

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
Centro de Ciências Exatas - CCE
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFIS

WESLLEN HAMMET RUPF FERREIRA

O ESTUDO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NO ESPAÇO
CURVO NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

VITÓRIA

2020

WESLLEN HAMMET RUPF FERREIRA

**O ESTUDO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NO ESPAÇO
CURVO NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich Junior

Coorientador: Prof. Dr. Wesley Spalenza

VITÓRIA

2020

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

F383e Ferreira, Wesllen Hammet Rupf, 1992-
O Estudo da Equação de Dirac no Espaço Curvo na Métrica de Schwarzschild / Wesllen Hammet Rupf Ferreira. - 2020.
152 f. : il.

Orientador: Humberto Belich Junior.
Coorientador: Wesley Spalenza.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Relatividade geral. 2. Dirac, Equação de. 3. Campos de calibre. I. Belich Junior, Humberto. II. Spalenza, Wesley. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

"O estudo da equação de Dirac no espaço curvo na métrica de Schwarzschild"

WESLLEN HAMMET RUPF FERREIRA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por webconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.
Aprovada por:

Prof. Dr. José Abdalla Helayel Neto
(CBPF)

Prof. Dr. Humberto Belich Junior
(Orientador/PPGFis)

Prof. Dr. Wesley Spalenza
(Coorientador/ IFES-Cariacica)

Prof. Dr. Gabriel Luchini Martins
(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 30 de outubro de 2020.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
HUMBERTO BELICH JUNIOR - SIAPE 1509380
Departamento de Física - DF/CCE
Em 04/11/2020 às 10:58

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/88806?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
GABRIEL LUCHINI MARTINS - SIAPE 1031817
Departamento de Física - DF/CCE
Em 05/11/2020 às 09:01

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/89357?tipoArquivo=O>

Agradecimentos

À minha família que me deu apoio para que eu pudesse chegar até onde cheguei.

Aos meus professores, que me deram a oportunidade de desenvolver minhas capacidades, sempre me desafiando e instigando minha curiosidade.

Aos meus orientador e coorientador, Humberto e Wesley, por acreditarem em mim e me motivarem a seguir em frente no trabalho.

E à Naraline. Obrigado pelo carinho, paciência e por sua imensa ajuda nos momentos de dificuldade. Agradeço também à sua família pelo apoio e acolhimento.

Resumo

Este trabalho apresenta o estudo dos motivos da necessidade da introdução da gravitação, a Relatividade Geral, cujo fundamento baseia-se na Geometria Diferencial, em conjunto com teorias que descrevem matéria. Vamos estabelecer os objetos dessa geometria e construir a equação de Einstein obtendo então um resultado desta equação que é a métrica do espaço-tempo de Schwarzschild. Com isso, vamos buscar meios, por intermédio das teorias de calibre, para descrever o spin de partículas de matéria no espaço curvo e com isso descrever uma partícula de Dirac nessa métrica.

Palavras chave: Relatividade Geral, Schwarzschild, Dirac, Teoria de Calibre.

Abstract

This work presents the study of the reasons for the need for the introduction of gravitation, General Relativity, whose foundation is based on Differential Geometry, together with theories that describe matter. We are going to establish the objects of this geometry and build the Einstein equation, then obtaining a result of this equation, which is the Schwarzschild space-time metric. With that we will look for ways through the gauge theories to describe the spin in the curved space and to describe a Dirac particle in that metric.

Keywords: General Relativity, Schwarzschild, Dirac, Gauge Theory.

Lista de Figuras

1.1	Caixa de Einstein. Comparação entre um campo gravitacional homogêneo e um referencial acelerado.	18
1.2	Duas esferas de materiais diferentes pendendo em uma balança. As acelerações $\vec{\mathbf{a}}_{Au}$ e $\vec{\mathbf{a}}_{Al}$ são das esferas em direção ao Sol. ω é a velocidade de rotação da Terra e ω_1 e ω_2 as velocidades angulares da balança em diferentes horários.	20
1.3	Dois corpos de teste caindo livremente em direção ao centro da Terra.	22
1.4	Movimento da luz de um lado a outro em uma caixa no espaço livre, e em uma caixa acelerada.	23
2.1	Homeomorfismo de um ponto P de uma variedade M para um espaço em \mathbb{R}^m	28
2.2	Difeomorfismo $\phi \circ f \circ \varphi$ de um ponto P na variedade M a um ponto na variedade N	29
2.3	Homeomorfismo de uma curva $c(\lambda)$, dentro de um aberto U em M , para \mathbb{R}^m , gerando um vetor tangente a esta curva no ponto $\lambda = 0$. . .	30
2.4	Vetores da base tangente contidos num plano tangente $T_P M$ à superfície da esfera.	32
2.5	Vetor $\vec{\mathbf{v}}_f$ transportado paralelamente num plano por ABCDA é o mesmo que o vetor $\vec{\mathbf{v}}_i$ sem ser transportado.	57

2.6	Vetor \vec{v}_f transportado paralelamente na superfície de uma esfera por ABCDA aponta no sentido oposto de seu sentido original \vec{v}_i sem ser transportado.	58
2.7	Um campo vetorial $V(x)$ deslocado para um ponto em $x + dx$ pode ser descrito por um vetor W transportado paralelamente em um espaço plano (esquerda). Dois vetores \vec{V} e \vec{W} paralelos, na origem possuem mesmas componentes em coordenadas cartesianas mas componentes distintas em coordenadas polares (direita).	59
2.8	O campo vetorial $V + dV$ transportado paralelamente em um espaço curvo até o ponto $x + dx$ não é paralelo à V mas $V + \delta V$ o é.	61
3.1	Curva parametrizada entre os pontos P e Q (esquerda) e esta mesma curva deformada mas com os pontos P e Q fixos (direita).	81
3.2	Região Ω do espaço-tempo onde na superfície $\partial\Omega$ a deformação da métrica não existe.	115

Sumário

Agradecimentos	6
Resumo	7
Abstract	8
Lista de Figuras	9
1 Introdução	13
2 Uma Revisão de Geometria Diferencial	26
2.1 Vetores e Campos Vetoriais	28
2.2 1-Formas	34
2.3 Regras de Transformação	38
2.4 Tensores	40
2.5 Álgebra Tensorial	41
2.5.1 Transformações de Coordenadas	41
2.5.2 Simetria e Antissimetria	41
2.5.3 Operações Fundamentais	42
2.6 Tensor Métrico	44
2.7 Bases Holonômicas e Não-Holonômicas	49
2.8 Formas Diferenciais	53
2.9 Transporte Paralelo e Diferenciação Absoluta	57

2.9.1	Derivada Covariante da Métrica	68
2.10	Torção e Curvatura	72
2.11	Fórmula Geral dos Coeficientes de Conexão	76
3	Relatividade de Einstein e Solução de Schwarzschild	79
3.1	Geodésicas	80
3.2	Coordenadas Geodésicas	83
3.3	Tensor de Riemann e Curvatura	87
3.4	Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura	90
3.5	Tensor de Einstein	93
3.6	Tensor Momento-Energia para Fluidos	94
3.6.1	Fluido Relativístico e o Tensor Momento-Energia	97
3.7	Equação de Campo de Einstein - Acoplamento com a matéria	101
3.8	Ação Gravitacional de Einstein-Hilbert	109
3.9	Solução de Schwarzschild	117
4	Equação de Dirac com uma Solução de Schwarzschild	123
4.1	A Eletrodinâmica como uma Teoria de Calibre Abelianas	124
4.2	Teoria de Calibre Não-abeliana	132
4.3	Simetria de Calibre de Lorentz: torção	141
4.4	Equação de Dirac no espaço-tempo de Schwarzschild	147
5	Conclusão	152
	Bibliografia	154

Capítulo 1

Introdução

Uma das teorias mais bem sucedidas na Física é, sem dúvida, a Teoria Eletromagnética, que teve seu ápice entre 1861 e 1862 quando foram publicadas as equações de Maxwell no artigo "On Physical Lines of Force" [1], por James Clerk Maxwell. Neste artigo, Maxwell publicara sua descoberta sobre as ondas eletromagnéticas se moverem a uma velocidade constante, velocidade esta que mais tarde se descobriu ser a velocidade da luz. Todavia, essas equações não mantinham sua invariância, sua linearidade quanto à transformação de coordenadas entre sistemas de referência em movimento relativo entre si. Estas transformações conhecidas e utilizadas na época eram as transformações de Galileu, baseadas no princípio da relatividade galileana¹ e que funcionavam perfeitamente na Mecânica.

Em 1892 e 1895, Hendrik Antoon Lorentz publicou, respectivamente, os artigos "La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants" [3] e "Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" [4] no qual mostrava seu trabalho na descrição de fenômenos eletromagnéticos em sistemas de referência se movendo relativamente ao *éter luminífero*, que fora postulado. Este éter seria o meio no qual a luz se propagava com velocidade

¹Este princípio afirma que nenhum experimento mecânico, realizado inteiramente em um sistema inercial, pode dizer ao observador qual é o movimento daquele sistema em relação a qualquer outro sistema inercial [2], portanto não existe um referencial privilegiado em que isto aconteça.

constante $c \approx 2,98.10^8 \text{ m s}^{-1}$ (naquela época não se aceitava que uma onda pudesse se propagar no vácuo). Em 1904, Lorentz publicou o artigo "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light" [5] que continha as chamadas *transformações de Lorentz*: transformações nas quais o eletromagnetismo se mantinha invariante. Destas, dois fenômenos surgiam, a contração espacial e a dilatação temporal, mas a nenhum havia sido dada interpretação física por parte de Lorentz.

A existência do éter indicaria a existência de um sistema de referências privilegiado, no qual as equações de Maxwell seriam invariantes às transformações de Lorentz, mas não seriam invariantes as equações da Mecânica. Se este fosse o caso, a isotropia do universo seria uma inverdade². Ambas as teorias, Eletromagnética e Mecânica, eram muito bem embasadas e descreviam seus respectivos fenômenos com precisão. No entanto, experimentos como o de Michelson-Morley [6] nunca foram capazes de detectar o éter.

Foi em 1905 que Albert Einstein publicou sua teoria, atualmente conhecida como teoria da Relatividade Especial (ou Relatividade Restrita), no artigo "On the electrodynamics of moving bodies" [7] no qual usava conceitos, ferramentas matemáticas e resultados já discutidos por Lorentz, porém dava significado físico aos fenômenos de dilatação temporal e de contração espacial e a conceitos como o tempo próprio. Esta era uma teoria mais geral para a Mecânica Clássica, que viria a ser chamada posteriormente de Mecânica Relativística³. Em 1907 Hermann Minkowski, que havia sido professor de Einstein, percebeu que essa teoria poderia ser melhor compreendida em um espaço quadridimensional no qual espaço e tempo seriam não mais duas

²A isotropia é uma propriedade de linearidade e homogeneidade. Ela garante que as leis da Física são as mesmas em qualquer lugar do universo. Por exemplo, se uma barra rígida é medida na Terra e tem $2m$ de comprimento, em qualquer outro lugar e sob as mesmas condições, ela deve medir o mesmo comprimento. Se em outra galáxia esta mesma barra tivesse $4m$ de comprimento, isto significaria que o universo não é isotrópico e as leis da Física deveriam ser reformuladas nesta localidade.

³Apesar de ainda ser útil para descrever fenômenos que ocorrem a baixas velocidades em comparação com a velocidade da luz, a Mecânica Clássica está incompleta e precisa ser reformulada em termos da Mecânica Relativística.

entidades distintas mas sim uma só: o espaço-tempo. Anos mais tarde, mais precisamente em 1915⁴, Einstein publicaria sua nova teoria da Relatividade Geral, uma teoria geométrica da gravitação. Mas por que uma nova teoria da gravitação era necessária?

A Lei da Gravitação de Newton é uma teoria usada com sucesso para calcular o movimento de planetas. Porém a mesma é incompatível com a Relatividade Especial, pois não leva em consideração o tempo na interação entre os corpos. A lei de Newton é

$$\vec{\mathbf{F}}(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.1)$$

onde G é a constante gravitacional, M e m a massa de dois corpos distintos (não necessariamente massas pontuais) e r a distância entre seus centros de massa. O vetor $\hat{\mathbf{r}}$ aponta de M na direção de m . Suponhamos então que M dependa do tempo

$$\vec{\mathbf{F}}(r, t) = -G \frac{M(t)m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.2)$$

a força sentida por m em um dado tempo t dependeria do valor da massa M no mesmo instante t . E, independente da distância, essa força seria sentida por m instantaneamente.

A teoria da Relatividade Restrita requer o uso de tempo retardado de modo semelhante aos potenciais retardados no Eletromagnetismo. Para satisfazer a equação acima em conformidade com a Relatividade Especial, $M(t)$ teria que ser reescrita como $M(t - r/c)$. Assim a força sentida pela massa m no tempo t dependeria do valor da massa M em um tempo anterior $t - r/c$, assumindo que a informação gravitacional viaje à velocidade da luz c .

A equação (1.2) no entanto não é a lei de Newton para a gravitação, pois esta não assume *atraso de tempo* e implica que a informação que a massa M está mu-

⁴Pode ser encontrada no livro "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation" [8].

dando viaje com velocidade infinita, sendo sentido instantaneamente por m . Como a Relatividade Especial postula que nada pode viajar com velocidade maior que c , as equações (1.1) e (1.2) são incompatíveis.

Vamos levantar algumas considerações. Paralelamente à Eletrostática em que o campo elétrico é descrito como $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}/q$, podemos definir para a gravitação o campo gravitacional como

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m}, \quad (1.3)$$

sendo a massa m a "fonte" do campo gravitacional, analogamente à carga q ser a fonte do campo elétrico. Assim a equação (1.1) pode ser escrita como

$$\vec{\mathbf{g}}(r) = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad (1.4)$$

que é uma equação com uma característica interessante, pois o lado direito é um gradiente como podemos perceber a partir da identidade

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1.5)$$

e assim temos

$$\vec{\mathbf{g}} = -\nabla\phi \quad , \quad \phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (1.6)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional, um campo escalar. Com isto, a teoria da gravitação de Newton pode ser enunciada simplesmente por uma função. A massa, ou distribuição de massa, dá origem a um potencial gravitacional escalar, que determina o campo gravitacional. Diz-se que o potencial ϕ satisfaz *equações de campo*. Uma delas é a equação de Laplace para o vácuo

$$\nabla^2\phi(r) = 0, \quad (1.7)$$

e a outra, a equação de Poisson para uma densidade de matéria $\rho(r)$,

$$\nabla^2\phi(r) = 4\pi G\rho(r). \quad (1.8)$$

Percebe-se então a necessidade de uma nova teoria da gravitação, mas que de alguma forma, em algum limite, contenha a lei de Newton da gravitação, dado seu sucesso e capacidade de descrição de vários fenômenos mecânicos. O campo \vec{g} depende de r mas não de t , de modo que tal campo é incompatível com a Relatividade Especial. Um campo apropriado deve ser invariante de Lorentz (invariante às transformações de Lorentz) e depender tanto do espaço \vec{r} quanto do tempo t , ou seja, ter uma descrição quadridimensional. Como a teoria de Newton é inconsistente com a Relatividade Restrita, ela deve ser abandonada.

Um resultado importante foi obtido por Galileu (1564-1642) através de seus experimentos com esferas rolando em rampas: todos os corpos, independentemente de suas massas, atingem o chão ao mesmo tempo se soltas da mesma altura (e se desprezando a resistência do ar) em queda livre. Ele obteve este resultado fazendo com que esferas rolassem em uma rampa com certa inclinação e medindo o tempo que estas demoravam a atingir o solo com um relógio d'água. Extrapolando esta inclinação até o caso limite onde o ângulo entre a rampa e o chão ficassem perpendiculares temos a queda livre. Galileu observou várias esferas diferentes e concluiu que, em queda livre, *todos os corpos caem ao mesmo tempo em um campo gravitacional*.

Para investigar melhor o fenômeno, vamos utilizar o experimento mental conhecido como "caixa de Einstein" (figura 1.1). Considere uma caixa posicionada em um campo gravitacional \vec{g} homogêneo na superfície da Terra. Sejam dois corpos de teste de mesma proporção mas de materiais distintos, portanto de densidades distintas, e massas diferentes. Soltando-os no interior da caixa da mesma altura, observamos que ambos atingem o chão ao mesmo tempo, como Galileu já havia observado. Agora se considerarmos esta caixa em um espaço livre da ação de qualquer campo gravitaci-

onal , ao soltarmos os corpos ambos permanecerão no mesmo lugar, de acordo com a Lei da Inércia. Se a caixa for sujeita a uma aceleração \vec{a} na direção dos corpos de teste, é de se esperar que ambos atinjam o chão da caixa ao mesmo tempo, pois estão em repouso e é a caixa que se move em sua direção. Portanto um observador dentro da caixa sempre obterá o mesmo resultado, quer a caixa esteja imersa em um campo gravitacional ou sendo acelerada. Isto é, *o observador não conseguirá distinguir se está em um campo gravitacional ou em um referencial acelerado.*

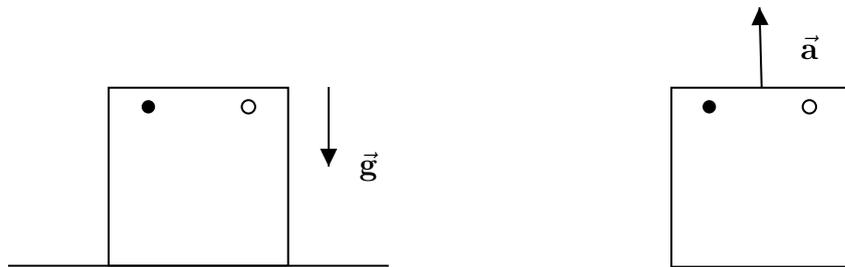


Figura 1.1 – Caixa de Einstein. Comparação entre um campo gravitacional homogêneo e um referencial acelerado.

Por conta desse resultado, podemos concluir que um campo gravitacional é de alguma forma equivalente a um referencial acelerado e qualquer experimento em Mecânica será incapaz de determinar entre um e outro. Este fato é conhecido como o Princípio de Equivalência. Colocando de forma mais geral:

"Nenhum experimento feito em Mecânica pode distinguir entre um campo gravitacional e um referencial acelerado."

Vamos analisar as consequências desse resultado. De acordo com a segunda Lei de Newton, para uma partícula ser acelerada uma força

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad (1.9)$$

deve ser aplicada, onde m_i é a *massa inercial* da partícula e, de acordo com a primeira Lei, a necessidade de aplicação de uma força para acelerar a partícula se deve a sua inércia. Agora vamos considerar uma partícula caindo em um campo gravitacional,

conforme as equações (1.1) e (1.4) esta sentirá uma força

$$\vec{\mathbf{F}} = m_g \vec{\mathbf{g}}, \quad (1.10)$$

onde m_g é a *massa gravitacional* da partícula que mede a resposta desta em um campo gravitacional. É importante constatar que conceitualmente a massa inercial e a massa gravitacional são completamente distintas. Considerando novamente o experimento da caixa de Einstein, para uma partícula caindo em queda livre em um campo gravitacional ambas as equações acima são aplicadas; a partícula no campo gravitacional vai experimentar uma força como na equação (1.10) e portanto será acelerada de acordo com a equação (1.9). Assim temos que

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{m_g}{m_i} \vec{\mathbf{g}}, \quad (1.11)$$

isto é, a aceleração da partícula em um campo gravitacional depende da razão entre as massas gravitacional e inercial. Os experimentos de Galileu implicam que esta razão é a mesma para todo e qualquer material. Sem perda de generalidade podemos colocar $m_g = m_i$; isto pode ser feito pois na equação (1.4) incluímos a constante gravitacional G de modo que m_g/m_i pode ser definido como unitário. Concluimos que o Princípio de Equivalência nos permite assumir que

$$m_g = m_i, \quad (1.12)$$

ambas as massas são equivalentes para todos os materiais.

Podemos testar a constância de $\frac{m_g}{m_i}$ usando a atração gravitacional do Sol, cuja posição relativa à Terra varia num período de 24h. Vamos considerar duas esferas, uma de ouro (Au) e outra de alumínio (Al), pendendo em extremidades opostas de uma barra de comprimento $2l$ suspensa por um fio em sua metade no campo gravitacional terrestre, e esta balança é colocada no Pólo Norte da Terra conforme a

figura (1.2).

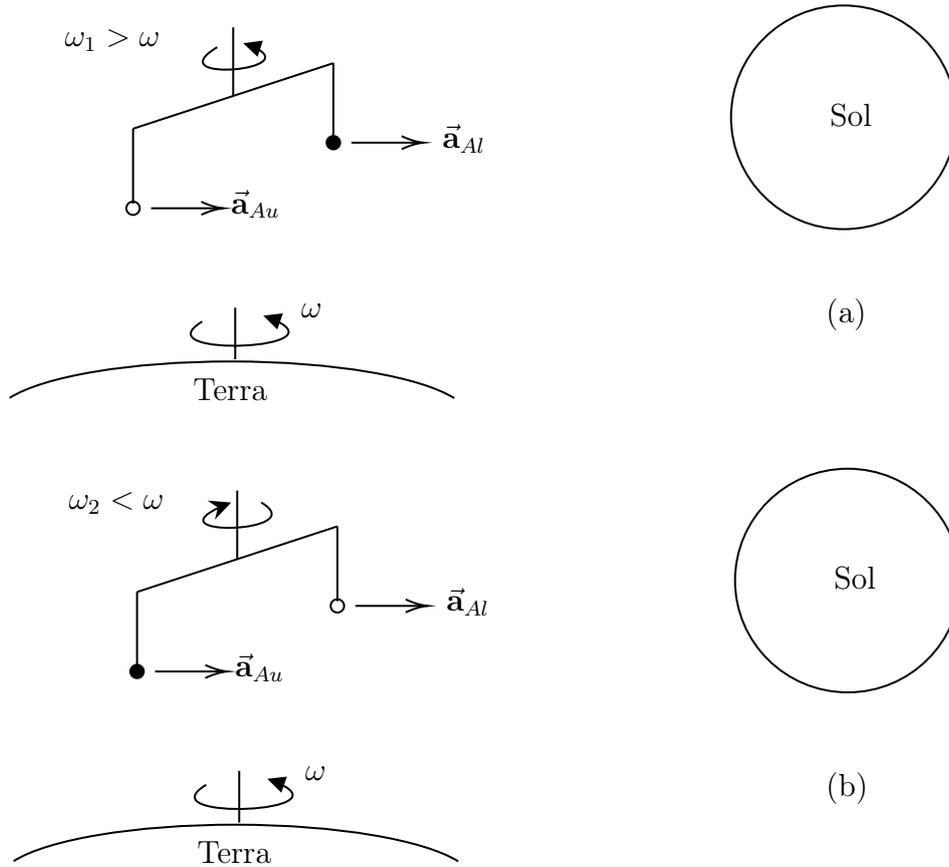


Figura 1.2 – Duas esferas de materiais diferentes pendendo em uma balança. As acelerações \vec{a}_{Au} e \vec{a}_{Al} são das esferas em direção ao Sol. ω é a velocidade de rotação da Terra e ω_1 e ω_2 as velocidades angulares da balança em diferentes horários.

A força exercida pelo Sol, de massa M e uma distância r , nas esfera de ouro é

$$\vec{F}_{Au} = \frac{GM(m_g)_{Au}}{r^2}, \quad (1.13)$$

de modo que a aceleração da esfera na direção do Sol é

$$\vec{a}_{Au} = \frac{GM}{r^2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_{Au}, \quad (1.14)$$

e o mesmo acontece com a esfera de alumínio, resultando em equações semelhantes

às anteriores. Se considerarmos

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 + \delta, \quad (1.15)$$

e que $\delta_{Au} \neq \delta_{Al}$, um torque resultante será exercido na balança, de magnitude

$$T = \frac{GMl}{r^2} [(m_g)_{Au} - (m_g)_{Al}], \quad (1.16)$$

que resulta em uma aceleração angular dada por $T = I\alpha$ sendo I o momento de inércia da barra $I = m_i l^2$. Assim, em certo horário no período da manhã, temos:

$$(\alpha)_{\text{manhã}} = \frac{GM}{lr^2} \Delta, \quad (1.17)$$

onde $\Delta = \delta_{Au} - \delta_{Al}$. Considerando $\Delta < 0$, isto é, a aceleração da esfera de ouro maior que a da esfera de alumínio, fará a balança girar com velocidade $\omega_1 > \omega$. No período da tarde, 12h após o considerado na parte da manhã, temos a situação reversa e a balança gira na direção oposta com

$$(\alpha)_{\text{tarde}} = -\frac{GM}{lr^2} \Delta, \quad (1.18)$$

e com velocidade angular $\omega_2 < \omega$. Assim teria de haver uma variação no torque em um período de 24h, no entanto efeito parecido nunca foi observado nos levando a conclusão que

$$\delta < 10^{-11}. \quad (1.19)$$

A massa inercial de um corpo massivo tem contribuição de duas fontes: a massa de seus constituintes e da energia de ligação, expressa pela famosa equação $E = mc^2$. Por exemplo, a massa de um átomo é a soma da massa de seus prótons e nêutrons menos a energia nuclear de ligação dividida por c^2 . Átomos são ligados por forças eletromagnéticas e estrelas por forças gravitacionais. Em todos os casos, a energia de

ligação e a massa inercial dos constituintes contribuem para a massa inercial total do corpo. E de acordo com a equação (1.12) a energia de ligação também contribui com a massa gravitacional, de modo que a energia de ligação tem efeito gravitacional. A própria força gravitacional, por conta da ligação que causa, acaba gerando mais efeitos gravitacionais. Nesse sentido um fator importante a se considerar é que a gravidade é *não linear*.

Outro ponto importante de se abordar é que o Princípio de Equivalência é um princípio *local*. Consideremos novamente o caso dos dois corpos de teste caindo em queda livre como na caixa de Einstein, mas agora livres pra percorrer uma distância maior e em direção ao centro da Terra. Como a gravidade é uma força central e atua radialmente é possível perceber pela figura (1.3) que à medida em que os corpos forem caindo em direção ao centro da Terra eles se aproximarão um do outro. Este efeito é conhecido como *efeito de maré*. Nesse caso, um observador conseguirá distinguir que está em um campo gravitacional e o Princípio de Equivalência não é mais válido. Por isto, o Princípio de Equivalência só é válido localmente, isto é, somente em pequenas distâncias um campo gravitacional é equivalente a um referencial acelerado.

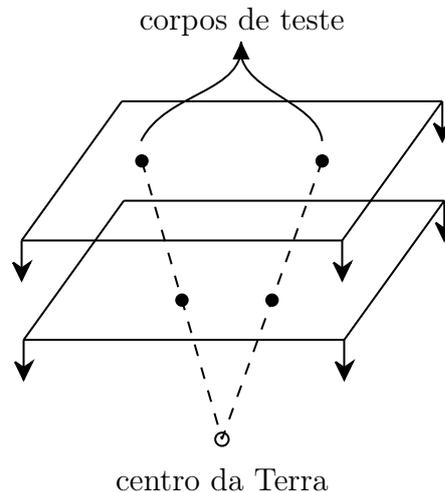


Figura 1.3 – Dois corpos de teste caindo livremente em direção ao centro da Terra.

O Princípio de Equivalência também é um princípio de *indistinguidade*; é impossível, usando qualquer experimento em Mecânica, distinguir entre um campo

gravitacional e um referencial acelerado. Mas e quanto à outras áreas da Física? Vamos generalizar o Princípio de Equivalência para a Ótica usando o seguinte experimento mental: um feixe de luz viajando de uma lado à outro numa caixa, num referencial inercial (livre de campos gravitacionais e sem ser acelerado). A luz sai do lado esquerdo e é detectada, depois de viajar em linha reta, no lado direito da caixa de acordo com a figura (1.4).

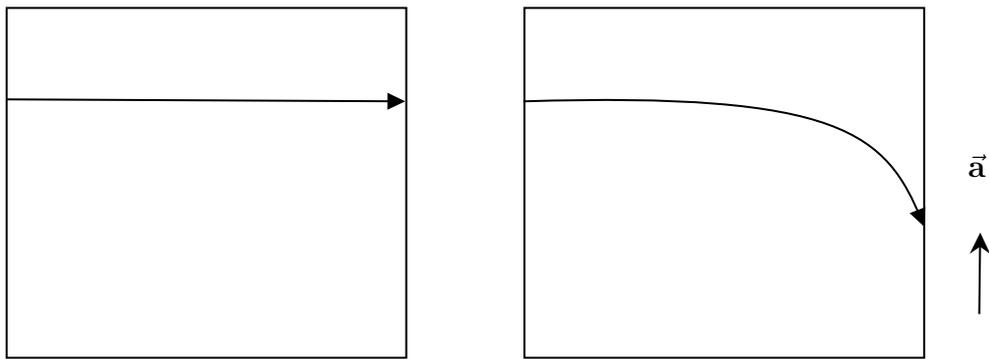


Figura 1.4 – Movimento da luz de um lado a outro em uma caixa no espaço livre, e em uma caixa acelerada.

