



**UFES**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Tese de Doutorado

**Violação Espontânea da Simetria de Lorentz,  
Não-Comutatividade e Cenário de Kaluza-Klein para  
uma Partícula Escalar Relativística**

por

**Érico Vinicius Bezerra Leite**

Vitória - Espírito Santo - Brasil

Dezembro, 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tese de Doutorado

**Violação Espontânea da Simetria de Lorentz,  
Não-Comutatividade e Cenário de Kaluza-Klein para  
uma Partícula Escalar Relativística**

por

**Érico Vinicius Bezerra Leite**

Tese de doutorado apresentada à Co-  
ordenação do Programa de Pós-  
graduação em Física da Universidade  
Federal do Espírito Santo como parte  
dos requisitos para a obtenção do grau  
de Doutor em Física

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich

Vitória - Espírito Santo - Brasil

Dezembro, 2020

---

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

L533v Leite, Érico Vinicius Bezerra, 1986-  
Violação da simetria de Lorentz, não-comutatividade e cenários de Kaluza-Klein para uma partícula escalar relativística / Érico Vinicius Bezerra Leite. - 2020.  
98 f. : il.

Orientador: Humberto Belich Júnior.  
Coorientador: Ricardo Luis Lima Vitória.  
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Violação de simetria de Lorentz. 2. Não-comutatividade. 3. Kaluza-Klein. I. Belich Júnior, Humberto. II. Vitória, Ricardo Luis Lima. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

**ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DA TESE DE DOUTORADO DO ALUNO ÉRICO VINICIUS BEZERRA LEITE.**

Às 14h00 do dia 04 do mês de dezembro do ano de 2020, estavam reunidos por webconferência, a Banca Examinadora, composta pelos Professores Dr. Humberto Belich Junior (Orientador – PPGFis/UFES), Ricardo Luis Lima Vitória (Coorientador – UFPa), Dr. Marcelo Batista Hott (Unesp-Guaratinguetá), Dr. Knut Bakke Filho (UFPb), Dr. Fernando Néspoli Nassar Pansini (PPGFis/UFES) e Wendel Silva Paz (PPGFis/UFES), para a sessão, com acesso público externo também por webconferência, da nonagésima sétima defesa de tese de doutorado do aluno Érico Vinicius Bezerra Leite, com o tema: “Violação Espontânea da Simetria de Lorentz, Não-Comutatividade e Cenário de Kaluza-Klein para uma Partícula Escalar Relativística”. Presentes os membros da banca e o examinando, o presidente deu início à sessão, passando à palavra ao aluno. Após exposição de 50 minutos por parte do examinando, o senhor presidente retomou a palavra e a cedeu aos Membros da banca, um a um, para procederem à arguição, as quais foram respondidas pelo aluno. Em seguida, o senhor presidente colocou em off-line todo o público externo para que a banca pudesse deliberar. Ao final das deliberações o presidente da sessão convocou o doutorando e os interessados via online; com a palavra, o presidente da banca leu a decisão que resultou a APROVAÇÃO do examinando; por fim, o presidente da sessão alertou que o aprovado somente terá direito ao título de doutor após a entrega da versão final de sua tese, em papel e meio digital, à Secretaria do Programa e da homologação do resultado da defesa pelo Colegiado Acadêmico do PPGFis. O Senhor Presidente, então, deu por encerrada a sessão, e eu, José Carlos Coutinho da Cruz, Secretário do Programa de Pós-Graduação em Física, lavrei a presente ata, que é assinada pelos membros da Comissão Examinadora. Vitória, 04 de dezembro de 2020.

---

Prof. Dr. Marcelo Batista Hott  
(Unesp/Guaratinguetá)

---

Prof. Dr. Humberto Belich Junior  
(Orientador - PPGFis/UFES)

---

Prof. Dr. Knut Bakke Filho  
(UFPb)

---

Prof. Dr. Ricardo Luis Lima Vitória  
(Coorientador - UFPa)

---

Prof. Dr. Fernando Néspoli Nassar Pansini  
(PPGFis/UFES)

---

Prof. Dr. Wendel Silva Paz  
(PPGFis/UFES)

# Dedicatória

*À minha mãe querida.*

# Agradecimentos

Agradeço à todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho de maneira direta ou indireta.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

*Veja!*

*E não diga que a canção está perdida*

*Tenha fé em Deus*

*Tenha fé na vida*

*Tente outra vez!*

*Raul Seixas - Tente outra vez*

## RESUMO

Neste trabalho nós investigamos inicialmente um cenário de espaço anisotrópico gerado por um termo vindo de uma quebra espontânea de simetria de Lorentz que possibilita uma extensão do modelo padrão. Uma outra possibilidade de violação deste tipo surge em teorias não-comutativas, promovendo também uma álgebra de Heisenberg deformada associada a um comprimento mínimo. Em seguida analisamos três casos para uma partícula escalar relativística em um cenário da teoria de Kaluza-Klein. No primeiro caso, analisamos o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, onde a partícula estava sujeita a um potencial tipo Coulomb. Em um segundo cenário, a partícula estava sujeita ao oscilador de Klein-Gordon e um potencial do tipo Cornell. Obtivemos analiticamente o espectro de energia para a partícula nesse caso e para os casos particulares, onde a partícula sofria a influência de um potencial tipo Coulomb e em seguida por um potencial linear. No último caso, estudamos uma partícula em um referencial não inercial, mas inicialmente ela não se encontra em uma teoria de Kaluza-Klein. Em um caso particular, a partícula se encontra em um região limitada por superfícies cilíndricas e sobre o efeito de um potencial *hard-wall*. Além disso, temos o caso da partícula dependente da posição interagindo com um potencial tipo Coulomb. E por fim, tratamos do oscilador de Klein-Gordon, em um referencial em rotação no espaço-tempo de Kaluza-Klein.

Palavras-chave: violação de simetria de Lorentz, não-comutatividade, oscilador de Klein-Gordon, massa dependente da posição, Kaluza-Klein.



## ABSTRACT

In this work we initially investigate an anisotropic space scenario generated by a term from a spontaneous break in Lorentz symmetry and allows an extension of the standard model. Another possibility of violation of this type appears in non-commutative theories, also promoting a deformed Heisenberg algebra associated with a minimum length. Next, we analyze three cases for a relativistic scalar particle in a Kaluza-Klein theory scenario. In the first case, we analyze the Aharonov-Bohm effect for linked states, where the particle was subject to a Coulomb-type potential. In a second scenario, the particle is subject to the Klein-Gordon oscillator and to a Cornell-type potential. We obtain analytically the energy spectrum for the particle in this case and for the particular cases, where the particle is influenced by a Coulomb-type potential and then by a linear potential. In the latter case, we study a particle in a non-inertial frame, but initially it is not found in a Kaluza-Klein theory. In a particular case, the particle is in a region limited by cylindrical surfaces. In addition, we have the case of the position-dependent particle interacting with a Coulomb-type potential. And, finally, we deal with the Klein-Gordon oscillator, in a rotating reference frame in Kaluza-Klein space-time.

Keywords: Lorentz symmetry violation, non-commutativity, Klein-Gordon oscillator, position-dependent mass, Kaluza-Klein.

# Lista de Artigos Publicados

- E. V. B. Leite, H. Belich, K. Bakke, "Aharonov-Bohm effect for bound states on the confinement of a relativistic scalar particle to a Coulumb-type potential in a Kaluza-Klein theory", *Adv. High Energy Phys.*, **2015**, p.925846 (2015).
- E. V. B. Leite, H. Belich, "An effective theory with Lorentz violation and minimum length", *International Journal of Physics D* **27**, no. 11, p. 1843006 (2018).
- E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, "Effects of the Kaluza-Klein theory on a Klein-Gordon particle with position-dependent mass", *Modern Physics Letters A* **34**, 190319 (2019).
- E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, "Effects of the Cornell-type potential on a position-dependent mass system in a Kaluza-Klein theory", *Advances in High Energy Physics* **2019**, p. 1-7 (2019).
- E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, "Klein-Gordon oscillator under effects of the Cornell-type interaction in the Kaluza-Klein theory", *Brazilian Journal of Physics* **50**, 744 (2020).
- E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, "Effects of rotation on a scalar field in a Kaluza-Klein theory", *Modern Physics Letters A* **35**, 2050283 (2020).
- H. Belich, E. V. B. Leite, *O Modelo Padrão e duas Possíveis Rotas de Extensão*, VII Escola de Física Roberto A. Salmeron (VII EFRAS), Livraria da Física, 2019.

# Lista de Figuras

1.1	Modelo padrão das partículas elementares: os férmions fundamentais em verde e roxo; e os bósons fundamentais em vermelho e amarelo. . . . .	18
2.1	Transição de fase ferromagnética mostrando as curvas para a temperatura maior, menor e igual a temperatura crítica do sistema . . . . .	23
2.2	A energia livre que descreve o comportamento do ferromagnetismo. Na figura <i>a</i> fica claro o surgimento dos mínimos para $T < T_c$ . A figura <i>b</i> mostra a diferença do comportamento para $T > T_c$ e $T < T_c$ em relação ao campo magnético externo.	24
2.3	Cadeia de spin alinhada inicialmente e em seguida sofrendo uma mudança no alinhamento causada pela perturbação $g(x)$ . . . . .	25
2.4	Temos representado na base o espaço real onde o gás de elétron se localiza, e um espaço interno (as fibras ) que guarda a informação da fase de cada elétron do gás. . . . .	26
2.5	No dielétrico a distribuição de cargas em torno do carga central positiva tem o comportamento acima. . . . .	28
2.6	Na fase supercondutora os componentes elementares do condensado ficam todos com a mesma fase. . . . .	32
3.1	Rotação passiva entre o referencial $S$ e $S'$ . . . . .	38
3.2	Rotação ativa entre o ponto $P$ e $P'$ . . . . .	40
3.3	O referencial $S$ está em repouso em relação as placas do capacitor, enquanto que o referencial $S'$ se move com velocidade $\mathbf{v}$ , em relação ao capacitor. . . . .	41

---

3.4	Diferença de trajetória de uma partícula carregada antes e depois de ser aplicado a ela um "empurrão" de $-\vec{v}$ sobre ela. . . . .	42
4.1	Armadilhamento dos elétrons no primeiro nível de Landau . . . . .	58
4.2	A figura da esquerda mostra uma região de raio $R$ que surge da não-comutatividade das variáveis $x$ e $y$ . A figura da direita é uma representação da área de comprimento mínimo . . . . .	59

# Sumário

Artigos publicados	10
<b>1 Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2 O Mecanismo de Quebra Espontânea de Simetria</b>	<b>21</b>
2.1 Quebra espontânea de simetria e Ferromagnetismo . . . . .	21
2.2 A Supercondutividade e a Invariância de Calibre . . . . .	24
2.2.1 O modelo de Landau-Ginzburg . . . . .	27
2.3 O Efeito Debye . . . . .	28
2.4 A violação Espontânea de Simetria em Supercondutores . . . . .	29
2.4.1 Perda da simetria de calibre e o Mecanismo de Higgs . . . . .	31
2.4.2 A versão relativística e o Campo de Higgs . . . . .	33
<b>3 Violação de Simetria de Lorentz</b>	<b>36</b>
3.1 Violação de Simetria de Lorentz por Campo de Fundo . . . . .	37
Boost Ativo em um Campo Elétrico Uniforme . . . . .	40
3.2 Setor de gauge do MPE . . . . .	42
3.2.1 Setor par do MPE . . . . .	43
3.2.2 Setor ímpar do MPE . . . . .	44
<b>4 Teoria de Campo Não-comutativa</b>	<b>45</b>
4.1 Violação de Simetria de Lorentz por Teoria Não-Comutativa . . . . .	46
4.2 Teorias de Campos Não-Comutativas . . . . .	48
4.3 Uma Teoria Efetiva com Violação de Lorentz e Comprimento Mínimo . . . . .	51

4.4	Efeito Hall Quântico: exemplo de uma teoria não-comutativa . . . . .	56
4.4.1	Quantização de Landau . . . . .	56
	Elétrons interagindo com o campo eletromagnético . . . . .	57
4.4.2	Os níveis de Landau do elétron confinado em uma placa metálica . . .	57
<b>5</b>	<b>Partícula escalar relativística em Cenários de Kaluza-Klein</b>	<b>60</b>
5.0.1	Kaluza-Klein em 5D . . . . .	61
5.0.2	Transformações do campo de gauge . . . . .	62
5.1	Teoria de Kaluza-Klein em (4+D) dimensões . . . . .	62
5.1.1	Grupo de Isometria de uma Variedade . . . . .	62
5.1.2	Transformações de Gauge não-abelianas . . . . .	63
5.2	Teoria de Kaluza-Klein em (4+1) dimensões . . . . .	65
5.3	Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados no confinamento de uma partícula escalar relativística para um potencial tipo Coulomb em uma teoria de Kaluza- Klein . . . . .	68
5.3.1	Caso não relativístico . . . . .	71
5.4	Oscilador de Klein-Gordon sob efeito de uma interação tipo Cornell . . . . .	73
5.4.1	Oscilador de Klein-Gordon sujeito a um potencial tipo Coulomb . . . . .	77
5.4.2	Oscilador de Klein-Gordon sujeito a um potencial Linear . . . . .	77
5.5	Efeito de rotação sobre um campo escalar em uma teoria de Kaluza-Klein . . .	78
5.5.1	Partícula escalar em uma região limitada por uma superfície cilíndrica .	81
5.5.2	Potencial de confinamento <i>Hard-Wall</i> . . . . .	82
5.5.3	Interação tipo Coulomb . . . . .	84
5.6	Efeito da rotação em um Oscilador de Klein-Gordon . . . . .	85
5.6.1	Caso Geral . . . . .	86
5.6.2	Caso particular . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>88</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O trabalho apresentado aqui nesta tese é baseado no capítulo publicado em [1], feito em conjunto com o meu orientador Dr. Humberto Belich, com o qual também publiquei o artigo [2]. Ainda juntamente com o Dr. Humberto Belich e o Dr. Knut Bakke, foi publicado o artigo [3]. Por fim, publiquei com os doutores Humberto Belich e Ricardo Vitória lançamos os trabalhos [4–7]. Um dos pontos abordados nesta tese é voltado ao estudo da simetria de Lorentz, consagrada pelo estabelecimento da relatividade restrita de Einstein. Tal simetria nos diz que a velocidade da luz é o limite superior da velocidade para todos os objetos. Porém existe uma proposta de violação dessa simetria à medida que nos aproximamos da escala de energia de Planck ( $10^{19} GeV$ ). Este ponto de vista torna-se cada vez mais hegemônico quando tentamos compatibilizar a mecânica quântica e a relatividade geral. Em seguida, para se estabelecer a construção do Modelo Padrão (MP) vamos seguir os trabalhos de um aluno do grupo de Dirac, Abdus Salam [8], deste modo podemos entender os princípios de simetrias (e violações dessas simetrias) que nortearam estabelecimento do MP.

Em sua tese, concluída em 1926, Dirac desenvolveu uma versão da Mecânica Quântica incorporando a mecânica matricial de Werner Heisenberg com a mecânica ondulatória de Erwin Schrödinger num único formalismo matemático [9]. No período de 1927 a 1931, Dirac inicia uma série de estudos, que estão interligados, e que vão da quantização do campo eletromagnético, à formulação de uma equação relativística para o spin do elétron, o acoplamento do elétron ao campo eletromagnético e considerações sobre uma possível estrutura do elétron, o que influenciou toda a física do século XX.

---

Até Dirac, toda a contribuição relativística do elétron em uma descrição quântica, como na descrição das raias espectrais do átomo de hidrogênio, eram realizadas como contribuições perturbativas ao tratamento não-relativístico. Mas ele acreditava que a Relatividade Restrita, por ser um fundamento, devesse estar presente em uma formulação a priori, e não entrar como correções de uma teoria. Deveríamos partir da simetria relativística do espaço-tempo na própria formulação da mecânica quântica.

Dirac foi o primeiro a formular a quantização do campo eletromagnético, e realizar o acoplamento do campo eletromagnético ao elétron. Deste modo, ele propõe a simetria de calibre, no caso do acoplamento com o elétron o grupo de simetria de calibre é o  $U(1)$ , e são lançadas as bases para uma nova física. Sua teoria trazia alguns resultados embaraçosos que depois passaram a ser o seu sucesso. A descoberta da existência de anti-partículas, previstas pela equação quântico relativista de Dirac, foi um dos grandes feitos de sua teoria. A previsão do pósitron e a sua confirmação experimental em 1932, foi uma das maiores descobertas de toda a história da física. Além disso, justifica-se o fator giromagnético do elétron e, ainda no contexto do spin, sua formulação permite a compreensão de sua origem.

Com a descoberta do nêutron, em 1932 percebeu-se um outro problema: a estabilidade nuclear. Portanto, uma nova interação, restrita ao núcleo atômico, entre os seus constituintes, era necessária tanto para justificar a sua coesão, como a origem do spin isotópico. Heisenberg estruturou essa nova interação em um grupo de simetria chamado  $SU(2)$ , colocando os prótons e nêutrons no que chamamos de um dublete de massa, pois eles têm massas muito próximas

A proposta de Heisenberg de trazer o grupo de calibre  $SU(2)$  para as interações fortes, será posteriormente retomada por Yang-Mills [10]. Mas, com os trabalhos de Dirac [11] e de Klein-Gordon, havia uma visão na física de que os mediadores das interações, quando vetoriais, no caso da interação eletromagnética via fóton, eram mediadores sem massa. E para mediadores de interação massivos, deveriam ser partículas escalares. Necessariamente os mediadores das interações fortes, por serem de curto alcance, deveriam ser escalares massivos. E essa foi uma grande influência incorporada no trabalho de 1935 de Hidek Yukawa [96] para a interação forte mediada por partículas escalares massivas. As massas eram fundamentais para justificar o curto alcance da interação nuclear forte. A partir desse alcance, Yukawa estimou as massas desses mediadores, posteriormente conhecidos como os píons de Yukawa ou mésons



---

Pi, posteriormente detectados por C ezar Lattes, em 1947, um dos maiores nomes da física brasileira.

De forma independente, Ronald Shaw, abordava o mesmo problema em sua tese de doutorado, orientada por A. Salam. R. Shaw [13], na primeira parte de sua tese, estudava os vários tipos de partículas em conexão com as representa es do grupo de Lorentz. Na segunda parte da sua tese, Shaw discute a invariância frente as transforma es gerais do spin isotópico. As conclusões e resultados obtidos por Shaw, apesar de caminhos um pouco diferentes, são as mesmas obtidas por Yang-Mills. Inclusive algumas limita es, como o problema das massas dos mediadores. Isso fez com que Shaw, a revelia de Salam, não enviasse o trabalho, finalizado em janeiro de 1954, para publica o. Mas mesmo assim, Salam, em sua Nobel Lecture e em outras passagens, sempre destacou a contribui o independente de Shaw.

Neste momento surgiu uma intrigante d vida: qual seria o processo pelo qual os bósons mediadores das intera es, inicialmente sem massa inercial, a partir de um mecanismo desconhecido, deveriam adquirir massa, e esta massa seria proporcional ao inverso do alcance da intera o? Ao fim desse processo, teríamos que a intera o fraca estaria confinada ao núcleo atômico, devido aos mediadores desta intera o tornarem-se massivos, e o mediador intera o eletromagnética ficar com massa nula. Portanto a intera o eletromagnética ficar de longo alcance (mediador de massa nula).

As teorias de gauge, embora terem se mostrado bem sucedidas quando se tratava de eletrodinâmica quântica (QED) e a cromodinâmica quântica (QCD), elas não eram satisfatórias para explicar as intera es fracas. O problema estava no fato que os c culos apontavam para fótons e bósons de gauge ( $\pm W$  e  $Z^0$ ) sem massa. Embora os experimentos apresentassem que os fótons não tivessem massa, o resultado divergia quanto se tratava dos bósons. Então, em 1960 e em 1961, Nambu [14] e Goldstone [15], respectivamente, lançam dois trabalhos sobre supercondutividade e apresentam como a quebra de simetria. Essa viola o da simetria leva a gera o de mínimos diferentes do zero inicial. Nos capítulos adiante, falaremos de maneira mais detalhada acerca dos trabalhos citados anteriormente. Contudo, no ano seguinte ao último desses trabalhos, Goldstone, Salam e Weinberg [16] introduzem esse mecanismo na teoria quântica de campos de maneira mais explícita e, advindo dessa ideia surge o mecanismo que explica a gera o de massa para bósons, o conhecido mecanismo de Higgs. A

proposta do mecanismo de geração de massa era de extrema importância pois entre tantas contribuições, ela poderia confirmar a peça que faltava para a consolidar todas as previsões do modelo padrão, o bóson de Higgs. Enfim, em 8 de outubro de 2013 o Grande Colisor de Hádrons do CERN confirma a descoberta do bóson de Higgs, o que garantiu a Peter Higgs o prêmio nobel de física.

Dessa forma, o modelo padrão fica consolidado e tem suas previsões confirmadas em laboratório ao atingirmos a escala de  $10^2 \text{ gev's}$  de energia (figura 1<sup>1</sup>). Porém, por limitações técnicas, não possuímos tecnologia suficiente para atingir valores maiores de energia, onde existem propostas novas de teorias além do modelo padrão, indo de  $10^3 \text{ gev's}$  até  $10^{19} \text{ gev's}$ . Nesse intervalo nós temos a supersimetria, teoria da grande unificação, aparecimento de monopólos magnéticos e bósons massivos.

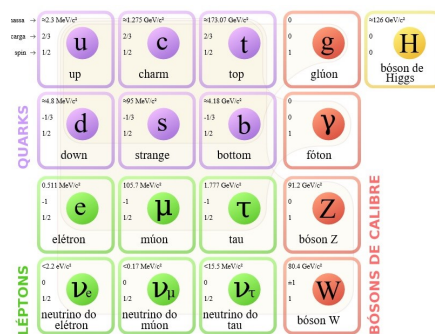


Figura 1.1: Modelo padrão das partículas elementares: os férmions fundamentais em verde e roxo; e os bósons fundamentais em vermelho e amarelo.

Na física além do modelo padrão, e seguindo a ideia de quebra de simetria, haveria não apenas uma quebra de simetria relacionada a um campo escalar, mas uma quebra sobre um campo vetorial envolvendo a simetria espacial e por consequência o tempo, ou seja, uma quebra da simetria de Lorentz. Em 1989 Kostelecký e Samuel [34] propõe que interações na teoria de cordas levaria a quebra da simetria de Lorentz. Muitas propostas surgiram a partir desse tema, dentre elas o modelo padrão estendido, que é motivação do trabalho desenvolvido nessa

<sup>1</sup>Imagem tirada do site wikipedia

---

tese.

A presença de um campo de fundo afetaria o sistema de tal maneira que teríamos uma direção privilegiada e teríamos que a simetria de rotação não seria conservada. Porém há também uma forma de ocorrer a quebra da simetria, e isso envolveria uma álgebra não-comutativa. Ou seja, assim como ocorre quando calculamos o comutador entre os operadores de posição e momento, e concluímos que ambos não comutam (isso também ocorre em teorias comutativas), o mesmo ocorre quando calcularmos o comutador entre  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  (o que não ocorre em teorias comutativas). Entre as duas formas de violação da simetria de Lorentz citadas acima, a primeira é bem mais abordada na literatura, porém, apresentaremos aqui um trabalho desenvolvido no doutorado [2], envolvendo ambas propostas e temos por perspectiva futura, buscar comparações entre cenários envolvendo as duas propostas.

