagnetismo covariante,

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.52)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (1.53)$$

sendo $G^{\mu\nu} = *F^{\mu\nu}$.

1.2.2 Condição de Calibre (“gauge”) e a Equação de Onda

Pode-se considerar uma transformação de calibre “gauge”² dos potenciais \vec{A} e V em quatro dimensões,

$$A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha. \quad (1.54)$$

¹Da *dualidade de Hodge* usa-se o pseudotensor de Levi-Civita em quatro dimensões, $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$, onde $\varepsilon^{0123} = +1$. O tensor dual do tenso eletromagnético é $*F^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$ [19, pág. 65].

²Esta transformação é similar a uma transformação sob o grupo de simetrias $U(1)$, sob o espaço complexo, quando o parâmetro de rotação, que no caso é χ , depende das coordenadas do espaço tempo.

Usando essas transformações no tensor eletromagnético, de modo que,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \mapsto F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu, \quad (1.55)$$

obtêm-se que,

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \alpha) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \alpha), \quad (1.56)$$

Pelo teorema de Clairaut-Fubini [20],

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (1.57)$$

Para uma função f suave e contínua,

$$\partial^\mu \partial^\nu \alpha = \partial^\nu \partial^\mu \alpha, \quad (1.58)$$

e na equação do tensor eletromagnético,

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \cancel{(\partial^\mu \partial^\nu \alpha - \partial^\nu \partial^\mu \alpha)}^0 = F^{\mu\nu}. \quad (1.59)$$

Pode-se encontrar a condição de gauge covariante através das equações de Maxwell covariantes, usando a definição do tensor eletromagnético,

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\nu, \\ \square A^\nu &= \mu_0 J^\nu, \end{aligned} \quad (1.60)$$

Se o espaço considerado é o vácuo, tem-se que $\square A^\mu = 0$ [21]. Assim, o gauge de Lorentz é a escolha do divergente quadridimensional do potencial eletromagnético,

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (1.61)$$

que pode ser verificado em componentes,

$$\partial_\mu A^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \cdot \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.62)$$

Existe também uma outra solução possível em que não considera-se necessaria-

mente o calibre de Lorentz. Voltando à equação de Maxwell,

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\nu, \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu.\end{aligned}\tag{1.63}$$

Em vez de aplicar o calibre de Lorentz, reescrevem-se alguns índices,

$$\begin{aligned}\partial_\rho \partial^\rho A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu, \\ \partial_\rho \partial^\rho \delta^\nu_\mu A^\mu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu, \\ \square \delta^\nu_\mu A^\mu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu, \\ (\square \delta^\nu_\mu - \partial^\nu \partial_\mu) A^\mu &= \mu_0 J^\nu, \\ O^\nu_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu,\end{aligned}\tag{1.64}$$

que é uma equação de onda para os campos eletromagnéticos, onde,

$$O^\nu_\mu = \square \delta^\nu_\mu - \partial^\nu \partial_\mu\tag{1.65}$$

ou,

$$O^{\mu\nu} = \square g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu.\tag{1.66}$$

$O^{\mu\nu}$ é o operador central para as ondas eletromagnéticas. Uma coisa interessante é que quando toma-se uma transformação de calibre, esta equação não se modifica.

1.2.3 Graus de Liberdade

Com o objetivo de obter uma solução do tipo ondas planas, define-se inicialmente um Ansatz tanto para o campo quanto para o parâmetro de calibre,

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \tilde{A}^\mu(p) e^{ip \cdot x},\tag{1.67}$$

$$\alpha(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \tilde{\alpha}^\mu(p) e^{ip \cdot x}.\tag{1.68}$$

Substituindo o campo $A^\mu(x)$ em (1.64),

$$\begin{aligned}O^\nu_\mu A^\mu(x) &= (\square \delta^\nu_\mu - \partial^\nu \partial_\mu) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \tilde{A}^\mu(p) e^{ip \cdot x}, \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} [-p^2 \tilde{A}^\nu(p) + p^\nu p_\mu \tilde{A}^\mu(p)] e^{ip \cdot x},\end{aligned}\tag{1.69}$$

Supondo a equação de onda sem fonte, tem-se,

$$p^2 \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu p_\mu \tilde{A}^\mu(p) = 0. \quad (1.70)$$

Usando a transformação de calibre,

$$A^\mu(x) \mapsto A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x), \quad (1.71)$$

onde, no espaço de fase,

$$\tilde{A}^\mu(p) \mapsto \tilde{A}'^\mu(p) = \tilde{A}^\mu(p) + ip^\mu \tilde{\alpha}(p). \quad (1.72)$$

Escrevendo uma base quadridimensional para o vetor $\tilde{A}^\mu(p)$, no espaço dos momentos,

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}), \quad \bar{p}^\mu = (p^0, -\vec{p}), \quad \epsilon_1^\mu = (0, \vec{\epsilon}_1), \quad \epsilon_2^\mu = (0, \vec{\epsilon}_2),$$

com $\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_1 = 0$, $\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0$ e $\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0$, e ainda,

$$\begin{aligned} \epsilon_{1\mu} p^\mu &= \epsilon_{2\mu} p^\mu = 0, \\ \epsilon_{1\mu} \bar{p}^\mu &= \epsilon_{2\mu} \bar{p}^\mu = 0, \\ \epsilon_{1\mu} \epsilon_2^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Assim, uma combinação linear possível e L.I. é,

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\mu(p) &= a(p)p^\mu + b(p)\bar{p}^\mu + c_1(p)\epsilon_1^\mu + c_2(p)\epsilon_2^\mu, \\ &= a(p)p^\mu + b(p)\bar{p}^\mu + c_s(p)\epsilon_s^\mu, \quad \text{com } s = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Substituindo em (1.70),

$$\begin{aligned} p^2 [a(p)p^\mu + b(p)\bar{p}^\mu + c_s(p)\epsilon_s^\mu] - p^\mu p_\nu [a(p)p^\nu + b(p)\bar{p}^\nu + c_s(p)\epsilon_s^\nu] &= 0, \\ ap^2 p^\mu + bp^2 \bar{p}^\mu + c_s p^2 \epsilon_s^\mu - ap^\mu p_\nu p^\nu - bp^\mu p_\nu \bar{p}^\nu - c_s p^\mu p_\nu \epsilon_s^\nu &= 0, \\ bp^2 \bar{p}^\mu + bp^\mu (p_\nu \bar{p}^\nu) - c_s p^2 \epsilon_s^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

O coeficiente $a(p)$ ficou indeterminado. A componente temporal fornece,

$$\begin{aligned}
 bp^2\bar{p}^0 + bp^0(p_\nu\bar{p}^\nu) - c_s p^2 \epsilon_s^0 &= 0, \\
 b(p^2 - p_\nu\bar{p}^\nu) &= 0, \\
 b[(p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - (p_0\bar{p}^0 - p_i\bar{p}^i)] &= 0, \\
 b[(p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - (p^0)^2 + \vec{p} \cdot (-\vec{p})] &= 0, \\
 -2b|\vec{p}|^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

implicando que $b = 0$, ou seja, a parte temporal da equação de movimento elimina um grau de liberdade do campo vetorial. Voltando à equação de movimento,

$$\begin{aligned}
 bp^2\bar{p}^\mu + bp^\mu(p_\nu\bar{p}^\nu) - c_s p^2 \epsilon_s^\mu &= 0, \\
 c_s p^2 \epsilon_s^\mu &= 0, \\
 p^2 c_1 \epsilon_1^\mu + p^2 c_2 \epsilon_2^\mu &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

Como ϵ_1^μ e ϵ_2^μ são L.I., então os coeficientes que os acompanham devem se anular $p^2 c_1 = p^2 c_2 = 0$, e ainda tem-se que a teoria é sem massa, logo $p^2 = 0$. Os coeficientes c_1 e c_2 são quaisquer.

Os campos vetoriais devem descrever a mesma física sob a mesma equação de movimento, o campo transformado $\tilde{A}^\mu(p)$ e o não transformado $\tilde{A}'^\mu(p)$. Então, pode-se escrever,

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}'^\mu(p) &= \tilde{A}^\mu(p) + ip^\mu \tilde{\alpha}(p), \\
 a'(p)p^\mu + c'_s(p)\epsilon_s^\mu &= a(p)p^\mu + c_s(p)\epsilon_s^\mu + ip^\mu \tilde{\alpha}(p),
 \end{aligned} \tag{1.77}$$

com,

$$[a'(p) - a(p) - i\tilde{\alpha}(p)]p^\mu + [c'_s(p) - c_s(p)]\epsilon_s^\mu = 0. \tag{1.78}$$

Como os vetores p^μ e ϵ_s^μ são L.I.,

$$a'(p) = a(p) + i\tilde{\alpha}(p), \tag{1.79}$$

$$c'_s(p) = c_s(p). \tag{1.80}$$

Pode-se escolher $ia(p) = \tilde{\alpha}(p)$, sem perdas de generalidades, o que resulta em,

$$a'(p) = a(p) + i(ia(p)) = a(p) - a(p) = 0,$$

Podendo se estender para todos os $a(p)$, restando apenas dois graus de liberdade na teoria, c_1 e c_2 . Feito isso, o campo assume a forma,

$$\tilde{A}^\mu(p) = c_1(p)\epsilon_1^\mu + c_2(p)\epsilon_2^\mu. \quad (1.81)$$

que representam apenas componentes transversais da teoria. Portanto, o campo de Maxwell só possui duas componentes transversais, como por exemplo na direção de x e y , e nula em z ou outras combinações. Mas, sabe-se que a componente temporal que define o potencial elétrico é nulo, restando apenas componentes magnéticas, mostrando que o potencial de Maxwell A^μ possui apenas características magnéticas.

