

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Denis Campos Rodrigues

**Estudos de soluções esfericamente simétricas em teorias
estendidas da gravitação**

Vitória

2020

Denis Campos Rodrigues

Estudos de soluções esfericamente simétricas em teorias estendidas
da gravitação

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física do Centro de Ciências Exatas da Univer-
sidade Federal do Espírito Santo como requisito
parcial para a obtenção do grau de Doutor em
Física, na área de concentração de Física Teórica

Orientador: Prof. Júlio César Fabris

Vitória
2020

DENIS CAMPOS RODRIGUES

Estudos de soluções esfericamente simétricas em teorias estendidas da gravitação

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Júlio César Fabris (Orientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Nelson Pinto Neto.
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello.
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Ilya Shapiro.
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira.
Universidade Federal do Espírito Santo

Profa. Dr. Thaisa Carneiro da Cunha Guio.
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA
2020

à minha filha Helena

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Áurea, pelo esforço que teve para me proporcionar uma boa educação.

Agradeço à minha esposa Caroline, por todo o apoio ao longo do curso de doutorado.

Agradeço em especial ao professor Júlio César Fabris, pela paciência na orientação, pelo companheirismo, pelo apoio nos momentos de dificuldade e, certamente, pelo aprendizado durante todos esses anos de pós-graduação.

Agradeço ao professor Kirill A. Bronnikov por compartilhar seu vasto conhecimento e pela ajuda quando estive em Moscou.

Agradeço ao Vladimir Stokov pela ajuda quando estive em Moscou.

Agradeço aos amigos de Moscou Nestor e Arthur.

Agradeço à Carla R. Almeida pela ajuda quando tive que ir para Berlim e me abrigou em sua casa.

Agradeço aos professores da Pós-graduação em Física da UFES. Aos meus amigos de pós-graduação: Felipe Santos, Tays Miranda, Pedro Otavio, Edison Cesar, Mariniel Galvão, Jhonny Andres Agudelo Ruiz, Leonardo Giani e Emmanuel Frion, Michael F. Gusson e Eddy Chirinos pela troca de conhecimento e momentos de descontração.

Agradeço a todos os meus amigos pelo apoio, em especial, ao meu amigo e irmão Bruno.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Esperança

Lá bem no alto do décimo segundo andar do Ano

Vive uma louca chamada Esperança

E ela pensa que quando todas as sirenas

Todas as buzinas

Todos os reco-recos tocarem

Atira-se

E

— ó delicioso vôo!

Ela será encontrada miraculosamente incólume na
calçada,

Outra vez criança...

E em torno dela indagará o povo:

— Como é teu nome, meninazinha de olhos verdes?

E ela lhes dirá

(É preciso dizer-lhes tudo de novo!)

Ela lhes dirá bem devagarinho, para que não esqueçam:

— O meu nome é ES-PE-RAN-ÇA...

Mário Quintana

Resumo

A teoria de k -essência caracteriza-se por uma função do termo cinético de um campo escalar. Esta teoria foi amplamente aplicada em cosmologia, sugerida como energia escura e na tentativa de explicar o período inflacionário. A gravidade de Rastall origina-se a partir da divergência não nula do tensor energia-momento, ou seja, é uma teoria não conservativa. Outra característica importante dessa teoria é que não se origina do princípio variacional. Entretanto, em cosmologia, a teoria de Rastall conduz a resultados similares à Λ CMD, diferenciando-se apenas no regime não linear da evolução das perturbações cósmicas. No contexto de objeto compactos, os resultados obtido em estrelas de nêutrons são bastante interessantes utilizando a teoria de Rastall. A grande surpresa é que, mesmo sendo teorias tão diferentes, suas soluções em espaços-tempo estáticos e esféricamente simétricos são iguais, em alguns casos. Devido a esse fato, um estudo para investigar em que situações essas duas teorias pode ser duais. Entretanto, o estudo da estabilidade das soluções em k -essência e Rastall nos mostram que essas duas teorias não coincidem a nível perturbativo. A tentativa de encontrar novas soluções dilatônicas em uma geometria estática e esféricamente simétrica revelou um conjunto de novas soluções de buracos negros, buracos de minhoca e, até mesmo, singularidades. Buracos negros com rotação são objetos astrofísicos encontrados na natureza, por este motivo o estudo desses objetos é de grande importância. No entanto, a busca novas soluções de buracos negros com rotação pode ser uma tarefa bastante difícil. Um buraco negro com rotação é descrito por uma métrica estacionária e esse fato torna mais difícil a resolução das equações de Einstein. Nesse sentido, a utilização de métodos matemáticos que convertam soluções estáticas conhecidas em soluções estacionárias é bem vinda. Vamos discutir a viabilidade desse processo.

Palavras-chave

Teorias de campo, buracos negros, estabilidade

Abstract

The k -essence theory is characterized by a function of the kinetic term of a scalar field. This theory was widely applied in cosmology, suggested as dark energy and in an attempt to explain the inflationary period. Rastall's gravity originates from the non-zero divergence of the energy-moment tensor, that is, it is a non-conservative theory. Another important feature of this theory is that it does not originate from the variational principle. However, in cosmology, Rastall's theory leads to results similar to the Λ CMD, differing only in the nonlinear regime of the evolution of cosmic perturbations. In the context of compact objects, the results obtained in neutron stars are quite interesting using Rastall's theory. The big surprise is that, even though theories are so different, their solutions in static and spherically symmetrical spacetime are the same, in some cases. Due to this fact, a study to investigate in which situations these two theories can be dual. However, the study of the stability of the solutions in k -essence and Rastall show us that these two theories do not coincide at the perturbation level. The attempt to find new dilatonic solutions in a static and spherically symmetric geometry revealed a set of new solutions for black holes, wormholes and even singularities. Rotating black holes are astrophysical objects found in nature, so the study of these objects is of great importance. However, finding new rotating black hole solutions can be quite a difficult task. A rotating black hole is described by a stationary metric and this fact makes it more difficult to solve Einstein's equations. In this sense, the use of mathematical methods that convert known static solutions into stationary solutions is welcome. We will discuss the viability of this process.

Keywords

Field theory, black holes, stability

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminar matemática: breve fundamentação	6
2.1	Variedade e tensores	6
2.2	Métrica	8
2.3	Transformação de coordenadas	10
2.4	Derivada covariante e geodésica	11
2.5	Curvatura	14
3	Teoria de k-essência	19
3.1	Teorias escalares-tensoriais	19
3.2	Teoria de k -essência	20
3.2.1	Equação de estado	20
3.2.2	Condições de estabilidade em k -essência	21
3.3	Algumas Aplicações em k -essência	23
3.3.1	Teoria de cordas efetiva em baixa energia com termos derivados de ordem superior à X	23
3.3.2	Teorias de Dirac–Born–Infeld (DBI)	24
4	A gravidade de Rastall	25
4.1	Rastall	25
4.2	Algumas aplicações em Rastall	27
4.2.1	Cosmologia em Rastall e o modelo Λ	27
4.2.2	Estrela de Nêutrons em Rastall	28
4.3	Formulação Lagrangiana para teoria de Rastall	30
4.3.1	Gravitação $F(R, T)$	30
4.3.2	Gravitação $F(R, \mathcal{L}_m)$	39
5	Soluções de k-essência e Rastall em espaços esfericamente simétricos	42

5.1	Espaços esfericamente simétricos em k -essência	42
5.1.1	Equações elementares	43
5.1.2	Solução especial I	44
5.1.3	Solução especial II	47
5.2	Espaços esfericamente simétricos em Rastall com campo escalar	50
5.2.1	Equações elementares	50
5.2.2	Solução especial I: $a = -1$	51
5.2.3	Solução especial II: $a = 0$	53
5.2.4	Solução especial III: $a = 3/2$	54
6	Dualidade entre k-essência e Rastall	57
6.1	Espaços-tempo com interação escalar-vácuo	57
6.1.1	Teoria de k -essência	57
6.1.2	Rastall com campo escalar	59
6.1.3	Comparação entre k -essência e Rastall	60
6.2	Cosmologia com matéria	61
6.2.1	Cosmologia em k -essência	62
6.2.2	Cosmologia em Rastall com campo escalar e matéria	62
6.2.3	Modelo R1: Sem mistura entre campo escalar e matéria	63
6.2.4	Modelo R2: Conservação tensor energia-momento da matéria	65
6.2.5	Outras consequências da conservação da matéria	66
6.3	Perturbação e velocidade do som	68
6.4	Alguns casos especiais	69
6.4.1	Caso especial I: $n = 1/2$	69
6.4.2	Caso especial II: $b = 3/2$	70
6.4.3	Caso especial III: $b = 2$	71
6.4.4	Caso especial IV: $b = 0$	71
6.5	Exemplos	71
6.5.1	Vácuo escalar	72
6.5.2	Poeira e Rastall-R1	73
6.5.3	Poeira e Rastall-R2	74
7	Estudo da Estabilidade em espaços esfericamente simétricos	76
7.1	Estudo da Estabilidade em Teoria de k -essência	76
7.1.1	Equações perturbadas	77

7.1.2	Duas soluções especiais e suas instabilidades	82
7.2	Estudo da Estabilidade na gravidade de Rastall	87
7.2.1	Equações básicas	87
7.2.2	Equação mestre e uma discrepância	89
7.2.3	Soluções especiais	91
8	Classificação de novas soluções dilatônicas	95
8.1	Relações básicas	95
8.2	Soluções com campo elétrico	98
8.3	Classificação	101
8.3.1	Soluções para $\varepsilon = +1$	102
8.3.2	Soluções para $\varepsilon = -1$	105
8.4	Possíveis soluções de buracos negros	111
9	Desvio da luz no limite de campo forte	113
9.1	Apresentação do método	113
9.2	Algumas aplicações	120
9.2.1	Métrica de Schwarzschild	120
9.2.2	Buraco negro dilatônico	122
9.2.3	Buraco de minhoca de anti-Fisher	125
9.2.4	Um outra solução dilatônica	127
10	Algoritmo de Janis-Newman	131
10.1	O algoritmo de Janis-Newman	132
10.2	Aplicações	135
10.2.1	Teoria de k -essência	135
10.2.2	Buraco negro dilatônico	138
10.2.3	Solução de anti-Fisher	140
10.2.4	Teoria de Brans-Dicke	141
11	Conclusão	142
	Referências Bibliográficas	149

Introdução

A teoria da relatividade geral, desde sua formulação, tem sido muito bem sucedida quando aplicada em testes experimentais locais. No entanto, há muitas razões para considerar essa teoria não como uma teoria final da gravidade, mas apenas como uma aproximação razoável que funciona bem em uma grande, mas finita, gama de comprimento e escalas de energia. Entre essas razões estão o velho problema de unificar a gravidade com outras interações físicas e as dificuldades nas tentativas de quantizar a relatividade geral. Outras razões para lidar com modificações de relatividade geral são os problemas conhecidos vivenciados pela própria teoria: sua previsão de singularidades espaço-tempo nas soluções mais fisicamente relevantes, mostrando situações em que a teoria não funciona mais, e sua incapacidade de explicar as principais características observáveis do Universo sem introduzir, até agora, formas invisíveis de matéria, matéria escura e energia escura, que somam até 95% do conteúdo do Universo.

Galileu Galilei foi o primeiro a introduzir o pêndulo e os planos inclinados no estudo da gravidade terrestre no final do século XVI. A gravidade desempenhou um papel importante no desenvolvimento das ideias de Galileu sobre a necessidade de experimentos no estudo da ciência, que tiveram um grande impacto no pensamento científico moderno. No entanto, não antes de 1665, quando Isaac Newton introduziu a agora renomada lei da força gravitacional do inverso do quadrado da distância, a gravidade terrestre e a gravidade celeste estavam relacionadas através de única teoria. A teoria de Newton fez previsões corretas para uma variedade de fenômenos em diferentes escalas, incluindo experimentos terrestres e movimento planetário. A contribuição de Newton para a gravidade, bem como sua enorme contribuição para a física em geral, não se restringe à expressão da lei do inverso do quadrado. Muita atenção deve ser dada à base conceitual de sua teoria gravitacional, que incorpora duas ideias-chave [40, 103]:

- A ideia de espaço absoluto, ou seja, a visão do espaço como uma estrutura fixa; uma arena rígida onde os fenômenos físicos ocorrem.
- A ideia do que mais tarde foi chamado de Princípio de Equivalência Fraca que, expressa na linguagem da teoria newtoniana, afirma que a massa inercial e a massa gravitacional coincidem.

Em 1855, Urbain Le Verrier observou uma precessão de 35 segundos de arco da órbita de Mercúrio e mais tarde, em 1882, Simon Newcomb mediu essa precessão com mais precisão

para 43 segundos de arco. Este fato experimental não foi previsto pela teoria de Newton. Deve-se notar que, Le Verrier inicialmente tentou explicar a precessão dentro do contexto da gravidade newtoniana, atribuindo-a à existência de outro planeta, ainda não observado, cuja órbita seria interna a órbita de Mercúrio. Ele foi aparentemente influenciado pelo fato de que examinar a distorção da órbita planetária de Urano, em 1846, o levou, juntamente com John Couch Adams, porém de forma independente, à descoberta de Netuno e à previsão precisa de sua posição e momento linear. No entanto, esse planeta mais interno nunca foi encontrado [40, 103].

Em 1893, Ernst Mach apresentou o que mais tarde foi chamado por Albert Einstein de princípio Mach. Este é o primeiro ataque construtivo à ideia de Newton de espaço absoluto após o debate do século XVIII entre Gottfried Wilhelm von Leibniz e Samuel Clarke (Clarke estava agindo como porta-voz de Newton) sobre o mesmo assunto, conhecido como *Correspondência Leibniz-Clarke*. A ideia de Mach pode ser considerada bastante vaga em sua formulação inicial, porém, foi trazida aos holofotes da física mais tarde por Einstein nas seguintes linhas: A inércia tem a sua origem numa espécie de interação entre corpos. Isso está obviamente em contradição com as ideias de Newton, segundo as quais a inércia sempre foi relativa ao referencial absoluto do espaço. No entanto, houve outra interpretação mais clara dada por Dicke: A constante gravitacional deve ser uma função da distribuição de massa no Universo. Isso é diferente da ideia de Newton de que a constante gravitacional é universal e imutável. Diante disso, os axiomas básicos de Newton devem que ser reconsiderados [40, 103].

A teoria de Newton foi muito bem sucedida em explicar os vários aspectos da gravidade naquela época. A teoria de Newton também é uma teoria clássica, e descreveu com sucesso o mundo físico ao nosso redor, portanto, ela pode ser considerada como uma teoria muito consistente, embora não necessariamente a mais certa. A questão é: o quão consistente é uma teoria e sim o quão “certa” ela é? A teoria foi capaz de explicar, no intervalo de alguns anos de sua formulação, todas as questões colocadas na época [40].

Porém, foi só em 1905, quando Albert Einstein completou a Relatividade Especial, que a gravidade newtoniana teria que enfrentar um sério desafio. A nova teoria de Einstein, que conseguiu explicar uma série de fenômenos relacionados à física não gravitacional, parecia ser incompatível com a gravidade newtoniana. Movimento relativo e todos os conceitos ligados tinham ido muito além das ideias de Galileu e Newton e parecia que a Relatividade Especial deveria, de alguma forma, ser generalizada para incluir referenciais não-inerciais. Em 1907, Einstein introduziu a equivalência entre gravitação e inércia e usou-a com sucesso para pre-

ver desvio gravitacional para o vermelho. Finalmente, em 1915, ele completou a teoria da relatividade geral, uma generalização da Relatividade Especial que incluía gravidade e qualquer referencial acelerado. A teoria correspondeu perfeitamente ao resultado experimental para a precessão da órbita de Mercúrio, bem como outras descobertas experimentais como a precessão gravitomagnética (1918) e a deflexão gravitacional da luz pelo Sol, medida em 1919, durante um eclipse solar. A relatividade geral tomou o lugar a gravidade newtoniana como teoria da gravidade e continua a ser até agora uma teoria extremamente bem sucedida e bem aceita para fenômenos gravitacionais. Como mencionado anteriormente, e como muitas vezes acontece com teorias físicas, a gravidade newtoniana não perdeu seu apelo aos cientistas. Percebeu-se, é claro, que é de validade limitada em comparação com a relatividade geral, mas ainda é suficiente para a maioria das aplicações relacionadas à gravidade. Além disso, em um regime de campo gravitacional fraco e baixas velocidades, a relatividade geral inevitavelmente reduz-se à gravidade newtoniana. As equações de Newton para a gravidade podem ter sido generalizadas e alguns dos axiomas de sua teoria podem ter sido abandonados, como a noção de um referencial absoluto, mas alguns dos pilares de sua teoria ainda existem nas bases da relatividade geral. O exemplo mais proeminente é o Princípio da Equivalência, em uma formulação mais adequada [40, 103].

A relatividade geral, juntamente com a teoria quântica de campos, são consideradas a espinha dorsal da física moderna. A relatividade geral tem como fundamentação matemática a geometria diferencial. Um dos fatos mais surpreendentes sobre relatividade geral é que quase depois de um século esse fato continua sendo verdade. Como o espaço-tempo se comporta em escalas macroscópicas é melhor descrito pelas Equações de Campo de Einstein [45]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de momento de energia, G é constante de Newton e c é a velocidade da luz.

Embora a relatividade geral seja uma teoria muito bem sucedida, isso não impediu que alternativas fossem propostas. Mesmo um pouco após a publicação da teoria por Einstein, foram feitas propostas para estender a teoria, e incorporá-la em uma teoria maior e mais unificada. Exemplos disso são a teoria da conexão afim de Eddington, a teoria independente em escala de Weyl, e as teorias de dimensões mais altas de Kaluza e Klein [45]. Há muitos mais propostas desde então e há várias modificações da relatividade geral [45]. Para mencionar algumas teorias alternativas da gravidade com campos extras como como teorias escalar-

tensoriais (Teoria de Brans-Dicke), Teorias de Einstein-Éter, Teorias Bimétricas. Também podemos encontrar teorias da gravidade de derivadas superiores, como a gravidade de Horava-Lifschitz.

A teoria de k -essência notabiliza-se por introduzir uma função do termo cinético de um campo escalar [7, 10], evidentemente pertencem à classe das teorias com campos fundamentais inusuais acoplados à gravidade. Essa teoria provou ser uma forma de obter tanto a inflação inicial quanto a expansão acelerada do Universo [9, 10], impulsionada por um termo cinético escalar, em vez de um potencial. Notavelmente, uma espécie de estrutura de k -essência também aparece nas teorias das cordas, por exemplo, na ação Dirac-Born-Infeld, em que o termo cinético do campo escalar tem uma estrutura semelhante à do termo tipo-Maxwell na eletrodinâmica de Born-Infeld [77].

A teoria de Rastall [94] é mais uma generalização da relatividade geral, que relaxa as leis de conservação expressas pela divergência zero do tensor energia-momento T_{μ}^{ν} de matéria. Nesta teoria, a quantidade de $\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\nu}$ está ligada ao gradiente do escalar Ricci, e desta forma a teoria de Rastall pode ser vista como uma implementação fenomenológica de alguns efeitos quânticos em um fundo curvo. A teoria de Rastall leva a resultados de interesse em cosmologia, por exemplo, a evolução de pequenas flutuações de matéria escura é a mesma que no modelo Λ CDM, mas a energia escura é capaz de se aglomerar. Isto pode potencialmente proporcionar uma evolução de não homogeneidades de matéria escura no regime não-linear diferente do modelo CDM padrão [12]. Todo o sucesso do modelo Λ CDM é reproduzido em segundo plano e em níveis de perturbação linear, mas novos efeitos são esperados no regime não-linear, em que o modelo Λ CDM enfrenta algumas dificuldades [15, 37]. Também foi demonstrado [55] que a teoria de Rastall com o tensor energia-momento de um campo escalar canônico, no contexto de perturbações cosmológicas, só é consistente se a matéria estiver presente. Uma observação interessante nesta análise é que o acoplamento do campo escalar com a gravidade leva a equações muito semelhantes às de algumas classes das teorias de Galileons.

Diante desse contexto, o objetivo deste trabalho é aprofundar o estudo das soluções estáticas e esféricamente simétricas encontradas em k -essência [23] e na *gravidade de Rastall* [22]. A teoria de k -essência com uma função de uma lei de potência de um campo escalar e a teoria da gravidade não-conservativa de Rastall com um campo escalar, mostraram ter as mesmas soluções para a métrica sob a suposição de que tanto a métrica como os campos escalares dependem de uma única coordenada. Esta equivalência, que chamaremos de dualidade k - R [35]. Por fim, algo natural de se fazer ao se encontrar uma nova solução é estudar

a sua estabilidade, portanto, perturbamos radialmente [28, 29] ambas as soluções a fim de verificarmos a estabilidade dessas soluções.

Esta tese esta organizada da seguinte forma: no capítulo 2, apresentaremos breve revisão de conceitos matemáticos muito uteis para a relatividade geral, assim como neste trabalho. No capítulo 3, apresentaremos a teoria de k -essência, mostramos alguns exemplos de sua aplicação e cometamos sobre condições de estabilidade para essa teoria. No capítulo 4, apresentaremos a gravidade de Rastall. Como no capítulo anterior apresentamos algumas aplicações dessa teoria. Também, apresentaremos uma tentativa de uma formulação Lagrangiana para a gravidade de Rastall. No capítulo 5, apresentaremos as soluções estáticas e esfericamente simétricas nas teorias de k -essência e Rastall. No capítulo 6, apresentaremos a dualidade k - \mathcal{R} . No capítulo 7, apresentaremos os resultados obtidos no estudo da estabilidade das soluções em k -essência. Ainda neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos na gravidade de Rastall. No capítulo 8, iremos mostrar um conjunto de novas soluções dilatônicas, dentre elas, buracos negros, buracos de minhocas e singularidades. No capítulo 9, traremos um método para o estudo de lentes gravitacionais no limite de campos fortes. Esse método nota-se por permitir calcular o desvio da luz muito próximo da esfera de fótons de forma analítica. No capítulo 10, vamos apresentar o algoritmo de Janis-Newman. Este algoritmo promete transformar soluções estáticas e em soluções com rotação de forma *off-shell* e tem sido utilizado nos últimos anos. Vamos investigar a sua eficácia e se realmente as novas soluções encontradas satisfazem as equações de Einstein.

Preliminar matemática:

breve fundamentação

O objetivo deste capítulo é revisar e fixar as noções matemáticas fundamentais para a relatividade geral de forma breve. Maiores detalhes de tais conceitos podem ser encontrados em livros de Misner, Thorne e Wheeler [81], Wald [107] e Schutz [97], dentre outros

2.1 Variedade e tensores

Matematicamente, uma variedade \mathcal{M} é definida como um espaço que pode ser coberto por uma coleção de cartas, ou seja, mapeamentos um para um de \mathbb{R}^n a \mathcal{M} . O espaço 3D euclidiano pode ser claramente coberto por um desses mapeamentos de \mathbb{R}^3 de forma trivial, enquanto para a superfície de uma esfera realmente precisamos de pelo menos dois mapeamentos de \mathbb{R}^2 (mapas padrão falham em dois pontos, ou seja, os polos, mas um mapa estereográfico falha em apenas um ponto, então precisamos de dois deles). Em linguagem mais física, um mapeamento nada mais é do que um conjunto de coordenadas que rotulam os diferentes pontos em \mathcal{M} .

Uma vez que temos uma variedade, podemos considerar as curvas nesta variedade definidas como funções de um segmento da linha real para a variedade. Uma curva é a função e contém informações sobre quais pontos em \mathcal{M} estamos atravessando e quão rápido estamos nos movendo em relação ao parâmetro. Em termos de um conjunto de coordenadas $\{x^\alpha\}$ em \mathcal{M} , uma curva é representada como

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

em que os índices gregos ($\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$) sempre se referem ao espaço-tempo quadridimensional e podem assumir valores de 0 a 3, enquanto os índices latinos (i, j, k, l, \dots) se referem ao espaço tridimensional e podem assumir valores de 1 a 3.

Os vetores são definidos como operadores diferenciais ao longo de uma determinada curva. A definição precisa é um tanto abstrata e, embora isso seja certamente conveniente

do ponto de vista matemático, aqui nos limitaremos a trabalhar com as componentes de um vetor. As componentes de um vetor \vec{v} tangente a uma curva $x^\alpha(\lambda)$ são dados simplesmente por

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \quad (2.2)$$

Os vetores são definidos em um determinado ponto, e nesse ponto formam um espaço vetorial conhecido como o espaço tangente de \mathcal{M} (deve-se realmente pensar nos vetores como representando apenas deslocamentos infinitesimais em \mathcal{M}). Uma vez que os vetores formam um espaço vetorial, podemos sempre representá-los como combinações lineares de alguns vetores de base $\{\vec{e}_\alpha\}$, em que, agora, α é um índice que identifica os diferentes vetores na base e não suas componentes. Por exemplo, para um vetor arbitrário \vec{v} temos

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha. \quad (2.3)$$

Uma escolha de base comum (embora certamente não seja a única possibilidade) é a chamada *base coordenada* para a qual tomamos como base os vetores que são tangentes às linhas coordenadas, usando como parâmetros as próprias coordenadas. É precisamente nesta base que as componentes de um vetor são dadas como definido acima.

Vamos agora considerar funções de vetores no espaço tangente. Uma função linear real de um vetor é chamada de *1-forma*. Vamos denotar a 1-forma com um til e escrever a ação de 1-forma \tilde{q} em um vetor \vec{v} como $\tilde{q}(\vec{v})$. Não é difícil mostrar que as 1-formas também formam um espaço vetorial da mesma dimensão da variedade - isso é conhecido como espaço tangente dual, e por essa razão as 1-formas são frequentemente chamadas de *covetores*. As componentes de uma 1-forma são definidas a partir a ação da 1-forma nos vetores de base:

$$q_\alpha := \tilde{q}(\vec{e}_\alpha). \quad (2.4)$$

Podemos também definir uma base para o espaço das 1-formas, conhecida como *base dual* $\tilde{\omega}^\alpha$, definidas como aquelas 1-formas tais que, ao agirem sobre os vetores da base \vec{e}_α , nos fornecem a matriz identidade

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad (2.5)$$

em que δ_β^α é o delta de Kronecker. A base dual tem uma propriedade muito importante, a saber, que as componentes de uma 1-forma definida acima são precisamente aqueles que nos permitem escrever a forma única em termos da base dual:

$$\tilde{q} = q_\alpha \tilde{\omega}^\alpha \quad (2.6)$$

Em termos de base de vetores e 1-formas, a ação de uma 1-forma arbitrária \tilde{q} em um vetor \vec{v} pode ser representada como:

$$\vec{q}(\vec{v}) = q_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(v^\beta \vec{e}_\beta) = q_\alpha v^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = q_\alpha v^\beta \delta_\beta^\alpha = q_\alpha v^\alpha. \quad (2.7)$$

A última expressão mostra que a ação de \tilde{q} sobre \vec{v} é apenas a soma das componentes de \tilde{q} vezes as componentes de \vec{v} . Esta operação é chamada de *contração* e nos dá um número real que é de fato independente da coordenada sistema ou base que estamos usando.

Podemos então generalizar esta ideia e pensar em funções reais formadas por m 1-forma e n vetores que são lineares em todos os seus argumentos. Isto é o que define um tensor do tipo $\binom{m}{n}$. As componentes de um tensor são então apenas os valores do tensor aplicados aos elementos da base dos vetores e das 1-formas. Por exemplo, para um tensor T do tipo $\binom{2}{2}$, temos

$$T^{\alpha\beta}_{\mu\nu} := T(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta; \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu). \quad (2.8)$$

Podemos então pensar em vetores e 1-formas como tensores $\binom{1}{0}$ e $\binom{0}{1}$, respectivamente. Uma *função escalar* pode ser considerada como um tensor do tipo $\binom{0}{0}$.

2.2 Métrica

A noção de distância é dada pela existência de um tensor g simétrico e não degenerado que define o produto escalar entre dois vetores

$$g(\vec{v}, \vec{u}) \equiv \vec{v} \cdot \vec{u} = g_{\mu\nu} v^\mu u^\nu, \quad (2.9)$$

com $g_{\mu\nu}$ as componentes de g . Não degenerado quer dizer que se tivermos um vetor \vec{w} tal que $g(\vec{w}, \vec{v}) = 0$ para todo \vec{v} , então devemos necessariamente ter que $\vec{w} = 0$, isto também

implica que as componentes $g_{\mu\nu}$ formam uma matriz invertível. O tensor g dado neste produto escalar é chamado de *tensor métrico* ou *métrica*.

Em particular, podemos calcular a magnitude do vector de deslocamento $d\vec{x}$ entre dois pontos infinitesimalmente fechados na variedade como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.10)$$

Em geral, a *assinatura* de uma métrica é dada pelos sinais dos autovalores de sua matriz de componentes. Chamamos uma métrica positiva definida, ou seja, aquela com todos os autovalores positivos, euclidiana, enquanto uma métrica como a da relatividade especial com assinatura $(-, +, +, +)$ ¹ é chamada de *Lorentziana*. Para uma métrica Lorentziana como a da relatividade geral, classificamos os vetores da mesma forma que os intervalos, ou seja, um vetor pode ser do tipo espacial, nulo ou temporal.

Os índices podem ser levantados ou abaixados usando o tensor métrico da seguinte maneira:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu. \quad (2.11)$$

Podemos facilmente generalizar a noção de elevar e baixar índices para tensores de ordem arbitrária simplesmente contraindo um determinado índice com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ou o seu inverso $g^{\mu\nu}$. Por exemplo:

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}, \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \quad S_{\sigma\mu\nu\rho} = g_{\sigma\lambda} S^\lambda{}_{\mu\nu\rho} \quad (2.12)$$

Dessa forma, pensaremos nos tensores como objetos de uma dada ordem indicada pelo número total de índices, independentemente de onde esses índices estejam, mas a posição dos índices é importante, uma vez que atribuímos valores explícitos às componentes.