Há ainda uma outra maneira de se estudar essa extensão que seria por meio da teoria de Kaluza-Klein. Essa teoria leva o nome de Theodor Kaluza [67], que apresenta uma extensão puramente clássica da relatividade geral em  $5D$ . A proposta apresentava um tensor com quinze componentes, sendo um deles um campo escalar não identificado. A teoria fornecia além das equações de Einstein em  $4D$ , as equações de Maxwell para o eletromagnetismo e uma equação para o campo escalar. Em 1926, Oscar Klein [68] trouxe uma interpretação quântica da teoria em cinco dimensões, de acordo com as descobertas de Heisenberg e Schrödinger. Uma forma de tentar explicar o motivo de não se identificar tais dimensões, seria pelo fato de, nenhuma dimensão além das quatro dimensões do espaço-tempo, as dimensões extras seriam compactas, ou seja, seriam minúsculas e se curvam em torno de si mesmas. Ele sugeriu que a geometria da quinta dimensão teria uma forma circular, com o raio estimado em  $10^{-30}$ cm.

Assim como a quebra de Lorentz, a investigação sobre dimensões extras nos possibilita teorizar também acerca de energias acima das alcançadas em laboratório atualmente. Logo, essa é uma outra possibilidade de investigação para extensões do modelo padrão.

A tese está distribuída da seguinte maneira: no capítulo 1 apresentamos o mecanismo de quebra espontânea de simetria, com um alguns exemplos dos modelos criados a partir desse mecanismo; no capítulo 2 falamos sobre a quebra espontânea de Lorentz por meio de um

campo de fundo; no capítulo 3 falamos sobre não-comutatividade e um dos seus efeitos: o comprimento mínimo, onde apresentamos um trabalho publicado durante o doutorado [2]; no capítulo 4 faremos uma revisão sobre teorias de Kaluza-Klein e apresentamos alguns dos trabalhos publicados durante o doutorado [3, 6, 7], os quais compõem uma parte importante desta tese; no capítulo 5 debatemos sobre os resultados encontrados em nossas pesquisas e falamos sobre as perspectivas de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# O Mecanismo de Quebra Espontânea de Simetria

### 2.1 Quebra espontânea de simetria e Ferromagnetismo

Em 1956, em uma conferência em Seattle, C. N. Yang e T. D. Lee [17] mostraram que nos decaimentos radioativos, como o decaimento- $\beta$  do nêutron, deveria haver um desbalanceamento entre neutrinos com quiralidade à esquerda e neutrinos com quiralidade à direita. O artigo contendo esses resultados foi publicado na edição da *Physical Review* de 1957 [18] e no mesmo ano, Wu e colaboradores realizam um experimento que comprova a hipótese da violação de paridade nos decaimentos fracos. Para preservar a simetria de Lorentz, ou seja, a relatividade restrita, é necessário que as interações fracas violem a simetria de paridade. Posteriormente, Salam generaliza para o conceito de simetria quiral, uma generalização da simetria de paridade.

Restava ainda o problema das massas dos mediadores. Ao compreender que ao campo escalar deveria estar associado o setor de matéria, de massa, de uma teoria, e que os mediadores vetoriais eram a única forma de interagir preservando a simetria de Lorentz, e ao mesmo tempo violar a paridade, um resultado também experimental, Salam, em parceria com Weinberg e Goldstone iniciam uma nova jornada a respeito do papel do campo escalar e as massas dos mediadores, que tem como um dos pontos mais importantes até o momento, o famoso

mecanismo de geração de massa, Nobel em 2013, que é o mecanismo de Higgs.

Para entender este mecanismo vamos começar discutindo o papel da simetria e da quebra espontânea da simetria. Simetrias e leis de conservação são excelentes guias na formulação de modelos físicos em diversas escalas de energia. Se um sistema físico é caracterizado por estados definidos, determinadas simetrias permitem que o sistema evolua sem mudar seu estado. Existem quantidades conservadas nestes sistemas as quais chamamos de cargas conservadas. Se o sistema apresenta uma lei de movimento independente do tempo, a quantidade conservada é a energia. Se um sistema apresenta lei de movimento independente de ângulo a quantidade conservada é o momento angular. Com esta noção poderíamos questionar se haveria algum processo no qual esta simetria seria perdida? Uma visão intuitiva deste processo é a quebra de simetria espacial: quando tomamos uma vareta em pé e pressionamos no sentido de comprimi-la, não podemos prever em que direção a vareta irá dobrar, então dizemos que esta quebra da simetria de rotação ocorre de forma espontânea. Um outro exemplo, menos intuitivo relacionado com a quebra de isotropia espacial é a transição de fase do ferromagnetismo, em que o estado de mínima energia viola a simetria de rotação.

Conforme mostra o gráfico da figura 2.1, para a temperatura  $T > T_c$ , quando o campo magnético é invertido a magnetização imediatamente acompanha o campo. Para  $T < T_c$  este comportamento muda [19]. Passa a existir uma resistência pelo sistema à inversão do campo (chamada de histerese magnética). Pelo modelo de Ising, que modela uma cadeia linear de spins, podemos entender microscopicamente o que está ocorrendo. Temos antes da transição, uma cadeia linear de spins com movimento térmico aleatório, sem correlação. A medida que o sistema é resfriado os spins começam a ficar correlacionados e começam a esboçar uma resistência à inversão do campo magnético externo. Quando retiramos o campo magnético externo fica uma magnetização residual, que caracteriza um novo estado mínimo de energia do sistema.

Partindo da energia livre  $G$  em função da magnetização podemos explicar o comportamento macroscópico do sistema:

---

<sup>0</sup>Imagem retirada do livro VII EFRAS

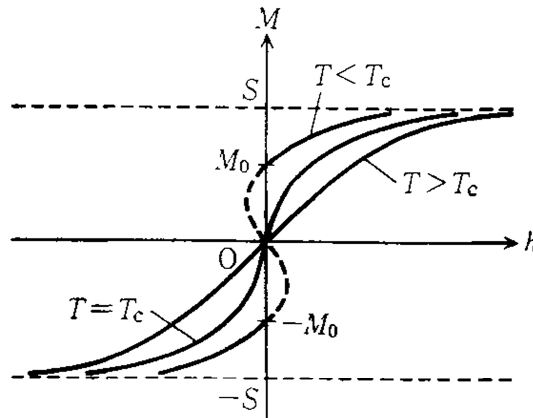


Figura 2.1: Transição de fase ferromagnética mostrando as curvas para a temperatura maior, menor e igual a temperatura crítica do sistema

$$G(M) = aM^2 + bM^4, \quad (b > 0), \quad (2.1)$$

sendo  $a = a_0(T - T_c)$ . Portanto o sinal de  $a$  muda quando o sistema passa pela temperatura  $T_c$ . Em temperaturas acima de  $T_c$  a energia livre do sistema apresenta um único mínimo (que é nulo). Quando o sistema tem sua energia térmica diminuída para uma temperatura abaixo de  $T_c$ , a energia livre apresenta dois mínimos, conforme mostra a figura 2.1<sup>1</sup>. Lembrando que o campo magnético externo é obtido por  $\frac{dG}{dM} = h$ , pelo estudo do comportamento da derivada da energia livre em função da magnetização obtemos o gráfico 2.1.

Para explicar a transição ferromagnética concluímos então que a energia livre proposta descreve o comportamento observado em laboratório. Na transição, vindo de temperaturas acima de  $T_c$ , o mínimo da energia livre que é nulo, faz uma transição para dois novos mínimos quando  $T < T_c$ . O sistema, pensado então como uma cadeia linear de spins caindo num desses mínimos, com os spins correlacionados apontando em uma única direção, e ao cair em um dos mínimos viola a simetria de rotacional de partida, de modo espontâneo [20] (mínimo  $\psi_0$  da figura 2.1<sup>2</sup>).

Fazendo uma pequena perturbação  $g(x)$  deste mínimo vemos que esta se propaga ao longo

<sup>1</sup>Imagem retirada do livro VII EFRAS

<sup>2</sup>Imagem retirada do livro VII EFRAS

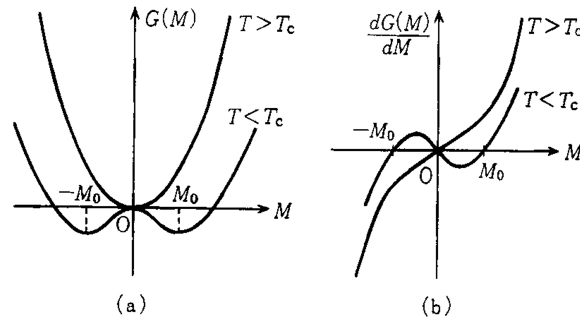


Figura 2.2: A energia livre que descreve o comportamento do ferromagnetismo. Na figura *a* fica claro o surgimento dos mínimos para  $T < T_c$ . A figura *b* mostra a diferença do comportamento para  $T > T_c$  e  $T < T_c$  em relação ao campo magnético externo.

da cadeia. Provocamos uma perturbação de alcance infinito (comprimento de onda da excitação  $\lambda$  infinito). Como temos pelo princípio de de Broglie  $p = \frac{h}{\lambda}$ , dizemos que estes são modos zero de excitação. Goldstone estabeleceu um teorema que afirma que a cada simetria global violada espontaneamente deve surgir um modo zero associado à quebra. Como consequência deste estudo estes modos ficaram conhecidos como bósons de Goldstone.

Na próxima seção vamos analisar a transição de fase supercondutora, e entender como se descreve o surgimento de um superfluido através de uma energia livre em função de um campo escalar complexo.

## 2.2 A Supercondutividade e a Invariância de Calibre

Na seção passada mencionamos que a simetria das leis de movimento determinam as cargas conservadas do sistema físico, e que a violação espontânea gera novos mínimos (diferentes de zero) que violam a simetria das leis de movimento. Estas simetrias não dependem de uma determinada região, por isto elas são simetrias globais. A violação destas simetrias por uma transição de fase produz naturalmente excitações que se propagam ao longo do sistema e é chamada de Bósons de Goldstone. Nesta seção vamos estudar a transição de fase supercondutora. Devemos então procurar descrever de que modo um gás de elétrons consegue,



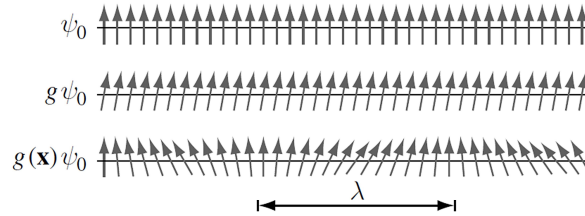


Figura 2.3: Cadeia de spin alinhada inicialmente e em seguida sofrendo uma mudança no alinhamento causada pela perturbação  $g(x)$ .

à medida que este gás é resfriado, transforma-se em um superfluido que vai passar por um meio condutor sem perda de energia.

Ginzburg propôs um potencial que sofreria uma violação espontânea de simetria global semelhante ao ocorrido no caso do ferromagnetismo. Este modelo se propõe a descrever uma mistura de dois fluidos: um fluido de elétrons no qual a passagem deste em um fio condutor gera dissipação, e um "superfluido" que percorre o meio condutor sem perda de energia. O número  $n_s$  de elementos que formam o superfluido é dado por  $n_s = |\psi_0|^2$ . Portanto, na fase de altas temperaturas temos o mínimo  $\psi_0 = 0$ , ou seja não superfluido. Quando a amostra cai para temperaturas abaixo de  $T_c$  o potencial apresenta um mínimo  $|\psi_0|^2 = -\frac{a}{2b}$ , e temos a formação de um superfluido tênue que vai crescendo a medida que a temperatura continua diminuindo. Nesta fase temos a mistura de um fluido eletrônico com um superfluido.

Da descrição quântica do elétron em presença de um campo eletromagnético, pelo acoplamento mínimo é possível descrever a interação com o campo, através da hamiltoniana [21]:

$$H\psi = \left[ \frac{1}{2m} \left| -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right|^2 + e\phi \right] \psi, \quad (2.2)$$

onde  $e$  é a carga do elétron,  $c$  é a velocidade da luz,  $m$  a massa do elétron,  $\vec{A}$  é o potencial vetor e  $\phi$  é o potencial escalar. As configurações de energia do elétron são representadas por estados quânticos que são funções complexas e normalizadas. O acoplamento com o potencial vetor recebe o nome de derivada covariante  $\vec{D} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \vec{A}$ .

O auto-estado de energia do elétron  $\psi$  apresenta uma simetria de fase (calibre), que consiste em realizar a seguinte operação:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi, \quad \psi = U\psi', \quad U = \exp\left(-i\frac{e}{c\hbar}\varphi\right) \quad (2.3)$$

e a Hamiltoniana mantém a mesma forma, e como o campo magnético é invariante frente a esta mudança, dizemos que é invariante de calibre. Podemos fazer uma visualização didática associando esta simetria à ideia de fibrado tangente (figura 2.2<sup>3</sup>)

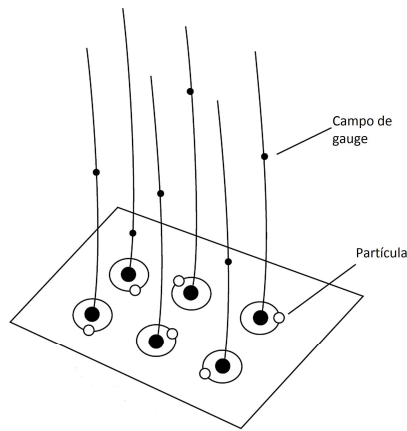


Figura 2.4: Temos representado na base o espaço real onde o gás de elétrons se localiza, e um espaço interno (as fibras) que guarda a informação da fase de cada elétron do gás.

O elétron mora no espaço-tempo, e a fibra representa as fases que o elétron pode assumir (espaço interno) [22]. Como se realiza esta simetria? Ao fazer a operação  $\psi = \exp\left(-i\frac{e}{c\hbar}\varphi\right)\psi'$ , a derivada covariante se transforma como  $\vec{D} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\left(\vec{A} + \left(i\hbar\left(-i\frac{e}{c\hbar}\nabla\varphi\right)\right)\right)$ . Realizando a seguinte transformação  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ , ou seja, transladando na fibra, podemos inferir que a Hamiltoniana fica mantendo a mesma forma. Na próxima seção vamos acrescentar a interação eletromagnética na energia livre do gás de elétrons, e a partir daí verificar os efeitos do campo eletromagnético na transição supercondutora.

<sup>3</sup>Imagem retirada do livro VII EFRAS

### 2.2.1 O modelo de Landau-Ginzburg

Landau percebeu que para uma explicação completa do gás de elétrons em um meio material sofrer uma condensação, se transformando num fluido supercondutor era necessário levar em conta o acoplamento mínimo do elétron. Então ele acrescentou um termo a mais na energia livre proposta por Ginzburg. Desta forma se chegou à primeira formulação de um modelo que de modo macroscópico explica a supercondutividade, sem entrar nos detalhes microscópicos de como os elétrons se transformam em superfluidos, pela energia livre da forma,

$$f_s = f_n + a |\psi|^2 + b |\psi|^4 + \frac{1}{m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \vec{A})^2, \quad (2.4)$$

o termo cinético que reflete o acoplamento mínimo é estabelecido com a massa da partícula que compõe o superfluido  $m^*$  sendo o dobro da massa do elétron, e a derivada covariante assume a forma  $\vec{D} = -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A}$ . Eles não sabiam explicar este fato, pois somente em 1957 o mesmo Bardeen que propôs os semicondutores, juntamente com seu aluno de doutorado John Robert Schrieffer, e um pós-doc recém chegado Leon Cooper iriam formular a teoria microscópica que estabeleceu que a partícula do superfluido é formada por pares de elétrons (Teoria BCS) [23].

Podemos observar a invariância de calibre fazendo a escolha do parâmetro de ordem na forma polar  $\psi = \rho(r)e^{i\chi(r)}$ . Considerando que a densidade do superfluido  $\rho(r)$  não muda, e omitindo os termos constantes a expressão (2.4) fica ,

$$f_s = \frac{\rho^2}{m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla\chi - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \vec{A})^2. \quad (2.5)$$

Pela transformação  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ , vemos que o campo magnético dado por  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}'$ , fica invariante. Fazendo a seguinte transformação do parâmetro de ordem  $\psi = \exp(-i\frac{2e}{c\hbar}\varphi)\psi'$ , e verificando que a derivada covariante se transforma como  $\vec{D} = -i\hbar\nabla(i\chi) - \frac{2e}{c} \left( \vec{A} + (-i\hbar)(i\frac{1}{\hbar}\nabla\varphi) \right)$ , redefinindo o campo de gauge  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ , notamos que a densidade de energia livre fica da forma,

$$f_s = \frac{\rho^2}{m^*} \left| i\hbar\nabla\chi + \frac{2e}{c} \vec{A}' \right|^2 + \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2. \quad (2.6)$$

Portanto esta expressão é invariante de calibre. Então a descrição do gás de elétrons por este funcional termodinâmico obedece à simetria de gauge. Na próxima seção vamos abordar como a interação eletrostática sendo de longo alcance no vazio, quando penetra numa solução eletrolítica, a interação se torna de curto alcance.

## 2.3 O Efeito Debye

Vamos considerar uma solução eletrolítica que é o fluido usado, por exemplo, na fabricação de pilhas. Como se comporta o potencial eletrostático dentro deste meio? Para intuir o que deve estar ocorrendo no interior do dielétrico vamos usar a figura 2.3<sup>4</sup>, que focando em uma carga positiva no centro descreve como deve ficar a distribuição das cargas (figura 2.3) em torno deste centro.

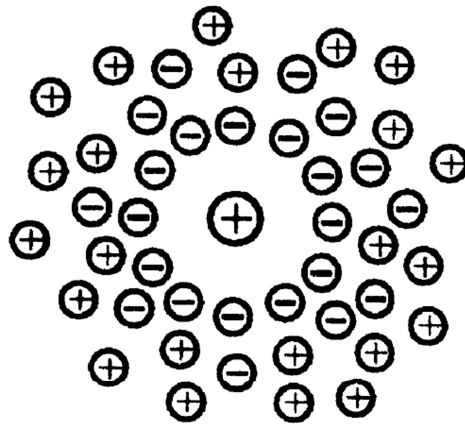


Figura 2.5: No dielétrico a distribuição de cargas em torno do carga central positiva tem o comportamento acima.

Para esta carga central no vazio, o potencial eletrostático é  $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$ . Mas como neste meio temos cargas podendo se movimentar, e por indução eletrostática, teríamos um comportamento da configuração radial da densidade de cargas positivas, e negativas, do tipo  $n_+ = n_0 \exp(-\frac{e\phi(r)}{K_B T})$ , e  $n_- = n_0 \exp(\frac{e\phi(r)}{K_B T})$ . Levando em conta esta configuração descrita pela figura acima, a equação de Poisson para o meio toma a seguinte forma,

$$\nabla^2 \phi(r) = -4\pi e(n_+ - n_-) - 4\pi e(\delta^3(r)) \simeq -8\pi e^2 n_0 \frac{e\phi(r)}{K_B T} - 4\pi e(\delta^3(r)). \quad (2.7)$$

Note que usamos uma aproximação para a equação assumir a forma,

$$(\nabla^2 - \mu^2) \phi(r) = -4\pi e(\delta^3(r)),$$

---

<sup>4</sup>Imagem retirada do livro VII EFRAS

sendo  $\mu^2 = 8\pi e^2 \frac{n_0}{K_B T}$ , e a solução é  $\phi(r) \propto \frac{\exp(-\mu r)}{r}$ . Veja que sem o termo  $\mu^2$  a solução seria  $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$ , e a interação seria de longo alcance. A presença desse termo blinda a interação, ou seja, torna a interação de curto alcance ( interação massiva).

O efeito que acabamos de mencionar, de um comportamento totalmente diferente para os pequenos momentos em comparação com os grandes, é bem conhecida a partir da electrodinâmica clássicas dos meios contínuos. Em um líquido condutor (eletrólitos) as cargas são blindadas; o comprimento característico (comprimento de Debye) corresponde ao inverso da massa  $\mu^2$ :  $\lambda_D = \frac{\hbar c}{\mu^2}$ . Isto significa que num eletrólito os fótons tem modos longitudinais. Para grandes frequências esse não é mais o caso, porque as partículas do eletrólito não podem seguir os campos que mudam rapidamente, e a interação passa sem interagir com o meio (o meio fica transparente para altas frequências).

Na próxima seção vamos estudar como a transição de fase supercondutora é capaz de gerar um termo massivo para o fóton no interior dos supercondutores. A interação eletromagnética no interior dos supercondutores é blindada. Em outras palavras se uma onda eletromagnética, ou um campo magnético penetra no meio supercondutor eles são rapidamente blindados.

## 2.4 A violação Espontânea de Simetria em Supercondutores

Iniciamos esta seção relembrando a discussão sobre o modelo de Landau-Ginzburg que descreve a condensação supercondutora. O número  $n_s$  de elementos que formam o superfluido é dado por  $n_s = |\psi_0|^2$ . Portanto na fase de altas temperaturas temos o mínimo  $\psi_0 = 0$ , ou seja não superfluido. Quando a amostra cai para temperaturas abaixo de  $T_c$  o potencial apresenta um mínimo  $|\psi_0|^2 = -\frac{a}{2b}$ , e temos a formação de um superfluido tênue que vai crescendo a medida que a temperatura continua diminuindo.

Nesta fase em que a supercondutividade aparece, os campos relevantes passam a ser flutuações em torno do mínimo de energia  $\psi_0 = \sqrt{-\frac{a}{2b}}$ . Então, para estudar a fase supercondutora, é feita a seguinte decomposição dos campos:

$$\psi = (\psi_0 + h(r)) e^{i\chi(r)}, \quad (2.8)$$

sendo  $h(r)$ , e  $\chi(r)$  flutuações em torno de  $\psi_0$ .

Lembrando que na transição ferromagnética temos dois mínimos, e o sistema quando transiciona escolhe um deles. Nesta transição os modos de pequenas oscilações em torno do mínimo são oscilatórios. Diferentemente na supercondutividade nós temos um grau de liberdade a mais devido ao parâmetro de ordem ser um número complexo. A fase  $\chi(r)$  vai dar um giro em torno do eixo  $y$  gerando um gráfico de potencial conhecido como chapéu mexicano. O modo  $\chi(r)$  em torno do mínimo não tem esta característica oscilatória. Comparando o gráfico do chapéu mexicano a uma garrafa com fundo de mesmo formato, para mover uma bolinha no fundo da garrafa ao longo da canaleta fazendo a bolinha girar em círculos, não encontramos resistência. Já para deslocar a bolinha que está no mínimo ao longo da direção radial, como este modo é oscilatório encontramos resistência.

Note que essas flutuações de fase são modos de massa nula (pois não apresentam resistência em se propagar ao longo da canaleta), e este seriam os candidatos naturais a bósons de Goldstone.