Se agora ao mesmo tempo que a luz sai do lado esquerdo a caixa é acelerada, depois de um instante Δt a luz chegará do outro lado, viajando uma distância $\Delta x = c\Delta t$. A caixa acelerada se move uma distância $\Delta y = \frac{1}{2}a\left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2$, de modo que

$$\Delta y = \frac{a}{2c^2}(\Delta x)^2, \quad (1.20)$$

que é a equação de uma parábola. Portanto a luz percorre um caminho parabólico e será detectada mais perto do chão da caixa do que de onde saiu. O Princípio de Equivalência implica no fato de que *a luz percorre um caminho curvo em um campo gravitacional*. Fermat postulou que a luz leva o menor tempo para viajar de um ponto a outro no espaço. A curvatura da luz em um campo gravitacional então nos sugere que o menor caminho entre dois pontos em um campo gravitacional não é necessariamente uma linha reta, tendo em vista que em qualquer espaço Euclidiano plano para a luz uma reta é o menor caminho. Chegamos na conclusão de que o efeito

de um campo gravitacional é fazer o espaço curvar e uma nova teoria da gravitação requer o estudo de espaços curvos.

Juntando nossas últimas constatações podemos generalizar o Princípio de Equivalência:

"Qualquer experimento físico local não envolvendo gravidade terá o mesmo resultado quer seja feito em um referencial inercial em queda livre ou em um espaço-tempo plano da Relatividade Especial."

que também é conhecido como o Princípio de Equivalência Forte, ou Princípio de Equivalência de Einstein.

Com isso, Einstein percebeu que o espaço-tempo deveria ser descrito como um espaço curvo, sendo esta curvatura gerada por um corpo massivo (análogo à equação de Poisson), que localmente apresentasse as características de um espaço plano, mais especificamente um espaço plano de Minkowski. Foi Marcel Grossman, matemático e amigo de Einstein, quem enfatizou a importância da Geometria Diferencial para o desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral. Esta geometria é definida em espaços topológicos chamados de variedades diferenciáveis. Portanto, o espaço-tempo tem a estrutura de uma variedade diferenciável quadridimensional na qual pode ser definido uma geometria, a geometria Riemanniana⁵, e com esta é possível descrever comprimentos, curvaturas e coordenadas geodésicas.

Este trabalho apresenta as ferramentas matemáticas, na forma da Geometria Diferencial, para se compreender a linguagem da Relatividade Geral e suas aplicações. São descritas também a equação de campo de Einstein e o espaço-tempo de Schwarzschild derivado dela. E através da teoria de calibre podemos descrever uma partícula de Dirac nesse espaço-tempo. Dispomos os capítulos como segue:

O Capítulo 2 contém uma descrição sobre os objetos geométricos definidos variedade diferenciável (vetores, 1-formas e tensores), como se desenvolve sua álgebra e

⁵A geometria utilizada na descrição do espaço-tempo da Relatividade Geral é na verdade uma geometria pseudo-Riemanniana, por causa da assinatura do tensor métrico utilizado.

as leis de transformação de coordenadas dos mesmos, onde se perceberá que estes objetos são invariantes à estas transformações. Será descrito também um objeto, o tensor métrico, que define distâncias na variedade, uma nova derivada na variedade, a derivada absoluta, e alguns resultados obtidos por meio destes serão utilizados ao longo de todo o trabalho. Além disso, comentaremos sobre as bases holonômicas e não-holonômicas obtendo uma fórmula geral para os coeficientes de conexão.

O Capítulo 3 contém a definição de geodésicas, que são o menor caminho que uma partícula percorre entre dois pontos num espaço curvo, e coordenadas geodésicas. Discutiremos também como se dá o transporte paralelo de um vetor em uma variedade e com isso será possível definir a curvatura, descrita pelo tensor de Riemann, pelo tensor de Ricci e pelo escalar de curvatura. Destes objetos é definido um novo tensor que apresenta uma conservação de curvatura, o tensor de Einstein, que juntamente com o tensor momento-energia que descreve a matéria e seu fluxo, resulta na famosa equação de campo de Einstein. Esta equação também pode ser obtida através de um princípio de mínima ação, sendo esta a ação de Einstein-Hilbert. Discorreremos sobre um resultado importante obtido da teoria da Relatividade Geral, a solução de Schwarzschild para a equação de campo que descreve uma fonte massiva estática e de simetria esférica, semelhante à do nosso Sistema Solar.

O Capítulo 4 trata sobre a Eletrodinâmica como uma teoria de calibre abeliana e como generalizando seus grupos de simetrias para grupos não-abelianos podemos observar suas similaridades com a Relatividade Geral. Portanto se entendermos a Relatividade Geral como uma teoria de calibre com simetria de Lorentz, inserindo a noção de torção no espaço-tempo curvo através das "vierbeins", podemos descrever uma partícula regida pela equação de Dirac em um espaço-tempo curvo. Neste trabalho optamos por descrevê-la em um espaço-tempo de Schwarzschild.

Capítulo 2

Uma Revisão de Geometria Diferencial

A literatura moderna chama de *Geometria Diferencial* a generalização da geometria na sua forma mais conhecida; mais precisamente ela trata de elementos fundamentais do que conhecemos como os espaços propriamente ditos. Parte-se de um suposto de que há um lugar chamado *Variedade* em que se identifica todos os outros espaços, que chamamos de *Abertos*. Logo esta tal de Variedade é formada por todos os seus Abertos. A generalização destes Abertos, ou espaços, são tratados como superfícies arbitrariamente curvas. Estas superfícies curvas, onde a Geometria Diferencial é estudada, são as *Variedades Diferenciáveis*. Uma Variedade Diferenciável é um espaço topológico, portanto possui propriedades topológicas¹.

A ideia de Variedade Diferenciável teve sua gênese no século XIX com os trabalhos de Carl Friedrich Gauss e de Georg Friedrich Bernhard Riemann. Gauss era interessado em cartografia, o que o levou a desenvolver as ferramentas de cálculo em superfícies curvas. Seu famoso *teorema egregium* [10, pág. 54], revelou que se poderia considerar as propriedades intrínsecas de uma superfície independentemente de sua

¹Neste trabalho não iremos nos preocupar com as topologias que são definidas nas variedades, pois iremos trabalhar os objetos matemáticos de forma mais prática. Caso o leitor esteja interessado em mais detalhes sobre Topologia e suas definições, pode consultar a referência [9].

imersão em um espaço tridimensional, e isto levou Riemann e outros a abstrair estes conceitos ainda mais [9].

Para nos apropriarmos dos elementos da chamada Geometria Diferencial, precisamos conhecer de que é "composta" a Variedade, os nomes e nomenclaturas dos elementos e os mapeamentos que nos leva a geometria como conhecemos na sua forma mais "popular".

Seja uma Variedade Topológica e Diferenciável M , m -dimensional, que possui entidades chamadas Cartas (U_i, φ_i) , que cobrem toda a Variedade onde U_i é um Aberto, ou seja, $\cup_i U_i = M$ e φ_i é o **homeomorfismo** que mapeia U_i em um subconjunto aberto U'_i dentro de \mathbb{R}^m , de modo que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, com $i \neq j$. Pode-se fazer mapeamentos de abertos dentro de uma própria variedade, de acordo com a figura (2.1).

Seja agora uma outra Variedade Topológica e Diferenciável N , n -dimensional com Cartas (V_i, ϕ_i) . Vamos considerar portanto o mapeamento

$$f : M \mapsto N, \tag{2.1}$$

$$: P \mapsto f(P). \tag{2.2}$$

De acordo com a figura (2.2) temos os homeomorfismos

$$\varphi : U \mapsto U', \quad \text{ou} \quad \varphi(P) = \{x^\mu\}, \quad \text{ou} \quad x = \varphi(P), \tag{2.3}$$

e

$$\phi : V \mapsto V', \quad \text{ou} \quad \phi(f(\varphi(P))) = \{y^\alpha\}, \quad \text{ou} \quad y = \phi(f(P)), \tag{2.4}$$

e temos o mapeamento entre os Abertos, chamado de **difeomorfismo**

$$\phi \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

$$: x \mapsto y. \tag{2.6}$$

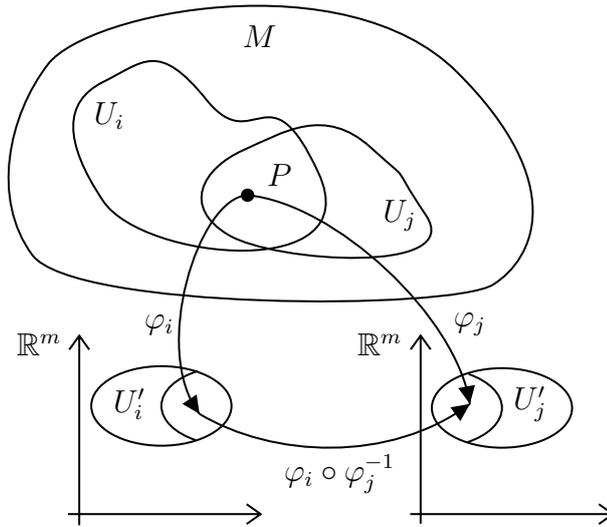


Figura 2.1 – Homeomorfismo de um ponto P de uma variedade M para um espaço em \mathbb{R}^m .

Com estas definições, podemos trabalhar em \mathbb{R}^n por exemplo, onde a álgebra é conhecida (soma, subtração, multiplicação, etc.) e fazer transformações entre coordenadas ou espaços, por exemplo entre sistema de coordenadas tipo cartesiano, cilíndrico, esférico e outros. Desta forma podemos definir também objetos geométricos invariantes à transformação de coordenadas. Neste capítulo iremos definir estes objetos (vetores, tensores, 1-formas) e o conceito de distância em superfícies curvas. Definiremos também um novo tipo de derivada na Variedade Diferenciável e obteremos alguns resultados importantes para os próximos capítulos.

2.1 Vetores e Campos Vetoriais

No espaço Euclidiano em três dimensões \mathbb{E}^3 , conhecemos um vetor, a partir das disciplinas como Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo Vetorial descrito, por

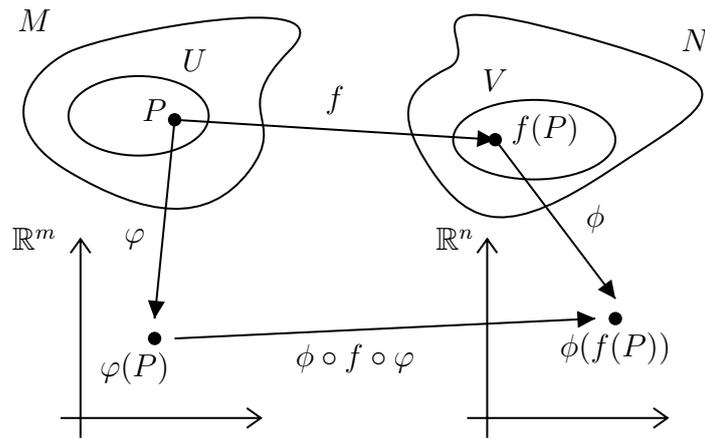


Figura 2.2 – Difeomorfismo $\phi \circ f \circ \varphi$ de um ponto P na variedade M a um ponto na variedade N .

exemplo, das seguintes maneiras

$$\vec{V} = V_x \hat{\mathbf{i}} + V_y \hat{\mathbf{j}} + V_z \hat{\mathbf{k}},$$

$$\vec{V} = V_r \hat{\mathbf{r}} + V_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + V_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

onde $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ são versores na direção de x, y e z respectivamente e $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ versores nas direções de r, θ e ϕ respectivamente. O primeiro vetor está escrito em coordenadas retangulares (cartesianas) e o segundo em coordenadas esféricas, cada um com suas respectivas componentes (V_x, V_r, \dots) e diferenciados vetores de base $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{r}}, \dots)$. Podemos escrever um vetor genérico como²

$$\vec{V} = V^i \hat{\mathbf{e}}_i,$$

²Usando a notação de Einstein, na qual é omitido o símbolo de somatória e índices iguais implicam em soma.

onde V^i são suas componentes e \hat{e}_i seus vetores da base. De maneira análoga, um vetor em um espaço de quatro dimensões é escrito ³

$$\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (2.7)$$

Vamos agora definir vetores em uma variedade diferenciável, que pode ser curva em sua totalidade mas localmente, isto é, em um determinado ponto, se assemelha a um espaço plano. Para ser diferenciável, a variedade tem que ter derivadas em todos os seus pontos, de modo que podemos usar propriedades de Cálculo para defini-la. Seja uma curva parametrizada $c(\lambda)$ e situada em uma variedade diferenciável M , de acordo com a figura (2.3).

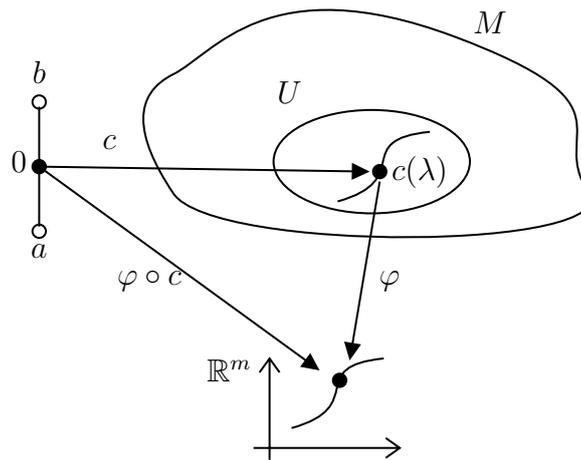


Figura 2.3 – Homeomorfismo de uma curva $c(\lambda)$, dentro de um aberto U em M , para \mathbb{R}^m , gerando um vetor tangente a esta curva no ponto $\lambda = 0$.

Um ponto P na curva $c(\lambda)$ em M pode ser mapeado até o aberto por uma função $f : M \mapsto \mathbb{R}$, de modo que a inclinação tangente a esta curva é um operador diferenciável que pode ser aplicada a esta função

$$\mathbf{V}[f] = \left. \frac{df(c(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (2.8)$$

³Será usado neste trabalho a seguinte notação: índices latinos (i, j, k, \dots) para indicar uma soma indo de 1 a 3 e índices gregos (μ, ν, λ, \dots) para indicar uma soma indo de 0 a 3.

sendo $c(\lambda) : (a, b) \mapsto M$. Do mapa φ , escrevemos as coordenadas do aberto em \mathbb{R} , onde $x = \varphi \circ c(\lambda)$, que usando a regra da cadeia nos dá

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}[f] &= \left. \frac{df(c(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \\
 &= \left. \frac{df(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ c(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \\
 &= \left. \frac{df(\varphi^{-1} \circ x(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \\
 &= \left. \frac{dx^\mu(c(\lambda))}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right|_{\lambda=0}, \\
 &= V^\mu \left. \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right|_{\lambda=0}, \\
 &= V^\mu \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f) \right|_{\lambda=0},
 \end{aligned}$$

onde identificamos a componente do vetor como

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (2.9)$$

e o operador diferencial

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.10)$$

Resumindo, vemos que $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ pode ser usado para descrever as componentes de um vetor e $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ para descrever os vetores da base. O operador $\frac{d}{d\lambda}$ é então o vetor tangente à curva no ponto P e como este ponto pode ser qualquer um pertencente à variedade, um vetor escrito em termo destes operadores é na verdade um campo vetorial que descreve planos tangentes ao longo da curva. O plano tangente à M no ponto P será chamado de $T_p M$. Assim, identificamos as componentes e a base como

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.12)$$

Com essa nova definição de geometria podemos notar algumas características:

- vetores de base estão contidos no plano tangente à variedade M no ponto P ;
- o espaço tangente T_pM é obtido tomando todas as curvas possíveis através de P e avaliando $\frac{d}{d\lambda}\Big|_P$ sendo $\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$;
- vetores definidos em dois pontos diferentes não tem relação entre si. Só faz sentido subtrair ou somar vetores no mesmo ponto P .

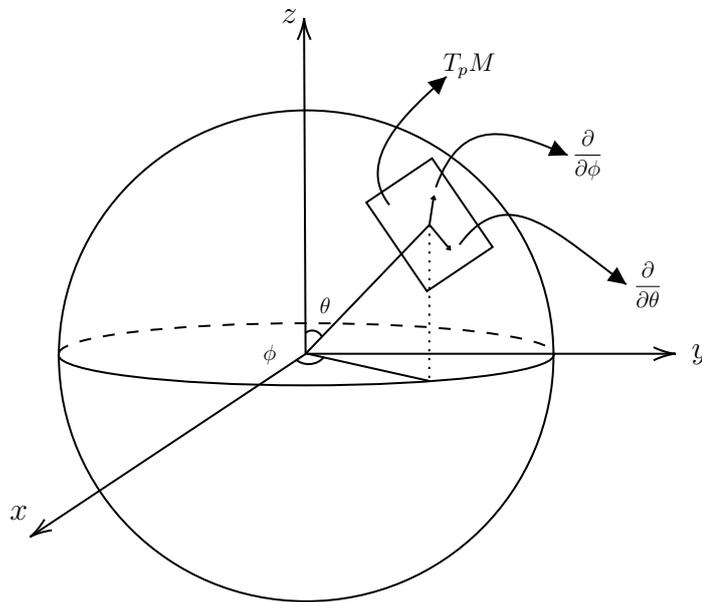


Figura 2.4 – Vetores da base tangente contidos num plano tangente T_pM à superfície da esfera.

Como exemplo, vamos tomar no espaço Euclidiano \mathbb{E}^3 em coordenadas esféricas um vetor posição que mapeia uma curva, a esfera neste caso, e é escrito como

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{k}},$$

para descrever os vetores da base tangente à curva no ponto P através das derivadas

aplicadas neste vetor, basta olharmos a equação (2.12):

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + r \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} - r \sin \theta \hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Podemos perceber que todos estes vetores são tangentes às suas respectivas coordenadas e formam uma base

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r &= 1 \quad ; \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = r^2 \quad ; \quad \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = r^2 \sin^2 \theta, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_r = 0.\end{aligned}$$

Podemos também identificar os versores das coordenadas cartesianas e reescrevê-los como

$$\hat{\mathbf{i}} = \frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad \hat{\mathbf{j}} = \frac{\partial}{\partial y} \quad ; \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial z},$$

de modo que a definição dos versores da base tangente em coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Estes vetores da base tangente não são ortonormais, isto é, formam ângulos retos uns com os outros porém não são unitários. A base ortonormal pode ser facilmente definida como

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_r \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi,$$

com condições de ortogonalidade do tipo

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi = 1,$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi = \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0.$$

Para que estes vetores possam ser descritos em qualquer parte da variedade M e não somente em um ponto P único e específico, precisamos da noção de *campos vetoriais*. Conseguimos descrever planos tangentes a uma *curva* em M , pois ela possui tangentes em cada ponto, logo existem vetores tangentes que podem ser descritos em cada ponto dessa curva. O campo vetorial

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = v^\mu(x^\nu), \quad (2.13)$$

é uma equação diferencial de primeira ordem que em geral tem solução local. Dado v^μ podemos encontrar $x^\mu(\lambda)$ que é chamado de *curva integral* do campo vetorial e isto é válido em qualquer ponto P , em qualquer x^μ , portanto em cada ponto de M podemos traçar a curva integral do campo vetorial através deste ponto e essas curvas preenchem M .

2.2 1-Formas

Além dos vetores que formam a base tangente, onde podemos descrever um vetor na variedade diferenciável, existe outro tipo de "vetor", análogo ao gradiente por exemplo de uma função escalar do Cálculo Vetorial, que é descrito como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}},$$

onde f é uma função $f(x, y, z)$, que se define a partir de um vetor direcional,

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Se considerarmos as curvas de nível, que são superfícies onde uma das coordenadas é constante, o vetor gradiente seria um vetor saindo da superfície menor até outra superfície maior [11], [12]. Vemos então que vetores gradientes são paralelos aos eixos coordenados.

Vamos usar como exemplo de um mapeamento de um sistema de coordenadas não ortogonal para as coordenadas Cartesianas,

$$\begin{aligned} x &= u + v, & u &= \frac{1}{2}(x + y), \\ y &= u - v, & v &= \frac{1}{2}(x - y), \\ z &= 2uv + w, & w &= z - \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \end{aligned}$$

um vetor descrito nesse sistema é

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(u + v)\hat{i} + \frac{1}{2}(u - v)\hat{j} + (2uv + w)\hat{k},$$

Se tomarmos a base tangente desse sistema, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \hat{i} + \hat{j} + 2v\hat{k}, \\ \mathbf{e}_v &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \hat{i} - \hat{j} + 2u\hat{k}, \\ \mathbf{e}_w &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \hat{k}. \end{aligned}$$

e percebemos claramente que se trata de um sistema não ortonormal, pois

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = 4uv \quad ; \quad \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = 2u \quad ; \quad \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_u = 2v.$$

No entanto se definirmos os vetores gradientes (que escreveremos com índice superior) desse sistema que formam uma outra base de vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^u &= \nabla u = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{e}^v &= \nabla v = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{e}^w &= \nabla w = \hat{\mathbf{k}},\end{aligned}$$

essa nova base é chamada de base cotangente e é *Dual* à base tangente, isto é, obedece a relação abaixo

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^u \cdot \mathbf{e}_u &= \mathbf{e}^v \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}^w \cdot \mathbf{e}_w = 1, \\ \mathbf{e}^u \cdot \mathbf{e}_v &= \mathbf{e}^v \cdot \mathbf{e}_w = \mathbf{e}^w \cdot \mathbf{e}_u = 0.\end{aligned}$$

Formalmente, para cada espaço vetorial $T_p M$, existe um espaço dual a este, chamado de espaço cotangente $T_p^* M$, cujos elementos são vetores duais ou vetores cotangentes, chamados de 1-formas. O exemplo mais simples de uma 1-forma é uma diferencial $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$ de uma função f , definida dentro de uma espaço de funções na variedade M , e a ação de formas acontecem sobre os vetores do tipo $\mathbf{V}[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$, nos dando um número real,

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{V} \rangle = \mathbf{V}[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad (2.14)$$

que é uma espécie de produto interno. Do ponto de vista de espaço, temos

$$T_p^* M \times T_p M \mapsto \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Generalizando essa noção de gradiente para uma variedade diferenciável, temos

a definição da 1-forma, dual à base tangente, escrita como

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu}, \quad (2.16)$$

onde ω_μ são as componentes da 1-forma e $\mathbf{d}x^\mu$ são os elementos da chamada base cotangente. Assim, dizemos que a operação entre as bases tangente e cotangente é dada por

$$\langle \mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \langle \mathbf{d}x^\mu, \partial_\nu \rangle = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu) = \delta^\mu_\nu, \quad (2.17)$$

ou ainda que, entre um vetor genérico e uma 1-forma genérica, resulta em um escalar

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{V} \rangle &= \langle \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu, V^\nu \mathbf{e}_\nu \rangle, \\ &= \omega_\mu V^\nu \langle \mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle, \\ &= \omega_\mu V^\mu, \end{aligned} \quad (2.18)$$

semelhante ao produto interno entre dois vetores.

Assim como os vetores da base tangente pertencem a um plano tangente $T_p M$, as 1-formas pertencem ao plano cotangente $T_p^* M$, ortogonal à $T_p M$. A base de uma 1-forma $\mathbf{d}x^\mu$ é dual à base dos vetores \mathbf{e}_μ . A noção de espaço dual apesar de parecer abstrata em um primeiro momento, é semelhante à alguns casos já conhecidos:

- a) Em um espaço complexo de duas dimensões \mathbb{C}^2 , correspondendo ao vetor $z = x + iy$ há o complexo conjugado $z^* = x - iy$, de modo que $z^* z = x^2 + y^2$ é um número real [13].
- b) Na Mecânica Quântica um vetor no espaço de Hilbert é descrito pelo vetor ket $|\Psi\rangle$ e seu dual é o vetor bra $\langle\Psi|$ de modo que $\langle\Psi|\Psi\rangle$ é um número real [14].

Como ambos tipos de bases podem ser definidos em qualquer ponto P da variedade, tanto \mathbf{e}_μ quanto $\mathbf{d}x^\mu$ pertencem aos feixes de planos tangente e cotangentes, respectivamente. Do mesmo modo que um vetor da base tangente pode ser escrito

como uma derivada parcial $\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ a 1-forma pode ser descrita como $\boldsymbol{\theta}^\mu = \mathbf{d}x^\mu$. No entanto, $\mathbf{d}x^\mu$ pode ser interpretada como algo mais geral que apenas um elemento infinitesimal, como já dissemos, este é uma componente da base cotangente.

2.3 Regras de Transformação

Definidos os elementos geométricos, e a partir das transformações entre variedades que mostramos anteriormente, podemos escrever transformações entre sistemas de coordenadas, dentro de um mesmo espaço (aberto), de forma que algumas entidades matemáticas se comportam como invariantes. As expressões escritas em termos dos vetores e 1-formas na variedade diferenciável são *independentes do sistema de coordenadas*, ou seja, uma transformação de coordenadas destes objetos é uma transformação homogênea e linear. Ao se fazer uma mudança de coordenadas do tipo $x^\mu \mapsto x'^\mu$, as componentes dos vetores e das 1-formas se transformam de maneiras diferentes. A componente de um vetor se transforma como

$$V^\mu \mapsto V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda, \quad (2.19)$$

e a base tangente como

$$\mathbf{e}_\mu \mapsto \mathbf{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \mathbf{e}_\nu, \quad (2.20)$$

Assim a transformação nas componentes de um vetor \mathbf{V} é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu &\mapsto V'^\mu \mathbf{e}'_\mu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \mathbf{e}_\nu \right), \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V^\lambda \mathbf{e}_\nu, \\ &= V^\lambda \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde podemos identificar uma regra da cadeia pois $x'^\mu = x'^\mu(x^\lambda)$ e a derivada resulta em um delta de Kronecker $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$, pois derivadas em relação à diferentes compo-

mentes são nulas e à componentes iguais são unitárias. Portanto, um vetor em uma variedade diferenciável é de fato *invariante* diante transformações de coordenadas ⁴.

A transformação de uma 1-forma acontece de maneira similar. A componente da 1-forma se transforma como

$$\omega_\mu \mapsto \omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu, \quad (2.22)$$

e a base cotangente se transforma como

$$\mathbf{d}x^\mu \mapsto \mathbf{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathbf{d}x^\nu, \quad (2.23)$$

e a transformação de uma 1-forma

$$\begin{aligned} \omega = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu \mapsto \omega'_\mu \mathbf{d}x'^\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \omega_\nu \mathbf{d}x^\lambda, \\ &= \omega_\lambda \mathbf{d}x^\lambda = \omega, \end{aligned}$$

e observamos que a 1-forma também é invariante frente à transformações de coordenadas.

Um objeto que se transforma como (2.19) e (2.23) é dito ser *contravariante* e um objeto que se transforma como (2.20) e (2.22) é dito ser *covariante*. Aqui, dado os modos distintos de transformação, percebemos porque ora usamos índices sobrescritos e ora índices subscritos; objetos contravariantes serão escritos, por definição, com índice em cima e objetos covariantes com índice em baixo.

⁴Estas transformações são gerais, chamadas de Transformações Gerais de Coordenadas (TGC), que é representada em algumas teorias, principalmente as teorias topológicas, como grupo de Difeomorfismo. Não iremos entrar em detalhes sobre a teoria de grupos e suas transformações neste trabalho no entanto.

2.4 Tensores

Com as definições de vetores e 1-formas numa variedade diferenciável, podemos agora definir um *tensor*, ou melhor, um tensor do tipo $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ ⁵, que é um objeto geométrico com componentes que são produto cartesiano de r vetores com s 1-formas, ou seja, da base tangente com a base cotangente

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\gamma\dots} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \dots \mathbf{d}x^\lambda \otimes \mathbf{d}x^\gamma \otimes \dots, \quad (2.24)$$

assim, um vetor pode ser considerado um tensor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e uma 1-forma um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por questões de simplicidade, um tensor pode ser escrito somente em termos de suas componentes, com os produtos cartesianos (produtos tensoriais) \otimes omitidos. O rank de um tensor é definido pela soma $r + s$. Daí podemos notar que uma grandeza escalar pode ser considerada como um tensor de rank 0, vetores e 1-formas como tensores de rank 1 e matrizes como tensores de rank 2. Com esta percepção, entendemos como tensores são objetos mais gerais que abrangem maior informação em sua definição, e por isso sua importância na descrição tanto na Relatividade Restrita quanto, principalmente, na Relatividade Geral. Outra característica dos tensores, por serem compostos por vetores e 1-formas, é que suas transformações de coordenadas são homogêneas, ou seja, um tensor apresenta invariância sobre transformação de coordenadas. Por causa disso, se um tensor é nulo em um sistema de coordenadas, ele necessariamente será nulo em qualquer outro sistema. Além disso tensores serão importantes para a caracterização de *curvatura*, propriedade essencial para descrição de espaços curvos.

⁵Notação usada para expressarmos o *rank* de um tensor, mais especificamente quantas bases, tangentes ou cotangentes, este objeto comporta.

2.5 Álgebra Tensorial

Agora que definimos os tensores, veremos como funciona a álgebra aplicada à esses objetos geométricos.