¹Podemos ter um outro tipo de assinatura, $(+, -, -, -)$, que será encontrada em algum momento neste trabalho.

2.3 Transformação de coordenadas

Até este ponto, assumimos um sistema de coordenadas específico $\{x^\alpha\}$ e sua base coordenada associada $\{\vec{e}_\alpha\}$. No entanto, devemos também considerar o que acontece quando há uma transformação para um conjunto diferente de coordenadas. Isso é importante porque as coordenadas são, na verdade, rótulos arbitrários para pontos em uma variedade, e podemos querer escolher coordenadas diferentes em circunstâncias diferentes.

De maneira geral, desejamos considerar mudanças arbitrárias de coordenadas da forma $x'^\alpha = f'^\alpha(x^\beta)$. Sob esta mudança de coordenadas, as componentes do vetor de deslocamento transformam-se da seguinte forma:

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta, \quad (2.13)$$

em que introduzimos a matriz Jacobiana $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$. Uma propriedade importante de uma mudança de coordenadas é que, na região de interesse, a transformação deve ser um a um, caso contrário as novas coordenadas seriam inúteis. Isso implica que a matriz Jacobiana é sempre invertível nesta região.

A partir da definição das componentes de um vetor é fácil ver que eles se transformam exatamente como o vetor de deslocamento:

$$v'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta, \quad (2.14)$$

Quando transformamos as coordenadas também mudamos claramente a nossa base coordenada, já que a nova base deve se referir às novas coordenadas. A partir do fato de que um vetor como objeto geométrico é invariante sob transformações coordenadas, temos que

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha = v'^\mu \vec{e}'_\mu, \quad (2.15)$$

a partir do qual podemos derivar a lei de transformação para os próprios vetores de base:

$$\vec{e}'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\beta, \quad (2.16)$$

em que agora $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}$ é o jacobiano da transformação inversa: $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha$.

Podemos facilmente generalizar as leis de transformação para tensores de ordem arbitrária, a regra é simplesmente usar um fator Jacobiano para cada índice, usando a matriz Jacobiana ou a sua inversa dependendo da posição do índice, por exemplo:

$$T'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T^{\mu}_{\nu} \quad (2.17)$$

2.4 Derivada covariante e geodésica

Podemos começar de uma maneira muito abstrata definindo um operador derivada ∇ que transforma tensores $(\begin{smallmatrix} l \\ m \end{smallmatrix})$ em tensores $(\begin{smallmatrix} l \\ m+1 \end{smallmatrix})$. Obtemos um índice inferior extra porque podemos tomar derivadas ao longo de uma direção x^{α} qualquer, uma operação que representamos por ∇_{α} . Este operador deve ter uma série de propriedades para se qualificar como derivada: Deve ser linear, deve obedecer à regra de Leibnitz para a derivada de um produto, deve reduzir-se à derivada parcial padrão para funções escalares, e deve ser simétrica no sentido de que para uma função escalar f obtemos $\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f = \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} f$. Uma vez que temos um operador ∇ podemos considerar, por exemplo, a derivada de um vetor em relação a uma dada coordenada:

$$\nabla_{\alpha} \vec{v} = \nabla_{\alpha} (v^{\beta} \vec{e}_{\beta}) = \nabla_{\alpha} (v^{\beta}) \vec{e}_{\beta} + v^{\beta} \nabla_{\alpha} (\vec{e}_{\beta}) \quad (2.18)$$

$$= \partial_{\alpha} (v^{\beta}) \vec{e}_{\beta} + v^{\beta} \nabla_{\alpha} (\vec{e}_{\beta}) \quad (2.19)$$

em que na última etapa usamos o fato de que as componentes v^{β} são funções escalares. Essa equação mostra que a derivada de um vetor é mais do que apenas a derivada de suas componentes. Devemos também levar em consideração a mudança nos próprios vetores de base.

Agora, se escolhermos uma direção fixa x^{α} , a derivada $\nabla_{\alpha} (\vec{e}_{\beta})$ deve em si também ser um vetor, uma vez que representa a mudança no vetor base ao longo dessa direção. Isso significa que pode ser expresso como uma combinação linear dos próprios vetores da base. Introduzimos os símbolos $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ para denotar os coeficientes de tal combinação linear:

$$\nabla_{\alpha} \vec{e}_{\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \vec{e}_{\mu}. \quad (2.20)$$

Os $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ são chamados de *coeficientes de conexão*, pois nos permitem mapear vetores em pontos diferentes para obter suas derivadas. Usando a definição acima e reorganizando os índices, finalmente descobrimos que

$$\nabla_{\alpha}\vec{v} = \left(\partial_{\alpha}v^{\beta} + v^{\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\right)\vec{e}_{\beta}, \quad (2.21)$$

o que implica que as componentes de $\nabla\vec{v}$ são dados por

$$\nabla_{\alpha}v^{\beta} = \partial_{\alpha}v^{\beta} + v^{\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}. \quad (2.22)$$

Esse tipo de derivada é chamada de *derivada covariante*, e também é comumente denotado por um ponto e vírgula $\nabla_{\alpha}v^{\beta} \equiv v^{\beta}{}_{;\alpha}$ e, de forma análoga, a derivada parcial é frequentemente denotada por uma vírgula $\partial_{\alpha}v^{\beta} \equiv v^{\beta}{}_{,\alpha}$. Podemos usar os resultados acima para mostrar que a derivada covariante de um 1-forma \tilde{p} assume a forma

$$\nabla_{\alpha}p_{\beta} = \partial_{\alpha}p_{\beta} - p_{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}. \quad (2.23)$$

E se agora tomarmos nossa 1-forma como o gradiente de uma função escalar, descobrimos que a conexão é simétrica em relação aos seus índices inferiores.

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \quad (2.24)$$

O mapa definido pelos coeficientes de conexão define a noção de *transporte paralelo*, que nos permite arrastar um vetor ao longo de uma certa curva mantendo-o inalterado. Dizemos que um vetor \vec{v} é transportado paralelamente ao longo de uma curva com a tangente \vec{u} se a seguinte condição for satisfeita:

$$u^{\beta}\nabla_{\beta}v^{\alpha} = 0. \quad (2.25)$$

O transporte paralelo define um mapa único de vetores em um determinado ponto para vetores em pontos infinitesimalmente próximos, e a derivada covariante usa esse mapa para calcular a mudança no campo vetorial.

Quando nossa variedade tem uma métrica, há um requisito extra que podemos solicitar ao nosso operador diferencial, a saber, que o produto escalar de dois vetores seja preservado sob transporte paralelo. Podemos então

$$u^\beta \nabla_\beta (\vec{v} \cdot \vec{w}) = u^\beta \nabla_\beta (g_{\alpha\rho} v^\alpha w^\rho) = 0, \quad (2.26)$$

para qualquer vetor \vec{v} , e qualquer par de vetores $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ de modo que

$$u^\beta \nabla_\beta v^\alpha = u^\beta \nabla_\beta w^\alpha = 0. \quad (2.27)$$

A partir da definição do produto escalar podemos facilmente mostrar que este requisito reduz a

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.28)$$

ou seja, para que o transporte paralelo preserve o produto escalar, a derivada covariante da métrica deve desaparecer (o que significa, em particular, que a operação de levantar e abaixar os índices comuta com as derivadas covariantes). Usando agora a expressão geral para a derivada covariante de um tensor, descobrimos que esta última condição implica que os coeficientes de conexão devem ser dados em termos dos componentes métricos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \quad (2.29)$$

Esses coeficientes de conexão específicos são conhecidos como *símbolos de Christoffel*. Visto que, a partir de agora, sempre usaremos este operador diferencial particular, consideraremos que os coeficientes de conexão e os símbolos de Christoffel são a mesma coisa. Claramente, para o caso do espaço euclidiano em coordenadas cartesianas, os símbolos de Christoffel desaparecem. Mas geralmente não desaparecerão se usarmos coordenadas curvilíneas ou se tivermos uma variedade curva.

Uma aplicação importante da definição de derivada covariante e transporte paralelo tem a ver com a generalização da ideia de uma linha reta para o caso de coordenadas curvilíneas ou variedades curvas. No espaço euclidiano, uma linha reta é uma linha tal que sempre permanece paralela a si mesma. Podemos usar a mesma ideia aqui e definir uma geodésica como uma

curva que transporta paralelamente seu próprio vetor tangente, ou seja, uma curva cujo vetor tangente satisfaz

$$v^\beta \nabla_\beta v^\alpha = 0. \quad (2.30)$$

Uma geodésica é simplesmente uma curva que representa o caminho mais curto entre dois pontos em uma superfície, ou mais geralmente em uma variedade Riemanniana. É uma generalização da noção de uma “linha reta” para um cenário mais geral. A partir da definição acima, podemos reescrever a equação para uma geodésica como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.31)$$

em que λ é o parâmetro associado à curva. Claramente, no espaço euclidiano com coordenadas cartesianas, esta equação simplesmente se reduz a $v^\alpha = \text{constante}$, mas em coordenadas esféricas a equação não é tão simples porque nem todos os símbolos de Christoffel desaparecem.

A lei de transformação para os coeficientes de conexão é dada por

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\tau} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \quad (2.32)$$

Observe que o primeiro termo é precisamente o que esperaríamos das componentes de um tensor, mas há um segundo termo que envolve segundas derivadas da transformação de coordenadas. Está é forma pela qual podemos entender que os símbolos de Christoffel não podem se transformar em tensores.

2.5 Curvatura

O tensor métrico não é em si a maneira mais conveniente de descrever uma variedade curva, pois pode se tornar bastante não trivial, mesmo no espaço euclidiano, considerando as coordenadas curvilíneas. A maneira correta de diferenciar entre variedades planas e curvas é considerar o que acontece com um vetor quando ele é transportado paralelamente em torno de um circuito fechado na variedade. Em uma variedade plana, o vetor não muda quando

isso é feito, enquanto em uma variedade curva ele muda. Isso pode ser visto claramente se pensarmos em mover um vetor na superfície da Terra. Suponha que comecemos no equador com um vetor apontando para o leste. Seguimos para o norte seguindo um meridiano até o pólo norte, depois voltamos para o sul ao longo de outro meridiano que está 90 graus a leste do primeiro até voltarmos ao equador. Finalmente, voltamos ao nosso ponto de partida seguindo o próprio equador. Se fizermos isso, descobriremos que nosso vetor agora aponta para o sul. Ou seja, embora em um transporte paralelo múltiplo curvo defina uma noção local de paralelismo, não há de fato nenhuma noção global de paralelismo.

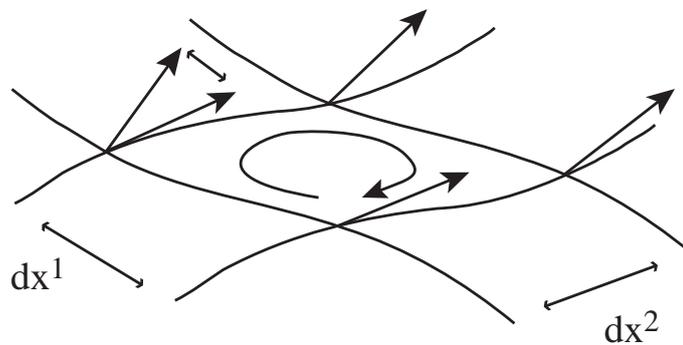


Figura 2.1: Transporte paralelo de um vetor em torno de um circuito infinitesimal fechado formado por linhas de coordenadas. Em uma variedade plana, o vetor não mudará quando isso for feito, enquanto em uma variedade curva, sim. A medida da mudança é dada pelo tensor de curvatura de Riemann [1].

Para definir um tensor associado à curvatura de uma variedade, devemos considerar o transporte paralelo de um vetor ao longo de um circuito fechado infinitesimal. Se tomarmos este circuito fechado como aquele definido pelas próprias linhas de coordenadas (ver Figura 2.1), podemos mostrar que a mudança das componentes de um vetor v à medida que é transportado paralelamente ao longo deste circuito é dada por

$$\delta v^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} dx^\mu dx^\nu v^\beta \quad (2.33)$$

em que $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ são os componentes do tensor de curvatura de Riemann, que são dados em termos dos símbolos de Christoffel da seguinte forma

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (2.34)$$

Como o tensor de Riemann diferente de zero indica a falha de uma noção global de paralelismo, definimos uma variedade *plana* como aquela para a qual o tensor de Riemann desaparece, enquanto uma variedade *curva* aquela para qual o tensor de Riemann é diferente de zero. Observe que para o espaço euclidiano em coordenadas cartesianas, o tensor de Riemann desaparece trivialmente. Na verdade, uma vez que o Riemann é um tensor adequado (um fato que pode facilmente ser visto pela inspeção da equação (2.33)), ele também deve desaparecer em qualquer conjunto curvilíneo de coordenadas. A mesma coisa vale para o espaço-tempo de Minkowski. A definição do tensor de Riemann também implica que, para um vetor arbitrário v_μ , devemos ter

$$\nabla_\mu \nabla_\nu v^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu v^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} v^\beta \quad (2.35)$$

A relação anterior é conhecida como *identidade de Ricci* e mostra que o tensor de Riemann também fornece o comutador das derivadas covariantes de um vetor. Em outras palavras, derivadas covariantes de vetores comutam em uma variedade plana, mas falham em comutar em uma curva. Claro, isso é basicamente a mesma coisa que antes, pois o comutador de derivadas covariantes nos diz a diferença quando transportamos o vetor em paralelo para um ponto infinitesimalmente próximo, seguindo uma linha de coordenadas e depois outra, ou fazendo isso na ordem oposta, que é equivalente a percorrer um circuito fechado.

Note que o tensor Riemann é um tensor de ordem $\binom{1}{3}$, o que significa que no caso do espaço-tempo de quatro dimensões ele tem 256 componentes. No entanto, sua definição implica que ele tem muitas simetrias, em particular:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (2.36)$$

isto é, o tensor de Riemann totalmente covariante, é antissimétrico no primeiro e no segundo par de índices e simétrico com respeito à troca desses dois pares. Além disso, obedece a uma relação cíclica nos últimos três índices da forma

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + R^\alpha{}_{\nu\beta\mu} = 0. \quad (2.37)$$

As simetrias do tensor de Riemann implicam que no final ele possui apenas $n^2(n^2 - 1)/12$ componentes independentes em n dimensões, ou seja, 20 componentes independentes em quatro dimensões. Essas simetrias também implicam que o traço (ou seja, a contração com a métrica) do tensor de Riemann sobre seu primeiro e último par de índices desaparece.

Por outro lado, o traço sobre o primeiro e terceiro índice não desaparece e é usado para definir o tensor de curvatura de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}. \quad (2.38)$$

O tensor de Ricci é claramente simétrico em seus dois índices e em quatro dimensões tem 10 componentes independentes. Observe que, em quatro dimensões, ter o tensor de Ricci nulo não significa que a variedade é plana, pois os 10 componentes restantes de Riemann ainda podem ser diferentes de zero. No entanto, em três dimensões quando o tensor de Ricci é nulo implica que o Riemann é zero, já que, nesse caso, ambos os tensores têm apenas seis componentes independentes e Riemann acaba sendo dado diretamente em termos do tensor de Ricci.

Finalmente, o escalar de Ricci, também conhecido como *escalar curvatura*, é definido como o traço do próprio tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \quad (2.39)$$

Um resultado importante a respeito da forma da métrica e dos símbolos de Christoffel é o fato de que qualquer variedade diferenciável com uma métrica é localmente plana no sentido de que em qualquer ponto da variedade podemos sempre encontrar um conjunto de coordenadas tal que o tensor métrico torna-se diagonal com elementos ± 1 , e todos os símbolos de Christoffel desaparecem nesse ponto.

A partir da definição do tensor Riemann é possível mostrar que as derivadas covariantes deste tensor têm a seguinte propriedade importante:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (2.40)$$

Essas relações são conhecidas como identidades Bianchi, e desempenham um papel muito importante na relatividade geral. Uma de suas consequências mais importantes vem de contraí-las duas vezes, o que resulta em

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (2.41)$$

em que $G^{\mu\nu}$ é o chamado de tensor Einstein definido como

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (2.42)$$

Estamos agora em condição de escrever as equações fundamentais da relatividade geral. Estas são as equações de Einstein, dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

em que $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da fonte que produz o campo gravitacional. Em (2.43) e ao longo do texto, assume-se que a constante gravitacional de Newton e a velocidade da luz são ambos iguais à unidade.

Isso completa nossa breve revisão de alguns dos elementos fundamentais para a relatividade geral, os quais assumiremos daqui em diante.

Teoria de k -essência

Nas últimas décadas, as teorias descritas pela ação com termos cinéticos não canônicos, atraíram um interesse considerável de muitos pesquisadores. Os termos cinéticos não canônicos são bastante comuns em teorias efetivas de campo decorrentes da teoria das cordas, especialmente, em modelos D-branas [39, 63, 64, 98]. Em cosmologia tais teorias foram primeiro estudada no contexto da k -inflação [7], e então, os modelos da k -essência foram sugeridos como *energia escura dinâmica* para resolver o problema da coincidência cósmica [9, 10]. Pode-se também tentar descrever a matéria escura usando a k -essência ou os campos do tachyon [8, 99]. O cenário da condensação fantasma [5], a inflação fantasma [6] e a energia escura fantasma [38] podem ser pensados como os desenvolvimentos mais adicionais destas ideias. Mais recentemente, k -essência também foi usada no contexto da cosmologia quântica [3] em que o cenário quântico resultante revela um ricochete, no qual comportamento clássico é recuperado assintoticamente.

3.1 Teorias escalares-tensoriais

A ação mais geral que se pode escrever para um campo escalar não minimamente acoplado à gravidade.

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \left[\varphi R - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right] dx^4 + L_m(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.1)$$

Pode ser pensada como uma teoria de campo efetiva que captura, em algum limite apropriado, a fenomenologia de uma teoria mais fundamental que contém um campo escalar [102].

As teorias do escalar-tensoriais foram estudadas extensivamente e não é nosso objetivo fazer uma revisão detalhada neste trabalho. Uma revisão detalhada pode ser encontrada em [57, 58].

Essa ação compõe o referencial de Jordan. É bastante comum reescrever essa ação em um referencial conforme diferente, conhecido como referencial de Einstein, no qual o campo escalar (redefinido) se acopla minimamente à gravidade, mas também se acopla à matéria.

A transformação conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi g_{\mu\nu}$, juntamente com a redefinição do campo escalar $4\sqrt{\pi} \varphi d\phi = \sqrt{2\omega(\varphi) + 3} d\phi$, leva a ação (3.1) à forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \left[\frac{\tilde{R}}{16\pi} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - U(\phi) \right] dx^4 + L_m(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.2)$$

O fato de ϕ acoplar minimamente a $\tilde{g}_{\mu\nu}$ no referencial de Einstein torna os cálculos muito mais simples em muitos casos, especialmente in vácuo, em a teoria se torna relatividade geral com um campo escalar minimamente acoplado. O caso minimamente acoplado à gravidade é um caso relativamente trivial da teoria de k -essência, que veremos mais adiante.

No contexto de objetos compactos, soluções de buracos negros em teorias escalares-tensoriais foram encontrados por Bronnikov et al. [21, 27]

3.2 Teoria de k -essência

A teoria de k -essência é baseada em termos cinéticos não lineares de um campo escalar ϕ , minimamente acoplado à gravidade. A ação pode ser expressa como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + F(X, \phi)] + L_m, \quad (3.3)$$

em que $F(X, \phi)$ é uma função em termos do escalar campo ϕ e a sua energia cinética $X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = -\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2$, com $8\pi G = 1$. O termo k -essência foi pela primeira cunhado por Armendariz-Picon et al. [9].

3.2.1 Equação de estado

O tensor energia-momento do campo escalar da ação a seguir

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} [F(X, \phi)] \quad (3.4)$$

Em que o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = F_X \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} F(X, \phi). \quad (3.5)$$

Para encontrar a equação de estado para k -essência vamos fazer uma correspondência com o fluido ideal, em que $T_{\mu\nu}$ assume a forma do tensor momento-energia do fluido ideal, dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}P, \quad (3.6)$$

em que a velocidade é dada por

$$u_\mu = \partial_\mu \phi / \sqrt{2X}, \quad (3.7)$$

a pressão

$$P = F(X, \phi) \quad (3.8)$$

e densidade de energia

$$\rho = \rho(X, \phi) = 2X F_X - F(X, \phi). \quad (3.9)$$

Portanto, a equação do estado de k -essência é

$$\omega_\phi = \frac{P}{\rho} = \frac{F(X, \phi)}{2X F_X - F(X, \phi)}, \quad (3.10)$$

nas quais os subscritos “ X ” ou “ ϕ ” representam a derivada parcial em relação a X ou ϕ , respectivamente.

3.2.2 Condições de estabilidade em k -essência

Em k -essência pode acontecer de o termo cinético linear em X tenha um sinal negativo. Tal campo, chamado de campo escalar fantasma ou fantasma [38], sofre de um problema de instabilidade quântica, a menos que termos de ordem superior em X ou ϕ sejam levados em conta na densidade lagrangiana. No cenário (dilatônico) condensado fantasma é possível evitar essa instabilidade quântica pela presença do termo X^2 [4]. Vamos derivar condições de

estabilidade de k -essência, considerando pequenas flutuações $\delta\phi(t, r)$ em torno de um valor de fundo $\phi_0(t)$. Em seguida, o campo $\phi(t, r)$ pode ser decomposto na forma

$$\phi(t, x) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, r) \quad (3.11)$$

Ao se expandir $F(X, \phi)$ até a segunda ordem, em $\delta\phi$, é simples encontrar a Lagrangiana e então o Hamiltoniana para as flutuações. Portanto, o Hamiltoniana perturbado é dado por

$$\delta\mathcal{H} = (F_X + 2F_{XX})\frac{\delta\dot{\phi}^2}{2} + F_X\frac{\delta\phi'^2}{2} - F_{\phi\phi}\frac{\delta\phi}{2} \quad (3.12)$$

A Hamiltoniana é positiva definida de acordo com as condições

$$F_X + 2F_{XX} \geq 0, \quad (3.13)$$

$$F_X \geq 0, \quad (3.14)$$

$$-F_{\phi\phi} \geq 0. \quad (3.15)$$

A quantidade frequentemente usada quando se discute a estabilidade de perturbações clássica é velocidade do som, definida por [61]

$$c_s^2 = \frac{P_X}{\rho_X} = \frac{F_X}{F_X + 2F_{XX}}. \quad (3.16)$$

As flutuações clássicas podem ser consideradas estáveis quando c_s^2 é positivo, porém, a estabilidade das flutuações quânticas requer que as condições de (3.13) e (3.14) sejam maiores ou iguais a zero. Estas duas condições impedem uma instabilidade relacionada com a presença de estados fantasmas de energia negativa. Se essas condições forem violadas, o vácuo é instável, ocorrendo uma produção catastrófica de fantasmas e pares de fótons [41, 46].

A velocidade de som do campo torna-se superluminal, ou seja, se $c_s^2 > 1$, dependendo dos modelos de k -essência. A propagação superluminal é uma condição que deve ser evitada, pois a causalidade pode ser violada. Embora em [11, 68], podemos encontrar situações em que uma propagação superluminal não necessariamente significa violação da causalidade. Modelos nos quais $c_s^2 < 0$ são tão violentamente instáveis que devem ser rejeitados [108].

3.3 Algumas Aplicações em k -essência

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações em k -essência, principalmente quando a teoria k -essência se apresenta como possível candidato à energia escura.

3.3.1 Teoria de cordas efetiva em baixa energia com termos derivados de ordem superior à X

A teoria de cordas de baixa energia efetiva dá origem a termos derivados de ordem superior provenientes de α' e correções de *loop* para a ação de nível árvore (tree-level) [62]. Vamos considerar a seguinte ação de cordas efetiva de baixa energia na presença de um termo derivado $(\tilde{\nabla}\phi)^4$:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left[B_g(\phi)\tilde{R} + B_\phi^{(0)}(\phi)(\nabla\phi)^2 + \alpha' c_1 B_\phi^{(1)}(\phi)(\nabla\phi)^4 + \mathcal{O}(\alpha'^2) \right], \quad (3.17)$$

em que \tilde{R} é o escalar de curvatura e ϕ é o campo dilatônico (em quatro dimensões). Os efeitos de loop dilaton-dependentes, bem como as correções não perturbativas são codificados, na menor ordem de aproximação em α'^1 , nas funções de acoplamento $B_i(\phi)$ ($i = g, \phi, \dots$). Na região de acoplamento fraco da teoria, quando o acoplamento da corda $g_s^2 \equiv e^\phi$ é muito menor do que um, a função $B_i(\phi)$ pode ser expressa por uma expansão da forma

$$B_i(\phi) = e^{-\phi} + c_0 + c_1 e^\phi + \dots, \quad e^\phi \ll 1. \quad (3.18)$$

Esse tipo estrutura dilatônica foi útil para encontrar soluções de buracos negros quando ocorre um acoplamento de uma função de um campo escalar com o campo eletromagnético [60, 66].

O potencial $V(\phi)$ e a ação dos campos de matéria S_m foram considerados nulos. A utilização do símbolo (\sim) indica que as quantidades estão no referencial das cordas. Realizando um transformação conforme, $g_{\mu\nu} = B_g \tilde{g}_{\mu\nu}$, podemos escrever a ação acima no referencial de Einstein:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + K(\phi)X + L(\phi)X^2 + \dots \right], \quad (3.19)$$

¹O parâmetro α' é chamado de parâmetro universal inclinação de Regge.

em que

$$K(\phi) = 3 \left(\frac{1}{B_g} \frac{dB_g}{d\phi} \right)^2 - 2 \frac{B_\phi^{(0)}}{B_g}, \quad L(\phi) = 2c_1 \frac{\alpha'}{\kappa^2} B_\phi^{(0)}(\phi). \quad (3.20)$$

Logo, a ação (3.18) é agora uma ação de k -essência, com

$$F(X, \phi) = K(\phi)X + L(\phi)X^2 \quad (3.21)$$

3.3.2 Teorias de Dirac–Born-Infeld (DBI)

Um campo escalar pode ser desacelerado através do chamado mecanismo de “Deceleration” [2, 100], no qual o campo ϕ parametriza uma direção no ramo de Coulomb aproximado do sistema na teoria supersimétrica $N = 4$ de Yang-Mills. A velocidade do campo é restringida pela causalidade do lado da gravidade da correspondência Anti de Sitter/Teoria de Campo Conforme (AdS-CFT)² [78]. Essa dinâmica é bem descrita pela ação DBI para uma parede de domínio da D3-brana movendo-se na direção radial do espaço-tempo de AdS₅. A densidade Lagrangiana que descreve esta teoria é dada por [2, 100]

$$P = -f(\phi)^{-1} \sqrt{1 - 2f(\phi)X} + f(\phi)^{-1} - V(\phi), \quad (3.22)$$

em que $V(\phi)$ é um potencial de campo e $f(\phi)$ é um fator de dobra da garganta tipo-AdS. Para a garganta AdS temos $f(\phi) = \lambda/\phi^4$, em que λ é o acoplamento 't Hooft relacionado com o acoplamento Yang-Mills g_{YM}^2 através da relação $\lambda = g_{YM}^2 N$ no grande limite N da teoria de campo. No limite não-relativístico, $2f(\phi)X \ll 1$, a densidade Lagrangiana (3.22) reduz a $P = X - V(\phi)$, que corresponde a um campo escalar canônico. Na configuração cosmológica, é possível perceber a expansão acelerada do Universo mesmo quando o fator γ definido por $\gamma = 1/\sqrt{1 - f(\phi)\dot{\phi}^2}$ é muito maior que 1 (ou seja $f(\phi)\dot{\phi}^2 \simeq 1$). Esta situação é diferente do campo taquiônico em que a condição $\dot{\phi}^2 \ll 1$ é necessária para a aceleração cósmica. A aplicação das teorias DBI à energia escura tem sido discutida em [70, 79].

²Do inglês, Conformal Field Theory

A gravidade de Rastall

Uma propriedade fundamental da Relatividade Geral é que a divergência do tensor energia-momento deve ser nula. Entretanto, a gravidade de Rastall, desenvolvida originalmente por [94], se apresenta como uma teoria modificada da gravidade, em que a divergência do tensor energia-momento não é nula, levando a um acoplamento não mínimo incomum entre matéria e geometria.

A gravidade de Rastall tem atraído atenção de pesquisadores em Cosmologia e Gravitacão. No contexto da cosmologia temos, *Rastall Cosmology* [56] apresenta novos recursos interessantes e inesperados. Já em *Rastall Cosmology and the Λ CDM Model* [12] mostram que a cosmologia de Rastall e o modelo Λ CDM parecem ser distinguíveis apenas no regime não linear da evolução das perturbações cósmicas. No contexto de objetos compactos, temos *Neutron Stars in Rastall Gravity* [87] apresenta resultados que restringem γ^1 (parâmetro da teoria de Rastall) a uma pequena faixa de valores. Resultados interessantes foram obtidos utilizando Rastall em uma configuração estática e esfericamente simétrica, juntamente com a forma canônica do tensor energia-momento de um campos escalar ϕ [22]. Curiosamente, estas ultimas soluções são idênticas às encontradas em k -essência [23] no mesmo tipo configuração. Devido a esse fato, a dualidade entre k -essência e Rastall foi estudada em Bronnikov et al. [35].

4.1 Rastall

Na relatividade geral, assume-se uma lei de conservação que conduz a um tensor energia-momento livre de divergências, ou seja

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (4.1)$$

¹Veremos durante este trabalho a adoção de parâmetros diferentes para a teoria de Rastall.