A derivada covariante agindo nesta decomposição gera,

$$\begin{aligned}\vec{D}\psi &= \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right) ((\psi_0 + h(x)) e^{i\chi(r)}) \\ &= \left(-i\hbar\nabla h(x) + \hbar\left(\nabla\chi - \frac{e}{\hbar c}e\vec{A}\right)(\psi_0 + h(x))\right) e^{i\chi(r)},\end{aligned}\quad (2.9)$$

e calculando o bilinear,

$$\begin{aligned}\vec{D}\psi (\vec{D}\psi)^* &= \left[ \left(-i\hbar\nabla h(x) + \hbar\left(\nabla\chi - \frac{e}{\hbar c}e\vec{A}\right)(\psi_0 + h(x))\right) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \left(i\hbar\nabla h(x) + \hbar\left(\nabla\chi - \frac{e}{\hbar c}e\vec{A}\right)(\psi_0 + h(x))\right) \right], \\ &= \hbar^2\nabla h\nabla h + \left(\nabla\chi - \frac{e}{c}\vec{A}\right) \left(\nabla\chi - \frac{e}{c}\vec{A}\right) (\psi_0 + h(x))^2.\end{aligned}\quad (2.10)$$

temos a contribuição que deve aparecer na energia livre (2.4),

$$\begin{aligned}f_s &= f_n + a|\psi_0 + h|^2 + b|\psi_0 + h|^4 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \vec{A})^2 + \\ &\quad + \frac{1}{m^*} \left( \hbar^2\nabla h\nabla h + \left(\nabla\chi - \frac{2e}{c}\vec{A}\right) \left(\nabla\chi - \frac{e}{c}\vec{A}\right) (\psi_0 + h(x))^2 \right),\end{aligned}\quad (2.11)$$

Fazendo uma mudança de calibre  $\vec{C} = \vec{A} - \frac{e}{c}\nabla\chi$

$$f_s = f_n + a|\psi_0 + h|^2 + b|\psi_0 + h|^4 + \frac{1}{8\pi}(\nabla \times \vec{C})^2 + \frac{1}{m^*} \left( \hbar^2 \nabla h \nabla h + \left( \frac{e}{c} \vec{C} \right)^2 (\psi_0 + h(x))^2 \right). \quad (2.12)$$

Calculando a eq. de movimento para o campo  $\vec{C}$ :

$$\delta_{\vec{C}} f_s = \frac{1}{m^*} (\psi_0 + h(x))^2 \left( \frac{e}{c} e \vec{C} \right) \frac{e}{c} (\delta \vec{C}) + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{C}) \nabla \times (\delta \vec{C}). \quad (2.13)$$

Fazendo  $\delta_A f_s = 0$ , e usando que  $\nabla \times (\nabla \times \vec{C}) = \nabla \cdot (\nabla \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}$ , e que na fase supercondutora implica em  $\nabla\chi = 0$ , no gauge de Landau ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ )

$$\left[ \frac{(\psi_0 + h(x))^2}{m^*} \left( \frac{e}{c} \right)^2 \vec{C} - \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{C}) \right] (\delta \vec{C}) = 0, \quad \left( \nabla^2 - 4\pi \frac{(\psi_0 + h(x))^2}{m^*} \left( \frac{e}{c} \right)^2 \right) \vec{C} = 0, \quad (2.14)$$

Desprezando o termo de flutuação  $h(r)$  note que obtemos um termo de massa  $\mu^2 = 4\pi \left( \frac{e}{c} \right)^2 \frac{\psi_0^2}{m^*}$ , semelhante ao caso do potencial eletrostático. Então vemos que em um meio supercondutor a interação eletromagnética não consegue se propagar, pois tem uma blindagem promovida pelo termo  $4\pi \left( \frac{e}{c} \right)^2 \frac{\psi_0^2}{m^*}$ . Este efeito ficou conhecido em supercondutividade como efeito Meissner.

Quem primeiro entendeu a não propagação do fóton num meio supercondutor devido á geração do termo massivo foi P. W. Anderson. Curiosamente ele também fez uma importante observação - deveria se esperar no espectro das excitações bósons sem massa, pois a simetria de calibre foi espontaneamente quebrada. Mas os bósons de Goldstone nunca foram observados na transição de fase supercondutora!

Na próxima seção vamos elucidar porque a supercondutividade tem este comportamento diferente da quebra espontânea de simetrias globais.

### 2.4.1 Perda da simetria de calibre e o Mecanismo de Higgs

Na transição de fase supercondutora todos os componentes do superfluido se encontram na mesma fase, e formam um grande bolha de estado coerente. Isto justifica a escolha adotada na seção passada de se considerar  $\nabla\chi = 0$ .

Vamos recordar como, ao longo do desenvolvimento deste capítulo, se realiza a liberdade de gauge. Ao fazer a transformação no parâmetro de ordem,  $\psi = \exp(-i\frac{e}{c\hbar}\varphi)\psi'$ , a derivada covariante se transforma como  $\vec{D} = -i\hbar\nabla(i\chi) - \frac{e}{c}(\vec{A} + (-i\hbar(i\frac{1}{\hbar}\nabla\varphi)))$ . Realizando a seguinte transformação na fase  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ , ou seja, transladando na fibra, vemos que a energia livre invariante. Pela transformação  $\vec{C}' = \vec{C}' + i\hbar\frac{e}{2e}\nabla\varphi$ , vemos que o campo magnético dado por  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , fica invariante

$$\begin{aligned}\psi &= \exp(-i\frac{e}{c\hbar}\varphi)\psi', \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\varphi.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Note que quando perdemos o operador  $\nabla$  da expressão da energia livre pela substituição  $\vec{C} = \vec{A} - \frac{\hbar c}{2e}\nabla\chi$ , não podemos mais absorver a mudança de fase pelo campo de gauge, desta forma a simetria de calibre é perdida, restando uma simetria global de fase, como na figura 2.4.1<sup>5</sup>.

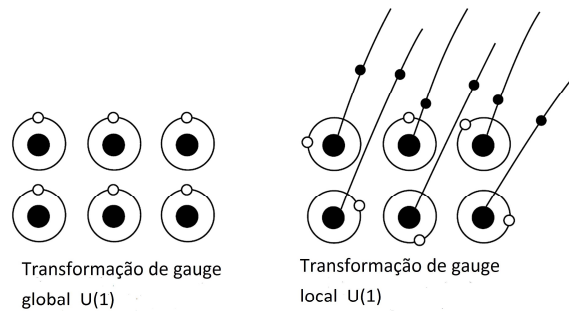


Figura 2.6: Na fase supercondutora os componentes elementares do condensado ficam todos com a mesma fase.

Deste modo temos que o termo  $\nabla\chi$ , que forneceria os modos de Goldstone desta transição é "engolido", e por isto nenhuma excitação bosônica de massa nula é observada no espectro. Por este motivo que os bósons de Goldstone nunca foram observados na transição de fase supercondutora.

<sup>5</sup>Imagem tirada do livro VII EFRAS



Na próxima seção vamos estudar a versão relativística do modelo de Landau-Ginzburg com a finalidade de, através do fóton adquirindo massa num meio supercondutor, e perdendo a simetria de fase, ou simetria local  $U(1)$ , chegamos a contextualizar o surgimento do campo de Higgs.

### 2.4.2 A versão relativística e o Campo de Higgs

É interessante observar que a transição supercondutora tem um mecanismo similar à transição de fase que ocorre no Modelo Padrão conhecida com a transição eletrofraca. O mecanismo de geração de massa de mensageiros das interações é bastante similar. Em supercondutividade o bóson intermediário que ganha massa é o fóton, com a simetria abeliana de calibre  $U(1)$  violada. Na transição eletrofraca os bósons intermediários que ganham massa são 3:  $W_{\pm}$  e  $Z_0$ , sendo que a simetria violada é a de calibre  $SU(2)$ . Deste modo resulta que temos os mediadores da interação fraca com massa, tornando a interação de curto alcance, confinada ao interior dos núcleos atômicos. Resulta, deste processo, que temos 3 bósons massivos, e o fótons sem massa, ou seja, a interação eletrofraca separa-se em duas interações, uma de curto alcance (interação fraca), e outra de longo alcance (eletromagnetismo). O parâmetro de ordem na supercondutividade vai aparecer no Modelo Padrão como o campo escalar de Higgs, e na fase quebrada, as excitações em torno do mínimo do campo escalar massivo é identificada como o bóson de Higgs. A versão covariante da energia livre do modelo de Landau Ginzburg é dada pela ação (adotando  $\hbar = c = 1$ ) [24],

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_{\mu}\psi)^* D^{\mu}\psi + a|\psi|^2 + b|\psi|^4 \right\}, \quad (2.16)$$

sendo  $F_{\mu\nu}$  o tensor eletromagnético com os índices gregos  $\mu, \nu$  tendo quatro componentes indexados de 0 (dimensão temporal) a 4 [24]. A derivada covariante assume a forma:

$$D_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + ieA_{\mu}\psi. \quad (2.17)$$

Esta simetria é quebrada espontaneamente, e o novo vácuo é dado pela expressão

$$\psi_{\min} = \psi_0, \quad (2.18)$$

onde

$$\psi_0 = \left( -\frac{a}{2b} \right)^{1/2}; \quad a < 0. \quad (2.19)$$

Como na seção anterior, foi adotada a parametrização polar

$$\psi = (\psi_0 + h(x)) e^{i\chi(r)}, \quad (2.20)$$

sendo  $h(x)$ , e  $\chi(r)$  são as flutuações quânticas escalares. A derivada covariante age no campo escalar complexo da forma,

$$D_\mu \psi = D_\mu (\psi_0 + h(x)) e^{i\chi(r)} = (\partial_\mu h(x) + i(\partial_\mu \chi + eA_\mu)(\psi_0 + h(x))) e^{i\chi(r)}, \quad (2.21)$$

e temos,

$$\begin{aligned} D_\mu \psi (D^\mu \psi)^* &= \left[ \left( \partial_\mu h(x) + ie \left( \frac{1}{e} \partial_\mu \chi + A_\mu \right) (\psi_0 + h(x)) \right) \right] \\ &\cdot \left[ \left( \partial^\mu h(x) - ie \left( \frac{1}{e} \partial^\mu \chi + A^\mu \right) (\psi_0 + h(x)) \right) \right], \\ &= \partial_\mu h \partial^\mu h + e^2 \left( \frac{1}{e} \partial_\mu \chi + A_\mu \right) \left( \frac{1}{e} \partial^\mu \chi + A^\mu \right) (\psi_0 + h(x))^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Redefinindo o campo de gauge como  $C_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \chi + A_\mu$ , observamos que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$  fica invariante, e o lagrangeano (2.16) se escreve como,

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \psi)^* D^\mu \psi - V(\psi) + \mathcal{L}_{int} \right\}, \quad (2.23)$$

com

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} e^2 C_\mu C^\mu (h + 2\psi_0) h - \frac{b}{4} (h + 4\psi_0) h^3, \quad (2.24)$$

vemos então que aquele campo de fase  $\chi$  que era o bóson de Goldstone, no caso  $U(1)$  global, é absorvido no setor vetorial produzindo um campo  $B_\mu$  massivo. Ficamos então com um bóson vetorial massivo dado pelo lagrangeano,

$$\mathcal{L}_{boson} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu) (\partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu) + \mu^2 C_\mu C^\mu, \quad (2.25)$$

sendo  $\mu^2 = \frac{\psi_0 e^2}{2}$ , e ainda um campo escalar massivo

$$\mathcal{L}_{boson} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - a^2 h^2, \quad (2.26)$$

que ficou conhecido como bóson de Higgs.

O Modelo Padrão conseguiu unificar a teoria fraca e o eletromagnetismo através da simetria local onde os campo de calibre obedecem, não a uma simetria abeliana  $U(1)$  mas a uma simetria

$SU(2)$ . Esta prescrição do modelo padrão nos mostra que em energias acima de  $10^2 GeV$ , o campo de Higgs tem um mínimo de energia nulo e temos, nesta fase uma teoria de calibre invariante local  $SU(2)$ , conhecida como teoria eletrofraca, tendo quatro bósons intermediários sem massa. A medida que o universo vai resfriando com energia média chegando a ficar menor que  $10^2 GeV$ , o campo de Higgs, que permeia todo universo, começa a se condensar e a simetria  $SU(2)$  é violada espontaneamente. Deste processo resulta que 3 bósons  $W_{\pm}$  e  $Z_0$ , adquirem massa, portanto sendo mediadores da interação fraca tem um curto alcance (a interação fica restrita ao interior dos núcleos atômicos). O quarto bóson que fica sem massa seria o responsável por descrever a interação eletromagnética que é de longo alcance. O Universo passa a ser um grande supercondutor realizando a blindagem da teoria Fraca, que passa a atuar nos domínios do núcleo atômico. Em 2013, com a medição do bóson de Higgs realizada pelo grande colisor de hádrons (LHC) se confirma o receituário de geração de massa inercial adquirida pelas partículas fundamentais. Este mecanismo de geração de massa (mecanismo de Higgs) por um campo escalar permitiu a unificação da força eletromagnética com a força fraca, e possibilitou de se ter uma aceitação completa do MP como a teoria que explica a origem das partículas. Do ponto de vista das forças fundamentais fica somente de fora do modelo a gravitação. Apesar do seu tremendo sucesso o modelo está incompleto, e nós precisaríamos de uma teoria que abarcasse todas as forças. Se entendermos a gravitação como uma teoria fundamental ela deveria ser quantizada e o bóson que transmite a força gravitacional seria o gráviton. A medida que se aumenta a escala de energia para próximo da energia de Planck os efeitos da gravitação quântica seriam perceptíveis e se supõe que simetria de Lorentz deveria ser violada, indo para essa escala de energia. Então, resta a dúvida de que forma a simetria de Lorentz poderia ser violada numa teoria mais fundamental que incorporasse a gravitação quântica. Trataremos disto nas próximas seções.

# Capítulo 3

## Violação de Simetria de Lorentz

Até agora fizemos uma breve apresentação dos aspectos básicos do que se constituiu como a teoria que explica a origem das partículas fundamentais da natureza: o Modelo Padrão (MP). Este modelo é uma aproximação de baixas energias de uma teoria mais fundamental que englobaria a interação gravitacional. À medida que caminhamos para escalas de energia que se aproximem da escala de Planck espera-se que uma simetria fundamental das teorias relativísticas seja modificada. Tal possibilidade de violação levaria a duas principais formulações de como ela se daria: de forma espontânea ou através de Teorias Não-Comutativas.

- **Violação Espontânea**

Esse tipo de violação é considerado uma forma mais "suave" de como a simetria de Lorentz e ocorre devido a presença de um campo de fundo. Esta ideia está incluída em uma forma estendida do modelo padrão e teoria de cordas. Na teoria, a quebra é caracterizada pela presença tensor  $K_F$  e pelo vetor  $V^\nu$  na lagrangeana. Falaremos sobre esses termos neste capítulo

- **Teorias Não-Comutativas**

Esta segunda forma de quebra de Lorentz, via álgebra Não-Comutativa, parte da ideia de um espaço quantizado proposto por Snyder [25] em 1947, o que nos leva a relação comutação  $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ . Sendo  $\theta^{\mu\nu}$  uma matriz assimétrica, temos direções preferenciais e dessa forma uma quebra na simetria. Dessa forma, temos uma quebra mais "dura" da simetria de Lorentz.

No próximo capítulo abordaremos a teoria não comutativa e suas implicações. Por hora, iremos abordar as transformações e violação de Lorentz por meio de um campo de fundo.

### 3.1 Violação de Simetria de Lorentz por Campo de Fundo

A busca de uma teoria que descreva a física de uma maneira unificada não se origina de um desejo meramente estético, mas da certeza de que esta construção nos faz compreender mais profundamente os processos naturais, e abre possibilidades nunca antes pensadas. A procura de uma simetria fundamental que descreva o Universo quente primordial, e à medida que este se esfria apareçam novos cenários por quebra espontânea e simetria de Lorentz, tem se estabelecido fortemente desde que este mecanismo foi proposto. A ideia da quebra da simetria de Lorentz foi abordada em estudos sobre buracos negros [26, 27], em estudos sobre física de astropartículas [28] e cosmologia [29]; no cenário da física supersimétrica [30, 31]. Em [32] os autores abordam o tema em um espaço-tempo de corda cósmica. Mas para entendermos como essa teoria é abordada em tantas áreas vamos nos ater primeiramente à descrição conceitual de como ocorre a quebra da simetria de Lorentz. Começaremos então pela formulação da teoria da relatividade restrita, na qual Einstein se baseou em dois princípios:

- 1 - As leis da física são idênticas em qualquer referencial inercial.
- 2 - A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer sistema de referência inercial.

Então, com base nesses princípios, podemos esperar que qualquer referencial inercial veja a luz se propagando esfericamente com velocidade  $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ . Tomando dois referenciais inerciais que no instante inicial  $t = 0$  coincidam de posição e se afastem com velocidade  $\vec{v}$ , temos então a luz se propagando vista por dois referenciais  $O$

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (3.1)$$

e  $O'$

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0, \quad (3.2)$$

Estabelecemos então a seguinte igualdade,

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (3.3)$$

A igualdade obtida acima pode ser solucionada por meio da relação mostrada abaixo

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left( ct - \frac{v}{c}x \right) \\ y' &= y \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ z' &= z \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Podemos realizar mudanças entre referenciais inerciais de duas maneiras distintas [33]:

- Ponto de vista passivo - quando deixamos os pontos pertencentes ao espaço-tempo intactos e relacionamos as bases de dois sistemas de referenciais inerciais.

Considere dois sistemas de referência: o sistema  $S$ , cujo plano é definido pelo eixos  $xy$ , e o outro  $S'$  é definido pelos eixos  $x'y'$ . Ambos os sistemas diferem por uma rotação  $\theta$  entre eles (figura 3.1<sup>1</sup>).

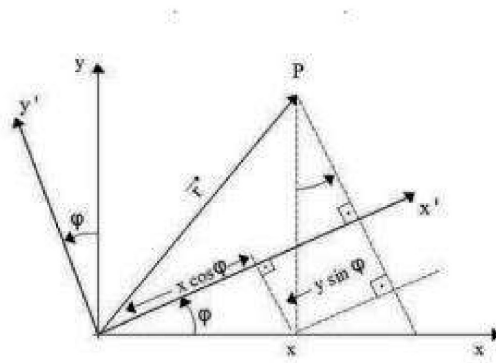


Figura 3.1: Rotação passiva entre o referencial  $S$  e  $S'$ .

Dado então um ponto  $P$  no referencial  $S$ , queremos descrever suas coordenadas no sistema  $S'$ . Podemos relacionar os sistemas de coordenadas por meio da transformação

<sup>1</sup>Imagem retirada do artigo [33]

$$S'(x', y') = \Theta S(x, y) \quad (3.4)$$

onde  $\Theta$  é a matriz de rotação dada por

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Dessa forma, os sistemas se relacionam na forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ao realizarmos um expansão e levando em conta apenas os termos de primeira ordem, temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta\theta \\ -\delta\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Quando passamos a matriz identidade para o outro lado, fica claro que

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \delta\theta \begin{bmatrix} 0 & x \\ -y & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Essa forma passiva descreve a rotação entre dois referenciais, os quais diferem entre ele por um ângulo  $\theta$ , e ambos descrevem o mesmo ponto no espaço.

- Ponto de vista ativo - ao invés de mudarmos nosso sistema de referência, deixamos nossa base fixa e quem se movimentam são os pontos do espaço-tempo. Para este caso o espaço como um todo seria rotacionado em relação ao espaço com um todo (figura 3.1<sup>2</sup>).

Neste caso, nós relacionamos as coordenadas entre os pontos  $P$  e  $P'$  através da relação

---

<sup>2</sup>Imagem retirada do artigo [33]

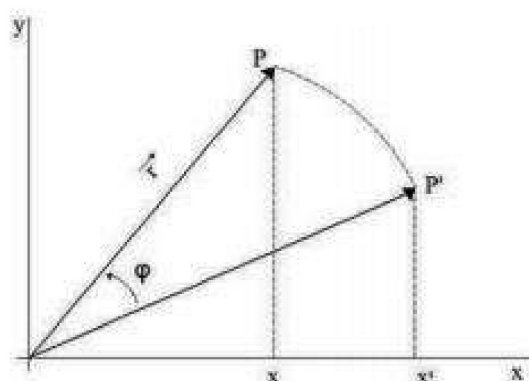


Figura 3.2: Rotação ativa entre o ponto  $P$  e  $P'$ .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Procedendo da mesma forma que o caso anterior, a forma infinitesimal tem a forma

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \delta \theta \begin{bmatrix} 0 & -y \\ x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Na forma ativa, temos apenas um referencial descrevendo a rotação do ponto  $P$  até o ponto  $P'$ .

A rotação passiva e a ativa, pode ser imaginada como uma localizada em um ponto  $P$  que sofre uma rotação de valor  $\theta$  (passiva), ou uma rotação de  $-\theta$  (ativa). Para ambos os casos a matriz de rotação seria a mesma.

### Boost Ativo em um Campo Elétrico Uniforme

Considere dois referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  imersos entre duas placas de um capacitor com campo elétrico  $\vec{E}$  constante. O primeiro referencial está em repouso em relação as placas, enquanto que o segundo,  $S'$  (boost passivo) [33], move-se com velocidade  $\vec{u}$  de forma ortogonal



ao campo (figura 3.1<sup>3</sup>),  $\vec{E}$ .

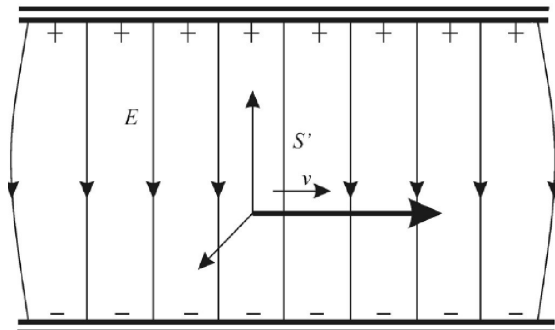


Figura 3.3: O referencial  $S$  está em repouso em relação às placas do capacitor, enquanto que o referencial  $S'$  se move com velocidade  $\mathbf{v}$ , em relação ao capacitor.

Suponha agora uma partícula carregada eletricamente entre as placas do capacitor, movendo-se no mesmo sentido de  $S'$ . Devido ao campo elétrico, a partícula sofre um desvio em sua trajetória que é visto por ambos os referenciais de maneira equivalente. Porém, se aplicarmos um *boost* de Lorentz de  $-\vec{v}$  (boost ativo) [33] sobre ela, o haverá uma divergência entre o alcance das trajetórias vistas por ambos referenciais. Esse comportamento fica ilustrado na figura 3.1<sup>4</sup>:

A diferença entre ambas as trajetórias se dá devido a presença do campo de fundo atuando sobre a partícula. Logo, a simetria de Lorentz é quebrada pelo campo de fundo presente entre as placas.

Para exemplificar como esta proposta entra como extensão do setor fotônico do MP vamos apresentar brevemente na seção seguinte o setor de *gauge* do Modelo Padrão Estendido (MPE) [34] e falar sobre os operadores de carga, paridade e tempo (CPT): CPT-par e CPT-ímpar.

<sup>3</sup>Imagem retirada do artigo [33]

<sup>4</sup>Imagem retirada do artigo [33]

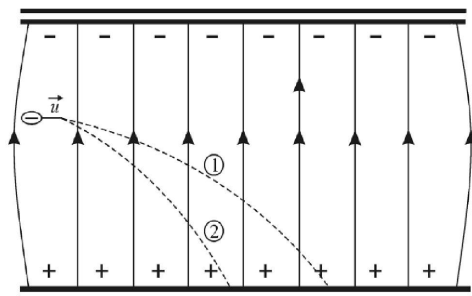


Figura 3.4: Diferença de trajetória de uma partícula carregada antes e depois de ser aplicado a ela um "empurrão" de  $-\vec{v}$  sobre ela.