2.5.1 Transformações de Coordenadas

Um tensor do tipo $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ é dito ser contravariante (pois suas componentes são contravariantes) e obedece às regras de transformação do tipo

$$T'^{\alpha\beta\dots\lambda} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \dots \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} T^{\mu\nu\dots\kappa}. \quad (2.25)$$

Um tensor do tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$ é dito ser covariante (por ter componentes que são covariantes) e obedece à

$$T'_{\alpha\beta\dots\lambda} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \dots \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\lambda}} T_{\mu\nu\dots\lambda}. \quad (2.26)$$

Já um tensor do tipo $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ é dito ser misto e obedece aos dois tipos de transformações

$$T'^{\alpha\dots\beta}_{\lambda\dots\sigma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \dots \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\lambda}} \dots \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\mu\dots\nu}_{\kappa\dots\rho}. \quad (2.27)$$

2.5.2 Simetria e Antissimetria

Um tensor tem componentes simétricas se, sobre a permutação de seus índices, ocorre

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad \text{ou} \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad (2.28)$$

e componentes antissimétricas se sobre a permutação ocorre

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} \quad \text{ou} \quad T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}, \quad (2.29)$$

portanto um tensor é dito *simétrico* se suas componentes forem simétricas e *antissimétrico* se suas componentes forem antissimétricas.

Vamos definir a seguinte notação:

- $T^{(\mu\dots\nu)}$: índices entre parênteses para indicar propriedades de simetrização.
- $T^{[\mu\dots\nu]}$: índices entre colchetes para indicar propriedades de antissimetrização.

Podemos então escrever tensores do tipo $\binom{r}{s}$ como

$$T^{(\mu\dots\nu)}_{(\kappa\dots\lambda)} = \frac{1}{r!}(\text{soma das permutações dos } r \text{ índices}) + \frac{1}{s!}(\text{soma das permutações dos } s \text{ índices}),$$

$$T^{[\mu\dots\nu]}_{[\kappa\dots\lambda]} = \frac{1}{r!}(\text{soma alternada das permutações dos } r \text{ índices}) + \frac{1}{s!}(\text{soma alternada das permutações dos } s \text{ índices}).$$

Alguns exemplos dessas definições são:

$$\begin{aligned} T^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2!}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}), \\ T^{(\mu\nu)}_{(\kappa\lambda)} &= \frac{1}{2!}(T^{\mu\nu}_{\kappa\lambda} + T^{\nu\mu}_{\kappa\lambda}) + \frac{1}{2!}(T^{\mu\nu}_{\lambda\kappa} + T^{\nu\mu}_{\lambda\kappa}), \\ T^{[\mu\nu\kappa]} &= \frac{1}{3!}(T^{\mu\nu\kappa} - T^{\mu\kappa\nu} + T^{\kappa\mu\nu} - T^{\kappa\nu\mu} + T^{\nu\kappa\mu} - T^{\nu\mu\kappa}). \end{aligned}$$

2.5.3 Operações Fundamentais

- **Soma e Subtração:** somente tensores do mesmo tipo e rank podem ser somados ou subtraídos. A soma ou subtração de dois ou mais tensores resulta em um tensor de mesmo tipo e rank

$$A^{\mu\nu}_{\kappa} + B^{\mu\nu}_{\kappa} - C^{\mu\nu}_{\kappa} = D^{\mu\nu}_{\kappa}.$$

- **Produto Externo:** o produto simples de um tensor $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ com um tensor $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ tem como resultado um tensor $\begin{pmatrix} r + m \\ s + n \end{pmatrix}$:

$$A^{\mu\nu}{}_{\lambda} B^{\kappa}{}_{\sigma} = C^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\sigma}.$$

- **Contração:** se um tensor misto $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ tem índice covariante igual a um índice contravariante então, pela notação de Einstein, temos uma soma nesses índices e o tensor resultante é do tipo $\begin{pmatrix} r - n \\ s - n \end{pmatrix}$ onde n é o número de índices repetidos

$$T^{\mu\nu}{}_{\nu\lambda} = T^{\mu}{}_{\lambda}.$$

- **Produto Interno:** é uma multiplicação de dois tensores (produto externo) seguido por uma contração de índices repetidos concomitantemente em ambos os tensores

$$A^{\mu\nu}{}_{\kappa} B^{\kappa\lambda}{}_{\rho} = C^{\mu\nu\lambda}{}_{\rho}.$$

- **Teorema do Quociente:** seja o produto externo de um tensor $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ com outro objeto χ que ainda não se sabe se é ou não um tensor. Se o resultado do produto resulta em um tensor $\begin{pmatrix} r + m \\ s + n \end{pmatrix}$, então necessariamente χ tem que ser um tensor do tipo $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. Por exemplo, seja a operação

$$A^{\mu}{}_{\nu} \mathbf{B} = C^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\kappa},$$

necessariamente o tensor \mathbf{B} tem que ser

$$\mathbf{B} = B^\lambda{}_\kappa \mathbf{e}_\lambda \otimes \mathbf{d}x^\kappa.$$

2.6 Tensor Métrico

Com os vetores e as 1-formas conseguimos mapear e descrever um ponto em uma variedade diferenciável. Precisamos saber como medir a distância entre esses pontos para termos noções de comprimento numa variedade. O tamanho de um vetor, seu módulo, que é a distância entre o ponto da sua origem com o ponto da sua outra extremidade, é descrito da seguinte maneira no \mathbb{R}^2

$$r^2 = |\vec{\mathbf{r}}|^2 = \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = x^2 + y^2.$$

Para descrever comprimento em uma variedade vamos utilizar um objeto geométrico, o *tensor métrico* (ou simplesmente a *métrica*) $g_{\mu\nu}$ tal que, para um espaço Euclidiano \mathbb{E}^2

$$r^2 = g_{ij}r^i r^j.$$

Para o caso deste espaço plano, em coordenadas cartesianas onde $r^1 = x$ e $r^2 = y$, conseguimos facilmente achar sua métrica já que

$$r^2 = x^2 + y^2 = g_{11}x^2 + (g_{12} + g_{21})xy + g_{22}y^2,$$

disso, observamos que

$$g_{11} = g_{22} = 1 \quad ; \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Como a métrica é um tensor de rank 2, ela pode ser escrita como uma matriz para

melhor visualização de suas componentes. Então para o exemplo acima

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{ coordenadas cartesianas,}$$

O tensor métrico pode descrever distâncias se considerarmos um deslocamento infinitesimal

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.30)$$

por exemplo, no \mathbb{R}^2 em coordenadas polares, a distância infinitesimal é $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Usando este resultado conhecido, vamos obter o elemento de distância usando a métrica, sendo $dx^1 = dr$ e $dx^2 = d\theta$, assim

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij}dx^i dx^j, \\ &= g_{11}dr^2 + (g_{12} + g_{21})dr d\theta + g_{22}d\theta^2, \end{aligned}$$

comparando os resultados, o tensor métrico neste caso tem que ser

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} : \text{ coordenadas polares.}$$

No caso acima em coordenadas polares, notamos que a métrica pode depender das coordenadas, isto é, podemos ter $g_{\mu\nu} = g(x^\lambda)$. Isto acontece aqui pois estamos utilizando bases holonômicas, no entanto a métrica pode ser descrita em ambas as bases: holonômicas e não-holonômicas. Elas serão melhores discutidas mais à frente.

Formalmente, a métrica 'mapeia' dois vetores em um escalar e uma operação (análoga ao produto escalar) pode ser definida:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.31)$$

que é algo como a aplicação da métrica em dois vetores. Sendo $\mathbf{u} = u^\sigma \mathbf{e}_\sigma$ e $\mathbf{v} = v^\rho \mathbf{e}_\rho$ dois vetores, pela operação de dualidade e pelo Teorema do Quociente, a métrica será escrita na base cotangente

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu, \quad (2.32)$$

pois a operação (2.31) é desenvolvida da seguinte maneira

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\mu\nu} \langle \mathbf{d}x^\mu, u^\sigma \mathbf{e}_\sigma \rangle \langle \mathbf{d}x^\nu, v^\rho \mathbf{e}_\rho \rangle = g_{\mu\nu} u^\sigma v^\rho \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

resultando de fato em um escalar.

A métrica é então um tensor de rank 2 do tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ constituído por 1-formas.

Sob uma transformação de coordenadas do tipo $x^\mu \mapsto x'^\mu$, a métrica obedece

$$g_{\mu\nu} \mapsto g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\kappa\lambda},$$

que é uma transformação homogênea de um objeto covariante.

Definindo $\Delta = dx^\mu \mathbf{e}_\mu$ como o vetor deslocamento infinitesimal em uma direção qualquer, o elemento de comprimento infinitesimal é então definido em uma variedade diferenciável como

$$\boxed{ds^2 = \mathbf{g}(\Delta, \Delta) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.} \quad (2.33)$$

A operação de dualidade da métrica com um vetor

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}, \mathbf{V} \rangle &= \langle g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu, V^\nu \mathbf{e}_\nu \rangle, \\ &= g_{\mu\nu} V^\nu \mathbf{d}x^\mu \langle \mathbf{d}x^\nu, \mathbf{e}_\nu \rangle, \\ &= g_{\mu\nu} V^\nu \mathbf{d}x^\mu, \end{aligned}$$

resulta em uma contração da métrica ($g_{\mu\nu}$) com um vetor (V^μ) numa base cotangente

($\mathbf{d}x^\nu$). Fazendo a contração dos índices iguais, esperamos que este produto interno resulte em uma componente de uma 1-forma, uma componente covariante. Isto é,

$$g_{\mu\nu}V^\mu = V_\nu. \quad (2.34)$$

Como a operação (2.31) resulta em um escalar, temos que

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0, \quad (2.35)$$

e somente ocorre que

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0,$$

se $\mathbf{u} = 0$ (não faz sentido ter $\mathbf{g} = 0$, pois assim não teria como haver mapeamento de vetores em escalares e a métrica não exerceria sua função). Como um tensor de rank 2 pode ser considerado e escrito como uma matriz, podemos usar a seguinte propriedade da Álgebra Linear [15]:

$$\begin{aligned} AX &= 0, \\ \underbrace{A^{-1}A}_I X &= 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0, \end{aligned}$$

onde A e X são matrizes e o resultado acima nos indica que $\det(A) \neq 0$ e que esta matriz é inversível. Da operação $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ e usando a relação acima, chegamos a conclusão de que $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ e que a métrica sempre possui uma inversa.

Vamos definir a inversa da métrica $g_{\mu\nu}$ como $g^{\mu\nu}$ tal que o produto interno das duas resulte em uma matriz identidade, que pode ser escrita através do delta de Kronecker⁶

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa} = \delta_\mu^\kappa. \quad (2.36)$$

⁶A definição dos índices superiores nesta inversa da métrica fará sentido por conta de como se dá sua transformação de coordenadas.

Sob uma transformação de coordenadas, temos

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} g'^{\nu\kappa} &= \delta'_{\mu}{}^{\kappa}, \\ \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\sigma\rho} g'^{\nu\kappa} &= \delta_{\mu}{}^{\kappa}, \end{aligned}$$

onde usamos a regra de transformação da métrica covariante e $\delta'_{\mu}{}^{\kappa} = \delta_{\mu}{}^{\kappa}$ pois o delta de Kronecker é o mesmo em qualquer sistema de coordenadas. Multiplicando ambos os lados da equação acima por $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\sigma\rho} g'^{\nu\kappa} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \delta_{\mu}{}^{\kappa}, \\ \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\rho} g'^{\nu\kappa} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}}, \end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados por $g^{\beta\alpha}$ e usando a definição (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g^{\beta\alpha} g_{\alpha\rho} g'^{\nu\kappa} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}} g^{\beta\alpha}, \\ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g'^{\nu\kappa} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}} g^{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}}$ temos, finalmente, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g'^{\nu\kappa} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}} g^{\beta\alpha}, \\ g'^{\mu\kappa} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}} g^{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Podemos perceber que esta inversa da métrica se transforma como um objeto contra-variante, podendo ser então definida em uma base de vetores tangentes da seguinte forma

$$\mathbf{g} = g^{\mu\nu} \mathbf{e}_{\mu} \otimes \mathbf{e}_{\nu}. \quad (2.37)$$

Sua dualidade com uma 1-forma

$$\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\omega} \rangle = \langle g^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu, \omega_\nu \mathbf{d}x^\nu \rangle = g^{\mu\nu} \omega_\mu \mathbf{e}_\nu,$$

e pela contração dos índices, o produto interno da inversa da métrica com a componente de uma 1-forma terá que resultar em um objeto contravariante

$$g^{\mu\nu} \omega_\nu = \omega^\mu. \quad (2.38)$$

Percebemos que o produto interno das componentes da métrica com as componentes de um vetor ou uma 1-forma, resulta em componentes covariantes e contravariantes, ou seja, esta operação levanta e abaixa os índices de vetores e 1-formas, transformando a componente de um vetor em componente de uma 1-forma e vice-versa. Estes resultados podem ser generalizados para qualquer tipo de tensor e serão utilizados com frequência durante este trabalho.

2.7 Bases Holonômicas e Não-Holonômicas

As bases holonômicas, ou coordenadas, e as bases não-holonômicas, ou não-coordenadas, são definidas através do operador comutador. Se

$$[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = 0, \quad (2.39)$$

a base é dita holonômica. Já se

$$[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] \neq 0, \quad (2.40)$$

a base é dita não-holonômica.

Como exemplo, vamos considerar vetores da base tangente no \mathbb{R}^2 , tal que

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

são os versores na direção dos eixos x e y respectivamente. Aplicando o operador comutador nesses dois vetores, temos

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0,$$

como vetores agora podem ser escritos como operadores diferenciais, neste caso nenhum vetor depende de elementos na coordenada do outro e por isso essas derivadas são nulas. Como a comutação é nula, estes vetores fazem parte de uma base holonômica.

Considerando agora, ainda no \mathbb{R}^2 mas em coordenadas polares, os vetores

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

a comutação desses dois vetores

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]f(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \neq 0,$$

é não nula, logo eles fazem parte de uma base não-holonômica.

É comum escrever os comutadores em termos de uma combinação linear dos elementos de base, da seguinte forma

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = C_{ij}^k \mathbf{e}_k, \tag{2.41}$$

onde os coeficientes C_{ij}^k são chamados de **constantes de estrutura** da álgebra de Lie. Numa base não-holonômica nem todas essas constantes são nulas, diferentemente da base holonômica. Do exemplo acima, $C_{12}^1 = -C_{21}^2 = -\frac{1}{r}$ e as constantes restantes são nulas.

No que diz respeito a métrica, vamos considerar um espaço plano \mathbb{E}^3 euclidiano,

em coordenadas cartesianas e esféricas. A forma geral da métrica é

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j. \quad (2.42)$$

Nas coordenadas cartesianas

$$\mathbf{d}x^1 = \mathbf{d}x \quad , \quad \mathbf{d}x^2 = \mathbf{d}y \quad , \quad \mathbf{d}x^3 = \mathbf{d}z,$$

tal que

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e assim encontramos que

$$\mathbf{g} = \mathbf{d}s^2 = \mathbf{d}x \otimes \mathbf{d}x + \mathbf{d}y \otimes \mathbf{d}y + \mathbf{d}z \otimes \mathbf{d}z.$$

Os vetores duais à base de 1-formas são

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

e claramente obedecem a condição (2.17). Já em coordenadas esféricas temos o elemento de linha

$$\mathbf{d}s^2 = \mathbf{d}r^2 + r^2 \mathbf{d}\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \mathbf{d}\phi^2,$$

que em termos de 1-formas fica escrito como

$$\mathbf{d}s^2 = \mathbf{d}r \otimes \mathbf{d}r + r^2 \mathbf{d}\theta \otimes \mathbf{d}\theta + r^2 \sin^2 \theta \mathbf{d}\phi \otimes \mathbf{d}\phi.$$

Podemos escolher em que tipo de base trabalhar. Em uma base holonômica, esco-

lhemos a base de 1-formas sendo

$$\mathbf{d}x^1 = \mathbf{d}r \quad , \quad \mathbf{d}x^2 = \mathbf{d}\theta \quad , \quad \mathbf{d}x^3 = \mathbf{d}\phi,$$

de modo que a métrica

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

e os vetores duais a essa base

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad , \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Escolhendo porém uma base não-holonômica as 1-formas

$$\mathbf{d}x^1 = \mathbf{d}r \quad , \quad \mathbf{d}x^2 = r\mathbf{d}\theta \quad , \quad \mathbf{d}x^3 = r \sin \theta \mathbf{d}\phi,$$

com métrica

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e a base dual de vetores

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad , \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Por conta da métrica g_{ij} nesse caso ser unitária, bases deste tipo são comumente chamadas de base ortonormal.

Fazendo algumas considerações sobre a métrica, a mesma pode ser escrita evi-

denciando seus termos

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}), \quad (2.43)$$

com primeiro termo simétrico e o segundo termo antissimétrico. Como a parte antissimétrica de $g_{\mu\nu}$ não influencia na equação (2.33) podemos considerar a métrica simétrica, sem perda de generalidade.

2.8 Formas Diferenciais

As 1-formas são duais aos vetores de base. Outro tipo de dualidade que estas possuem é em relação às *linhas*. A integral de uma 1-forma sobre uma linha resulta em um número (no caso \mathbb{R}^1). Se considerarmos uma 1-forma em \mathbb{R}^3

$$\omega_1 = a_1 \mathbf{d}x + a_2 \mathbf{d}y + a_3 \mathbf{d}z, \quad (2.44)$$

a integral de ω_1 sobre a linha c_1 é

$$\int_{c_1} \omega_1 = \text{número}. \quad (2.45)$$

Se chamarmos essa linha de *1-cadeia*, podemos dizer que uma 1-forma é dual a uma 1-cadeia. Essa dualidade é uma consequência da integração, pois a definição de integral é uma soma sobre o caminho com o vetor tangente em cada ponto deste caminho. Essa noção de 1-cadeia pode ser então generalizada: uma área pode ser chamada de 2-cadeia, um volume pode ser chamado de 3-cadeia e um quadrivolume (no espaço-tempo, como exemplo) pode ser chamado de 4-cadeia. Seguindo essa lógica, podemos considerar um ponto como uma 0-cadeia.

Com isto podemos começar a definir um elemento, por exemplo, uma 2-forma ω_2 , dual a uma 2-cadeia que integrada ao longo de uma área c_2 resulta em um número,

ou seja,

$$\int_{c_2} \omega_2 = \text{número.} \quad (2.46)$$

Vale deixar claro que uma 2-forma não é simplesmente o produto de 1-formas, mas sim um *produto antissimétrico*, por conta da própria assimetria da área c_2 . Por exemplo, consideremos a área A de um paralelogramo definido pelos vetores \vec{v} e \vec{w} , tal que

$$A = |\vec{v} \times \vec{w}|,$$

sabemos que a área $A > 0$, porém o produto vetorial dos vetores $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$, por isso A é antissimétrico. Se os vetores \vec{v} e \vec{w} estiverem no plano xy , temos

$$\pm A = v_x w_y - v_y w_x = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix},$$

e assim podemos escrever as componentes v^i como

$$v^i = \mathbf{d}x^i(\vec{v}), \quad (2.47)$$

sendo $\mathbf{d}x^i$ uma 1-forma. Formalmente definimos uma *área 2-forma* como

$$\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j(\vec{v}, \vec{w}) = \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j - \mathbf{d}x^j \otimes \mathbf{d}x^i, \quad (2.48)$$

e o produto antissimétrico \wedge é chamado de *produto exterior* ou *produto cunha*.

Seguindo da definição, então

$$\begin{aligned} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j(\vec{v}, \vec{w}) &= \mathbf{d}x^i(\vec{v})\mathbf{d}x^j(\vec{w}) - \mathbf{d}x^j(\vec{v})\mathbf{d}x^i(\vec{w}), \\ &= v^i w^j - v^j w^i, \\ &= \begin{vmatrix} v^i & v^j \\ w^i & w^j \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos então definir o elemento chamado de 2-forma como

$$\omega_2 = a_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j. \quad (2.49)$$

Considerando essa 2-forma em \mathbb{R}^3 , podemos abrir suas componentes de forma mais explícita

$$\omega_2 = (a_{12} - a_{21}) \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 + (a_{23} - a_{32}) \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 + (a_{31} - a_{13}) \mathbf{d}x^3 \wedge \mathbf{d}x^1. \quad (2.50)$$

Seguindo essa lógica e expandindo a ideia, um *volume 3-forma* é

$$\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k, \quad (2.51)$$

e a mesma em \mathbb{R}^3

$$\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k = \epsilon^{ijk} \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3, \quad (2.52)$$

e assim por diante para formas diferenciais superiores.

Como da definição do produto cunha temos propriedades do tipo

$$\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 = -\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^1, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^1 = 0, \quad (2.54)$$

ou seja, para $i = j$ o produto cunha é nulo, podemos perceber que é impossível que haja em \mathbb{R}^3 uma 4-forma, pois se pegarmos um exemplo

$$F(x, y, z) \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 \wedge \mathbf{d}x^1,$$

que é claramente nulo, pois sempre haverá um índice repetido.

Uma forma diferencial tem seu 'grau' especificado em seu próprio nome (1-forma, 3-forma,...) de modo que essas formas são chamadas de ***p-formas***. Para um espaço

n -dimensional, o número de p -formas independentes é o mesmo que o número de $(n - p)$ -formas independentes.

Vamos tratar mais sobre a álgebra das p -formas. Consideremos as duas 1-formas $\omega = a_i \mathbf{d}x^i$ e $\sigma = b_j \mathbf{d}x^j$, seu produto cunha é

$$\begin{aligned}\omega \wedge \sigma &= a_i \mathbf{d}x^i \wedge b_j \mathbf{d}x^j, \\ &= a_i b_j \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j, \\ &= \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i) \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j, \\ &= c_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j,\end{aligned}$$

uma 2-forma, sendo que $c_{ij} = -c_{ji} = \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji}) = c_{[ij]}$ e os coeficientes c_{ij} são componentes de um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Fica claro que $\omega \wedge \sigma$ sendo uma 2-forma, possui a propriedade

$$\omega \wedge \sigma = -\sigma \wedge \omega. \quad (2.55)$$

Analogamente podemos generalizar essa ideia para os produtos cunha. Seja α uma p -forma e β uma q -forma, de modo que

$$\alpha = a_{k_1 \dots k_p} \mathbf{d}x^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{k_p} = a_{[k_1, \dots, k_p]} \mathbf{d}x^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{k_p}, \quad (2.56)$$

e os coeficientes $a_{[k_1, \dots, k_p]}$ são componentes de um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ totalmente antissimétrico. β é definido de modo semelhante, tal que

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \quad (2.57)$$

2.9 Transporte Paralelo e Diferenciação Absoluta

Um vetor é semelhante à outro se, e somente se, possuir mesmo módulo, sentido e direção. No espaço Euclidiano qualquer vetor com início fora da origem do plano cartesiano pode ser comparado e escrito como um vetor semelhante com início na origem. Isto se dá pois o transporte paralelo, isto é, seu transporte ao longo do espaço mantendo o mesmo ângulo tangente a cada ponto do espaço deste vetor com o versor direção do espaço em cada ponto do mesmo, do vetor no espaço plano saindo de um certo ponto A passando por BCD e retornando a A mantém as suas características originais: módulo, sentido e direção (figura 3.2). Logo ambos os vetores são equipolentes e podem ser escritos da mesma maneira e por este motivo, um vetor fora da origem pode ser escrito como um vetor equipolente na origem.

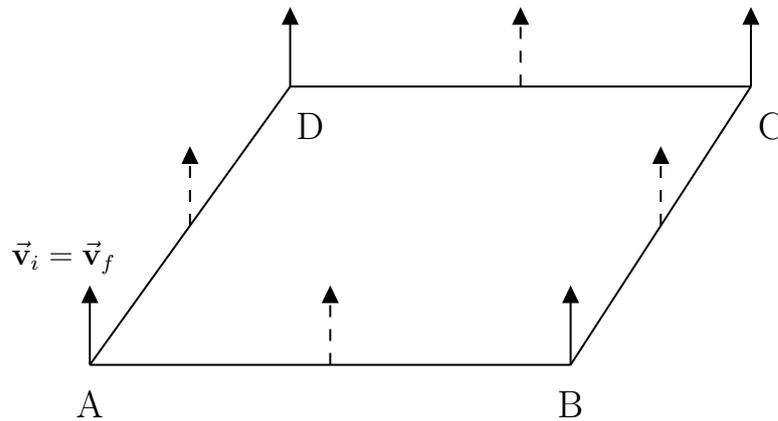


Figura 2.5 – Vetor \vec{v}_f transportado paralelamente num plano por ABCDA é o mesmo que o vetor \vec{v}_i sem ser transportado.

Em um espaço curvo isto nem sempre ocorre. Consideremos um vetor \vec{v}_i (onde o índice i significa inicial) que é tangente à superfície de uma esfera no ponto A e aponta para o lado leste dela. Ao ser transportado paralelamente o vetor tem que continuar a ser tangente à superfície da esfera em qualquer ponto. Se este vetor sai de A e é transportado paralelamente por BCD e de volta a A, sempre mantendo o mesmo ângulo tangente à superfície da esfera, podemos ver que o vetor \vec{v}_f (onde f significa final) no ponto A agora aponta para oeste, ou seja, \vec{v}_i e \vec{v}_f não são

equipolentes (figura 2.6).

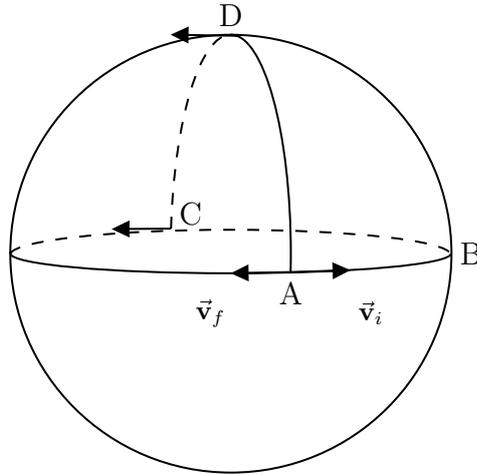


Figura 2.6 – Vetor \vec{v}_f transportado paralelamente na superfície de uma esfera por ABCDA aponta no sentido oposto de seu sentido original \vec{v}_i sem ser transportado.

A derivada comum de um vetor é definida como ⁷

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu V_\mu = V_{\mu,\nu},$$

isto é, possui dois índices inferiores, o que nos leva a crer que é um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Mas se fizermos uma transformação de coordenadas $x^\mu \mapsto x'^\mu$ sendo $V_\mu(x^\mu)$

$$V_\mu \mapsto V'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V_\rho,$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V_\rho \right), \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} V_\rho \neq V'_{\mu,\nu}. \end{aligned}$$

⁷Usaremos uma nova notação, a vírgula e o ponto e vírgula nos índices, para identificar a derivada comum e a derivada covariante, respectivamente, de um vetor ou 1-forma que serão tratados neste capítulo. Todo índice que vier depois da vírgula será considerado o índice do operador derivada aplicado.

O primeiro termo remete à transformação tensorial homogênea, mas o segundo termo a descaracteriza. Assim, a derivada comum de um vetor não é um tensor. Como o vetor por si só pode ser considerado um tensor, a derivada tira suas características tensoriais; uma delas o fato de se um tensor é nulo em um sistema de coordenadas ele é nulo em qualquer outro. Precisamos de uma derivada que aplicada em um tensor continue a manter suas propriedades e que também seja um tensor.

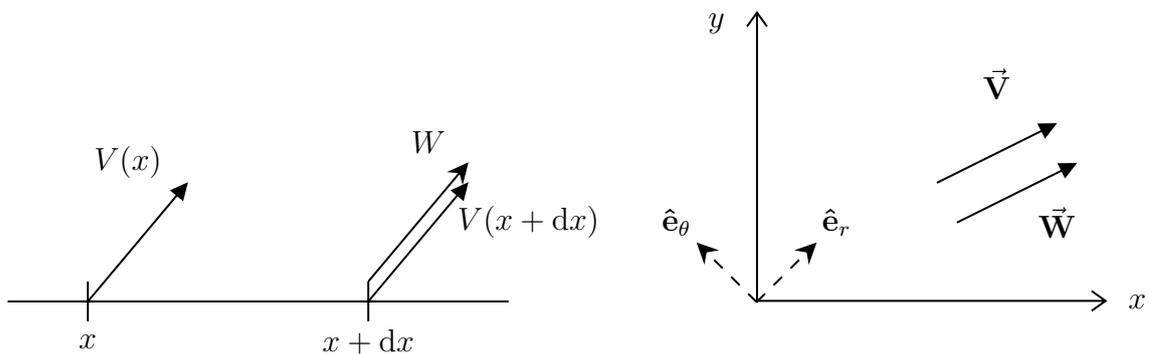


Figura 2.7 – Um campo vetorial $V(x)$ deslocado para um ponto em $x + dx$ pode ser descrito por um vetor W transportado paralelamente em um espaço plano (esquerda). Dois vetores \vec{V} e \vec{W} paralelos, na origem possuem mesmas componentes em coordenadas cartesianas mas componentes distintas em coordenadas polares (direita).