1.3 Formulação Lagrangeana do Eletromagnetismo

Nesta seção é realizada a descrição do Formalismo Lagrangeano considerando os campos Eletromagnéticos em sua forma covariante. A ação eletromagnética deve descrever as duas as equações de Maxwell na forma covariante com um termo de fonte, possuindo a forma,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mu_0 J_\mu A^\mu. \quad (1.82)$$

Pelo principio variacional, a equação de Euler-Lagrange para o campo eletromagnético se torna,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu(x)} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu(x))} \right] = 0. \quad (1.83)$$

A Lagrangeana expandida fica,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma}(\partial^\mu A^\sigma - \partial^\sigma A^\mu)(\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) - J_\mu A^\mu, \quad (1.84)$$

tornando fácil o cálculo. Então, aplicando a equação de Euler-Lagrange (1.83),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu(x)} = -\mu_0 J_\mu \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu(x))} = F_{\mu\nu}, \quad (1.85)$$

obtêm-se a equação de Maxwell inhomogênea,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (1.86)$$

Aplicando o operador de dualidade, tem-se a equação homogênea,

$$\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.87)$$

Com o auxílio da Lagrangeana de Maxwell, pode-se obter a energia do sistema, através do tensor momento-energia definido anteriormente,

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda(x))} \partial_\nu A^\lambda(x) - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}, \quad (1.88)$$

fornecendo,

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} F_{\kappa\lambda} \partial^\nu A^\lambda - g^{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \right\}, \quad (1.89)$$

ou,

$$T^{\mu\nu} = -F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho}, \quad (1.90)$$

Esse tensor também é conservado, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Em componentes, omitindo-se as constantes,

$$T^{00} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \nabla \cdot (V \vec{E}), \quad (1.91)$$

$$T^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i + \nabla \cdot (A^i \vec{E}), \quad (1.92)$$

$$T^{i0} = (\vec{E} \times \vec{B})^i + (\nabla \times \phi \vec{B})^i - \frac{\partial(V E^i)}{\partial t}, \quad (1.93)$$

com a energia total,

$$E = \int d^3 \vec{x} T^{00} = \int d^3 \vec{x} \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (1.94)$$

e o momento eletromagnético,

$$p^i = \int d^3 \vec{x} T^{0i} = \int d^3 \vec{x} (\vec{E} \times \vec{B})^i, \quad (1.95)$$

como visto anteriormente, de uma forma mais clássica, sendo que esse último também representa o vetor de Poynting, na devida dimensionalidade.

Também pode-se encontrar o momento quadridimensional a partir do Lagrangeana de Maxwell (1.82), que é dado por,

$$\begin{aligned} \pi^\mu(x) &= \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A_\mu(x))}, \\ &= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu(x))} \left[-\frac{1}{4} g_{\lambda\rho} g_{\nu\sigma} (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) (\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) - J_\rho A^\rho \right], \\ &= -(\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0), \\ &= -F^{0\mu} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Em componentes,

$$\pi^0(x) = -(\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0) = 0, \quad (1.97)$$

e,

$$\begin{aligned} \pi^i(x) &= -(\partial^0 A^i + \partial^i A^0), \\ &= -\partial_t A^i - \partial^i V, \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} \vec{\pi}(\vec{x}, t) &= -\nabla V(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t}, \\ &= \vec{E}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Em algumas literaturas, o fato de $\pi^0(x) = 0$ ocorrer naturalmente, sugere que a teoria possui puramente um gauge axial temporal. Assim, o momento pode ser escrito como,

$$\pi^i(x) = -\dot{A}^i(x). \quad (1.100)$$

Esse resultado diminui o número de graus de liberdade da teoria, onde agora tem-se apenas $A^\mu = (0, \vec{A})$, com componentes vetoriais. Usando o calibre de Lorentz (1.61),

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu(x) &= \partial_0 A^0 + \partial_i A^i, \\ &= \nabla \cdot \vec{A}, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.101)$$

que conduz ao gauge de Coulomb. Desta forma, pode-se eliminar mais um grau de liberdade, restando apenas dois, que podem ser nomeados como graus de liberdade transversal. Tomando a direção de propagação como sendo a direção z , então sobra $A^\mu = (0, A_x, A_y, 0)$.

Considerando o gauge de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = 0$, volta-se ao caso da contagem do número de graus de liberdade, de modo que $A^0 = 0$. E, a partir da equação de onda sem fonte e sem massa, onde têm-se que $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, a qual implica que $\square A^i = 0$, semelhante à de Klein-Gordon. Esta equação sugere uma expansão em ondas planas,

$$\vec{A}(x) = \vec{\epsilon}_{\vec{p}} e^{-i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + \vec{\epsilon}_{\vec{p}}^* e^{+i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (1.102)$$

com $p^0 = E_{\vec{p}}$, que relativisticamente, $p^0 = |\vec{p}|$. A quantidade $\vec{\epsilon}_{\vec{p}}$ representa o vetor de polarização do campo ao longo de uma direção privilegiada. Por exemplo, como

foi escolhido a direção z , tem-se que, a partir do gauge de Coulomb,

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A}(x) &= \nabla \cdot [\vec{\epsilon}_{\vec{p}} e^{-i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + \vec{\epsilon}_{\vec{p}}^* e^{+i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}], \\
 &= \vec{\epsilon}_{\vec{p}} \cdot (i\vec{p}) e^{-i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + \vec{\epsilon}_{\vec{p}}^* \cdot (-i\vec{p}) e^{+i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \\
 &= (i\vec{\epsilon}_{\vec{p}} \cdot \vec{p}) e^{-i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + (i\vec{\epsilon}_{\vec{p}}^* \cdot \vec{p})^* e^{+i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \tag{1.103}
 \end{aligned}$$

quando igualado a zero, obtêm-se, para ambos os termos, o mesmo resultado,

$$\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{p}} = 0. \tag{1.104}$$

O vetor de polarização que caracteriza o potencial vetorial deve ser transversal à direção de propagação da onda plana. Pode haver duas direções independentes, por exemplo, como mostrado na Figura (1.1). Pode-se escolher os dois vetores de polarização independentes para que sejam ortonormais. Essas componentes são com-

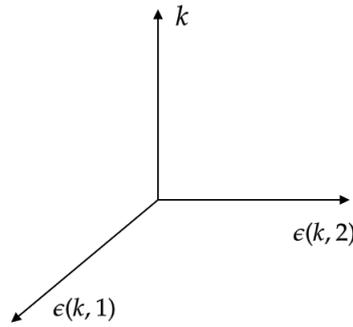


Figura 1.1: Polarização do campo eletromagnético.

plexas, com isso é possível escolher uma dependência para a polarização, denominada pela letra s , tal que,

$$\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{p}}(s) = 0, \quad \text{com } s = 1, 2. \tag{1.105}$$

Vale também a relação de completeza para tais componentes,

$$\vec{\epsilon}_{\vec{p}}^*(s) \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{p}}(s') = \delta_{ss'}, \quad \text{com } s = 1, 2. \tag{1.106}$$

Finaliza-se essa discussão afirmando que o eletromagnetismo pode ser resumido em apenas dois graus de liberdade, usando condições de calibre (gauge), e essas condições são puramente magnéticas.

Apêndice B - Regras de Feynman (Toy Theory)

O objetivo desta seção é determinar a amplitude \mathcal{M} usando as “Regras de Feynman”³ para avaliar os diagramas. É possível ir direto para um sistema “da vida real”, como em eletrodinâmica quântica, com elétrons e fótons interagindo através de um vértice primitivo, como na figura 2.2,

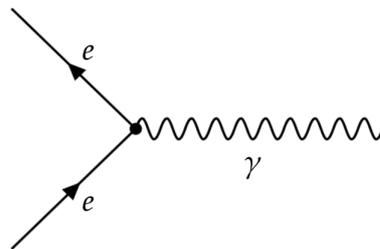
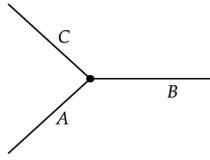


Figura 2.2: Diagrama: Representação de uma interação elétron-fóton.

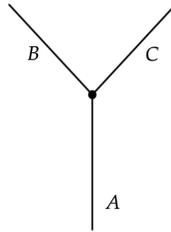
Esta é uma aplicação original, a mais importante e a mais bem compreendida da técnica de Feynman. Infelizmente, envolve desviar complicações (devido ao fato de o elétron carregar spin $1/2$ e o fóton carregar spin 1), mas que nada tem a ver com o cálculo de Feynman. O spin não é levado em consideração nesta seção, o objetivo é apresentar uma teoria “brinquedo”, que não representa o mundo real mas servirá para ilustrar o método.

Considerando um mundo em que exista apenas três tipos de partículas, chamadas de A , B e C , com massas m_A , m_B , e m_C . Todas com spin 0 , onde cada uma é sua própria antipartícula. Existe um vértice primitivo pelo qual as três partículas interagem.

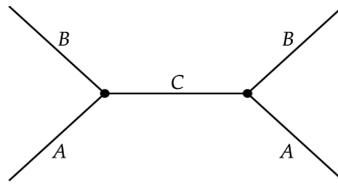
³Richard Philips Feynman (Nova Iorque, 11 de maio de 1918 — Los Angeles, 15 de fevereiro de 1988) foi um físico teórico norte-americano do século XX, foi um dos pioneiros da eletrodinâmica quântica e ficou conhecido pelos seus trabalhos no ramo da formulação integral da mecânica quântica.



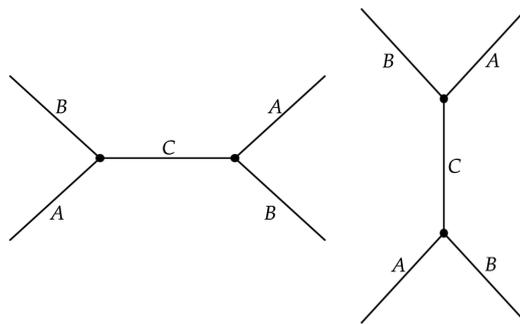
Assume-se que A é a mais pesada das três partículas, a qual pesa mais que B e C combinadas, para que possa decair em B e C . O diagrama de ordem baixa que descreve essa desintegração é,



O primeiro projeto será calcular a vida útil da partícula A , na ordem mais baixa. Depois disso, o próximo passo é estudar processos de dispersão, como $A+A \rightarrow B+B$,



ou $A+B \rightarrow A+B$,



e assim por diante. Para determinar a amplitude \mathcal{M} associada a um diagrama de Feynman, é preciso seguir algumas regras:

1. *Notação:* Nomeia-se os momentos de entrada e saída como p_1, p_1, \dots, p_n (Fig. 2.3). E os momentos internos como q_1, q_2, \dots, q_n . Coloca-se uma seta em cada

linha para acompanhar a direção “positiva” (arbitrariamente atribuída para as linhas internas)⁴.