## 3.2 Setor de gauge do MPE

O MPE é caracterizado por uma lagrangeana que inclui termos que quebram a simetria de Lorentz via um campo de fundo, os quais estão divididos em dois setores: par e ímpar. Essa distinção está ligada ao vetor  $b^\mu$  (setor ímpar), o qual quebra a simetria CPT, e o tensor  $(\kappa_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  (setor par) que conserva a CPT. Logo, vemos que a quebra da simetria CPT implica na quebra da simetria de Lorentz, mas o contrário não necessariamente acontece. A teoria sugere que esta quebra de simetria ocorre por meio de um campo de fundo sentido fracamente pelo sistema, advindo de altas energias. Baseado na eletrodinâmica de Maxwell, a lagrangeana que descreve o MPE é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(\kappa_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} - qA_\mu J^\mu \quad (3.11)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético,  $q$  é a carga elétrica,  $A_\mu$  é o potencial quadri-vetor e  $J^\mu$  é a densidade de corrente elétrica. Quanto ao operador CPT, sabemos que o potencial eletromagnético e os campos se comportam da seguinte forma

$$\begin{aligned}
A_0 &\xrightarrow{CPT} -A_0, & \vec{A} &\xrightarrow{CPT} \vec{A} \\
A_\mu &\xrightarrow{CPT} -A_\mu, & \partial_\mu &\xrightarrow{CPT} \partial_\mu \\
F_{\mu\nu} &\xrightarrow{CPT} F_{\mu\nu}, \\
\vec{E} &\xrightarrow{CPT} \vec{E}, & \vec{B} &\xrightarrow{CPT} \vec{B}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Abordaremos nas subseções abaixo os dois setores CPT presentes na lagrangeana do MPE de maneira mais detalhada, começando com o setor par.

### 3.2.1 Setor par do MPE

A lagrangeana referente ao setor par é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\kappa_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} \tag{3.13}$$

considerando aqui a densidade de corrente como sendo nula ( $J^\mu = 0$ ). Como já foi dito anteriormente esse setor conserva a simetria CPT. O tensor  $(\kappa_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ , em analogia com o caso do capacitor citado na seção anterior, ele seria responsável pelo aparecimento de um campo fundo. Ele é composto por dezenove coeficientes dos quais nove não são birrefringentes e dez são birrefringentes e possui as mesmas características do tensor de Riemann

$$\begin{aligned}
(\kappa_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} &= -(\kappa_F)_{\nu\mu\kappa\lambda} \\
(\kappa_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} &= -(\kappa_F)_{\mu\nu\lambda\kappa} \\
(\kappa_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} &= (\kappa_F)_{\lambda\kappa\mu\nu} \\
(\kappa_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} + (\kappa_F)_{\mu\kappa\nu\lambda} + (\kappa_F)_{\mu\lambda\kappa\nu} &= 0 \\
(\kappa_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, a lagrangeana 3.13 pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - (\kappa_F)_{0i0j}E^iE^j + (\kappa_F)_{0ilm}\epsilon_{lmp}E^iB^p + \frac{1}{4}(\kappa_F)_{ablm}\epsilon_{abq}\epsilon_{lmp}B_qB_p. \tag{3.15}$$

A transformações de carga, paridade e tempo se aplicadas em 3.15 não mudam a forma da lagrangeana, ou seja, não é quebra na simetria CPT para esse caso. Como veremos em seguida, o mesmo procedimento aplicado ao setor ímpar trará um comportamento diferente.

### 3.2.2 Setor ímpar do MPE

O objetivo desta seção é através do formalismo quadrivetorial do eletromagnetismo, analisar de maneira direta qual a influência da Violação Espontânea da Simetria de Lorentz (VESL), que gera um campo de fundo  $V^\mu$  (esse campo de fundo cumpre o mesmo papel do campo elétrico no exemplo do capacitor), na equação da onda eletromagnética. Então começamos estabelecendo a ação do setor de gauge ímpar do MPE:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}. \quad (3.16)$$

Realizando o cálculo variacional em relação ao campo  $A^\nu$  temos como equação de movimento,

$$\partial^\mu F_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.17)$$

Fazendo alguns procedimentos para se achar a equação de onda chegamos à seguinte relação de dispersão:

$$(K^\mu K_\mu)^2 + K^\mu K_\mu V^\nu V_\nu - K^\mu V_\mu = 0 \quad (3.18)$$

Essa nova forma da equação da onda eletromagnética nos permite ver a consequência direta do vetor de fundo na propagação da onda. Não é o nosso objetivo estudar os efeitos na propagação da onda (tais como geração de massa e alteração da velocidade da onda). Ressaltamos, porém, pode ser visto em [35] que essa relação de dispersão apresenta o efeito da birrefringência do vácuo. Na próxima seção iremos apresentar uma nova proposta da violação da simetria de Lorentz. Esta quebra não seria resultado da extensão do mecanismo de Higgs por um campo quadrivetorial, mas de uma maneira explícita, por uma teoria não-comutativa.

# Capítulo 4

## Teoria de Campo Não-comutativa

O princípio da incerteza de Heisenberg  $\Delta x^i \Delta p^j > \delta^{ij} \hbar$  estabelece que, se quisermos sondar curtas distâncias, precisamos ir para altas energias. A relatividade geral nos ensina que se continuarmos aumentando a energia para explorar regiões menores, um buraco negro será formado, assim que ultrapassarmos o raio de Schwarzschild. Como nenhuma informação pode escapar de um buraco negro, parece que existe um limite inferior para medir comprimentos. Ou seja, da teoria de Heisenberg sabemos que para comprimentos cada vez menores é necessário quantidades de energia mais elevadas. Porém, ao tentarmos explorar essas regiões aumentando a energia aplicada, criaremos singularidades no espaço assim como nos diz a relatividade geral. Concluímos haver uma incerteza nas coordenadas da posição

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu > \theta^{\mu\nu},$$

sendo que  $\theta^{\mu\nu}$  tem dimensão de (comprimento)<sup>2</sup>, e então, não temos mais uma relação de comutação entre os operadores de posição. Por  $\theta^{\mu\nu}$  se tratar de uma grandeza antissimétrica, logo, ter uma direção privilegiada, temos aqui uma quebra na simetria de Lorentz.

## 4.1 Violação de Simetria de Lorentz por Teoria Não-Comutativa

O início da ideia sobre não-comutatividade, teve início na década de 30 quando Heisenberg [37] estava se debatendo com as divergências ultravioletas da QED e achava que coordenadas não-comutativas poderiam fornecer um ponto de corte para regulá-las. Em contato com Peierls, Pauli, e Oppenheimer, Heisenberg discutiu esta possibilidade. Em seguida Oppenheimer discutiu com um de seus alunos, Snyder, para que pensasse sobre esta possibilidade. Disto resultou que, em 1947, Snyder escreveu um artigo em que considerava as seguintes relações de comutação [25].

$$\begin{aligned}
 [x^\mu, x^\nu] &= i\ell^2 \hbar^{-1} (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu), \\
 [x^\mu, p_\nu] &= i\hbar \delta_\nu^\mu + i\ell^2 \hbar^{-1} p^\mu p_\nu, \\
 [p_\mu, p_\nu] &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

generalizando as relações usuais com uma nova constante  $\ell$ . Há uma vasta área de problemas para serem investigados com uso dessa ferramenta, assim como podemos encontrar na literatura trabalhos de vários autores sobre o assunto. Em [38] os autores abordam a equação de Klein-Gordon com um potencial de Kratzer, no espaço não comutativo; em [39] foi aplicado ao átomo de hidrogênio; aplicado a equação DKP [40], e também em outros trabalhos [41–43]. Embora, com o sucesso do programa de renormalização para QED, os estudos posteriores em não-comutatividade tenham sido desencorajados por um certo período. Mesmo assim, podemos perguntar como fazer uma teoria de campo com coordenadas não-comutativas satisfazendo um conjunto mais simples de relações de comutação,

$$\begin{aligned}
 [\hat{q}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar \delta_{ij}, \\
 [\hat{q}_i, \hat{q}_j] &= i\theta_{ij}, \\
 [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0,
 \end{aligned}$$

sendo  $\theta_{ij}$  uma matriz antissimétrica constante.

Mas podemos obter uma teoria não-comutativa em um espaço-tempo com um tipo de simetria que corresponderia a simetria de Lorentz quando  $\theta^{ij} \rightarrow 0$ . Inicialmente definimos o

operador

$$x_c^i = x^i + \frac{1}{2\hbar}\theta^{ij}p_j \quad (4.2)$$

o qual nos oferece as seguintes relações de comutação

$$[x_c^i, x_c^j] = 0, [x_c^i, p^j] = i\hbar\delta^{ij}, [p^i, p^j] = 0. \quad (4.3)$$

A introdução do operador (4.2) nos permite recuperar as relações de comutação em coordenadas não-comutativa. Devemos notar também que o termo  $\theta^{0i}$  deve ser zero, devido ao fato de  $t$  não ser um operador da mecânica quântica. Note também o fato de que o operador (4.2) nos permite fazer uma transformação do tipo

$$x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x_c^\nu, \quad (4.4)$$

onde  $\Lambda_\nu^\mu$  é a matriz que representa uma transformação de Lorentz. Temos então o intervalo  $s^2 = \eta_{\mu\nu}x_c^\mu x_c^\nu$ , o qual é invariante se  $\eta^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}$ . Tendo que o momento também se transforma como um vetor usual de Lorentz,  $p^\mu = \Lambda_\nu^\mu p^\nu$ , temos então

$$x^{\mu'} = x_c^{\mu'} - \frac{1}{2\hbar}\theta^{\mu\nu'}p_\nu = \Lambda_\nu^\mu x_c^\nu - \frac{1}{2\hbar}\theta^{\nu\rho}\Lambda_\rho^\sigma p_\sigma \quad (4.5)$$

que define uma transformação de Lorentz não-comutativa. Lembrando que para  $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$  nós recuperamos o espaço-tempo clássico.

Podemos estender nossos resultados para as transformação de Poincaré. Vamos considerar uma transformação de Poincaré infinitesimal não-comutativa  $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu$ ,  $a^\mu = \epsilon^\mu$ . Isto é implementado pelo operador

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho p^\rho + \dots \quad (4.6)$$

com  $J^{\mu\nu} = x_c^\mu p^\nu - x_c^\nu p^\mu$ . Note que o operador e álgebra do grupo de Lie são não deformados

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \quad (4.7)$$

$$i[p^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} p^\sigma - \eta^{\mu\sigma} p^\rho \quad (4.8)$$

$$[p^\mu, p^\rho] = 0 \quad (4.9)$$

## 4.2 Teorias de Campos Não-Comutativas

O estudo de radiação de corpo negro pelo eletromagnetismo clássico levou a uma contradição com os dados experimentais. Um corpo negro consiste em um objeto que absorve toda a radiação incidente sobre ele. A potência emitida por uma cavidade ressonante diverge à medida que a frequência da radiação emitida aumenta. A hipótese de Planck veio a sanar este problema. O programa de quantização estendido a campos eletromagnéticos trouxe uma série de divergências que precisavam ser tratadas. As Teorias Não-Comutativas seriam possibilidades a ser investigada. No entanto, o programa de renormalização para QED começou a dar conta de resultados experimentais (o desvio lambda, e o dipolo magnético anômalo do elétron) e, portanto, novos estudos sobre não-comutatividade foram desencorajados.

Mesmo assim, podemos perguntar como podemos fazer a teoria de campo com coordenadas não-comutativas, satisfazendo o conjunto de relações de comutação dadas em [?]? Podemos fazer uma associação de campos  $\phi(x)$  com o espaço usual com coordenadas comutativas  $x^i$  para objetos com valor de operador  $\hat{\Phi}(\hat{q})$  como

$$\hat{\Phi}(\hat{q}) = \int dp e^{ip\hat{q}} \tilde{\phi}(p), \quad (4.10)$$

sendo que  $\tilde{\phi}(p)$  é a transformação usual de Fourier  $\phi(x)$ ,  $\tilde{\phi}(p) = \int dx e^{-ipx} \phi(x)$ . Usando a fórmula de Hausdorff-Campbell para o produto dos campos não comutativos obtemos

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv \left[ e^{i\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} \phi_1(x)\phi_2(y) \right]_{y=x} = \phi_1(x)\phi_2(x) + i\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_1 \partial_\nu \phi_2 + \dots \quad (4.11)$$

o qual é conhecido como produto estrela ou produto Moyal.



Desta forma, podemos trabalhar no espaço usual com coordenadas comutativas e campos convencionais, mas substituindo o produto comum dos campos pelo produto Moyal. Deste modo amplia-se a quantização canônica de tais teorias de campo, e um resultado notável é que a estrutura das divergências ultravioletas não é modificada pelo produto Moyal [54]. Isto é bastante surpreendente, porque quando o produto Moyal é expandido, há um número infinito de termos de derivadas mais altas que contribuem para os vértices de interação nos diagramas de Feynman. Esperaríamos que a estrutura ultravioleta fosse violada, mas a estrutura da Moyal funciona de maneira a preservá-la. No final, o sonho de Heisenberg de usar a não-comutatividade para domar as divergências não se tornou realidade.

Além da importância do trabalho de Filk em 1996, esta proposta não chamou muita atenção, já que poucas pessoas estavam interessadas em não-comutatividade naqueles dias. A revolução na não-comutatividade teve que esperar mais alguns anos por outra importante descoberta, mas desta vez na teoria das cordas.  $Dp$ -branes são objetos estendidos em dimensões de espaço  $p$  nas quais cordas abertas podem terminar [55]. A não-comutatividade é induzida pelo produto Moyal com  $\theta_{\mu\nu}$ , e deve ter um comportamento tal que a baixas energias consigamos recuperar as teorias conhecidas na escala do Modelo Padrão (MP) da Física de Partículas, já que essas teorias não-comutativas surgiram de um truncamento consistente da teoria das cordas, elas devem ser consistentes em algum sentido e isso deu origem a um período intenso de pesquisa em teorias de campo não-comutativas. Desde então, a proposta de não-comutatividade tem sido aplicada a muitas áreas da física e da matemática e seria impossível rever todos os avanços ocorridos ao longo desses anos. Tópicos como teoria quântica de campos e a gravidade são tratados em bons artigos de revisão [56, 57].

A Teoria Não-Comutativa de calibre abeliano é descrita pela ação

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu},$$

com a força de campo e transformação do medidor modificada pela adição do comutador Moyal  $[\hat{A}, \hat{B}]_\star = \hat{A} \star \hat{B} - \hat{B} \star \hat{A}$  como

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star, \\ \delta \hat{A}_\mu &= \hat{D}_\mu \hat{\lambda} = \partial_\mu \hat{\lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\lambda}]_\star. \end{aligned}$$

A versão não comutativa do campo de calibre  $\hat{A}_\mu$  pode ser mapeado para o campo de calibre abeliano convencional  $\hat{A}_\mu$ , com a transformação feita através do mapa de Seiberg-Witten, que consiste na aproximação de primeira ordem em  $\theta$  [55]

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} A_\alpha (\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}).$$

A teoria de calibre abeliana resultante é agora uma teoria de interação com ação

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \left[ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\theta^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu \left( F_\mu{}^\sigma F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \right].$$

Isto dá origem a uma teoria não renormalizável devido às novas interações geradas pela não comutatividade. Dualidades entre teorias de calibre geralmente não sobrevivem após o mapa de Seiberg-Witten [59, 60].

A existência de um tensor antissimétrico constante  $\theta_{\mu\nu}$  significa que a simetria de Lorentz está quebrada. No entanto, isso não significa que a ela não seja válida em um nível fundamental. Podemos pensar em  $\theta_{\mu\nu}$  como um campo (como na teoria das cordas) que tem um valor de vácuo constante quebrando-a espontaneamente. Assim, uma das manifestações da não-comutatividade é através de pequenos desvios da simetria de Lorentz. As equações não-comutativas de Maxwell para o campo abeliano convencional mostram que o fóton tem uma relação de dispersão modificada [58],

$$K^2 - 2\theta^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu K_\mu K_\nu = 0. \quad (4.12)$$

Isto é semelhante ao que acontece aos fótons em um meio anisotrópico sem rotação de Faraday nem birrefringência [61].

Note que essa relação de dispersão foi obtida com a primeira aproximação em  $\theta^{\mu\alpha}$ . Comparando com a relação de dispersão (3.16) vemos que  $\theta^{\mu\alpha}$  cumpre um papel semelhante ao quadrivetor  $V^\mu$ . Portanto  $\theta^{\mu\alpha}$  cumpriria o papel de um campo de fundo também, deste modo modificando a equação de onda mas sem causar o efeito de birrefringência do vácuo.

### 4.3 Uma Teoria Efetiva com Violação de Lorentz e Comprimento Mínimo

Apresento aqui um trabalho desenvolvido durante o período do doutorado ??, envolvendo um dos efeitos vindo da teoria não-comutativa que é o comprimento mínimo. Um dos pontos de partida foi baseado nas ideias de Quesne e Tkachuk que introduziram uma álgebra deformada covariante de Lorentz que descreve um espaço-tempo quantizado de dimensão  $D + 1$  [44, 45]. A relação de comutação abaixo apresenta esse tipo de álgebra

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar[(1 - \beta P_\rho P^\rho)g^{\mu\nu} - \beta' P^\mu P^\nu], \quad [P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (4.13)$$

$$[X^\mu, X^\nu] = i\hbar \frac{[(2\beta - \beta') - (2\beta + \beta')\beta P_\rho P^\rho](P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu)}{(1 - \beta P_\rho P^\rho)}, \quad (4.14)$$

onde  $\mu, \nu, \rho = 0, 1, \dots, D$ ,  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1)$ ,  $\beta$  and  $\beta'$  são parâmetros deformados, e supondo  $\beta, \beta' > 0$ . Da relação de incerteza, conclui-se que o comprimento mínimo é

$$(\Delta X^i)_0 = \hbar \sqrt{(D\beta + \beta') [1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle]} \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, D\}.$$

Um representação algébrica [46] que satisfaz (4.13) em primeira ordem  $\beta, \beta'$  é dada por:

$$\begin{aligned} X^\mu &= x^\mu - \frac{(2\beta - \beta')}{4} (x^\mu p_\rho p^\rho + p_\rho p^\rho x^\mu), \\ P^\mu &= \left(1 - \frac{\beta'}{2} p_\rho p^\rho\right) p^\mu, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $x^\mu$  e  $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$  são respectivamente os operadores posição e momento. Assumindo  $\beta' = 2\beta$ , a álgebra de Quesne-Tkachuk torna-se

$$\begin{aligned} [X^\mu, P^\nu] &= -i\hbar[(1 - \beta P_\rho P^\rho)g^{\mu\nu} - 2\beta P^\mu P^\nu], \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0, \\ [X^\mu, X^\nu] &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

com a seguinte representação que satisfaz 4.15 para a primeira ordem em  $\beta$

$$\begin{aligned} X^\mu &= x^\mu, \\ P^\mu &= \left(1 - \beta' p_\rho p^\rho\right) p^\mu. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Tomemos aqui a parte "ímpar" (cpt-even) do setor de gauge da lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4\mu_0} (K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} - A_\mu J^\mu. \quad (4.18)$$

O tensor  $K_{abcd}$  é CPT-ímpar, ou seja, ela não viola a simetria CPT. Embora a violação da simetria CPT implique na violação da simetria de Lorentz, o contrário não é verdadeiro. A ação dada acima quebra simetria de Lorentz é quebrada no sentido que o tensor  $K_{abcd}$  tem um valor esperado de vácuo não nulo. Além disso, o tensor  $K_{abcd}$  tem as mesmas propriedades do tensor de Riemann, bem como uma condição adicional de duplo traço nulo. Este tensor possui as seguintes simetrias:

$$K_{abcd} = K_{[ab][cd]}; \quad K_{abcd} = K_{cdab}; \quad K^{ab}{}_{ab} = 0. \quad (4.19)$$

Seguindo as referências [47–49], podemos escrever o tensor  $K_{abcd}$  em termos da matriz simétrica e de traço nulo  $\tilde{\kappa}_{ab}$  com

$$K_{abcd} = \frac{1}{2} (\eta_{ac} \tilde{\kappa}_{bd} - \eta_{ad} \tilde{\kappa}_{bc} + \eta_{bd} \tilde{\kappa}_{ac} - \eta_{bc} \tilde{\kappa}_{ad}). \quad (4.20)$$

Definindo o quadri-vetor normalizado  $\xi^a$ , o qual satisfaz a condição:  $\xi_a \xi^a = 1$  para o caso tipo-tempo e  $\xi_a \xi^a = -1$  para o caso tipo espaço; deste modo, decompomos o tensor  $\tilde{\kappa}_{ab}$  como

$$\tilde{\kappa}_{ab} = \kappa \left( \xi_a \xi_b - \frac{\eta_{ab} \xi^c \xi_c}{4} \right), \quad (4.21)$$

onde  $\kappa = \frac{4}{3} \tilde{\kappa}^{ab} \xi_a \xi_b$  [48, 49].

Em [47, 48] os autores conduziram um estudo em espaço-tempo curvo, onde se observou que o horizonte de evento de um buraco negro é modificado pela anisotropia gerada por  $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ . Portanto, uma maneira interessante de analisar a nova fenomenologia para verificar a violação da simetria de Lorentz é considerar um espaço-tempo curvo de fundo [50]. Dessa

perspectiva, vamos escrever a lagrangeana correspondente a teoria de Maxwell modificado não-birrefringente acoplada a gravidade [47, 48]:

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\sqrt{-g} \left( \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \frac{1}{4\mu_0} K^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} - A_\mu J^\mu \right). \quad (4.22)$$

Com  $J^\mu = 0$  e usando as equações (4.19) e (4.20), nós podemos escrever a densidade lagrangeana (4.22) em termos de um tensor métrico efetivo  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$  como

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\sqrt{-g} \left( 1 - \frac{1}{2} \kappa(x) \xi^\alpha \xi_\alpha \right) \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \bar{g}_{\mu\rho}(x) \bar{g}_{\nu\sigma}(x), \quad (4.23)$$

onde a expressão desse tensor métrico efetivo é dado por [47, 48]:

$$\bar{g}_{\mu\rho}(x) = g_{\mu\rho}(x) - \epsilon \xi_\mu \xi_\rho, \quad (4.24)$$

cujo parâmetro  $\epsilon$  é definido como  $\epsilon = \frac{\kappa}{1+\frac{\kappa}{2}}$  e  $\bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$ . No entanto, todos o índice de levantamento e abaixamento são realizados usando a métrica de fundo original  $g_{\mu\nu}(x)$  e a inversa é  $g^{\mu\nu}(x)$ . Este tipo de campo de fundo fornece uma anisotropia no espaço-tempo [50], portanto, isto sugere que a propagação do fóton deve ser modificado pelo campo de fundo.

Usando a ideia de incorporar a anisotropia na métrica gerada pela decomposição do vetor temos,

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\sqrt{-g} \left( 1 - \frac{1}{2} \kappa(x) \xi^\alpha \xi_\alpha \right) \bar{g}_{\mu\rho}(x) \bar{g}_{\nu\sigma}(x) \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x), \quad (4.25)$$

e usando a seguinte aproximação,

$$\sqrt{-g} \left( 1 - \frac{1}{2} \kappa(x) \xi^\alpha \xi_\alpha \right) \sim \sqrt{-g(1 - \epsilon \xi^\alpha \xi_\alpha)} = \sqrt{-\bar{g}}, \quad (4.26)$$

e obtemos a lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}_{\mu\rho}(x) \bar{g}_{\nu\sigma}(x) \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x), \quad (4.27)$$

desta maneira concluímos o nosso modelo, incorporando a violação da simetria de Lorentz e introduzindo uma teoria efetiva incorporando a anisotropia na métrica do espaço-tempo. Em seguida, introduzimos o comprimento mínimo por meio de uma álgebra deformada covariante de Lorentz.