O problema pode ser notado através da própria definição de derivada: considerando um vetor $V(x)$ no ponto x e outro $V(x + dx) = V + dV$ no ponto $x + dx$ (figura 2.7), temos então que dV é

$$V(x + dx) - V(x) = \cancel{V} + dV - \cancel{V} = dV,$$

ou seja, a diferença entre dois vetores tomados em pontos diferentes. dV não é um vetor, mas dx é. Tomando dois vetores \vec{V} e \vec{W} no \mathbb{R}^2 em coordenadas cartesianas sendo que $\vec{V} \parallel \vec{W}$, suas componentes são equivalentes $V_x = W_x$ e $V_y = W_y$, com isso

$$V_i - W_i = 0.$$

No entanto em coordenadas polares, também no \mathbb{R}^2 , onde $V_r \neq W_r$ e $V_\theta \neq W_\theta$

$$V_i - W_i \neq 0.$$

A diferença entre dois vetores é nula em um sistema de coordenadas mas não nula em outro. Para construir uma derivada que seja um tensor, teremos que tomar a diferença entre dois vetores em um mesmo ponto. Vamos considerar então outro vetor $V + \delta V$ tomado no ponto $x + dx$ que é paralelo a V no ponto x , obtido por transporte paralelo.

A diferença entre estes dois vetores no ponto $x + dx$ é

$$DV^\mu = (V^\mu + dV^\mu) - (V^\mu + \delta V^\mu) = dV^\mu - \delta V^\mu,$$

por isso é razoável dizer que δV^μ é proporcional a dx e a $V(x)$. Ele então pode descrito como

$$\delta V^\mu = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda dx^\nu,$$

sendo $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ o símbolo do Christoffel, também chamado de coeficiente de conexão e tem este nome pois conecta o valor da componente do vetor em um ponto com outro em outro ponto distinto. Este novo objeto será melhor definido mais à frente. Então

$$DV^\mu = dV^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda dx^\nu,$$

que é a derivada covariante do vetor contravariante V^μ , também escrita como

$$V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda.$$

De modo semelhante, o mesmo tratamento feito para um vetor covariante V_μ ,

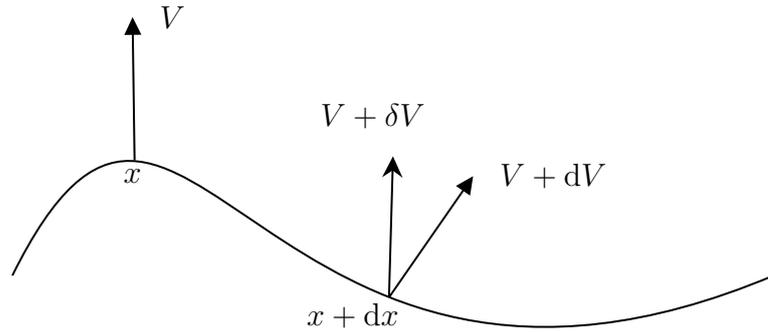


Figura 2.8 – O campo vetorial $V + dV$ transportado paralelamente em um espaço curvo até o ponto $x + dx$ não é paralelo à V mas $V + \delta V$ o é.

resultará na definição de derivada covariante para o mesmo

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda}.$$

Em uma variedade diferenciável podemos ter vetores e 1-formas que variam a direção de ambos suas componentes e seus vetores de base em diferentes pontos. Assim, diferente dos versores em coordenadas cartesianas $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ que mantêm suas direções ao longo do espaço plano, outros versores variam suas direções, como é o caso dos versores polares $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. Vamos definir um novo tipo de derivada, a **derivada absoluta** ou **derivada covariante**

$$\nabla = D_{\mu} \mathbf{d}x^{\mu}. \quad (2.58)$$

Esta derivada aplicada em um vetor atua como

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V} &= D_{\lambda} (V^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}) \mathbf{d}x^{\lambda}, \\ &= [(V^{\mu}_{,\lambda}) \mathbf{e}_{\mu} + V^{\mu} (\mathbf{e}_{\mu,\lambda})] \mathbf{d}x^{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Se dissermos que o vetor da base tangente acima é constante, de modo que sua derivada absoluta $\nabla \mathbf{V} = 0$, é fácil ver que em coordenadas retangulares

$$(V^\mu_{,\lambda})\mathbf{e}_\mu + V^\mu \cancel{(\mathbf{e}_{\mu,\lambda})} = 0,$$

então necessariamente a derivada da componente desse vetor tem que ser nula. No entanto, em coordenadas polares, onde a derivada dos vetores de base tangente não são nulas, para satisfazer a equação acima temos que

$$(V^\mu_{,\lambda})\mathbf{e}_\mu = -V^\mu(\mathbf{e}_{\mu,\lambda}),$$

ou seja, para satisfazer a condição de constância do vetor e sua derivada ser nula, a derivada dos vetores não pode ser nula.

Para definirmos como se dá essa derivada dos vetores da base tangente vamos usar como exemplo, num sistema holonômico, as coordenadas polares onde

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta},$$

sendo o vetor escrito nessas coordenadas é $\vec{\mathbf{r}} = r \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$. Assim

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}},$$

$$\mathbf{e}_\theta = -r \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \hat{\mathbf{j}},$$

e a derivada desses vetores em relação a r e θ

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{r,r} &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r = 0, \\ \mathbf{e}_{r,\theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_{\theta,r} &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_{\theta,\theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = -r \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - r \sin \theta \hat{\mathbf{j}} = -r \mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Percebemos que as derivadas dos vetores da base tangente também são vetores da mesma base. Vamos definir um novo objeto geométrico em termos dessas derivadas

$$\boxed{\mathbf{e}_{\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \mathbf{e}_{\kappa}}, \quad (2.60)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$ é o *Símbolo de Christoffel* e seus coeficientes são chamados de *coeficientes de conexão*. Estes coeficientes para o exemplo acima são

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r.\end{aligned}$$

Já na base não-holonômica, usando o mesmo exemplo acima, temos que

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta},$$

e obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}},\end{aligned}$$

e as derivadas em relação à r e θ

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{r,r} &= \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_r) = 0, \\ \mathbf{e}_{r,\theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{e}_r) = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_{\theta,r} &= \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_\theta) = 0, \\ \mathbf{e}_{\theta,\theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{e}_\theta) = -\cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}} = -\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Nas coordenadas não-holonômicas o símbolo de Christoffel é escrito como $\gamma^\kappa_{\mu\nu}$ ao invés de $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$. Do exemplo acima, os coeficientes de conexão são

$$\begin{aligned}\gamma^1_{11} &= \gamma^2_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = 0, \\ \gamma^1_{22} &= -\frac{1}{r}, \\ \gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Os coeficientes do símbolo de Christoffel são diferentes nas bases holonômicas e não-holonômicas. É importante notar que, na base holonômica, a permutação dos índices inferiores de $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ pode tanto ser simétrica ou não, enquanto o mesmo não acontece com $\gamma^\kappa_{\mu\nu}$ na base não-holonômica. Do exemplo acima, podemos perceber que $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$, isto é, permutando os índices obtemos o mesmo valor pro coeficiente de conexão. Essa simetria se mostrará importante e será discutida com mais profundidade posteriormente.

A 1-forma pode ser considerada como a derivada de uma função f em uma direção não especificada $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)dx^i$. De modo semelhante a derivada covariante é

parecida. Atuando-a num vetor temos

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathbf{V} &= (D_\kappa \mathbf{V}) \mathbf{d}x^\kappa = (V^\mu_{;\kappa} \mathbf{e}_\mu + V^\mu \mathbf{e}_{\mu,\kappa}) \mathbf{d}x^\kappa, \\
 &= (V^\mu_{;\kappa} \mathbf{e}_\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\lambda \mathbf{e}_\mu) \mathbf{d}x^\kappa, \\
 \nabla \mathbf{V} &= (V^\mu_{;\kappa} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\lambda) \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{d}x^\kappa,
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

esta é a definição da derivada absoluta ou derivada covariante atuando em um vetor, e podemos perceber que a mesma é um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. O termo entre parênteses é geralmente escrito como

$$V^\mu_{;\kappa} = V^\mu_{,\kappa} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\lambda, \tag{2.62}$$

onde o ponto e vírgula indica essa nova derivada, sendo esta a derivada absoluta de um objeto contravariante.

A derivada covariante aplicada à uma 1-forma resulta em um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, mas no entanto sua atuação se dá de forma diferente da atuação em um vetor. Para ver como isso ocorre vamos antes definir

$$\omega^\mu_{\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \mathbf{d}x^\kappa, \tag{2.63}$$

que é a chamada *conexão 1-forma*. A equação (2.61) pode então ser reescrita como

$$\nabla \mathbf{V} = (V^\mu_{;\nu} \mathbf{d}x^\nu + \omega^\mu_{\nu} V^\nu) \mathbf{e}_\mu,$$

e da equação acima temos que

$$\nabla \mathbf{e}_\nu = \omega^\mu_{\nu} \mathbf{e}_\mu. \tag{2.64}$$

A partir disso, vamos definir a derivada absoluta de uma 1-forma $\nabla \mathbf{d}x^\mu$ através

da derivada covariante aplicada à operação de dualidade

$$\begin{aligned}\nabla\langle\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\nu\rangle &= 0, \\ \langle\nabla\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\nu\rangle + \langle\mathbf{d}x^\mu, \nabla\mathbf{e}_\nu\rangle &= 0,\end{aligned}$$

e da equação (2.64) temos

$$\begin{aligned}\langle\nabla\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\nu\rangle &= -\langle\mathbf{d}x^\mu, \boldsymbol{\omega}^\lambda{}_\nu\mathbf{e}_\lambda\rangle, \\ &= -\boldsymbol{\omega}^\lambda{}_\nu\langle\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\lambda\rangle, \\ \langle\nabla\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\nu\rangle &= -\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu.\end{aligned}$$

Vamos definir, genericamente, que

$$\nabla\mathbf{d}x^\mu = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu{}_\lambda \otimes \mathbf{d}x^\lambda, \quad (2.65)$$

e voltando na equação anterior

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu{}_\lambda \mathbf{d}x^\lambda, \mathbf{e}_\nu\rangle &= -\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu, \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu{}_\nu &= -\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu.\end{aligned}$$

Assim a derivada covariante de uma 1-forma é

$$\nabla\mathbf{A} = D_\nu(A_\mu \mathbf{d}x^\mu) \mathbf{d}x^\nu = A_{\mu,\nu} \mathbf{d}x^\nu \otimes \mathbf{d}x^\mu + A_\mu \tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu{}_\nu \otimes \mathbf{d}x^\nu,$$

mas $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu{}_\nu = -\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa} \mathbf{d}x^\kappa$, então

$$\nabla\mathbf{A} = (A_{\mu,\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} A_\kappa) \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu, \quad (2.66)$$

e finalmente

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} A_{\kappa}, \quad (2.67)$$

é a derivada absoluta de um vetor covariante ou de uma 1-forma.

A derivada absoluta de uma 0-forma (função escalar $f(x^\mu)$) é bem mais fácil de se obter uma vez que esta não possui uma base para ser derivada, e pode ser escrita simplesmente como $\mathbf{d}f$, tal que

$$\nabla f = \mathbf{d}f = \partial_\mu f \mathbf{d}x^\mu, \quad (2.68)$$

sendo $\mathbf{d}x^\mu$ a base da 1-forma. Em termos das componentes, temos

$$D_\mu f = f_{;\mu} = \partial_\mu f = f_{,\mu}. \quad (2.69)$$

Operar a derivada absoluta em uma 1-forma é de certa forma equivalente a usar o operador \mathbf{d} . Usando a notação para a base da 1-forma $\theta^\mu = \mathbf{d}x^\mu$, temos

$$\nabla \theta^\mu = \mathbf{d}\theta^\mu,$$

podendo ser escrita também como

$$\boxed{\mathbf{d}\theta^\mu = -\omega^\mu_{\nu} \wedge \theta^\nu}, \quad (2.70)$$

que é conhecida como *Equação de Estrutura de Cartan*.

Resumindo, em termos das componentes, as derivadas covariantes de vetores e 1-formas são, respectivamente:

$$\boxed{\begin{aligned} V^{\mu}_{;\nu} &= V^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\nu} V^{\kappa}, \\ A_{\mu;\nu} &= A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} A_{\kappa}. \end{aligned}} \quad (2.71)$$

Para sabermos como uma derivada covariante atua em um tensor vamos considerar o tensor misto $\mathbf{t} = t^\mu{}_\nu \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$, com isso

$$\begin{aligned} D_\lambda \mathbf{t} &= D_\lambda (t^\mu{}_\nu \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu), \\ &= (\partial_\lambda t^\mu{}_\nu) \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu + t^\mu{}_\nu (D_\lambda \mathbf{e}_\mu) \otimes \mathbf{d}x^\nu + t^\mu{}_\nu \mathbf{e}_\mu \otimes (D_\lambda \mathbf{d}x^\nu), \\ &= (t^\mu{}_{\nu,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\kappa\lambda} t^\kappa{}_\nu - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} t^\mu{}_\kappa) \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu, \\ &= t^\mu{}_{\nu;\lambda} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu, \end{aligned}$$

e podemos perceber que a derivada absoluta atua nos índices covariantes da mesma maneira que em uma 1-forma e nos índices contravariantes da mesma maneira que num vetor, o que já era de se esperar, tendo em vista que tensores podem ser escritos em termos de vetores e 1-formas. Com isso podemos generalizar estes resultados para tensores do tipo $\binom{r}{s}$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\dots}{}_{\kappa\lambda\dots\rho} &= T^{\mu\nu\dots}{}_{\kappa\lambda\dots\rho} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho} T^{\sigma\nu\dots}{}_{\kappa\lambda\dots} + \Gamma^\nu{}_{\sigma\rho} T^{\mu\sigma\dots}{}_{\kappa\lambda\dots} + \dots \\ &\quad - \Gamma^\sigma{}_{\kappa\rho} T^{\mu\nu\dots}{}_{\sigma\lambda\dots} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\rho} T^{\mu\nu\dots}{}_{\kappa\sigma\dots} - \dots \quad (2.72) \end{aligned}$$

2.9.1 Derivada Covariante da Métrica

Da operação de dualidade, sabemos que um vetor (ou tensor) pode ter seu índice abaixado ou levantado, isto é,

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu,$$

que também é escrito como

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{g}, \mathbf{V} \rangle,$$

onde \mathbf{V} indica um vetor, ou seja, a dualidade da métrica com um vetor resulta em uma 1-forma e vice-versa. A derivada covariante é um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e se aplicarmos ela na equação acima obtemos

$$\nabla \mathbf{A} = \nabla \langle \mathbf{g}, \mathbf{V} \rangle = \langle \nabla \mathbf{g}, \mathbf{V} \rangle + \langle \mathbf{g}, \nabla \mathbf{V} \rangle.$$

Como a 1-forma é um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e a derivada covariante também, a derivada covariante de uma 1-forma deve resultar em um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Então, em termos das componentes, a equação acima resulta em

$$A_{\mu;\kappa} = g_{\mu\nu;\kappa} V^\nu + g_{\mu\nu} V^\nu_{;\kappa},$$

onde notamos que o segundo termo do lado direito é um vetor que foi derivado por uma derivada covariante, logo é um tensor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A atuação da métrica em um tensor de qualquer tipo abaixa ou levanta seus índices, neste caso, abaixa o índice do vetor derivado, que passa a ser um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se notarmos o termo do lado esquerdo, percebemos que o mesmo também é um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, portanto pelo Teorema do Quociente o lado direito da equação tem que ser um tensor do mesmo tipo que do lado esquerdo. Isso é possível somente se considerarmos $g_{\mu\nu;\kappa} V^\nu = 0$, e como V^ν é um vetor arbitrário

$$g_{\mu\nu;\kappa} = 0, \tag{2.73}$$

ou de forma mais geral

$$\boxed{\nabla \mathbf{g} = 0}, \tag{2.74}$$

que é a chamada de *condição de compatibilidade da métrica* [11]. Podemos usar esta condição para descrevermos o símbolo de Christoffel em termos da métrica. Desenvolvendo a derivada na equação (2.73), temos

$$g_{\mu\nu;\kappa} = g_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda}, \quad (2.75)$$

fazendo uma permutação cíclica dos índices na equação acima, temos

$$g_{\kappa\mu;\nu} = g_{\kappa\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda}, \quad (2.76)$$

e novamente

$$g_{\nu\kappa;\mu} = g_{\nu\kappa,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}g_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}g_{\nu\lambda}. \quad (2.77)$$

Combinando estas equações como (2.75) + (2.76) - (2.77), temos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\kappa} + g_{\kappa\mu;\nu} - g_{\nu\kappa;\mu} &= g_{\mu\nu,\kappa} - \cancel{\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}g_{\lambda\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda} \\ &\quad + g_{\kappa\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu} - \cancel{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda}} \\ &\quad - g_{\nu\kappa,\mu} + \cancel{\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}g_{\lambda\kappa}} + \cancel{\Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}g_{\nu\lambda}}, \end{aligned}$$

os termos cancelados são semelhantes pois os índices inferiores do símbolo de Christoffel e a métrica são simétricos. Assim

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\kappa} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\nu\kappa,\mu} - 2\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda} &= 0, \\ \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\kappa} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\nu\kappa,\mu}), \end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados por $g^{\mu\rho}$ temos

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}g_{\lambda\mu}g^{\mu\rho} &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\mu\nu,\kappa} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\nu\kappa,\mu}), \\ \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa} &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\mu\nu,\kappa} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\nu\kappa,\mu}), \end{aligned} \quad (2.78)$$

por fim, fazendo uma simples mudança estética nos índices, temos

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \quad (2.79)$$

que é forma de se escrever o símbolo de Christoffel através das métricas e será de grande utilidade na descrição da geometria do espaço curvo.

É útil obter uma expressão para a forma contraída $\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}$ do símbolo de Christoffel. Da definição da métrica, temos que $g^{\mu\rho}$ que é a inversa de $g_{\mu\rho}$, portanto vamos fazer

$$g^{\mu\rho} = \frac{1}{g}\Delta^{\mu\rho}, \quad (2.80)$$

onde $\Delta^{\mu\rho}$ é a menor complementar de $g_{\mu\rho}$ e g a sua determinante. Na equação acima, multiplicando por $g_{\nu\rho}$, temos

$$\begin{aligned} g_{\nu\rho}g^{\mu\rho}g &= g_{\nu\rho}\Delta^{\mu\rho}, \\ g &= g_{\mu\rho}\Delta^{\mu\rho}. \end{aligned}$$

Diferenciando a equação acima, temos [11, p. 98]:

$$dg = (dg_{\mu\nu})\Delta^{\mu\nu} = (dg_{\mu\nu})gg^{\mu\nu}, \quad (2.81)$$

o que implica em

$$\partial_{\lambda}g = gg^{\mu\nu}(\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}). \quad (2.82)$$

Se derivarmos a expressão $\ln \sqrt{-g}$, obteremos

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} \ln \sqrt{-g} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{1}{2\sqrt{-g}} \partial_{\lambda}(-g), \\ \partial_{\lambda} \ln \sqrt{-g} &= \frac{1}{2g} \partial_{\lambda}g. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Fazendo a contração de um dos índices inferiores com o índice superior do símbolo

de Christoffel

$$g_{\kappa}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2} g_{\kappa}^{\nu} g^{\kappa\rho} (g_{\nu\rho,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}),$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho}).$$

substituindo a equação (2.82) acima temos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2g} \partial_{\mu} g,$$

e substituindo (2.83) acima obteremos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2g} 2g \partial_{\mu} \sqrt{-g},$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = (\sqrt{-g})_{,\mu}, \quad (2.84)$$

uma expressão que será de grande utilidade quando formos definir a ação gravitacional.

2.10 Torção e Curvatura

As derivadas comuns sempre comutam, mas as derivadas covariantes podem ou não comutar e isto nos dá informação sobre a curvatura do espaço. Se há a comutação das derivadas covariantes

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] \mathbf{V} = 0, \quad (2.85)$$

então o espaço é plano, isto é, não há nenhuma curvatura. Se essas derivadas não comutam

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] \mathbf{V} \neq 0, \quad (2.86)$$

então o espaço é curvo. Esta curvatura será melhor discutida no próximo capítulo onde desta não comutação definiremos um tensor para a curvatura.

O símbolo de Christoffel é usado, como parte da derivada absoluta, para conectar vetores em pontos diferentes da variedade diferenciável. Mas o símbolo de Christoffel é um tensor? Como se dá sua transformação de coordenadas? Vamos considerar a derivada covariante de W_μ e o próprio vetor, assim fazendo uma transformação $x^\mu \mapsto x'^\mu$ temos

$$\begin{aligned} W'_{\mu;\nu} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} W_{\rho;\sigma}, \\ W'_{\lambda} &= \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} W_{\kappa}, \end{aligned}$$

com isso, neste sistema de coordenadas temos

$$W'_{\mu;\nu} = W'_{\mu,\nu} - \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} W'_{\lambda},$$

onde

$$W'_{\mu,\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} W_{\kappa} \right) = \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} W_{\kappa} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} W_{\lambda,\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}.$$

A derivada covariante fica

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} W_{\rho;\sigma} = \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} W_{\lambda} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} W_{\lambda,\rho} - \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} W_{\lambda},$$

e usando

$$W_{\lambda,\rho} = W_{\lambda;\rho} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho} W_{\beta},$$

na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} W_{\rho;\sigma} &= \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} W_\lambda + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} W_{\lambda;\rho}}_{\substack{\rho \rightarrow \sigma \\ \lambda \rightarrow \rho}} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma^\beta_{\lambda\rho} W_\beta - \Gamma'^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} W_\lambda, \\ \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} W_{\rho;\sigma} &= \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} W_\lambda + \cancel{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} W_{\rho;\sigma}} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma^\beta_{\lambda\rho} W_\beta - \Gamma'^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} W_\lambda, \\ \Gamma'^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} W_\lambda &= \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} W_\lambda + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma^\beta_{\lambda\rho} W_\beta}_{\lambda \leftrightarrow \beta}, \\ \left(\Gamma'^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \right) W_\lambda &= \left(\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \Gamma^\lambda_{\beta\rho} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \right) W_\lambda. \end{aligned}$$

Como W_λ é um vetor arbitrário, os termos em parênteses são equivalentes de ambos os lados da equação. Multiplicando a equação acima por $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda}$, temos

$$\Gamma'^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\beta\rho} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda}. \quad (2.87)$$

Esta é a transformação de coordenadas do coeficiente de conexão. Apesar do primeiro termo do lado direito da equação ser uma transformação homogênea, o segundo termo não o é. Logo $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ não é um tensor.

No entanto podemos definir um tensor $T^\kappa_{\mu\nu}$ como uma diferença de símbolos de Christoffel

$$T^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \quad (2.88)$$

de modo que da equação (2.87), temos que sua transformação

$$\begin{aligned} T'^\kappa_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} + \cancel{\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}} - \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - \cancel{\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu}}, \\ T'^\kappa_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} (\Gamma^\lambda_{\sigma\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}), \end{aligned}$$

que é uma transformação homogênea, logo $T^\kappa_{\mu\nu}$ é um tensor, também conhecido como *tensor de torção*. Como já dito anteriormente, os índices inferiores do símbolo

de Christoffel podem ou não ser simétricos. Para o caso de estes serem simétricos temos $T_{\mu\nu}^{\kappa} = 0$. Ou seja, a simetria dos índices inferiores do símbolo de Christoffel indicam que o espaço é livre de torção.

Em termos de formas diferenciais, a condição de zero torção é dada por

$$\omega^{\kappa}_{\nu} \wedge dx^{\nu} = 0, \quad (2.89)$$

sendo ω^{κ}_{ν} a conexão 1-forma e da sua definição na equação (2.63), temos

$$\begin{aligned} \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} &= 0, \\ (\Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} &= 0, \\ \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} &= \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Para o caso geral na qual a base dx^{μ} não é necessariamente holonômica, definimos a *torção 2-forma*:

$$\Sigma^{\mu} = d\theta^{\mu} + \omega^{\mu}_{\kappa} \wedge \theta^{\kappa}, \quad (2.90)$$

e da equação de estrutura de Cartan (2.70), temos

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu} &= -\omega^{\mu}_{\nu} \wedge dx^{\nu} + \omega^{\mu}_{\kappa} \wedge dx^{\kappa}, \\ &= -\gamma^{\mu}_{\nu\rho} dx^{\rho} \wedge dx^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\sigma} dx^{\sigma} \wedge dx^{\kappa}, \\ &= (\gamma^{\mu}_{\rho\nu} - \gamma^{\mu}_{\nu\rho}) dx^{\rho} \wedge dx^{\nu} + (\Gamma^{\mu}_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\kappa}) dx^{\sigma} \wedge dx^{\kappa}, \end{aligned}$$

e o espaço é completamente livre de torção se $\Sigma^{\mu} = 0$.

Um espaço *curvo* pode ou não ser um espaço *torcido*. Na Relatividade Geral de Einstein não consideramos espaços torcidos. Porém a torção é importante para a descrição de partículas com spin no espaço-tempo.

2.11 Fórmula Geral dos Coeficientes de Conexão

A condição de zero torção é uma 2-forma, escrita por meio de produto cunha. Como vimos, as p-formas são antissimétricas e assim podemos escrever a equação de estrutura de Cartan (2.70) como

$$\mathbf{d}\theta^\kappa = -\frac{1}{2}C^\kappa_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu, \quad (2.91)$$

onde $C^\kappa_{\mu\nu} = -C^\kappa_{\nu\mu}$ são coeficientes e $\mathbf{d}x^\mu$ vem da base da conexão 1-forma (2.63).

Assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C^\kappa_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu &= \gamma^\kappa_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu, \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^\kappa_{\mu\nu} - \gamma^\kappa_{\nu\mu})\mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu, \end{aligned}$$

portanto

$$C^\kappa_{\mu\nu} = \gamma^\kappa_{\mu\nu} - \gamma^\kappa_{\nu\mu}. \quad (2.92)$$

Vamos abaixar o índice κ da equação acima com a métrica, obtendo $C_{\kappa\mu\nu} = g_{\kappa\rho}C^\rho_{\mu\nu}$ e $\gamma_{\kappa\mu\nu} = g_{\kappa\rho}\gamma^\rho_{\mu\nu}$ e fazer duas permutações cíclicas no índices, de modo a obter as equações

$$C_{\kappa\mu\nu} = \gamma_{\kappa\nu\mu} - \gamma_{\kappa\mu\nu}, \quad (2.93)$$

$$C_{\nu\kappa\mu} = \gamma_{\nu\mu\kappa} - \gamma_{\nu\kappa\mu}, \quad (2.94)$$

$$C_{\mu\nu\kappa} = \gamma_{\mu\kappa\nu} - \gamma_{\mu\nu\kappa}, \quad (2.95)$$

somando as equações como (2.93) + (2.95) - (2.94) e agrupando os termos que ter-

minam em índices iguais, temos

$$\begin{aligned}
 C_{\kappa\mu\nu} + C_{\mu\nu\kappa} - C_{\nu\kappa\mu} &= \gamma_{\kappa\nu\mu} - \gamma_{\kappa\mu\nu} + \gamma_{\mu\kappa\nu} - \gamma_{\mu\nu\kappa} - \gamma_{\nu\mu\kappa} + \gamma_{\nu\kappa\mu}, \\
 &= (\gamma_{\kappa\nu\mu} + \gamma_{\nu\kappa\mu}) - (\gamma_{\mu\nu\kappa} + \gamma_{\nu\mu\kappa}) + (\gamma_{\mu\kappa\nu} + \gamma_{\kappa\mu\nu}) - \gamma_{\kappa\mu\nu} - \gamma_{\kappa\mu\nu}, \\
 &= (\gamma_{\kappa\nu\mu} + \gamma_{\nu\kappa\mu}) - (\gamma_{\mu\nu\kappa} + \gamma_{\nu\mu\kappa}) + (\gamma_{\mu\kappa\nu} + \gamma_{\kappa\mu\nu}) - 2\gamma_{\kappa\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Da condição de compatibilidade da métrica (2.73) e usando a estrutura de Cartan (2.41), obtemos

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathbf{g} &= (\mathbf{d}g_{\mu\nu})\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu + g_{\mu\nu}(\mathbf{d}\theta^\mu) \otimes \mathbf{d}x^\nu + g_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes (\mathbf{d}\theta^\nu), \\
 &= (\mathbf{d}g_{\mu\nu} - \omega^\kappa{}_\mu g_{\kappa\nu} - \omega^\kappa{}_\nu g_{\mu\kappa})\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu, \\
 &= (\mathbf{d}g_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu} - \omega_{\mu\nu})\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu = 0,
 \end{aligned}$$

e finalmente

$$\mathbf{d}g_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}. \tag{2.97}$$

Para uma base holonômica, temos

$$\mathbf{d}g_{\mu\nu} = \partial_\kappa g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\kappa = g_{\mu\nu,\kappa} \mathbf{d}x^\kappa,$$

enquanto na base não-holonômica

$$\mathbf{d}g_{\mu\nu} = e_\kappa(g_{\mu\nu})\mathbf{d}x^\kappa,$$

assim, nessa base

$$\begin{aligned} \mathbf{d}g_{\mu\nu} &= (\gamma_{\mu\nu\lambda} + \gamma_{\nu\mu\lambda})\mathbf{d}x^\lambda, \\ e_\lambda(g_{\mu\nu})\mathbf{d}x^\lambda &= (\gamma_{\mu\nu\lambda} + \gamma_{\nu\mu\lambda})\mathbf{d}x^\lambda, \\ e_\kappa(g_{\mu\nu}) &= \gamma_{\mu\nu\kappa} + \gamma_{\nu\mu\kappa}, \end{aligned}$$

e fazendo duas permutações cíclicas, encontramos os termos

$$e_\kappa(g_{\mu\nu}) = \gamma_{\mu\nu\kappa} + \gamma_{\nu\mu\kappa} \quad ; \quad e_\nu(g_{\kappa\mu}) = \gamma_{\kappa\mu\nu} + \gamma_{\mu\kappa\nu} \quad ; \quad e_\mu(g_{\nu\kappa}) = \gamma_{\nu\kappa\mu} + \gamma_{\kappa\nu\mu},$$

e podemos identificá-los em (2.96), obtendo então

$$\boxed{\gamma_{\kappa\mu\nu} = \frac{1}{2}\{e_\mu(g_{\nu\kappa}) + e_\nu(g_{\kappa\mu}) - e_\kappa(g_{\mu\nu}) - C_{\kappa\mu\nu} - C_{\mu\nu\kappa} + C_{\nu\kappa\mu}\}}, \quad (2.98)$$

que é a fórmula geral dos coeficientes de conexão.