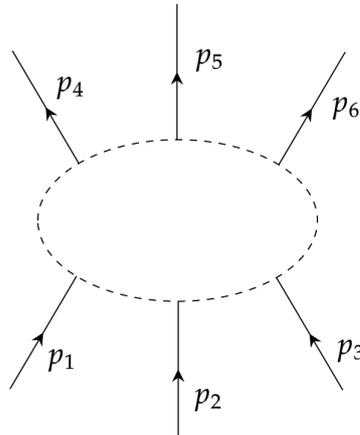


Figura 2.3: Um típico diagrama de Feynman, com linhas externas (linhas internas não são mostradas).

2. Constante de Acoplamento: Para cada vértice, escreve-se um fator,

$$-ig,$$

onde g é chamada de constante de acoplamento; especificando a força de interação entre A , B , e C . Nessa teoria, g tem dimensões de momento; nas teorias do “mundo real” a constante é sempre adimensional.

3. Propagador: Para cada linha interna, escreve-se um fator,

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2},$$

onde q_j é o quadrimomento ($q_j^2 \equiv q_j^\mu q_{j\mu}$) e m_j é a massa da partícula. (Note que $q_j^2 \neq m_j^2 c^2$ porque a partícula virtual não se encontra “on its mass shell”⁵). Na teoria quântica de campos, as partículas virtuais são denominadas fora da casca porque não satisfazem a relação energia e momento.

4. Conservação de Energia e Momento: Para cada vértice, escreve-se uma função

⁴Como essas partículas são suas próprias antipartículas, não se precisa de setas para acompanhar essa distinção.

⁵As configurações de um sistema físico que satisfazem as equações clássicas de movimento são chamadas “na concha de massa (on shell mass)”; enquanto aqueles que não, são chamados de “fora da concha de massa (off shell mass)”.

delta na forma,

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3),$$

onde os k 's são os três quadrimomentos que entram no vértice (se a flecha leva pra fora, então k é menos o quadrimomento dessa linha). Esse fator impõe a conservação de energia e momento em cada vértice, uma vez que a função delta é zero.

5. *Integração sobre o Momento Interno:* Para cada linha interna, escreve-se o fator,

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j,$$

e integra-se em todos os momentos internos.

6. *Cancelar a Função Delta:* O resultado obtido incluirá uma função delta,

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \cdots - p_n),$$

reforçando a conservação geral de energia e momento. Desconsidera-se esse valor e iguala-se o que resta a $-i\mathcal{M}$.

Depois de se acostumar, as etapas 4, 5 e 6 podem ser recolhidas em uma única regra: “Integre todos os momentos internos indeterminados.” O método apresentado aqui é mais claro, mesmo que demore um pouco mais de tempo. A propósito, nota-se que toda função delta carrega um fator de $(2\pi)^4$ e todo elemento de volume quadridimensional carrega um fator de $(2\pi)^{-4}$. A maioria desses fatores acabam sendo cancelados, e é comum que se pergunte se eles são realmente necessários (observações semelhantes se aplicam aos i 's nos propagadores e constantes de acoplamento). Eles são necessários, e a prescrição dada aqui é a maneira mais sistemática de acompanhá-los.

Nas próximas seções será demonstrado como essas regras são utilizadas para avaliar alguns diagramas elementares de Feynman na “teoria ABC”.

2.3.1 Vida Útil da Partícula A

O diagrama mais simples possível, representando a contribuição de menor ordem para $A \rightarrow B + C$, não possui linhas interna 2.4,

Existe um vértice, no qual considera-se o fator $-ig$ (regra 2) e a função delta,

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3), \tag{2.107}$$

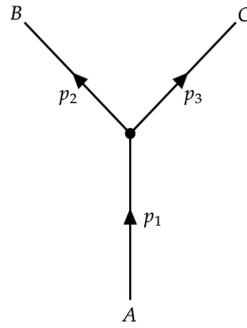


Figura 2.4: Contribuição de menor ordem para $A \rightarrow B + C$.

(regra 4), a qual é descartada pela (regra 6), obtendo $i\mathcal{M} = -ig$,

$$\mathcal{M} = g. \quad (2.108)$$

Essa é a amplitude (na ordem mais baixa); a taxa de decaimento é encontrada conectando \mathcal{M} com a equação,

$$\Gamma = \frac{g^2 |\mathbf{p}|}{8\pi \hbar m_A^2 c}, \quad (2.109)$$

(Sec. 6.2 do livro *Introduction to Elementary Particles* [12]), onde $|\mathbf{p}|$ (magnitude de qualquer momento de saída) é,

$$|\mathbf{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2}. \quad (2.110)$$

Então, o tempo de vida da partícula A é,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi \hbar m_A^2 c}{g^2 |\mathbf{p}|}. \quad (2.111)$$

2.3.2 Espalhamento

A contribuição de menor ordem para o processo de espalhamento é demonstrado pela figura 2.5,

Nesse caso, existem dois vértices (portanto, dois fatores de $-ig$), uma linha interna, com o propagador,

$$\frac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}, \quad (2.112)$$

dois vértices, duas funções delta,

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q) \quad \text{e} \quad (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4), \quad (2.113)$$

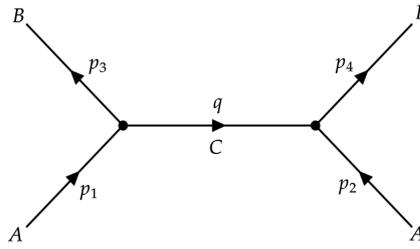


Figura 2.5: Contribuição de menor ordem para $A + A \rightarrow B + B$.

e uma integração,

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q. \quad (2.114)$$

As regras 1 a 5, então, produzem,

$$-i(2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + q - p_4) d^4 q. \quad (2.115)$$

A segunda função delta sobre toda integração serve para definir o valor de $q = p_4 - p_2$. Então,

$$-ig^2 \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (2.116)$$

Como prometido, há uma função delta restante, refletindo a conservação geral de energia e momento. Utilizando a (regra 6), obtêm-se então a amplitude do espalhamento,

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2}. \quad (2.117)$$

Mas essa não é a história toda, pois há outro diagrama da ordem g^2 , obtido “torcendo” as linhas B , representado pela figura 2.6,

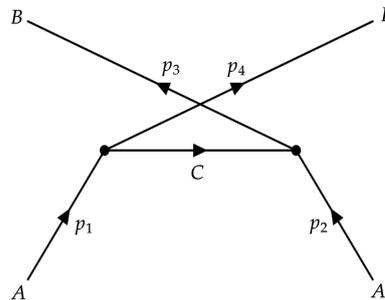


Figura 2.6: Segundo diagrama de menor ordem para $A + A \rightarrow B + B$.

(Não obtêm-se um novo diagrama torcendo as linhas A ; a única opção aqui é se p_3 se conecta com p_1 ou com p_2). Como isso difere do diagrama 2.5 apenas pelo intercâmbio de $p_3 \leftrightarrow p_4$, não há necessidade de calcular do zero, mas para obter

através do cálculo o processo é o mesmo, só que agora deve-se fazer para os dois casos onde p_3 se conecta com p_1 e com p_2 e depois soma-se. Citando a equação (2.117), pode-se obter a amplitude imediatamente pelo intercâmbio de $p_3 \leftrightarrow p_4$. Então, a amplitude total (de ordem g^2) para o processo $A + A \rightarrow B + B$ é,

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2}. \quad (2.118)$$

Observa-se, aliás, que \mathcal{M} é uma quantidade invariante de Lorentz. Sempre é o caso; está definido nas regras de Feynman.

Supondo que o interesse agora é a seção transversal diferencial ($d\sigma/d\Omega$) para esse processo, no sistema do CM, representado pela figura 2.7,

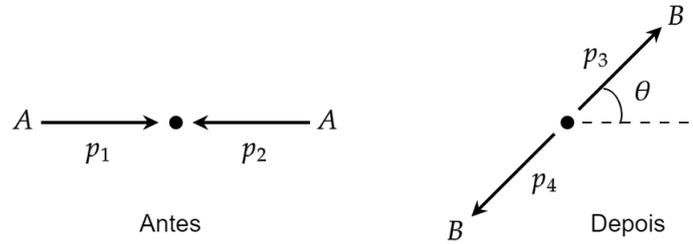


Figura 2.7: Espalhamento $A + A \rightarrow B + B$ no referencial CM.

Define-se, por simplicidade, que $m_A = m_B = m$ e $m_C = 0$. Então,

$$\begin{aligned} (p_4 - p_2)^2 - \cancel{m_C^2 c^2}^0 &= p_4^2 + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_4, \\ &= -[2\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{p}^2 \cos(\theta)], \\ &= -2\mathbf{p}^2[1 - \cos(\theta)], \end{aligned} \quad (2.119)$$

e,

$$\begin{aligned} (p_3 - p_2)^2 - \cancel{m_C^2 c^2}^0 &= p_3^2 + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_3, \\ &= -[2\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{p}^2 \cos(180^\circ - \theta)], \\ &= -2\mathbf{p}^2[1 + \cos(\theta)], \end{aligned} \quad (2.120)$$

(onde \mathbf{p} é o momento incidente da partícula 1, justificando o sinal negativo), e por-

tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \left[\frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2} \right], \\
 &= -\frac{g^2}{2\mathbf{p}^2} \left[\frac{1}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right], \\
 \mathcal{M} &= -\frac{g^2}{\mathbf{p}^2 \sin^2(\theta)}. \tag{2.121}
 \end{aligned}$$

Então, a seção transversal diferencial, de acordo com a equação (6.42 - Sec 6.2 do livro *Introduction to Elementary Particles*[12]), é descrita por,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E \mathbf{p}^2 \sin^2(\theta)} \right)^2. \tag{2.122}$$

Nesse caso, como na dispersão de Rutherford [12], a seção transversal total é infinita.

Como o objetivo não é demonstrar o cálculo para se obter a fórmula da taxa de decaimento utilizada na equação (2.109), nem o cálculo da fórmula utilizada para encontrar a seção transversal diferencial (2.122), utilizou-se como referência o Griffiths [12]. Pois, o intuito dessa seção é demonstrar as regras de Feynman (Toy Theory) e como utilizá-las para avaliar alguns diagramas.