Para investigar esses efeitos nós escrevemos a lagrangeana anterior incorporando o comprimento mínimo usando a seguinte aproximação (4.15):

$$x^\mu \rightarrow X^\mu = x^\mu, \quad (4.28)$$

$$\partial^\mu \rightarrow \nabla^\mu = (1 + \beta \hbar^2 \square) \partial^\mu,$$

para incorporar a influência do comprimento mínimo temos,

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}_{\mu\rho}(x) \bar{g}_{\nu\sigma}(x) (1 + \beta \hbar^2 \square)^2 \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x), \quad (4.29)$$

com  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ . Negligenciamos os termos de ordem maior que um em  $\beta$ , obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}_{\mu\rho}(x) \bar{g}_{\nu\sigma}(x) (1 + 2\beta \hbar^2 \square) \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x), \quad (4.30)$$

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\frac{1}{4\mu_0} \sqrt{-\bar{g}} (1 + 2\beta \hbar^2 \square) F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \quad (4.31)$$

$$\partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}}) = -\frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta} \sqrt{-\bar{g}} \partial_\mu \bar{g}^{\alpha\beta}, \quad (4.32)$$

realizando o cálculo variacional em relação ao campo de gauge ( $\delta A^\nu(x)$ ) temos

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-\bar{g}} [(\partial^\mu \epsilon \xi_\beta \xi^\beta) + 2\partial^\mu] [(1 + 2\beta \hbar^2 \square) F_{\mu\nu}(x)] \delta A^\nu(x). \quad (4.33)$$

A equação de movimento é dada por

$$-4\sqrt{-\bar{g}}(1 + 2\beta \hbar^2 \square) \left\{ \left( \left( -\frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta} \partial_\mu \bar{g}^{\alpha\beta} \right) F^{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) \right) \right\} \delta A_\nu(x) = 0, \quad (4.34)$$

$$(1 + 2\beta \hbar^2 \square) = 0 \quad (4.35)$$

$$\left\{ \left( \left( -\frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta} \partial_\mu \bar{g}^{\alpha\beta} \right) F^{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) \right) \right\} = 0, \quad (4.36)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \left( \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta} \partial_\mu \bar{g}^{\alpha\beta} \right) F^{\mu\nu}(x) \quad (4.37)$$

$$\bar{g}_{\mu\rho}(x) = g_{\mu\rho}(x) - \epsilon \xi_\mu \xi_\rho, \quad (4.38)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \left( \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta} \partial_\mu \bar{g}^{\alpha\beta} \right) F^{\mu\nu}(x) \quad (4.39)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \left( \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta}(x) - \epsilon \xi_\alpha \xi_\beta) \partial_\mu (g^{\alpha\beta}(x) + \epsilon \xi^\alpha \xi^\beta) \right) F^{\mu\nu}(x) \quad (4.40)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \left( \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta}(x) - \epsilon \xi_\alpha \xi_\beta) (\partial_\mu g^{\alpha\beta}(x) + \partial_\mu \epsilon \xi^\alpha \xi^\beta) \right) F^{\mu\nu}(x) \quad (4.41)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \left( \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta}(x) \partial_\mu g^{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\beta}(x) \partial_\mu \epsilon \xi^\alpha \xi^\beta - \epsilon \xi_\alpha \xi_\beta \partial_\mu g^{\alpha\beta}(x) - \epsilon \partial_\mu \epsilon) \right) F^{\mu\nu}(x) \quad (4.42)$$

$$= \left( \frac{1}{2} (+g_{\alpha\beta}(x) \partial_\mu \epsilon \xi^\alpha \xi^\beta - \epsilon \xi_\alpha \xi_\beta \partial_\mu \epsilon \xi^\alpha \xi^\beta) \right) F^{\mu\nu}(x), \quad (4.43)$$

$$= \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \epsilon - \epsilon \partial_\mu \epsilon) \right) F^{\mu\nu}(x), \quad (4.44)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \epsilon (1 - \epsilon) \right) F^{\mu\nu}(x), \quad (4.45)$$

A equação de movimento é dada por,

$$[(\partial^\mu \epsilon \xi_\beta \xi^\beta) + 2\partial^\mu] [(1 + 2\beta\hbar^2 \square) F_{\mu\nu}(x)] = 0, \quad (4.46)$$

e, no gauge de Lorenz ( $\partial^\mu A_\mu = 0$ ), temos

$$[(2 - \epsilon \xi_\beta \xi^\beta)] \square A_\nu(x) [(1 + 2\beta\hbar^2 \square)] = 0. \quad (4.47)$$

Para estudar as possíveis soluções nós temos dois tipos de relação de dispersão

$$\square = 0 \quad (4.48)$$

e

$$(1 + 2\beta\hbar^2 \square) = 0, \quad (4.49)$$

fazendo a transformada de Fourier

$$(1 - 2\beta\hbar^2 p^\mu p_\mu) = 0. \quad (4.50)$$

Como solução nós temos

$$p^0 = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + \frac{1}{2\beta\hbar^2}}. \quad (4.51)$$

Analisando a relação de dispersão, nós temos visto que este fenômeno pode ser tomado como independente de um outro. Uma outra abordagem seria introduzir o comprimento mínimo por meio de uma álgebra deformada que viola a simetria de Lorentz (i.e., uma álgebra covariante). Então, os dois fenômenos já seriam conectados desde o início. O estudo de como a violação da simetria de Lorentz e o comprimento mínimo estão relacionados é muito interessante e muito promissor, uma vez que o fenômeno é esperado para altas energias (acima do modelo padrão). A questão remanescente é se há ou não uma faixa de energia na qual exista uma significativa interferência entre ambos.

## 4.4 Efeito Hall Quântico: exemplo de uma teoria não-comutativa

### 4.4.1 Quantização de Landau

Uma das descobertas mais significativas dos anos 80 é o efeito Hall quântico [51]. Normalmente, em experimentos de estado sólido, processos de espalhamento (efeitos de temperatura, impurezas e defeitos na estrutura cristalina) no transporte eletrônico introduz incerteza em vários processos de medida [52]. Por exemplo, a condutância, ou resistência de um material descrito pelo modelo de Drude nos conduz à expressão conhecida da resistência de um fio condutor  $R = \rho_0 \frac{A}{L}$ , sendo  $\rho_0$  a resistividade,  $A$  a área transversa, e  $L$  o comprimento. O efeito Hall clássico, que consiste na resistência transversa quando uma chapa metálica é submetida a um campo magnético perpendicular, apresenta um comportamento muito diferente quando a baixas temperaturas e com poucos centros espalhadores.

No efeito Hall os elétrons ficam presos em uma fina camada feita na interface entre semicondutor [53] e isolante ou entre semicondutores a uma temperatura suficientemente baixa. Elétrons presos formam um sistema bidimensional. Em um campo magnético perpendicular  $\vec{B}$ , a energia de um elétron é quantificada em níveis de Landau. A diferença de energia entre



dois níveis de Landau sucessivos é com  $w_c = \frac{eBL}{M}$  a frequência de ciclotron. É notável que os níveis de energia de um corpo são quantificado em um sistema macroscópico.

### Elétrons interagindo com o campo eletromagnético

Os elétrons interagindo com um campo eletromagnético tem como expressão de força:

$$m\ddot{x} = -e(\vec{E} + \dot{x} \times \vec{B}); \quad (4.52)$$

esta é a conhecida força de Lorentz.

A langrangeana que gera esta lei é:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - e\vec{A}(t, x) \cdot \dot{x} + e\varphi(t, x), \quad (4.53)$$

sendo que  $\vec{A}(t, x)$  e  $\varphi(t, x)$  são o potencial vetor e escalar. O momento cinético do campo é:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j - eA_j; \quad (4.54)$$

impondo a relação de comutação canônica

$$[x_i, p_j] = -i\hbar, \quad (4.55)$$

com o operador momento  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$ , e o Hamiltoniano dos campos é:

$$H = \int dx^3 \Psi^\dagger(t, x) \left[ \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla + e\vec{A} \right)^2 + e\varphi(t, x) \right] \Psi(t, x), \quad (4.56)$$

#### 4.4.2 Os níveis de Landau do elétron confinado em uma placa metálica

O movimento do elétron confinado numa placa metálica ( no plano xy) submetido a um campo magnético perpendicular externo  $-\vec{B}_z$

$$H = \frac{1}{2m} [(-i\hbar\partial_x + eA_x) + (-i\hbar\partial_y + eA_y)], \quad (4.57)$$

como momento cinético

$$p_x = -i\hbar\partial_x + eA_x, \quad e \quad p_y = -i\hbar\partial_y + eA_y, \quad (4.58)$$

A partir de agora vamos definir as coordenadas de centro

$$X = x + \frac{1}{eB_z}P_y, \quad Y = y - \frac{1}{eB_z}P_x. \quad (4.59)$$

Podemos verificar as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -il_B^2 & [P_x, P_y] &= i\frac{\hbar^2}{l_B^2}, \\ [X, P_x] &= [Y, P_y] = [X, P_y] = [Y, P_x] &= 0, \end{aligned}$$

portanto as coordenadas de centro  $\mathcal{X} = (X, Y)$  e os momentos covariantes  $(P_x, P_y)$  são variáveis independentes. Nós também introduzimos o comprimento  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB_z}}$  que é o comprimento característico onde ocorre o efeito Hall.

As excitações nos níveis de Landau são suprimidas quando a intensidade do campo magnético é grande o suficiente (a figura ilustra esta situação). Uma teoria auto-consistente sem essas excitações é construída fazendo a projeção em nível de Landau. Um elétron confinado a um único nível de Landau é descrito pelo centro de orientação  $(X, Y)$  sujeito a não comutatividade.  $[X, Y] = -il_B$  (figura 4.2<sup>1</sup>). Deste modo conseguimos ver que existe um comprimento mínimo associado como consequência dessa teoria não-comutativa (figura 4.1<sup>2</sup>).

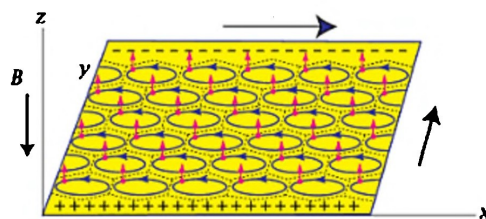


Figura 4.1: Armadilhamento dos elétrons no primeiro nível de Landau

<sup>1</sup>Imagem retirada livro VII EFRAS

<sup>2</sup>Imagem retirada livro VII EFRAS

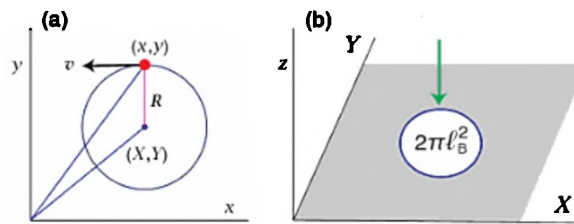


Figura 4.2: A figura da esquerda mostra uma região de raio  $R$  que surge da não-comutatividade das variáveis  $x$  e  $y$ . A figura da direita é uma representação da área de comprimento mínimo

Assim, o Efeito Hall Quântico (EHQ) nos fornece um mundo realista de geometrias não-comutativas para se experimentar. Apresenta não apenas uma boa aproximação, mas também uma maneira essencial de revelar nova física inerente ao EHQ.

Nesta seção apresentamos a álgebra não-comutativa, o que nos levou a uma mudança na relação incerteza de Heisenberg e com isso a um comprimento mínimo. Com isso, realizamos uma investigação inicial de uma teoria efetiva com violação de Lorentz com comprimento mínimo. Investigamos um cenário de anisotropia gerado por um termo de quebra de simetria de Lorentz que aparece em Standard Model Extension (SME) no setor de calibre par com álgebra de Heisenberg deformada associada ao Comprimento Mínimo (ML). Para estudar tal possível correção do setor de bitola das PME's, analisamos as relações de dispersão desse modelo.

## Capítulo 5

# Partícula escalar relativística em Cenários de Kaluza-Klein

A ideia de trabalhar com um número de dimensões além das três espaciais e uma temporal  $(3 + 1)D$  é antiga e já foi explorada tanto em trabalhos recentes acerca do raio do próton [62], de espectroscopia atômica [63], de modelos cosmológicos em cinco dimensões [64] e estudo sobre neutrinos [65], quanto em trabalhos do início do século passado, como o trabalho de Nordström [66], o qual marca o ponto de partida nos estudos sobre o tema e inspirou nomes como Witten [69], Mandel [70] e Fock [71]. Mas dentre os nomes com mais visibilidade nessa área estão os de Kaluza [67] e Klein [68], os quais lançaram seus trabalhos na década de 1920 e cujas ideias deram origem a uma teoria que leva o nome de ambos. Em uma primeira fase da teoria de Kaluza-Klein, que vão desde o lançamento do trabalhos dos autores até 1961, a parte da comunidade responsável por estudar as interações fundamentais, propõe estender de maneira geométrica os números quânticos. No ano de 1938 Einstein e Bergmann [72] lançam um trabalho propondo um espaço em cinco dimensões onde as dimensões da métrica de Lorentz (4D) seriam funções periódicas da quinta dimensão, e sugerem a geometrização da carga elétrica. Uma segunda fase sobre da teoria de Kaluza-Klein reaparece devido o surgimento das teorias de supergravidade. Além da geometrização, um outro elemento importante presente na teoria é o mecanismo de compactificação, que também está presente em [72]. A partir dessa época inicia-se a era das compactificações além do surgimento de trabalhos sobre redução dimensional, como, por exemplo, o trabalho de Candelas e Weinberg [73].

### 5.0.1 Kaluza-Klein em 5D

A teoria de Kaluza-Klein em cinco dimensões unifica a gravidade e o eletromagnetismo, partindo de uma teoria gravitacional de Einstein em 5D. Portanto, assumindo que uma das dimensões espaciais seja compactificada até que tenha a geometria de um círculo  $S^1$  de raio muito pequeno. Então, há uma invariância de coordenada residual das dimensões restantes, e uma invariância de *gauge* abeliana associada com as transformações de coordenadas da variedade compacta  $S^1$ . Ou seja, a invariância das coordenadas em 5D é quebrada espontaneamente no estado fundamental. Temos então uma teoria de gravitação em quatro dimensões juntamente com um campo de *gauge* abeliano com conexões entre as coordenadas, pelo fato que ambas derivam de uma teoria em cinco dimensões. Dessa forma, adotamos a seguinte notação para o sistema de coordenadas

$$\bar{x}^0 = \bar{x}^0 + \bar{x}^1 + \bar{x}^2 + \bar{x}^3 + \bar{x}^5, \quad (5.1)$$

com  $\bar{x}^\mu = x^\mu$ , sendo  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . A coordenada  $\bar{x}^5 = \theta$  representa o ângulo que parametriza a dimensão compactada com a geometria de um círculo. O estado fundamental da métrica após a compactificação é

$$\bar{x}_{AB}^0 = \text{diag} \{ \eta_{\mu\nu} - \tilde{g}_{55} \}, \quad (5.2)$$

onde  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$  é a métrica do espaço de Minkowski,  $\tilde{g}_{55} = \tilde{R}^2$  é a métrica da variedade compacta  $S^1$  e  $\tilde{R}$  é o raio do círculo. Para identificarmos o campo de gauge devemos expandir a métrica em torno do estado fundamental. De forma generalizada, temos para a métrica

$$\bar{g}_{AB}(x, \theta) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x, \theta) - B_\mu(x, \theta)B_\nu(x, \theta)\Phi(x, \theta) & B_\mu(x, \theta)\Phi(x, \theta) \\ B_\nu(x, \theta)\Phi(x, \theta) & B_\nu(x, \theta)\Phi(x, \theta) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Para extrair a gravitação e o campo de gauge abeliano, substituímos o  $\Phi(x, \theta)$  pelo valor do estado fundamental  $\tilde{g}_{55}$ , e como um *ansatz*, nós tiramos a dependência em  $\theta$

$$\bar{g}_{AB}(x) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) - B_\mu(x)B_\nu(x)\tilde{g}_{55} & B_\mu(x)\tilde{g}_{55} \\ B_\nu(x)\tilde{g}_{55} & B_\nu(x)\tilde{g}_{55} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Escrevemos então  $B_\mu(x) = \xi A_\mu(x)$ , onde  $\xi$  é o fator de escala o qual definiremos de tal forma que  $A_\mu(x)$  seja o campo de gauge convencionalmente normalizado.

## 5.0.2 Transformações do campo de gauge

Transformações de coordenadas associadas com a coordenada  $\theta$  da variedade compacta pode ser interpretada como as transformações de gauge, como mostramos agora. Considere a transformação

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta + \xi\epsilon(x). \quad (5.5)$$

Para a transformação de coordenada geral

$$\bar{g}_{AB} = \bar{g}'_{A'B'} \frac{\partial \bar{x}'^{A'}}{\partial \bar{x}^A} \frac{\partial \bar{x}'^{B'}}{\partial \bar{x}^B}. \quad (5.6)$$

Para a transformação de coordenadas 5.5, os elementos fora da diagonal da métrica são dados por

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \epsilon. \quad (5.7)$$

Deste modo a transformação 5.5 das coordenadas da variedade compacta induz uma transformação de gauge abeliana sobre  $A_\mu$ . Isto significa que a variedade compacta vem de uma simetria interna do espaço para o grupo de gauge, e a simetria interna tem que ser interpretada agora como sendo apenas uma simetria do espaço-tempo, mas associada com a dimensão espacial extra.

## 5.1 Teoria de Kaluza-Klein em $(4+D)$ dimensões

### 5.1.1 Grupo de Isometria de uma Variedade

No intuito de unificar a gravitação não apenas com o eletromagnetismo, mas também com as interações fraca e forte, é necessário generalizar a teoria de cinco dimensões para uma teoria de dimensões mais altas [68, 75–79] e assim obter um grupo de gauge não-abeliano. No caso

em cinco dimensões, um grupo de gauge abeliano surge de uma transformação de coordenada do tipo 5.5, unicamente na coordenada  $\theta$ . Em  $(4+D)$  nós devemos olhar para simetrias da variedade compacta que generalizam 5.5. Vamos definir as coordenadas da quadri-dimensão espacial por  $x^\mu$ , e as coordenadas da variedade compacta de  $K$  por  $y^n$ . Uma isometria de  $K$  é a transformação de coordenada  $y \rightarrow y'$  a qual leva a forma da métrica  $\tilde{g}_{mn}$  para  $K$  invariante:

$$y \rightarrow y' : \tilde{g}'_{mn}(y') = \tilde{g}_{mn}(y) \quad (5.8)$$

A isometria forma um grupo, com geradores  $t_a$  e constantes de estrutura  $C_{abc}$ , da seguinte maneira. A isometria infinitesimal geral é

$$I + i\epsilon^a t_a : y^n \rightarrow y'^n = y^n + \epsilon^a \xi_a^n(y) \quad (5.9)$$

onde os parâmetros infinitesimais  $\epsilon^a$  são independentes de  $y$ , e os vetores de Killing  $\xi_a^n$ , os quais são associados com a isometria infinitesimal independente, obedecendo a álgebra

$$\xi_b^m \partial_m \xi_c^n - \xi_c^m \partial_m \xi_b^n = -C_{abc} \xi_a^n. \quad (5.10)$$

Correspondentemente por considerar o comutador de duas isometrias infinitesimais, mostramos que

$$[t_a, t_b] = iC_{abc} t_c. \quad (5.11)$$

Por exemplo, a esfera  $N$ -dimensional  $S^N$  tem o grupo de isometria  $SO(N+1)$ , e o plano projetivo complexo em  $2N$  dimensões  $CP^N$  tem grupo de isometria  $SU(N+1)$ . O grupo de isometria para a variedade compacta  $S^1$  da teoria em cinco dimensões é apenas o grupo de transformação  $SO(2)$  (ou  $U(1)$ ) de 5.5. É possível escolher a variedade compacta para obter o grupo de isometria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , o qual é o grupo de gauge das interações eletrofracas.

### 5.1.2 Transformações de Gauge não-abelianas

O estado fundamental da métrica compactificada em  $(4+D)$  dimensões pode ser escrita como

$$\bar{g}_{AB} = \text{diag}^0 \{ \eta_{\mu\nu} - \tilde{g}_{mn}(y) \}, \quad (5.12)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço de Minkowski,  $\tilde{g}_{mn}(y)$  é a métrica da variedade compacta. Os campos de gauge não-abelianos da teoria podem ser obtidos pela expansão em torno do estado fundamental

$$\bar{g}_{AB}(x) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) - \tilde{g}_{mn} B_\mu^m(x) B_\nu^n & B_\mu^n \\ B_\nu^m & \tilde{g}_{mn}(y) \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

com  $B_\mu^n \equiv \xi_a^n(y) A_\mu^a(x)$ . Transformações de gauge não-abelianas surgem considerando o efeito sobre os componentes  $\tilde{g}_{\mu n}$  da métrica da isometria infinitesimal com parâmetros dependentes em  $x$ :

$$y^n \rightarrow y^n + \xi_a^n(y) \epsilon^a(x). \quad (5.14)$$

Nós então encontramos que

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} = A_\mu^a + \partial_\mu \epsilon^a(x) + C_{abc} \epsilon^b(x) A_\mu^c \quad (5.15)$$

o qual é apenas a transformação usual de gauge de Yang-Mills se nós mostramos a constante de acoplamento de gauge  $g$  explicitamente na forma

$$C_{abc} = g f_{abc} \quad (5.16)$$

e

$$t_a = g T_a \quad (5.17)$$

tal que

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \quad (5.18)$$

Deste modo, as transformações de gauge não-abelianas são geradas pelas isometrias infinitesimais dependentes em  $x$  da variedade compacta  $K$ .



## 5.2 Teoria de Kaluza-Klein em (4+1) dimensões

Como foi falado no início deste capítulo, a teoria de Kaluza-Klein tinha como objetivo ser uma teoria capaz de unificar o eletromagnetismo e a gravitação. Então, mostraremos agora esse teoria em um espaço com cinco dimensões, tendo agora que os índices possam variar em  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 5$ . Logo, o elemento de linha é escrito como

$$ds^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.19)$$

onde  $h_{\mu\nu}$  é da forma

$$h_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} & h_{05} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{15} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{25} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{35} \\ h_{50} & h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{55} \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

ou de maneira simplificada

$$h_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} h_{\mu\nu} & h_{\mu 5} \\ h_{5\nu} & h_{55} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

onde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ .

Neste cenário uma transformação geral de coordenadas em  $g_{\mu\nu}$ , ocorre na forma

$$h'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\nu} h_{pq}. \quad (5.22)$$

Para uma translação espacial, temos

$$x'^\mu = x^\mu \quad x'^5 = x^5 - f(x^\mu), \quad (5.23)$$

então

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\nu, \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^5} = 0, \quad \frac{\partial x^5}{\partial x'^\mu} = \partial_\mu f, \quad \frac{\partial x^5}{\partial x'^5} = 1, \quad (5.24)$$

e portanto

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + (\partial_\mu f)h_{55} \text{ e } h'_{55} = h_{55}. \quad (5.25)$$

Fazemos então a seguinte mudança

$$h_{\mu 5} = h_{5\nu} = A_\mu, \quad h_{55} = 1, \quad (5.26)$$

que nos permite reescrever a equação (5.42) da seguinte forma

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f, \quad (5.27)$$

o que nos leva a uma transformação de gauge na eletrodinâmica. Portanto o tensor  $F_{\mu\nu}$  é invariante.