Diferente da relatividade geral, a gravidade de Rastall propõe uma teoria na qual a divergência do tensor energia-momento é não-nula, isto é

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \kappa \nabla_\nu R, \quad (4.2)$$

em que κ é uma constante e R é o escalar Ricci. No entanto, mesmo na gravidade de Rastall, temos

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad (4.3)$$

sendo que

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (4.4)$$

é o tensor de Einstein. É importante ressaltar que a modificação de Rastall ocorre apenas na parte da matéria da teoria e deixa a parte geométrica das equações de campo inalteradas. Esta hipótese baseia-se no fato de que a divergência não-nula do tensor de energia-momento ainda não foi descartada experimentalmente, então pode ser questionável pelo menos em um espaço-tempo curvo. Então, equações de campo de Rastall são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{\gamma - 1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (4.5)$$

em que $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é o traço de tensor de energia-momento e γ é uma constante adimensional conectada a κ . Estas equações de campo reduzem-se a equações gerais de campo da relatividade no limite em que $\gamma = 1$.

Uma vez que as identidades Bianchi ainda são válidas, quando a divergência da equação (4.5) é tomada, a divergência do tensor de energia-momento torna-se

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \nabla_\nu T. \quad (4.6)$$

A relação entre κ e γ é dada por

$$\gamma = \frac{1 - 3\kappa}{1 - 2\kappa}. \quad (4.7)$$

Para obter um tensor de momento de energia sem divergência, um novo tensor é definido como

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) g_{\mu\nu} T, \quad (4.8)$$

de tal forma que as equações de campo se tornam

$$G_{\mu\nu} = k\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

com $\tilde{T}_{\mu\nu}$ sendo uma quantidade covariantemente conservada.

Uma crítica à teoria da gravidade de Rastall é que ela não tem uma formulação Lagrangiana amplamente aceita e completa. Na seção 4.3 duas abordagens diferentes são apresentadas e discutidas como possíveis formulações Lagrangianas para a gravidade de Rastall.

Uma polêmica em torno da teoria de Rastall foi criada quando Visser [106] afirmou que a gravidade de Rastall é equivalente a gravidade de Einstein. Essa afirmação causou muitas críticas e, talvez, a mais contundente foi feita por Darabi et al. [47]. Darabi mostrou cenários em que as duas teorias não são equivalentes e que a gravidade de Rastall parece ser uma teoria estendida da gravidade para abordar os desafios da cosmologia observacional e da gravidade quântica.

4.2 Algumas aplicações em Rastall

4.2.1 Cosmologia em Rastall e o modelo Λ

Para construir um modelo de cosmologia em Rastall que explique a era dominada pela matéria e ao mesmo tempo a atual fase de expansão acelerada do universo, considerou-se um modelo composto de dois fluidos [12]. A primeira componente é composta de matéria sem pressão, ou seja, matéria escura fria mais bárions, com densidade ρ_m , enquanto a segunda obedece à equação de estado de vácuo, $p_x = -\rho_x$. Os subscritos m e x estão relacionados com

as quantidades matéria e energia escura, respectivamente. Assim sendo, podemos escrever, baseado nas equações (4.5) e (4.6)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k \left[T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^x - \frac{\gamma - 1}{2}(T_m + T_x) \right], \quad (4.10)$$

$$(T_m^{\mu\nu} + T_x^{\mu\nu})_{;\mu} = \frac{\gamma - 1}{2}(T_m + T_x)_{;\nu}. \quad (4.11)$$

De acordo com os autores, foi possível mostrar que existe um subconjunto de cenários cosmológicos baseados no tensor energia-momento não-conservativo de Rastall que são equivalentes à cosmologia Λ CDM, exceto por um aspecto: a energia do vácuo pode aglomerar. Os modelos de Rastall e Λ CDM parecem ser distinguíveis apenas no regime não linear das perturbações cósmicas, embora uma pesquisa mais profunda ainda deva ser feita.

4.2.2 Estrela de Nêutrons em Rastall

Estrelas de nêutrons são objetos altamente compactos com massas comparáveis a do nosso Sol, mas densidade da ordem da densidade nuclear. A estrutura das estrelas de nêutrons é descrita pela a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M}\right)}{1 - \frac{2GM}{r}}, \quad (4.12)$$

que representa a estrutura de um corpo com simetria esférica de material isotrópico que está em equilíbrio gravitacional estático, modelado pela relatividade geral

Uma maneira usual de se representar um corpo de forma esférica e estático, tal como uma estrela, é por meio da métrica genérica

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.13)$$

O conteúdo material de um fluido ideal, sem campo magnético e rotação, está contido no seguinte tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}p, \quad (4.14)$$

Podemos apresentar a gravidade de Rastall da seguinte forma

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{1-\lambda}{16\pi G} \nabla_\nu R, \quad (4.15)$$

de tal maneira que a relatividade geral é recuperada quando $\lambda = 1$. Isto dito, as equações de campo da gravidade de Rastall são dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

A versão da equação de TOV, na gravidade de Rastall, pode ser escrita de uma forma bastante similar à sua forma usual

$$\frac{d\tilde{p}}{dr} = -\frac{G\tilde{M}\tilde{\rho}}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \tilde{p}}{\tilde{M}}\right)}{1 - \frac{2G\tilde{M}}{r}}, \quad (4.17)$$

com

$$\frac{d\tilde{M}}{dr} = 4\pi r^2 \tilde{\rho}, \quad (4.18)$$

na qual as novas quantidades efetivas são identificadas por meio do símbolo (\sim) e as novas quantidades \tilde{p} e $\tilde{\rho}$ estão relacionadas com p e ρ da seguinte forma:

$$\tilde{\rho} = \alpha_1 \rho + 3\alpha_2 p \quad \text{e} \quad \tilde{p} = \alpha_2 \rho + \alpha_3 p, \quad (4.19)$$

em que

$$\alpha_1 = \frac{2+3\eta}{2+4\eta}, \quad \alpha_2 = \frac{\eta}{2+4\eta} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{2+\eta}{2+4\eta}. \quad (4.20)$$

A constante η assume o papel do termo que parametriza desvios da relatividade geral, por meio de $\lambda = 1 + \eta$.

Os resultados obtidos podem indicar que a teoria de Rastall ainda é compatível com as observações, no que diz respeito estrelas de nêutrons, para uma pequena faixa de valores de γ (parâmetro da teoria de Rastall), porém, esse intervalo pode se tornar menor no futuro.

4.3 Formulação Lagrangiana para teoria de Rastall

As equações de campo da teoria da gravidade de Rastall foram obtidas de maneira ad hoc por Rastall, ou seja, essas equações não vêm de um princípio variacional. Nesta seção, será apresentado e discutido um formalismo lagrangiano para essa teoria, baseando-se no trabalho de De Moraes e Santos [50]. Serão apresentadas duas teorias da gravitação que levam à gravidade de Rastall como um caso particular. Essas teorias de gravidade modificadas têm como uma característica importante: o tensor de momento de energia da matéria pode não ser covariantemente conservado.

4.3.1 Gravitação $F(R, T)$

A ação que descreve o modelo de gravidade $F(R, T)$ [71] é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [F(R, T) + 16\pi \mathcal{L}_m], \quad (4.21)$$

na qual $F(R, T)$ é uma função do escalar R de Ricci e do traço do tensor de momento de energia $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ e \mathcal{L}_m é a densidade Lagrangiana da matéria. Para obter as equações de campo, é utilizado o princípio variacional, ou seja, $\delta S = 0$. Variando a ação S em relação aos componentes do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, temos

$$\delta = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta \left\{ \sqrt{-g} [F(R, T) + 16\pi \mathcal{L}_m] \right\} \quad (4.22)$$

em que

$$\delta \left[\sqrt{-g} F(R, T) \right] = F(R, T) \delta \left(\sqrt{-g} \right) + \sqrt{-g} \delta [F(R, T)], \quad (4.23)$$

$$\delta \left[\sqrt{-g} \mathcal{L}_m \right] = \mathcal{L}_m \delta \left(\sqrt{-g} \right) + \sqrt{-g} \delta (\mathcal{L}_m) \quad (4.24)$$

Usando

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

a equação (4.23) pode ser reescrita

$$\delta[\sqrt{-g} F(R, T)] = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} F(R, T)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta[F(R, T)], \quad (4.26)$$

ainda,

$$\delta[F(R, T)] = F_R\delta R + F_T\delta T, \quad (4.27)$$

em que $F_R = \frac{\partial F(R, T)}{\partial R}$ e $F_T = \frac{\partial F(R, T)}{\partial T}$, lembrando ainda que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, obtemos ainda,

$$\delta[F(R, T)] = F_R(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}) + F_T\delta T \quad (4.28)$$

Variando o traço do tensor de energia-momento em relação ao tensor métrico que obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta(g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\alpha\beta} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}, \\ &= T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que

$$\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.30)$$

Considerando que o tensor de energia-momento da matéria é definido como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.31)$$

a variação da ação em relação ao tensor métrico torna-se

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{16\pi} \int \left[F_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R, T) + (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) F_T + \right. \\ \left. - 8\pi T_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} F_R \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Usando a definição de ricci tensor,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda, \quad (4.33)$$

em que $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ é o símbolo de Christoffel e, portanto, a variação do tensor de Ricci produz

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\rho\nu}^{\rho}). \quad (4.34)$$

Dessa forma, podemos reescrever a expressão (4.32)

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \left\{ \delta g^{\mu\nu} \left[F_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R, T) + (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) F_T + \right. \right. \\ \left. \left. - 8\pi T_{\mu\nu} \right] + g^{\alpha\beta} \left[\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}) - \nabla_{\alpha}(\delta\Gamma_{\rho\beta}^{\rho}) \right] F_R \right\} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.35)$$

Agora, vamos nos concentrar a seguinte parte da expressão anterior

$$I = \int \left\{ g^{\alpha\beta} \left[\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}) - \nabla_{\alpha}(\delta\Gamma_{\rho\beta}^{\rho}) \right] F_R \right\} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.36)$$

Para simplificar os cálculos, vamos separar a expressão (4.36) em duas partes

$$I_1 = \int \left[\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}) F_R \right] d^4x, \quad (4.37)$$

$$I_2 = - \int \left[\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}(\delta\Gamma_{\rho\beta}^{\rho}) F_R \right] d^4x. \quad (4.38)$$

Calculando separadamente cada uma das partes anteriores, vamos usar a seguinte relação algébrica

$$\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}) F_R = \nabla_{\rho}(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} F_R) - \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \nabla_{\rho}(F_R), \quad (4.39)$$

assim, a equação (4.37) é reescrita na seguinte forma

$$I_1 = \int \nabla_{\rho}(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} F_R) d^4x - \int \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \nabla_{\rho}(F_R) d^4x, \quad (4.40)$$

Usando o teorema de Gauss, o primeiro termo pode ser escrito como uma integral de superfície, ou seja,

$$\int_R \nabla_{\rho}(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} F_R) d^4x = \int_{\delta R} n_{\rho} V^{\rho} d\sigma, \quad (4.41)$$

em que $V^\rho = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\rho F_R$ e n_ρ é normal a δR . Observe que, V^ρ é um campo vetorial sobre uma região R e sua fronteira que chamamos δR . A integral sobre essa superfície é zero, portanto

$$I_1 = - \int \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\rho \nabla_\rho(F_R) d^4x, \quad (4.42)$$

e, analogamente

$$I_2 = \int \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\rho\beta}^\rho \nabla_\alpha(F_R) d^4x, \quad (4.43)$$

A variação do símbolo de Christoffel é dada por

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_\mu\delta g_{\rho\mu} + \nabla_\nu\delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}) \quad (4.44)$$

e

$$\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\nabla_\nu\delta g_{\lambda\rho}. \quad (4.45)$$

Isto posto, a equação (4.43) torna-se

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(F_R)g^{\lambda\rho}\nabla_\beta\delta g_{\lambda\rho} d^4x. \quad (4.46)$$

Considerando

$$\delta(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = \delta(g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.47)$$

como também, a compatibilidade da métrica

$$\nabla_\mu g^{\mu\nu} = \nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0, \quad (4.48)$$

temos agora

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}\nabla_\beta(F_R)\nabla_\alpha\delta g^{\lambda\rho} d^4x, \quad (4.49)$$

Usando, agora, a relação

$$g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}\nabla_\beta(F_R)\nabla_\alpha\delta g^{\lambda\rho} = \nabla_\alpha[g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}\nabla_\beta(F_R)\delta g^{\lambda\rho}] - g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}\nabla_\alpha\nabla_\beta(F_R)\delta g^{\lambda\rho}. \quad (4.50)$$

Reescrevendo a expressão (4.49), temos

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \left\{ \nabla_\alpha \left[g^{\alpha\beta} g_{\lambda\rho} \nabla_\beta (F_R) \delta g^{\lambda\rho} \right] - g^{\alpha\beta} g_{\lambda\rho} \nabla_\alpha \nabla_\beta (F_R) \delta g^{\lambda\rho} \right\} d^4x, \quad (4.51)$$

Aplicando o teorema de Gauss, novamente, no primeiro termo da expressão anterior, este se transforma em uma integral de superfície nula, obtendo assim, uma expressão mais simples, na seguinte forma

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\rho} \nabla_\alpha \nabla_\beta (F_R) \delta g^{\lambda\rho} d^4x. \quad (4.52)$$

Voltemos, agora, a atenção para expressão I_1 . Usando a equação (4.44)

$$I_1 = - \int \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\nabla_\alpha \delta g_{\lambda\beta} + \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} - \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\beta}) \right] \nabla_\rho (F_R) d^4x, \quad (4.53)$$

porém,

$$g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \nabla_\alpha \delta g_{\lambda\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\beta}, \quad (4.54)$$

que resulta em

$$2g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\beta}, \quad (4.55)$$

substituindo na equação (4.53), temos

$$I_1 = - \int \sqrt{-g} \nabla_\rho (F_R) g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} d^4x + \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \nabla_\rho (F_R) g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\beta} d^4x. \quad (4.56)$$

Usando as relações

$$\begin{aligned} \delta (g^{\alpha\beta} g^{\rho\gamma} g_{\alpha\gamma}) &= g^{\alpha\beta} g^{\rho\gamma} \delta g_{\alpha\gamma} + g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} \delta g^{\rho\gamma} + g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} \delta g^{\rho\gamma}, \\ \delta (g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\rho) &= g^{\alpha\beta} g^{\rho\gamma} \delta g_{\alpha\gamma} + \delta_\gamma^\beta \delta g^{\rho\gamma} + \delta_\gamma^\beta \delta g^{\rho\gamma}, \\ \delta g^{\alpha\rho} \delta_\alpha^\rho &= g^{\alpha\beta} g^{\rho\gamma} \delta g_{\alpha\gamma} + 2\delta g^{\beta\rho}, \\ g^{\alpha\beta} g^{\rho\gamma} \delta g_{\alpha\gamma} &= -\delta g^{\beta\rho}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

no primeiro termo, e

$$\begin{aligned}\delta(g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}) &= g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = 0, \\ g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{4.58}$$

no segundo termo da expressão (4.56), obtemos

$$I_1 = \int \sqrt{-g}\nabla_\rho(F_R)\nabla_\beta\delta g^{\beta\rho} d^4x - \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}\nabla_\rho(F_R)g_{\alpha\beta}g^{\rho\lambda}\nabla_\lambda\delta g^{\alpha\beta} d^4x.\tag{4.59}$$

Seguindo os mesmos passos usados para encontrar a expressão I_2 e aplicando o teorema de Gauss na expressão (4.59), temos

$$I_1 = - \int \sqrt{-g}\nabla_\beta\nabla_\rho(F_R)\delta g^{\beta\rho} d^4x + \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}g_{\rho\lambda}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(F_R)\delta g^{\rho\lambda} d^4x.\tag{4.60}$$

Unindo as partes I_1 , dada pela equação (4.60), e I_2 , dada pela equação (4.52), obtemos

$$\begin{aligned}I &= \int \sqrt{-g} [g_{\rho\lambda}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(F_R)\delta g^{\rho\lambda} - \nabla_\beta\nabla_\rho(F_R)\delta g^{\beta\rho}] d^4x, \\ &= \int \sqrt{-g} [(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\beta\nabla_\rho)F_R]\delta g^{\mu\nu} d^4x,\end{aligned}\tag{4.61}$$

em que $\square = \nabla_\mu\nabla^\mu$ é o operador covariante d'Alembertiano. Portanto, da equação (4.35), as equações de campo são obtidas na seguinte forma

$$R_{\mu\nu}F_R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R, T) + (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})F_T + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\beta\nabla_\rho)F_R = 8\pi T_{\mu\nu}.\tag{4.62}$$

A relatividade geral é recuperada assumindo $F(R, T) = F(R) = R$. Multiplicando a equação (4.62) pelo inverso da métrica, $g^{\mu\nu}$, podemos obter o seu traço

$$RF_R - 2F(R, T) + 3\square F_R = 8\pi T_{\mu\nu} - (T + \Theta)F_T,\tag{4.63}$$

na qual, $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ e $\Theta = g^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu}$.

Podemos reproduzir a teoria de Rastall a partir do caso particular

$$F(R, T) = (1 - \alpha)R + 8\pi\alpha T,\tag{4.64}$$

em que α é um parâmetro livre. Usando a equação (4.64) as equações de campo tornam-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{1-\alpha} \left[(1-\alpha)T_{\mu\nu} + \alpha \left(\frac{g_{\mu\nu}}{2}T - \Theta_{\mu\nu} \right) \right] \quad (4.65)$$

Tomando a divergência dessa equação e usando a identidade Bianchi, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, obtemos

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \nabla_\nu T^*, \quad (4.66)$$

em que $T^* \equiv g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}T - 2\Theta_{\mu\nu})$. Escolhendo o parâmetro α como

$$\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma-2} \quad (4.67)$$

encontramos exatamente a proposta de Rastall

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\gamma-1}{2} \nabla_\nu T^*, \quad (4.68)$$

Note que, quando $\gamma = 1$ a relatividade geral é recuperada. Portanto, a teoria da gravidade Rastall pode ser construída como um caso particular da gravidade $F(R, T)$. Uma observação importante, para ser rigoroso, a equação (4.68) é uma condição do tipo Rastall, uma vez que $\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}$ não é zero. No entanto, as equações (4.6) e (4.68) possuem a mesma interpretação, ou seja, a não-conservação do tensor energia-momento.

Como $F(R, T)$, a partir da equação (4.64), que supostamente levaria a gravidade de Rastall, se comporta para algumas Lagrangianas \mathcal{L}_m específicas? Esse exercício será feito a seguir.

Eletrromagnetismo

De acordo com Harko et al. [72], a Lagrangiana para o eletromagnetismo no vácuo

$$\mathcal{L}_m = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.69)$$

resulta em

$$\Theta_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}. \quad (4.70)$$

Usando esta relação e o fato de que o tensor energia-momento eletromagnético tem traço nulo, a equação de campo (4.65), para este caso, torna-se

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\alpha} T_{\mu\nu} , \quad (4.71)$$

e assim, a conservação do tensor energia-momento é

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \quad (4.72)$$

Ou seja, isso é essencialmente relatividade geral com uma redefinição trivial do campo eletromagnético. Este resultado era esperado desde o início devido ao fato de o campo eletromagnético ter traço nulo.

Campo escalar

A Lagrangiana para um campo escalar de auto-interação ϕ , sujeito a um potencial genérico $V(\phi)$ é

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \phi^{i\rho} \phi_{i\rho} + V(\phi) , \quad (4.73)$$

e seu tensor correspondente $\Theta_{\mu\nu}$ é

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - g_{\mu\nu} V . \quad (4.74)$$

Portanto, as equações de campo, e a conservação do tensor energia-momento, para este caso são dadas por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\alpha} [(1 + \beta)T_{\mu\nu} - \beta g_{\mu\nu} T + \beta g_{\mu\nu} V] , \quad (4.75)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\beta}{\beta - 1} V_{;\nu} . \quad (4.76)$$

Este resultado pode ser verificado inserindo a equação (4.73), na ação, conforme fornecido na equação (4.21), com a escolha particular da equação (4.64).

Reescrevemos essas duas equações em termos do campo escalar ϕ a fim de visualizar melhor as diferenças em relação à relatividade geral:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\alpha} \left[(1 + \beta) \left(\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda} \right) + (1 + 2\beta) g_{\mu\nu} V \right], \quad (4.77)$$

$$\square\phi = -\frac{1 + 2\beta}{1 + \beta} V_{\phi}, \quad (4.78)$$

com V_{ϕ} representando a derivada em relação a ϕ . A partir dessas equações, pode-se ver que relatividade geral pode ser recuperado por uma redefinição trivial do campo escalar e o potencial como

$$\sqrt{\frac{1 + \beta}{\alpha}} \phi \rightarrow \phi, \quad \frac{1 + 2\beta}{\alpha} V \rightarrow V. \quad (4.79)$$

Um aspecto, entretanto, deve ser destacado: dependendo do sinal de $(1 + \beta)/\alpha$, um campo escalar comum pode se tornar fantasma e um potencial atrativo pode se tornar repulsivo. Mesmo assim, a estrutura geral não é a mesma conforme encontrado no caso de Rastall correspondente.

Fluido perfeito

O tensor energia-momento de um fluido perfeito é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}, \quad (4.80)$$

com o uso da definição do tensor $\Theta_{\mu\nu}$ na equação (4.30), obtemos

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - pg_{\mu\nu}. \quad (4.81)$$

Com esta expressão, as equações de campo e a conservação do tensor energia-momento tornam-se

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[\frac{1 + \beta}{\alpha} T_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2\alpha} g_{\mu\nu} (T + 2p) \right], \quad (4.82)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = -\frac{\beta}{2(1 + \beta)} (T^{;\nu} + 2p^{;\nu}). \quad (4.83)$$

Apesar de a equação de Einstein modificada não recuperar a relatividade geral, ela também não pode recuperar a estrutura necessária para a teoria de Rastall.

Como vimos, nenhum dos três casos não possuem relação com a gravidade de Rastall.

4.3.2 Gravitação $F(R, \mathcal{L}_m)$

Outra proposta para obter a gravidade de Rastall é através das equações de campo de $F(R, \mathcal{L}_m)$ gravidade. A ação para essa teoria modificada da gravidade assume a seguinte forma

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [F(R, \mathcal{L}_m)], \quad (4.84)$$

em que $F(R, \mathcal{L}_m)$ é uma função arbitrária do R escalar de Ricci e da densidade Lagrangiana correspondente à fonte da matéria, \mathcal{L}_m .

Vamos supor que a densidade Lagrangiana \mathcal{L}_m da matéria dependa apenas das componentes da métrica, e não de suas derivadas. Então, o tensor de momento de energia é dado por

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (4.85)$$

Variando a ação (4.84) em relação à métrica, obtemos

$$\delta \mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \left[F_R \delta R + F_{(\mathcal{L}_m)} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R, \mathcal{L}_m) \delta g^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.86)$$

em que $F_{(\mathcal{L}_m)} = \partial F(R, \mathcal{L}_m) / \partial \mathcal{L}_m$. Usando as variações do tensor de Ricci (4.34) e dos símbolos de Christoffel (4.44), a variação da ação do campo gravitacional se torna

$$\delta \mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \left[F_R R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla^\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) F_R + F_{(\mathcal{L}_m)} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R, \mathcal{L}_m) \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.87)$$

Seguindo etapas semelhantes às desenvolvidas na seção anterior e com o uso da definição do tensor de momento de energia, equação (4.31), as equações de campo são dadas por

$$F_R R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) F_R + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [F_{(\mathcal{L}_m)} \mathcal{L}_m - F(R, \mathcal{L}_m)] = \frac{1}{2} F_{(\mathcal{L}_m)} T_{\mu\nu} \quad (4.88)$$

Ao adotar um caso específico

$$F(R, \mathcal{L}_m) = \alpha R + \mathcal{G}(\mathcal{L}_m), \quad (4.89)$$

em que α é uma constante arbitrária a ser determinada e $\mathcal{G}(\mathcal{L}_m)$ é uma função Lagrangiana da matéria, as equações de campo (4.88) tornam-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2\alpha} [\mathcal{G}' T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (\mathcal{G} - \mathcal{G}' \mathcal{L}_m)], \quad (4.90)$$

na qual, \mathcal{G}' é a derivada de $\mathcal{G}(\mathcal{L}_m)$ em relação à Lagrangiana da matéria, \mathcal{L}_m .

Aplicando o divergente ∇_μ e usando a identidade Bianchi, obtemos

$$\frac{1}{2\alpha} \nabla^\mu [\mathcal{G}' T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (\mathcal{G} - \mathcal{G}' \mathcal{L}_m)] = 0. \quad (4.91)$$

Esse resultado leva à gravidade de Rastall se

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(ef)} = \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \nabla_\nu T, \quad (4.92)$$

em que

$$T_{\mu\nu}^{(ef)} = \frac{1}{2\alpha} [\mathcal{G}' T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (\mathcal{G} - \mathcal{G}' \mathcal{L}_m)]. \quad (4.93)$$

De acordo com [50], a condição tipo-Rastall, em que a conservação do tensor energia-momento não é satisfeita, é contemplada por qualquer função $\mathcal{G}(\mathcal{L}_m)$. Os resultados obtidos aqui mostram que a teoria da gravidade de Rastall emerge como um caso particular de teorias de gravidade modificadas. Portanto, suas equações de campo têm base em um princípio variacional.

No entanto, através da inspeção da equação (4.90), vemos que a única maneira de recuperar uma estrutura semelhante à equação (4.5), é definir a função que multiplica $T_{\mu\nu}$

como uma constante, ou seja, $\mathcal{G}' = \text{constante}$. Com esta escolha ficamos com $\mathcal{G} = c_1 \times \mathcal{L}_m + c_2$, em que c_1 e c_2 são constantes, recupera relatividade geral. Dependências não lineares de \mathcal{G} em \mathcal{L}_m levam a um forte afastamento da relatividade geral, mas também da gravidade de Rastall.

Soluções de k -essência e Rastall em espaços esfericamente simétricos

A simetria esférica é uma escolha natural para descrever corpos isolados simples e configurações semelhantes a estrelas [36]. Os espaços-tempos esfericamente simétricos são invariantes sob rotação espacial. As funções métricas, neste caso, dependem da coordenada radial e da coordenada temporal. No caso de um espaço-tempo estático, as funções métricas não dependem do tempo. O espaço-tempo estático e esfericamente simétrico é amplamente utilizado em física para obter soluções analíticas e numéricas para as equações de campo de Einstein na presença de diferentes tipos de campos. Uma das soluções estáticas esfericamente simétricas mais celebradas das equações de Einstein é a solução de Schwarzschild. Soluções estáticas e esfericamente simétricas iguais forma encontradas nas teorias de k -essência [23] e Rastall [22]. Vamos apresentar brevemente essas soluções nas próximas seções.

5.1 Espaços esfericamente simétricos em k -essência

O estudo das propriedades das configurações estáticas e com simetria esférica em teorias de k -essência utilizando funções Lagrangianas da forma $F(X)$, $X \equiv \phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}$, possibilitou encontrar duas soluções exatas foram obtidas para os seguintes casos especiais de k -essência: uma para $F(X) = F_0 X^{1/3}$, outra para $F(X) = F_0 |X|^{1/2} - 2\Lambda$, onde F_0 e Λ são constantes [23]. Ambas as soluções contêm horizontes, porém, não são assintoticamente planas. A primeira solução pode ser interpretada como descrevendo um buraco negro em um espaço-tempo assintoticamente singular, enquanto na segunda solução dois horizontes de área infinita estão conectados por um buraco de minhoca.

5.1.1 Equações elementares

Uma possível forma de se apresentar a ação de k -essência é a seguinte:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} [R - F(X, \phi)], \quad (5.1)$$

com

$$X = \eta \phi_\rho \phi^\rho, \quad (5.2)$$

em que $\eta = \pm 1$ pode ser usado para fazer com que X seja positivo nos casos quando a dependência geral lei de potência é mal definida para quantidades negativas. Para a função $F(X, \phi)$ adotou-se como modelo a seguinte lei de potência:

$$F(X, \phi) = F_0 X^n - 2V(\phi), \quad (5.3)$$

A variação da ação (5.1) com respeito à métrica nos leva às seguintes equações de Einstein

$$G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu R = -T_\mu^\nu, \quad (5.4)$$

como também na forma alternativa

$$R_\mu^\nu = T_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu T. \quad (5.5)$$

O tensor energia-momento é dado por

$$T_\mu^\nu \equiv \eta F_X \phi_\mu \phi^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu F, \quad (5.6)$$

Ainda, a variação da ação (5.1) em relação ao campo escalar nos leva à equação de Klein-Gordon

$$\eta \nabla_\alpha (F_X \phi^\alpha) - \frac{1}{2} F_\phi = 0. \quad (5.7)$$

Nas equações acima, G_μ^ν é o tensor de Einstein, R_μ^ν é o tensor de Ricci, R é escalar de Ricci, $F_X = \partial F / \partial X$, $F_\phi = \partial F / \partial \phi$ e $\phi_\mu = \partial_\mu \phi$.

Considerando uma métrica esfericamente simétrica e genérica

$$ds^2 = e^{2\gamma(u)} dt^2 - e^{2\alpha(u)} du^2 - e^{2\beta(u)} d\Omega^2, \quad (5.8)$$

na qual $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ é a métrica na esfera unitária. Adotamos na métrica acima uma coordenada u arbitrária e o campo escalar ϕ é função da coordenada u .

A partir da métrica, podemos calcular as componentes não nulas do tensor de Ricci

$$R_0^0 = -e^{-2\alpha}[\gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha' + 2\beta')], \quad (5.9)$$

$$R_1^1 = -e^{-2\alpha}[\gamma'' + 2\beta'' + \gamma'^2 + 2\beta'^2 - \alpha'(\gamma' + 2\beta')], \quad (5.10)$$

$$R_2^2 = R_3^3 = e^{-2\beta} - e^{-2\alpha}[\beta'' + \beta'(\gamma' - \alpha' + 2\beta')] \quad (5.11)$$

As componentes não nulas do tensor energia-momento (5.6) são:

$$T_0^0 = T_2^2 = T_3^3 = -F/2,$$

$$T_1^1 = -F/2 - \eta F_X e^{-2\alpha} \phi'^2. \quad (5.12)$$

A notação $(')$ tem significado de d/du . Neste caso, $X = -\eta e^{-2\alpha} \phi'^2$.