Apêndice C - Invariância de Calibre e o Campo Escalar Complexo

3.4 Invariância de teorias sob transformações de calibre

Partindo da Lagrangeana que descreve um campo escalar real, dada pela relação (3.123),

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2, \quad (3.123)$$

onde ϕ é uma função escalar real. O campo escalar real ϕ é invariante. Ou seja, ϕ não se transforma frente a nenhum grupo de transformação. Exemplo,

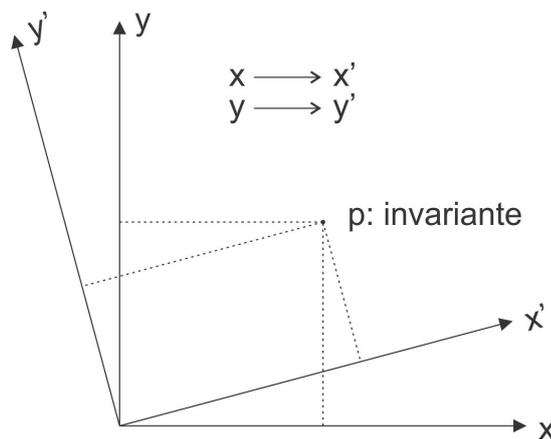


Figura 3.8: Invariância sob rotação de coordenadas.

Conseqüentemente, a Lagrangeana do campo escalar real permanece invariante diante uma transformação,

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0.$$

3.5 Lagrangeana para o Campo Escalar Complexo

O campo escalar complexo, representado por ϕ , é descrito por dois outros campos escalares, ϕ_1 e ϕ_2 ,

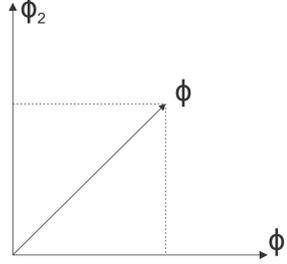


Figura 3.9: Representação do campo escalar complexo.

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}},$$

e o seu conjugado transposto,

$$\phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}},$$

onde ϕ descreve um campo escalar complexo em duas dimensões. Os campos ϕ_1 e ϕ_2 descrevem a equação de Klein-Gordon,

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.124)$$

e a Lagrangeana para o campo escalar complexo é definida pela relação,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi. \quad (3.125)$$

Pode-se determinar as equações de Klein-Gordon utilizando a equação de Euler-Lagrange para campos relativísticos e a Lagrangeana de Klein-Gordon (3.125),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)^*} \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0, \quad (3.126a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi^* = 0. \quad (3.126b)$$

Acima obtêm-se as equações de Klein-Gordon para campos escalares complexos.

3.5.1 Invariância do campo escalar complexo sob transformações de gauge (calibre)

Realizando uma transformação de ϕ no espaço complexo, onde $\phi \longrightarrow \phi'$ e $\mathcal{L} \longleftarrow \mathcal{L}'$, obtêm-se uma teoria invariante? Como ϕ é complexo, realiza-se uma rotação no plano complexo do grupo $U(1)$, onde as transformações são,

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = e^{-i\Lambda}\phi, \\ \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\Lambda}\phi^*, \end{cases}$$

e a rotação no plano complexo representada pela figura abaixo,

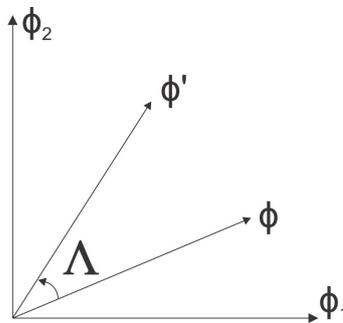


Figura 3.10: Transformação de ϕ sob o grupo $U(1)$.

O intuito é obter transformações para as quais os ângulos Λ são infinitesimais. Através dessa condição, realiza-se a expansão do termo $e^{-i\Lambda}$ para ângulos pequenos, desconsiderando os termos quadráticos de Λ ,

$$e^{-i\Lambda} = 1 - i\Lambda + \underbrace{\frac{(i\Lambda)^2}{2!} + \dots}_{\text{Termos desprezados}} .$$

Feito isso, a aproximação para o ϕ pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \phi' &= (1 - i\Lambda)\phi, \\ &= \phi - i\Lambda\phi, \\ \phi' - \phi &= -i\Lambda\phi, \\ \delta\phi &= -i\Lambda\phi. \end{aligned} \tag{3.127}$$

Para o caso onde Λ é constante, tem-se que,

$$\partial_\mu(\delta\phi) = -i\Lambda\partial_\mu\phi \longrightarrow \begin{cases} \delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda\partial_\mu\phi, \\ \delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Lambda\partial_\mu\phi^*. \end{cases}$$

Considerando a Lagrangeana de Klein-Gordon (3.125) e aplicando $\delta\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi, \\ \delta\mathcal{L} &= \delta(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\delta(\phi^*\phi), \\ &= \delta(\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^*\delta(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}(\delta\phi^*\phi + \phi^*\delta\phi), \\ &= \cancel{i\Lambda\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi} - \cancel{i\Lambda\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}(\cancel{i\Lambda\phi^*\phi} - \cancel{i\Lambda\phi^*\phi}), \\ \delta\mathcal{L} &= 0. \end{aligned}$$

Feito isso, demonstrou-se que a Lagrangeana para o campo escalar complexo permanece invariante para rotações onde Λ é constante. Agora, para o caso onde o Λ não é mais constante, ou seja, $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$ com $\delta\phi = -i\Lambda\phi$ e $\delta\phi^* = i\Lambda\phi^*$, tem-se que,

$$\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu(-i\Lambda\phi) \longrightarrow \begin{cases} \delta(\partial_\mu\phi) = -i\partial_\mu\Lambda\phi - i\Lambda\partial_\mu\phi, \\ \delta(\partial_\mu\phi^*) = i\partial_\mu\Lambda\phi^* + i\Lambda\partial_\mu\phi^*. \end{cases}$$

Considerando novamente a Lagrangeana e aplicando $\delta\mathcal{L}$ para $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta(\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^*\delta(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}(\delta\phi^*\phi + \phi^*\delta\phi), \\ &= (i\partial_\mu\Lambda\phi^*)\partial^\mu\phi + \cancel{i\Lambda\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi} + \partial_\mu\phi^*(-i\partial^\mu\Lambda\phi) - \cancel{i\Lambda\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}(\cancel{i\Lambda\phi^*\phi} - \cancel{i\Lambda\phi^*\phi}), \\ &= i\partial_\mu\Lambda(\phi^*\partial^\mu\phi) - i\partial^\mu\Lambda(\phi\partial_\mu\phi^*), \\ &= i\partial_\mu\Lambda[\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*], \\ \delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\Lambda(x^\mu)J^\mu, \end{aligned}$$

onde $J^\mu = i[\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*]$. Para $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$, $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\Lambda(x^\mu)J^\mu \neq 0$. Logo, é preciso introduzir “termos” com o intuito de tornar a Lagrangeana invariante. Com isso, o primeiro termo proposto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -eJ^\mu A_\mu, \\ &= -e[i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)]A_\mu, \end{aligned}$$

onde a Lagrangeana inicial passa a ser $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1$. Calculando $\delta\mathcal{L}_1$,

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e\delta J^\mu A_\mu - eJ^\mu\delta A_\mu, \quad (3.128)$$

e o termo,

$$\begin{aligned} \delta J^\mu &= i[\delta\phi^*\partial^\mu\phi + \phi^*\delta(\partial^\mu\phi) - \phi\delta(\partial^\mu\phi^*) - \delta\phi\partial^\mu\phi^*], \\ &= i[\cancel{i\Lambda\phi^*\partial^\mu\phi} + \phi^*(-i\partial^\mu\Lambda\phi - \cancel{i\Lambda\partial^\mu\phi}) - \phi(\cancel{i\partial^\mu\Lambda\phi^*} + \cancel{i\Lambda\partial^\mu\phi^*}) + \cancel{i\Lambda\phi\partial^\mu\phi^*}], \\ &= i[-2i\phi^*\phi\partial^\mu\Lambda], \\ &= 2\phi^*\phi\partial^\mu\Lambda. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Substituindo (3.129) em (3.128), resulta-se na relação,

$$\delta\mathcal{L}_1 = -2e\phi^*\phi\partial^\mu\Lambda A_\mu - eJ^\mu\delta A_\mu. \quad (3.130)$$

O próximo passo é determinar δA_μ . Para isso, utilizando a Lagrangeana da eletrodinâmica clássica,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \end{aligned}$$

e a seguinte transformação de gauge $A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda$, onde tem-se a relação,

$$\begin{aligned} A'_\mu - A_\mu &= \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda, \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda. \end{aligned}$$

Realiza-se o cálculo para $\delta F_{\mu\nu}$, obtendo que,

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} &= \delta(\partial A_\nu) - \delta(\partial_\nu A_\mu), \\ &= \partial_\mu(\delta A_\nu) - \partial_\nu(\delta A_\mu), \\ &= \partial_\mu\left(\frac{1}{e}\partial_\nu\Lambda\right) - \partial_\nu\left(\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, para $\delta A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda$, $\delta\mathcal{L}_M = 0$. Feito isso, pode-se rescrever a relação (3.128), ficando,

$$\delta\mathcal{L}_1 = -2e\phi^*\phi\partial^\mu\Lambda A_\mu - J^\mu\partial_\mu\Lambda, \quad (3.131)$$

onde $\delta\mathcal{L} = J^\mu \partial_\mu \Lambda$ e $\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2e\phi^* \phi \partial^\mu \Lambda A_\mu \neq 0$.