Por meio da transformação dada em (5.41), podemos encontrar

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + A_\nu(\partial_\mu f) + A_\mu(\partial_\nu f) + (\partial_\mu)(\partial_\nu). \quad (5.28)$$

Porém devemos lembrar que  $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  se transformam da mesma forma. Dessa forma, podemos chegar à

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu, \quad (5.29)$$

o que nos permite escrever o tensor  $h_{\mu\nu}$  na forma matricial

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu & A_\mu \\ A_\nu & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

e o elemento de linha na forma

$$ds^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (dx^5 + A_\mu dx^\mu)^2. \quad (5.31)$$

Como um exemplo simples, vamos utilizar a métrica em coordenadas cilíndricas, com presença de um defeito tipo corda cósmica,

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\varphi^2 - dz^2 + (dy + A_\varphi d\varphi), \quad (5.32)$$

e com isso vamos reescrever a equação de Klein-Gordon em cinco dimensões

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_A(g^{AB}\sqrt{-g}\partial_B)\Phi + m^2\Phi = 0, \quad (5.33)$$

e o oscilador de Klein-Gordon [74]

$$(\partial_A + m\omega X_A)(g^{AB}\sqrt{-g})(\partial_B - m\omega X_B)\phi - \sqrt{-g}m^2\phi = 0. \quad (5.34)$$

onde temos que  $A, B = t, \rho, \varphi, z, y$  e  $g = \det(g^{AB})$ .

Desta maneira, temos que, com  $A_\varphi = \frac{\phi}{2\pi\kappa}$  em (5.44), a equação 5.46 será da forma

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = m^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\Phi}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad (5.35)$$

e a equação 5.47 referente ao oscilador de Klein-Gordon, é

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (m^2 + m^2\omega^2\rho^2 + 2m\omega)\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\Phi}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\Phi^2}{4\pi^2\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad (5.36)$$

onde,  $\omega$  é a frequência do oscilador e para esse caso temos  $X_A = (0, \rho, 0, 0)$ .

A seguir apresentaremos um cenário utilizando a proposta de Kaluza-Klein, no qual a dimensão extra nos possibilita a introdução de um fluxo magnético no elemento de linha, fazendo surgir uma fase de Aharonov-Bohm. Na próxima seção começo a apresentar alguns trabalhos desenvolvidos durante o período de doutorado, e que são os pontos chaves para a tese.

### 5.3 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados no confinamento de uma partícula escalar relativística para um potencial tipo Coulomb em uma teoria de Kaluza-Klein

No trabalho [3] desenvolvido juntamente com os doutores Humberto Belich e Knut Bakke, nós analisamos o efeito de Aharonov-Bohm para estados ligados [116,117] para uma partícula escalar relativística sujeita a um potencial do tipo Coulomb na teoria de Kaluza-Klein [67, 68, 80, 81, 90]. Foi relatado na literatura que os potenciais do tipo Coulomb têm interesse em várias áreas da física [82–84]; por exemplo, no contexto da física da matéria condensada, os estudos trabalharam com sistemas unidimensionais [86–90], moléculas [91–93], interações pseudo-harmônicas [84,85], sistemas de massa dependentes de posição [94,96,152], o potencial de Kratzer [97–99] e defeitos topológicos em sólidos [100–104]. Outros estudos trataram do potencial do tipo Coulomb na propagação de ondas gravitacionais [105], modelos de quark [106], átomos com momento quadrupolo magnético [107], partícula neutra com momento dipolo magnético permanente [108] e mecânica quântica relativística [108–111, 131].

O potencial tipo-Coulomb é dado na forma

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{\rho}, \tag{5.37}$$

onde  $\alpha$  é uma constante que caracteriza o potencial escalar e  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a coordenada radial. O potencial é introduzido através do termo de massa através de  $m \rightarrow m + V(\vec{r})$ , onde  $V(\vec{r})$  é o potencial escalar. Essa mudança inserida em (5.46), faz com que a equação de Klein-Gordon tome a forma

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left(m + \frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \tag{5.38}$$

Note que os operadores quânticos  $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$ ,  $\hat{p}_z = -i\partial_z$  e  $\hat{p}_y = -i\partial_y$  comutam com o operador hamiltoniano do lado direito da equação (5.38). Podemos então propor uma solução

para (5.38) em termos das autofunções dos operadores como

$$\Phi(t, \rho, \varphi, z, y) = e^{-i\epsilon t} e^{il\varphi} e^{ikz} e^{iqy} g(\rho), \quad (5.39)$$

onde  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $k$  e  $q$  são constantes e  $g(\rho)$  é uma função de coordenada radial. Ao colocarmos essa solução em (5.38), temos

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dg}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2} g - \frac{2m\alpha}{\rho} g + \beta^2 g = 0, \quad (5.40)$$

onde foram definidos o seguintes parâmetros

$$\beta^2 = \epsilon^2 - m^2 - k^2 - q^2; \quad (5.41)$$

$$\gamma^2 = \left( l - \frac{\phi}{2\pi} q \right)^2 + \alpha^2. \quad (5.42)$$

Faremos ainda uma mudança de variáveis na equação (5.40), dada por  $\xi = 2\nu\rho$ , em , onde chegamos a

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dg}{d\xi} - \frac{\gamma^2}{\xi^2} g - \frac{m\alpha}{\nu\xi} g - \frac{1}{4} g = 0. \quad (5.43)$$

Devemos agora estudar o caráter assintótico das soluções para a equação (5.43) para dois casos da nova variável,  $\xi$ . A primeira é sobre o comportamento quando  $\xi \rightarrow \infty$  e nós obtemos que os estados de espalhamento onde a função de onda radial se comporta como  $g \cong \xi^{|\gamma|}$ . O segundo caso está relacionado aos estados ligados, onde o comportamento da função de onda radial se comporta  $g \cong e^{-\frac{\xi}{2}}$ . Por fim, para a solução completa de (5.43) devemos ter ainda uma função  $f(\xi)$  desconhecida que seja constante em  $\xi \rightarrow 0$  e seja normalizada quando  $\xi \rightarrow \infty$ . Dessa forma, a solução geral é do tipo

$$g(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{|\gamma|} f(\xi). \quad (5.44)$$

Agora, ao substituirmos a solução (5.44) em (5.43), obtêm-se a equação

$$\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + [2|\gamma| + 1 - \xi] \frac{df}{d\xi} + \left( -|\gamma| - \frac{1}{2} - \frac{m\alpha}{\nu} \right) f = 0. \quad (5.45)$$

A equação acima é correspondente a uma equação hipergeométrica confluyente [113,114]. Portanto a função  $f(\xi)$  corresponde a função hipergeométrica confluyente

$$f(\xi) = F_1 \left( |\gamma| + \frac{1}{2} + \frac{m\alpha}{\nu}, 2|\gamma| + 1, \xi \right). \quad (5.46)$$

Devemos notar que a função hipergeométrica confluyente é divergente no limite assintótico  $\xi \rightarrow \infty$ . Então, impomos a condição que a série hipergeométrica confluyente se torne um polinômio de grau  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) quando  $\xi \rightarrow \infty$ . Isto ocorre quando  $|\gamma| + 1/2 + m\eta/\nu$ . Desta forma, substituindo (5.42) e (5.43), obtemos

$$\varepsilon_{n,l} = \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{[n + |\gamma| + 1/2]^2} + \frac{k^2}{m^2} + \frac{q^2}{m^2}}, \quad (5.47)$$

onde  $n$  é o número quântico associado com os modos radiais,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  é o número quântico associado com o momento angular,  $k$  e  $q$  são constantes.

A equação (5.47) corresponde aos níveis de energia relativística de uma partícula escalar sujeita a um potencial tipo Coulomb em uma teoria de Kaluza-Klein. Note que, devido a presença do  $\gamma$  em (5.47), temos que os níveis de energia possuem uma dependência sobre a fase quântica geométrica Aharonov-Bohm [115], tendo esta uma dependência sobre a periodicidade de  $\phi_0 = \pm 2\pi/q$ . Isso nos diz que a dependência dos níveis de energia sobre a fase  $\phi$  corresponde a um efeito Aharonov-Bohm para estados ligados [116, 117].

A presença de uma fase geométrica nos níveis de energia pode gerar uma corrente persistente no sistema [?, 118–120, 123]. Seguindo [124–126] a expressão para a corrente persistente é dada por  $\zeta = \sum_{n,l} \zeta_{n,l}$ , onde  $\zeta_{n,l} = -\partial\varepsilon_{n,l}/\partial\phi$  é a relação de Byers-Yang [124]. Portanto a expressão para a corrente persistente para esse sistema relativístico é dada por

$$\zeta_{n,l} = -\mp \frac{q m \alpha^2}{\pi |\gamma|} \frac{(l - (\phi/2\pi)q)}{[n + |\gamma| + 1/2]^3 \sqrt{1 - \alpha^2/[n + |\gamma| + 1/2]^2 + k^2/m^2 + q^2/m^2}} \quad (5.48)$$

Portanto, temos que soluções de estados ligados relativísticos para a equação de Klein-Gordon podem ser obtidas para uma partícula escalar confinada a um potencial do tipo Coulomb na teoria de Kaluza-Klein. Ao introduzir um fluxo magnético através do elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski em cinco dimensões, vimos que os níveis de energia relativística

(5.47) dependem da fase quântica geométrica que dá origem a um efeito de Aharonov-Bohm para estados ligados na teoria de Kaluza-Klein [116, 117]. Além disso, esta dependência dos níveis de energia relativística na fase quântica geométrica produziu correntes persistentes no sistema quântico relativístico.

### 5.3.1 Caso não relativístico

Analisaremos agora o regime não relativístico para cenário mostrado acima. Ou seja, vamos analisar o comportamento do sistema no limite de baixas energias. Seguindo [117, 127], a função de onda pode ser escrita na forma  $\Phi(t, \rho, \varphi, z, y) = e^{-imt}\psi(\rho, \varphi, z, y)$ . Deste modo, assumindo que  $|i(\partial\psi/\partial t)| \ll m$  e substituindo esse ansatz em (5.38), nós obtemos

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \left[ \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] + \frac{\alpha}{\rho}\psi + \frac{\alpha^2}{2m\rho^2}\psi. \quad (5.49)$$

Repetimos aqui os mesmos passos feitos de (5.39) até (5.46), chegamos à equação

$$\varepsilon_{n,l}^{NR} = -\frac{m\alpha^2}{2[n + |\gamma| + 1/2]^2} + \frac{k^2}{2m} + \frac{q^2}{2m}. \quad (5.50)$$

A equação 5.50 corresponde aos níveis de energia para uma partícula não relativística, sem spin, confinada em um potencial tipo-Coulomb na teoria Kaluza-Klein. Observe que os níveis de energia não relativísticos (5.50) dependem da fase quântica geométrica de Aharonov-Bohm, cuja periodicidade é  $\phi_0 = \mp 2\pi/q$ ; assim, temos que  $\varepsilon_{n,l}(\phi \pm \phi_0) = \varepsilon_{n,l\pm 1}(\phi)$ , e as correntes persistentes são dadas por

$$\zeta_{n,l}^{NR} = -\mp \frac{q}{m} \frac{\gamma}{|\gamma|} \left( l - \frac{q}{2\pi} \right) \frac{m\alpha^2}{[n + |\gamma| + 1/2]^3}. \quad (5.51)$$

Investigamos efeitos quânticos relativísticos em uma partícula escalar sujeita a um potencial do tipo Coulomb devido à presença de um Aharonov-Bohm quântico geométrico [128] o qual é introduzido no sistema por meio de uma dimensão extra do espaço-tempo. Assim, nós mostramos que as soluções relativísticas de estado ligado podem ser alcançadas, onde os níveis de energia relativística dependem da fase quântica de Aharonov-Bohm. Esta dependência dos níveis de energia relativística na fase quântica geométrica corresponde a um

efeito de Aharonov-Bohm para estados ligados [116, 117] e dá origem ao aparecimento de correntes persistentes neste sistema quântico relativístico. Outro contexto interessante no qual o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados em uma teoria de Kaluza-Klein pode ser explorado, é baseado no defeito topológico do espaço-tempo. Em [129] é mostrado que o espaço-tempo das cordas cósmicas e o espaço-tempo das cordas cósmicas magnéticas podem ter análogos em cinco dimensões. Além disso, em [130] uma corda cósmica quiral de cinco dimensões é mostrada. A partir desta perspectiva, discussões interessantes sobre os efeitos de Aharonov-Bohm para estados ligados e correntes persistentes podem ser feitas a partir do confinamento de uma partícula escalar relativística a um potencial do tipo Coulomb com o pano de fundo do espaço-tempo da corda cósmica magnética e Kaluza-Klein [129], e o Corda cósmica quiral magnética de Kaluza-Klein [130].

Além do trabalho apresentado acima, desenvolvemos mais alguns artigos [4, 5] onde abordamos as possibilidades fornecidas pelo elemento de linha em cinco dimensões. No primeiro desses trabalhos [4] nós investigamos a dinâmica de partícula de Klein-Gordon sobre o efeito de Aharonov-Bohm, sujeita a um potencial central tipo Coulomb inserido por meio da modificação do termo de massa; Em um segundo [5] trabalho nós investigamos também uma partícula escalar com modificação no termo de massa, sujeita a um potencial tipo Cornell. Aqui também introduzimos um fluxo magnético por meio do elemento de linha e em seguida encontramos as soluções para estados ligados e definimos o perfil energético do sistema, tanto para o caso geral (potencial tipo Cornell), como para os casos de um potencial linear e um potencial tipo Coulomb; Um outro artigo foi lançado também contendo a teoria de Kaluza-Klein como *background*, porém para o caso do oscilador de Klein-Gordon sujeito a um potencial tipo Cornell, introduzido através da modificação no termo de massa.



## 5.4 Oscilador de Klein-Gordon sob efeito de uma interação tipo Cornell

O oscilador de Klein-Gordon (OKG), foi proposto como um oscilador relativístico para campos escalares, onde fosse possível determinar analiticamente os níveis de energia do sistema, o qual no limite relativístico, caímos novamente no oscilador harmônico dado pela equação de Schrödinger. Os autores tiveram como ideia, introduzir um acoplamento à equação de Klein-Gordon, o que ficou conhecido por OKG. O OKG foi estudado em um sistema de massa dependente da posição [131, 132], em espaço não-comutativo [133, 134], em espaço-tempo de corda cósmica [138], em espaço-tempo anisotrópico [136, 137].

Nesta seção apresentaremos o trabalho [6] feito em conjunto com os doutores Humberto Belich e Ricardo Vitória, onde nós analisamos a interação entre o OKG e um potencial tipo Cornell tendo como pano de fundo a teoria de Kaluza-Klein. O OKG foi já estudado no espaço-tempo de Minkowski [131, 132, 135], em um espaço anisotrópico [136, 137], em um espaço-tempo com corda cósmica [138] e na teoria de Kaluza-Klein.

Assim como foi feito na seção anterior, usamos o elemento de linha (5.44), sendo  $A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi\kappa}$ , o qual é responsável pelo aparecimento de um campo magnético  $B = \frac{\Phi}{\kappa}\delta^2(\mathbf{r})$ . Introduziremos na equação (5.36) uma modificação no termo de massa na equação que descreve a dinâmica quântica relativística para uma partícula de Klein-Gordon ??, obtendo

$$(\partial_A + m\omega X_A)(g^{AB}\sqrt{-g})(\partial_B - m\omega X_B)\phi - \sqrt{-g}[m + V(\vec{\rho})]^2\phi = 0. \quad (5.52)$$

Logo,

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left[ m + V(\vec{\rho}) \right]^2 \phi + (m^2\omega^2\rho^2 + 2m\omega)\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\Phi}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},$$

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\Phi^2}{4\pi^2\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad (5.53)$$

a qual representa a interação de um campo escalar dependente da massa com o OKG no espaço-tempo de cinco dimensões descrito pela teoria de Kaluza-Klein. Em seguida introduzimos na equação (5.53) o potencial

$$V(\vec{\rho}) = \frac{a}{\rho} + b\rho, \quad (5.54)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes. Em adição, a solução de (5.53) pode ser escrita na forma

$$\phi(t, \rho, \varphi, z, y) = e^{-i(\epsilon t - l\varphi - kz - qz)} R(\rho), \quad (5.55)$$

onde  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $-\infty < k < \infty$ ,  $q$  é uma constante e  $R(\rho)$  é uma função de onda radial.

Substituindo (5.54) e (5.55) em (5.53), nós chegamos a equação

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2} R - \frac{2am}{\rho} R - 2bm\rho R - \varpi^2 \rho^2 R + \lambda R = 0, \quad (5.56)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda &= \epsilon^2 - m^2 - k^2 - q^2 - 2m\omega - 2ab \\ \varpi^2 &= m^2\omega^2 + b^2 \\ \gamma^2 &= \left(l - \frac{q\Phi}{2\pi}\right) + a^2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

vamos então fazer uma mudança de variáveis da forma  $\varrho = \sqrt{\varpi}\rho$ , e com isso a equação (5.58) torna-se

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} - \frac{\gamma^2}{\varrho^2} R - \frac{\alpha}{\varrho} R - \beta\varrho R - \varrho^2 R + \frac{\lambda}{\varpi} R = 0, \quad (5.58)$$

onde nós definimos os parâmetros

$$\alpha = \frac{2am}{\sqrt{\varpi}}, \quad \beta = \frac{2bm}{\varpi^{2/3}}. \quad (5.59)$$

Fazemos então a análise assintótica de (5.58), lembrando que a função  $R(\rho)$  deve ser bem comportada em  $\varrho \rightarrow 0$  e  $\varrho \rightarrow \infty$ , e assim é possível determinar a solução geral de (5.58)

$$R(\varrho) = \varrho^{|\gamma|} e^{-\frac{1}{2}\varrho(\varrho+\beta)} f(\varrho) \quad (5.60)$$

onde  $f(\varrho)$  é uma função desconhecida à ser determinada. Ao colocarmos a solução (5.60) em (5.58), obtemos

$$\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \left[ \frac{2|\gamma| + 1}{\varrho} - 2\varrho - \beta \right] \frac{df}{d\varrho} + \left[ \delta - \frac{\theta}{\varrho} \right] f = 0, \quad (5.61)$$

sendo

$$\delta = \frac{\lambda}{\varpi} + \frac{\beta^2}{4} - 2 - 2\gamma; \quad , \quad \theta = \frac{\beta}{2}(2|\gamma| + 1) + \alpha. \quad (5.62)$$

A equação mostrada em (5.61) é conhecida na literatura como biconflente de Heun [142, 143] e a função  $f(\varrho)$  é uma função biconflente de Heun, onde:  $f(\varrho) = H_b(2|\gamma|, \beta, \lambda/\varpi + \beta^2/4, 2\alpha; \varrho)$ . Sabemos que a equação biconflente de Heun possui dois pontos de singularidade, sendo um na origem e o outro no infinito ([142]). A origem é um ponto regular e isso nos garante ao menos uma solução em torno dela, podendo ser obtido por meio da série de potências

$$f(\varrho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varrho^j. \quad (5.63)$$

Substituindo (5.63) em (5.61), nós iremos obter a relação de recorrência

$$c_{j+2} = \frac{[\theta + \beta(j+1)]}{(j+2)(j+2+2|\gamma|)} c_{j+1} - \frac{(\delta - 2j)}{(j+2)(j+2+2|\gamma|)} c_j, \quad (5.64)$$

da qual tiramos os seguintes coeficientes

$$c_1 = \frac{\theta}{1+2|\gamma|} c_0 \quad (5.65)$$

$$c_2 = \frac{(\theta + \beta)c_1 - \delta c_0}{2(2+2|\gamma|)} = \frac{c_0}{4(1+|\gamma|)} \left[ \frac{(\theta + \beta)\theta}{1+2|\gamma|} - \delta \right]. \quad (5.66)$$

O nosso objetivo é o de buscar uma solução polinomial para a equação biconflente de Heun, o que nos dará a solução dos estados ligados. Assim, nós faremos o truncamento da série, ou seja, vamos impor que a série termine quando [142]

$$c_{n+1} = 0; \quad \delta = 2n, \quad (5.67)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . A fim de analisar essas condições, iremos atribuir valores para  $n$ , começando por considerar  $n = 1$ , o qual corresponde ao modo radial do valor mais baixo de energia do sistema. Portanto, a condição  $c_{n+1} = 0$  nos dá  $c_2 = 0$ , e dos coeficientes (5.65) e (5.66) obtemos uma equação algébrica de terceiro grau

$$\varpi_{l,1}^3 - \frac{2a^2m}{1+2|\gamma|} \varpi_{l,1}^2 - \frac{4abm^2(1+|\gamma|)}{1+2|\gamma|} \varpi_{l,1} - \frac{b^2m^2(2|\gamma|+3)}{2} = 0 \quad (5.68)$$

onde

$$\omega^{l,1} = \frac{1}{m} \sqrt{\varpi_{l,1}^2 - b^2}. \quad (5.69)$$

Ou seja, nós escolhemos a frequência do OKG e ajustamos os parâmetros por meio da condição  $c_{n+1} = 0$  para qualquer valor de  $n$ . Sabemos que a equação algébrica de terceiro grau tem ao menos uma solução real e, como pode ser visto em [152], nos possibilita obter os valores permitidos da frequência para os estados de energia mais baixos do sistema. Uma vez que os valores da frequência do OKG foram obtidos por meio dos números quânticos  $l, n$ , nós temos  $w = w_{l,n}$ . Podemos notar que para cada modo radial nós temos uma relação diferente da frequência do OKG em termos dos parâmetros associados com o fluxo quântico introduzido por meio da teoria de Kaluza-Klein, e do parâmetro associado com o potencial central tipo Cornell. Para termos uma análise mais completa, faremos  $n = 1$  em (5.67), resultando em  $\delta = 2$ , nos levando a seguinte expressão

$$\varepsilon_{k,l,1} = \pm \sqrt{m^2 + k^2 + q^2 + 2ab + 2m\omega_{l,1} + 2\sqrt{m^2\omega_{l,1}^2 + b^2(2 + |\gamma|)} - \frac{b^2m^2}{m^2\omega_{l,1}^2 + b^2}} \quad (5.70)$$

Então, substituindo (5.69) em (5.70) nós podemos obter os valores permitidos da energia relativística para o mais baixo estados de energia do sistema de uma partícula escalar dependente da massa sob efeitos de um OKG em um cenário de teoria de Kaluza-Klein. Diferentemente de [139], nós podemos ver que o mais baixo estado de energia definido pela solução real da equação algébrica dada em (5.68) mais a expressão dada em (5.70), é definido pelo modo radial  $n = 1$  e não  $n = 0$ . Este efeito surge devido ao efeito ao potencial tipo Cornell no OKG. É importante notar que o estado de energia mais baixo não ocorre para o valor  $n = 0$ , mas para  $n = 1$ . De outra forma, o contrário implicaria que  $c_1 = 0$ , o que requer que a massa de repouso da partícula escalar fosse nula, isto é, seria contrário a proposta dessa investigação.

Em seguida faremos dois casos particulares do sistema para os potenciais tipo Coulomb e linear.