Assim sendo, podemos apresentar a equação do campo escalar e as componentes não nulas das equações de Einstein

$$2 \left(F_X e^{-\alpha+2\beta+\gamma} \phi' \right)' = e^{-\alpha+2\beta+\gamma} F_\phi \quad (5.13)$$

$$e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'\beta' - 3\beta'^2 - 2\beta'' = -e^{2\alpha} \frac{F}{2}, \quad (5.14)$$

$$-e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = e^{2\alpha} \left(\frac{F}{2} - X F_X \right), \quad (5.15)$$

$$\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' = e^{2\alpha} \frac{F}{2}. \quad (5.16)$$

5.1.2 Solução especial I

Para encontrar a primeira solução, o ponto de partida foi adotar a coordenada quasiglobal [36] em que $u = x$, escolhendo a condição de coordenada $\alpha(u) + \gamma(u) = 0$, que pode ser

usada especialmente em situações cujos horizontes de Killing são descritos por zeros regulares da função $A(x) = e^{2\gamma} = e^{-2\alpha}$, como na solução de Schwarzschild. Desse modo, a métrica (5.8) é reescrita da seguinte forma:

$$ds^2 = A(x)dt^2 - \frac{dx^2}{A(x)} - r^2(x)d\Omega^2. \quad (5.17)$$

Para simplificar a notação, vamos adotar $A(x) = A$ e $r(x) = r$. Assim, as equações (5.13-5.16) são reescritas da seguinte forma:

$$2(F_X Ar^2 \phi')' - r^2 F_\phi = 0, \quad (5.18)$$

$$\frac{1}{r^2} (2Ar r'' + Ar r' + Ar'^2 - 1) = \frac{F}{2}, \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{r^2} (A' r r' + Ar'^2 - 1) = \frac{1}{2} F - X F_X, \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{2r} (A'' r + 2r'' A + 2A' r') = \frac{F'}{2}. \quad (5.21)$$

Nessas coordenadas, podemos combinar as equações (5.19)-(5.20) e (5.19)-(5.21) para encontrar

$$2A \frac{r''}{r} = X F_X, \quad (5.22)$$

$$A'' r^2 - A(r^2)'' = -2, \quad (5.23)$$

nas quais, agora, (') tem significado de d/dx . Integrando-se da equação (5.23) em relação à x encontramos

$$B'(x) \equiv \left(\frac{A}{r^2} \right)' = \frac{6m - 2x}{r^4}, \quad (5.24)$$

em que a constante m tem o mesmo significado que a massa na solução de Schwarzschild no caso da métrica ser assintoticamente plana quando $x \rightarrow \infty$. A equação (5.18) pode ser simplificada se for adotada a função de k -essência com uma forma mais simples, $F(X)$. Então,

$$F_X e^{-\alpha+2\beta+\gamma} \phi' = C = \text{constante}, \quad (5.25)$$

O próximo passo é atribuir um *ansatz*¹ para a função $F(X)$. Para tal, adotou-se

$$F(X) = F_0 X^n, \quad F_0, n = \text{constante.} \quad (5.26)$$

Com o *ansatz* acima e a métrica (5.17), as equações de campo ganham a seguinte forma:

$$\phi' = \left[\frac{C}{n F_0 B^n r^{2n+2}} \right]^{1/(2n-1)}, \quad (5.27)$$

$$(2 B r'' + r B'') r + 3 B r^2 - \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{2} F_0 (-\eta)^n B^n r^{2n} \phi'^{2n}, \quad (5.28)$$

$$3 B r'^2 + r' B' r - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2} (2n-1) F_0 (-\eta)^n B^n r^{2n} \phi'^{2n}, \quad (5.29)$$

$$\frac{1}{2} B'' r^2 + (2 B r'' + 3 r B') r + 3 B r'^2 = -\frac{1}{2} F_0 (-\eta)^n B^n r^{2n} \phi'^{2n}, \quad (5.30)$$

recordando que, $B = B(x)$ e $r = r(x)$.

Podemos encontrar as expressões para $B(x)$ e $\phi'(x)$ direto de (5.24) e (5.27), juntamente com as escolhas, $n = \frac{1}{3}$ e $\eta = -1$:

$$B(x) = B_0 + k^4 \left(2m x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right), \quad (5.31)$$

$$\phi'(x) = \left(\frac{F_0}{3C} \right)^3 B r(x)^8, \quad (5.32)$$

com

$$r(x) = \frac{1}{k\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad k = \frac{2^{1/4} F_0^{3/4}}{3 \sqrt{|C|}} \quad (5.33)$$

Encontrando a expressão para $B(x)$ pode-se encontrar a expressão para $A(x)$, sendo somente possível se $m = 0$:

$$A(x) = B(x)r(x)^2 = \frac{B_0}{k^2 x} - \frac{k^2 x^3}{2}. \quad (5.34)$$

Consequentemente, podemos apresentar a forma final da métrica, dada por

$$ds^2 = \left(\frac{B_0}{k^2 x} - \frac{k^2}{2} x^3 \right) dt^2 - \left(\frac{B_0}{k^2 x} - \frac{k^2}{2} x^3 \right)^{-1} dx^2 - \frac{1}{k^2 x} d\Omega^2. \quad (5.35)$$

¹Uma suposição sobre a forma de uma função desconhecida que é feita a fim de facilitar a solução de uma equação ou problema.

Como também a expressão para o campo escalar:

$$\phi(x) = \left(\frac{F_0}{3C}\right)^3 \left(-\frac{B_0}{k^8 x^3} - \frac{x}{k^4}\right), \quad (5.36)$$

Quando $B_0 \leq 0$, a função $A(x)$ é negativa, e a métrica descreve um modelo cosmológico particular de Kantowski-Sachs. Se $B_0 > 0$, a métrica é estática em

$$x < x_h = \frac{(2B_0)^{1/4}}{k}, \quad (5.37)$$

que tem um horizonte em $x = x_h$ é do tipo cosmológico para grandes valores de x . Embora a métrica seja perfeitamente regular em todo o intervalo $x \in \mathbb{R}_+$, a função original $F(X)$ na Lagrangiana é singular no horizonte. O diagrama de Penrose no caso $B_0 > 0$ (fig. 5.1) asseha-se com o diagrama da solução de *de Sitter*. No entanto, ao contrário deste, a região além do horizonte, nesta solução, corresponde a valores de $r(x)$ cada vez menores, como ocorre em um espaço-tempo de um buraco negro. Além disso, todos os lados do diagrama correspondem a singularidades. Pode-se concluir que a solução descreve um buraco negro imerso em um espaço-tempo assintoticamente singular.

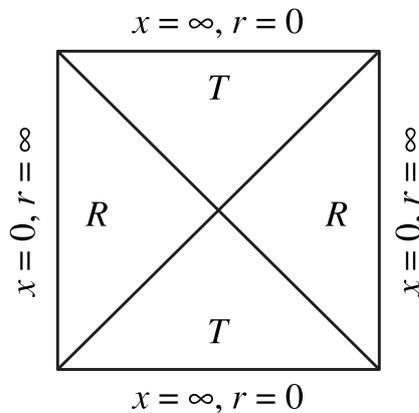


Figura 5.1: Diagrama de Carter-Penrose para solução I com $B_0 > 0$. As letras R e T correspondem às regiões estática e não estática, respectivamente.

5.1.3 Solução especial II

Para uma segunda solução, considerou-se o seguinte ansatz para a função de k -essência

$$F(X, \phi) = \epsilon X^n - 2\Lambda, \quad (5.38)$$

em que Λ é uma constante e $\epsilon = \pm 1$ (1 para um campo normal; -1 para um campo fantasma). A partir da escolha acima podemos reescrever as equações de campo (5.13 - 5.16) da seguinte forma

$$(2n - 1)\phi'' + [\gamma' - (2n - 1)\alpha' + 2\beta']\phi' = 0. \quad (5.39)$$

$$e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'\beta' - 3\beta'^2 - 2\beta'' = \frac{1}{2}\epsilon(-\eta)^n e^{2(1-n)\alpha}\phi'^{2n} + e^{2\alpha}\Lambda, \quad (5.40)$$

$$- e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = \frac{1}{2}\epsilon(-\eta)^n (2n - 1) e^{2(1-n)\alpha}\phi'^{2n} - e^{2\alpha}\Lambda, \quad (5.41)$$

$$\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' = -\frac{1}{2}\epsilon(-\eta)^n e^{2(1-n)\alpha}\phi'^{2n} - e^{2\alpha}\Lambda \quad (5.42)$$

A partir das equações anteriores, necessita-se escolher uma condição de coordenada. A escolha aqui foi a coordenada harmônica, dada por

$$\alpha(u) = 2\beta(u) + \gamma(u). \quad (5.43)$$

Nessa condição, a coordenada u está relacionada com a coordenada radial r por meio da relação $u = 1/r$ [36]. Além da escolha da condição de coordenada anterior, vamos estabelecer $\alpha = 0$, o que nos leva simplesmente a $\gamma = -2\beta$. Dessa forma, adotando $n = 1/2$ e $\eta = -1$, as equações (5.39 - 5.42) resumem-se a:

$$e^{-2\beta} - 3\beta'^2 - 2\beta'' = \frac{\epsilon}{2}\phi' + \Lambda, \quad (5.44)$$

$$e^{-2\beta} + 3\beta'^2 = \Lambda, \quad (5.45)$$

$$3\beta'^2 - \beta'' = -\frac{\epsilon}{2}\phi' - \Lambda. \quad (5.46)$$

Resolvendo as equações acima, é possível encontrar a seguinte solução:

$$ds^2 = \frac{9b^4}{\cosh^4(bu)} dt^2 - du^2 - \frac{1}{3b^2} \cosh^2(bu) d\Omega^2, \quad (5.47)$$

ou ainda, usando a transformação $x = 3b \tanh(bu)$, obtemos a métrica na forma

$$ds^2 = \frac{(9b^2 - x^2)^2}{9} dt^2 - \frac{9}{(9b^2 - x^2)^2} dx^2 - \frac{3}{(9b^2 - x^2)} d\Omega^2. \quad (5.48)$$

Desta forma, é fácil ver que este espaço-tempo possui dois horizontes de eventos, $x = \pm 3b = \pm\sqrt{3\Lambda}$.

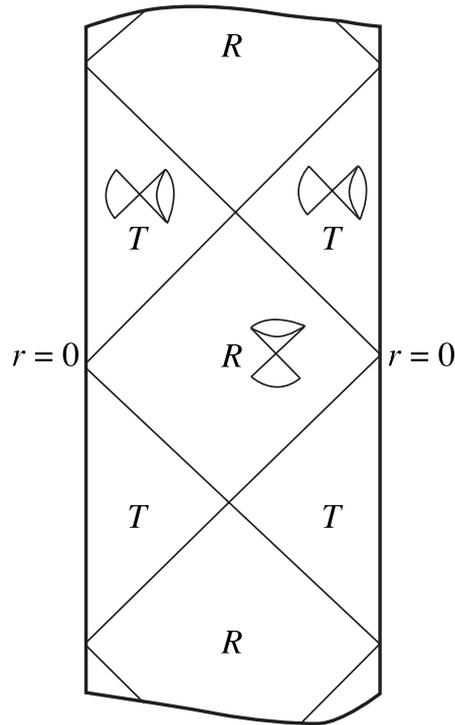


Figura 5.2: Diagrama de Carter-Penrose para solução II. Os cones de luz indicam a direção temporal

O campo escalar em função de x e sua derivada são dados por

$$\phi = \frac{4}{3\epsilon} \left[2x - \frac{9b}{2} \ln \left(\frac{3b+x}{3b-x} \right) \right] + \phi_0, \quad (5.49)$$

$$\phi' = \frac{4}{3\epsilon} \left[2 - \frac{27b^2}{9b^2 - x^2} \right]. \quad (5.50)$$

Apesar de ser uma solução estática e esfericamente simétrica, similar às soluções de buracos negros frios [21], não pode ser chamada de buraco negro, pois se trata de uma solução assintoticamente singular, e, por este fato, não há lugar para um observador distante. Entretanto, os horizontes são de natureza cosmológica, semelhante ao horizonte em espaço-tempo de *de Sitter*.

5.2 Espaços esfericamente simétricos em Rastall com campo escalar

Como sabemos, a teoria de Rastall basea-se na não conservação do tensor energia-momento, ou seja, a divergência do tensor energia-momento é não nula. Por essa razão, a teoria de Rastall não possui uma Lagrangiana. Há várias tentativas de se encontrar uma formulação Lagrangiana para Rastall, porém, todas encontram um estrutura apenas parecida com Rastall, como vimos no capítulo anterior. Vimos como a teoria de Rastall se apresenta na seção 4.1. a seguir, vamos mostrar os resultados obtidos em [22], em que a teoria de Rastall é usada juntamente com um tensor energia-momento de um campos escalar canônico.

5.2.1 Equações elementares

A teoria da gravidade de Rastall é caracterizada pelas seguintes equações:

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.51)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1-\lambda}{2\kappa}R^{,\nu} = \frac{1-\lambda}{2(1-2\lambda)}T^{,\nu}, \quad (5.52)$$

onde λ é um parâmetro livre. Quando $\lambda = 1$, a Relatividade Geral é recuperada. A partir de agora, vamos adotar $\kappa = 1$. Essas equações podem ser reescritas como [95]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} - \frac{a-1}{2}g_{\mu\nu}T, \quad (5.53)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{a-1}{2(2a-3)}R^{,\nu} = \frac{a-1}{2}T^{,\nu}, \quad a := \frac{3\lambda-2}{2\lambda-1}. \quad (5.54)$$

Vamos começar apresentando o a forma canônica do tensor energia-momento do campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \epsilon \left[\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{;\rho}\phi_{;\rho} \right] + g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (5.55)$$

O parâmetro ϵ está relacionado com a natureza do campo escalar: se $\epsilon = 1$, trata-se de campo habitual; se $\epsilon = -1$, trata-se de campo fantasma.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \epsilon \left[\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{2-a}{2}g_{\mu\nu}\phi^{;\rho}\phi_{;\rho} \right] + (3-2a)g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (5.56)$$

$$\square\phi + (a-1)\frac{\phi^{;\rho}\phi^{;\sigma}\phi_{;\rho;\sigma}}{\phi^{;\alpha}\phi_{;\alpha}} = -\epsilon(3-2a)V_{\phi}, \quad (5.57)$$

em que o subscripto ϕ denota $d/d\phi$.

O objetivo é encontrar soluções estáticas e esfericamente simétricas, portanto, podemos usar a seguinte métrica genérica:

$$ds^2 = e^{2\gamma(r)}dt^2 - e^{2\alpha(r)}dr^2 - e^{2\beta(r)}d\Omega^2, \quad (5.58)$$

em que α , β e γ são funções da coordenada r , ainda desconhecidas.

Utilizando a métrica (7.64) juntamente com as equações (5.56-5.57) encontra-se o seguinte conjunto de equações de campo:

$$-2\beta'' - 3\beta'^2 + 2\alpha'\beta' + e^{2(\alpha-\beta)} = \epsilon\frac{2-a}{2}\phi'^2 + (3-2a)Ve^{2\alpha}, \quad (5.59)$$

$$2\gamma'\beta' + \beta'^2 - e^{2(\alpha-\beta)} = \epsilon\frac{a}{2}\phi'^2 - (3-2a)e^{2\alpha}V, \quad (5.60)$$

$$\beta'' + \gamma'' + \beta'(\gamma' + \beta' - \alpha') + \gamma'(\gamma' - \alpha') = -\epsilon\frac{2-a}{2}\phi'^2 - (3-2a)e^{2\alpha}V, \quad (5.61)$$

$$a\phi'' + (\gamma' + 2\beta' - a\alpha')\phi' = (3-2a)e^{2\alpha}V_{\phi}. \quad (5.62)$$

5.2.2 Solução especial I: $a = -1$

Para encontrar a primeira solução especial, fixou-se $V = 0$ e usou-se a coordenada quasiglobal x , de modo que, $e^{2\gamma} = e^{-2\alpha} = A(x)$, e $e^{2\beta} = r^2(x)$ e, dessa forma, a métrica se apresenta da seguinte forma

$$ds^2 = A(x)dt^2 - A(x)^{-1}dx^2 - r(x)^2d\Omega^2, \quad (5.63)$$

Neste caso, as equações de campo ganham a forma

$$2\frac{r''}{r} + \frac{A' r'}{A r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{1}{r^2 A} = -\epsilon \frac{2-a}{2} \phi'^2 - (3-2a)\frac{V}{A}, \quad (5.64)$$

$$\frac{A' r'}{A r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{1}{r^2 A} = \epsilon \frac{a}{2} \phi'^2 - (3-2a)\frac{V}{A}, \quad (5.65)$$

$$\frac{r''}{r} + \frac{A' r'}{A r} + \frac{1}{2} \frac{A''}{A} = -\epsilon \frac{2-a}{2} \phi'^2 - (3-2a)\frac{V}{A}, \quad (5.66)$$

$$a\phi'' + \left\{ \frac{(1+a)A'}{2A} + 2\frac{r'}{r} \right\} \phi' = (3-2a)\frac{V_\phi}{A}, \quad (5.67)$$

com $V = 0$. O sobrescrito ($'$) denota d/dx . As diferenças entre as equações (5.64) e (5.66) e entre as equações (5.64) e (5.65) não dependem nem do parâmetro a nem do potencial $V(\phi)$:

$$2\frac{r''}{r} = -\epsilon \phi'^2, \quad (5.68)$$

$$A'' r^2 - A(r^2)'' = -2 \quad (5.69)$$

Além disso, temos a primeira integral da equação escalar, dada por

$$\phi' = C A^{-(1+a)/(2a)} r^{-2/a}, \quad C = \text{constante}. \quad (5.70)$$

Se escolhermos $a = -1$, a dependência A deixa de existir, e essa relação reduz a

$$\phi' = C r^2, \quad C = \text{constante}. \quad (5.71)$$

Após alguns passos (com maiores detalhes em [22]), chegou-se as seguintes expressões para $A(x)$ e $r(x)$

$$A = \frac{K}{x} - \frac{C}{\sqrt{6}} x^3, \quad \text{e} \quad r = \left(\frac{3}{2C^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (5.72)$$

Assim como C , K também é uma constante de integração.

A geometria descrita por por esta solução é a mesma encontrada e apresentada na seção 6.57 (em [23] com maior detalhe) . Os infinitos espaciais são singulares, sendo separadas por um horizonte.

Há, no entanto, uma diferença em relação à [23]: o comportamento do campo escalar, que no presente caso é definido em todo o intervalo $-\infty < \phi < \infty$, passando por zero, enquanto no caso k -essência é sempre negativo, nunca chegando a zero e divergindo nos extremos do intervalo de x . Essas diferentes características podem afetar a estabilidade da solução. O horizonte de eventos tem uma área finita. Portanto, em oposição ao resultado da referência [23], a presente solução especial corresponde a um horizonte regular (e mesmo com um campo escalar finito) com área finita.

5.2.3 Solução especial II: $a = 0$

Este caso implica $\lambda = 2/3$. Em princípio, corresponde a uma relação anômala entre κ e o acoplamento gravitacional newtoniano G (κ deve ser infinito para obter um valor finito de G). Este caso tem algumas semelhanças com o outro ponto crítico de a , correspondente a $\lambda = 1/2$, com o qual tudo é bem comportado, exceto pelo fato de que as equações de campo só admitem acoplamento à matéria conforme com $T = 0$ [86].

Vamos agora considerar a condição de coordenada $\alpha = \gamma + 2\beta$, chamada de *condição de coordenada harmônica* [20]. Para distingui-lo do caso anterior, vamos denotar a coordenada radial como u .

Adotando $a = 0$ e considerando um potencial constante $V = \Lambda/3$, a equação (9.16), sob esta condição de coordenadas, torna-se

$$\phi' \alpha' = 0. \quad (5.73)$$

Há, portanto, duas opções: $\phi' = 0$, que leva à solução Schwarzschild; ou $\alpha' = 0$, que condição implica $\gamma + 2\beta = 0$. As equações do movimento reduzem-se a

$$-2\beta'' - 3\beta'^2 + e^{-2\beta} = \epsilon\phi'^2 + \Lambda, \quad (5.74)$$

$$3\beta'^2 + e^{-2\beta} = \Lambda, \quad (5.75)$$

$$-\beta'' + 3\beta'^2 = -\epsilon\phi'^2 - \Lambda. \quad (5.76)$$

A equação (5.75), a partir da qual considera-se $\Lambda > 0$, é resolvida resultando em

$$e^\beta = \frac{\cosh(bu)}{\sqrt{3}b}, \quad b := \sqrt{\Lambda/3}. \quad (5.77)$$

Assim, a métrica assume a seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{9b^4}{\cosh^4(bu)} dt^2 - du^2 - \frac{\cosh^2(bu)}{3b^2} d\Omega^2. \quad (5.78)$$

Esta solução existe apenas para $\epsilon = -1$, ou seja, um campo escalar fantasma, para o qual temos a expressão

$$\phi' = \pm b\sqrt{2} \sqrt{3 - \frac{2}{\cosh^2(bu)}}, \quad (5.79)$$

o que significa que o campo escalar é uma função sempre crescente ou decrescente na coordenada espacial u .

A geometria desta solução coincide exatamente com a da segunda solução especial mostrada na seção 6.58 para um campo de k -essência, em que há dois horizontes de área infinita em $u = \pm\infty$ com dois horizontes de área infinita conectados por um buraco de minhoca cuja garganta está localizada na esfera $u = 0$, porém, o campo escalar possui um comportamento diferente.

5.2.4 Solução especial III: $a = 3/2$

Este valor específico de a implica $\lambda \rightarrow \infty$ mas, novamente, com tal condição, todo o conjunto de equações é bem comportado.

Se colocarmos $a = 3/2$, as equações de campo (6.10) levam a $R = 0$. É importante notar que, neste caso, as equações não dependem do potencial $V(\phi)$, que pode ser escolhido arbitrariamente no início. Juntamente com a condição $R_0^0 = R_2^2$, também seguindo as equações de campo e as propriedades do tensor de energia-momento, temos

$$3R_0^0 + R_1^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta'' + 2\gamma'' + (\beta' + 2\gamma')(\beta' + \gamma' - \alpha') = 0, \quad (5.80)$$

em que usamos a forma geral da métrica (7.64) com uma coordenada radial arbitrária u (não confundir com a coordenada u da subseção anterior), e $(')$ novamente significa d/du . Agora, é conveniente escolher novamente a condição de coordenada quasiglobal $\alpha + \gamma = 0$: assim,

retornamos às notações $u = x$, $e^\beta = r(x)$, $e^{2\gamma} = A(x)$, e a métrica toma o forma (7.55). Em seguida a equação (5.80) toma uma forma facilmente integrável:

$$\beta'' + 2\gamma'' + (\beta' + 2\gamma')^2 = 0 \Rightarrow e^{\beta+2\gamma} \equiv Ar = px + q, \quad (5.81)$$

em que p e q são constantes de integração. Por outro lado, a equação do campo escalar, como antes, nos leva à relação (5.70), que para $a = 3/2$ resulta em

$$\phi' = CA^{-5/6}r^{-4/3}. \quad (5.82)$$

Agora, com (5.81) temos duas situações qualitativamente diferentes, a serem consideradas separadamente.

1. $p \neq 0$. Neste caso, sem perda de generalidade, podemos colocar $q = 0$ escolhendo o ponto zero de x e $p = 1$ escolhendo a escala da coordenada temporal t . Como resultado, temos

$$A = x/r(x), \quad \phi' = Cx^{-5/6}r^{-1/2}. \quad (5.83)$$

Resta encontrar a função $r(x)$, que pode ser feita usando a equação de primeira ordem (5.65) com todas as substituições necessárias. Assim, obtemos

$$r' - 1 = \frac{3\epsilon C^2}{4} x^{-2/3}, \quad (5.84)$$

em que

$$r(x) = x + Bx^{1/3} + r_0, \quad B := \frac{9}{4}\epsilon C^2, \quad (5.85)$$

na qual r_0 é mais uma constante de integração. Este ultimo passo completa a solução.

É claro que a $x = 0$ a análise desta solução é violada, por isso não pode ser estendida para além desse valor, e faz sentido nos restringirmos a $x > 0$. De qualquer forma, a partir da forma de (5.83) e (5.85), como $x \rightarrow \infty$ temos um infinito espacial onde $r \approx x$ e $A \rightarrow 1$, mas não é um infinito plano regular porque, em vez de assintoticamente Schwarzschild, $A(x)$ se comporta como $A(x) \approx 1 - Bx^{-2/3}$ para grandes valores de x .

O limite inferior do intervalo x depende dos parâmetros B e r_0 . Se a função (5.85) tiver um zero em algum $x_1 > 0$, este zero corresponde a uma singularidade central repulsiva

em que $r \rightarrow 0$ e $A \rightarrow \infty$. Isso é possível se $B < 0$, isto é, se $\epsilon = -1$. Se $r > 0$ em tudo $x \geq 0$, o que é possível com r_0 suficientemente grande, mesmo que $B < 0$, então a solução é definida em todo intervalo $x \in \mathbb{R}_+$, e em $x = 0$ observamos o que parece ser um horizonte, mas não há extensão além disso devido ao termo com $x^{1/3}$ que viola a análise.

2. $p = 0$, em vez de (5.83), temos

$$A(x) = q/r(x), \quad \phi' = Cq^{-5/6}r^{-1/2}, \quad q > 0. \quad (5.86)$$

Neste caso, uma tentativa de encontrar $r(x)$ a partir da equação de primeira ordem (5.65) só leva a uma relação entre as constantes

$$4q^{2/3} = 3C^2, \quad (5.87)$$

restrito a $\epsilon = -1$, ou seja, tal solução existe apenas para um campo escalar fantasma; Enquanto isso, $r(x)$ permanece arbitrário. No entanto, esta função pode ser encontrada, equivalentemente, a partir da equação (5.68) ou (5.69) da seguinte forma:

$$r(x) = \frac{x^2}{3q} - Kx + r_0, \quad (5.88)$$

em que K e r_0 são constantes de integração. A solução é definida em um intervalo de x em que $r > 0$, dependendo desses valores de parâmetro. Em $r = 0$, temos um centro singular repulsivo, enquanto em qualquer um dos limites $x \rightarrow \pm\infty$ temos um infinito espacial em que $A \rightarrow 0$ e a geometria espacial se assemelha à de um monopolo global, pois existe um limite incorreto da razão do raio circunferência: temos $A r^{1/2} \rightarrow 4/3$ em vez da unidade na geometria plana usual.

No caso em que os parâmetros satisfizerem a desigualdade $3qK^2 < 4r_0$, então $r > 0$ em todo o intervalo de $x \in \mathbb{R}$, e, portanto, a solução descreverá um buraco de minhoca transitável que conecta dois desses infinitos.

Dualidade entre k -essência e Rastall

Nos capítulos anteriores, foi possível observar que a teoria de k -essência e a teoria de Rastall, ambas baseadas em um mesma métrica geral, estática e esfericamente simétrica, resultam em algumas soluções que descrevem a mesma geometria, embora as propriedades dos campos escalares sejam diferentes. Essas semelhanças indicam uma relação mais profunda entre as duas teorias. Na ausência de outra matéria que não os campos escalares, as duas teorias tem geometrias que coincidem em alguns casos, que chamaremos de dualidade k - R [35], sob a premissa de que as quantidades relevantes dependem de uma coordenada espacial ou temporal e que a teoria de k -essência é especificada por uma função de uma lei de potência. Então, surge uma simples relação entre os parâmetros numéricos das teorias. Se houver outras formas de matéria, a situação é mais interessante e depende de como a não conservação do tensor energia-momento é distribuída entre as diferentes contribuições de matéria na teoria de Rastall. Discutiremos duas variantes dessa não conservação no caso de modelos cosmológicos espacialmente planos isotrópicos e mostraremos que a dualidade k - R ocorre genericamente.

6.1 Espaços-tempo com interação escalar-vácuo

6.1.1 Teoria de k -essência

Como já vimos ao longo do texto, variando a Lagrangiana (3.3) com respeito a métrica e o campos escalar obtivemos as equações de campo. Em resumo, temos

$$G_{\mu}^{\nu} \equiv R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R = -T_{\mu}^{\nu}[\phi] - T_{\mu}^{\nu}[m], \quad (6.1)$$

$$T_{\mu}^{\nu}[\phi] \equiv \eta F_X \phi_{\mu} \phi^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}F, \quad (6.2)$$

$$\eta \nabla_{\alpha}(F_X \phi^{\alpha}) - \frac{1}{2}F_{\phi} = 0, \quad (6.3)$$

em que G_{μ}^{ν} é o tensor de Einstein, $F_X = \partial F / \partial X$, $F_{\phi} = \partial F / \partial \phi$ e $T_{\mu}^{\nu}[m]$ é o tensor energia-momento devido à L_m .

Agora, levaremos em conta algumas suposições:

(i) Usaremos a seguinte densidade de Lagrangiana de k -essência, como já considerado anteriormente

$$F(X, \phi) = F_0 X^n - 2V(\phi), \quad (6.4)$$

em que n é constante diferente de zero e $V(\phi)$ é o potencial.

(ii) $\phi = \phi(u)$, em que u é uma das coordenadas, que pode ser temporal ou espacial.