Pode-se observar que os termos da Lagrangeana ainda não se anulam, ou seja, a Lagrangeana ainda não é invariante diante transformações de gauge. Com isso, é preciso introduzir mais um termo com o objetivo de tornar a teoria invariante. O próximo termo é,

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi,$$

onde \mathcal{L}_2 é uma proposta para satisfazer a condição $\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0$. Então, fazendo $\delta\mathcal{L}_2$, obtêm-se,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_2 &= e^2 (A^\mu \phi^* \phi \delta A_\mu + A_\mu \phi^* \phi \delta A^\mu + A_\mu A^\mu \phi \delta \phi^* + A_\mu A^\mu \phi^* \delta \phi), \\ &= e^2 \left(A^\mu \phi^* \phi \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda + A_\mu \phi^* \phi \frac{1}{e} \partial^\mu \Lambda + \cancel{i\Lambda \phi \phi^* A_\mu A^\mu} - \cancel{i\Lambda \phi \phi^* A_\mu A^\mu} \right), \\ &= e\phi^* \phi (A^\mu \partial_\mu \Lambda + A_\mu \partial^\mu \Lambda), \\ &= e\phi^* \phi (g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} A^\mu \partial_\mu \Lambda + A_\mu \partial^\mu \Lambda), \\ &= 2e\phi^* \phi A_\mu \partial^\mu \Lambda. \end{aligned}$$

Incluindo o novo termo na teoria, a Lagrangeana se torna,

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi - eJ^\mu A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi,$$

com $\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0$.

Apesar do termo $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ satisfazer a condição de invariância, a teoria ainda está incompleta. Para tornar a teoria completa, falta introduzir o termo \mathcal{L}_M (Lagrangeana da Eletrodinâmica Clássica) que descreve a dinâmica da partícula mediadora (fóton). Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_M, \\ \mathcal{L}_T &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi - eJ^\mu A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Introduzindo a densidade de corrente $J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$ na equação (3.132),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &= \underline{\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi - \underline{ie\phi^* \partial^\mu \phi A_\mu} + ie\phi \partial^\mu \phi^* A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ &= \partial^\mu \phi [\partial_\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^*] + ie\phi g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} A_\mu [\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*] - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ &= [\partial^\mu \phi + ieA^\mu \phi] [\partial_\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^*] - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

definindo a derivada covariante como $D^\mu\phi = \partial^\mu\phi + ieA^\mu\phi$, pode-se reescrever a Lagrangeana, resultando em,

$$\mathcal{L}_T = D^\mu\phi(D_\mu\phi)^* - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.133)$$

A equação (3.133) é a teoria de gauge para o campo escalar complexo, carregado, e com simetria $U(1)$.

3.5.2 Cargas elétricas dos campos escalares

É possível verificar também que tipo de carga carrega cada campo. Para cada campo real, pode-se associar uma equação de Klein-Gordon, $(p^\mu p_\mu - mc^2)\phi_1(x) = 0$ e $(p^\mu p_\mu - mc^2)\phi_2(x) = 0$, ou equivalentemente para os campos complexos,

$$(\square + \frac{mc^2}{\hbar})\phi(x) = 0, \quad (3.134)$$

e,

$$(\square + \frac{mc^2}{\hbar})\phi^*(x) = 0. \quad (3.135)$$

Pode-se tomar estas equações e verificar as cargas e correntes da teoria. Multiplicando o campo ϕ^* pela esquerda em (3.5.2) e subtraindo da multiplicação de ϕ também pela esquerda mas de (3.5.2), obtêm-se,

$$\phi^*(\square + \frac{mc^2}{\hbar})\phi - \phi(\square + \frac{mc^2}{\hbar})\phi^* = 0, \quad (3.136)$$

ou,

$$\phi^*(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{mc^2}{\hbar})\phi - \phi(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{mc^2}{\hbar})\phi^* = 0. \quad (3.137)$$

Usando a regra do produto para os termos, $\partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi) = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) + \phi^*(\partial_\mu\partial^\mu)\phi$ e $\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi^*) = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) + \phi(\partial_\mu\partial^\mu)\phi^*$ e substituindo os respectivos valores nas equações,

$$\partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi) - \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi^*) = 0, \quad (3.138)$$

$$\partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) = 0, \quad (3.139)$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.140)$$

ou seja,

$$J^\mu = \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*. \quad (3.141)$$

Esta quantidade é chamada de corrente conservada da teoria. Será obtida novamente mais a frente, usando outro procedimento. Esta relação de conservação fornece,

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= 0, \\ \partial_0 J^0 + \partial_i J^i &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} &= 0, \end{aligned} \quad (3.142)$$

onde $J^0 = c\rho$ e $J^i = (\vec{J})^i$. Chamada de equação de continuidade, que é uma conservação de cargas e correntes que aparece em várias áreas da Física, como Mecânica de Fluidos [22][23], Eletromagnetismo [21][24] e em Mecânica Quântica não Relativística [25][7].

Verifica-se agora soluções de partículas livres, isto é, soluções de ondas planas. Encontra-se tais soluções quando investiga-se o campo de Klein-Gordon. A partir da equação (3.5.2), é possível propor um Ansatz,

$$\phi(x) = Ae^{-ip^\mu x_\mu / \hbar}, \quad (3.143)$$

$$= Ae^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \cdot (ct, \vec{x})}, \quad (3.144)$$

$$= Ae^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (3.145)$$

$$= Ae^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (3.146)$$

com $E = \hbar\omega$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Esta solução pode ser expandida em senos e cossenos dando um caráter oscilatório à teoria. A solução fornece equações de energia, cujos autovalores são,

$$E_{(\pm)} = \pm c \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2} = \pm |E_{\vec{p}}|, \quad (3.147)$$

e assim seus autovetores,

$$\phi_{(+)}(x) = A_{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar} (E_{(+)} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (3.148)$$

e,

$$\phi_{(-)}(x) = A_{(-)} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{(-)}t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (3.149)$$

com a equação geral $\phi(x) = c_{(+)}\phi_{(+)}(x) + c_{(-)}\phi_{(-)}(x)$. A fim de encontrar alguns resultados físicos, pode-se adaptar a dimensionalidade correta à corrente da teoria,

$$J^\mu = \frac{i\hbar e}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (3.150)$$

que em componentes,

$$\rho = \frac{i\hbar e}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad \text{e} \quad \vec{J} = \frac{i\hbar e}{2m} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*). \quad (3.151)$$

Substituindo os campos $\phi_{(+)}$ e $\phi_{(-)}$ na relação da densidade de carga, tem-se que,

$$\rho_{(+)} = +e \frac{|E_{\vec{p}}|}{mc^2} \phi_{(+)}^* \phi_{(+)}, \quad \phi_{(+)} : \text{são campos com cargas elétricas (+)} \quad (3.152)$$

$$\rho_{(-)} = -e \frac{|E_{\vec{p}}|}{mc^2} \phi_{(-)}^* \phi_{(-)}, \quad \phi_{(-)} : \text{são campos com cargas elétricas (-)}. \quad (3.153)$$

Restringindo a solução em uma região cúbica de lado L , o que fornece a relação de dispersão entre o momento e no número de onda, $\vec{p}_n = (2\pi/L)\vec{n}$, com $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, sendo cada componente números inteiros. Os autovalores tornam-se,

$$|E_{\vec{p}_n}| = c \sqrt{|\vec{p}_n|^2 + m^2 c^2} = E_n, \quad (3.154)$$

e os autovetores,

$$\phi_{n(\pm)}(x) = A_{n(\pm)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\pm E_n t - \vec{p}_n \cdot \vec{x}) \right]. \quad (3.155)$$

Agora, normalizando os campos considerando a carga elétrica definida nessa

região cúbica de lado L , o que resulta em,

$$\pm e = \int_0^L \int_0^L \int_0^L dx dy dz \rho_{(\pm)}, \quad (3.156)$$

$$= \int_0^L \int_0^L \int_0^L dx dy dz \left[\pm e \frac{|E_{\vec{p}_n}|}{mc^2} \phi_n^*_{(\pm)} \phi_n_{(\pm)} \right], \quad (3.157)$$

$$= \int_0^L \int_0^L \int_0^L dx dy dz \left[\pm e \frac{E_n}{mc^2} |A_n_{(\pm)}|^2 \right], \quad (3.158)$$

$$= \pm L^3 e \frac{E_n}{mc^2} |A_n_{(\pm)}|^2, \quad (3.159)$$

assim,

$$|A_n_{(\pm)}| = \sqrt{\frac{mc^2}{E_n L^3}}. \quad (3.160)$$

Substituindo na relação dos autovalores (3.5.2),

$$\phi_{n(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{mc^2}{E_n L^3}} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\pm E_n t - \vec{p}_n \cdot \vec{x}) \right], \quad (3.161)$$

obtêm-se a solução total, $\phi(x) = \sum_n c_{n(+)} \phi_{n(+)}(x) + c_{n(-)} \phi_{n(-)}(x)$.

A partir desses resultados, pode-se encontrar a solução para o campo escalar real, $\phi^* = \phi = \varphi$, o que remete,

$$\rho = \frac{i\hbar e}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right), \quad (3.162)$$

$$= \frac{i\hbar e}{2mc^2} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (3.163)$$

$$= 0, \quad (3.164)$$

onde conclui-se, com o resultado obtido, que a carga elétrica de um campo escalar real é zero.

Apêndice D - Construção da Hamiltoniana de Dirac

Com um operador de energia e um autovalor associado,

$$\hat{H}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.165)$$

Dirac propôs a seguinte forma,

$$\hat{H} = [c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta mc^2], \quad (4.166)$$

ou ainda, quando aplicado em uma função de onda,

$$\begin{aligned} [c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta mc^2] \psi(\vec{r}, t) &= \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ [-i\hbar c\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2] \psi(\vec{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \left[-i\hbar \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right] \psi(\vec{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.167)$$

sendo que $\vec{\alpha}$ e β são matrizes 4×4 , onde a primeira tem três componentes matriciais, $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, e a segunda apenas uma. É preciso que $\psi(\vec{r}, t)$ seja um “vetor” de quatro componentes, ou 4×1 , chamado de espinor ⁶,

$$\psi(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{bmatrix}, \quad (4.168)$$

⁶Esta função de onda é um vetor sob o grupo de Lorentz com representação chamada espinorial, espinor de quatro componentes, pois vem de uma estrutura de grupo de representação diferente da vetorial, como por exemplo, do campo vetorial de Maxwell, também com representação no grupo de Lorentz.

que pode ser escrita em componentes $\{\psi(\vec{r}, t)\}_\alpha = \psi_\alpha$, com $\alpha = 1, 2, 3, 4$, chamados de índices espinoriais ou índices da representação de Dirac.