### 5.4.1 Oscilador de Klein-Gordon sujeito a um potencial tipo Coulomb

Para esse primeiro cenário particular vamos tomar o potencial tipo Coulomb fazendo  $b \rightarrow 0$  em (5.54), ou seja,

$$V(\rho) = \frac{a}{\rho}. \quad (5.71)$$

Dessa forma, a relação (5.69) fica

$$\omega_{l,1} = \frac{2a^2m}{\left[1 + 2\sqrt{\left(l - \frac{q\Phi}{2\pi}\right)^2}\right]}, \quad (5.72)$$

a qual representa os valores permitidos da frequência do modo radial  $n = 1$  do OKG. É importante notar que ao tratarmos de um cenário na teoria de Kaluza-Klein, fica claro a influência sobre os valores permitidos da frequência da mudança do momento angular  $l_{eff} = l - \frac{q\Phi}{2\pi}$ , o que nos dá um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm, criando uma função periódica com periodicidade  $\Phi_0 = \frac{2\pi}{q}\iota$ , sendo  $\iota = 0, 1, 2, \dots$ ; ou seja,  $\omega_{l,1} = (\Phi + \Phi_0) = \omega_{l+\iota,1}(\Phi)$ . Fazendo  $q \rightarrow 0$  nós recuperamos o resultado de [131]. A energia dada em (5.70) também sofre mudança

$$\varepsilon_{k,l,1} = \pm \sqrt{m^2 + K^2 + q^2 + 2m\omega_{l,1}(3 + |\gamma|)}. \quad (5.73)$$

Então, substituindo (5.72) em (5.73)

$$\varepsilon_{k,l,1} = \pm \sqrt{m^2 + K^2 + q^2 + \frac{4a^2m^2}{1 + 2|\gamma|}(3 + |\gamma|)}, \quad (5.74)$$

representando o conjunto de valores permitidos para a energia relativística correspondente ao mais baixo estado de energia do sistema de uma partícula dependente da massa sujeita aos efeitos de um OKG e um potencial central tipo Coulomb, tendo como pano de fundo uma teoria de Kaluza-Klein.

### 5.4.2 Oscilador de Klein-Gordon sujeito a um potencial Linear

Trataremos agora um segundo caso particular de (5.54) fazendo  $a \rightarrow 0$ . Assim, temos que

$$V(\rho) = b\rho, \quad (5.75)$$

o que caracteriza um potencial linear. Essa mudança implica também uma mudança no valor permitido da frequência do modo radial  $n = 1$  do OKG, nos dando

$$\omega_{l,1} = \frac{1}{m} \sqrt{\left[ \frac{b^2 m^2}{2} (2|\bar{\gamma}| + 3) \right]^{3/2} - b^2} \quad (5.76)$$

sendo  $\gamma_{a=0}^2 = \bar{\gamma}^2 = (l - q\Phi/2\pi)^2$ . De maneira semelhante ao resultado encontrado para o caso apresentado acima, temos a influência do termo  $l_{eff} = l - \frac{q\Phi}{2\pi}$ , responsável por um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm, gerando também uma função periódica com periodicidade  $\Phi_0 = \frac{2\pi}{q}\iota$ , sendo  $\iota = 0, 1, 2, \dots$ ; ou seja,  $\omega_{l,1} = (\Phi + \Phi_0) = \omega_{l \mp \iota, 1}(\Phi)$ . Fazendo  $q \rightarrow 0$  nós recuperamos o resultado de [132].

Substituindo (5.76) em (5.70) nós obtemos a seguinte expressão

$$\varepsilon_{k,l,1} = \pm \left\{ m^2 + k^2 + q^2 + 2 \left[ \left( \frac{b^2 m^2 (2|\bar{\gamma}| + 3)}{2} \right)^{\frac{2}{3}} - b^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 2 \left( \frac{b^2 m^2 (2|\bar{\gamma}| + 3)}{2} \right)^{\frac{1}{3}} (2 + |\bar{\gamma}|) - \left( \frac{2}{bm(2|\bar{\gamma}| + 3)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.77)$$

a qual representa o conjunto de valores permitidos da energia relativística correspondente ao estado de energia mais baixo do sistema da partícula dependente da massa sob efeito do OKG e um potencial linear em um cenário de Kaluza-Klein.

## 5.5 Efeito de rotação sobre um campo escalar em uma teoria de Kaluza-Klein

Continuaremos nessa seção tratando de um campo escalar tendo como um pano de fundo a teoria de Kaluza-Klein. Porém, distintamente das seções anteriores, nós estudamos o comportamento do sistema em um referencial em rotação e temos os resultados publicados em [7]. Para isso, partimos da ideia de Landau e Lifshitz [144], os quais fizeram uma transformação de modo que introduz uma rotação uniforme no espaço-tempo de Minkowski de simetria cilíndrica.

Introduzimos a transformação  $\varphi \rightarrow \varphi + \Omega t$ , onde  $\Omega$  é a velocidade da rotação constante do referencial rotacionando, no elemento de linha,

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 (dy + A_\varphi d\varphi), \quad (5.78)$$

o que nos dá

$$ds^2 = - \left[ 1 - \left( \rho^2 + \frac{\Phi^2}{4\pi^2} \right) \right] dt^2 + 2\Omega \left( \rho^2 + \frac{\Phi^2}{4\pi^2} \right) d\varphi dt + \frac{\Phi\Omega}{\pi} dy dt + d\rho^2 + \left( \rho^2 + \frac{\Phi^2}{4\pi^2} \right) d\varphi^2 + \frac{\Phi}{\pi} dy d\varphi + dy^2 + dz^2. \quad (5.79)$$

Por consequência da rotação do referencial e no intuito de manter a componente  $g_{00}$  sendo negativa, nós retiramos a informação da coordenada radial

$$0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{1 - \frac{\Phi^2 \Omega^2}{4\pi^2}}}{\Omega}, \quad (5.80)$$

ou seja, a coordenada radial no definida no *background* pela métrica, se restringe ao intervalo definido acima.

Podemos notar que, além da velocidade da rotação do referencial rotacionando uniformemente, a desigualdade (5.80) também é determinada pelo fluxo  $\Phi$  da teoria de Kaluza-Klein. Outro ponto importante é o fato de quando  $\rho > \frac{\sqrt{1 - \frac{\Phi^2 \Omega^2}{4\pi^2}}}{\Omega}$ , a partícula estará fora do cone de luz. Ao tomarmos  $\Phi = 0$  nós recuperamos o resultado obtido em [144].

O nosso interesse é de descrever a dinâmica quântico relativística de um partícula escalar sob efeito de referencial rotacionando uniformemente em um teoria de Kaluza-Klein com a presença de um fluxo. Portanto, utilizaremos a equação (5.44), onde  $g = \det(g_{AB}) = -\rho$  e  $g^{AB}$  é

$$g^{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & \frac{1}{\rho^2} - \Omega^2 & 0 & -\frac{\Phi}{2\pi\rho^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Phi}{2\pi\rho^2} & 0 & 1 + \frac{\Phi^2}{4\pi^2\rho^2} \end{bmatrix}. \quad (5.81)$$

Dessa forma a equação de Klein-Gordon (5.46) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} - \Omega^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \varphi} - \\ & - \frac{\Phi}{\pi \rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\Phi^2}{4\pi^2 \rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - m^2 \phi, \end{aligned} \quad (5.82)$$

a qual descreve uma partícula escalar no espaço-tempo de Kaluza-Klein em um referencial rotacionando uniformemente.

Propomos a solução de (5.82) do tipo

$$\phi(t, \rho, \varphi, z, y) = e^{-i(\epsilon t - l\varphi - kz - qy)} f(\rho), \quad (5.83)$$

onde  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  é o autovalor do operador momento angular  $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$ ,  $-\infty < k < \infty$  é o autovalor do operador momento linear  $\hat{p}_z = -i\partial_z$ ,  $q$  é uma constante e o autovalor do operador momento linear da dimensão extra  $\hat{p}_y = -i\partial_y$ , os quais comutam com a hamiltoniana. Assim, substituindo (5.83) em (5.82), nós chegamos à seguinte equação diferencial para a função de onda radial

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2} f + \alpha^2 f = 0, \quad (5.84)$$

sendo

$$\alpha^2 = (\epsilon + l\Omega)^2 - m^2 - k^2 - q^2 \quad (5.85)$$

$$\gamma^2 = \left( l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2. \quad (5.86)$$

A equação (5.85) é uma equação de Bessel cujas soluções são dadas em termos das funções de Bessel de primeiro grau,  $J_{|\gamma|}(\alpha\rho)$ , e de segundo grau  $N_{|\gamma|}(\alpha\rho)$ ,

$$f(\rho) = AJ_{|\gamma|}(\alpha\rho) + BN_{|\gamma|}(\alpha\rho), \quad (5.87)$$

sendo  $A$  e  $B$  constantes. Nas subseções seguintes, analisaremos dois possíveis cenários, por meio de casos particulares das aproximações assintóticas para as funções de Bessel, dos quais iremos obter soluções para estados ligados.



### 5.5.1 Partícula escalar em uma região limitada por uma superfície cilíndrica

Assumimos que o movimento da partícula escalar está restrito para ocorrer entre duas superfícies concêntricas:  $\bar{\rho} = b$ , sendo uma constante diferente de zero, e  $\rho_0$ , onde  $\rho_0 > \bar{\rho}$  com

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{1 - \frac{\Phi^2 \Omega^2}{4\pi^2}}}{\Omega}, \quad (5.88)$$

o qual vem do efeito da rotação (5.80). Considerando que as fronteiras dessa região são como paredes impenetráveis, uma delas devido a restrição da coordenada radial definida em (5.80), nós requeremos que a função de onda satisfaça a seguinte condição contorno

$$\phi(\rho = b) = \phi(\rho \rightarrow \rho_0) = 0. \quad (5.89)$$

Na literatura temos vários estudos acerca desse tipo de confinamento [145–148].

A equação (5.89) fornece a seguinte equação do espectro de energia relativístico da partícula escalar [145, 146]

$$J_{|\gamma|}(\alpha b)N_{|\gamma|}(\alpha \rho_0) - J_{|\gamma|}(\alpha \rho_0)N_{|\gamma|}(\alpha b) = 0. \quad (5.90)$$

Além disso, iremos considerar os casos particular:  $\alpha b \gg 1$  e  $\alpha \rho_0 \gg 1$ . Nesse caso, para um  $\gamma$  fixo, nós podemos reescrever as funções  $J_{|\gamma|}$  e  $N_{|\gamma|}$ , usando a expansão assintótica de Hankel [114, 145, 146]:

$$J_{|\gamma|}(\alpha \tilde{\rho}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha \tilde{\rho}}} \left[ \cos \left( \alpha \tilde{\rho} - \frac{\gamma \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{(4\gamma^2 - 1)}{8\alpha \tilde{\rho}} \sin \left( \alpha \tilde{\rho} - \frac{\gamma \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (5.91)$$

e

$$N_{|\gamma|}(\alpha \tilde{\rho}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha \tilde{\rho}}} \left[ \sin \left( \alpha \tilde{\rho} - \frac{\gamma \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{(4\gamma^2 - 1)}{8\alpha \tilde{\rho}} \cos \left( \alpha \tilde{\rho} - \frac{\gamma \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (5.92)$$

onde  $\tilde{\rho}$  pode ser  $\bar{\rho} = b$  ou  $\rho_0$  dado na equação (5.88). Então, substituindo (5.91) e (5.92) em (5.90), nós temos que

$$\alpha^2 \approx \frac{\pi^2 n^2}{(\rho_0 - b)^2} + \frac{(4\gamma^2 - 1)}{4b\rho_0}, \quad (5.93)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Substituímos (5.85) e (5.88) em (5.93), obtendo

$$\varepsilon_{k,l,n} \approx \pm \left\{ m^2 + k^2 + q^2 + \frac{\pi\Omega}{2b\sqrt{4\pi^2 - \Phi^2\Omega^2}} \left[ 4 \left( l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 - 1 \right] + \frac{4\pi^2\Omega^2 n^2}{(\sqrt{4\pi^2 - \Phi^2\Omega^2} - 2\pi\Omega b)^2} \right\}^{1/2} - l\Omega. \quad (5.94)$$

A equação (5.94) mostra o perfil da energia relativística de uma partícula escalar em uma região limitada por superfícies cilíndricas, onde uma das superfícies é determinada por efeitos não inerciais em um espaço-tempo com uma teoria de Kaluza-Klein. Esse tipo de espaço influencia os níveis de energia relativístico por meio da presença do fluxo quântico, introduzido por nele. Esta influência pode ser vista através da mudança nos autovalores do momento angular gerando um momento angular efetivo  $l_{eff} = l - \frac{q\Phi}{2\pi}$ , ou seja, um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados [116], e a presença do termo  $q^2$  no espectro de energia. Também é válido observar a presença de um efeito tipo Sagnac através do acoplamento entre a velocidade de rotação  $\Omega$  e autovalor do momento angular  $l$ . Fazendo  $\Phi = 0$  e  $q = 0$  em (5.94), nós obtemos

$$\varepsilon_{k,l,n} \approx \pm \left\{ m^2 + k^2 + \frac{\Omega^2 n^2}{(1 - 2\pi\Omega b)^2} + \frac{\Omega(4l^2 - 1)}{4b} \right\}^{1/2} - l\Omega, \quad (5.95)$$

que representa o perfil de energia relativística de uma partícula escalar em um referencial rotacionando uniformemente em uma região limitada por superfícies cilíndricas, onde uma das superfícies é determinada pelos efeitos não inerciais no espaço de Minkowski. Podemos notar também um efeito tipo Sagnac por meio da presença do acoplamento entre a velocidade rotação  $\Omega$  e o autovalor  $l$  do momento angular.

### 5.5.2 Potencial de confinamento *Hard-Wall*

Consideremos agora o intervalo  $0 \leq \rho \leq \rho_0$ , onde  $\rho_0$  é definido na equação (5.88). Neste caso é importante notar que função de Bessel de segundo grau diverge para  $\rho \rightarrow 0$ . Portanto, como estamos interessado em soluções bem comportadas, é necessário que  $B = 0$ , levando a equação (5.87) à

$$f(\rho) = AJ_{|\gamma|}(\alpha\rho). \quad (5.96)$$

A equação (5.80) representa que a coordenada radial é limitada devido aos efeitos não-inerciais. Baseado nesta restrição, vamos impor aqui que função de onda radial  $f(\rho)$  se anula pela condição de contorno:

$$f(\rho \rightarrow \rho_0) = 0, \quad (5.97)$$

com  $\rho_0$  definido em (5.88). Do ponto de vista matemático, a equação acima representa a condição de contorno de Dirichlet; do ponto de vista físico, um potencial tipo *hard-wall* definido em  $\rho_0$ . Agora, vamos considerar o caso particular  $\alpha\rho_0 \gg 1$ . Neste caso particular, de (5.91), podemos escrever a função de Bessel de primeira ordem na forma da expansão assintótica

$$J_{|\gamma|}(\alpha\rho_0) \propto \cos\left(\alpha\rho_0 - \frac{\pi|\gamma|}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.98)$$

Então, substituindo a equação (5.98) em (5.96), nós obtemos da condição contorno (5.97) a seguinte expressão

$$\varepsilon_{k,l,n} = \pm \sqrt{m^2 + k^2 + q^2 + \frac{4\pi^2\Omega^2}{(4\pi^2 - \Phi^2\Omega^2)} \left(n + \frac{1}{2} \left|l - \frac{q\Phi}{2\pi}\right| + \frac{3}{4}\right) - l\Omega}, \quad (5.99)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$  são os modos radiais. Obtemos na equação (5.99) o espectro de energia para uma partícula escalar em um referencial rotacionando uniformemente e sujeita um confinamento por um potencial tipo *hard-wall*, determinando por efeitos não inerciais em um espaço-tempo na teoria de Kaluza-Klein, o qual influencia os níveis de energia através da presença do fluxo quântico. Esta influência pode ser vista através da mudança nos autovalores do momento angular, gerando um momento angular efetivo  $l_{eff} = l - \frac{q\Phi}{2\pi}$ , ou seja, temos um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados [116], e a presença do termo  $q^2$  no espectro de energia. Fazendo  $\Phi = 0$  e  $q = 0$ , nós recuperamos os resultados obtidos em [136]. Por fim, devemos notar a presença do efeito tipo Sagnac pela presença do acoplamento entre a velocidade  $\Omega$  e o autovalor  $l$  do momento angular.

### 5.5.3 Interação tipo Coulomb

Analisaremos agora o efeito causado pela mudança feita no termo de massa da equação (5.82), onde introduziremos uma interação do tipo-Coulomb na forma

$$m \rightarrow m + \frac{a}{\rho} \quad (5.100)$$

onde  $a$  é uma constante.

Substituindo (5.100) em (5.82), e utilizando a solução (5.83), obtemos a equação de onda radial

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{\bar{\gamma}^2}{\rho^2} f - \frac{2ma}{\rho} f + \beta^2 f = 0, \quad (5.101)$$

onde definimos os parâmetros

$$\bar{\gamma}^2 = \left( l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right) \quad (5.102)$$

$$\beta^2 = m^2 + k^2 + q^2 - (\varepsilon + l\Omega)^2. \quad (5.103)$$

Em seguida realizamos uma mudança de variáveis do tipo  $\varrho = 2\beta\rho$ . Daí

$$\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{df}{d\varrho} - \frac{\bar{\gamma}^2}{\varrho^2} f - \frac{\delta}{\varrho} f + \frac{1}{4} f = 0, \quad (5.104)$$

com  $\delta = m|a|/\beta$  onde consideramos  $a = -|a|$ . Além disso, vamos considerar  $\Omega \ll 1$ , isto é, a velocidade de rotação é muito pequena. Neste caso particular, da equação (5.88) nós temos que  $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \rho_0 \rightarrow \infty$ . Então, para este caso particular, a coordenada radial variando em  $0 < \rho < \infty$ , portanto  $0 < \varrho < \infty$ . Iremos agora discutir o comportamento assintótico de (5.102). Para  $f(\varrho) \rightarrow 0$  em  $\varrho \rightarrow 0$  e  $\varrho \rightarrow \infty$ , nos permite escrever a função de onda radial em termos da série hipergeométrica confluyente [114],  ${}_1F_1(|\bar{\gamma}| + 1/2 - \delta, 2|\bar{\gamma}| + 1; \varrho)$ , nos dando

$$f(\varrho) = \varrho^{|\bar{\gamma}|} e_1^{\frac{1}{2}} F_1 \left( |\bar{\gamma}| + \frac{1}{2} - 2|\bar{\gamma}| + 1; \varrho \right). \quad (5.105)$$

Sabemos que a série hipergeométrica confluyente torna-se um polinômio de grau  $n$  quando  $|\bar{\gamma}| + \frac{1}{2} - \delta = -n = 0, 1, 2, \dots$ . Então, com essa condição nós temos que

$$\varepsilon_{k,l,n} = \pm \sqrt{m^2 + k^2 + q^2 - \frac{m^2 a^2}{\left[ n + \sqrt{\left( l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 + a^2 + \frac{1}{2}} \right]^2} - l\Omega}. \quad (5.106)$$

Obtemos assim o espectro de energia para uma partícula escalar com a massa dependente da posição em um referencial rotacionando uniformemente, imerso na teoria de Kaluza-Klein e sujeito a uma interação com um potencial escalar central tipo Coulomb. Em comparação com a equação (5.99), fica evidente que em (5.106) o espectro de energia é modificado devido a presença da interação coulombiana.

## 5.6 Efeito da rotação em um Oscilador de Klein-Gordon

Continuaremos aqui analisando os efeitos da rotação em alguns sistemas, e abordaremos agora os efeitos para o OKG, o qual foi dado na equação (5.47). Então para o espaço-tempo da teoria de Kaluza-Klein, com efeitos não inerciais dados pelo elemento de linha (5.78) e usando a solução (5.39), temos a seguinte equação de onda radial

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2} R - m^2 \omega^2 \rho^2 R + \epsilon^2 R = 0, \quad (5.107)$$

onde definimos

$$\gamma^2 = \left( l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 \quad (5.108)$$

$$\epsilon^2 = (\varepsilon + l\Omega) - m^2 - k^2 - q^2 - 2m\omega. \quad (5.109)$$

Em seguida realizamos a mudança de variáveis dada por  $s = m\omega\rho^2$ , obtendo com isso, a equação

$$\frac{d^2 R}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dR}{ds} - \frac{\gamma^2}{4s^2} R + \frac{\epsilon^2}{4m\omega s} R - \frac{1}{4} = 0, \quad (5.110)$$

cuja solução é dada em termos da função hipergeométrica confluyente [114]

$$R(s) = s^{\frac{\gamma}{2}} e_1^{-\frac{1}{2}s} F_1 \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{4m\omega}, |\gamma| + 1; s \right). \quad (5.111)$$

Podemos analisar o sistema quântico relativístico para dois casos: para um valor da frequência angular de rotação e para baixos valores da frequência de rotação.

### 5.6.1 Caso Geral

Para qualquer valor da frequência de rotação, assim como visto em (5.5), que a função de onda radial deve se cancelar para a restrição imposta pela rotação dada na equação (5.88), ou

$$s_0 = \frac{\left(1 - \frac{\Phi^2 \Omega^2}{4\pi^2}\right) m\omega}{\Omega^2}. \quad (5.112)$$

Isto significa que a partícula escalar sujeita ao OKG está restrita a uma região onde esta restrição é vista como a presença de um potencial *hard-wall* induzido pelo efeitos da rotação em um espaço tempo de Kaluza-Klein. Este tipo de confinamento é descrito pelas condições de contorno dadas em (5.97).

Então, vamos analisar o caso onde  $\frac{\epsilon^2}{4m\omega} \gg 1$ , com  $|\gamma| + 1$  e  $s_0$  fixos. Para o parâmetro  $\frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{4m\omega}$  sendo considerado grande, e no ponto fixo, a função hipergeométrica confluyente pode ser escrita na forma [114]

$${}_1F_1(s_0) \approx \cos \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{(|\gamma| + 1)\pi}{2} + \sqrt{2s_0(|\gamma| + 1) - 4s_0 \left( \frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{4m\omega} \right)} \right]. \quad (5.113)$$

Substituindo (5.111) e (5.113) em (5.97), nós temos

$$\varepsilon_{k,l,n} = \pm \sqrt{m^2 + k^2 + q^2 + \frac{4\pi^2 \Omega^2}{(4\pi^2 - \Phi^2 \Omega^2)} \left( n + \frac{1}{2} \left| l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right| + \frac{3}{4} \right)^2 + 2m\omega l \Omega}, \quad (5.114)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . A equação acima representa o espectro de energia de uma partícula escalar em um referencial rotacionando uniformemente sob os efeitos de um espaço-tempo de Kaluza-Klein, sujeito a um OKG. Comparando (5.114) com (5.99), é claro notar que a presença do OKG altera a expressão para o espectro de energia relativístico do sistema. Podemos notar que o fluxo quântico introduzido por meio da teoria de Kaluza-Klein, altera os níveis de energia do sistema. A influência é observada através da mudança nos autovalores do momento angular, gerando um momento angular efetivo  $l_{eff} = l - \frac{q\Phi}{2\pi}$ , proporcionando um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados [116], e a presença do termo  $q^2$  no espectro de energia. Além disso, o OKG também contribui no espectro de energia com o termo  $2m\omega$ . Aqui também é possível observar o efeito tipo Sagnac pela presença do acoplamento entre a velocidade de rotação  $\Omega$  e autovalor do momento angular  $l$ .

### 5.6.2 Caso particular

Consideramos agora o caso particular onde a frequência de rotação é muito pequena com  $\Omega \ll 1$ , tal que a coordenada radial nas proximidades do ponto fixo  $s_0$  tende ao infinito, como pode ser visto em (5.112). Para este caso, a função hipergeométrica confluyente admite soluções polinomiais de grau  $n$ , impondo que  $\frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{4m\omega} = -n = 0, 1, 2, \dots$ . Dessa forma, assim como fizemos em (5.105) e (5.106)

$$\varepsilon_{k,l,n} = \pm \sqrt{m^2 + k^2 + q^2 + 4m\omega \left( n + \frac{1}{2} \left| l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right| + 1 \right)} - l\Omega. \quad (5.115)$$

Novamente encontramos os níveis de energia relativísticos de uma partícula em um referencial girante de maneira uniforme sob efeito de uma teoria de Kaluza-Klein e sujeita a uma a presença do OKG. Se compararmos (5.99) e (5.115), vemos que a a presença do OKG altera a expressão dos níveis de energia do sistema.