(iii) a métrica tem a forma

$$ds^2 = \eta e^{2\alpha(u)} du^2 + h_{ik} dx^i dx^k, \quad (6.5)$$

em que i, k são números que representam as coordenadas, exceto a coordenada u , $\eta = \text{sign } g_{uu}$, que significa que η é igual ao sinal da componente g_{uu} . O determinante de h_{ik} possui a estrutura fatorizada na forma

$$\det(h_{ik}) = e^{2\sigma(u)} h_1(x^i). \quad (6.6)$$

Nesse caso, temos que $X = e^{-2\alpha(u)} \phi_u^2$, em que o subscrito u significa d/du , e o tensor energia-momento do campo ϕ tem as seguintes componentes não nulas:

$$T_u^u[\phi] = (n - \frac{1}{2})F_0 X^n + V, \quad (6.7)$$

$$T_i^i[\phi] = -\frac{1}{2}F_0 X^n + V. \quad (6.8)$$

Note que, não há soma sobre os índices sublinhados. A equação de Klein-Gordon tem a seguinte forma

$$e^{-2n\alpha} \phi_u^{2n-2} [(2n-1)\phi_{uu} + \sigma_u \phi_u - (2n-1)\alpha_u \phi_u] = -\frac{1}{nF_0} \frac{dV}{d\phi}. \quad (6.9)$$

6.1.2 Rastall com campo escalar

Para facilitar a leitura, vamos falar mais uma vez, brevemente, da teoria de Rastall. A teoria de Rastall é caracterizada pelas seguintes equações [94]:

$$R^\nu_\mu - \frac{\lambda}{2}\delta^\nu_\mu R = -T^\nu_\mu, \quad (6.10)$$

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = \frac{\lambda - 1}{2}\partial_\mu R, \quad (6.11)$$

em que λ é um parâmetro da teoria e T^ν_μ é o tensor energia-momento de matéria. Quando $\lambda = 1$, retornamos à relatividade geral.

As equações anteriores podem ser reescritas como

$$G^\nu_\mu = -\left\{T^\nu_\mu - \frac{b-1}{2}\delta^\nu_\mu T\right\} \equiv -\tilde{T}^\nu_\mu, \quad (6.12)$$

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = \frac{b-1}{2}\partial_\mu T, \quad b := \frac{3\lambda - 2}{2\lambda - 1}, \quad T = T^\alpha_\alpha. \quad (6.13)$$

Nessa parametrização, recuperamos a Relatividade Geral com $b = 1$.

Considerando, agora, matéria na forma do campo escalar ψ minimamente acoplado, dado por

$$T^\nu_\mu[\psi] = \epsilon(\psi_\mu\psi^\nu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu\psi_\alpha\psi^\alpha) + \delta^\nu_\mu W(\psi), \quad (6.14)$$

em que $\epsilon = \pm 1$, indicando a natureza habitual (+1) ou a natureza fantômica (-1) do campo ψ , com $\psi_\mu \equiv \partial_\mu\psi$, e $W(\psi)$ é o potencial. A equação de Klein-Gordon originada da equação (6.13) ganha a forma

$$\square\psi + (b-1)\frac{\psi^\mu\psi^\nu\nabla_\mu\psi_\nu}{\psi^\alpha\psi_\alpha} = -\epsilon(3-2b)\frac{dW}{d\psi}. \quad (6.15)$$

O próximo passo, é utilizar da mesma ideia que foi adotada em k -essência, ou seja, assumimos que $\psi = \psi(u)$, como também, a mesma métrica (7.64). Portanto, as componentes não nulas do tensor energia-momento modificado do campo escalar ψ da equação (6.12) são

$$\tilde{T}_u^u[\psi] = \frac{1}{2}\epsilon b\eta e^{-2\alpha}\psi_u^2 + (3 - 2b)W(\psi), \quad (6.16)$$

$$\tilde{T}_i^i[\psi] = \frac{1}{2}\epsilon(b - 2)\eta e^{-2\alpha}\psi_u^2 + (3 - 2b)W(\psi), \quad (6.17)$$

enquanto, a equação de Klein-Gordon ganha a seguinte forma

$$e^{-2\alpha} [b\psi_{uu} + \psi_u(\sigma_u - b\alpha_u)] = -\epsilon\eta(3 - 2b)W_\psi, \quad (6.18)$$

em que, $W_\psi \equiv dW/d\psi$ e, como anteriormente, $\eta = \text{sign } g_{uu}$.

6.1.3 Comparação entre k -essência e Rastall

Para iniciar uma comparação entre k -essência e a teoria de Rastall, vamos assumir que não outro tipo de matéria além dos campos ϕ e ψ . O objetivo agora é descobrir em que condições os termos à direita das equações de Einstein (6.7) e (6.25) coincidem com os termos à direita das equações de Einstein efetivas da teoria de Rastall, (6.16) e (6.17). Essa condição também garante que as soluções são as mesmas.

O primeiro passo é identificar os potenciais:

$$V(\phi) = (3 - 2b)W(\psi). \quad (6.19)$$

O próximo passo é relacionar as partes cinéticas de $T_\mu^\nu[\phi]$ e $\tilde{T}_\mu^\nu[\psi]$, encontrando

$$\frac{2n - 1}{-1} = \frac{b}{b - 2} \Rightarrow (2 - b)n = 1. \quad (6.20)$$

Então, igualando as partes cinéticas em si, achamos

$$\psi_u^2 = \epsilon \eta n F_0 \phi_u^{2n} e^{2(1-n)\alpha}. \quad (6.21)$$

Fundamentado pelas três condições, (6.19)–(6.21), as equações de campo das duas teorias coincidem completamente e, portanto, o conjunto de soluções também são idênticas.

Substituindo (6.21) em (6.18), podemos facilmente verificar que sob tais condições as equações de Klein-Gordon (6.9) e (6.18) também são equivalentes

Este resultado, geral, cobre muitas simetrias estáticas (esféricas, planas, cilíndricas, etc.), cosmologias homogêneas (Friedmann-Robertson-Walker, todos os tipo de Bianchi, Kantowski-Sachs) e, até mesmo, cosmologias inomogêneas, se suas métricas possuírem a forma (7.64), (6.6).

Daqui em diante, vamos considerar os valores genéricos dos parâmetros n e b e excluir da consideração os seus valores especiais que requerem uma análise separada, como, por exemplo, $b = 0$, $b = 3/2$ e $n = 1/2$. Algumas observações sobre esses casos especiais serão feitas feita nas próximas seções.

6.2 Cosmologia com matéria

Quando, além do campo escalar, a matéria está presente, é melhor, para evitar algumas dificuldades técnicas, esquivar de certos tipos de métricas. Vamos considerar métricas cosmológicas de FLRW espacialmente planas

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (6.22)$$

de modo que, em (7.64) e (6.6) temos $\eta = 1$, $e^\alpha = 1$ e $e^\sigma = a(t)^3$. A matéria será tomada sob a forma de um fluido perfeito, de modo que

$$T_\mu^\nu[m] = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p), \quad (6.23)$$

em que ρ é a densidade e p é a pressão.

6.2.1 Cosmologia em k -essência

Na métrica de FLRW (8.9) e com $\phi = \phi(t)$, as equações de campo (8.4)–(7.3) com matéria, em que, denotando $\rho = \rho_k$, $p = p_k$, em k -essência, assumem a forma

$$3H^2 = \frac{1}{2}(2n - 1)F_0\dot{\phi}^{2n} + V(\phi) + \rho_k, \quad (6.24)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{2}F_0\dot{\phi}^{2n} + V(\phi) - p_k, \quad (6.25)$$

$$\dot{\phi}^{2n-2}[(2n - 1)\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}] = -\frac{1}{nF_0}V_\phi, \quad (6.26)$$

em que $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e $V_\phi \equiv dV/d\phi$. O tensor energia-momento da matéria satisfaz a lei de conservação $\nabla_\nu T_\mu^\nu[m] = 0$,

$$\dot{\rho}_k + 3H(\rho_k + p_k) = 0. \quad (6.27)$$

6.2.2 Cosmologia em Rastall com campo escalar e matéria

As equações de Rastall têm a forma (6.12) e (6.13), em que, agora, T_μ^ν é o tensor energia-momento total,

$$T_\mu^\nu = T_\mu^\nu[\psi] + T_\mu^\nu[m], \quad (6.28)$$

com $T_\mu^\nu[\psi]$ dado por (6.14) e $T_\mu^\nu[m]$ por (6.23). Nas equações (6.12), a energia-momento modificado tensor \tilde{T}_μ^ν é, em seguida, uma soma de $\tilde{T}_\mu^\nu[\psi]$ dada por (6.16) e (6.17) e $\tilde{T}_\mu^\nu[m]$ com as componentes

$$\tilde{T}_t^t[m] = \frac{1}{2}[(3 - b)\rho + 3(b - 1)p] \equiv \tilde{\rho}, \quad (6.29)$$

$$\tilde{T}_i^i[m] = \frac{1}{2}[(1 - b)\rho + (3b - 5)p] \equiv -\tilde{p} \quad (6.30)$$

Observe que, preservamos a notação ρ e p sem índices para matéria na gravidade de Rastall. Portanto, as equações de Einstein para Rastall são:

$$3H^2 = \frac{1}{2}\epsilon b\psi^2 + (3 - 2b)W + \tilde{\rho}, \quad (6.31)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = \frac{1}{2}\epsilon(b - 2)\psi^2 + (3 - 2b)W - \tilde{p}, \quad (6.32)$$

ao passo que, a equação do campo escalar ψ depende de novas suposições sobre como a não conservação do tensor energia-momento total, de acordo com (6.13), é distribuída entre o campo ψ e matéria. Pode-se notar que

$$\tilde{\rho} + \tilde{p} = \rho + p, \quad (6.33)$$

e

$$\tilde{\rho} - \rho = p - \tilde{p} = \frac{1 - b}{2}(\rho - 3p). \quad (6.34)$$

Vamos considerar duas alternativas, dentre muitas possíveis, no acréscimo de matéria a teoria de Rastall com campo escalar:

- I: Os tensores energia-momento do campo ψ e matéria obedecem a (6.13) separadamente, de modo que, não há mistura entre as duas fontes de gravidade;
- II: O tensor energia-momento da matéria se conserva, ou seja,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (6.35)$$

6.2.3 Modelo R1: Sem mistura entre campo escalar e matéria

Neste caso, nós temos

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu[\psi] = \frac{b - 1}{2}\partial_\mu T[\psi], \quad (6.36)$$

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu[m] = \frac{b - 1}{2}\partial_\mu T[m], \quad (6.37)$$

A primeira dessas condições leva à equação do campo escalar (6.18), que no presente caso é dada por

$$b\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} = -\epsilon(3 - 2b)W_\psi, \quad (6.38)$$

com (6.33), a condição (6.37) tem o forma

$$\ddot{\tilde{\rho}} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (6.39)$$

O conjunto completo de equações consiste em (6.31), (6.32), (6.38), e (6.39), com as definições (6.29).

A partir de (6.33) segue que, se a matéria satisfaz a condição de energia nula (NEC¹), então o mesmo vale para a densidade e pressão “efetivos”, $\tilde{\rho}$ e \tilde{p} , na teoria de Rastall. No entanto, a partir de (6.29) pode-se verificar que a positividade da densidade de energia (ou pressão) não é garantida no caso k -essência se for imposta na teoria de Rastall, e vice-versa.

É fácil ver que o lado direito das equações (6.31) e (6.32) coincidem com os de (6.24) e (6.25) se, além das relações (6.19)–(6.21) para variáveis escalares, identificamos

$$\rho_k = \tilde{\rho}, \quad p_k = \tilde{p}. \quad (6.40)$$

A correção dessa identificação é confirmada pela identidade das leis de conservação (6.27) e (6.39). Assim, como no caso do vácuo, os parâmetros n e b são relacionados por (6.20), ou seja, $n(2 - b) = 1$, e os campos escalares ϕ e ψ são relacionados pela (6.21), que agora é dada por

$$\dot{\psi}^2 = \epsilon n F_0 \dot{\phi}^{2n}. \quad (6.41)$$

¹do inglês, null energy condition

6.2.4 Modelo R2: Conservação tensor energia-momento da matéria

Para este caso, temos que

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu[m] = 0. \quad (6.42)$$

Esta condição é particularmente importante para a formação da estrutura no universo, no caso de um fluido sem pressão, uma vez que a matéria comum deve aglomerar-se.

Nesse caso, o tensor energia-momento do campo escalar ψ , é dado por

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu[\psi] = \frac{1}{2}(b-1)(\partial_\mu T[\psi] + \partial_\mu T[m]), \quad (6.43)$$

que leva à equação do campo escalar

$$\dot{\psi}(b\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi}) = -\epsilon(3-2b)W_\psi\dot{\psi} + \frac{1}{2}\epsilon(b-1)(\dot{\rho} - 3\dot{p}). \quad (6.44)$$

O conjunto completo de equações consiste em (6.31), (6.32), (6.44) e (6.27), com as definições (6.29). Observe que a equação (6.44) combina o campo escalar e o fluido de matéria, mesmo que o fluido seja conservado como acontece na relatividade geral.

Essa conservação nos faz identificar as componentes tensor energia-momento da matéria nas teorias de k -essência e Rastall: $\rho = \rho_k$, $p = p_k$. Como resultado, a identificação das outras partes do tensor energia-momento total é apenas parcialmente a mesma do caso anterior.

Identificando, como antes, os potenciais de acordo com (6.19), ou seja, $V = (3-2b)W$, e comparando as equações do tipo Friedmann (6.31) e (6.32) com suas contrapartes de k -essência (6.24) e (6.25), obtemos, como anteriormente,

$$\epsilon\dot{\psi}^2 = nF_0\dot{\phi}^{2n}. \quad (6.45)$$

A correção dessa identificação é verificada substituindo (6.45) na equação do campo escalar (6.44): de fato, como temos agora, devido a (6.34),

$$\epsilon\dot{\psi}^2 \left[b - \frac{2n-1}{n} \right] = (b-1)(\rho - 3p), \quad (6.46)$$

essa substituição leva precisamente à equação do campo escalar (6.26) da teoria de k -essência.

É importante que, no caso da questão da conservação da matéria, uma comparação entre as duas teorias não leve a uma relação direta como (6.20) entre seus parâmetros numéricos n e b . Em vez disso, temos a igualdade (6.46), da qual (6.20) é restaurada apenas no caso especial $\rho = 3p$, ou seja, traço zero do tensor energia-momento de matéria.

6.2.5 Outras consequências da conservação da matéria

A relação (6.46) cria uma conexão entre o comportamento temporal do campo ψ e o conteúdo da matéria. De fato, substituindo (6.46) em (6.44) com potencial zero ou constante, encontramos

$$\dot{F} + \frac{6n}{2n-1} H F = 0, \quad (6.47)$$

em que, $F = \dot{\psi}^2$. Isto leva a

$$\dot{\psi}^2 = \psi_0 a^{-6n/(2n-1)}, \quad (6.48)$$

na qual ψ_0 é uma constante de integração.

A partir da equação (6.46), fica claro que a densidade de matéria e a pressão também devem evoluir como funções do fator escala, dada por lei de potência. Assim, apenas uma equação de estado do tipo $p = w\rho$, com $w = \text{constante}$, é possível. Neste caso,

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad \rho_0 = \text{constante}, \quad (6.49)$$

implicando a relação entre w e n

$$w = \frac{1}{2n-1}. \quad (6.50)$$

Vemos que, uma simples substituição de $p = w\rho$, na equação do campo escalar, relaciona o fator w da equação de estado, com o expoente n de k -essência, enquanto a constante b de Rastall permanece arbitrária. Além disso, as equações (6.24) e (6.25) mostram que o campo escalar puro ϕ de k -essência se comporta como um fluido perfeito com o mesmo fator da equação de estado (6.50) (consulte também [3]).

Em outras palavras, assumindo um potencial zero ou constante, $V = (3 - 2b)W$, com uma matéria conservativa na estrutura Rastall, obtemos que a *dualidade k -R* só será possível se a matéria for um fluido perfeito com a equação de estado linear, $p = w\rho$, coincidindo com a equação de estado efetiva do campo escalar ϕ .

Adotando $p = w\rho$ a equação (6.46) torna-se

$$\epsilon\psi^2 = k\rho, \quad k = \frac{n(b-1)(1-3w)}{bn-2n+1}. \quad (6.51)$$

Substituindo a expressão anterior na equação tipo Friedmann (6.31), obtemos em termos de n ou w

$$3H^2 = V + \frac{\rho}{2n-1} \left\{ \frac{2nb(b-1)(n-2)}{bn-2n+1} + 2(2b-3) + 2n(3-b) \right\} \quad (6.52)$$

$$= V + \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{b(b-1)(1+w)(1-3w)}{(b-2)(1+w)+2w} + 3-b+3w(b-1) \right\}. \quad (6.53)$$

O lado direito da equação anterior deve ser positiva. Portanto, considerando n e V , ou alternativamente w e V , obtemos uma restrição em b . Por exemplo, se $V = 0$ e $w = 0$ (poeira, $n \rightarrow \infty$)², temos $b < 3/2$ ou $b > 2$ (dado que $\rho > 0$). Para $w = 1$ (matéria rígida, $n = 1$), não há restrição para b e obtemos $H^2 = V = \text{constante} > 0$, portanto, uma expansão de Sitter, $a(t) \propto e^{Ht}$. Nesse caso, a matéria rígida cancela com precisão a contribuição do campo escalar ψ ou ϕ .

Se introduzirmos um potencial variável ou uma equação de estado mais complexa, a situação se torna muito mais envolvida. Deve-se enfatizar que a equação de estado $p = w\rho$, com $w = \text{constante}$, cobre a maioria dos casos interessantes em cosmologia. Além disso, esperamos que o comportamento perturbativo possa ser muito diferente nas duas teorias, mesmo neste caso.

Surgem mais duas questões naturais. Primeiro, obtivemos que na teoria de k -essência existe simultaneamente um campo escalar e um fluido perfeito com a mesma equação de estado e, portanto, a mesma evolução temporal de suas densidades e pressões. Podemos unificá-los, por exemplo, redefinindo o campo escalar? Uma resposta provável é “não”, porque se espera que esses dois tipos de matéria se comportem de maneira bastante diferente em nível perturbativo.

²Essa relação faz sentido mesmo que a formulação lagrangiana fique mal definida, consulte [3].

Outra pergunta é: como é possível ter uma situação completamente definida na teoria de k -essência, mas uma arbitrariedade no parâmetro b na solução dupla da teoria de Rastall? Uma resposta é que essa arbitrariedade é compensada pelo comportamento não conservativo correspondente do campo escalar ψ .

6.3 Perturbação e velocidade do som

Um modelo de k -essência com lei da potência e $V = 0$ é equivalente na estrutura cosmológica, de modo que $(\partial_\mu \phi)^2 > 0$, a um fluido perfeito com a equação de estado $p = w\rho$, em que a constante w está relacionada ao poder n :

$$w = \frac{1}{2n - 1}. \quad (6.54)$$

Em um fluido, perturbações adiabáticas se propagam como o som com velocidade c_s , de tal forma que

$$c_s^2 = dp/d\rho = w. \quad (6.55)$$

Como já foi mostrado, as perturbações do campo escalar para Lagrangianas gerais da forma $F(X, \phi)$, a velocidade do som é dada por

$$c_s^2 = \frac{F_X}{F_X + 2X F_{XX}}. \quad (6.56)$$

Essa expressão é válida mesmo se houver um termo potencial arbitrário $V(\phi)$. Em particular, para a teoria (6.4), em que $F(X) = F_0 X^n - 2V(\phi)$, encontramos novamente

$$c_s^2 = \frac{1}{2n - 1}, \quad (6.57)$$

em total concordância com (6.55). Portanto, existe uma equivalência completa entre um fluido perfeito e a k -essência sem potencial, não apenas para um fundo cosmológico, mas também no nível perturbativo, no que diz respeito às perturbações adiabáticas. Em particular, se $w < 0$, que correspondente a $n < 1/2$, o modelo é instável, pois implica $c_s^2 < 0$. Isso é verdade tanto para um fluido perfeito quanto para a k -essência. Além disso, embora a presença de um potencial altere a dinâmica do campo escalar, a velocidade de propagação de

suas perturbações, coincidindo com a velocidade derivada do som [88], ainda é a mesma que com $V = 0$.

Na teoria de Rastall, as coisas podem ser diferentes. A velocidade do som para um campo escalar é dada por [55, 59]

$$c_s^2 = \frac{2-b}{b}. \quad (6.58)$$

No vácuo escalar e no modelo R1, em que a matéria obedece à equação de não conservação (6.36), temos a relação (6.20), ou seja, $(2-b)n = 1$, que torna (6.57) e (6.58) idênticos. Além disso, os fluidos nos modelos correspondentes obedecem a diferentes equações de estado, veja (6.40). No entanto, no modelo de Rastall ainda podemos caracterizar o fluido pelas densidade e pressão, “efetivos”, $\tilde{\rho}$ e \tilde{p} , o tensor energia-momento escrito em seus termos é conservativo, portanto, o quadrado da velocidade do som do fluido de Rastall é igual a $d\tilde{p}/d\tilde{\rho} = dp_k/d\rho_k$. Assim, podemos concluir que os modelos pertencentes às duas teorias coincidem não apenas no nível de fundo, mas também no nível de perturbações adiabáticas.

No modelo R2, em que a matéria é conservada, temos outra relação (6.46) entre os parâmetros b e n , sem uma conexão tão simples. Como consequência, em princípio, é possível que um modelo instável em um modelo k -essência possa corresponder a um modelo estável na teoria de Rastall, ou vice-versa, pois, como mostrado acima, a equação (6.20) não se aplica, sendo b agora essencialmente independente de n , até algumas restrições possíveis em seu intervalo. De fato, nesse caso, até perturbações não adiabáticas podem ser parecidas, devido ao acoplamento entre o campo escalar e a matéria.

6.4 Alguns casos especiais

6.4.1 Caso especial I: $n = 1/2$

Nesse caso, a equação do campo escalar de k -essência assume a forma

$$3H = -2F_0^{-1}V_\phi. \quad (6.59)$$

Assim, se $V = \text{constante}$, temos $H = 0$, portanto $a = \text{constante}$ e o espaço-tempo plano é obtido. Certamente, pode-se obter $H = 0$ na gravidade de Rastall sob suposições especiais, mas a questão da dualidade k - \mathcal{R} parece sem sentido nesse caso trivial.

Se $V = V(\phi)$, o campo ϕ não possui uma dinâmica própria, mas a equação (6.59) é expressa em termos de H , e as equações de Friedmann (6.24) e (6.25) são significativas.

A contraparte de Rastall nos casos de vácuo escalar e modelo R1 é obtida com $b = 0$, $V = 3W$, de acordo com (6.20) e (6.19) e, portanto

$$2\epsilon\dot{\psi}^2 = F_0\dot{\phi}. \quad (6.60)$$

No caso do modelo R2 (matéria conservada), b permanece arbitrário, mas a dualidade k - \mathcal{R} ainda é válida. De fato, se substituirmos (6.60) na equação (6.44) e usar as equações do tipo Friedmann (6.31), (6.32) para calcular $\dot{\rho} - 3\dot{p}$, obtemos a equação (6.59).

A principal característica nesse caso é que as soluções não triviais com $n = 1/2$ e dualidade k - \mathcal{R} é alcançada apenas na presença de um potencial variável.

6.4.2 Caso especial II: $b = 3/2$

Para esse valor de b , o potencial desaparece na gravidade de Rastall, portanto, a dualidade k - \mathcal{R} implica $V = 0$, e lidamos com zero potencial. Em outros aspectos, a situação é descrita como no caso geral.

Uma característica interessante é que, com $b = 3/2$ na equação (6.29), leva a $\tilde{\rho} = 3\tilde{p}$. Portanto, nos casos de vácuo escalar e modelo R2 (matéria conservada), a contraparte de k -essência desse modelo Rastall contém matéria com $\rho_k = 3p_k$. Devido a (6.20), além disso, $n = 2$, para que o campo ϕ também se comporte como radiação.

No modelo R2, as relações (6.40) e (6.20) não são mais válidas e a descrição geral é aplicável.

6.4.3 Caso especial III: $b = 2$

As equações (6.54) e (6.58) fornecem valores em que a pressão e a velocidade do som de um campo escalar se anulam, na teoria de Rastall. A expressão correspondente (6.57) na teoria da k -essência leva a $n \rightarrow \infty$ de acordo com a relação geral (6.20).

Se houver matéria conservada (modelo R2), então, a menos que essa matéria conservada seja pura radiação, $\rho = 3p$, a equação (6.20) não será mais válida, de modo que as velocidades do som dos campos escalares sejam diferentes na duas teorias. Isso significa que a dualidade k - R não existe para perturbações, mesmo que exista para o fundo isotrópico.

6.4.4 Caso especial IV: $b = 0$

Nos casos de vácuo escalar e modelo R2, retornamos à descrição acima por $n = 1/2$.

Com matéria conservada (modelo R2), o campo escalar de Rastall assume a forma

$$3H\epsilon\psi^2 = -3\dot{W} - \frac{1}{2}(\dot{\rho} - 3\dot{p}), \quad (6.61)$$

parecendo uma equação de restrição, uma vez que contém apenas a derivada de primeira ordem. No entanto, a dualidade k - R ainda funciona, como antes: uma substituição de (6.41), o que é importante, com $n \neq 0$ arbitrários, e $\rho - 3p$ das equações (6.31), (6.32) em (6.61) leva a (6.26), que é uma equação de segunda ordem, a menos que $n = 1/2$.

6.5 Exemplos

Vamos agora considerar alguns exemplos específicos da equivalência discutida anteriormente, assumindo um potencial zero ou constante e poeira como uma possível contribuição da matéria.

6.5.1 Vácuo escalar

Considere o vácuo escalar com potencial zero. As equações de k -essência são

$$\dot{\phi} = \phi_0 a^{-3/(2n-1)}, \quad \phi_0 = \text{constante}, \quad (6.62)$$

$$H^2 = \frac{2n-1}{6} F_0 \phi_0^{2n} a^{-6n/(2n-1)}, \quad (6.63)$$

Em termos de tempo cósmico, obtemos

$$a = a_0 t^{2/[3(1+w)]}, \quad a_0 = \text{constante}, \quad (6.64)$$

$$\dot{\phi} = \phi_1 t^{-2w/(1+w)}, \quad (6.65)$$

em que ϕ_1 é uma combinação das constantes anteriores e, escrevendo $w = 1/(2n-1)$, identificando assim a k -essência com um fluido perfeito com a equação de estado $p = w\rho$.

Na teoria de Rastall, a solução dual contém o mesmo $a(t)$, enquanto o campo escalar é dado por

$$\dot{\psi} \propto a^{-3(1+w)/2} = a^{-3/b} \propto t^{-1}, \quad (6.66)$$

em que agora devemos colocar $w = (2-b)/b$. Notemos que, embora o comportamento de campo escalar de k -essência dependa do parâmetro equação de estado w , o campo escalar em Rastall é simplesmente $\psi = \log t + \text{constante}$.

A adição de um potencial constante, equivalente a uma constante cosmológica, não altera as leis de evolução de campo escalar (6.62) e (6.66) em termos de a mas torna as dependências do tempo mais complexas, não para serem consideradas aqui.

Na presença da matéria, como vimos acima, a forma da dualidade k - \mathcal{R} depende de como a matéria se acopla ao campo escalar.

6.5.2 Poeira e Rastall-R1

Suponha que na teoria de k -essência, além do campo escalar ϕ , há um fluido sem pressão, somente poeira, de modo que

$$p_k = 0, \quad \rho_k = \rho_1 a^{-3}, \quad \rho_1 = \text{constante.} \quad (6.67)$$

então, na versão R1 da teoria de Rastall, de acordo com o (6.40), temos as condições

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[(3-b)\rho + 3(b-1)p \right] &= \tilde{\rho} = \rho_k, \\ \frac{1}{2} \left[(b-1)\rho + (5-3b)p \right] &= \tilde{p} = 0, \end{aligned} \quad (6.68)$$

levando às seguintes relações para a densidade e pressão

$$\rho = \frac{5-3b}{2(3-2b)} \rho_k, \quad (6.69)$$

$$p = \frac{1-b}{5-3b} \rho = \frac{1-b}{2(3-2b)} \rho_k, \quad (6.70)$$

ambos evoluindo como $\rho \propto p \propto a^{-3}$. Assim, na cosmologia de Rastall o fluido adquire pressão, exceto para o valor da relatividade geral, $b = 1$. Os campos escalares em ambos os modelos satisfazem as mesmas relações que no caso do vácuo, válidos para quaisquer valores de n e b tais que $n(b-2) = 1$.

Adicionar um potencial constante, $V = (3-2b)W$, não altera as relações (6.5.2) e (6.69) e introduz uma constante cosmológica efetiva. Obtemos, então, um modelo de três componentes com matéria, uma constante cosmológica e um campo escalar cujo comportamento é determinado por n ou, equivalentemente, por $w = 1/(2n-1)$. No modelo dual de Rastall, temos uma pressão efetiva, embora no modelo de k -essência $p_k = 0$.

Se, pelo contrário, introduzimos a matéria com $p = 0$ na teoria de Rastall (modelo R1), então, no modelo de dual de k -essência temos

$$\rho_k = \tilde{\rho} = \frac{1}{2}(3-b)\rho, \quad p_k = \tilde{p} = \frac{1}{2}(b-1)\rho, \quad (6.71)$$

e sua lei de evolução concordando com a equação (6.39) leva à

$$\rho_k \propto \rho \propto a^{-6/(3-b)} = a^{-3(1+w_k)}, \quad (6.72)$$

onde o parâmetro da equação de estado w_k do fluido no modelo k -essência é dado por

$$w_k = \frac{b-1}{3-b} = \frac{n-1}{n+1}, \quad (6.73)$$

que não pode confundido com $w = 1/(2n-1)$ caracterizando o comportamento do campo ϕ ; como antes, a relação $n(2-b) = 1$ é válida. O modelo assim obtido é bem diferente daquele com poeira introduzido na teoria da k -essência.