As matrizes α e β devem ser hermitianas. A densidade de probabilidade será positiva e conservada com essa imposição de hermiticidade. Três pontos devem ser satisfeitos na construção do modelo:

- (i) As componentes do espinor ψ também devem satisfazer a equação de Klein-Gordon, e os seus autovalores são as ondas planas com energia $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.
- (ii) Existe uma quadricorrente que é conservada e a componente temporal é sempre positiva, pois a probabilidade é positiva, já que a equação não possui raiz quadrada e fornece valores negativos.
- (iii) As componentes do espinor ψ , não devem satisfazer alguma condição de vínculo fora da equação, e esse deve verificar a covariância no formalismo relativístico.

De acordo com a primeira observação acima, esta equação deve ter o quadrado bem definido e ter como limite a equação de Klein-Gordon. Então, tomando o quadrado de (4.167), obtêm-se que,

$$\left[c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta mc^2 \right]^2 \psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (4.169)$$

checando apenas o Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= \left[c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta mc^2 \right]^2, \\ &= \left[c \sum_i \alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2 \right] \left[c \sum_j \alpha_j \hat{p}_j + \beta mc^2 \right], \\ &= c^2 \sum_i \sum_j \alpha_i \hat{p}_i \alpha_j \hat{p}_j + mc^2 \sum_i \alpha_i \beta \hat{p}_i + mc^2 \sum_i \beta \alpha_i \hat{p}_i + m^2 c^4 \beta^2, \end{aligned} \quad (4.170)$$

que deve coincidir com o Hamiltoniano de Klein-Gordon, $\hat{H}^2 = c^2 \hat{p}^2 + m^2 c^4 \hat{\mathbb{I}}$. Mas, deve-se reescrever o primeiro termo da equação (4.170) como uma média das multiplicações das matrizes α_i ,

$$\hat{H}^2 = c^2 \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} \hat{p}_i \hat{p}_j + mc^2 \sum_i \alpha_i \beta \hat{p}_i + mc^2 \sum_i \beta \alpha_i \hat{p}_i + m^2 c^4 \beta^2 \quad (4.171)$$

Igualando equação acima ao Hamiltoniano reescrito na forma Matricial,

$$\hat{H}^2 = c^2 \sum_i \sum_j \hat{p}_i \delta_{ij} \hat{p}_j + m^2 c^4 \hat{\mathbb{I}}, \quad (4.172)$$

surtem três condições,

$$\frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} = \delta_{ij}, \quad (4.173)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (4.174)$$

$$\beta^2 = \mathbb{I}. \quad (4.175)$$

Da equação (4.173), para $i = j$,

$$\alpha_i^2 = \mathbb{I}. \quad (4.176)$$

Pelo fato do H ser hermitiano, $H^\dagger = H$, $\vec{\alpha}$ e β também devem ser. Uma das características delas é o traço nulo, e provar essa propriedade é bem simples, está relacionada a natureza de $\vec{\alpha}$. Para isso, multiplica-se a inversa de β pela direita em ambos os lados,

$$\begin{aligned} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \beta^{-1} &= \alpha_i \beta \beta^{-1} + \beta \alpha_i \beta^{-1}, \\ &= \alpha_i + \beta \alpha_i \beta^{-1}. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Aplicando o traço na última equação,

$$\begin{aligned} Tr[\alpha_i + \beta \alpha_i \beta^{-1}] &= Tr[\alpha_i] + Tr[\beta \alpha_i \beta^{-1}], \\ &= Tr[\alpha_i] + Tr[\alpha_i \beta \beta^{-1}], \\ &= Tr[\alpha_i] + Tr[\alpha_i \mathbb{I}], \\ &= Tr[\alpha_i] + Tr[\alpha_i], \end{aligned}$$

ou seja,

$$Tr[\alpha_i] = 0, \quad (4.178)$$

mostrando que as matrizes também são anticomutantes, ou seja, variáveis de Grassmann⁷. A mesma propriedade vale para,

$$Tr[\beta] = 0, \quad (4.179)$$

devido ao fato de que $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$ e $\beta^2 = \mathbb{I}$, quando diagonalizadas, estas apresentariam

⁷Hermann Günther Grassmann, Alemanha (1809 — 1877) foi um físico matemático responsável por estudar álgebras não comutantes.

autovalores ± 1 . Combinando estas propriedades, pode-se mostrar que,

$$\beta = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.180)$$

sendo σ_i , com $i = 1, 2, 3$, as três matrizes de Pauli 2×2 ,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.181)$$

4.5.3 Corrente Fermiônica

Para encontrar a corrente, o procedimento é parecido com o usado para o campo escalar complexo. Multiplicando pela esquerda o conjugado do espinor, ψ^\dagger na equação (4.169), obtêm-se,

$$\begin{aligned} \psi^\dagger [-i\hbar\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2] \psi &= i\hbar\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ -i\hbar\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi + \beta mc^2 \psi^\dagger \psi &= i\hbar\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.182)$$

tomando o conjugado da equação (4.169) e multiplicando pela direita por ψ ,

$$i\hbar\nabla\psi^\dagger \cdot \vec{\alpha}^\dagger\psi + \beta mc^2\psi^\dagger\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi. \quad (4.183)$$

Subtraindo (4.182) de (4.183),

$$i\hbar\nabla \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha}^\dagger \psi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) \implies \nabla \cdot (c\psi^\dagger \vec{\alpha}^\dagger \psi) + \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = 0, \quad (4.184)$$

o que resulta na conhecida equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.185)$$

Da relação acima, é dito que $\vec{J} = c\psi^\dagger \vec{\alpha}^\dagger \psi$ é a corrente fermiônica e $\rho = \psi^\dagger \psi$ a densidade de probabilidade fermiônica. Estas quantidades fazem sentido quando estuda-se soluções dos espinores, associando as grandezas físicas.

4.6 Equação de Dirac Covariante

4.6.1 Construção da Equação

A construção da equação de Dirac covariante será realizada partindo da Hamiltoniana de Dirac, utilizando conceitos de relatividade restrita e das transformações do grupo de Lorentz. Para isso, considera-se a equação (4.169), escrita na forma,

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \nabla - mc^2 \beta \right) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.186)$$

Multiplicando toda equação por β/c , obtêm-se que,

$$\left(\beta i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} + i\hbar \beta \vec{\alpha} \cdot \nabla - mc\beta \right) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.187)$$

Dirac definiu as matrizes na equação acima, que na literatura ficaram conhecidas como matrizes de Dirac, descritas por,

$$\gamma^0 = \beta, \quad (4.188)$$

$$\gamma^i = \beta \alpha^i, \quad \text{com } i = 1, 2, 3. \quad (4.189)$$

Multiplicando-as, tem-se a relação explícita em termos das matrizes de Pauli σ^i ,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.190)$$

Abrindo as submatrizes,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.191)$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.192)$$

É dito então, que as matrizes γ formam um vetor quadri-dimensional,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \quad (4.193)$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i), \quad \text{com, } \mu = 0, 1, 2, 3, \quad \text{e } i = 1, 2, 3. \quad (4.194)$$

Assim, a equação de Dirac pode ser escrita como,

$$i\hbar(\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3)\psi(\vec{r}, t) - mc\psi(\vec{r}, t) = 0,$$

tomando que $x^\mu = (ct, \vec{r})$, na forma compacta ela fica,

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x^\mu) = 0, \quad \text{ou} \quad (\gamma^\mu p_\mu - mc)\psi(x^\mu) = 0. \quad (4.195)$$

Algumas propriedades das matrizes de Dirac podem ser verificadas, usando propriedades das matrizes de Pauli,

$$(\gamma^0)^{-1} = (\gamma^0)^\dagger, \quad (\text{Unitária}), \quad (4.196)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = +\gamma^0, \quad (\text{Hermitiana}), \quad (4.197)$$

$$(\gamma^0)^2 = +\mathbb{I}, \quad (\text{Hermitiana}), \quad (4.198)$$

e,

$$(\gamma^i)^{-1} = (\gamma^i)^\dagger, \quad \text{Unitária}, \quad (4.199)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad \text{Anti-hermitiana}, \quad (4.200)$$

$$(\gamma^i)^2 = -\mathbb{I}, \quad \text{Anti-hermitiana}. \quad (4.201)$$

Tem-se também que,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma^\mu &= \gamma_0\gamma^0 + \gamma_i\gamma^i, \\ &= \gamma_0\gamma^0 + \gamma_1\gamma^1 + \gamma_2\gamma^2 + \gamma_3\gamma^3, \\ &= \mathbb{I} + \mathbb{I} + \mathbb{I} + \mathbb{I}, \\ &= 4\mathbb{I}. \end{aligned} \quad (4.202)$$

Das matrizes α^i e β , tira-se que o traço de todas as matrizes são nulos, ou seja,

$$Tr(\gamma^\mu) = 0, \quad \text{onde } \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.203)$$

Uma outra propriedade interessante é,

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (4.204)$$

Também a propriedade de anticomutação,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad \text{onde } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.205)$$

ou,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad (4.206)$$

que é chamado anticomutador de Clifford, e representa a chamada álgebra de Clifford. Pode-se escrever a equação de Dirac na forma covariante em termos do operador de quadrimomento,

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi &= 0, \\ (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc)\psi &= 0, \\ (\not{p} - mc)\psi &= 0, \end{aligned} \quad (4.207)$$

com $\not{p} = \gamma^\mu \hat{p}_\mu$, chamado de operador “slash” ou corte de Dirac. têm-se algumas relações que são usadas com mais frequência,

$$\begin{aligned} p^2 \mathbb{I} &= \not{p} \not{p} \mathbb{I}, \\ &= \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu, \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu, \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu. \end{aligned} \quad (4.208)$$