Na base coordenada (holonômica) temos que os termos da métrica $e_\kappa(g_{\mu\nu}) \rightarrow g_{\mu\nu,\kappa}$ e dos coeficientes $C_{\kappa\mu\nu} = 0$, podemos trocar $\gamma \rightarrow \Gamma$ e obtemos a equação do símbolo de Christoffel (2.79).

Na base ortonormal (não-holonômica) temos a métrica unitária $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ (a menos da assinatura do espaço) e a derivada da métrica $e_\kappa(g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu,\kappa} = 0$, logo

$$\gamma_{\kappa\mu\nu} = -\frac{1}{2}(C_{\kappa\mu\nu} + C_{\mu\nu\kappa} - C_{\nu\kappa\mu}). \quad (2.99)$$

Capítulo 3

Relatividade de Einstein e Solução de Schwarzschild

Uma partícula livre se move de um ponto a outro de modo que o tempo em que isto acontece é mínimo, de acordo com o Princípio de Mínima Ação [16]. Num espaço plano, o caminho percorrido por ela é uma reta. Em um espaço curvo este caminho percorrido pela partícula é chamado de geodésica e nem sempre é uma reta. Neste capítulo definiremos as equações de movimento de um corpo em uma geodésica e as chamadas coordenadas geodésicas, um sistema de coordenadas definidas em um ponto P da variedade onde os coeficientes de conexão $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ são nulos, ou seja, $\partial_{\kappa}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\kappa} = 0$. Assim, perceberemos como que localmente neste ponto o espaço curvo se assemelha ao espaço plano de Minkowski.

Os objetos geométricos da Geometria Diferencial que definem a curvatura de um espaço são o tensor de Riemann, obtido do transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho fechado pela variedade, o tensor de Ricci, que é obtido da contração do tensor de Riemann, e o escalar de curvatura. Com estes objetos, Einstein conseguiu definir um tensor que possui propriedades de conservação: o tensor de Einstein. Outro tensor que apresenta conservação e que representa a matéria é o tensor momento-energia. Destes tensores e suas propriedades, do Princípio de

Equivalência e das equações da mecânica clássica, no limite de baixas velocidades e campos gravitacionais fracos, Einstein propôs sua famosa equação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu},$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura e $T_{\mu\nu}$ o tensor momento-energia. Todos estes objetos e equações serão obtidos neste trabalho.

Como a maioria das teorias físicas possuem uma formulação usando o princípio de mínima ação, dado a importância deste princípio, a teoria da Relatividade Geral também possui esta formulação, conhecida como ação gravitacional ou ação de Einstein-Hilbert.

3.1 Geodésicas

Em um espaço plano a menor distância entre dois pontos é sempre uma reta, isto é, sempre o caminho "mais reto" e o de menor distância entre os pontos. Já em um espaço curvo, mantendo-se essa mesma noção, o menor caminho entre dois pontos é chamado de *geodésica*.

O comprimento de arco entre um ponto x^μ e outro ponto $x^\mu + dx^\mu$ é ds (figura 3.1) e podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \\ ds &= \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}, \end{aligned}$$

então a distância entre o ponto $P(x^\mu)$ e $Q(x^\mu + dx^\mu)$ é

$$s = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}. \quad (3.1)$$

Podemos parametrizar essa curva entre os pontos por um parâmetro qualquer λ ,

assim $x^\mu(\lambda)$ e definimos os pontos como $P(\lambda_1)$ e $Q(\lambda_2)$. Escrevendo a derivada de x^μ em relação a λ como \dot{x}^μ , temos

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda,$$

que também pode ser escrito como

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{L} d\lambda,$$

onde L é a Lagrangeana e $L = L(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ pois a métrica depende das coordenadas.

Agora vamos supor que essa curva entre P e Q se deforma, ou seja

$$x^\mu(\lambda) \mapsto x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda),$$

sendo que nos extremos essa deformação é nula $\delta x^\mu(\lambda_1) = \delta x^\mu(\lambda_2) = 0$.

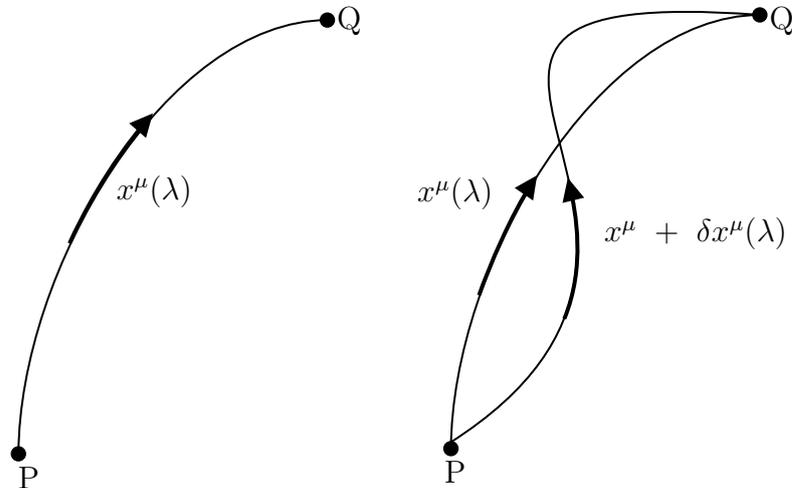


Figura 3.1 – Curva parametrizada entre os pontos P e Q (esquerda) e esta mesma curva deformada mas com os pontos P e Q fixos (direita).

A geodésica é o caminho de comprimento mínimo, isto é, sua deformação é a

menor possível $\delta \int ds = 0$. Por conveniência tomaremos $\delta \int ds^2 = 0$. Assim

$$\delta s^2 = \int_P^Q \delta L d\lambda = \int_P^Q \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right) d\lambda = 0, \quad (3.2)$$

fazendo $\delta \dot{x}^\mu = \frac{d}{d\lambda}$ e substituindo acima

$$\int_P^Q \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) d\lambda + \int_P^Q \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right) d\lambda = 0. \quad (3.3)$$

Podemos reescrever o primeiro termo como

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu.$$

Vemos facilmente que a integral do primeiro termo em (3.3) é nula pois a deformação nos extremos é nula $\delta x^\mu|_P^Q = 0$, então na equação acima

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu = - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu,$$

e substituindo em (3.2), temos

$$\int_P^Q \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \right\} \delta x^\mu d\lambda = 0.$$

Como $d\lambda$ e δx^μ são arbitrários, logo não podem ser nulos, o termo dentro das chaves é que deve ser nulo, então

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange para geodésicas [16], [11], [9]. Calculando os termos para $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ e substituindo-os na equação de Euler-Lagrange (3.4), obtemos

$$g_{\mu\nu,\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2g_{\mu\nu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu = 0.$$

No segundo termo devido a simetria em \dot{x}^μ e \dot{x}^ν , podemos fazer

$$g_{\mu\sigma,\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu}),$$

portanto

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\sigma}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - 2g_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu &= 0, \\ g_{\mu\sigma}\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= 0, \end{aligned}$$

multiplicando tudo por $g^{\rho\sigma}$, substituindo os termos e contraindo o delta de Kronecker, obtemos

$$\boxed{\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,} \quad (3.5)$$

que é a equação de movimento de uma partícula caindo livremente em uma geodésica. Podemos perceber que ela carrega a conexão, o símbolo de Christoffel, portanto depende da métrica do espaço. No espaço plano, como a métrica é constante, suas derivadas são nulas e portanto $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$ sobrando somente o termo de derivada segunda na posição. Se parametrizarmos a equação (3.5) em relação à t e considerarmos $x^1 = x$ e $x^2 = y$, teremos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = at + b \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad y = ct + d,$$

ambas equações de retas no espaço plano, como esperado [16].

3.2 Coordenadas Geodésicas

Vamos considerar um ponto P em uma curva geodésica, que pode ser parametrizada de modo que um ponto próximo é $x^\mu(s)$, onde s é o comprimento de arco

medido em P . Expandindo $x^\mu(s)$ em torno de P , usando a expansão de Taylor:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots,$$

temos então

$$x^\mu(s) = x^\mu_{(P)} + \dot{x}^\mu_{(P)}s + \frac{1}{2}\ddot{x}^\mu_{(P)}s^2 + \frac{1}{6}\dddot{x}^\mu_{(P)}s^3 + \mathcal{O}(s^4). \quad (3.6)$$

Como o ponto $x^\mu(s)$ está em uma geodésica, ele deve satisfazer a equação (3.5) da geodésica. Isolando o termo de segunda derivada de x^μ e considerando em um ponto P , temos

$$\ddot{x}^\mu_{(P)} = -(\Gamma^\mu_{\nu\kappa})_P \dot{x}^\nu_{(P)} \dot{x}^\kappa_{(P)},$$

renomeando as derivadas de x^μ no ponto P como $\dot{x}^\mu_{(P)} = v^\mu$, temos

$$\ddot{x}^\mu_{(P)} = -(\Gamma^\mu_{\nu\kappa})v^\nu v^\kappa. \quad (3.7)$$

Diferenciando a equação da geodésica podemos obter \ddot{x}^μ :

$$\ddot{x}^\mu + \dot{\Gamma}^\mu_{\nu\kappa} \dot{x}^\nu \dot{x}^\kappa + 2\ddot{x}^\nu \dot{x}^\kappa = 0.$$

Como o símbolo de Christoffel tem dependência somente de coordenadas, tal que $\Gamma^\mu_{\nu\kappa} = \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(x^\lambda)$ e $x^\lambda = x^\lambda(s)$, vamos considerar

$$\dot{\Gamma}^\mu_{\nu\kappa} = \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} \dot{x}^\lambda,$$

assim

$$\ddot{x}^\mu = -(\Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \dot{x}^\kappa + 2\Gamma^\mu_{\nu\kappa} \ddot{x}^\nu \dot{x}^\kappa).$$

Substituindo $\ddot{x}^\nu = -\Gamma^\nu_{\sigma\rho}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho$ na equação acima

$$\begin{aligned}\ddot{x}^\mu &= -\Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu\dot{x}^\kappa + \underbrace{2\Gamma^\mu_{\nu\kappa}\Gamma^\nu_{\sigma\rho}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}_{\substack{\sigma\leftrightarrow\lambda \\ \rho\leftrightarrow\nu}}, \\ \ddot{x}^\mu &= \underbrace{(2\Gamma^\mu_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\kappa})}_{\Lambda^\mu_{\nu\kappa\lambda}}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu\dot{x}^\kappa, \\ \ddot{x}^\mu &= \Lambda^\mu_{\nu\kappa\lambda}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu\dot{x}^\kappa,\end{aligned}$$

tomando a equação no ponto P temos

$$\ddot{x}^\mu_{(P)} = (\Lambda^\mu_{\nu\kappa\lambda})_P v^\lambda v^\nu v^\kappa. \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.7) e (3.8) na equação (3.6), obtemos:

$$x^\mu(s) = x^\mu_{(P)} + v^\mu s - \frac{1}{2}(\Gamma^\mu_{\nu\kappa})_P v^\nu v^\kappa s^2 + \frac{1}{6}(\Lambda^\mu_{\nu\kappa\lambda})_P v^\lambda v^\nu v^\kappa s^3 + \mathcal{O}(s^4). \quad (3.9)$$

Através do chamado *mapa exponencial* [10, pág. 276] podemos definir um sistema de coordenadas, chamado de coordenadas geodésicas ou coordenadas normais de Riemann, tal que

$$y^\mu(s) = v^\mu s, \quad \text{sendo} \quad v^\mu = \dot{y}^\mu.$$

Comparando a equação acima com a equação (3.9) e desconsiderando os termos de quarta ordem e superiores, temos que o terceiro e quarto termos são nulos. Como as derivadas de x^μ são arbitrárias, isto nos leva ao seguinte resultado:

$$(\Gamma^\mu_{\nu\kappa})_P = 0, \quad (3.10)$$

e conseqüentemente, da definição do coeficiente de conexão

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\nu\kappa} &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(-g_{\nu\kappa,\rho} + g_{\rho\nu,\kappa} + g_{\kappa\rho,\nu}), \\ g_{\mu\rho}\Gamma^\mu_{\nu\kappa} &= \frac{1}{2}\underbrace{g_{\mu\rho}g^{\mu\rho}}_g(-g_{\nu\kappa,\rho} + g_{\rho\nu,\kappa} + g_{\kappa\rho,\nu}), \\ \frac{2}{g}g_{\mu\rho}\Gamma^\mu_{\nu\kappa} &= -g_{\nu\kappa,\rho} + g_{\rho\nu,\kappa} + g_{\kappa\rho,\nu},\end{aligned}$$

lembrando que $g_{\mu\nu;\kappa} = g_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\kappa}g_{\lambda\mu}$, e que a derivada covariante da métrica é sempre nula, trocaremos o primeiro e segundo termos do lado direito da equação acima por este resultado

$$g_{\kappa\rho,\nu} = \frac{2}{g}g_{\mu\rho}\Gamma^\mu_{\nu\kappa} + g_{\nu\kappa;\rho} + \cancel{\Gamma^\lambda_{\nu\rho}g_{\lambda\kappa}} + \cancel{\Gamma^\lambda_{\kappa\rho}g_{\lambda\nu}} - g_{\rho\nu;\kappa} - \cancel{\Gamma^\lambda_{\rho\kappa}g_{\lambda\nu}} - \cancel{\Gamma^\lambda_{\nu\kappa}g_{\lambda\rho}}, \quad (3.11)$$

tomando a equação acima no ponto P e lembrando que a derivada covariante da métrica é nula, teremos

$$(g_{\kappa\rho,\nu})_P = \frac{2}{g}g_{\mu\rho(P)}(\Gamma^\mu_{\nu\kappa})_P \rightarrow 0$$

isto é

$$(g_{\mu\nu,\kappa})_P = 0. \quad (3.12)$$

Em coordenadas geodésicas então temos que

$$(g_{\mu\nu,\kappa})_P = 0 \quad ; \quad (g_{\mu\nu,\kappa\lambda})_P \neq 0,$$

que é equivalente à

$$(\Gamma^\mu_{\nu\kappa})_P = 0 \quad ; \quad (\Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda})_P \neq 0.$$

A primeira derivada de $g_{\mu\nu}$ é nula em P , mas não em qualquer outro ponto próximo, ou seja, em P a métrica é constante correspondendo ao espaço de Minkowski e um referencial localmente inercial. Assim uma variedade Riemanniana é localmente plana, representando o espaço-tempo de Minkowski, onde é possível descrever

a Relatividade Restrita.

3.3 Tensor de Riemann e Curvatura

Em um espaço curvo vetores que foram transportados paralelamente ao longo de um caminho no espaço não são iguais aos seus vetores de origem. Esta curvatura pode ser definida através da comutação de duas derivadas covariantes, em dois diferentes eixos coordenados, aplicados a um vetor (como já visto no capítulo anterior). Outra forma de definir a curvatura é fazer o transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho fechado na superfície curva¹. Vamos definir a curvatura de um espaço optando pela primeira abordagem, assim podemos escrever essa não comutação como

$$[D_\mu, D_\nu]\mathbf{V} = D_\mu(D_\nu\mathbf{V}) - D_\nu(D_\mu\mathbf{V}). \quad (3.13)$$

Analisando em termos das componentes, temos

$$\begin{aligned} D_\mu(V^\kappa_{;\nu}) - D_\nu(V^\kappa_{;\mu}) &= D_\mu(V^\kappa_{,\nu} + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}V^\lambda) - D_\nu(V^\kappa_{,\mu} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}V^\lambda), \\ &= D_\mu(V^\kappa_{,\nu}) + D_\mu(\Gamma^\kappa_{\nu\lambda}V^\lambda) - D_\nu(V^\kappa_{,\mu}) - D_\nu(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}V^\lambda), \\ &= \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}V^\lambda_{,\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}V^\lambda_{,\mu} + D_\mu(\Gamma^\kappa_{\nu\lambda}V^\lambda) - D_\nu(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}V^\lambda), \end{aligned}$$

lembrando o fato que as derivadas simples sempre comutam. Podemos considerar o termo do símbolo de Christoffel contraído com o vetor como um tensor misto qualquer

$$\Gamma^\kappa_{\nu\lambda}V^\lambda = A^\kappa_{\nu}, \quad (3.14)$$

e a derivada covariante deste novo tensor

$$D_\mu A^\kappa_{\nu} = A^\kappa_{\nu,\mu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho}A^\rho_{\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}A^\kappa_{\rho},$$

¹Esta abordagem pelo transporte paralelo pode ser vista em [11, pág. 123].

e escrevendo em termos de (3.14), obtemos

$$D_\mu(\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} V^\lambda) = (\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} V^\lambda)_{,\mu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} V^\lambda - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} V^\lambda, \quad (3.15)$$

$$D_\nu(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} V^\lambda) = (\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} V^\lambda)_{,\nu} + \Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} V^\lambda - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} V^\lambda, \quad (3.16)$$

substituindo as equações acima na equação original, ficamos com

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]V^\lambda &= \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} V^\lambda_{,\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} V^\lambda_{,\mu} + (\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} V^\lambda)_{,\mu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} V^\lambda + \\ &\quad - \cancel{\Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} V^\lambda} - (\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} V^\lambda)_{,\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} V^\lambda + \cancel{\Gamma^\rho_{\nu\mu} \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} V^\lambda}, \\ &= \cancel{\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} V^\lambda_{,\nu}} - \cancel{\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} V^\lambda_{,\mu}} + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda,\mu} V^\lambda + \cancel{\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} V^\lambda_{,\mu}} + \\ &\quad - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda,\nu} V^\lambda - \cancel{\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} V^\lambda_{,\nu}} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} V^\lambda - \Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} V^\lambda, \end{aligned}$$

os termos são opostos pois estamos considerando o símbolo de Christoffel simétrico nos índices inferiores. Como visto, a antissimetria dos índices inferiores do coeficiente de conexão na base não-holonômica indica a torção de um espaço curvo, aspecto que não será considerado para descrever a Relatividade Geral de Einstein. Arrumando os termos, obtemos

$$[D_\mu, D_\nu]V^\lambda = (\Gamma^\kappa_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\lambda}) V^\lambda.$$

Este termo entre parênteses é o que define a curvatura e pode ser escrito como

$$\boxed{R^\kappa_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\lambda}}, \quad (3.17)$$

que é o *tensor de Riemann*, ou tensor de Riemann-Christoffel, ou simplesmente *tensor de curvatura*. Assim

$$[D_\mu, D_\nu]\mathbf{V} = R^\kappa_{\mu\lambda\nu} \mathbf{V}. \quad (3.18)$$

Como o tensor de curvatura depende somente das derivadas e produtos dos símbolos de Christoffel (e estes dependem somente da métrica), dado a métrica de um espaço podemos saber a sua curvatura. O tensor de Riemann é o método mais comum utilizado para expressar a curvatura em uma variedade diferenciável.

Para explorarmos algumas de suas propriedades de simetria vamos primeiro considerar o tensor completamente covariante

$$g_{\rho\kappa}R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu} = R_{\rho\mu\lambda\nu}. \quad (3.19)$$

e também nas coordenadas geodésicas num dado ponto. Neste tipo de sistema

$$R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda,\nu}. \quad (3.20)$$

Tomando a derivada do símbolo de Christoffel nas coordenadas geodésicas temos

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}g^{\kappa\rho}(-g_{\mu\nu,\rho\lambda} + g_{\rho\mu,\nu\lambda} + g_{\nu\rho,\mu\lambda}).$$

Assim, podemos escrever o tensor de Riemann em termos da métrica, o que facilitará a visualização das propriedades de simetria. Deste modo

$$\begin{aligned} R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu} &= \frac{1}{2}g^{\kappa\rho}(-g_{\mu\nu,\rho\lambda} + g_{\rho\mu,\nu\lambda} + g_{\nu\rho,\mu\lambda}) - \frac{1}{2}g^{\kappa\rho}(-g_{\mu\lambda,\rho\nu} + g_{\rho\mu,\lambda\nu} + g_{\lambda\rho,\mu\nu}), \\ R_{\sigma\mu\lambda\nu} &= g_{\sigma\kappa}R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2}g_{\sigma\kappa}g^{\kappa\rho}(g_{\nu\rho,\mu\lambda} - g_{\mu\nu,\rho\lambda} + g_{\mu\lambda,\rho\nu} - g_{\lambda\rho,\mu\nu}), \\ R_{\sigma\mu\lambda\nu} &= \frac{1}{2}(g_{\mu\lambda,\sigma\nu} - g_{\mu\nu,\sigma\lambda} + g_{\nu\sigma,\mu\lambda} - g_{\lambda\sigma,\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

As propriedades de simetria são:

- I - $R_{\sigma\mu\lambda\nu} = -R_{\sigma\nu\lambda\mu}$,
- II - $R_{\sigma\mu\lambda\nu} = -R_{\mu\sigma\lambda\nu}$,
- III - $R_{\sigma\mu\lambda\nu} = R_{\lambda\nu\sigma\mu}$,

$$\text{IV} - 3R_{\sigma[\mu\lambda\nu]} = R_{\sigma\mu\lambda\nu} + R_{\sigma\lambda\nu\mu} + R_{\sigma\nu\mu\lambda} = 0.$$

Apesar do tensor de Riemann ser um tensor de rank $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e possuir $4^4 = 256$ componentes, nem todas suas componentes são independentes. Um resultado importante que pode ser obtido do tensor de Riemann é a Identidade de Bianchi [11, pág. 134]:

$$\boxed{R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda;\rho} + R^{\mu}_{\nu\lambda\rho;\sigma} = 0,} \quad (3.22)$$

que é uma equação tensorial, portanto válida em qualquer sistema de coordenadas.

3.4 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

O *tensor de Ricci* é outro objeto geométrico que expressa curvaturas numa variedade Riemanniana e é obtido através da contração do primeiro e terceiro índices do tensor de curvatura

$$R_{\mu\nu} = R^{\kappa}_{\mu\kappa\nu} = g^{\kappa\rho} R_{\rho\mu\kappa\nu}, \quad (3.23)$$

que é um tensor de rank menor que o tensor de Riemann e é simétrico em seus índices

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}.$$

O *escalar de curvatura*, ou *escalar de Ricci*, é o traço do tensor de Ricci obtido através da contração de um tensor métrico contravariante com o mesmo.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Por ser o mesmo em todos os sistemas de referência, também é conhecido por *invariante de curvatura*.

Como exemplo, vamos calcular a curvatura de um plano em coordenadas polares no \mathbb{R}^2 . Para isso vamos considerar o elemento de comprimento infinitesimal como

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ que nos dá uma métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{bmatrix}.$$

As componentes do símbolo de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \\ \Gamma^1_{22} &= -r, \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Como o tensor de Riemann é descrito como

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\sigma\kappa} (\Gamma^\sigma_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\sigma_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\mu}),$$

podemos ver que as componentes $R_{1111} = R_{2222} = 0$ pois todos os termos se cancelam. Calculando as outras componentes vemos que todas são nulas, ou seja, a curvatura de um plano neste caso descrito em coordenadas polares é nula, como esperado. Se o tensor de curvatura é nulo em todas as suas componentes, ambos tensor de Ricci e escalar de curvatura também o são.

Agora vamos calcular a curvatura de uma esfera de raio a em coordenadas esféricas no \mathbb{R}^3 . O comprimento infinitesimal é $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$. Sua métrica é

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad ; \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

As componentes do símbolo de Christoffel são

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \\ \Gamma^1_{22} &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \cot\theta.\end{aligned}$$

Usando o tensor de Riemann contraído (que é na verdade o tensor de Ricci) da forma

$R^\kappa_{\mu\kappa\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\kappa,\nu} + \Gamma^\kappa_{\kappa\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\kappa}$, encontramos o valor das componentes

$$\begin{aligned}R^1_{111} &= R^1_{112} = R^1_{211} = R^2_{122} = R^2_{221} = R^2_{222} = 0, \\ R^1_{212} &= \sin^2\theta, \\ R^2_{121} &= 1,\end{aligned}$$

e percebemos que o tensor de Riemann, que é o que define a curvatura do espaço, tem componentes não nulas, indicando que este espaço (a esfera) possui curvatura. Portanto as componentes do tensor de Ricci, explicitamente, são

$$\begin{aligned}R_{11} &= R^1_{111} + R^2_{121} = 1, \\ R_{12} &= R_{21} = R^1_{112} + R^2_{122} = 0, \\ R_{22} &= R^1_{212} + R^2_{222} = \sin^2\theta.\end{aligned}$$

O escalar de curvatura é então escrito como

$$\begin{aligned}R &= g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \sin^2\theta, \\ R &= \frac{2}{a^2}.\end{aligned}$$

Este resultado também pode ser encontrado em [12], onde é usada uma notação mais simples, a do Cálculo Diferencial e Integral na sua forma vetorial.

3.5 Tensor de Einstein

Foi Einstein quem primeiro notou a importância deste tensor para a Relatividade Geral, por causa de suas propriedades. Para obtê-lo vamos fazer uma contração da métrica com a Identidade de Bianchi

$$g^{\rho\mu}(R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda} + R_{\mu\nu\sigma\lambda;\rho} + R_{\mu\nu\lambda\rho;\sigma}) = 0,$$

$$R^{\rho}_{\nu\rho\sigma;\lambda} + R^{\rho}_{\nu\sigma\lambda;\rho} + R^{\rho}_{\nu\lambda\rho;\sigma} = 0,$$

e permutando os índices inferiores λ e ρ no terceiro termo, obtemos

$$R_{\nu\sigma;\lambda} + (-R^{\rho}_{\nu\rho\lambda;\sigma}) + R^{\rho}_{\nu\lambda\rho;\sigma} = 0,$$

$$R_{\nu\sigma;\lambda} - R_{\nu\lambda;\sigma} + R^{\rho}_{\nu\lambda\rho;\sigma} = 0,$$

assim, contraindo com outra métrica contravariante, temos

$$g^{\nu\sigma}(R_{\nu\sigma;\lambda} - R_{\nu\lambda;\sigma} + R^{\rho}_{\nu\lambda\rho;\sigma}) = 0,$$

$$R_{;\lambda} - 2R^{\sigma}_{\lambda;\sigma} = 0,$$

$$\delta^{\sigma}_{\lambda}R_{;\sigma} - 2R^{\sigma}_{\lambda;\sigma} = 0,$$

e, por fim, contraindo com uma métrica contravariante obtemos

$$g^{\rho\lambda}(\delta^{\sigma}_{\lambda}R_{;\sigma} - 2R^{\sigma}_{\lambda;\sigma})_{;\sigma} = 0,$$

$$\left(R^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}R\right)_{;\sigma} = 0,$$

onde o termo entre parênteses é o tensor de Einstein $G^{\rho\sigma}$ que apresenta uma característica de conservação da forma

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \tag{3.25}$$

3.6 Tensor Momento-Energia para Fluidos

Um fluido (gás ou líquido) pode ser tratado como meio contínuo, ou seja, pode-se sempre pressupor que qualquer elemento de volume do fluido, por menor que seja, é suficientemente grande para conter um grande número de moléculas. Um elemento do fluido, ou partícula fluida, possui viscosidade desprezível, este pode considerado como fluido ideal, que é localmente isotrópico².

A dinâmica do fluido pode ser definida pelas grandezas cinemáticas, como posição $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e sua velocidade, que devido a característica de forma variável tem a dependência espaço-temporal $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)$, e a aceleração, portanto, terá a propriedade

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}(x, y, z, t)}{dt}, \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}, \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}, \end{aligned}$$

em que a nova derivada (ou operador)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla, \quad (3.26)$$

é chamada de derivada material. Este operador também é válido para grandezas termodinâmicas, como a pressão $p(\vec{r}, t)$, temperatura $T(\vec{r}, t)$, densidade massível $\rho(\vec{r}, t)$, entropia $S(\vec{r}, t)$ entre outras.