6.5.3 Poeira e Rastall-R2

Vamos novamente assumir Eq. (6.67) mas agora considere o modelo R2 da teoria de Rastall, de modo que agora $\rho \propto a^{-3}$ e

$$\epsilon\dot{\psi}^2 \left[b - \frac{2n-1}{n} \right] = (b-1)\rho \propto a^{-3}. \quad (6.74)$$

Em seguida, para $b \neq 1$ encontramos de acordo com (6.45)

$$\dot{\psi} \propto a^{-3/2}, \quad (6.75)$$

$$\dot{\phi}^n \propto a^{-3/2} \Rightarrow \dot{\phi} \propto a^{-3/(2n)}. \quad (6.76)$$

Combinando a relação acima com $\epsilon\dot{\psi}^2 = nF_0\dot{\phi}^{2n}$ e a equação de campo (6.26), considerando $V_\phi = 0$, descobrimos que essa situação corresponde ao limite $n \rightarrow \infty$, que é, no entanto, bem definida. Desta forma obtemos $a \propto t^{2/3}$ como no modelo de poeira da relatividade geral. Para os campos escalares ele segue neste limite

$$\dot{\phi} = \text{constante} \Rightarrow \phi \propto t, \quad (6.77)$$

$$\dot{\psi} \propto a^{-3/2} \propto 1/t. \quad (6.78)$$

A condição para b é obtida de (6.74): escrevendo $\dot{\psi} = \psi_0/t$ e $\rho = \rho_0/t^2$, encontramos

$$\epsilon\psi_0^2(b-2) = (b-1)\rho_0. \quad (6.79)$$

Assim, o valor de b é determinado pelas contribuições relativas da matéria e do campo escalar. Além disso, a velocidade do som do campo escalar agora não segue a relação adiabática verificada no modelo R1.

Uma constante cosmológica pode ser facilmente introduzida sob a forma de $V = (3 - 2b)W = \text{constante}$. O campo escalar novamente segue a lei (6.74), e toda a configuração se reduz ao modelo Λ CDM onde Λ é dado pelo potencial constante e a componente de matéria consiste no campo escalar e matéria ordinária. Todas as relações de fundo do modelo Λ CDM são preservadas neste caso, mas a degenerescência entre o campo escalar e a matéria normal é quebrada ao nível perturbativo. Devido ao fato de o modelo Λ CDM estar sujeito a problemas a nível perturbativo no regime não linear (ver, por exemplo, [15, 37]), uma configuração mais complexa nos modelos k -essência e Rastall pode levar a resultados interessantes, a serem estudados no futuro.

Estudo da Estabilidade em espaços esfericamente simétricos

7.1 Estudo da Estabilidade em Teoria de k -essência

O objetivo deste capítulo é estudar a estabilidade de configurações estáticas e esféricas simétricas encontradas no contexto da classe de teorias da k -essência descritas durante o texto. O estudo da estabilidade de estruturas do tipo buraco negro com campos escalares é um assunto polêmico, com muitas questões conceituais e técnicas, veja, por exemplo, [24–26, 67, 80] e suas referências. Ao realizar a análise de estabilidade para as estruturas do tipo buraco negro em k -essência encontradas na seção (5.1), seguimos de perto a abordagem usada em [24].

A ênfase do estudo da estabilidade será feito nos dois casos apresentados anteriormente. O primeiro consiste em um termo cinético puro, com $n = 1/3$ e $V(\phi) = 0$, levando a um buraco negro do tipo Schwarzschild imerso em um espaço-tempo singular, em que a singularidade se encontra no infinito espacial. A outra solução é obtida fixando $n = 1/2$ e $V(\phi) = \Lambda = \text{constante}$, levando a um espaço-tempo regular não assintoticamente plano, com um horizonte degenerado, uma estrutura localmente semelhante à buracos negros frios que estão presentes nas teorias de gravidade dos escalar-tensorial [21]

7.1.1 Equações perturbadas

Variando a Lagrangiana (5.1), novamente, com respeito à métrica e ao campo escalar, obtemos as seguintes equações de campo

$$G_\mu^\nu = -T_\mu^\nu[\phi], \quad (7.1)$$

$$T_\mu^\nu[\phi] \equiv \eta F_X \phi_\mu \phi^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu F, \quad (7.2)$$

$$\eta \nabla_\alpha (F_X \phi^\alpha) - \frac{1}{2} F_\phi = 0, \quad (7.3)$$

em que G_μ^ν é o tensor de Einstein. Estamos adotando as notações $F_X = \partial F / \partial X$, $F_\phi = \partial F / \partial \phi$, e $\phi_\mu = \partial_\mu \phi$.

Considerando um espaço-tempo esfericamente simétrico com a métrica

$$ds^2 = e^{2\gamma(u,t)} dt^2 - e^{2\alpha(u,t)} du^2 - e^{2\beta(u,t)} d\Omega^2, \quad (7.4)$$

na qual, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ é a métrica numa esfera unitária.

Assumindo apenas pequenas perturbações dependentes do tempo, temos

$$\alpha(u, t) = \alpha(u) + \delta\alpha(u, t), \quad \beta(u, t) = \beta(u) + \delta\beta(u, t), \quad \gamma(u, t) = \gamma(u) + \delta\gamma(u, t), \quad (7.5)$$

em que assumimos $\delta\alpha$, $\delta\beta$ e $\delta\gamma$ pequenos. A coordenada radial u é arbitrária, admitindo qualquer reparametrização $u \mapsto \bar{u}(u)$. As componentes do tensor de Ricci diferentes de zero podem ser escritos no formato a seguir, preservando apenas termos lineares com relação a derivadas de tempo.

$$R_t^t = e^{-2\gamma} (\ddot{\alpha} + 2\ddot{\beta}) - e^{-2\alpha} [\gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha' + 2\beta')], \quad (7.6)$$

$$R_u^u = e^{-2\gamma} \ddot{\alpha} - e^{-2\alpha} [\gamma'' + 2\beta'' + \gamma'^2 + 2\beta'^2 - \alpha'(\gamma' + 2\beta')], \quad (7.7)$$

$$R_\theta^\theta = R_\varphi^\varphi = e^{-2\beta} + e^{-2\gamma} \ddot{\beta} - e^{-2\alpha} [\beta'' + \beta'(\gamma' - \alpha' + 2\beta')], \quad (7.8)$$

$$R_{tu} = 2[\dot{\beta}' + \dot{\beta}\beta' - \dot{\alpha}\beta' - \dot{\beta}\gamma'], \quad (7.9)$$

em que os sobrescritos pontos e linhas significam $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial u$, respectivamente.

De maneira semelhante, assumimos que

$$\phi = \phi(u, t) = \phi(u) + \delta\phi(u, t) \quad (7.10)$$

com $\delta\phi$ pequeno. A partir da equação (5.2), para campos escalares estáticos e levemente não estáticos, assumindo $\eta = -1$ para manter X positivo, de modo que, preservando apenas termos lineares em $\delta\phi$, temos as expressões para X e δX

$$X = e^{-2\alpha}\phi'^2, \quad (7.11)$$

$$\delta X = 2e^{-2\alpha}(\phi'\delta\phi' - \phi'^2\delta\alpha). \quad (7.12)$$

As componentes não nulas do tensor energia-momento são:

$$T_t^t = T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = -F/2, \quad T_u^u = -F/2 + XF_X, \quad (7.13)$$

$$T_{tu} = -F_X\dot{\phi}\phi', \quad (7.14)$$

em que, levando em consideração as perturbações, devemos entender

$$F \rightarrow F(X) + F_X\delta X + F_\phi\delta\phi \quad \text{e} \quad F_X \rightarrow F_X(X) + F_{XX}\delta X + F_{X\phi}\delta\phi. \quad (7.15)$$

A seguir, consideraremos uma classe mais específica de lagrangianas de k -essência: em vez de $F(X, \phi)$, usamos simplesmente $F(X)$. Em seguida, a equação do campo escalar e as componentes não triviais das equações de campo podem ser escritas da seguinte maneira:

$$F_X e^{\alpha+2\beta-\gamma}\ddot{\phi} - \left(F_X e^{-\alpha+2\beta+\gamma}\phi'\right)' = 0, \quad (7.16)$$

$$-e^{2\alpha-\beta} + \beta'(\beta' + 2\gamma') = \left(\frac{1}{2}F - XF_X\right)e^{2\alpha}, \quad (7.17)$$

$$-e^{2\alpha-2\beta} + 2\beta'' + 3\beta'^2 - 2\alpha'\beta' = \frac{1}{2}F e^{2\alpha}, \quad (7.18)$$

$$e^{2\alpha-2\beta} + e^{2\alpha-2\gamma}\ddot{\beta} - \beta'' - \beta'(\gamma' - \alpha' + 2\beta') = -\frac{1}{2}e^{2\alpha}(F - XF_X), \quad (7.19)$$

$$\dot{\beta}' + \dot{\beta}\beta' - \dot{\alpha}\beta' - \dot{\beta}\gamma' = \frac{1}{2}F_X\dot{\phi}\phi', \quad (7.20)$$

mais explicitamente, com as perturbações

$$\begin{aligned} \delta\gamma'' + (\gamma' - \alpha' + 2\beta')\delta\gamma' + \gamma'(\delta\gamma' - \delta\alpha' + 2\delta\beta') - e^{2(\alpha-\gamma)}(\delta\ddot{\alpha} + 2\delta\ddot{\beta}) = \\ (1-n)(-\eta)^n \phi'^{2n-1} \left\{ n\delta\phi' + (1-n)\phi'\delta\alpha \right\} e^{2(1-n)\alpha} - 2e^{2\alpha}\Lambda\delta\alpha, \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma'' + 2\delta\beta'' - \delta\alpha(\gamma' + 2\beta') - \alpha'(\delta\gamma' + 2\delta\beta') + 2\gamma\delta\gamma' + 4\beta'\delta\beta' - e^{2(\alpha-\gamma)}\delta\ddot{\alpha} = \\ (1+n)(-\eta)^n e^{2(1-n)\alpha} \phi'^{(2n-1)} \left\{ n\delta\phi' + (1-n)\phi'\delta\phi \right\} - 2e^{2\alpha}\Lambda\delta\alpha, \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \delta\beta'' + (\gamma' - \alpha' + 2\beta')\delta\beta' + \beta'(\delta\gamma' - \delta\alpha' + 2\delta\beta') - e^{2(\alpha-\gamma)}\delta\ddot{\beta} + 2(\delta\beta - \delta\alpha)e^{2(\alpha-\beta)} = \\ (1-n)(-\eta)^n e^{2(1-n)\alpha} \phi'^{2n-1} \left\{ n\delta\phi' + (1-n)\phi'\delta\alpha \right\} - 2e^{2\alpha}\Lambda\delta\alpha; \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\delta\dot{\beta}' + (\beta' - \gamma')\delta\dot{\beta} - \beta'\delta\dot{\alpha} = \frac{n}{2}(-\eta)^n \phi'^{2n-1} e^{2(1-n)\alpha} \delta\dot{\phi} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} e^{2(\alpha-\gamma)}\delta\ddot{\phi} - (2n-1)\delta\phi'' - \left\{ \gamma' - (2n-1)\alpha' + 2\beta' \right\} \delta\phi' \\ - \left\{ \delta\gamma' - (2n-1)\delta\alpha' + 2\delta\beta' \right\} \phi' = 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Agora, vamos supor que as equações estáticas, de fundo, são satisfeitas, mesmo depois das perturbações, com todos os “deltas” iguais a zero. Como estamos trabalhando no contexto da relatividade geral na presença de um campo escalar não canônico, as perturbações de tensores esfericamente simétricos não contêm um grau dinâmico independente de liberdade, e a única equação dinâmica essencial é a do campo escalar, (7.16). Devemos manipular as equações de Einstein perturbadas, de modo que as quantidades $\delta\alpha$, $\delta\beta$ e $\delta\gamma$ sejam removidas da equação do campo escalar.

De acordo com que foi enunciado neste problema, assim como em muitos outros problemas semelhantes [24–26, 67, 80], temos dois tipos de arbitrariedade: a escolha de coordenadas radiais, até agora deixado arbitrário; o calibre da perturbação, que corresponde à fixar de um referencial no espaço-tempo perturbado. Como em [24, 67], é muito vantajoso escolher calibre $\delta\beta = 0$, que simplifica substancialmente os cálculos, e, após obter a forma final da equação de perturbação, é necessário ter certeza de que é invariante de calibre.

Com $\delta\beta = 0$, a equação para $\delta\phi$ é dada por

$$-e^{2\alpha-2\gamma}\delta\ddot{\phi} + \delta\phi'' + \phi'\delta\sigma' + \sigma'\delta\phi' + \frac{F'_X}{F_X}\delta\phi' + \phi'\delta\left(\frac{F'_X}{F_X}\right) = 0, \quad (7.26)$$

em que

$$\sigma = 2\beta + \gamma - \alpha, \quad \delta\sigma = \delta\gamma - \delta\alpha. \quad (7.27)$$

Uma vez que $X = e^{-2\alpha}\phi'^2$, as quantidades perturbadas δX e $\delta X'$ contêm combinações de $\delta\phi'$, $\delta\phi''$, $\delta\alpha$ e $\delta\alpha'$. Em particular, se assumimos

$$F(X) = F_0 X^n - 2\Lambda, \quad n, \Lambda = \text{constante}, \quad (7.28)$$

a equação (7.26) ganha a seguinte forma

$$-e^{2\alpha-2\gamma}\delta\ddot{\phi} + (2n-1)\delta\phi'' + \delta\phi'[\sigma' - 2(n-1)\alpha'] + \phi'[\delta\gamma' - (2n-1)\delta\alpha'] = 0. \quad (7.29)$$

As quantidades $\delta\gamma'$, $\delta\alpha$ e $\delta\alpha'$ podem ser escritas em termos de $\delta\phi$ e suas derivadas, como também, pelas quantidades de fundo, usando as equações de Einstein. Mais especificamente, a equação (7.17) fornece uma expressão para $\delta\gamma'$. A diferença $\delta\gamma' - \delta\alpha'$ é obtida a partir de (7.19), que contém $\delta\alpha$; sendo que, esta última é encontrada a partir de (7.20)

$$\delta\alpha = -\frac{n}{2\beta'}X^{n-1}\phi'\delta\phi. \quad (7.30)$$

Como resultado, a equação de campo para $\delta\phi$ toma a forma

$$-e^{2\alpha-2\gamma}\delta\ddot{\phi} + (2n-1)\delta\phi'' + \delta\phi'[\sigma' - 2(n-1)\alpha'] - \frac{n^2}{\beta'^2}(e^{-2\beta} - \Lambda)e^{4\alpha}F_0X^n\delta\phi = 0. \quad (7.31)$$

Após algumas substituições, encontramos

$$u \mapsto z : \quad \frac{du}{dz} = e^{\gamma-\alpha},$$

$$\delta\phi = \Psi(z)e^{i\omega t}, \quad \Psi(z) = f(z)\psi(z), \quad (7.32)$$

$$f(z) = \exp\left[-\frac{\beta + (1-n)\gamma}{2n-1}\right], \quad (7.33)$$

obtemos uma equação do tipo Schrödinger para ψ ,

$$(2n - 1) \frac{d^2\psi}{dz^2} + [\omega^2 - V(z)]\psi(z) = 0, \quad (7.34)$$

na qual $V(z)$ é o potencial efetivo para perturbações escalares.

Podemos afirmar que a solução estática de fundo é instável em nossa aproximação linear se a equação (7.31) tiver uma solução que cresce com o tempo e satisfazendo certas condições de fronteira fisicamente relevantes. Isso acontece quando o problema correspondente de valor de contorno para a equação (7.34) tem soluções com $\omega^2 < 0$ já que, neste caso, existem soluções fisicamente significativas para a equação (7.31) crescendo como $e^{|\omega|t}$.

O problema exato de valor de contorno para a equação (7.34) não pode ser representado sem invocar soluções de fundo específicas. No entanto, uma observação geral pode ser feita imediatamente.

De fato, se $n < 1/2$, a equação (7.34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{\Omega^2 + W(z)}{1 - 2n} \psi(z) = 0, \quad (7.35)$$

em que $\Omega^2 = -\omega^2$. Esta é uma forma usual da equação de Schrödinger para o "nível de energia" $\Omega^2/(1 - 2n)$ com o potencial $W(z) = -V/(1 - 2n)$. Dependendo da forma particular de V e das condições de contorno, o problema correspondente de valor de contorno tem um certo espectro de autovalores, e na maioria das situações (em uma analogia com a quântica mecânica, se $-V$ não formar paredes potenciais em ambas as extremidades do intervalo de z), há um espectro contínuo $\Omega^2 > K = \text{constante}$. Mesmo que haja apenas um espectro discreto, na maioria dos casos não é limitado por cima. Mas tudo isso significa que ω^2 não está limitado por baixo, portanto o sistema de fundo é catastroficamente instável e decai, na aproximação linear, infinitamente, o que significa que as perturbações se tornam muito rapidamente grandes e devem ser consideradas em um modo não linear.

Se isso realmente acontece ou não, deve ser verificado para soluções específicas e condições de contorno relevantes para $\delta\phi$ e ψ . No entanto, podemos concluir que soluções com $n < 1/2$ são genericamente instáveis.

Em paralelo, podemos fazer uma breve análise através da velocidade do som, usado em muitos trabalhos em k -essência [11, 61]. Como foi apresentado nas seções anteriores, a expressão da velocidade do som para k -essência é dada por

$$c_s^2 = \frac{F_X}{F_X + 2X F_{XX}}, \quad (7.36)$$

ou, em nosso modelo,

$$c_s^2 = \frac{1}{2n - 1}, \quad (7.37)$$

Podemos ver na expressão (7.37) que c_s é imaginário para $n < 1/2$ e superluminal por $1/2 < n < 1$, de acordo com o que foi mostrado antes.

7.1.2 Duas soluções especiais e suas instabilidades

Solução especial I: $n = \frac{1}{3}$, $\Lambda = 0$

A primeira solução exata, apresentada na seção (6.57), corresponde ao caso $n = 1/3$, $\Lambda = 0$. É convenientemente escrita em termos da chamada coordenada quasiglobal $u = x$ definida pela condição $\alpha(x) + \gamma(x) = 0$. A métrica tem o forma

$$ds^2 = \frac{B(x)}{k^2 x} dt^2 - \frac{k^2 x}{B(x)} dx^2 - \frac{1}{k^2 x} d\Omega^2, \quad (7.38)$$

$$B(x) = B_0 - \frac{1}{2} k^2 x^4,$$

na qual B_0 e k são constantes de integração. O campo escalar ϕ é determinado pela relação

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi_0 \left(\frac{B_0}{x^4} - \frac{1}{2} k^2 \right), \quad \phi_0 = \text{constante}. \quad (7.39)$$

Se $B_0 \leq 0$, a função métrica $A(x) = g_{tt} = -g^{xx} < 0$, e estamos lidando com um caso especial de um modelo cosmológico de Kantowski-Sachs. Portanto, em nosso estudo de estabilidade, colocamos $B_0 > 0$; nesse caso, a métrica é estática em $0 < x < x_h = (2B_0)^{1/4}/k$ e em $x = x_h$ é um horizonte de Killing além do qual existe uma região cosmológica. Em $x = 0$, em que $r^2 = -g_{\theta\theta} = \infty$ (então pode ser chamado de infinito espacial), existe uma singularidade em que tanto ϕ quanto o escalar de Kretschmann $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ são infinitos. O

diagrama de Carter-Penrose (fig. 5.1) para este espaço-tempo parece o mesmo que para a métrica de *de Sitter*, embora aqui uma região T não estática corresponda a raios $r(x) < r(x_h)$, como acontece com os buracos negros. Portanto, concluiu-se [23] que esta solução descreve um buraco negro em um espaço-tempo assintoticamente singular.

A equação de perturbação (7.31) para $n = 1/3$, $\alpha + \gamma = 0$ e $\Lambda = 0$ é dada por

$$-3e^{-4\gamma}\delta\ddot{\phi} - \delta\phi'' + 2(3\beta' + \gamma')\delta\phi' - \frac{F_0}{3\beta'^2}e^{-2\beta+4\alpha}X^{1/3}\delta\phi = 0, \quad (7.40)$$

na qual, de acordo com (7.1.2) e (7.39), devemos substituir

$$e^{2\gamma} = e^{-2\alpha} = \frac{B(x)}{k^2x}, \quad e^{2\beta} = \frac{1}{k^2x}, \quad (7.41)$$

os termos da métrica, e

$$X^{1/3} = \frac{B(x)\phi_0^{2/3}}{k^{2/3}x^3}, \quad (7.42)$$

a função de k -essência.

Mais adiante, consideramos um modo de Fourier, $\delta\phi = \Psi(x)e^{i\omega t}$ para obter uma equação tipo Schrödinger para este modo, removendo o fator $e^{-4\gamma}$ antes de $\delta\ddot{\phi} = -\omega^2\delta\phi$ passando para a coordenada "tartaruga" z , de tal forma que

$$\frac{dx}{dz} = e^{\gamma-\alpha} = e^{2\gamma}, \quad (7.43)$$

que resulta em

$$\Psi_{zz} - 2(3\beta_z + 2\gamma_z)\Psi_z - 3\omega^2\Psi + F_1B(x)\Psi = 0, \quad (7.44)$$

em que o subscrito z significa d/dz e $F_1 > 0$ é uma constante cujo valor particular é irrelevante. Por fim, nos livramos do termo com Ψ_z substituindo

$$\Psi(z) = e^{3\beta+2\gamma}\psi(z), \quad (7.45)$$

e com as funções (7.41-7.42) obtemos a equação

$$\psi_{zz} - [3\omega^2 + V(z)]\psi = 0,$$

$$V(z) = -F_1 B(x) + \frac{5B_0^2}{4k^4 x^4} + \frac{31B_0}{4k^2} - \frac{3x^4}{16}. \quad (7.46)$$

Com esta equação tipo Schrödinger, podemos representar um problema de valor de contorno em que o papel de um nível de energia é desempenhado pela quantidade $E = -3\omega^2$. Isso significa que se o espectro de E não for restrito por cima, então ω^2 não está restrito por baixo, e o que leva a um possível crescimento de perturbações com incrementos arbitrariamente grandes.

Para descobrir se é realmente assim, vamos olhar para o comportamento do potencial nos extremos do intervalo de z e formular as condições de contorno para ψ .

A coordenada x varia de $x = 0$, a singularidade, a $x = x_h$, o horizonte, em que x_h é raiz de $B(x)$. É fácil descobrir que $x = 0$ corresponde a um z , e podemos assumir que $z = 0$, e então

$$z \propto x^2 \text{ quando } x \rightarrow 0, \quad V(z) \approx \frac{5B_0}{4k^4 x^4} \propto \frac{1}{z^2}. \quad (7.47)$$

Por outro lado, perto de $x = x_h$,

$$z \propto -\ln(x_h - x) \rightarrow \infty, \quad V(z) \rightarrow -\frac{8B_0}{k^2}. \quad (7.48)$$

Assim, $z \in \mathbb{R}_+$, e $V(z)$ está mudando suavemente de uma "parede" infinitamente alta em $z = 0$ para uma constante negativa como $z \rightarrow \infty$.

E quanto as condições de contorno para ψ ? Vamos exigir que $\delta\phi$ nos limites não cresça mais rápido do que ϕ em si, o que, de acordo com (7.39), significa que $\delta\phi$ pode crescer como x^{-3} perto de $x = 0$ e deve ser finito como $x \rightarrow x_h$. Levando em conta as substituições (7.43) e (7.45), concluímos que ψ é permitido crescer em ambos os limites não mais rápido do que

$$\psi \sim e^z \text{ quando } z \rightarrow \infty, \quad \psi \sim z^{-1/4} \text{ quando } z \rightarrow 0. \quad (7.49)$$

Vemos que estes requisitos são muito mais suaves do que poderiam ser impostos a uma função de onda quântica mecânica, portanto o espectro de $E = -3\omega^2$ não é manifestamente

restrito acima (na verdade, um espectro contínuo deve começar com $-8B_0/k^2$ e estender-se até $+\infty$). Portanto, ω^2 pode tomar valores negativos arbitrariamente grandes em valor absoluto, e assim nossa configuração estática é catastróficamente instável.

Special solution II: $n = \frac{1}{2}, \Lambda > 0$

Como visto na seção (6.58), esta solução foi obtida considerando a condição de coordenada harmônica [20]

$$\alpha = 2\beta + \gamma, \quad (7.50)$$

Então, a equação (7.16) leva a

$$\left[ne^{2(1-n)\alpha} \phi'^{2n-1} \right]' = 0, \quad (7.51)$$

que, para $n = 1/2$, implica $e^\alpha = a = \text{constante}$. Em seguida, denotando $\Lambda = 3/b^2$ e escolhendo a escala de comprimento para que $a = b^2$, obtemos das equações de Einstein a métrica

$$ds^2 = \frac{9}{\cosh^4 bu} dt^2 - b^4 du^2 - \frac{b^2 \cosh^2 bu}{3} d\Omega^2, \quad (7.52)$$

$$\sqrt{X} = e^{-\alpha} |\phi'| = \frac{4}{F_0} \left(\Lambda - \frac{2}{b^2 \cosh^2 bu} \right) = \frac{4}{F_0 b^2} (1 + 2 \tanh^2 bu), \quad (7.53)$$

a expressão para a derivada primeira do campo escalar

$$\phi = \pm \frac{4}{F_0 b^2} \left(3u - \frac{2}{b} \tanh bu \right) + \phi_0, \quad (7.54)$$

e, por consequência, o campo escalar, com $\phi_0 = \text{constante}$. Em termos da coordenada quasiglobal $x = 3b \tanh bu$, reescrevemos a métrica

$$ds^2 = \frac{(9b^2 - x^2)^2}{9b^4} dt^2 - \frac{9b^4}{(9b^2 - x^2)^2} dx^2 - \frac{3b^4}{9b^2 - x^2} d\Omega^2, \quad (7.55)$$

a partir do qual existem dois horizontes de segunda ordem (degenerados) em $x = \pm 3b$. O campo escalar ϕ em todo o intervalo de x , $x \in \mathbb{R}$, é encontrado como

$$\phi = \pm \frac{4}{3F_0 b^4} \left(-2x + \frac{9b}{2} \ln \left| \frac{x+3b}{x-3b} \right| \right) + \phi_0 \quad (7.56)$$

e é singular nos horizontes $x = \pm 3b$, enquanto $X = A\phi'^2$ é infinito apenas como $x \pm \infty$ e é finito nos horizontes.

Considerando a estabilidade da região estática e aplicando as equações de perturbação ao nosso caso, notamos que em (7.52) ou (7.55) temos $2\beta + \gamma = 2 \ln b = \text{constante}$, portanto, $2\beta' + \gamma' = 0$, e agora, a equação (7.31) toma a seguinte forma

$$\delta \ddot{\phi} = h(u) \delta \phi, \quad (7.57)$$

na qual

$$h(u) = \frac{27}{b^4 \cosh^2 bu} (1 + 2 \tanh^2 bu) > 0 \quad (7.58)$$

A equação (7.57) é resolvida explicitamente. Sua primeira integral nos dá

$$\delta \dot{\phi}^2 = \delta \phi^2 h(u) + C_1(u), \quad C_1(u) \text{ arbitrário.} \quad (7.59)$$

Vamos colocar $C_1(u) \equiv 0$ e suponha que $h(u) > 0$ pelo menos em algum intervalo de u . Nós então obtemos

$$\delta \phi(t, u) = e^{\pm \sqrt{h(u)} t + C_2(u)}, \quad C_2(u) \text{ arbitrário.} \quad (7.60)$$

Evidentemente, na solução com o sinal de mais, $\delta \phi$ cresce com o tempo. Por outro lado, a arbitrariedade de $C_2(u)$ torna possível satisfazer *quaisquer* condições de contorno do formato $\delta \phi \leq q(u)$ onde $q(u)$ é especificado em cada fronteira a partir de alguns requisitos físicos, como energia de perturbação finita, etc.

Concluimos que *uma solução de fundo para as equações de k -essência com $n = 1/2$ é instável se a função $h(u)$ for positiva em algum intervalo da coordenada u .*

Isso obviamente se aplica à nossa solução, uma vez que a função (7.58) é positiva em todo u , ou seja, em toda a região estática. Significa que nossa solução estática é instável.

7.2 Estudo da Estabilidade na gravidade de Rastall

7.2.1 Equações básicas

As equações básicas na gravidade de Rastall já apresentadas e comentadas nas seções anteriores, com diferentes parametrizações, dependendo de cada caso. Nesta seção, vamos recuperar tais equações para facilitar a leitura e compreensão.

As equações de campo da teoria de Rastall, onde a única fonte de gravidade é um campo escalar ϕ com um potencial de auto-interação arbitrário $V(\phi)$, podem ser escritas na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \epsilon \left\{ \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{2-a}{2}g_{\mu\nu}\phi^{i\rho}\phi_{;i\rho} \right\} + (3-2a)g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (7.61)$$

$$\square\phi + (a-1)\frac{\phi^{i\rho}\phi^{i\sigma}\phi_{;i\rho;\sigma}}{\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha}} = -\epsilon(3-2a)V_{\phi}, \quad (7.62)$$

em que a é o parâmetro livre da teoria de Rastall, e as equações da relatividade geral são restauradas no caso $a = 1$. O parâmetro de Rastall a está relacionado ao outro parâmetro frequentemente utilizado λ por $a = \frac{3\lambda-2}{2\lambda-1}$. Deve-se adotar $\epsilon = +1$ para um campo escalar canônico e $\epsilon = -1$ para um fantasma.

As equações (7.61) podem ser reescritas na seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = \epsilon \left\{ \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} + \frac{1-a}{2}g_{\mu\nu}\phi^{i\rho}\phi_{;i\rho} \right\} - (3-2a)g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (7.63)$$

Vamos discutir a estabilidade linear das soluções estáticas e esfericamente simétricas da teoria sob perturbações esfericamente simétricas. Assim, consideramos a métrica geral esfericamente simétrica.

$$ds^2 = e^{2\gamma}dt^2 - e^{2\alpha}du^2 - e^{2\beta}d\Omega^2, \quad (7.64)$$

em que α, β, γ são funções de u e t , e $d\Omega^2$ é o elemento de linha em uma esfera unitária. Também assumimos que $\phi = \phi(u, t)$.