Pode-se escrever a equação de Dirac na sua forma conjugada. Para isso, basta aplicar o operador conjugado, representado por \dagger , na equação (4.195), resultando,

$$\psi^\dagger (i\hbar \gamma^{\dagger\mu} \overleftarrow{\partial}_\mu + mc) = 0, \quad (4.209)$$

sendo $\overleftarrow{\partial}_\mu$ a derivada no sentido de operação à esquerda, que atua sobre o espinor ψ^\dagger , ou ainda, $\partial_\mu(\psi^\dagger)(i\hbar \gamma^{\dagger\mu} + mc) = 0$. Esta equação é consistente com o modelo, pois, para se obter objetos quadráticos, é preciso obedecer as propriedades das matrizes de Dirac apresentadas acima. Desta forma, Dirac teve que introduzir uma alternativa

para que houvesse coerência nos resultados, o conjugado de Dirac,

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (4.210)$$

Esse objeto altera a forma da equação (4.209),

$$\bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + mc) = 0. \quad (4.211)$$

Com isso, é possível combinar as equações (4.195) e (4.6.1),

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + mc)\psi + \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi &= \bar{\psi}(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + \gamma^\mu \partial_\mu)\psi, \\ &= \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0, \end{aligned} \quad (4.212)$$

que é justamente a corrente conservada descrita pela equação da continuidade da teoria,

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad (4.213)$$

que explicitamente fica,

$$\begin{aligned} J^0 &= \bar{\psi}\gamma^0\psi, \\ &= \rho, \end{aligned} \quad (4.214)$$

onde $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$, e ainda,

$$\begin{aligned} (\vec{J})^i &= \bar{\psi}\gamma^i\psi, \\ &= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\psi, \\ &= \psi^\dagger\alpha^i\psi, \\ &= (\vec{J})^i, \end{aligned} \quad (4.215)$$

onde $\gamma^0\gamma^i = \alpha^i$. Se considerar o espinor de Dirac 4×1 , em termos de dois espinores 2×1 , do tipo,

$$\psi = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix},$$

tem-se explicitamente,

$$J^0 = \eta^\dagger\eta + \zeta^\dagger\zeta, \quad \text{e} \quad \vec{J} = \eta^\dagger\vec{\sigma}\zeta + \zeta^\dagger\vec{\sigma}\eta,$$

sendo que ρ é sempre positiva.

Uma outra curiosidade que pode-se verificar e usar mais a frente é de que a

equação de Dirac pode ser convertida em Klein-Gordon, mais precisamente, o operador central de Dirac pode ser levado ao de Klein-Gordon. Seja então a multiplicação dos operadores (considerando $c = \hbar = 1$ por um momento),

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{I})(i\gamma^\nu \partial_\nu + m\mathbb{I}) &= i^2 \gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu - im\mathbb{I}\gamma^\nu \partial_\nu + im\mathbb{I}\gamma^\nu \partial_\nu - m^2\mathbb{I} \cdot \mathbb{I}, \\
 &= \gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu - m^2\mathbb{I}, \\
 &= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu + \gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu) - m^2\mathbb{I}, \\
 &= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu - m^2\mathbb{I}, \\
 &= -\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu - m^2\mathbb{I}. \tag{4.216}
 \end{aligned}$$

Usando (4.206), que define o anticomutador de Clifford, obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{I})(i\gamma^\nu \partial_\nu + m\mathbb{I}) &= -\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu - m^2\mathbb{I}, \\
 &= -\mathbb{I}(g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2), \\
 &= -(\square + m^2)\mathbb{I}_{4 \times 4}. \tag{4.217}
 \end{aligned}$$

4.7 Lagrangeano de Dirac e a Eletrodinâmica Espinorial Clássica

4.7.1 Formulação do Lagrangeano

Considerando o Lagrangeano de Dirac para um campo espinorial $\psi(x)$ em 4 dimensões com componentes complexas, descrito por,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc\mathbb{I})\psi(x), \tag{4.218}$$

ou,

$$\mathcal{L} = i\hbar\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - mc\bar{\psi}(x)\psi(x). \tag{4.219}$$

O Lagrangeano (4.219) também pode ser escrito em termos dos índices espinoriais, com $\psi_\alpha(x)$, onde $\alpha = 1, 2, 3, 4$,

$$\mathcal{L} = i\hbar\bar{\psi}_\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \psi_\beta - mc\bar{\psi}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \psi_\beta. \tag{4.220}$$

As equações de Euler-Lagrange para ψ e $\bar{\psi}$ são dadas por,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] = 0, \quad (4.221)$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] = 0 \quad (4.222)$$

produzindo as equações (4.195) e a equação adjunta.

É preciso tomar cuidado na hora de derivar os campos, pois esses são variáveis anticomutantes. Se derivar, por exemplo, os campos em um bilinear do tipo $\bar{\psi}\psi$, é usado a regra de que, se tomado pela esquerda, tem-se que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}}(\bar{\psi}\psi) = \psi, \quad (4.223)$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\bar{\psi}\psi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(-\psi\bar{\psi}) = -\bar{\psi}. \quad (4.224)$$

4.7.2 Invariância de Calibre (“Gauge”) para Eletrodinâmica Espinorial

Inicia-se partindo de transformações feitas sob o Grupo de simetria $U(1)$, que serão vistas sob dois aspectos: transformações de primeiro tipo, ou, transformações globais em que o parâmetro de grupo não tem dependência local, isto é, não tem dependência das coordenadas locais do espaço; o outro será de transformações de segundo tipo, ou locais, tal que o parâmetro, ou o “ângulo” de transformação do grupo, é definido em cada ponto do espaço-tempo, esse é dito ser local. Simetrias do tipo unitária de um parâmetro, como as do grupo $U(1)$, são chamadas de simetrias Abelianas. Logo, esse grupo também é dito ser Abelianano.

Considerando o Lagrangeano de Dirac descrito pela equação (4.219), aqui visto sem fontes,

$$\mathcal{L} = i\hbar\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - mc\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (4.225)$$

e sendo γ^μ a matriz de Dirac 4×4 , na representação de Dirac. Considerando também uma matriz transformação U , que pode ser escrita em forma exponencial de um parâmetro, ou “ângulo” de transformação, como prevê a álgebra de Lie para grupos finitamente gerados,

$$U = e^{i\theta}, \quad (4.226)$$

com $U^\dagger U = 1$.

Transformações de 1° Tipo: Considerando uma transformação sobre um espinor, tal que esta leve, através de um parâmetro de transformação, esse espinor ψ em um outro espinor ψ' ,

$$\psi \longrightarrow \psi' = U\psi \quad \text{e} \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}U, \quad (4.227)$$

com $U^\dagger U = 1$, e aqui o parâmetro é dito global, $\theta = cte$, não dependente das coordenadas do espaço-tempo. O Lagrangeano transformado possui a forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\hbar\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) - mc\bar{\psi}'(x)\psi'(x), \\ &= i\hbar\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu[U\psi(x)] - mc\bar{\psi}(x)U^\dagger U\psi(x). \end{aligned} \quad (4.228)$$

O termo da derivada é descrito por,

$$\partial_\mu\psi'(x) = \partial_\mu(U\psi(x)) = (\partial_\mu U)\psi(x) + U(\partial_\mu\psi(x)), \quad (4.229)$$

onde tem-se que $\partial_\mu U = \partial_\mu(e^{i\theta}) = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta} = 0$. Desse, tira-se que,

$$\mathcal{L}' = i\hbar\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu U\partial_\mu\psi(x) - mc\bar{\psi}(x)U^\dagger U\psi(x), \quad (4.230)$$

$$= i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - mc\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (4.231)$$

com $U^\dagger\gamma^\mu U = \gamma^\mu$, e $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ ou $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0$, que mostra que o Lagrangeano de Dirac é invariante sob transformações de Primeiro tipo, ou globais.

Transformações de 2° Tipo: Nessa transformação, será explorado o porquê da necessidade de se introduzir uma derivada covariante, ou melhor, o papel do campo de gauge vetorial, como solução da não invariância de gauge para o caso local. Seja então a mesma transformação descrita no caso anterior, apenas com o fato de o parâmetro, ou “ângulo” de transformação, sendo dependente das coordenadas do espaço-tempo, isto é, $\theta = \theta(x^\mu)$. Assim, a transformação (4.226) assume a forma,

$$U = e^{i\theta(x^\mu)}, \quad (4.232)$$

e o Lagrangeano,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\hbar\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) - mc\bar{\psi}'(x)\psi'(x), \\ &= i\hbar\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu[U\psi(x)] - mc\bar{\psi}(x)U^\dagger U\psi(x), \\ &= i\hbar\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu[U\psi(x)] - mc\bar{\psi}(x)\psi(x), \\ &= i\hbar\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu[(\partial_\mu U)\psi(x) + U(\partial_\mu\psi(x))] - mc\bar{\psi}(x)\psi(x), \end{aligned}$$

onde, substituindo a transformação (4.232), tem-se que,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= i\hbar\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu[(\partial_\mu e^{i\theta(x^\mu)})\psi(x) + e^{i\theta(x^\mu)}(\partial_\mu\psi(x))] - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \\
 &= i\hbar\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu U\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + i\bar{\psi}(x)U^\dagger\gamma^\mu U\psi(x)[\partial_\mu i\theta(x^\mu)], \\
 &= \mathcal{L} + \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)[\partial_\mu\theta(x^\mu)],
 \end{aligned} \tag{4.233}$$

isto é, o Lagrangeano possui um termo que altera a sua forma original,

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)[\partial_\mu\theta(x^\mu)]. \tag{4.234}$$

Portanto, esse deve ser compensado de modo que não sobre nenhum valor, e o Lagrangeano seja invariante. Pensando nisso, propõe-se um acoplamento com o campo de gauge A_μ , pois esse transforma-se de forma igual localmente, $\delta A^\mu = \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)[\partial_\mu\theta(x^\mu)], \\
 &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\delta A^\mu.
 \end{aligned} \tag{4.235}$$

Introduzindo um novo termo ao Lagrangeano, que acopla os campos espinoriais ao campo de gauge,

$$\mathcal{L}_J = +e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu, \tag{4.236}$$

onde esse é o termo da corrente de gauge $J^\mu = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, chamado também de corrente elétrica. Portanto, subtraindo esse mesmo termo do Lagrangeano principal, têm-se agora um Lagrangeano invariante,

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - \mathcal{L}_J. \tag{4.237}$$

A forma que esse Lagrangeno toma, deve-se o fato de que a interação entre os elétrons é mediada por fótons, que são partículas descritas pelo campo de gauge A^μ . Pode-se escrever esse Lagrangeano sob o formato “aberto”. É imprescindível a presença do termo de Maxwell descrito pela equação (1.82), que é invariante frente ao grupo $U(1)$, esse serve para completar a descrição de interação entre elétrons e fótons, tal que esse formato “aberto” será,

$$\mathcal{L}_T = i\hbar\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - mc\bar{\psi}(x)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.238}$$

Também pode-se escrever o Lagrangeano acima introduzindo uma derivada covari-

ante, que simplesmente agupa o primeiro e o terceiro termo, resultando,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T &= i\hbar\bar{\psi}(x)\gamma^\mu[\partial_\mu\psi(x) + ie\psi(x)A_\mu] - mc\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \\ &= i\hbar\bar{\psi}(x)\gamma^\mu[\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu]\psi(x) - mc\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Portanto, o Lagrangeano da Eletrodinâmica Espinorial assume a forma,

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\hbar\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - mc\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (4.239)$$

com,

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu, \quad (4.240)$$

onde o termo $i\frac{e}{\hbar}A_\mu$ é conhecido como conexão afim. A transformação para derivada covariante tem a forma,

$$\delta(D_\mu\psi(x)) \rightarrow U(D_\mu\psi(x)). \quad (4.241)$$

Quando introduz-se a derivada covariante, tem-se em mente que esta é que será a derivada padrão do espaço em questão; Envolvendo, é claro, as transformações de simetrias locais do grupo em questão.