Vamos começar escrevendo a equação de conservação de massa. Seja $m = \int_V \rho dV$ e que esta massa flui através de uma superfície de área $A = \int_A dA$, onde este fluxo

²Se um observador move-se no referencial do fluido, as propriedades físicas são as mesmas em qualquer direção.

de saída do sistema pode ser escrito como

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{out} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (3.27)$$

que por outro lado, quando o fluxo de massa entra na superfície, descrita pela velocidade \vec{v} , encontra o vetor normal \hat{n} , oposto, que define a superfície de área infinitesimal dA , de modo que $\vec{v} \cdot \hat{n} < 0$. Diante disso, o fluxo massivo de entrada pode ser definido como

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{in} = \int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}, \quad (3.28)$$

então, se a massa total não varia

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{sistema} = \left. \frac{dm}{dt} \right|_{out} + \left. \frac{dm}{dt} \right|_{in} = 0, \quad (3.29)$$

podemos escrever

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A},$$

Do teorema de Gauss, do cálculo vetorial, podemos escrever

$$\int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV,$$

que nos fornece

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.30)$$

Pela segunda lei de Newton, podemos escrever $\sum_k \vec{F}_k = \frac{d\vec{p}}{dt}$, podemos escrevê-la em termos da força de sustentação de fluidos (empuxo) e outras forças externas,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}_{emp} + \vec{F}_{ext}, \\ &= -V \nabla p + \vec{F}_{ext}, \end{aligned}$$

Supondo que a massa do sistema não varie com o tempo

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= -V \nabla p + \vec{\mathbf{F}}_{ext}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{V}{m} \nabla p + \frac{1}{m} \vec{\mathbf{F}}_{ext}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{m} \vec{\mathbf{F}}_{ext}, \end{aligned}$$

que nos dá a equação de Navier-Stokes (2ª Lei de Newton)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{m} \vec{\mathbf{F}}_{ext}, \quad (3.31)$$

sendo que $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ pode ser qualquer força externa à borda do fluido. Um caso particular é o fluido ideal, ou seja, onde não há forças de resistência (não conservativas), como a ação da viscosidade.

Podemos também adaptar esta equação à primeira lei da termodinâmica,

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\rho\epsilon) \right] dV = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{ext}}{dt}, \quad (3.32)$$

onde ϵ é densidade de energia. A segunda lei, fica

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\rho s) \right] dV \geq \int_A \frac{1}{T} \frac{dq}{dt} dA, \quad (3.33)$$

com $q = Q/A$. Para um sistema adiabático, $\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\rho s) = 0$.

Exemplo Vamos considerar aqui um fluido estático, na presença apenas do campo gravitacional, em um processo isocórico e isotérmico.

Solução: Esta condição mostra que $\vec{v} = \text{constante}$, e assim a equação de Navier-Stokes, $\vec{\mathbf{0}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{m} (m\vec{\mathbf{g}})$, se resume a

$$\nabla p = \rho \vec{\mathbf{g}}, \quad (3.34)$$

Se $\vec{g} = g(-\hat{\mathbf{k}})$, onde $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, dando $p = p_0 - \rho g(z - z_0)$. Se o fluido está em equilíbrios mecânico ($V=\text{const}$) e térmico ($T=\text{const}$), a energia livre de Gibbs (um dos potenciais termodinâmico) $dG = -SdT + Vdp + \mu dn$, e $g = G/m$, é a energia de Gibbs por massa

$$dg = -sdT + vdp,$$

onde $v = V/m = 1/\rho$. Desta forma, podemos escrever $dp = \nabla p \cdot d\vec{r}$, $dT = \nabla T \cdot d\vec{r}$ e $dg = \nabla g \cdot d\vec{r}$. Assim

$$\begin{aligned} dg + sdT - vdp &= 0, \\ dg + d(sT) - d(vp) &= 0, \\ \nabla g \cdot d\vec{r} + \nabla(sT) \cdot d\vec{r} - \nabla(vp) \cdot d\vec{r} &= 0, \\ \nabla(g + sT - vp) \cdot d\vec{r} &= 0, \end{aligned}$$

que dá $\nabla(g + sT - vp) = 0$, nos dando

$$g + sT - vp = \text{constante}. \quad (3.35)$$

3.6.1 Fluido Relativístico e o Tensor Momento-Energia

Uma das formas de inserir um termo de fonte, que descreve a matéria e as propriedades intrínsecas dos objetos físicos, em conjunto com a geometria na qual estes estão inseridos é a partir do chamado *Tensor Momento-Energia de um gás ideal*. Desta forma consegue-se entender como a gravitação está intimamente relacionada a geometria na qual ela está imersa [11]. Este é um tensor que descreve o momento e a energia de uma partícula ou de um conjunto delas, e por ser um tensor que descreve a matéria, sua definição será importante mais adiante.

Vamos considerar o tensor momento-energia para *poeira*, que nada mais é do que

partículas que não se juntam ou interagem entre si

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu,$$

onde ρ_0 é a densidade própria de matéria, uma densidade se movendo com o fluxo, e u^μ é a quadri-velocidade, normalizada pela velocidade da luz, sendo que

$$u^\mu = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^\mu}{dt}.$$

Desta forma a dimensão de $T^{\mu\nu}$ é a mesma de ρ_0 . Este tensor foi apresentado pela primeira vez por Zel'dovich em seu livro "Stars and Relativity" [17], e descreve um fluido perfeito com densidade definida. Vamos achar pela definição, as componentes deste tensor. A componente 00 nos fornece,

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho_0 u^0 u^0 = \rho_0 \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2, \\ &= \rho_0 \gamma^2, \\ T^{00} &= \rho, \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde ρ é a densidade em um referencial em movimento. A componente $0i$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \rho_0 \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^i}{dt}, \\ &= \frac{\rho}{c^2} c v^i, \\ T^{0i} &= \frac{\rho}{c} v^i, \end{aligned} \tag{3.37}$$

e a componente ij

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \rho_0 \frac{\gamma^2}{c^2} v^i v^j, \\ T^{ij} &= \frac{\rho}{c^2} v^i v^j. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Como o tensor momento-energia é simétrico, podemos escrevê-lo como uma matriz, tal que

$$T^{\mu\nu} = \rho \begin{bmatrix} 1 & \frac{v_x}{c} & \frac{v_y}{c} & \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x}{c} & \frac{v_x^2}{c^2} & \frac{v_x v_y}{c^2} & \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \frac{v_y}{c} & \frac{v_y v_x}{c^2} & \frac{v_y^2}{c^2} & \frac{v_x v_y}{c^2} \\ \frac{v_z}{c} & \frac{v_z v_x}{c^2} & \frac{v_z v_y}{c^2} & \frac{v_z^2}{c^2} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Ambos energia e momento são grandezas conservadas, logo, esperamos obter alguma relação de conservação deste tensor. E realmente conseguimos obter duas equações de continuidade conhecidas tomando a derivada simples (para o espaço de Minkowski - plano),

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (3.40)$$

Desenvolvendo a equação acima em componente, temos para $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} T^{00}{}_{,0} + T^{0i}{}_{,i} &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \frac{v^i}{c} \right) &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\ \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

que é a equação de continuidade que expressa a conservação de massa ou energia. Se estiver representando massa, temos $m = \int \rho dV$. Se ρ for densidade de massa por volume, então a densidade energia será $\epsilon = \rho c^2$, então do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu} = \epsilon_0 u^\mu u^\nu$.

Desenvolvendo a equação (3.40) para $\mu = i$:

$$\begin{aligned} T^{i0}{}_{,0} + T^{ij}{}_{,j} &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^i}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \frac{v^i v^j}{c^2} \right) &= 0, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot (\rho v^i v^j) &= 0, \\ \nabla \cdot (\rho v^i \vec{v}) + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

que também é uma equação de continuidade mas para a densidade de momento. O tensor momento-energia de fato expressa uma conservação e deve ser válida para todos os sistemas de coordenadas. Uma expressão que mantém essa característica é obtida se tomarmos a derivada covariante do tensor momento-energia

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (3.41)$$

Este tensor momento-energia é definido em uma variedade diferenciável arbitrária e todas suas propriedades são válidas nela. Existem diferentes tensores deste tipo para descrever diferentes sistemas. Uma outra descrição de um tensor momento-energia para o eletromagnetismo pode ser encontrado na seção xxx.

Uma outra forma de introduzir este tensor é considerando o empuxo do fluido. Para isso vamos considerar o fluido no referencial de repouso, onde o tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T^{00} &= \epsilon, \\ T^{i0} &= 0, \\ T^{ij} &= p, \end{aligned}$$

Considerando uma transformação de Lorentz, do referencial de repouso para o refe-

rencial com velocidade \vec{v} , $x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu$, onde

$$\begin{aligned}\Lambda^0_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma, \\ \Lambda^i_0 &= \gamma \frac{v^i}{c}, \\ \Lambda^i_j &= \delta^i_j + \gamma \frac{v^i v_j}{v^2},\end{aligned}$$

Então $T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\kappa T'^{\rho\kappa}$, onde as componentes ficam

$$\begin{aligned}T^{00} &= \gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + \epsilon \right), \\ T^{i0} &= \gamma^2 (p + \epsilon) \frac{v^i}{c}, \\ T^{ij} &= \delta^i_j p + \gamma^2 (p + \epsilon) \frac{v^i v^j}{v^2},\end{aligned}$$

e na forma covariante fica,

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + (p + \epsilon)u^\mu u^\nu. \quad (3.42)$$

Veremos este mais adiante.

3.7 Equação de Campo de Einstein - Acoplamento com a matéria

A essência de uma teoria física expressa de forma matemática é a identificação de conceitos matemáticos com certas quantidades fisicamente mensuráveis [18]. Podemos identificar:

- O espaço-tempo, local onde ocorrem todos os eventos, é uma variedade quadridimensional com uma métrica.
- Esta métrica pode ser mensurada por réguas e relógios.

É razoável descrever a gravidade e sua ação na matéria baseado na ideia de uma variedade Riemanniana quadridimensional curva, que possui características de localidade que satisfazem o Princípio de Equivalência, descrita por uma métrica. Uma equação deve ser proposta sabendo-se que esta deve relacionar geometria do espaço com um termo de fonte de massa, análoga à equação de Poisson. Além disso, essa equação deve conter propriedades de conservação, análogo à equação de Laplace e, para o limite newtoniano de baixas velocidades e campo gravitacional fraco, deve contemplar as leis de Newton.

A fonte de um campo gravitacional na teoria de Newton é a densidade de massa. Numa teoria relativística da gravidade precisamos ter um conceito mais significativo do que simplesmente "massa", o que conseguimos obter com o tensor momento-energia, visto a relação que existe entre massa e energia descoberta por Einstein em sua teoria da Relatividade Restrita [2].

O tensor de Einstein é um objeto puramente geométrico e que expressa uma lei de conservação

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Semelhantemente, o tensor momento-energia também expressa uma lei de conservação

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0,$$

então uma equação que relacione estes dois objetos apresentará uma lei geral de conservação. Podemos inferir então que estes tensores são proporcionais um ao outro

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \tag{3.43}$$

sendo k uma constante de proporcionalidade cujo valor será obtido futuramente. Sabemos da Mecânica Clássica que o movimento de um corpo em queda livre em

um campo gravitacional homogêneo é regido pela segunda lei de Newton, dado a equivalência da massa inercial e da massa gravitacional:

$$m_g \vec{g} = m_i \vec{a} \quad \Rightarrow \quad m \vec{g} = m \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = \vec{a}, \quad (3.44)$$

assim, um campo gravitacional, gerado por uma fonte massiva é equivalente à uma aceleração. Vamos considerar um campo gravitacional fraco e estático onde a velocidade da fonte massiva é muito menor que a velocidade da luz $v \ll c$, que é uma boa aproximação para o caso do Sol no sistema solar. A métrica deste espaço pode ser considerada como a métrica do espaço-tempo plano $\eta_{\mu\nu}$ mais uma perturbação $h_{\mu\nu}$, sendo que esta é muito pequena $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ³

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

O movimento não relativístico da fonte implica em

$$\begin{aligned} \tau &\approx t, \\ \frac{dx^0}{d\tau} &\approx c, \\ \frac{dx^i}{d\tau} &\approx v^i \ll c. \end{aligned}$$

Usando a equação da geodésica (3.5), considerando as componentes puramente espaciais, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} c^2 &= 0, \end{aligned}$$

onde os termos de velocidade podem ser considerados desprezíveis comparados ao

³Este é o chamado limite newtoniano que é usado para linearizar as equações de campo.

termo da velocidade da luz. Portanto

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = a^i = -c^2 \Gamma^i_{00}. \quad (3.45)$$

Usando a nova métrica vamos descobrir o termo

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2} g^{i\rho} (-g_{00,\rho} + g_{0\rho,0} + g_{\rho 0,0}), \\ &= \frac{1}{2} g^{ik} (-g_{00,k}), \end{aligned}$$

os termos fora da diagonal da métrica $g^{i0} = g^{0i}$ são nulos e as derivadas temporais também pois estamos considerando um campo estático. Considerando a métrica plana mais uma perturbação, temos

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} (\eta^{ik} - h^{ik}) (\eta_{00,k} + h_{00,k}) = -\frac{1}{2} \eta^{ik} h_{00,k},$$

desconsiderando os termos de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ e superiores pois $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Contraíndo a métrica do espaço-tempo plano η^{ik} com a perturbação, temos portanto

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} h_{00,i} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00}.$$

A partir da equação (3.45) da geodésica e substituindo o resultado acima, temos

$$a^i = \frac{c^2}{2} \nabla h_{00}. \quad (3.46)$$

A força gravitacional pode ser descrita através de um potencial $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$ e, consequentemente, o campo gravitacional também $\vec{\mathbf{g}} = -\nabla \phi$, resultando em

$$\vec{\mathbf{a}} = -\nabla \phi.$$

Voltando na equação (3.46) e substituindo o termo acima

$$\nabla \left(\frac{c^2}{2} h_{00} + \phi \right) = 0,$$

ou seja,

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2}, \quad (3.47)$$

e a componente g_{00} da métrica, $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$, torna-se

$$g_{00} = 1 - \frac{2\phi}{c^2}, \quad (3.48)$$

então para o caso do limite de campo fraco, o campo gravitacional ϕ está contido em g_{00} . Vamos então verificar essas componentes se para o limite newtoniano a equação (3.43) proposta descreve os resultados já conhecidos da Mecânica Clássica [16]. Já sabemos que $T^{00} = \rho$ vamos calcular agora R_{00} usando

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu},$$

onde desconsideramos os termo de $\mathcal{O}(h^2)$ advindos da multiplicação dos coeficientes de conexão. Escrevendo os símbolos de Christoffel em termo da métrica

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (-h_{\mu\nu,\beta} + h_{\beta\mu,\nu} + h_{\nu\beta,\mu}), \quad (3.49)$$

a métrica do espaço-tempo plano $\eta_{\mu\nu}$ é constante, logo suas derivadas são nulas. Assim, substituindo esta na equação de $R_{\mu\nu}$ temos

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\nu\beta,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} + h_{\mu\alpha,\beta\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}).$$

Para acharmos uma equação que contenha ϕ , temos que tomar $\mu = 0$ e $\nu = 0$, como

visto anteriormente. Com isso obtemos

$$R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(-h_{00,\alpha\beta}),$$

onde novamente as derivadas temporais são nulas. Portanto

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2}(h_{00,\alpha\alpha}), \\ R_{00} &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}, \end{aligned}$$

e substituindo o valor de h_{00} , temos

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\phi.$$

Esperamos obter a equação de Laplace se considerarmos o limite newtoniano para a equação (3.43) sem o termo de fonte $T^{\mu\nu}$. Multiplicando a equação covariante por $g^{\mu\nu}$, obtemos

$$\begin{aligned} R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R &= 0, \\ R - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}R &= 0, \end{aligned}$$

sendo os termos de $h_{\mu\nu}$ nulos pois este é definido como uma perturbação no espaço-tempo plano causado por uma fonte massiva e estamos considerando a equação sem fonte. O termo $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta^{00}\eta_{00} + \eta^{11}\eta_{11} + \eta^{22}\eta_{22} + \eta^{33}\eta_{33} = \eta$ é o traço da matriz do tensor métrico do espaço-tempo plano e $\eta = 4$, portanto

$$R - \frac{1}{2}(4R) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 0. \quad (3.50)$$

Voltando na equação sem fonte e substituindo o valor do escalar de curvatura encon-

trado, temos

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Como sabemos que o termo que contém o potencial gravitacional do limite newtoniano é g_{00} , temos

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi = 0,$$

$$\nabla^2 \phi = 0,$$

que é, de fato, a equação de Laplace.

Vamos agora voltar e considerar a equação (3.43) com o termo de fonte no limite newtoniano e, multiplicando por $g_{\mu\nu}$, temos

$$R - \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})R = kT,$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é o traço da matriz do tensor momento-energia. Da equação (3.50) agora considerando o termo de fonte

$$R - 2R = kT \quad \Rightarrow \quad R = -kT,$$

e substituindo o escalar de Ricci na equação original, ficamos com

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (3.51)$$

Os termos de $\frac{v}{c}$ são nulos pois descrevem a velocidade da fonte que, na nossa consideração, é estática. O único termo não nulo do tensor momento-energia é $T_{00} = \rho$ e com isto obtemos o termo

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T = \frac{\rho}{2} \delta^{\mu\nu},$$

e voltando na equação anterior considerando R_{00} , temos

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{2} k \rho c^2.$$

Como esperamos que a equação acima seja a equação de Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$, precisamos que a constante k tenha um valor específico, $\frac{1}{2} k \rho c^2 = 4\pi G \rho$, portanto

$$k = \frac{8\pi G}{c^2}. \quad (3.52)$$

Com isso, obtemos a equação de Poisson no limite newtoniano de nossa equação proposta, bem como o valor da constante de proporcionalidade k . A equação completa se torna

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}}, \quad (3.53)$$

conhecida como *Equação de Campo de Einstein*, que também pode ser escrita de outra maneira, explicitando a parte geométrica do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = \frac{8\pi G}{c^2} S_{\mu\nu}, \quad (3.54)$$

onde

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T.$$

A equação de Einstein, como foi demonstrado, contém os resultados da Mecânica Clássica no limite newtoniano. Além disso, é possível perceber pela equação que dada uma enorme distribuição de massa a curvatura do espaço-tempo, que depende basicamente da métrica, é modificada e portanto o movimento de corpos de teste neste espaço também será modificado, tendo em vista que estes seguem uma geodésica pelo espaço-tempo curvo.

Para corpos de teste de significativa densidade nesta variedade Riemanniana, de tal modo que estes também influenciem na geometria do espaço-tempo, a equação de

campo de Einstein apresentará termos não lineares, tornando difícil achar soluções para o movimento destes corpos sem a utilização de métodos de aproximação, alguns conhecidos como "neo-newtonianos".

3.8 Ação Gravitacional de Einstein-Hilbert

O princípio de mínima ação ocupa um lugar tão honrado na Física que quase todas as teorias fundamentais foram formuladas fazendo seu uso. É de se esperar que a teoria da Relatividade Geral tenha uma formulação utilizando este princípio.

Vamos obter uma expressão para a ação gravitacional. Na área de teoria de campos a ação é uma integral da densidade de Lagrangeana \mathcal{L} no espaço-tempo

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \quad (3.55)$$

e o princípio de mínima ação resulta nas equações de Euler-Lagrange para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] = 0 \quad (3.56)$$

onde Φ é um campo genérico.

A ação eletromagnética é escrita, convenientemente, em termos do quadri vetor potencial A_μ e todas as equações do eletromagnetismo são derivadas a partir do princípio variacional. No entanto A_μ é um objeto definido como uma estrutura adicional que existe no espaço-tempo. Na Relatividade Geral o campo gravitacional é o próprio espaço-tempo, então o que usaremos como a variável de campo? Vamos considerar esta variável sendo o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e construir uma Lagrangeana que seja função da métrica. Na equação de campo de Einstein o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ representa a contribuição da matéria ao campo gravitacional, portanto

na ausência de matéria a equação se torna

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0,$$

temos somente o próprio campo gravitacional. É razoável expressar a ação gravitacional total como a soma da contribuição da matéria e da contribuição do campo

$$S = S_G + S_M. \quad (3.57)$$

A contribuição da parte do campo gravitacional é dada por objetos estritamente geométricos. Vamos partir da ação gravitacional de Einstein-Hilbert

$$S_G = \int R\sqrt{-g} d^4x. \quad (3.58)$$

Seja portanto, uma variação no campo gravitacional, que é descrita métrica do espaço-tempo,

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.59)$$

onde esta variação é uma mudança estrutural no campo em cada ponto, não uma simples variação resultante de uma transformação de coordenadas. Tomando essa variação no símbolo de Christoffel

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\rho}(-g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[-(\delta g_{\mu\nu})_{,\rho} + (\delta g_{\rho\mu})_{,\nu} + (\delta g_{\nu\rho})_{,\mu}],$$

sabendo que $g^{\lambda\rho}g_{\rho\kappa} = \delta^{\lambda}_{\kappa}$ vamos tomar a derivada funcional desta expressão

$$\begin{aligned} \delta g^{\lambda\rho}g_{\rho\kappa}g^{\kappa\rho} &= -g^{\kappa\rho}g^{\lambda\rho}\delta g_{\rho\kappa}, \\ \delta g^{\lambda\sigma} &= -g^{\kappa\rho}g^{\lambda\rho}\delta g_{\rho\kappa}, \end{aligned}$$

trocando σ por ρ e vice-versa, temos

$$\delta g^{\lambda\rho} = -g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma} \delta g_{\sigma\kappa},$$

substituindo a equação acima na expressão da derivada funcional do símbolo de Christoffel

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -g^{\lambda\sigma} \underbrace{\left[\frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (-g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu}) \right]}_{\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}} \delta g_{\sigma\kappa} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [-(\delta g_{\mu\nu})_{,\rho} + (\delta g_{\rho\mu})_{,\nu} + (\delta g_{\nu\rho})_{,\mu}], \\ \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -g^{\lambda\sigma} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \delta g_{\sigma\kappa} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [-(\delta g_{\mu\nu})_{,\rho} + (\delta g_{\rho\mu})_{,\nu} + (\delta g_{\nu\rho})_{,\mu}]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Semelhante à derivação covariante de um tensor covariante, as derivadas funcionais da métrica são

$$(\delta g_{\mu\nu})_{,\rho} = (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} \delta g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \delta g_{\mu\alpha}, \quad (3.61)$$

$$(\delta g_{\rho\mu})_{,\nu} = (\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \delta g_{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \delta g_{\rho\alpha}, \quad (3.62)$$

$$(\delta g_{\nu\rho})_{,\mu} = (\delta g_{\nu\rho})_{;\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \delta g_{\alpha\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} \delta g_{\nu\alpha}. \quad (3.63)$$

Somando as equações acima como aparecem na derivada funcional do símbolo de Christoffel (3.63) + (3.62) - (3.61), obtemos

$$(\delta g_{\nu\rho})_{,\mu} + (\delta g_{\rho\mu})_{,\nu} - (\delta g_{\mu\nu})_{,\rho} = (\delta g_{\nu\rho})_{;\mu} + (\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho} + 2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \delta g_{\alpha\rho}.$$

Substituindo esta equação em (3.8):

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -g^{\lambda\sigma} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \delta g_{\sigma\kappa} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [-(\delta g_{\mu\nu})_{;\rho} + (\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\nu\rho})_{;\mu}] + \underbrace{g^{\lambda\rho} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \delta g_{\alpha\rho}}_{\substack{\rho \leftrightarrow \sigma \\ \alpha \leftrightarrow \kappa}}, \\ \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [-(\delta g_{\mu\nu})_{;\rho} + (\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\nu\rho})_{;\mu}]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Vamos tomar também a variação no tensor de Ricci escrito como $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\lambda} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{,\nu} + (\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda})\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) + \\ & - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu})\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Como já vimos, o símbolo de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ não é um tensor mas sua derivada $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\kappa}$ é. Por isso a derivada funcional do coeficiente de conexão pode ser considerada um tensor e portanto sua derivada covariante

$$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\kappa} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\kappa} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\kappa}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha},$$

assim, temos

$$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\lambda} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}, \quad (3.66)$$

$$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{,\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}, \quad (3.67)$$

tomando a diferença (3.66) – (3.67) como aparece na derivada funcional do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\lambda} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{,\nu} = & (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} + \\ & + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}, \end{aligned}$$

e substituindo em (3.65), obtemos

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu}, \quad (3.68)$$

esta equação é conhecida como *identidade de Palatini*. Substituindo a derivada fun-

cional do símbolo de Christoffel na equação acima

$$\delta R_{\mu\nu} = \left\{ \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [(\delta g_{\nu\rho})_{;\mu} + (\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}] \right\}_{;\lambda} + \left\{ \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu} + (\delta g_{\rho\mu})_{;\lambda} - (\delta g_{\mu\lambda})_{;\rho}] \right\}_{;\nu},$$

sendo a derivada covariante da métrica nula pela condição de compatibilidade da métrica. Portanto

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [(\delta g_{\nu\rho})_{;\mu;\lambda} - \delta g_{\mu\nu})_{;\rho;\lambda} + \delta g_{\mu\lambda})_{;\rho;\nu} - \delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\nu}]. \quad (3.69)$$

Fazendo a variação da Lagrangeana (3.58), temos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_G &= \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}), \\ \delta \mathcal{L}_G &= (\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

o último termo envolve a derivada funcional do tensor de Ricci. Usando a identidade de Palatini (3.68) neste termo, temos

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu}],$$

e podemos escrever o termo $g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda}$ como $(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda}$, pela condição de compatibilidade da métrica

$$(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} = \cancel{(g^{\mu\nu})_{;\lambda}} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda},$$

assim

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu}], \quad (3.71)$$

podemos considerar os termos $(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} = V^\lambda_{;\lambda}$ como um vetor derivado, e da

equação do símbolo de Christoffel contraído (2.84), temos

$$\begin{aligned} V^\lambda_{;\lambda} &= V^\lambda_{,\lambda} + (\sqrt{-g})_{,\lambda} V^\lambda, \\ V^\lambda_{;\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} V^\lambda)_{,\lambda}. \end{aligned}$$

Colocando a equação (3.71) em termos da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{,\lambda} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{,\nu}}_{\nu \leftrightarrow \lambda} \right], \\ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{,\lambda} - (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu})_{,\lambda}, \\ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &\equiv \partial_\lambda W^\lambda. \end{aligned} \quad (3.72)$$

O termo $\delta(\sqrt{-g})$ da equação (3.8) junto com o resultado semelhante de (2.82), mas para o caso onde $\delta g = g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, resulta em

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados encontrados em (3.8), obtemos

$$\delta \mathcal{L}_G = \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \partial_\lambda W^\lambda. \quad (3.73)$$

Usando o princípio de mínima ação onde $\delta S = 0$ para a contribuição do campo gravitacional, teremos

$$\delta S = \int_\Omega \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int_\Omega \partial_\lambda W^\lambda d^4x = 0,$$

o segundo termo do lado direito dentro da integral é um termo de superfície pelo teorema de Gauss. Estamos considerando uma variação na métrica dentro de uma

região Ω de modo que na superfície $\partial\Omega$ desta região esta variação seja nula. Logo o segundo termo acima é nulo, e como $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário temos que o termo em parênteses é nulo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0,$$

que é de fato a equação de campo de Einstein sem o termo de fonte. Portanto a equação (3.58) é uma expressão aceitável para a ação de um campo gravitacional.

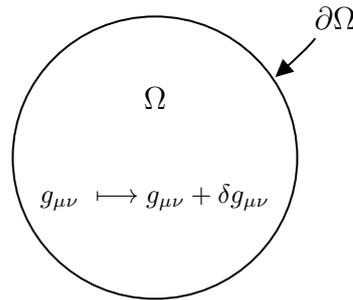


Figura 3.2 – Região Ω do espaço-tempo onde na superfície $\partial\Omega$ a deformação da métrica não existe.

Para incluirmos nessa ação a matéria, devemos aceitar que esta interage com a gravidade pelo tensor momento-energia. De modo semelhante à equação de variação da ação gravitacional, devemos ter uma equação para a ação da matéria como

$$\delta S_M = \int_{\Omega} \kappa T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (3.74)$$

onde κ é uma constante a ser determinada. Vamos considerar a seguinte Lagrangeana da matéria

$$\mathcal{L}_M = 2\kappa T_{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad (3.75)$$

tomando a variação da equação acima, temos

$$\delta \mathcal{L}_M = 2\kappa \{ T_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \},$$

e $T_{\mu\nu}$ não depende da métrica, portanto é invariante frente a variação da mesma.

Substituindo o termo da derivada funcional da raiz da métrica acima, obtemos

$$\delta\mathcal{L}_M = \kappa T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}.$$

Esta Lagrangeana é uma expressão válida para obtermos (3.74). A Lagrangeana total é então

$$S_T = S_G + S_M = \sqrt{-g}R + 2\kappa\sqrt{-g}T_{\mu\nu}g^{\mu\nu},$$

e a variação da ação total nos dá

$$\delta S_T = \int_{\Omega} \delta\mathcal{L}_T d^4x = \int_{\Omega} \left\{ \sqrt{-g} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) + \kappa T_{\mu\nu} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0,$$

onde o termo entre chaves deve ser nulo, logo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu},$$

como a equação acima deve resultar na equação de campo, devemos ter

$$\kappa = -\frac{8\pi G}{c^2}.$$

Juntando todas as informações obtidas, temos então que a Lagrangeana total da Relatividade Geral é

$$\boxed{\mathcal{L}_T = \sqrt{-g} \left(R - \frac{16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \right)}, \quad (3.76)$$

de modo que a ação total

$$S_T = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left(R - \frac{16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (3.77)$$

e esta ação no princípio variacional resulta em

$$\delta S_T = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (3.78)$$

como $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, temos que o termo entre chaves é nulo, portanto

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (3.79)$$

que é a equação de campo de Einstein.