Supondo que nosso sistema perturbado se desvie apenas ligeiramente de uma solução estática de fundo, vamos escrever as equações de campo, negligenciando todos os termos não lineares em relação às derivadas em relação ao tempo:

$$- e^{2(\alpha-\gamma)}(\ddot{\alpha} + 2\ddot{\beta}) + \gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha' + 2\beta') - = -\frac{\epsilon}{2}(1-a)\phi'^2 - (3-2a)e^{2\alpha}V, \quad (7.65)$$

$$- e^{2(\alpha-\gamma)}\ddot{\alpha} + \gamma'' + 2\beta'' - \alpha'(\gamma' + 2\beta') + \gamma'^2 + 2\beta'^2 = -\frac{\epsilon}{2}(3-a)\phi'^2 - (3-2a)e^{2\alpha}V, \quad (7.66)$$

$$- e^{2(\alpha-\gamma)}\ddot{\beta} + \beta'' + \beta'(\gamma' - \alpha' + 2\beta') - e^{2(\alpha-\beta)} = -\frac{\epsilon}{2}(1-a)\phi'^2 - (3-2a)e^{2\alpha}V, \quad (7.67)$$

$$\dot{\beta}' + (\beta' - \gamma')\dot{\beta} - \beta'\dot{\alpha} = -\frac{\epsilon}{2}\phi'\dot{\phi}, \quad (7.68)$$

$$\alpha\phi'' + [\gamma' - a\alpha' + 2\beta']\phi' - e^{2(\alpha-\gamma)}\ddot{\phi} = \epsilon(3-2a)e^{2\alpha}V_\phi. \quad (7.69)$$

nas quais $(\dot{})$ representa $\partial/\partial t$ e (\prime) significa $\partial/\partial u$, o subscripto ϕ significa $d/d\phi$. Para o fundo estático, temos as equações

$$\gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha' + 2\beta') = -\frac{\epsilon}{2}(1-a)\phi'^2 - e^{2\alpha}W, \quad (7.70)$$

$$\gamma'' + 2\beta'' - \alpha'(\gamma' + 2\beta') + \gamma'^2 + 2\beta'^2 = -\frac{\epsilon}{2}(3-a)\phi'^2 - e^{2\alpha}W, \quad (7.71)$$

$$\beta'' + \beta'(\gamma' - \alpha' + 2\beta') - e^{2(\alpha-\beta)} = -\frac{\epsilon}{2}(1-a)\phi'^2 - e^{2\alpha}W, \quad (7.72)$$

$$\alpha\phi'' + [\gamma' - a\alpha' + 2\beta']\phi' = \epsilon e^{2\alpha}W_\phi, \quad (7.73)$$

em que $W = W(\phi) = (3-2a)V(\phi)$. Supondo que, com algum pequeno parâmetro ϵ ,

$$\phi(u, t) = \phi(u) + \delta\phi(u, t), \quad \delta\phi \sim \epsilon \ll 1,$$

e, de forma semelhante para todas as outras variáveis, podemos escrever as equações de perturbação na ordem linear $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} - e^{2(\alpha-\gamma)}(\delta\ddot{\alpha} + 2\delta\ddot{\beta}) + \delta\gamma'' + \delta\gamma'(\gamma' - \alpha' + 2\beta') + \gamma'(\delta\gamma' - \delta\alpha' + 2\delta\beta') \\ = -\epsilon(1-a)\phi'\delta\phi' - e^{2\alpha}(2\delta\alpha W + W_\phi\delta\phi), \end{aligned} \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} - e^{2(\alpha-\gamma)}\delta\ddot{\alpha} + \delta\gamma'' + 2\delta\beta'' - \delta\alpha'(\gamma' + 2\beta') - \alpha'(\delta\gamma' + 2\delta\beta') + 2\delta\gamma\gamma' + 4\beta'\delta\beta' \\ = -\epsilon(3-a)\phi'\delta\phi' - e^{2\alpha}(2\delta\alpha W + W_\phi\delta\phi), \end{aligned} \quad (7.75)$$

$$\begin{aligned}
& - e^{2(\alpha-\gamma)} \delta \ddot{\beta} + \delta \beta'' + \delta \beta'(\gamma' - \alpha' + 2\beta') + \beta'(\delta \gamma' - \delta \alpha' + 2\delta \beta') - 2e^{2(\alpha-\beta)}(\delta \alpha - \delta \beta) \\
& \qquad \qquad \qquad = -\epsilon(1-a)\phi' \delta \phi' - e^{2\alpha}(2\delta \alpha W + W_{\phi\phi} \delta \phi), \quad (7.76)
\end{aligned}$$

$$\delta \dot{\beta}' + (\beta' - \gamma') \delta \dot{\beta} - \beta' \delta \dot{\alpha} = -\frac{\epsilon}{2} \phi' \delta \dot{\phi}, \quad (7.77)$$

$$\begin{aligned}
& - e^{2(\alpha-\gamma)} \delta \ddot{\phi} + a \delta \phi'' + [\gamma' - a\alpha' + 2\beta'] \delta \phi' + [\delta \gamma' - a\delta \alpha' + 2\delta \beta'] \phi' \\
& \qquad \qquad \qquad = \epsilon e^{2\alpha}(2\delta \alpha W_{\phi} + W_{\phi\phi} \delta \phi). \quad (7.78)
\end{aligned}$$

Essas equações são escritas na forma mais geral e contêm dois tipos de arbitrariedade: a escolha da coordenada radial u na métrica estática de fundo e o calibre de perturbação que fixa o referencial no espaço-tempo perturbado.

7.2.2 Equação mestre e uma discrepância

Assim como na Relatividade Geral, este sistema possui apenas um grau de liberdade dinâmico conectado com a perturbação escalar $\delta \phi$. Consequentemente, as equações de perturbação podem ser usadas para excluir as perturbações métricas e obter um única “equação mestre” para $\delta \phi$. Isso pode ser alcançado de forma mais conveniente usando o calibre $\delta \beta \equiv 0$. As equações de perturbação tornam-se

$$\begin{aligned}
& - e^{2(\alpha-\gamma)} \delta \ddot{\alpha} + \delta \gamma'' + \delta \gamma'(2\gamma' - \alpha' + 2\beta') - \gamma' \delta \alpha' \\
& \qquad \qquad \qquad = -\epsilon(1-a)\phi' \delta \phi' - e^{2\alpha}(2W\delta \alpha + W_{\phi\phi} \delta \phi), \quad (7.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{2(\alpha-\gamma)} \delta \ddot{\alpha} + \delta \gamma'' - \delta \alpha'(\gamma' + 2\beta') - (\alpha' - 2\gamma') \delta \gamma' \\
& \qquad \qquad \qquad = -\epsilon(3-a)\phi' \delta \phi' - e^{2\alpha}(2W\delta \alpha + W_{\phi\phi} \delta \phi), \quad (7.80)
\end{aligned}$$

$$\beta'(\delta \gamma' - \delta \alpha') - 2e^{2(\alpha-\beta)} \delta \alpha = -\epsilon(1-a)\phi' \delta \phi' - e^{2\alpha}(2W\delta \alpha + W_{\phi\phi} \delta \phi), \quad (7.81)$$

$$-\beta' \delta \dot{\alpha} = -\frac{\epsilon}{2} \phi' \delta \dot{\phi}, \quad (7.82)$$

$$\begin{aligned}
& a \delta \phi'' + [\gamma' - a\alpha' + 2\beta'] \delta \phi' + [\delta \gamma' - a\delta \alpha'] \phi' - e^{2(\alpha-\gamma)} \delta \ddot{\phi} \\
& \qquad \qquad \qquad = \epsilon e^{2\alpha}(2W_{\phi} \delta \alpha + W_{\phi\phi} \delta \phi). \quad (7.83)
\end{aligned}$$

A equação (7.82) é facilmente integrada em t levando a

$$\delta\alpha = \eta(u)\delta\phi + \xi(u), \quad (7.84)$$

em que $\xi(u)$ é uma função arbitrária correspondente a possíveis perturbações estáticas enquanto $\eta(u)$ é definida como

$$\eta = \epsilon\phi'/(2\beta'). \quad (7.85)$$

Por outro lado, a diferença entre o (7.79) e o (7.80) nos dá

$$\delta\gamma' = \eta\delta\phi' - \eta'\delta\phi. \quad (7.86)$$

Ignorando as perturbações estáticas, isto é, colocando $\xi(u) \equiv 0$, uma substituição de (7.84) e (7.86) em (7.83) leva à equação mestre final

$$\begin{aligned} -e^{2(\alpha-\gamma)}\delta\ddot{\phi} + a\delta\phi'' + \left[2\beta' + \gamma' - a\alpha' + \eta(1-a)\phi'\right]\delta\phi' \\ + \left[-(1+a)\eta'\phi' - \epsilon e^{2\alpha}(2\eta W_\phi + W_{\phi\phi})\right]\delta\phi = 0, \end{aligned} \quad (7.87)$$

cuja análise para soluções particulares das equações de fundo deve levar a conclusões definitivas sobre sua estabilidade ou instabilidade.

No entanto, $\delta\gamma'$ pode ser alternativamente calculada a partir de (7.81), o que dá

$$2\beta'\delta\gamma' = \epsilon a\phi'\delta\phi' + e^{2\alpha}\left[2(e^{-2\beta} - W)\delta\alpha - W_\phi\delta\phi\right]. \quad (7.88)$$

Comparando (7.86) e (7.88) e usando as equações de fundo, obtemos a relação

$$(1-a)\phi'\delta\phi' = (1-a)\left[\phi'' - \alpha'\phi' + \eta\phi'^2\right]\delta\phi. \quad (7.89)$$

O cálculo é mais convenientemente realizado usando a coordenada radial harmônica, de modo que $\alpha = 2\beta + \gamma$. É possível ver, imediatamente, que em $a = 1$, ou seja, em relatividade geral, essa equação passa a ser uma identidade, confirmando que o estudo de estabilidade em

relatividade geral permanece consistente. No entanto, com $a \neq 1$, na teoria de Rastall, a equação (7.89) não é trivial e sua integração em u resulta em

$$\delta\phi = F(t)\phi' e^{\alpha+Q(u)}, \quad Q(u) = \int \eta(u)\phi'(u)du, \quad (7.90)$$

onde $F(t)$ é uma função arbitrária de tempo, que só deve ser pequena, isto é, $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Agora, podemos substituir (7.90) na equação mestre (7.87) e observar a separação usual de variáveis: a quantidade \ddot{F}/F será igual a uma certa combinação de funções fazem parte da solução de fundo, portanto, essa combinação é igual a alguma constante de separação. Tal condição, em geral, não é satisfeita pela solução de fundo, o que torna todo o estudo de estabilidade inconsistente.

Confirmaremos esta observação usando duas soluções de fundo conhecidas da teoria de Rastall como exemplos. Usando um deles, demonstraremos que recorrer a um $\xi(u)$ diferente de zero em (7.84) não resolve o problema de consistência.

7.2.3 Soluções especiais

Caso I: $a = -1$, $V = 0$

Neste caso, a solução foi obtida usando a coordenada radial quasi-global de modo que $\alpha = -\gamma$, e a equação de fundo são

$$\gamma'' + 2\gamma'(\gamma' + \beta') = -\epsilon\phi'^2, \quad (7.91)$$

$$\gamma'' + 2\beta'' + 2\gamma'(\gamma' + \beta') + 2\beta'^2 = -2\epsilon\phi'^2, \quad (7.92)$$

$$\beta'' + 2\beta'(\gamma' + \beta') - e^{-2(\gamma+\beta)} = -\epsilon\phi'^2, \quad (7.93)$$

$$-\phi'' + 2\beta'\phi' = 0. \quad (7.94)$$

As soluções de fundo são possíveis apenas para $\epsilon = -1$ e são fornecidas por

$$ds^2 = A(x)dt^2 - \frac{dx^2}{A(x)} - \sqrt{\frac{3}{2C^2}} \frac{d\Omega^2}{x}, \quad (7.95)$$

$$A(x) = K/x - (C/\sqrt{6})x^3, \quad (7.96)$$

$$\phi = \sqrt{3/2} \ln x + \phi_0, \quad (7.97)$$

em que ϕ_0 , C e K são constantes de integração. Note que, estamos agora denotando as coordenadas radiais por x . A métrica tem as mesmas propriedades do caso da k -essência estudado em [23], com um horizonte em $x = \left(\frac{\sqrt{6}K}{C}\right)^{1/4}$ e um infinito espacial singular $x \rightarrow \infty$. Ao contrário de [23], no entanto, o campo escalar é aqui definido como estendendo-se de menos infinito a mais infinito.

A equação mestre (7.87) agora se reduz a

$$e^{-4\gamma} \delta \ddot{\phi} + \delta \phi'' + \frac{2}{x} \delta \phi' = 0. \quad (7.98)$$

Duas expressões diferentes para $\delta \gamma'$, obtidas conforme descrito acima, são

$$\delta \gamma' = \sqrt{3/2} \delta \phi', \quad (7.99)$$

que resulta da equação (7.86), e

$$\delta \gamma' = -\sqrt{3/2} \delta \phi' - \sqrt{6} e^{2\alpha-2\beta} \delta \phi, \quad (7.100)$$

que tem origem da equação (7.88). Substituindo a solução de fundo, somos capazes de integrar a última igualdade em x , obtendo

$$\delta \phi = F(t)\psi(x), \quad \psi(x) = (K - (C/\sqrt{6})x^4)^{-1/2}. \quad (7.101)$$

Substituindo (7.101) por (7.98) e separando as variáveis, obtemos

$$-\frac{\ddot{F}}{F} = \frac{\psi''}{\psi} + \frac{2}{x} \frac{\psi'}{\psi} = \text{constante}. \quad (7.102)$$

É fácil verificar que a expressão de $\psi(x)$, dada por (7.101), não satisfaz a última equação.

Caso II: $a = 0$, $V = \Lambda = \text{constante}$

Estamos usando aqui a coordenada radial harmônica, de modo que $\alpha = 2\beta + \gamma$. As equações de fundo são

$$\gamma'' = -\frac{\epsilon}{2}\phi'^2 - 3e^{2\alpha}\Lambda, \quad (7.103)$$

$$\gamma'' + 2\beta'' - \alpha'^2 + \gamma'^2 + 2\beta'^2 = -\frac{3}{2}\epsilon\phi'^2 - 3e^{2\alpha}\Lambda, \quad (7.104)$$

$$\beta'' - e^{2(\gamma+\beta)} = -\frac{\epsilon}{2}\phi'^2 - 3e^{2\alpha}\Lambda, \quad (7.105)$$

$$\alpha'\phi' = 0. \quad (7.106)$$

A última equação implica $\alpha = \text{constante}$, que pode ser redimensionada para $\alpha = 0$ por uma redefinição trivial da coordenada radial. A solução tem a forma

$$ds^2 = \frac{9b^4}{\cosh^4 bu} dt^2 - du^2 - \frac{\cosh^2 bu}{3b^2} d\Omega^2, \quad (7.107)$$

$$\phi' = \pm b \sqrt{6 - \frac{4}{\cosh^2 bu}}, \quad \epsilon = -1, \quad b = \sqrt{\Lambda}. \quad (7.108)$$

A equação (7.83) para perturbações do campo escalar agora torna-se

$$e^{-2\gamma} \delta \ddot{\phi} - \phi' \delta \gamma' = 0. \quad (7.109)$$

Novamente, temos duas expressões alternativas para $\delta\gamma'$ são (7.86) e (7.88). De acordo com (7.88), após usar a solução de fundo, temos

$$\delta\gamma' = \frac{3}{2}\phi'\delta\phi. \quad (7.110)$$

Comparando a equação (7.86) e agora com (7.110), obtemos

$$\eta\delta\phi' - \eta'\delta\phi = \frac{3}{2}\phi'\delta\phi. \quad (7.111)$$

Podemos integrar esta equação, encontrando o comportamento espacial de $\delta\phi$:

$$\delta\phi = F(t) \frac{\phi'}{\beta'} e^{-3\beta}, \quad F(t) = \text{função arbitrária}. \quad (7.112)$$

Substituindo-o na equação mestre (8.19) com $\delta\gamma'$ dado por (7.110), chegamos a

$$\frac{2}{3} \frac{\ddot{F}}{F} = \phi'^2 e^{-4\beta} = \text{constante.} \quad (7.113)$$

Esta última igualdade não se aplica à nossa solução de fundo.

Podemos perguntar se podemos reparar este problema considerando a “constante de integração” $\xi(u)$ que aparece em (7.84). Então as duas expressões anteriores para $\delta\gamma'$ tornam-se

$$\delta\gamma' = \eta\delta\phi' - \eta'\delta\phi - \xi' = \frac{3}{2}\phi'\delta\phi - 3\beta'\xi. \quad (7.114)$$

Essa relação é integrada dando

$$\delta\phi = \eta e^{-3\beta} [F(t) + H(u)], \quad H(u) = \int \frac{e^{3\beta}}{\eta^2} (\xi' - 3\beta'\xi) du, \quad (7.115)$$

em que $H(u)$ é na verdade uma função arbitrária de u devido à arbitrariedade de ξ . Inserindo este $\delta\phi$ na equação mestre, obtemos

$$\ddot{F} - \frac{3}{2}\phi'^2 e^{-4\beta} [F(t) + H(u)] - 6\beta'^2 e^{-\beta}\xi = 0. \quad (7.116)$$

Diferenciando (7.116) em relação a u , obtemos uma relação entre funções de u , que nos possibilita calcular $\xi(u)$ em termos das funções de fundo, como também que $F = \text{constante}$. Como era de se esperar, a suposição de $\xi(u) \neq 0$ leva a uma perturbação puramente estática do fundo e perturbações dependentes do tempo acabam sendo impossíveis. Assim, recorrer a $\xi(u)$ só produz uma perturbação estática, mas não resolve o problema de consistência para perturbações dependentes do tempo.

Classificação de novas soluções dilatônicas

A teoria do de Einstein-Maxwell-dilaton tem suas origens no chamado esquema de compactificação de Kaluza-Klein [74, 75]. Até então, os campos eletromagnéticos e gravitacionais eram considerados os componentes de um campo gravitacional de cinco dimensões. A invariância de calibre quadridimensional surgiu como consequência da invariância da teoria de cinco dimensões sob transformações de coordenadas. A quinta dimensão deve ser compactada e com raio de compactificação muito pequeno. Quando a teoria da gravidade de cinco dimensões tem uma dimensão espacial compactificada em um toro, a teoria resultante é a gravidade de Einstein em quatro dimensões acoplada a uma teoria de calibre $U(1)$ e a um único campo escalar sem massa. Em outras palavras, surge a teoria de eletromagnetismo de Maxwell naturalmente de uma teoria dimensional superior. O campo escalar extra é denominado dilaton [69].

Neste capítulo, vamos apresentar uma série de possíveis soluções dilatônicas, em uma configuração estática e esfericamente simétrica. Clement et al. [42] também encontraram um conjunto de novas soluções dilatônicas de buracos negros, a diferença aqui é que além de buracos negros, foi possível encontrar buracos de minhoca e, até mesmo, singularidades. A análise feita neste capítulo é inicial, porém, bem numerosa e bastante promissora.

8.1 Relações básicas

Consideremos uma ação com um único campo escalar com uma interação do tipo dilaton entre os campo escalar e eletromagnético:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x \left[R + 2\varepsilon g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - 2V(\phi) - S(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (8.1)$$

em que $\varepsilon = 1$ para um campo escalar normal com energia cinética positiva e $\varepsilon = -1$ para um campo fantasma; a função $S(\phi) > 0$, caracterizando a interação escalar-eletromagnética, é arbitrária.

As equações de campo são

$$4\varepsilon \nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \eta S_\phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (8.2)$$

$$\nabla_\mu (S(\phi) F^{\mu\nu}) = 0, \quad (8.3)$$

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu R = -T_\mu^\nu, \quad (8.4)$$

em que $S_\phi \equiv dS/d\phi$ e T_μ^ν é o tensor energia-momento:

$$T_\mu^\nu = T_\mu^\nu[\phi] + T_\mu^\nu[F], \quad (8.5)$$

$$T_\mu^\nu[\phi] = \varepsilon [2\phi_\mu \phi^\nu - \delta_\mu^\nu \phi^\alpha \phi_\alpha] + \delta_\mu^\nu V(\phi), \quad (8.6)$$

$$T_\mu^\nu[F] = S(\phi) \left[-2F_{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]. \quad (8.7)$$

Também usaremos a forma alternativa das equações de Einstein (8.4)

$$R_\mu^\nu = T_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu T, \quad (8.8)$$

na qual $T = T_\mu^\mu$ é o traço do tensor energia-momento.

A métrica estática e esfericamente simétrica geral pode ser escrita na forma

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} du^2 - e^{2\beta} d\Omega^2, \quad (8.9)$$

em que γ , α e β são funções da coordenada radial u . Resta uma liberdade de escolha da coordenada u . Também usaremos a notação $r(u) \equiv e^\beta$.

O campo eletromagnético mais geral compatível com simetria esférica, mesmo que a métrica seja dependente do tempo, é descrito pelo quadripotencial [36]

$$A_\mu = \delta_\mu^0 A_0 + \delta_\mu^3 q_m \cos \theta + \partial_\mu \Phi, \quad (8.10)$$

na qual q_m é a carga magnética e Φ uma função arbitrária. Da equação (8.3) obtemos

$$S(\phi) e^{\alpha+2\beta+\gamma} F^{10} = q_e, \quad (8.11)$$

em que q_e é uma carga elétrica. Portanto, temos

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2e^{-4\beta}(-q_e^2/S^2 + q_m^2). \quad (8.12)$$

Para o tensor energia-momento, temos

$$T_{\mu}^{\nu}[\phi] = \varepsilon e^{-2\alpha} \phi'^2 \text{diag}(1, -1, 1, 1) + \delta_{\mu}^{\nu} V, \quad (8.13)$$

$$T_{\mu}^{\nu}[F] = e^{-4\beta} Q(\phi) \text{diag}(1, 1, -1, -1). \quad (8.14)$$

nas quais $Q = Q(\phi) = q_e^2/S(\phi) + q_m^2 S(\phi)$.

Preservando apenas os termos lineares com respeito às derivadas temporais, podemos escrever todos as componentes não zero do tensor de Ricci

$$R_0^0 = e^{-2\gamma}(\ddot{\alpha} + 2\ddot{\beta}) - e^{-2\alpha}[\gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha' + 2\beta')], \quad (8.15)$$

$$R_1^1 = e^{-2\gamma}\ddot{\alpha} - e^{-2\alpha}[\gamma'' + 2\beta'' + \gamma'^2 + 2\beta'^2 - \alpha'(\gamma' + 2\beta')], \quad (8.16)$$

$$R_2^2 = R_3^3 = e^{-2\beta} + e^{-2\gamma}\ddot{\beta} - e^{-2\alpha}[\beta'' + \beta'(\gamma' - \alpha' + 2\beta')], \quad (8.17)$$

$$R_{01} = 2[\dot{\beta}' + \dot{\beta}\beta' - \dot{\alpha}\beta' - \dot{\beta}\gamma'], \quad (8.18)$$

em que *pontos* e *linhas* denotam $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial u$, respectivamente.

Consideremos soluções estáticas assumindo $V(\phi) \equiv 0$ e a função de acoplamento dilatônico $S(\phi) = e^{2\lambda\phi}$, em que λ é uma constante.

Agora, estamos habilitados a escrever as equações de campo

$$2\varepsilon[\phi'' + \phi'(\gamma' + 2\beta' - \alpha')] = e^{2\gamma}Q_{\phi}, \quad (8.19)$$

$$\gamma'' + \gamma'(\gamma' + 2\beta' - \alpha') = e^{2\gamma}Q, \quad (8.20)$$

$$-e^{2\alpha-2\beta} + \beta'' + \beta'(\gamma' + 2\beta' - \alpha') = -e^{2\gamma}Q, \quad (8.21)$$

$$-e^{2\alpha-2\beta} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = \varepsilon\phi'^2 - e^{2\gamma}Q, \quad (8.22)$$

em que o subscrito ϕ denota $\partial/\partial\phi$, supondo que

$$Q = q_e^2 e^{-2\lambda\phi} + q_m^2 e^{2\lambda\phi} \quad (8.23)$$

8.2 Soluções com campo elétrico

Vamos usar a coordenada radial harmônica u [36], de modo que

$$\alpha(u) = 2\beta(u) + \gamma(u). \quad (8.24)$$

Isso simplifica substancialmente as equações. Em particular, uma soma de (8.20) e (8.21) tem a forma da equação de Liouville $\beta'' + \gamma'' = e^{2\beta+2\gamma}$, cuja integração dá

$$e^{-\beta-\gamma} = s(k, u) := \begin{cases} k^{-1} \sinh ku, & k > 0 \\ u, & k = 0 \\ k^{-1} \sin ku, & k < 0. \end{cases} \quad (8.25)$$

Na relação acima, $k \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração. Outra constante de integração é excluída escolhendo o ponto zero de u , de forma que, sem perda de generalidade, a coordenada u é definida em todo intervalo $u > 0$ para $k \geq 0$ e no intervalo $0 < u < \pi/|k|$ para $k < 0$. A métrica assume a forma geral

$$ds^2 = e^{-2\gamma} dt^2 - \frac{e^{2\gamma}}{s^2(k, u)} \left[\frac{du^2}{s^2(k, u)} + d\Omega^2 \right], \quad (8.26)$$

de modo que $\gamma(u)$ permanece sendo a única função métrica ainda desconhecida.

A equação do campo escalar (8.19) e Eq. (8.20) assumem a forma

$$\phi'' = \varepsilon \lambda e^{2\gamma} (-q_e^2 e^{-2\lambda\phi} + q_m^2 e^{2\lambda\phi}), \quad (8.27)$$

$$\gamma'' = e^{2\gamma} (q_e^2 e^{-2\lambda\phi} + q_m^2 e^{2\lambda\phi}), \quad (8.28)$$

que podem ser reescritas como

$$\xi'' = q_m^2 (1 + \varepsilon \lambda^2) e^{2\xi} + q_e^2 (1 - \varepsilon \lambda^2) e^{2\eta}, \quad (8.29)$$

$$\eta'' = q_m^2 (1 - \varepsilon \lambda^2) e^{2\xi} + q_e^2 (1 + \varepsilon \lambda^2) e^{2\eta}, \quad (8.30)$$

em que

$$\xi := \gamma + \lambda\phi, \quad \eta := \gamma - \lambda\phi. \quad (8.31)$$

As equações (8.29) e (8.30) são desacopladas se houver apenas uma das duas cargas q_e e q_m ou com ambas as cargas no caso em que $\varepsilon = 1$, $\lambda^2 = 1$.

Vamos considerar aqui o caso $q_e = q \neq 0$, $q_m = 0$. Então, as equações (8.29) e (8.30) levam a

$$\phi'' = -\varepsilon\lambda q^2 e^{2\eta}, \quad (8.32)$$

$$\eta'' = q^2(1 + \varepsilon\lambda^2) e^{2\eta}. \quad (8.33)$$

Essas equações podem ser resolvidas analiticamente, em particular, a equação (8.33) tem a primeira integral

$$\eta'^2 = q^2(1 + \varepsilon\lambda^2) e^{2\eta} + H, \quad H = \text{constante}. \quad (8.34)$$

As soluções resultantes são diferentes dependendo de ε e λ

(A) $1 + \varepsilon\lambda^2 > 0$, assim, a equação (8.33) é novamente uma equação de Liouville tendo, semelhante a (8.25), a solução

$$e^{-\eta} = \sqrt{q^2(1 + \varepsilon\lambda^2)} s(h, u + u_1), \quad (8.35)$$

com a mesma definição de (8.25)

$$s(h, u + u_1) := \begin{cases} h^{-1} \sinh[h(u + u_1)], & h > 0 \\ u + u_1, & h = 0 \\ h^{-1} \sin[h(u + u_1)], & h < 0, \end{cases} \quad (8.36)$$

em que h e u_1 são constantes de integração. A constante de integração u_1 agora é preservada porque o ponto zero de u já foi escolhido acima. Em (8.34) devemos colocar $H = h^2 \text{sign } h$. Desde agora $\phi'' = -\varepsilon\lambda\eta''/(1 + \varepsilon\lambda^2)$, obtemos

$$\phi(u) = \phi_0 + Cu - \frac{\varepsilon\lambda\eta}{1 + \varepsilon\lambda^2}, \quad (8.37)$$

na qual C e ϕ_0 são constantes de integração, na qual podemos assumir $\phi_0 = 0$ sem perda de generalidade, já que alterar ϕ_0 é equivalente a multiplicar q por uma constante positiva. Então, $\gamma(u)$ é dado por

$$\gamma(u) = \lambda C u + \frac{\eta}{1 + \varepsilon \lambda^2}. \quad (8.38)$$

(B) $\varepsilon = -1$, $1 - \lambda^2 < 0$, logo, a equação (8.33) tem a solução

$$e^{-\eta} = \sqrt{q^2(\lambda^2 - 1)} \frac{\cosh[h(u + u_1)]}{h}, \quad (8.39)$$

enquanto as expressões (8.37) e (8.38) para ϕ e γ permanecem válidas. Em (8.34), agora temos $H = h^2$, $h > 0$.

(C) $\varepsilon = -1$, $\lambda^2 = 1$. É um caso especial em que $\eta'' = 0$. Dessa forma, como antes, excluindo a constante de integração sem importancia, podemos escrever

$$\eta = \eta_1 u, \quad \eta_1 = \text{constante}. \quad (8.40)$$

As expressões para ϕ e γ vão depender se a constante η_1 é zero ou não. Especificamente, se $\eta_1 \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + C u + \frac{\lambda q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}, \\ \gamma &= \lambda \phi_0 + (\eta_1 + \lambda C) u + \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}, \end{aligned} \quad (8.41)$$

em que C e ϕ_0 são constantes. Se $\eta_1 = 0$, obtemos

$$\phi = \phi_0 + C u + \frac{1}{2} \lambda q^2 u^2, \quad \gamma = \lambda \phi. \quad (8.42)$$

O último passo para obter as soluções é substituir os resultados anteriores na primeira integral (8.22). Dessa forma, verificamos se as soluções estão corretas e excluimos uma constante de integração extra que apareceu porque as equações resolvidas eram de segunda ordem. Assim, levando em conta o resultado (8.25), podemos colocar (8.22) na forma

$$k^2 \operatorname{sign} k = \gamma'^2 + \varepsilon \phi'^2 - q^2 e^{2\eta}. \quad (8.43)$$

Nos casos (A) e (B) descritos acima, uma substituição das funções relevantes para (8.43) resulta em

$$k^2 \operatorname{sign} k = \frac{H}{1 + \varepsilon \lambda^2} + (\lambda^2 + \varepsilon) C^2, \quad (8.44)$$

$$H = h^2 \operatorname{sign} h \text{ para (A), } H = -h^2 \text{ para (B)}. \quad (8.45)$$

No caso (C), com $\lambda = \pm 1$, obtemos

$$k^2 \operatorname{sign} k = \eta_1^2 + 2\lambda C \eta_1 \text{ if } \eta_1 \neq 0, \quad (8.46)$$

$$k = -|q| \text{ if } \eta_1 = 0. \quad (8.47)$$

Todo o conjunto de soluções depende de uma constante de acoplamento de “entrada” λ e cinco constantes de integração significativas: q, u_1, C, k, h , onde k é expresso em termos de outras constantes de acordo com as relações (8.44) ou (8.46).