Iniciamos esse capítulo apresentando a teoria de Kaluza-Klein e suas implicações e possibilidades de investigar diversos cenários. Em seguida apresentamos trabalhos desenvolvidos durante o doutorado envolvendo esse cenário para a equação de Klein-Gordon e para o OKG, onde ficou claro a presença da influência da teoria de Kaluza-Klein por meio do fluxo quântico introduzido na métrica.

Em seguida apresentaremos as conclusões e perspectivas futuras da pesquisa.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

O trabalho desenvolvido aqui abordou inicialmente a violação da simetria de Lorentz por meio do campo de fundo, onde foi feito um breve revisão sobre o tema. Apresentamos a densidade de lagrangeana da extensão do modelo padrão contendo os termos referentes à quebra da simetria, dados pelo vetor  $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}V^\mu$  (setor ímpar) e pelo tensor  $(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}$  (setor par).

No capítulo seguinte nós tratamos da teoria não comutativa que traz uma generalização para o princípio da incerteza e uma discretização do espaço, implicando em um comprimento mínimo. Tal ideia foi introduzida na proposta de uma eletrodinâmica modificada no setor de gauge do modelo padrão estendido. Após analisarmos a relação de dispersão (4.51), verificamos não haver uma dependência entre ambas as teorias e podemos tratar os fenômenos de maneira distinta. Uma das motivações para realizarmos o estudo de tais teorias, vem do fato de que tanto a violação da simetria de Lorentz como a presença de um comprimento mínimo ainda não terem sido detectadas, visto que a detecção seria possível apenas em altas energias. A questão seria se há uma faixa de energia na qual elas começam a interferir significativamente uma com a outra, baseado na relação de dispersão (4.51) onde os termos que violam a simetria de Lorentz aparecem multiplicados pelo parâmetro de deformação do comprimento mínimo. Acreditamos ser esse o motivo para a dificuldade da medição, uma vez que estamos multiplicamos termos de valores pequenos. Por fim, concluimos que na relação de dispersão da nossa teoria efetiva, há a contribuição do comprimento mínimo e da violação da simetria de Lorentz.

No capítulo 4 fizemos uma revisão sobre a teoria de Kaluza-Klein e apresentamos trabalhos realizados em cenários com cinco dimensões, para partículas escalares relativísticas com



uma modificação no termo de massa, na forma  $m(\rho) \rightarrow m + V(\rho)$ . No primeiro deles nós investigamos os efeitos quântico relativísticos para um partícula escalar sujeita a um potencial tipo Coulomb na presença de um fluxo magnético presente no potencial vetor  $A_\varphi = \phi/2\pi\kappa$ , introduzido no sistema por meio da dimensão extra. A presença desse termo na métrica, juntamente com a introdução do termo dependente de massa na equação de Klein-Gordon, nos leva a uma equação hipergeométrica confluyente [113] (ou equação de Kummer), a qual possui uma singularidades regular em  $x = 0$  e uma singularidade irregular em  $x = \infty$ . Determinamos em seguida uma solução para a equação de Kummer,  $f(x) = {}_1F_1(a; c; x)$ , a qual é convergente para para todo  $x$  finito e se torna um polinômio quando  $x$  é zero ou um inteiro negativo. Isso nos diz que, para o caso estudado por nós, podemos impor que a hipergeométrica confluyente torne-se um polinômio de grau  $n$ , para o qual  $-n = |\gamma| + 1/2 + m\eta/\nu$ . Dessa forma, obtivemos as soluções de estados ligados relativísticos e vimos na expressão para os níveis de energia a dependência desses níveis sobre a fase de Aharonov-Bohm. Esta dependência sobre a fase geométrica quântica corresponde ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados e possibilita o surgimento de uma corrente persistente no sistema. Podemos dessa forma investigar os efeitos em um sistema quântico relativístico para um partícula escalar, sob efeito de confinamento de um potencial tipo Coulomb, causado por modificações introduzidas na métrica e no termo de massa com a presença de um defeito tipo corda cósmica.

Em um segundo cenário nós investigamos a influência de um fluxo quântico na teoria de Kaluza-Klein sobre uma partícula relativística de massa dependente da posição, sujeita a um potencial tipo Cornell e ao oscilador de Klein-Gordon. Comparando os resultados obtidos nesta análise com o obtido em [139], podemos notar que a presença do potencial modifica os níveis de energia do OKG em uma cenário de Kaluza-Klein. Esta modificação é caracterizada pelo fato de que não possível chegar a uma expressão fechada para o espectro de energia do sistema, como em [139], mas é possível determinar um conjunto de valores permitidos de energia para cada modo de radial, separadamente. Além do mais, a frequência do OKG tem valores permitidos determinados pelos números quânticos e pelo parâmetros que caracterizam o potencial tipo Cornell. Para exemplificar isso, calculamos a energia relativística e os valores permitidos da frequência do OKG para o estado de energia mais baixo do sistema, o qual é

definido pelo modo radial  $n = 1$ .

Realizamos a mesma análise para dois casos particulares: um potencial tipo Coulomb e um potencial linear. Em ambos os casos também foi possível verificar a influência da teoria de Kaluza-Klein nos valores permitidos da energia relativística do OKG, por meio do momento angular  $l_{eff} = l - \frac{q\Phi}{2\pi}$ , nos dando um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm [116], fazendo surgir uma função periódica com periodicidade  $\Phi_0 = \frac{2\pi}{q}\iota$ , sendo  $\iota = 0, 1, 2, \dots$ ; ou seja,  $\omega_{l,1} = (\Phi + \Phi_0) = \omega_{l \mp \iota, 1}(\Phi)$ . Fazendo  $q \rightarrow 0$  nós recuperamos o resultado de [132].

Por fim, analisamos uma partícula escalar tendo como pano de fundo o espaço-tempo da teoria de Kaluza-Klein sob efeitos não inerciais, onde foi possível determinar analiticamente as soluções para estados ligados. Devido aos efeitos de rotação, a coordenada radial torna-se restrita, na qual a restrição é determinada pela frequência da rotação e do fluxo quântico introduzido na dimensão extra da métrica. Por meio dessa restrição na coordenada radial, nós temos investigado uma partícula em uma região limitada por superfícies cilíndricas e sob efeito de um potencial tipo *hard-wall*, onde foi determinado o perfil de energia. Em seguida nós descrevemos uma partícula escalar dependente da massa no cenário de Kaluza-Klein e sob efeitos não inerciais. Então, pela modificação na massa introduzida na equação de Klein-Gordon, nós inserimos um potencial tipo Coulomb e determinamos os níveis de energia. Por fim, determinamos os níveis de energia do oscilador de Klein-Gordon neste mesmo cenário. Em todos os casos fica explícito o efeito da teoria de Kaluza-Klein na presença do fluxo quântico presente nos níveis de energia calculados pelos números quânticos do momento angular efetivo  $l_{eff} = l - \frac{q\Phi}{2\pi}$ . Ou seja, o sistema sente a presença de um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm. Além disso, a influência da rotação pode ser vista por meio do efeito tipo Sagnac.

Como perspectiva futura temos como objetivo investigar a não comutatividade em cenário de dimensões mais altas utilizando a teoria de Kaluza-Klein. Um dos pontos de partida se baseia nos trabalhos [149–151] que apresentam o oscilador de Dirac e de Klein-Gordon em um espaço não comutativo. O primeiro [149], abordando ambos os osciladores, mostrou que em um espaço não comutativo eles possuem um comportamento similar a uma partícula na presença de um campo magnético constante, ou seja, o espaço não é mais isotrópico e a partícula

se comporta como se houvesse um campo de fundo. No segundo trabalho [150], estudam apenas o oscilador de Dirac em um espaço não comutativo, mas em um referencial não inercial e com presença de um defeito tipo corda cósmica. Neste caso, além da mudança no termo de energia há uma relação entre a densidade de massa no termo  $\eta = 1 - 4\Lambda$  e a influência da não comutatividade. Quanto maior a densidade, menor o valor de  $\eta$  e maior a influência da não comutatividade. E, para o limite onde  $\eta = 1$ , apenas a informação sobre o oscilador de Dirac vai permanecer.

Dessa forma, buscamos através das ferramentas estudadas nessa tese, pretendemos estender os trabalhos desenvolvidos por nós e pesquisar a possibilidade de estender os cenários citados no parágrafo acima para um sistema em 5D.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Belich, E. V. B. Leite, *O Modelo Padrão e duas Possíveis Rotas de Extensão*, VII Escola de Física Roberto A. Salmeron (VII EFRAS), Livraria da Física, 2019.
- [2] E. V. B. Leite, H. Belich, *Int. Jour. of Phys. D* **27**, no. 11, p. 1843006 (2018)
- [3] E. V. B. Leite, H. Belich, K. Bakke, *Adv. High Energy Phys.*, **2015**, p.925846 (2015).
- [4] E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, *Modern Physics Letters A* **34**, 190319 (2019).
- [5] E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, *Advances in High Energy Physics 2019*, p. 1-7 (2019).
- [6] E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, *Brazilian Journal of Physics* **50**, 744 (2020).
- [7] E. V. B. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitória, *Modern Physics Letters A* **35**, 2050283 (2020).
- [8] *Selected Papers of Abdus Salam: With Commentary*, World Scientific Pub Co Inc (May 1, 1994).
- [9] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (International Series of Monographs on Physics).
- [10] C. N. Yang, R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954)
- [11] P. A. M. Dirac, *The Collected Works of P. A. M. Dirac: Volume 1: 1924-1948*;
- [12] H. YUKAWA, *On the interactions of elementary particles*, *Proc. Phys-Math. Soc. Japan*, 17, P.48, 1935.
- [13] R. SHAW, *The problem of Particles Types and other contributions to the theory of Elementary Particles*, PhD Thesis, 1955;
- [14] Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **117**, 648 (1960).

- 
- [15] J. Goldstone, *Nuovo Cimento*, **19**, 154 (1961).
- [16] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962)
- [17] C. N. YANG, T. D. LEE, Question of parity conservation on weak interactions, 1956, 104, 254-258; Parity non conservation and two components theory of the neutrino, 1957, *Physical Review*, 106, 1671-1675;
- [18] C. S. WU, E. AMBLER, R. W. HAYWARD, D.D. HOPPE, R. P. HUDSON, *Phys. Rev.*, 105, 4, 1957;
- [19] N. Nagaosa, S. Heusler, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics (Theoretical and Mathematical Physics)*, (2010).
- [20] A. Altland, B. D. Simon, *Condensed Matter Field Theory*, second edition, Cambridge University Press (2010).
- [21] J. J. Sakurai , *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1994).
- [22] K. Huang, *Fundamental Forces of Nature: The Story of Gauge Fields*, World Scientific, (2007).
- [23] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, *Microscopic Theory of Superconductivity*, *Phys. Rev.* 106, 162 - 164 (1957).
- [24] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996).
- [25] H. S. Snyder, *Phys.Rev* **71** 38-14 (1947).
- [26] G. Betschart, E. Kant, F. R. Klinkhamer, *Nucl.Phys.* **B815**, 198-214 (2009).
- [27] E. Kant, F. R. Klinkhamer, M. Schreck, *Phys.Lett.* **B682**, 316-321 (2009).
- [28] R. G. Lang, H. Martínez-Huerta, V. de Souza. *The Ast. J.* **23**, 853 (2018).
- [29] J. A. Zuntz, P. G. Ferreira, T. G. Zlosnik, *Phys.Rev.Lett.* **101**, 261102 (2008)
- [30] M. S. Berger, V. A. Kostelecky, *Phys.Rev.***D65**, 091701 (2002).
- [31] S. G. Nibbelink, M. Pospelov, *Phys.Rev.Lett.* **94**, 081601 (2005).
- [32] K. Bakke, H. Belich. *Int. J. of Mod. Phy. A*, **34**, 1950116 (2019).

- 
- [33] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos and M. T. D. Orlando, *Rev. Bras. Ens. Fís.*, **29**, 1, (2007).
- [34] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [35] R. Jackiw, (1998), (Preprint arXiv:hep-ph/9811322).
- [36] Victor O. Rivelles, *J. Phys.: Conf. Ser.* **287**, 012012 (2011).
- [37] W. Heisenberg, *Ann. Physick* **32**, 20(1938)
- [38] M. Darrodi, H. Mehraban, S. Hassanabadi, *Mod. Phy. Let. A* **33**, 1850203 (2018)
- [39] M. Chaichian, M. M. Shikeh-Jabbari, A. Turean, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2716 (2001)
- [40] S. Hassanabadi, M. Ghominejad, *Eur. Phys. J. Plus* **129**, 273 (2014)
- [41] A. Mirjalili, M. Taki, *The. and Mat. Phy.* **186**, 280-285 (2016)
- [42] S. Dulat, K. Li, *Eur. Phys. J. C***54**, 333-337 (2008)
- [43] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, *Int. J. of Geo. Met. in Mod. Phy.* **15**, 1850165 (2018)
- [44] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 10909 (2006)
- [45] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *Czech. J. Phys.* **56**, 1269 (2006)
- [46] V. M. Tkachuk, *J. Phys. Stud.* **11**, 41 (2007)
- [47] G. Betschart, E. Kant, F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **815**, 198 (2009)
- [48] E. Kant, F. R. Klinkhamer, M. Schreck, *Phys. Lett. B* **682**, 316 (2009)
- [49] Q. G. Bailey, V.A. Kostelecký, *Phys. Rev. D*, **70**, 076006 (2004)
- [50] V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004)
- [51] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980)
- [52] *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Supriyo Datta, Cambridge University Press (September 14, 1995).
- [53] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics* (2nd Edition), World Scientific Pub Co Inc; 2nd edition (January 1, 2008).

- 
- [54] T. Filk, Phys. Lett. B, **376**, 53–58 (1996).
- [55] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909, 032, (1999)
- [56] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, Rev.Mod.Phys. **73** 977-1029 (2001)
- [57] R. J. Szabo, Phys.Rept. **378**, 207 (2003)
- [58] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Pi, A. Polychronakos, Phys.Lett. B, **517**, 450 (2001)
- [59] E. Harikumar, V. O. Rivelles Phys.Lett. B, **625**, 156 (2005)
- [60] K. Ajith, E. Harikumar, V. O. Rivelles, M. Sivakumar, Phys.Rev. D ,**77**, 085010 (2008)
- [61] T. Mariz, J. Nascimento, V. O. Rivelles, Phys.Rev. D **75** 025020 (2007)
- [62] F. Dahia, A. S. Lemos, Eur. Phys. J. C, **435**, 76 (2016).
- [63] F. Dahia, A. S. Lemos, Phys, Rew. D, **94**, 084033 (2016).
- [64] A. S. Arapoglu, E. Yalçinkaya, A. E. Yükselci, Astr. Space Sci, (2018) 363:215.
- [65] Stenico, G.V., Forero, D.V. Peres, O.L.G. J. High Energ. Phys. (2018) 2018: 155.
- [66] G. Nordström, Phys. Zeitschr. 15 (1914) 504.
- [67] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. K1 (1921) 966.
- [68] O. Klein, Zeits. für Phys. **37**, 895 (1926).
- [69] E. Witten, Nucl. Phys. B **186**, 412 (1981).
- [70] H. Mandel, Zeits. für Phys. **39**, 136 (1926).
- [71] V. Fock, Zeits. für Phys. **39**, 226 (1926).
- [72] A. Einstein, P. Bergmann, Ann. of Math. , **39**, 3 (1938).
- [73] P. Candelas, S. Weinberg, Nucl. Phys. B **237**, 397 (1984).
- [74] S. Bruce, P. Minning, Nuovo Cimento A **106**, 711 (1993).
- [75] R. Kerner, Ann. Inst. H Poincaré, **9**, 143 (1968).
- [76] A. Trautman, Rep. Math. Phys. **1**, 29 (1983).

- 
- [77] Y. M. Cho, P. G. O. Freund, Phys. Rev. D **12**, 1711 (1975).
- [78] J. Scherk, J. H. Schwarz, Phys. Lett **57B**, 463 (1975).
- [79] E. Cremmer, J. Scherk, Nucl. Phys. B **118**, 61 (1977)
- [80] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, Superstring Theory, vol. 1-2, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.
- [81] D. Bailin and A. Love, "Kaluza-Klein theories," Reports on Progress in Physics, vol. 50, no. 9, pp. 1087-1170, 1987.
- [82] M. Dineykhani, G. V. Efimov, G. Ganold, S. N. Nedelko, Oscillator Representation in Quantum Physics, Springer, Berlin, Germany, 1995
- [83] M. A. Núñez, Phys. Rev. A **47**, 3620 (1993)
- [84] A. De Souza Dutra, Phys. Rev. A **47**, 2435 (1993)
- [85] S. M. Ikhdaïr and M. Hamzavi, Phys. B: Condensed Matter, vol. 407, no. 24, pp. 4797-4803, 2012.
- [86] P. Gribo, E. Sigmund, Phys. Rev. B **44**, 3537 (1991)
- [87] F. Gesztesy, B. Thaller, J. Phys. A **14**, 639 (1981)
- [88] J. A. Reyes, M. del Castillo-Mussot, J Phys. A **32**, 2017 (1999)
- [89] Y. Ran, L. Xue, S. Hu, R.-K. Su, J Phys A **33**, 9265 (2000)
- [90] Y. Chargui, A. Dhahbi, A. Trabelsi, Phys Scr. **90**, 015201 (2015)
- [91] S. M. Ikhdaïr, B. J. Falaye, M. Hamzavi, Ann. Phys **353**, 282 (2015)
- [92] I. I. Guseinov and B. A. Mamedov, J. Chem. Phys **121**, 1649 (2004)
- [93] I. I. Guseinov, J. Chem. Phys **120**, 9454 (2004)
- [94] A. D. Alhaidari, Phys. Rev. A **66**, 042116 (2002)
- [95] A. D. Alhaidari, Phys. Lett. A **322**, 72 (2004)
- [96] J. Yu and S.-H. Dong, Phys. Lett. A **325**, 194 (2004)



- 
- [97] A. Kratzer, *Zeit. Phys.* **3**, 289 (1920)
- [98] M. R. Setare, E. Karimi, *Phys. Scr.* **75**, 90 (2007)
- [99] G. D. A. Marques, V. B. Bezerra, *Clas. Quan. Grav.* **19**, 985 (2002)
- [100] C. Furtado, B. G. C. da Cunha, F. Moraes, E. R. Bezerra de Mello, and V. B. Bezerra, *Phys. Lett. A.* **195**, 90 (1994)
- [101] S. Milshtein, *Le J. Phys. Coll.* **40**, 207 (1979)
- [102] M. Kittler et al., *Small* **3**, 964 (2007)
- [103] M. Reich, *Jpn. J. Appl. Phys.* **49**, 04DJ02 (2010)
- [104] Y. Ran, Y. Zhang, and A. Vishwanath, *Nat. Phys.*, **5**, 298 (2009)
- [105] H. Asada, T. Futamase, *Phys. Rev. D*, **56**, 6062 (1997)
- [106] C. L. Critchfield, *J. Math. Phys.*, **17**, 261 (1976)
- [107] I. C. Fonseca, K. Bakke, *J. Math. Phys.*, **56**, ID062107 (2015)
- [108] P. M. T. Barboza, K. Bakke, *Ann. Phys.*, **361** 259 (2015)
- [109] E. R. Figueiredo Medeiros, E. R. Bezerra de Mello, *Eur. Phys. J. C.* **72**, 2051 (2012)
- [110] V. R. Khalilov, *Phys. Rev. A*, **71**,012105 (2005)
- [111] H. W. Crater, J.-H. Yoon, C.-Y. Wong, *Phys. Rev. D* **79** 034011 (2009)
- [112] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Phys.* **355**, 48 (2015)
- [113] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, New York, NY, USA, 6th edition, 2005.
- [114] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, NewYork, NY,USA, 1965.
- [115] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959)
- [116] M. Peshkin, A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, vol.340 of *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, Germany, 1989.

- [117] C. Furtado, V. B. Bezerra, F. Moraes, Mod. Phys. Lett. A **15**, 253 (2000)
- [118] D. Loss, P. Goldbart, A. V. Balatsky, Phys. Rev. Lett. **65**, 1655 (1990)
- [119] D. Loss, P. M. Goldbart, Phys. Rev. B **45**, 13544 (1992)
- [120] X.-C. Gao, T.-Z. Qian, Phys. Rev. B **47**, 7128 (1993)
- [121] T.-Z. Qian, Z.-B. Phys. Rev. Lett. **72**, 2311 (1994)
- [122] S. Oh, C.-M. Ryu, Phys. Rev. B **51**, 13441 (1995)
- [123] H. Mathur, A. D. Stone, Phys. Rev. B **44**, 10957 (1991)
- [124] N. Byers, C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **7**, 46 (1961)
- [125] W.-C. Tan, J. C. Inkson, Phys. Rev. B **60**, 5626 (1999)
- [126] L. Dantas, C. Furtado, A. L. Silva Netto, Phys. Lett. A **379**, 11 (2015)
- [127] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Springer, Berlin, Germany, 3rd edition, 2000.
- [128] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959)
- [129] M. Azreg-Ainou, G. Clément, Clas. Quan. Grav. **13**, 2635 (1996)
- [130] C. Furtado, F. Moraes, V. B. Bezerra, Phys. Rev. D **59**, 107504 (1999)
- [131] K. Bakke, C. Furtado, Ann. Phys. **355**, 48 (2015)
- [132] R. L. L. Vitória, K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus **131**, 36 (2016)
- [133] B. Mirza, R. Narimani, S. Zare, Commun. Theor. Phys. **55**, 405 (2011)
- [134] M. -L. Liang, R. -L. Yang, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250047 (2012)
- [135] R. L. L. Vitória, C. Furtado, K. Bakke, Ann. Phys. **370**, 128 (2016)
- [136] R. L. L. Vitória, H. Belich, Eur. Phys. J. C **78**, 999 (2018)
- [137] R. L. L. Vitória, H. Belich, K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus **132**, 25 (2017)
- [138] A. Boumali, N. Messai, Can. J. Phys. **92**, 1 (2014)

- 
- [139] J. Carvalho, A. M. M. Carvalho, E. Cavalcante, C. Furtado, Eur. Phys. J. C **76**, 365 (2016)
- [140] R. L. L. Vitória, K. Bakke, Int. J. Mod. Phys. D **27**, 1850005 (2018)
- [141] R. L. L. Vitória, K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus **133**, 490 (2018)
- [142] E. R. Figueiredo Medeiros, E. R. Bezerra de Mello, Eur. Phys. J. C **72**, 2051 (2012)
- [143] A. Ronveaux, Heun's differential equations (Oxford University Press, Oxford, 1995)
- [144] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics*, Vol. 2, 4th edn. (Elsevier, 1980).
- [145] V. B. Bezerra, J. Math. Phys. **38**, 2553 (1997)
- [146] V. B. Bezerra, Class. Quantum Grav. **8**, 1939 (1991)
- [147] V. B. Bezerra, J. Math. Phys. **30**, 2895 (1989)
- [148] V. B. Bezerra, I. B. dos Santos, Eur. J. Phys. **13**, 122 (1992)
- [149] M. Mohadesi, B. Mirza, Commun. Theor. Phys., **42**, 664-668 (2004) .
- [150] R. R. Cuzinatto, M. de Montigny, P. J. Pompeia, Gen. Rel. and Grav., **51**, 107 (2019).
- [151] X. Clament, Phys. Rev. D, **71**, 085012 (2005)
- [152] A. D. Alhaidari, Int. J. Theor. Phys. **42**, 2999 (2003).