3.9 Solução de Schwarzschild

Com a equação de campo de Einstein deduzida, algum resultado derivado dela ainda precisava ser descoberto para testar seu potencial como teoria. Einstein conseguiu obter uma solução aproximada com a qual descreveu a precessão do periélio de Mercúrio, um dos problemas que a mecânica Newtoniana era incapaz de achar solução. Em 1915, mesmo ano em que Einstein primeiro apresentou sua teoria da Relatividade Geral, Karl Schwarzschild apresentou sua solução para um corpo massivo estático (sem rotação) de simetria esférica, que se provou ser uma boa solução para o espaço-tempo do nosso Sistema Solar. Schwarzschild morreu no ano seguinte, 1916, por conta de uma doença adquirida em sua participação no exército alemão na Primeira Guerra Mundial [19].

Consideraremos a equação de campo no vácuo $R_{\mu\nu} = 0$ para um fonte estática e de simetria esférica em repouso. A condição estática infere que $g_{\mu\nu}$ seja independente de x^0 e que o elemento de comprimento ds^2 seja invariante à $x^0 \mapsto -x^0$, e não devem existir termos de $dx^0 dx^i$ em ds^2 . Isto implica em $g_{0i} = g_{i0} = 0$. Com estas condições, a forma mais geral do elemento de linha do espaço-tempo compatível com simetria esférica é

$$ds^2 = U(r)c^2 dt^2 - V(r) dr^2 - W(r)r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.80)$$

onde por causa da simetria, temos três funções para x^μ e cada uma delas é função somente de r . Dessas três funções independentes podemos obter somente duas fazendo

$$Wr^2 = \hat{r}^2, \quad (3.81)$$

assim

$$\frac{d\hat{r}}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{W}} \frac{dW}{dr} r + \sqrt{W} = \sqrt{W} \left(1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right),$$

e com isto

$$Vdr^2 = \frac{V}{W} \left(1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right)^{-2} d\hat{r}^2 \equiv \hat{V}d\hat{r}^2.$$

Com isso $W(r)$ vira uma função unitária e definimos

$$\hat{U}(\hat{r}) = e^{2\nu(\hat{r})} \quad ; \quad \hat{V}(\hat{r}) = e^{2\lambda(\hat{r})},$$

retirando os circunflexos, temos então como elemento de linha

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

e as métricas covariante e contravariante são

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

As duas funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ serão encontradas pela equação de campo no vácuo.

Calculando os coeficientes de conexão não nulos, encontramos

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{10} &= \Gamma^0_{01} = \nu', \\
 \Gamma^1_{00} &= \nu' e^{2(\nu-\lambda)}, \quad \Gamma^1_{11} = \lambda', \quad \Gamma^1_{22} = -r e^{-2\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}, \\
 \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta, \\
 \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot \theta,
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

sendo que estamos usando a linha ' para indicar a derivada em relação à r . Calculando o tensor de Ricci encontramos que as componentes não nulas são as $R_{\mu\nu} (\mu \neq \nu)$. Estas equações de campo no vácuo são

$$R_{00} = \left(\nu'' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)} = 0, \tag{3.84}$$

$$R_{11} = -\nu'' - \nu'^2 + \nu' \lambda' + \frac{2\lambda'}{r} = 0, \tag{3.85}$$

$$R_{22} = (-1 - r\nu' + r\lambda') e^{-2\lambda} + 1 = 0, \tag{3.86}$$

$$R_{33} = [(-1 - r\nu' + r\lambda') e^{-2\lambda} + 1] \sin^2 \theta = R_{22} \sin^2 \theta = 0. \tag{3.87}$$

O fator $e^{2(\nu-\lambda)}$ em (3.84) é não nulo, portanto os termos dentro do parênteses devem ser nulos. Somando (3.84) e (3.85), obtemos

$$\nu' + \lambda' = 0,$$

que integrando em relação à r nos dá

$$\nu + \lambda = \text{constante}.$$

Quando $r \rightarrow \infty$, a métrica do espaço (3.82) deve se aproximar da métrica de Minkowski, portanto $\lambda, \nu \rightarrow 0$, e assim a equação acima se torna

$$\nu = -\lambda. \tag{3.88}$$

Substituindo (3.88) em (3.86), temos

$$(re^{2\nu})' = 1,$$

e integrando em relação à r , temos

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2m}{r},$$

onde chamaremos, convenientemente, de $2m$ a constante de integração. A métrica covariante e contravariante então se torna

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

Da aproximação de campo fraco no limite newtoniano (3.48) temos que

$$g_{00} = 1 - \frac{2MG}{rc^2},$$

portanto, comparando com g_{00} da métrica de Schwarzschild, encontramos o valor

$$m = \frac{MG}{c^2}. \quad (3.91)$$

Finalmente, o elemento de linha desta métrica é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2MG}{rc^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.92)$$

ou, de modo equivalente

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.93)$$

e esta é a *solução de Schwarzschild*. Podemos perceber que quando $r \mapsto \infty$ o espaço-tempo de Schwarzschild se aproxima do espaço-tempo de Minkowski, como desejado. Esta solução oferece algumas correções para o movimento de planetas e o movimento da luz no Sistema Solar. Para a solução no vácuo, M é simplesmente a massa total do corpo e a distribuição de matéria no interior deste corpo é irrelevante.

Olhando a equação (3.92) em g_{11} , percebemos que o coeficiente de dr^2 se torna uma singularidade para $r \mapsto \frac{2MG}{c^2}$. Para o caso do Sistema Solar, esta singularidade não causa nenhum problema pois a solução de Schwarzschild serve para o espaço-tempo *fora* do corpo de massa M .⁴

Para o caso do Sol, $M \approx 1,99.10^{30} kg$ [20], então

$$\frac{2MG}{c^2} = \frac{2 \times 1,99.10^{30} \times 6,67.10^{-11}}{(3.10^8)^2} = 2,95 km = r_s,$$

onde a quantidade r_s é o chamado *raio de Schwarzschild*. A superfície de Schwarzschild (superfície que engloba o raio r_s) se encontra dentro do Sol, uma vez que o raio do Sol é $R_S \approx 6,96.10^5 km$ [20], portanto $r_s \ll R_S$ e a solução de Schwarzschild é válida. A métrica pode também ser escrita como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.94)$$

⁴Como o fator $m = \frac{MG}{c^2}$ depende exclusivamente da massa do corpo, quanto maior a massa deste, maior é o raio da singularidade. É destas singularidades em soluções da equação de campo que surge o estudo sobre buracos negros.

Na Mecânica Clássica, se considerarmos que a luz é constituída de partículas de massa m viajando a uma velocidade $v = c$, por conservação de energia obtemos

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{mMG}{R} = \text{constante}.$$

A luz não será capaz de escapar do potencial gravitacional exercido por este corpo massivo de massa M se

$$\frac{mMG}{R} > \frac{1}{2}mc^2,$$

isto é, se

$$R > \frac{2MG}{c^2},$$

que é, precisamente, o raio de Schwarzschild. Apesar dos erros conceituais, este resultado foi obtido em 1798 por Laplace. Em suas palavras: "portanto, é possível que os maiores objetos do universo sejam, por esta razão, invisíveis."⁵

⁵Vem daí o termo buraco negro: um corpo de massa tão gigantesca que nem mesmo a luz consegue escapar de seu horizonte de eventos, portanto sua observação através de telescópios comuns é impossível.

Capítulo 4

Equação de Dirac com uma Solução de Schwarzschild

Na Física, até onde sabemos, existem quatro forças fundamentais sendo estas o eletromagnetismo, a força nuclear fraca e a força nuclear forte, e a gravidade. Delas surgem três tipos de interação: a Cromodinâmica Quântica (QCD - *Quantum Chromodynamics*), que une os quarks para formar hádrons; a Eletrofraca que é a união do eletromagnetismo com a força nuclear fraca, responsável pelo decaimento beta; e a Gravitação. Ambas QCD e Eletrofraca podem ser unificadas e compreendidas no contexto da Teoria Quântica de Campos (TQC) uma teoria de calibre (*gauge*), onde suas interações são carregadas pelo quanta dos campos que são os glúons no caso da QCD e os fótons e os bósons W e Z no caso da Eletrofraca. Explicada pela Relatividade Geral, a gravidade no entanto é uma teoria diferente das demais por conta de sua natureza geométrica. A Relatividade Geral é claramente uma teoria clássica uma vez que em sua formulação inexistem noções de dualidade onda-partícula e a constante de Planck. Já que três das quatro forças fundamentais podem ser descritas na linguagem da teoria quântica de campos, o mesmo tratamento também não deveria ser dado à Relatividade Geral?

As interações descritas pela TQC não podem ser colocadas em termos geométri-

cos como a Relatividade Geral. Isso acontece porque sua formulação geométrica é possível por causa da equivalência entre massa gravitacional e massa inercial. Essa equivalência entre as massas significa que todos os corpos aceleram igualmente em um campo gravitacional, e a gravidade possui uma equivalência à um referencial acelerado. O mesmo não ocorre para as outras interações, por exemplo: um campo eletricamente carregado sentirá uma força proporcional à sua carga e sua aceleração depende dessa força dividida por sua massa inercial. Sua aceleração então depende da razão q/m_i que é diferente para diferentes corpos carregados. Portanto o referencial acelerado no qual o Eletromagnetismo desaparece para um corpo não é o mesmo que para outro corpo distinto, portanto não é possível geometrizar o eletromagnetismo.

Antes de termos essa melhor compreensão das forças nucleares, Einstein passou vários anos tentando unificar Gravitação e Eletromagnetismo, o que parecia plausível na época tendo em vista que ambas são forças de longo alcance e já tinham descrições bem claras na física clássica. No entanto veio a ser descoberto que o Eletromagnetismo poderia ser formulado como uma teoria quântica, juntamente com as interações de curto alcance da força fraca e a força forte. Nos anos 1960 descobriu-se que "calibrando", isto é, aplicando transformações de calibre às transformações de Lorentz da Relatividade Especial obtinha-se uma teoria extremamente parecida (mas não igual) com a Relatividade Geral. Vamos considerar esta teoria neste capítulo bem como a ideia de transformação de calibre e suas consequências aplicadas ao Eletromagnetismo.

4.1 A Eletrodinâmica como uma Teoria de Calibre Abelian

A densidade de Lagrangeana de um campo escalar clássico complexo $\phi(x^\mu)$ é

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi. \quad (4.1)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0, \quad (4.2)$$

considerando o espaço-tempo plano, obtemos

$$\left(\square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad ; \quad \left(\square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi^* = 0, \quad (4.3)$$

que é a *equação de Klein-Gordon*, uma equação de onda relativística de segunda ordem, sendo $\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ o operador d'Alambertiano. Quantizando esta equação, substituindo os termos

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{i}{\hbar} E \quad ; \quad \nabla \longrightarrow -\frac{i}{\hbar} \vec{P},$$

obtemos

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (4.4)$$

que é a relação de Einstein para a massa, momento e energia.

A Lagrangeana (4.1) possui uma simetria, e como consequência podemos associá-la à uma grandeza conservada, de acordo com o *teorema de Noether* [21]. Fazendo a transformação de calibre

$$\phi' \longrightarrow e^{-i\Lambda} \phi \quad ; \quad \phi'^* \longrightarrow e^{i\Lambda} \phi^*, \quad (4.5)$$

sendo Λ um parâmetro constante, podemos perceber que a Lagrangeana se mantém invariante. Este tipo de transformação é chamado de *transformação de calibre de primeira ordem*. Para um Λ infinitesimal e desconsiderando os termos $\mathcal{O}(\Lambda^2)$, temos

$$\delta \phi = -i\Lambda \phi \quad ; \quad \delta \phi^* = i\Lambda \phi^*, \quad (4.6)$$

$$\delta(\partial_\mu \phi) = -i\Lambda(\partial_\mu \phi) \quad ; \quad \delta(\partial_\mu \phi^*) = i\Lambda(\partial_\mu \phi^*). \quad (4.7)$$

Podemos definir uma corrente j^μ como

$$\Lambda j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \delta \phi^*, \quad (4.8)$$

e obtemos assim

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (4.9)$$

uma corrente que é conservada

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= i(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \phi^* \square \phi - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \phi \square \phi^*), \\ &= i\left(\phi^* \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi - \phi^* \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi\right) = 0. \end{aligned}$$

Como consequência dessa conservação, usando o teorema de Gauss [12], temos

$$\begin{aligned} \partial_0 \int_V j^0 dV &= \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV = \int_A \vec{j} \cdot \hat{n} dA, \\ &= i \int_A (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) dA = 0, \end{aligned}$$

assumindo que o campo ϕ desaparece na superfície A do volume V . Assim se considerarmos a grandeza $Q = \int j^0 dV$, temos

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (4.10)$$

onde Q é a carga elétrica, uma grandeza conservada do campo ϕ por conta de sua simetria frente à transformação de calibre.

A transformação (4.5) requer que o campo mude pela quantidade indicada em cada ponto do espaço e ao mesmo tempo. Esta é portanto uma transformação *global* que não combina bem com as características de localidade da Relatividade Restrita. Vamos então considerar o parâmetro Λ como uma função do espaço-tempo, e assim a transformação do campo ϕ será *local*, diferente em cada ponto do espaço. A

transformação de calibre para tal é

$$\phi'(x) \longrightarrow e^{-i\Lambda(x)}\phi(x) \quad ; \quad \phi^{*'}(x) \longrightarrow e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x), \quad (4.11)$$

que é chamada de *transformação de calibre de segunda ordem*. Considerando $\Lambda(x)$ infinitesimal obtemos

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi \quad ; \quad \delta\phi^* = i\Lambda\phi^*, \quad (4.12)$$

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda(\partial_\mu\phi) \quad ; \quad \delta(\partial_\mu\phi^*) = i(\partial_\mu\Lambda)\phi^* + i\Lambda(\partial_\mu\phi^*). \quad (4.13)$$

A Lagrangeana no entanto não é invariante sob esta nova transformação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= [-i(\partial_\mu\Lambda)e^{-i\Lambda}\phi + e^{-i\Lambda}\partial_\mu\phi] [i(\partial^\mu\Lambda)e^{i\Lambda}\phi^* + e^{i\Lambda}\partial^\mu\phi^*] + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi, \\ &= (\partial_\mu\Lambda)i(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) + \left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi \right], \\ &= \mathcal{L} + (\partial_\mu\Lambda)j^\mu. \end{aligned}$$

Para manter a invariância precisamos introduzir um campo $A_\mu(x)$ extra na teoria e um termo extra correspondente na Lagrangeana

$$\mathcal{L}_1 = -\epsilon j^\mu A_\mu, \quad (4.14)$$

onde ϵ é a *constante de acoplamento* acrescentada para que A_μ tenha as mesmas dimensões do operador $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e sua transformação de calibre é

$$A'_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{\epsilon}\partial_\mu\Lambda \quad ; \quad \delta A_\mu = \frac{1}{\epsilon}\partial_\mu\Lambda, \quad (4.15)$$

tal que

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\epsilon(\delta j^\mu)A_\mu - j^\mu(\partial_\mu\Lambda),$$

e

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -\epsilon(\delta j^\mu)A_\mu,$$

porém a soma das Lagrangeanas ainda não é invariante, já que

$$\begin{aligned}\delta j^\mu &= i[(\delta\phi^*)\partial^\mu\phi + \phi^*\delta(\partial^\mu\phi) - (\delta\phi)\partial^\mu\phi^* - \phi\delta(\partial^\mu\phi^*)], \\ \delta j^\mu &= 2\partial^\mu\Lambda(\phi^*\phi),\end{aligned}$$

logo

$$\delta(\mathcal{L} + \mathcal{L}_1) = -2\epsilon\partial^\mu\Lambda(\phi^*\phi)A_\mu.$$

Se adicionarmos o termo

$$\mathcal{L}_2 = \epsilon^2\phi^*\phi A^\mu A_\mu, \quad (4.16)$$

sabendo que $\delta(A^\mu A_\mu) = 2(\delta A^\mu)A_\mu$, temos que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 &= \epsilon^2(\delta\phi^*)\phi A^\mu A_\mu + \epsilon^2\phi^*\delta(\phi)A^\mu A_\mu + \epsilon^2\phi^*\phi\delta(A^\mu A_\mu), \\ &= 2\epsilon(\partial^\mu\Lambda)A_\mu\phi^*\phi,\end{aligned}$$

e assim, temos finalmente a Lagrangeana invariante

$$\delta(\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = 0. \quad (4.17)$$

O próprio campo A_μ introduzido na Lagrangeana contribuirá com um termo independente de \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 , que descrevem o acoplamento ao campo ϕ . Definimos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (4.18)$$

que sob a transformação de calibre

$$\delta(\partial_\mu A_\nu) = \frac{1}{\epsilon}\partial_\mu\partial_\nu\Lambda, \quad (4.19)$$

portanto

$$\begin{aligned}\delta F_{\mu\nu} &= \delta(\partial_\mu A_\nu) - \delta(\partial_\nu A_\mu), \\ &= \frac{1}{\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \frac{1}{\epsilon} \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = 0,\end{aligned}$$

e podemos incluir o termo invariante na Lagrangeana

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

A Lagrangeana total, soma da Lagrangeana original com os novos três termos, é

$$\mathcal{L}_{TOT} = (\partial_\mu \phi + i\epsilon A_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* - i\epsilon A^\mu \phi^*) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Olhando para os primeiros termos em parênteses desta Lagrangeana, podemos notar alguma semelhança com a definição da derivada covariante a menos dos termos de conexão, que nesse caso estaria "substituído" pelo campo A_μ

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu \phi + i\epsilon A_\mu \phi) \quad ; \quad D_\mu \phi^* = (\partial_\mu \phi^* - i\epsilon A_\mu \phi^*), \quad (4.21)$$

cuja variação

$$\delta(D_\mu \phi) = -i\Lambda D_\mu \phi, \quad (4.22)$$

é da mesma forma que (4.7). A Lagrangeana total pode ser escrita sucintamente como

$$\mathcal{L}_{TOT} = (D_\mu \phi)(D^\mu \phi) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Ainda precisamos definir uma corrente em termos dessa "derivada covariante" da Lagrangeana e que seja conservada. Podemos encontrá-la fazendo

$$\Lambda J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(D_\mu \phi)}(\delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(D_\mu \phi^*)}(\delta\phi^*), \quad (4.24)$$

e obtemos

$$J^\mu = i(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*). \quad (4.25)$$

Para mostrar a conservação desta corrente vamos usar a equação de Euler-Lagrange para o potencial A_μ , obtendo a equação

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - \epsilon J^\mu = 0, \quad (4.26)$$

cuja derivada nos dá

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (4.27)$$

e esta corrente "covariante" é de fato conservada.

A Lagrangeana de um campo escalar complexo possui uma simetria de rotação no plano complexo e por causa disso a corrente J^μ é conservada, logo uma quantidade também é conservada: a carga elétrica. Fazendo essa simetria ser local a Lagrangeana deixa de ser invariante e essa propriedade só é restaurada ao introduzirmos um campo A_μ e um quadri-rotacional associado $F_{\mu\nu}$, que é o *tensor do campo eletromagnético* e sua *fonte* é a carga elétrica.

Essa descrição do Eletromagnetismo não é geométrica, mas apresenta alguns paralelos com a Relatividade Geral. O comutador entre duas derivadas covariantes na Relatividade Geral é proporcional ao tensor de curvatura

$$[D_\mu, D_\nu] \mathbf{e}_\kappa = R^\rho{}_{\kappa\mu\nu} \mathbf{e}_\rho.$$

Nessa descrição do Eletromagnetismo, o comutador das "derivadas covariantes" é

$$[D_\mu, D_\nu] \phi = i\epsilon F_{\mu\nu} \phi, \quad (4.28)$$

o que nos sugere uma analogia entre tensor de curvatura e tensor eletromagnético.

Se compararmos as equações que descrevem ambos os tensores, a menos dos índices,

$$R = \partial\Gamma - \partial\Gamma + [\Gamma, \Gamma], \quad (4.29)$$

$$F = \partial A - \partial A, \quad (4.30)$$

percebemos as semelhanças entre as duas e podemos fazer uma analogia entre os coeficientes de conexão $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ e o campo A_μ . Porém o tensor eletromagnético não possui o termo à direita que o tensor de curvatura apresenta, que só surgirá quando generalizarmos a eletrodinâmica para o caso de uma simetria não-abeliana.

Por fim, é interessante obter uma outra notação para essa simetria de calibre apresentada. Generalizando as transformações de calibre, temos

$$\phi \longrightarrow U\phi \quad ; \quad \phi^* \longrightarrow U^\dagger\phi^*, \quad (4.31)$$

sendo $U = e^{i\Lambda}$ uma matriz unitária e hermitiana, U^\dagger o transposto conjugado de U e $U^\dagger U = 1$. Sob uma transformação local $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$, temos

$$\partial_\mu U = i(\partial_\mu \Lambda)U, \quad (4.32)$$

e as outras transformações são dadas por

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{i}{\epsilon} U^\dagger \partial_\mu U \quad ; \quad F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu}. \quad (4.33)$$

Se duas matrizes U_1 e U_2 são hermitianas, então seu produto $U_1 U_2$ também é hermitiano. E se uma matriz U tem uma inversa U^{-1} , e essa também é hermitiana, temos que as condições para o grupo $U(1)$ das matrizes unitárias em uma dimensão. A eletrodinâmica é portanto uma teoria de calibre $U(1)$.

4.2 Teoria de Calibre Não-abeliana

O que podemos tirar de útil se usássemos um grupo de simetria mais geral que o de $U(1)$? Essa foi uma das motivações de Yang e Mills, baseada na constatação de que as partículas com interação nuclear vinham em "famílias" com propriedades bastante similares. Por exemplo o próton e o nêutron possuem a mesma massa, mesmo spin e mesmo número bariônico, logo podem ser pensados como sendo dois *estados* de uma única partícula, o núcleon

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix},$$

tendo isospin $I = \frac{1}{2}$, sendo o próton de isospin "up" $I_3 = +\frac{1}{2}$ e o nêutron de isospin "down" $I_3 = -\frac{1}{2}$. O spin é matematicamente conectado às rotações num espaço de parâmetros tridimensional, e o isospin a um espaço abstrato tridimensional. I_3 é a componente de isospin ao longo do "terceiro" eixo deste espaço.

Isospin é uma quantidade "vetorial" em um espaço cuja terceira dimensão é conectada com a carga elétrica e sendo esta a fonte do campo eletromagnético, podendo ser descrita pelas equações de Maxwell e a simetria de calibre de $U(1)$, seria plausível entender o isospin como uma generalização deste grupo de simetria para o grupo $SO(3)$. Este novo grupo descreve rotações em três dimensões e é **não-abeliano**: seus diferentes elementos não comutam. Para perceber isso podemos tomar a rotação de um vetor ao longo do eixo z por um ângulo α , de tal maneira que

$$V_x \longrightarrow \cos \alpha V_x + \sin \alpha V_y \quad ; \quad V_y \longrightarrow -\sin \alpha V_x + \cos \alpha V_y \quad ; \quad V_z \longrightarrow V_z, \quad (4.34)$$

e a matriz de rotação é

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da mesma maneira, rotações nos eixos x e y resultam em matrizes de rotação

$$R_x(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad R_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix},$$

e estas não comutam

$$R_x(\beta)R_z(\alpha) \neq R_z(\alpha)R_x(\beta).$$

A rotação por um ângulo α infinitesimal, resulta numa matriz de rotação

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_z(\alpha) = \mathbb{I} + iJ_z\alpha,$$

sendo J_z o gerador de rotações no eixo z . Para os outros eixos, temos os geradores

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}; \quad J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

e essas matrizes não comutam

$$[J_l, J_m] = iJ_n. \quad (4.36)$$

Uma rotação em um eixo unitário $\hat{\mathbf{n}}$ por um ângulo α é dado pela equação

$$R_n(\alpha) = e^{i\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{J}}\alpha}. \quad (4.37)$$

Um vetor é um objeto com três componentes que sob rotações se transforma da mesma maneira como as coordenadas (x, y, z) . Para considerar as transformações do núcleon precisamos levar em conta os *espiniores* que possuem somente duas componentes. Isto nos leva a tratar a representação de rotações em $SU(2)$: grupo de matrizes unitárias em duas dimensões com determinante unitário. Neste grupo uma matriz geral é

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} ; \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

e

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad ; \quad \det U = 1. \quad (4.38)$$

A estrutura de $SU(2)$ é semelhante à de $SO(3)$, e analogamente à rotação (4.37), temos

$$U = e^{\frac{i}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}\alpha}, \quad (4.39)$$

sendo $\vec{\sigma}$ as matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

e estas possuem a propriedade

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \frac{\sigma_k}{2}, \quad (4.41)$$

portanto essas matrizes são os geradores do $SU(2)$ e obedecem a uma relação de comutação semelhante à de $SO(3)$. Usando a relação $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ e sabendo

que

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma})^{2p} &= \mathbb{I}, & p &= 0, 1, 2, \dots \\ (\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma})^{2q+1} &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}, & q &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

podemos mostrar que

$$U = e^{\frac{i}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} \alpha} = \mathbb{I} \cos \frac{\alpha}{2} + i \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4.42)$$

Se considerarmos $\hat{\mathbf{n}} = n_z = (0, 0, 1)$ então

$$\begin{aligned} U_z(\alpha) &= \mathbb{I} \cos \frac{\alpha}{2} + i \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \sin \frac{\alpha}{2}, \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e desta maneira um espinor se transforma como

$$\psi \longrightarrow \psi' = U\psi, \quad (4.43)$$

e temos

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{bmatrix} = U_z \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \psi_1 \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}} \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

O produto externo de dois espinores é

$$\psi\psi^\dagger = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1\psi_1^* & \psi_1\psi_2^* \\ \psi_2\psi_1^* & \psi_2\psi_2^* \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

e sua transformação de acordo com (4.44) é

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^* &\longrightarrow \cos\alpha(\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*) + \sin\alpha[i(\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*)], \\ i(\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*) &\longrightarrow \cos\alpha[i(\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*)] - \sin\alpha(\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*),\end{aligned}$$

que pode ser comparada com a transformação de um vetor

$$(\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*) \sim V_x \quad ; \quad i(\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*) \sim V_y. \quad (4.46)$$

Vamos considerar um *campo espinorial* ϕ com Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + m^2\phi^\dagger\phi, \quad (4.47)$$

aqui com $c = \hbar = 1$, sendo $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$. Esta é invariante sob

$$\phi \longrightarrow U\phi \quad ; \quad \phi^\dagger \longrightarrow \phi^\dagger U^\dagger, \quad (4.48)$$

sendo U uma matriz na forma (4.42). Para uma transformação de calibre de primeira ordem, considerando os parâmetros constantes α , temos

$$U = e^{i\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a}; \quad a = 1, 2, 3; \quad (4.49)$$

onde as matrizes de Pauli são representadas por $\sigma^1 = \sigma_x$, $\sigma^2 = \sigma_y$, $\sigma^3 = \sigma_z$. A transformação para um α^a infinitesimal

$$\delta\phi = i\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a\phi \quad ; \quad \delta(\partial_\mu\phi) = i\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a(\partial_\mu\phi), \quad (4.50)$$

e como $\sigma^{a\dagger} = \sigma^a$, temos

$$\delta\phi^\dagger = -i\phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \alpha^a \quad ; \quad \delta(\partial_\mu\phi^\dagger) = -i(\partial_\mu\phi^\dagger) \frac{\sigma^a}{2} \alpha^a. \quad (4.51)$$

A corrente é encontrada de modo semelhante à (4.8) trocando-se Λ por α^a , e obtemos

$$J_\mu^a = i \left(\partial_\mu\phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \phi - \phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \partial_\mu\phi \right), \quad (4.52)$$

e esta corrente possui, além das quatro componentes do espaço-tempo, também três componentes "internas" (componentes de spin) dadas pelo índice a . As equações de movimento deste campo espinorial também são do tipo de Klein-Gordon (4.3), logo podemos perceber que a corrente J_μ^a é conservada

$$\partial^\mu J_\mu^a = \partial^\mu \left[i \left(\partial_\mu\phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \phi - \phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \partial_\mu\phi \right) \right] = i \left(\square\phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \phi - \phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \square\phi \right) = 0.$$

Para considerarmos agora uma transformação de calibre de segunda ordem temos que considerar $\alpha^a = \alpha^a(x_\mu)$ e, em analogia ao caso eletromagnético, esperamos introduzir um potencial A_μ^a com um índice extra. A derivada $\partial_\mu\phi$ será trocada pela derivada covariante $D_\mu\phi$ e haverá um tensor de campo análogo à $F_{\mu\nu}$. Considerando a rotação

$$U = e^{i\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a(x)}, \quad (4.53)$$

para um $\alpha^a(x)$ infinitesimal a mudança em ϕ é

$$\delta\phi(x) = ig \frac{\sigma^a}{2} \alpha^a(x) \phi(x), \quad (4.54)$$

onde g é uma constante de acoplamento. Definindo a derivada total como

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ig A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \phi, \quad (4.55)$$

sua transformação se dará como

$$\delta(D_\mu\phi) = ig\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a(x)\partial_\mu\phi(x). \quad (4.56)$$