4.7.3 Parâmetro de Calibre Infinitesimal

Pode-se descrever as transformações de calibre quando o parâmetro real $\theta(x)$ é infinitesimal, onde redefine-se sua forma para $\varepsilon(x)$. As transformações acabam assumindo a forma,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= e^{-i\varepsilon(x)}\psi(x), \\ &= (1 - i\varepsilon(x) + \mathcal{O}(\varepsilon(x)^2))\psi(x), \\ &\approx (1 - i\varepsilon(x))\psi(x), \\ &\approx \psi(x) - i\varepsilon(x)\psi(x),\end{aligned} \quad (4.242)$$

ou,

$$\psi'(x) - \psi(x) = -i\varepsilon(x)\psi(x) \quad \rightarrow \quad \delta\psi(x) = -i\varepsilon(x)\psi(x), \quad (4.243)$$

e também,

$$\bar{\psi}'(x) - \bar{\psi}(x) = -i\varepsilon(x)\bar{\psi}(x) \quad \rightarrow \quad \delta\bar{\psi}(x) = +i\varepsilon(x)\bar{\psi}(x). \quad (4.244)$$

Tem-se que,

$$\delta(\partial_\mu\psi(x)) = \partial_\mu(\delta\psi(x)) = +i[\partial_\mu\varepsilon(x), +\varepsilon(x)\partial_\mu]\psi(x) \quad (4.245)$$

que implica na necessidade da introdução de uma derivada covariante, que se transforma como,

$$\delta(D_\mu\psi(x)) = -i + \varepsilon(x)D_\mu\psi(x) \quad (4.246)$$

sendo esta (4.240), vindo da eletrodinâmica clássica,

$$\delta A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\varepsilon(x), \quad (4.247)$$

dando como resultado a Lagrangeana (4.239).

Esta construção infinitesimal é utilizada no estudo de simetrias de calibre não abelianas.

Bibliografia

- [1] Tonks, L.; Langmuir, I. Oscillations in Ionized Gases. *Phys. Rev.* **1929**, *33*, 195–210.
- [2] Bittencourt, J. *Fundamentals of Plasma Physics*; Springer New York, 2013.
- [3] Cercignani, C.; Kremer, G. *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*; Progress in Mathematical Physics; Birkhäuser Basel, 2002.
- [4] Uehling, E. A.; Uhlenbeck, G. E. Transport Phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac Gases. I. *Phys. Rev.* **1933**, *43*, 552–561.
- [5] De Groot, S. In *Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications*; Van Leeuwen, W., Van Weert, C., Eds.; 1980.
- [6] Cohen-Tannoudji, C.; Diu, B.; Laloe, F. *Quantum Mechanics, 2 Volume Set*; Wiley, 1992.
- [7] Griffiths, D. *Introduction to Quantum Mechanics*; Pearson international edition; Pearson Prentice Hall, 2005.
- [8] Arfken, G. B.; Weber, H. J.; Harris, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*; Academic press, 2011.
- [9] Butkov, E. *Física matemática*; Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [10] Neto, J. B. *Matemática para Físicos com Aplicações - VOL.1 Vetores, Tensores e Spinors*; Editora Livraria da Física, 2010.
- [11] Krane, K. *Introductory Nuclear Physics*; Wiley, 1987.
- [12] Griffiths, D. *Introduction to Elementary Particles*; Physics textbook; Wiley, 2008.
- [13] Gavin, S. TRANSPORT COEFFICIENTS IN ULTRARELATIVISTIC HEAVY ION COLLISIONS. *Nucl. Phys. A* **1985**, *435*, 826–843.

- [14] Arnold, P.; Moore, G. D.; Yaffe, L. G. Transport coefficients in high temperature gauge theories, 2. Beyond leading log. *Journal of High Energy Physics* **2003**, *2003*, 051–051.
- [15] Heiselberg, H.; Baym, G.; Pethick, C.; Popp, J. Transport coefficients of relativistic plasmas. *Nucl. Phys. A* **1992**, *544*, 569C–572C.
- [16] von Oertzen, D. W. Transport coefficients in quantum chromodynamics. *Phys. Lett. B* **1992**, *280*, 103–108.
- [17] Ahonen, J.; Enqvist, K. Electrical conductivity in the early universe. *Phys. Lett. B* **1996**, *382*, 40–44.
- [18] Ahonen, J. Transport coefficients in the early universe. *Phys. Rev. D* **1999**, *59*, 023004.
- [19] Ryder, L. H. *Introduction to general relativity*; Cambridge University Press, 2009.
- [20] Stewart, J. Cálculo. 6a edição. São Paulo: Cengage Learning **2011**, v2.
- [21] Griffiths, D. J. Electrodynamics. *Introduction to Electrodynamics, 3rd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey **1999**, 301–306.
- [22] Landau, L.; Lifshitz, E. *Fluid Mechanics*; Elsevier Science, 2013.
- [23] Fox, R.; McDonald, A.; Pritchard, P. *Introdução à mecânica dos fluidos*; LTC, 2006.
- [24] Griffiths, D. J. *Introduction to quantum mechanics*; Cambridge University Press, 2016.
- [25] Cohen-Tannoudji, C.; Diu, B.; Laloe, F. *Quantum Mechanics*; Quantum Mechanics v. 1; Wiley, 1991.
- [26] Eisberg, R.; Resnick, R. Física Quântica (Editora Campus Ltda., Rio de Janeiro, 1979), translated from Quantum Physics. 1974.
- [27] Greiner, W. *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [28] Das, A. *Lectures on Quantum Field Theory*; World Scientific, 2008.

- [29] Peskin, M. E.; Schroeder, D. V. *An introduction to quantum field theory*; Westview: Boulder, CO, 1995; Includes exercises.
- [30] Lancaster, T.; Blundell, S.; Blundell, S. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*; OUP Oxford, 2014.
- [31] Lahiri, A.; Pal, P. *A First Book of Quantum Field Theory*; Alpha Science International, 2005.
- [32] Ryder, L. H. *Quantum field theory*, 2nd ed.; Cambridge University Press, 1996.
- [33] Reitz, J. R.; Milford, F. J.; Christy, R. W. *Foundations of Electromagnetic Theory (4th Edition)*, 4th ed.; Addison-Wesley Publishing Company: USA, 2008.
- [34] Sakurai, J. *Advanced Quantum Mechanics*; Always learning; Pearson Education, Incorporated, 1967.
- [35] Bassalo, J. M. F. *Teoria de Grupos*; Editora Livraria da Física, 2008.
- [36] Weinberg, S.; S, W.; de campos, T. *The Quantum Theory of Fields*; Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern Applications v. 1; Cambridge University Press, 1995.
- [37] Sobol, O. Electrical conductivity of hot Abelian plasma with scalar charge carriers. *Physical Review D* **2019**, *100*.
- [38] Natsuume, M. *AdS/CFT Duality User Guide*; Lecture Notes in Physics; Springer Japan, 2015.
- [39] Lifshitz, E.; Pitaevskii, L. *Physical Kinetics: Volume 10*; Course of theoretical physics; Elsevier Science, 1995.
- [40] Goldston, R. *Introduction to Plasma Physics*; CRC Press, 2020.
- [41] Mohamad, A. *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*; SpringerLink : Bücher; Springer London, 2011.
- [42] Thomson, M. *Modern Particle Physics*; Modern Particle Physics; Cambridge University Press, 2013.
- [43] Soto, R. *Kinetic Theory and Transport Phenomena*; Oxford master series in condensed matter physics; Oxford University Press, 2016.

- [44] Haas, F. An Introduction to Quantum Plasmas. *Brazilian Journal of Physics* **2011**, *41*, 349.
- [45] Kremer, G. *An Introduction to the Boltzmann Equation and Transport Processes in Gases*; Interaction of Mechanics and Mathematics; Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [46] Miguel, E.; Mischler, S.; Valle, M. Homogeneous Boltzmann equation in quantum relativistic kinetic theory. *Electronic Journal of Differential Equations* **2003**, *Monographs*.
- [47] Mendonca, J.; Serbeto, A. Volkov solutions for relativistic quantum plasmas. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* **2011**, *83*, 026406.
- [48] Thoma, M. H. Colloquium: Field theoretic description of ultrarelativistic electron-positron plasmas. *Reviews of Modern Physics* **2009**, *81*, 959–968.
- [49] Chen, F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*; Springer International Publishing, 2015.
- [50] Gavin, S. Transport coefficients in ultra-relativistic heavy-ion collisions. *Nuclear Physics A* **1985**, *435*, 826 – 843.
- [51] Jeon, S.; Yaffe, L. G. From quantum field theory to hydrodynamics: Transport coefficients and effective kinetic theory. *Physical Review D* **1996**, *53*, 5799–5809.
- [52] Hosoya, A.; aki Sakagami, M.; Takao, M. Nonequilibrium thermodynamics in field theory: Transport coefficients. *Annals of Physics* **1984**, *154*, 229 – 252.