A transformação de A_μ^a pode ser obtida levando em consideração o lado direito da equação acima:

$$ig\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a\left(\partial_\mu\phi - igA_\mu^b\frac{\sigma^b}{2}\phi\right) = ig\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a\partial_\mu\phi + g^2A_\mu^b\frac{\sigma^a\sigma^b}{4}\alpha^a\phi,$$

usando a relação $\sigma^a\sigma^b = \delta_{ab} + i\varepsilon_{abc}\sigma^c$, obtemos o termo

$$ig\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a\partial_\mu\phi + \frac{g^2}{4}A_\mu^a\alpha^a\phi + i\frac{g^2}{2}A_\mu^b\varepsilon_{abc}\frac{\sigma^c}{2}\alpha^a\phi,$$

e disto tiramos que a transformação do potencial é

$$A_\mu^a \longrightarrow A_\mu^a + \partial_\mu\alpha^a - g\varepsilon_{abc}\alpha^bA_\mu^c. \quad (4.57)$$

É útil escrever a transformação de A_μ como

$$A_\mu \longrightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (4.58)$$

sendo

$$A_\mu = A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2} \quad (4.59)$$

e U é dado por (4.42). Assim para um α^a infinitesimal e desconsiderando termos de

$\mathcal{O}(\alpha^2)$ e superiores, temos

$$\begin{aligned} UA_\mu U^{-1} &= \left(1 + ig\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a\right) A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2} \left(1 - \frac{\sigma^c}{2}\alpha^c\right), \\ &= A_\mu + i\frac{g}{4}A_\mu^b [\sigma^a, \sigma^b]\alpha^a, \\ &= A_\mu - g\varepsilon_{abc}A_\mu^b \frac{\sigma^c}{2}\alpha^a, \end{aligned}$$

sendo que foi usada a relação $[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma^c$. O outro termo

$$\begin{aligned} (\partial_\mu U)U^{-1} &= \partial_\mu \left(e^{i\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a(x)} \right) g e^{-i\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a(x)}, \\ &= ig\frac{\sigma^a}{2}(\partial_\mu \alpha^a), \end{aligned}$$

e juntando os resultados dos termos, obtemos que

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - g\varepsilon_{abc}\alpha^a A_\mu^b \frac{\sigma^c}{2} + (\partial_\mu \alpha^a) \frac{\sigma^a}{2},$$

que é precisamente a transformação de A_μ . Nessa notação, a derivada covariante é

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - igA_\mu \phi, \quad (4.60)$$

que é a generalização de (4.21) para o caso não-abeliano, sendo A_μ agora uma matriz 2x2 em $SU(2)$. Como temos um potencial não-abeliano, devemos inferir a generalização de $F_{\mu\nu}$, definindo como

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu], \quad (4.61)$$

e obtemos assim

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu], \quad (4.62)$$

sendo agora $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^a \frac{\sigma^a}{2}$, portanto

$$F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + g\varepsilon_{abc} A_\mu{}^b A_\nu{}^c. \quad (4.63)$$

No caso não-abeliano o tensor eletromagnético adquire um termo quadrático de A_μ , ausente no Eletromagnetismo puro. E sob a transformação de calibre U o tensor se transforma como

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow U F_{\mu\nu} U^{-1}. \quad (4.64)$$

No entanto, neste caso $F_{\mu\nu}$ não é mais invariante como no caso do Eletromagnetismo e nem a quantidade $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ o é. Mas como

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \longrightarrow U F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U^{-1},$$

seu *traço* é invariante, já que traços não variam sob permutação cíclica das matrizes. Temos então

$$\text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu b} \text{Tr}\{\sigma^a \sigma^b\} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a},$$

já que $\text{Tr}\{\sigma^a \sigma^b\} = 2\delta_{ab}$, logo

$$\frac{1}{2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a}.$$

Assim a Lagrangeana para um campo espinorial ϕ com uma simetria de calibre $SU(2)$ local é

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi^\dagger)(D_\mu \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\}. \quad (4.65)$$

Como essa Lagrangeana apresenta termos cúbicos e quárticos de A_μ , seu significado é que o campo é "auto-acoplado": ao se propagar pelo espaço-tempo este pode absorver ou emitir outro quantum do campo e age como sua própria fonte. Isto

pode ser observado também pelo fato de o campo A_μ^a carregar o índice de spin a , diferentemente do Eletromagnetismo onde partículas carregadas agem como fonte do campo eletromagnético, mas este campo em si não carrega nenhuma carga.

Essa característica da teoria de calibre não-abeliana tem paralelos na Relatividade Geral. Ondas gravitacionais carregam energia (embora não localizadas) e qualquer coisa carregando energia (ou equivalentemente, massa) age como fonte do campo gravitacional. Esse aspecto de não linearidade da Relatividade Geral é compartilhada nas teorias de calibre não-abelianas e agora podemos traçar semelhanças com componentes da Relatividade Geral e do Eletromagnetismo:

$$\begin{array}{c}
 A_\mu \longrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \\
 D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi \longrightarrow V_{\mu;\rho} = V_{\mu,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\kappa V_\kappa \\
 F_{\mu\nu} \longrightarrow R_{\mu\nu\lambda}^\kappa
 \end{array}$$

4.3 Simetria de Calibre de Lorentz: torção

Vamos agora levar a ideia de calibre um passo adiante, mas de uma maneira um pouco diferente. Vamos considerar ϕ como um espinor dessa vez num "espaço espinorial" de verdade, cujas componentes diferem em suas projeções de spin numa direção do espaço em particular. As características desses campos (massa, spin) derivam do próprio espaço-tempo e não de atributos "adicionais" como a carga elétrica. O modo de entender essas propriedades é assumir sua *invariância de Lorentz*, ou seja, parâmetros das transformações de Lorentz (transformações de coordenadas, velocidade e rotações de ângulos) não serão mais constantes mas sim funções do espaço-tempo. Esse "calibramento" da invariância de Lorentz tem consequência nas derivadas que necessitarão serem substituídas por derivadas "covariantes", envolvendo um "potencial de calibre". Essa derivada aplicada na equação de Dirac [22], uma equação de onda portanto uma equação diferencial, permite uma descrição de, por exemplo, elétrons em um espaço-tempo curvo.

A equação de Dirac [23] é uma equação de primeira ordem

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = -m_Dc\Psi, \quad (4.66)$$

onde γ^μ são os coeficientes dos operadores derivadas de primeira ordem, m_D é a massa da partícula de Dirac. Aplicando o operador $i\gamma^\nu\partial_\nu$ de ambos os lados da equação acima, nos dá a equação de segunda ordem

$$-\left[(\gamma^0)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\gamma^1)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right]\Psi + [(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)\partial_0\partial_1 + \dots]\Psi = m_D^2\Psi,$$

que deve resultar na equação de Klein-Gordon, então

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad ; \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \quad (4.67)$$

$$\{\gamma^0, \gamma^1\} = \{\gamma^0, \gamma^2\} = \dots = 0, \quad (4.68)$$

sendo $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ o anticomutador. A equação (4.68) indica que os coeficientes γ^μ não podem ser números puros, mas sim matrizes. Essas matrizes são

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{bmatrix},$$

e por essa definição, temos

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}. \quad (4.69)$$

Como essas são matrizes 4x4 a função de onda Ψ deve ter quatro componentes. Assumindo que a equação de Dirac descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$ é de se esperar que Ψ tenha duas componentes (spin up, spin down). As outras duas soluções descrevem *antipartículas*, que são partículas de mesma massa e spin, mas de carga (ou número leptônico) oposta.

Os geradores das transformações de Lorentz (J_i são os geradores das transformações de coordenadas e K_i os geradores de rotação nos eixos x, y, z)¹ podem ser agrupados em uma única equação $J_{\mu\nu}$ tal que

$$J_{lm} = \varepsilon_{lmn} J_n \quad , \quad J_{0l} = K_l, \quad (4.70)$$

cuja relação de comutação é

$$i[J_{\kappa\lambda}, J_{\mu\nu}] = -\eta_{\kappa\mu} J_{\lambda\nu} + \eta_{\kappa\nu} J_{\lambda\mu} - \eta_{\lambda\nu} J_{\kappa\mu} + \eta_{\lambda\mu} J_{\kappa\nu}. \quad (4.71)$$

¹Esses geradores podem ser vistos com mais detalhes em [11, pág. 24].

Uma transformação de Lorentz infinitesimal em um campo escalar $\phi(x)$ é

$$\phi'(x) = \left(1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right)\phi(x), \quad (4.72)$$

que com $\hbar = 1$

$$J_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \quad (4.73)$$

é o operador momento angular orbital relativístico. Para *campos de Dirac* no entanto, com quatro componentes, há também uma contribuição matricial $\Sigma_{\mu\nu}$ atuando em $J_{\mu\nu}$, de modo que

$$J_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \Sigma_{\mu\nu}, \quad (4.74)$$

e esta matriz deve obedecer as relações de comutação (4.71) e

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (4.75)$$

representa o operador "spin intrínseco" do campo de Dirac.

Sabemos como construir derivadas covariantes para vetores, 1-formas e tensores mistos de rank arbitrário. No entanto o grupo de transformações de coordenadas gerais, a base da Relatividade Geral, possui representações vetoriais e tensoriais, mas não espinoriais. Transformações de rotações são descritas pelo grupo $SO(3)$ que também não possui representação espinorial. Porém o grupo $SU(2)$ possui representação espinorial e é homomórfico ao $SO(3)$.

Para tratar espinores na Relatividade Geral vamos considerar, em cada ponto do espaço-tempo, um *campo de tetrada*² h_μ^a [24]. Esta é um conjunto de quatro vetores ortonormais, o índice a indicando qual vetor. Esses vetores definem um sistema de referências que, por conta do Princípio de Equivalência, pode ser tomado como inercial em cada ponto. Um vetor na base coordenada pode ser escrito em termos

²Também chamado de "vierbein" do alemão "quatro pernas, quadrúpede".

da tetrada como

$$\mathbf{e}_\mu(x) = h_\mu^a(x) \mathbf{e}_a, \quad (4.76)$$

onde \mathbf{e}_a é a base da tetrada. A inversa da tetrada é h^μ_a e satisfaz as condições de ortonormalidade

$$h^\mu_a h_\nu^a = \delta^\mu_\nu \quad ; \quad h_\mu^a h^b_\mu = \delta^a_b, \quad (4.77)$$

Podemos também representar a base de tetrada na base coordenada como

$$\mathbf{e}_a = h^\mu_a(x) \mathbf{e}_\mu, \quad (4.78)$$

Em termos da métrica, temos as relações

$$g_{\mu\nu}(x) = h_\mu^a(x) h_\nu^b(x) \eta_{ab} = h_\mu^a(x) h_{\nu a}(x), \quad (4.79)$$

$$\eta_{ab} = h^\mu_a(x) h^{\nu b}(x) g_{\mu\nu}(x) = h^\mu_a(x) h_{\mu b}, \quad (4.80)$$

sendo η_{ab} e η^{ab} os responsáveis por levantar e abaixar os índices $a, b, ..$ e $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ por levantar e abaixar os índices $\mu, \nu, ...$. Os índices gregos são *índices globais*, como x^μ é uma coordenada no espaço-tempo curvo, e os índices latinos são os *índices do espaço tangente* plano (Minkowski) com métrica η_{ab} . Grandezas físicas tem propriedades de transformação distintas no espaço global e no espaço tangente. A vierbein h^μ_a é um vetor contravariante no espaço global e um vetor covariante no espaço tangente.

Portanto a proposta é que o espinor de Dirac $\Psi(x)$ se transforme como um escalar com respeito à transformações globais

$$\delta\Psi = -\xi^\mu \partial_\mu \Psi, \quad (4.81)$$

sendo $\xi^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu$, e como um espinor em relação às transformações de Lorentz no espaço tangente

$$\delta\Psi = -\frac{i}{2} \omega^{ab} \Sigma_{ab} \Psi, \quad (4.82)$$

e de modo geral

$$\delta\Psi = -\xi^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{i}{2}\omega^{ab}\Sigma_{ab}\Psi. \quad (4.83)$$

Seguindo a lógica das teorias de calibre, devemos tomar os parâmetros de ξ^μ e ω^{ab} como dependentes do espaço-tempo. Um espinor de Dirac se transforma como (4.83) sob transformações de Lorentz, mas quando $\omega^{ab} = \omega^{ab}(x^\mu)$ a derivada de Ψ se transforma

$$\delta(\Psi_{,\mu}) = -\frac{i}{2}[\omega^{ab}_{,\mu}(x)\Sigma_{ab}\Psi + \omega^{ab}(x)\Sigma_{ab}\Psi_{,\mu}],$$

adquirindo um termo indesejado $\omega^{ab}_{,\mu}$. Vamos trocar essa derivada por uma "derivada covariante", e vamos identificar sua atuação no espinor como $\Psi_{|\mu}$, definida da seguinte maneira

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}A^{ab}{}_\mu\Sigma_{ab}, \quad (4.84)$$

que sob a transformação de Lorentz resulta em

$$\delta(\Psi_{|\mu}) = \frac{1}{2}\omega^{ab}\Sigma_{ab}(\Psi_{|\mu}). \quad (4.85)$$

O comutador dessa nova derivada covariante definida é

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\Psi &= \left[\partial_\mu + \frac{1}{2}A^{ab}{}_\mu\Sigma_{ab}, \partial_\nu + \frac{1}{2}A^{cd}{}_\nu\Sigma_{cd} \right] \Psi, \\ &= \frac{1}{2}(A^{ab}{}_{\mu,\nu}\Sigma_{ab} - A^{cd}{}_{\nu,\mu}\Sigma_{cd})\Psi + \frac{1}{4}A^{ab}{}_\mu A^{cd}{}_\nu[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}]\Psi, \\ &= -\frac{1}{2}(A^a{}_{b\nu,\mu} - A^a{}_{b\mu,\nu} + A^a{}_{c\mu}A^c{}_{b\nu} - A^a{}_{c\nu}A^c{}_{b\mu})\Sigma_{ab}\Psi, \end{aligned}$$

onde identificamos o objeto como

$$R^a{}_{b\mu\nu} = A^a{}_{b\nu,\mu} - A^a{}_{b\mu,\nu} + A^a{}_{c\mu}A^c{}_{b\nu} - A^a{}_{c\nu}A^c{}_{b\mu}, \quad (4.86)$$

precisamente da mesma forma que o tensor de curvatura. Este de fato é o tensor de Riemann, uma vez que este objeto pode ser entendido como um tensor nas bases

coordenadas e na base tangente. Trazendo completamente para a base coordenada

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = h_a^{\kappa} h^b_{\lambda} R^a_{b\mu\nu}, \quad (4.87)$$

conseguimos reproduzir a curvatura do espaço. Essa abordagem traz uma nova noção que não há na Relatividade Geral: sendo os coeficientes de conexão não necessariamente simétricos em seus índices inferiores temos um espaço-tempo com *torção* bem como curvatura.

4.4 Equação de Dirac no espaço-tempo de Schwarzschild

Vamos agora ver com se comporta a representação de matéria fermiônica no contexto da Relatividade Geral e para uma métrica específica, já que fizemos uma apresentação da composição de campos Abelianos e Não-abelianos nas seções anteriores. Para isto, vamos novamente rever a equação de de Dirac no espaço-tempo de Minkowski,

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_Dc)\Psi = 0. \quad (4.88)$$

onde m_D é a massa do férmion representada. A ideia aqui é substituir a derivada $\partial_{\mu}\Psi$ por uma espécie de derivada covariante. Começamos escrevendo-a em termos do espinor 1-forma

$$d\Psi = \partial_{\mu}\Psi dx^{\mu}, \quad (4.89)$$

e transformando na derivada covariante da seguinte forma

$$d\Psi \longrightarrow D\Psi = d\Psi - \frac{i}{2}\omega^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda}\Psi, \quad (4.90)$$

onde $\omega^{\kappa\lambda}$ é a conexão 1-forma (2.63), podendo também ser chamada de espinor de conexão e $\Sigma_{\kappa\lambda}$ é dado por (4.75). Usando a relação $\omega_{\kappa\lambda} = g_{\kappa\rho}\omega^\rho{}_\lambda$ temos então

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\Psi &= \partial_\mu \Psi \mathbf{d}x^\mu - \frac{i}{2} g_{\kappa\rho} \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \left(\frac{i}{4} [\gamma^\kappa, \gamma^\lambda] \right) \mathbf{d}x^\mu, \\ &= \left\{ \partial_\mu \Psi + \frac{1}{8} \Gamma_{\kappa\lambda\mu} [\gamma^\kappa, \gamma^\lambda] \Psi \right\} \mathbf{d}x^\mu, \end{aligned}$$

e substituindo a derivada da equação de Dirac pela derivada covariante da equação acima, obtemos

$$i\hbar\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{8} \Gamma_{\kappa\lambda\mu} [\gamma^\kappa, \gamma^\lambda] \right) \Psi = m_{DC} \Psi. \quad (4.91)$$

Outra redefinição que precisa ser feita é trocar ∂_μ da base holonômica para e_μ da base não-holonômica. Com isso a equação fica

$$i\hbar\gamma^\mu (e_\mu + \Gamma_\mu) \Psi = m_{DC} \Psi, \quad (4.92)$$

sendo

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} \Gamma_{\kappa\lambda\mu} [\gamma^\kappa, \gamma^\lambda], \quad (4.93)$$

e, por estarmos na base coordenada, usaremos

$$\Gamma_{\kappa\lambda\mu} = -\frac{1}{2} (C_{\kappa\lambda\mu} + C_{\lambda\mu\kappa} - C_{\mu\kappa\lambda}), \quad (4.94)$$

para não confundir com as matrizes γ^μ da equação de Dirac.

O elemento de linha do espaço-tempo de Schwarzschild, como já visto no capítulo anterior na equação (3.93), é

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

sendo $m = \frac{MG}{c^2}$. A base cotangente é

$$\mathbf{d}x^0 = c \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{d}t; \quad \mathbf{d}x^1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d}r; \quad \mathbf{d}x^2 = r \mathbf{d}\theta; \quad \mathbf{d}x^3 = r \sin \theta \mathbf{d}\phi,$$

e a base dual é facilmente encontrada

$$\mathbf{e}^0 = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t}; \quad \mathbf{e}^1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Os coeficientes $C_{\mu\nu}{}^\kappa$ podem ser encontradas a partir dos comutadores dos vetores de base, usando a equação

$$[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = C_{\mu\nu}{}^\kappa \mathbf{e}_\kappa. \quad (4.95)$$

Como estamos considerando o espaço-tempo de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ temos que $C_{\mu\nu\kappa} = g_{\kappa\sigma} C_{\mu\nu}{}^\sigma$ e os coeficientes não nulos são

$$\begin{aligned} C_{010} &= -C_{100} = -\frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ C_{122} &= -C_{212} = C_{133} = -C_{313} = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ C_{233} &= -C_{323} = -\frac{\cot \theta}{r}. \end{aligned}$$

Os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu\kappa}$ são encontrados usando a equação (4.94), e os termos não nulos são

$$\begin{aligned} \Gamma_{001} &= -\Gamma_{100} = \frac{m}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \Gamma_{122} &= -\Gamma_{221} = \Gamma_{133} = -\Gamma_{331} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \Gamma_{233} &= -\Gamma_{332} = \frac{\cot \theta}{r}. \end{aligned}$$

Por fim, os coeficientes Γ_μ são encontrados pela equação (4.93), e são

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \frac{m}{4r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^1, \\ \Gamma_1 &= 0, \\ \Gamma_2 &= \frac{i}{4r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Sigma^3, \\ \Gamma_3 &= \frac{i}{4r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Sigma^2 - i \frac{\cot \theta}{4r} \Sigma^1,\end{aligned}$$

sendo α e Σ matrizes, tal que

$$\alpha^1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \Sigma^i = \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix},$$

e σ^i são as matrizes de Pauli.

Substituindo tudo na equação de Dirac (4.92) e usando as relações

$$\gamma^0 \alpha^1 = \gamma^1 ; \quad \gamma^2 \Sigma^3 = i\gamma^1 ; \quad \gamma^3 \Sigma^2 = -i\gamma^1 ; \quad \gamma^3 \Sigma^1 = i\gamma^2,$$

encontramos os termos

$$\begin{aligned}\mu = 0 : \quad & i\hbar\gamma^0(e_0 + \Gamma_0)\Psi = m_D c\Psi, \\ & i\hbar\gamma_0 \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial\Psi}{\partial t} + i\hbar \frac{m}{4r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^0 \alpha^1 = m_D c\Psi, \\ & i\hbar \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{m}{4r^2} \gamma^1 \Psi \right\} = m_D c\Psi,\end{aligned}\tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}\mu = 1 : \quad & i\hbar\gamma^1(e_1 + \Gamma_1)\Psi = m_D c\Psi, \\ & i\hbar \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^1 \frac{\partial\Psi}{\partial r} = m_D c\Psi,\end{aligned}\tag{4.97}$$

$$\begin{aligned}
 \mu = 2 : \quad & i\hbar\gamma^2(e_2 + \Gamma_2)\Psi = m_Dc\Psi, \\
 & i\hbar\gamma^2\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + i\hbar\frac{i}{4r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^2\Sigma^3\Psi = m_Dc\Psi, \\
 & i\hbar\left\{\gamma^2\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} - \frac{1}{4r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^1\Psi\right\} = m_Dc\Psi, \tag{4.98}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu = 3 : \quad & i\hbar\gamma^3(e_3 + \Gamma_3)\Psi = m_Dc\Psi, \\
 & i\hbar\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + i\hbar\left\{\frac{i}{4r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^3\Sigma^2 + i\frac{\cot\theta}{4r}\gamma^3\Sigma^1\right\}\Psi = m_Dc\Psi, \\
 & i\hbar\left\{\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \frac{1}{4r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^1\Psi - \frac{\cot\theta}{4r}\gamma^2\Psi\right\} = m_Dc\Psi, \tag{4.99}
 \end{aligned}$$

Substituindo esses termos na equação (4.92), temos finalmente

$$\begin{aligned}
 i\hbar\left\{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\gamma^0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^1\frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \right. \\
 \left. + \gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{m}{4r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\gamma^1 - \frac{\cot\theta}{4r}\gamma^2\right\}\Psi = m_Dc\Psi, \tag{4.100}
 \end{aligned}$$

a equação de movimento para uma partícula de Dirac no espaço-tempo de Schwarzschild, sendo uma equação diferencial parcial de primeira ordem a ser resolvida para o espinor de Dirac Ψ .

Capítulo 5

Conclusão

Uma teoria científica é um modelo matemático que descreve e codifica os fenômenos observáveis. Assim, uma boa teoria deverá descrever uma vasta série de fenômenos com base em alguns postulados relativamente simples, como também deverá ser capaz de fazer previsões claras, as quais poderão ser testadas. [25]

A primeira dessas previsões foi uma solução aproximada da equação de campo de Einstein, descoberta por ele mesmo que explicava a precessão do periélio de Mercúrio. Este problema antigo foi tratado inicialmente pelo francês Urbain Le Verrier em 1860 [26] e é um dos casos no qual a teoria da Gravitação Universal de Newton encontrava empecilhos para explicar.

No mesmo ano em que Einstein apresentou ao mundo sua teoria da Relatividade Geral, Schwarzschild propôs uma solução para a equação de campo onde considerava um corpo massivo estático, isto é, que não possui rotação, de simetria esférica, sendo esta uma ótima descrição para o nosso Sistema Solar. Todavia nesta solução, para um valor específico de, $r_S = \frac{2MG}{c^2}$, que ficara conhecido como raio de Schwarzschild, a métrica apresentava uma singularidade, isto é, um ponto do espaço-tempo em que a curvatura gerada pelo corpo massivo tende ao infinito. Apesar disto, este raio para a massa do Sol é muito menor que o raio do mesmo, o que não caracteriza uma incongruência na solução Schwarzschild visto que a métrica do espaço-tempo é válida

somente no exterior do corpo que gera essa curvatura. Como o raio de Schwarzschild depende exclusivamente da massa do corpo, o que aconteceria com o espaço-tempo nas redondezas de um corpo pequeno de densidade extremamente alta? Foi esta pergunta que motivou, nos anos seguintes, o estudo do colapso gravitacional e a descoberta dos buracos negros.

No ano de 1928 Dirac apresentou sua equação de raiz quadrada da equação de Klein-Gordon, e isso talvez tenha inspirado Einstein a continuar seus trabalhos de unificação da Gravitação com a Mecânica Quântica da época [24]. Nesse mesmo ano, Einstein em seus manuscritos introduzia o conceito de vierbein que representava uma maneira simples de unir gravidade e eletromagnetismo, mas no entanto requeria o conceito de paralelismo entre, o que mais tarde veio a ser conhecido pelos trabalhos de Yang-Mills, as teorias de calibre e a Relatividade Geral. Talvez por conta da situação teórica que ainda se encontrava a Teoria Quântica de Campos na época, a abordagem que Einstein apresentou não obteve muito reconhecimento. Outras teorias chamaram mais atenção, como por exemplo a de Kaluza-Klein que propunha uma quinta dimensão compacta extra no espaço, e foi mais tarde generalizada para a Teoria de Cordas. Como abordamos neste trabalho, é plausível juntar uma partícula descrita pela equação quântica de Dirac com uma métrica de um espaço-tempo, nesse caso o de Schwarzschild.

Com estes conhecimentos adquiridos, pretendemos como perspectivas de outros trabalhos, resolver a equação de Dirac para o obter o espinor Ψ e os níveis de energia em questão, em um determinado contexto astrofísico, com uma boa aproximação e condições necessárias e, usaremos tais recursos para "preencher", em um tratamento de dinâmica destas partículas, a equação dinâmica de Boltzmann [27] [28] [29]. Assim, conseguiríamos verificar diversas propriedades astrofísicas de objetos compactos, como estrelas e outros, a partir deste tratamento probabilístico/estatístico de partículas.

Referências Bibliográficas

- [1] Maxwell, J. C. Xxv. on physical lines of force: Part i.—the theory of molecular vortices applied to magnetic phenomena. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **1861**, *21*, 161–175.
- [2] Resnick, R. Introduction to special relativity. **1968**,
- [3] Lorentz, H. A. *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*; EJ Brill, 1892.
- [4] Lorentz, H. A. *Collected Papers*; Springer, 1937; pp 1–138.
- [5] Lorentz, H. A. *Collected Papers*; Springer, 1937; pp 172–197.
- [6] Michelson, A.; Pease, F.; Pearson, F. Repetition of the Michelson-Morley experiment. *JOSA* **1929**, *18*, 181_1–182.
- [7] Einstein, A. On the electrodynamics of moving bodies. **1905**,
- [8] Einstein, A. *Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation*; Wiley Online Library, 1916.
- [9] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*; Graduate student series in physics; Taylor & Francis, 2003.
- [10] Renteln, P. *Manifolds, Tensors, and Forms: An Introduction for Mathematicians and Physicists*; Cambridge University Press, 2013.

- [11] Ryder, L. H. *Introduction to general relativity*; Cambridge University Press, 2009.
- [12] Stewart, J. Cálculo. 6a edição. *São Paulo: Cengage Learning* **2011**, v2.
- [13] Arfken, G. B.; Weber, H. J.; Harris, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*; Academic press, 2011.
- [14] Griffiths, D. J. *Introduction to quantum mechanics*; Cambridge University Press, 2016.
- [15] Boldrini, J. L.; Costa, S. I.; Figueredo, V.; Wetzler, H. G. *Álgebra linear*; Harper & Row, 1980.
- [16] Goldstein, H. *Classical mechanics*; Pearson Education India, 2011.
- [17] Zel'dovich, Y.; Novikov, I. *Stars and Relativity*; Dover Books on Physics; Dover Publications, 2014.
- [18] Schutz, B. *A first course in general relativity*; Cambridge University Press, 2009.
- [19] Daintith, J. *Biographical encyclopedia of scientists*; CRC Press, 2008.
- [20] NASA, Solar System Exploration: Our Sun, by the numbers. 2018; <https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/sun/by-the-numbers/>.
- [21] Lemos, N. A. *Mecânica analítica*; Editora Livraria da Física, 2007.
- [22] Collas, P.; Klein, D. *The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations*; Springer, 2019.
- [23] Ryder, L. H. *Quantum field theory*; Cambridge university press, 1996.
- [24] Yepez, J. Einstein's vierbein field theory of curved space. *arXiv preprint arXiv:1106.2037* **2011**,

- [25] Popper, K. R. *A lógica da pesquisa científica*; Editora Cultrix, 2004.
- [26] Tort, A. C. A precessão do Periélio de Mercúrio e a Teoria da Relatividade Geral. **2010**,
- [27] Bittencourt, J. *Fundamentals of Plasma Physics*; Springer New York, 2013.
- [28] Cercignani, C.; Kremer, G. *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*; Progress in Mathematical Physics; Birkhäuser Basel, 2002.
- [29] Sobol, O. Electrical conductivity of hot Abelian plasma with scalar charge carriers. *Physical Review D* **2019**, *100*.