8.3 Classificação

Nesta seção vamos apresentar uma série de possíveis soluções dilatônicas. Toda a análise será feita analisando o comportamento assintótico dos coeficientes métricos e^γ e e^β , este último está associado com a coordenada radial r . Os coeficientes métricos tender a 0 *infinito* e *finito*. Quanto ao tipo de geometria, em uma configuração estática e esfericamente simétrica, podemos obter singularidades atrativas e repulsivas, buracos negros e buracos de minhocas.

Teremos uma *singularidade central atrativa* quando $e^\gamma \rightarrow 0$ e $e^\beta \rightarrow 0$. Uma *singularidade central repulsiva* vai ocorrer quando $e^\gamma \rightarrow \infty$ e $e^\beta \rightarrow 0$. Quando e^β tende a zero significa que a parte angular da métrica implode na região singular.

Para *buracos negros* devemos ter $e^\gamma \rightarrow 0$ e e^β tende a um valor finito. Há também os buracos negros frios, que são buracos negro que se caracterizam por terem área do horizonte de eventos infinita e temperatura Hawking igual a zero [27, 30, 31]. Nesse caso, temos $e^\gamma \rightarrow 0$ e $e^\beta \rightarrow \infty$. Note que, no caso de buracos negros, $g_{00} = e^\gamma \rightarrow 0$ está relacionado com um horizonte de eventos.

Já, para buracos de minhoca, e^γ deve ser uma função deve ser finita e suave em toda extensão do espaço-tempo, enquanto e^β deve tender ao infinito somente nas extremidades do espaço-tempo, ou seja, temos uma garganta que conecta duas regiões assintoticamente planas.

8.3.1 Soluções para $\varepsilon = +1$

Para campos escalares comuns ($\varepsilon = +1$) todas as soluções são descritas pelo caso acima (A). Sua descrição analítica depende dos sinais das constantes k e h .

Para começar, em todos os casos o intervalo da coordenada u é, sem perda de generalidade, $0 < u < u_{\max}$, onde u_{\max} pode ser finito ou infinito, assim como em todos os casos. O raio $r(u) = e^{-\gamma}/s(k, u)$ se comporta como $1/u$ no pequeno u , em que este r pode ser usado como a coordenada radial convencional.

Agora vamos discutir o comportamento dos coeficientes métricos quando $u \rightarrow u_{\max}$.

1+. $h > 0$, $k > 0$, $u_{\max} = \infty$. Temos neste caso $s(h, u + u_1) \sim e^{hu}$, $s(k, u) \sim e^{ku}$, portanto, para grandes valores de u , temos

$$\begin{aligned}\gamma &\approx \left(\lambda C - \frac{h}{1 + \lambda^2} \right) u, \\ \beta \equiv \ln r &\approx \left(-k - \lambda C + \frac{h}{1 + \lambda^2} \right) u,\end{aligned}\tag{8.48}$$

lembrando que γ e β estão relacionados por

$$e^{-\beta-\gamma} = s(k, u).\tag{8.49}$$

Dependendo dos valores das constantes envolvidas, tanto β quanto γ podem tender a $+\infty$, $-\infty$ ou um limite finito. No entanto, precisamos ser mais cuidadosos. De fato, γ pode seguir todas essas três variantes de comportamento, mas β não pode crescer infinitamente em u , pois isso significaria que tem um mínimo em algum valor de u , o que corresponderia a uma garganta de buraco de minhoca. Mas isso é impossível, pois o sistema atual não viola condição de energia nula [73].

Assim, $r = e^\beta$ pode tender para zero (que significa um centro singular da configuração) ou para um limite finito. Esse último acontece se

$$k = \lambda C - h/(1 + \lambda^2), \quad (8.50)$$

e então temos $e^\gamma \sim e^{-ku} \rightarrow 0$, que pode significar um possível horizonte de eventos de um buracos negro, a ser considerado abaixo.

Outro caso interessante é que $\gamma \rightarrow$ constante quando $u \rightarrow \infty$. Isso acontece se $\lambda C = h/(1 + \lambda^2)$, e neste caso $r \sim e^{-ku} \rightarrow 0$. Assim, temos um centro com valor finito de g_{tt} . Esse centro é regular? A resposta é não, pois uma das condições necessárias para um centro regular é que, em termos da métrica (8.9), $e^{-2\alpha r'^2} \rightarrow 1$, que é o condição de planura local e significa que a razão entre circunferência e raio deve ser igual a 2π para pequenos círculos. No nosso caso $e^{-2\alpha r'^2} \sim e^{2ku} \rightarrow \infty$, então o centro é singular.

Concluimos que as soluções deste caso correspondem a singularidades centrais, exceto para possíveis soluções de buracos negros sob a condição (8.50), algo que discutiremos adiante.

2+a. $h = 0$, $k = \sqrt{C^2(1 + \lambda^2)} > 0$. Nesse caso os coeficientes métricos são dados por

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{D} (u + u_1)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}, \quad (8.51)$$

$$e^\beta = \frac{D}{e^{\lambda C u}} (u + u_1)^{\frac{1}{1+\lambda^2}} \frac{2k}{e^{ku} - e^{-ku}}, \quad (8.52)$$

em que $D = \left[\sqrt{q^2(1 + \lambda^2)} \right]^{\frac{1}{1+\lambda^2}}$. Novamente $u \in \mathbb{R}_+$. Pode-se verificar usando (8.43) que $r \equiv e^\beta \rightarrow 0$ para grandes valores da coordenada u , enquanto $e^{2\gamma} \sim e^{2\lambda C u} u^{-2/(1+\lambda^2)}$ tende a zero, se $\lambda C \leq 0$, ou ao infinito, se $\lambda C > 0$. Em todos os casos, estamos lidando com uma singularidade central que pode ser repulsiva, se e^γ tende ao infinito, ou atrativa, se e^γ tende a zero.

2+b. $h = C = k = 0$. Nesse caso, temos

$$e^\gamma = \frac{1}{D} (u + u_1)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}, \quad (8.53)$$

$$e^\beta = D \frac{(u + u_1)^{\frac{1}{1+\lambda^2}}}{u}. \quad (8.54)$$

Temos novamente que $u \in \mathbb{R}_+$ e para grandes valores de u

$$\begin{aligned} e^\gamma &\sim (u + u_1)^{-1/(1+\lambda^2)} \rightarrow 0, \\ e^\beta &= e^{-\gamma}/u \sim u^{-\lambda^2/(1+\lambda^2)} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (8.55)$$

ou seja, temos uma singularidade central atrativa.

3+. $h < 0$. Temos três subcasos:

3+a. $k > 0$, $k^2 = (1 + \lambda^2) - h^2/(1 + \lambda^2)$, então

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{D} \{\sin[h(u + u_1)]\}^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}, \quad (8.56)$$

$$e^\beta = \frac{2kD}{e^{\lambda C u}} \frac{\{\sin[h(u + u_1)]\}^{\frac{1}{1+\lambda^2}}}{e^{ku} - e^{-ku}}. \quad (8.57)$$

3+b. $k = 0$, $(1 + \lambda^2)C^2 = h^2$.

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{D} \{\sin[h(u + u_1)]\}^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}, \quad (8.58)$$

$$e^\beta = \frac{D}{e^{\lambda C u}} \frac{\{\sin[h(u + u_1)]\}^{\frac{1}{1+\lambda^2}}}{u}. \quad (8.59)$$

3+c. $k < 0$, $h^2 = (1 + \lambda^2)k^2 + (1 + \lambda^2)^2 C^2$, temos

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{D} \{\sin[h(u + u_1)]\}^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}, \quad (8.60)$$

$$e^\beta = \frac{kD}{e^{\lambda C u}} \frac{\{\sin[h(u + u_1)]\}^{\frac{1}{1+\lambda^2}}}{\sin(ku)}. \quad (8.61)$$

Neste caso, $|h| > |k|$.

A forma analítica das soluções dos três subcasos acima é diferente, mas seu comportamento qualitativo é o mesmo: o intervalo de u termina em $u = u_{\max}$ igual ao menor zero da função $\sin[|h|(u + u_1)]$, em que

$$\begin{aligned} e^\gamma &\sim (u_{\max} - u)^{-1/(1+\lambda^2)} \rightarrow \infty, \\ e^\beta &\sim e^{-\gamma} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Assim, temos uma singularidade central repulsiva do tipo Reissner-Nordström[49]. Para $k \geq 0$ tal comportamento é bastante óbvio, mas também é observado para $k < 0$, pois de acordo com (8.43) $|h| > |k|$, e, a partir de $u = 0$, a função $\sin[|h|(u + u_1)]$ chega mais rápido a zero do que $\sin |k|u$.

8.3.2 Soluções para $\varepsilon = -1$

Para campos escalares fantasmas ($\varepsilon = -1$) as soluções são descritas por todas as classes (A), (B), (C), dependendo do valor de λ . Como antes, sua descrição analítica depende de os sinais das constantes k e h .

A análise pode ser realizada em completa analogia com os casos 1+ a 3+. Em todos os casos (a menos que especificado de outra forma), assumimos que $u = 0$ corresponde à infinidade espacial plana. Além disso, em todos os casos em que o final do intervalo u é determinado pelo primeiro zero de $\sin |k|u$, de modo que $u_{\max} = \pi/|k|$, temos uma solução de buraco de minhoca semelhante à de anti-Fisher, $u = \pi/|k|$ sendo o segundo infinito espacial. Esses são os casos 1-c, 2-, 3-a, 4-c, 5-c. Em outros casos, devemos observar o comportamento das quantidades $g_{00} = e^{2\gamma}$ e $r^2 = e^{2\beta}$ para tirar conclusões sobre as propriedades das geometrias correspondentes.

1-. $h > 0$, $\lambda^2 < 1$, então, temos

$$k^2 \text{sign } k = \frac{h^2}{1 - \lambda^2} - (1 - \lambda^2)C^2. \quad (8.63)$$

Existem três casos com diferentes expressões analíticas:

1-a. $\lambda^2 < 1$, $h > 0$, $k > 0$. Neste caso, os coeficientes métricos são dados por

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{\tilde{D}} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{-\frac{1}{1-\lambda^2}}, \quad (8.64)$$

$$e^\beta = \frac{\tilde{D}}{e^{\lambda C u}} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{\frac{1}{1-\lambda^2}} \frac{2k}{e^{ku} - e^{-ku}}, \quad (8.65)$$

em que $\tilde{D} = \left[\sqrt{q^2(\lambda^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{\lambda^2 - 1}}$. A coordenada $u \in \mathbb{R}_+$. De forma bastante semelhante ao caso 1+a, temos $s(h, u + u_1) \sim e^{hu}$ e $s(k, u) \sim e^{ku}$, portanto, para grandes valores de u ,

$$\begin{aligned} \eta &\sim -hu, & \gamma &\approx \left(\lambda C - \frac{h}{1 - \lambda^2} \right) u, \\ \beta &\equiv \ln r \approx \left(-k - \lambda C + \frac{h}{1 - \lambda^2} \right) u. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Devido a (8.63), em $k > 0$ e $|\lambda| < 1$, temos

$$\frac{h}{1 - \lambda^2} > |C| > \lambda C. \quad (8.67)$$

Portanto, em (8.66) temos $\gamma \rightarrow -\infty$ quando $u \rightarrow \infty$. Ao contrário disso, β pode tender a um limite finito: isso acontece se

$$k = \frac{h}{1 - \lambda^2} - \lambda C. \quad (8.68)$$

Substituindo a expressão anterior em (8.63), obtemos uma relação entre C e h :

$$\lambda h = C(1 - \lambda^2). \quad (8.69)$$

O caso (8.68), corresponde a uma solução de buraco negro.

1-b. $\lambda^2 < 1, h > 0, k = 0$. Para esse caso, temos

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{\tilde{D}} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{-\frac{1}{1-\lambda^2}}, \quad (8.70)$$

$$e^\beta = \frac{\tilde{D}}{e^{\lambda C u}} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{\frac{1}{1-\lambda^2}} \frac{1}{u}. \quad (8.71)$$

Como no caso anterior, $u \in \mathbb{R}_+$, $\eta \sim -hu$ para grandes valores de u e $\gamma(u) \sim -\frac{h}{1-\lambda}$ ou seja, e^λ vai a zero quando $u \rightarrow \infty$. De acordo com (8.25), $e^\beta = e^{-\lambda}/u \rightarrow \infty$ para grandes valores de u .

1-c. $\lambda^2 < 1, h > 0, k < 0$. De (8.63), temos $h < (1 - \lambda^2)|C|$. Então,

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{\tilde{D}} \{\cosh[h(u + u_1)]\}^{-\frac{1}{1-\lambda^2}}, \quad (8.72)$$

$$e^\beta = \frac{k\tilde{D}}{e^{\lambda C u}} \frac{\{\cosh[h(u + u_1)]\}^{\frac{1}{1-\lambda^2}}}{\sin(ku)}, \quad (8.73)$$

Neste caso, $u \in (0, \pi/|k|)$, a função e^γ é suave e finita neste intervalo, enquanto $e^\beta \sim 1/\sin |k|u$, trata-se de uma geometria de um buraco de minhoca.

2- $h = 0, \lambda^2 < 1$. De (8.63) temos que $k = -\sqrt{C^2(1 - \lambda^2)} < 0$, a situação é qualitativamente a mesma que no caso 1-c, uma geometria de buraco de minhoca.

3- $h < 0, \lambda^2 < 1$. De (8.63), temos novamente $k < 0$, e $|k| > |h|$ e os coeficientes métricos são dados por

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{\tilde{D}} \{\sin[h(u + u_1)]\}^{-\frac{1}{1-\lambda^2}}, \quad (8.74)$$

$$e^\beta = \frac{k\tilde{D}}{e^{\lambda C u}} \frac{\{\sin[h(u + u_1)]\}^{\frac{1}{1-\lambda^2}}}{\sin(ku)}, \quad (8.75)$$

Desta vez, ambas as funções $s(k, u)$ e $s(h, u + u_1)$ são funções senos usuais, de modo que a geometria descrita pela métrica (8.26) depende de qual dessas funções é a primeira a desaparecer à medida que u cresce de $u = 0$ até grandes valores.

No caso em que $\sin[|h|(u + u_1)] > 0$ em todo intervalo $u \in (0, \pi/|k|)$, temos um finito e^γ em todo intervalo e dois infinitos espaciais nas extremidades, ou seja, um buraco de minhoca. Se os zeros das funções seno coincidem, então em $u = \pi/|k|$ temos $e^\gamma \rightarrow \infty$ com um $r = e^\beta$ finito, ou seja, uma singularidade repulsiva. Por último, se $u_{\max} < \pi/|k|$, a situação é semelhante à do caso 3+, isto é, uma singularidade central repulsiva tipo Reissner-Nordström.

4- $\varepsilon = -1, \lambda^2 = 1, \eta = \eta_1 u, \eta_1 = \text{constante}$. No caso de $\eta_1 \neq 0$, as funções $\phi(u)$ e $\gamma(u)$ são dadas pela equação (8.41). Adotando $\phi_0 = 0$ sem perda de generalidade, temos

$$\gamma(u) = (\eta_1 + \lambda C)u + \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}, \quad (8.76)$$

enquanto, de (8.43), temos que

$$k^2 \operatorname{sign} k = \eta_1^2 + 2\lambda C \eta_1, \quad (8.77)$$

para que a k possa ter qualquer sinal.

4-a. Se $\eta_1 \neq 0$, $k > 0$, temos $u \in \mathbb{R}_+$. Além disso, se $\eta_1 > 0$, então

$$e^\gamma = e^{(\eta_1 + \lambda C)u + \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}} \quad (8.78)$$

$$e^\beta = \left[e^{-(\eta_1 + \lambda C)u - \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}} \right] \frac{2k}{e^{ku} - e^{-ku}}, \quad (8.79)$$

temos que $\gamma \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow \infty$, ou seja, temos uma singularidade central repulsiva.

Se $\eta_1 < 0$, então (8.77) implica que $\eta_1 + 2\lambda C < 0$ e, inevitavelmente, temos $\eta_1 + \lambda C < 0$. Portanto, (8.76) leva a $\gamma \rightarrow -\infty$ para grandes valores de u , ou seja, $g_{00} = e^{2\gamma} \rightarrow 0$. Para $\beta(u)$ temos, para grandes valores de u

$$\beta \sim -(\eta_1 + \lambda C)u - \sqrt{\eta_1^2 + 2\lambda C \eta_1} u, \quad (8.80)$$

em que $\beta \rightarrow \infty$ quando $C \neq 0$ ou $C = 0$. Em ambos os casos temos um buraco negro frio.

4-b. Se $\eta_1 \neq 0$, $k = 0$, ou seja, $\eta_1 = -2\lambda C$, temos novamente $u \in \mathbb{R}_+$, portanto,

$$e^\gamma = e^{\frac{\eta_1}{2}u + \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}} \quad (8.81)$$

$$e^\beta = \left[e^{-\frac{\eta_1}{2}u - \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}} \right] \frac{1}{u}. \quad (8.82)$$

No caso em que $\eta_1 > 0$, obtemos $\gamma \rightarrow \infty$ e $e^\beta \sim e^{-\gamma}/u \rightarrow 0$ para grandes valores u , temos um centro repulsivo.

No caso em que $\eta_1 < 0$, para u grande, obtemos $\gamma \sim -\lambda C u$, então a geometria depende do sinal de λC : Se $\lambda C > 0$, temos $e^\gamma \rightarrow 0$ e $e^\beta \rightarrow \infty$, uma singularidade central atrativa com raio esférico r infinito. Se $\lambda C < 0$, temos $e^\gamma \rightarrow \infty$ e $e^\beta \rightarrow 0$, ou seja, um centro repulsivo.

Se $C = 0$, então γ tende a um limite finito para grandes valores de u enquanto $e^\beta \sim 1/u \rightarrow 0$, é a única solução com um centro regular. Esse é um resultado muito interessante, que necessita uma análise mais criteriosa.

4-c. Se $\eta_1 \neq 0$, $k < 0$, o intervalo de u é $u \in (0, \pi/|k|)$, então,

$$e^\gamma = e^{(\eta_1 + \lambda C)u + \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}} \quad (8.83)$$

$$e^\beta = \left[e^{-(\eta_1 + \lambda C)u - \frac{q^2}{4\eta_1^2} e^{2\eta_1 u}} \right] \frac{k}{\sin ku}. \quad (8.84)$$

A função $\gamma(u)$ é regular neste intervalo e obtemos um buraco de minhoca.

4-d. Se $\eta_1 = 0$, portanto, $\eta(u) \equiv 0$, então

$$\phi(u) = Cu + \frac{1}{2}q^2 u^2 \quad \text{e} \quad \gamma(u) = \lambda\phi(u). \quad (8.85)$$

Em termos da métrica, temos

$$e^\gamma = e^{\lambda Cu + \frac{1}{2}\lambda^2 q^2 u^2} \quad (8.86)$$

$$e^\beta = \left[e^{-\lambda Cu - \frac{1}{2}\lambda^2 q^2 u^2} \right] \frac{k}{\sin ku}. \quad (8.87)$$

A equação de vínculo (8.43) agora fornece $k = -|q|$, portanto, como no subcaso 4-c, obtemos uma solução de buraco de minhoca.

5-. $\varepsilon = -1$, $\lambda^2 > 1$. Assim, temos

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda Cu}}{A} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{-\frac{1}{\lambda^2-1}}, \quad (8.88)$$

$$e^\beta = \frac{A}{e^{\lambda Cu}} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{\frac{1}{\lambda^2-1}} \frac{1}{s(k, u)}, \quad (8.89)$$

em que a função $s(k, u)$ depende da constante k e $A = \left\{ \sqrt{q^2(\lambda^2 - 1)} \right\}^{\frac{1}{\lambda^2-1}}$. A equação de vínculo das constantes, agora, é dada por

$$k^2 \text{sign } k = -\frac{h^2}{\lambda^2 - 1} + (\lambda^2 - 1)C^2, \quad h > 0, \quad (8.90)$$

$$(8.91)$$

5-a. $k > 0$, então $h < |C|(\lambda^2 - 1)$, $C \neq 0$.

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{A} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{-\frac{1}{\lambda^2-1}}, \quad (8.92)$$

$$e^\beta = \frac{A}{e^{\lambda C u}} \left\{ \frac{e^{h(u+u_1)} + e^{-h(u+u_1)}}{2h} \right\}^{\frac{1}{\lambda^2-1}} \frac{2k}{e^{ku} - e^{-ku}}, \quad (8.93)$$

Temos $u \in \mathbb{R}_+$, e a geometria depende do valor de λC . Se $\lambda C > 0$, então para grandes de u obtemos

$$e^\gamma \sim e^{\left[\lambda C - \frac{h}{\lambda^2-1}\right]u}, \quad (8.94)$$

$$e^\beta \sim e^{\left[-\lambda C + \frac{h}{\lambda^2-1} - k\right]u}. \quad (8.95)$$

Nesse caso, $e^\gamma \rightarrow \infty$ e $e^\beta \rightarrow 0$, temos um centro repulsivo.

Se $\lambda C < 0$, então $e^\gamma \rightarrow 0$ para grandes valores de u , enquanto e^β pode tender a zero ou infinito, sendo que e^β é finito, mesmo para grandes valores u se

$$\lambda h = -C(\lambda^2 - 1), \quad (8.96)$$

que resulta em uma solução de buraco negro (verifique!).

5-b. $k = 0$, portanto $h = |C|(\lambda^2 - 1)$, $C \neq 0$. Novamente $u \in \mathbb{R}_+$, e, para u grande, obtemos

$$e^\gamma \sim e^{[\lambda C - |C|]u}, \quad (8.97)$$

$$e^\beta \sim \frac{e^{\left[-\lambda C + \frac{h}{\lambda^2-1}\right]u}}{u}. \quad (8.98)$$

Em $\lambda C > 0$ obtemos $e^\gamma \rightarrow \infty$ e $e^\beta \sim e^{-\gamma}/u \rightarrow 0$, ou seja, temos um centro repulsivo.

Em $\lambda C < 0$ obtemos, ao contrário, $e^\gamma \rightarrow 0$ e $e^\beta \sim e^{-\gamma}/u \rightarrow \infty$, temos um buraco negro.

5-c. $k < 0$. Nesse caso, temos

$$e^\gamma = \frac{e^{\lambda C u}}{A} \{\cosh[h(u + u_1)]\}^{-\frac{1}{\lambda^2 - 1}}, \quad (8.99)$$

$$e^\beta = \frac{kA}{e^{\lambda C u}} \frac{\{\cosh[h(u + u_1)]\}^{\frac{1}{\lambda^2 - 1}}}{\sin(ku)}, \quad (8.100)$$

Como em outros casos semelhantes, é uma solução de buraco de minhoca assintoticamente plano em $u = 0$ e $u = \pi/k$.

8.4 Possíveis soluções de buracos negros

Como vimos, a única escolha dos parâmetros capazes de levar a uma solução de buraco negro é dada por (8.50). Por outro lado, a relação (8.43) agora pode ser escrita como

$$h^2 - k^2(1 + \lambda^2) + C^2(1 + \lambda^2)^2 = 0. \quad (8.101)$$

Substituindo k de (8.50), obtemos $[C(1 + \lambda^2) + \lambda h]^2 = 0$, de onde

$$C = -\frac{\lambda h}{1 + \lambda^2}. \quad (8.102)$$

Inserindo isso em (8.50), obtemos $h = k$ e, digamos, h e C são expressos em termos de k . Assumindo $u_1 \neq 0$, a solução adquire uma forma mais transparente após uma transição para a nova coordenada x de acordo com

$$e^{-2ku} = 1 - \frac{2k}{x} \equiv P(x), \quad (8.103)$$

assumindo, além disso, que a unidade de tempo é escolhida de forma que $e^\gamma = 1$ em $u = 0$. Então nós temos

$$\begin{aligned} du &= -\frac{dx}{x^2 P(x)}, & \sinh ku &= \frac{k}{x\sqrt{P(x)}}, \\ \sinh ku_1 &= \frac{k}{q_1}, & \sinh[k(u + u_1)] &= \frac{k}{q_1} \frac{1 + p/x}{\sqrt{P(x)}}, \\ q_1 &:= q\sqrt{1 + \lambda^2}, & p &:= \sqrt{k^2 + q_1^2} - k. \end{aligned} \quad (8.104)$$

Como resultado, a métrica e o campo escalar assumem a forma

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{-2\gamma} dx^2 - x^2 \left(1 + \frac{p}{x}\right)^{2/(1+\lambda^2)} d\Omega^2,$$

$$e^{2\gamma} = \frac{P(x)}{\left(1 + p/x\right)^{2/(1+\lambda^2)}}, \quad (8.105)$$

$$\phi = Cu + \frac{1}{1 + \lambda^2} \ln \left(k \frac{1 + p/x}{\sqrt{P}} \right). \quad (8.106)$$

É uma solução de buraco negro escrita em termos da coordenada quase-global x , em que, adotamos a transformação $\alpha + \gamma = 0$, em termos da métrica (8.9), variando a coordenada x de $2k$ até o infinito, é assintoticamente plana em $x \rightarrow \infty$ e tem um horizonte simples em $x = 2k$.

Vamos agora considerar soluções com $u_1 = 0$ nas mesmas condições (8.102) e $k = h$. É novamente conveniente transformar a solução em uma coordenada quase-global x , que é alcançada se colocarmos

$$e^{2ku} = \frac{x + k - x_0}{x - k - x_0} = \frac{x}{x - 2k}, \quad (8.107)$$

em que escolhemos a constante de integração x_0 ser igual a k . Então obtemos a métrica

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{-2\gamma} dx^2 - (q_1 x)^{\frac{2}{1+\lambda^2}} d\Omega^2,$$

$$e^{2\gamma} = q_1^{\frac{2}{1+\lambda^2}} x^{\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}} (x - 2k). \quad (8.108)$$

Esta solução tem o mesmo intervalo de x quando (8.4) e possui um horizonte simples em $x = 2k$, mas não é assintoticamente plana.

Desvio da luz no limite de campo forte

A lente gravitacional e o desvio da luz são previsões da teoria da relatividade. Os primeiros estudos abordando lentes gravitacionais no regime de campo forte surgiram com Darwin [48] no espaço-tempo de Schwarzschild. No limite do campo forte, ou seja, próximo da esfera de fótons de buraco negro, o tratamento matemático das lentes gravitacionais é bastante problemático. Neste limite, Bozza obteve uma expressão analítica para o ângulo de deflexão de luz no limite de campo forte, isto é, muito próximo à esfera de fótons [17]. Posteriormente, Tsukamoto melhorou o resultado encontrado por Bozza [104]. A deflexão angular da luz no regime de campo forte também foram estudados em buracos de minhoca [82, 105].

Em [17], Bozza apresentou um formalismo para obter o ângulo de deflexão $\alpha(b)$, forma analítica, de um raio de luz no limite de deflexão forte $b \rightarrow b_c$, em que b é o parâmetro de impacto da luz e b_c é o parâmetro de impacto crítico quando o raio de luz gira em torno de uma esfera de fótons, em um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico genérico. O ângulo de deflexão no limite de deflexão forte $b \rightarrow b_c$ é expresso por

$$\alpha(b) = -\bar{a} \log\left(\frac{b}{b_c} - 1\right) + \bar{b} + \mathcal{O}[(b - b_c) \log(b - b_c)]. \quad (9.1)$$

As funções \bar{a} e \bar{b} na expressão acima ângulo de deflexão no limite de deflexão forte são valores fundamentais que caracterizam uma esfera de fótons ou uma região gravitacional forte de um espaço-tempo.

9.1 Apresentação do método

Começamos adotando uma métrica estática e esfericamente simétrica

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + B(x)dx^2 + C(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (9.2)$$

Para a métrica acima, a Lagrangiana para o movimento geodésico é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\{-A(x)\dot{t}^2 + B(x)\dot{x}^2 + C(x)[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2]\}, \quad (9.3)$$

que, no plano $\theta = \pi/2$, se simplifica a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}[-A(x)\dot{t}^2 + B(x)\dot{x}^2 + C(x)\dot{\phi}^2]. \quad (9.4)$$

O sobrescrito $(\dot{\cdot})$ significa $d/d\lambda$. Os momentos associados à Lagrangiana são dados por

$$p_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \quad (9.5)$$

ou ainda,

$$p_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -A(x)\dot{t} \quad (9.6)$$

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = B(x)\dot{x} \quad (9.7)$$

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = C(x)\dot{\phi} \quad (9.8)$$

O Hamiltoniano está relacionado à Lagrangiana por uma transformação de Legendre:

$$\mathcal{H} = p_\mu\dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \mathcal{L} \quad (9.9)$$

que é igual à Lagrangiana. Isso ocorre porque a Lagrangiana (9.4) é “puramente cinética”, ou seja, não há contribuição de energia potencial. Portanto, $\mathcal{H} = \mathcal{L}$ e ambos são constantes.

Como consequência da natureza estática e esfericamente simétrica da métrica, a Lagrangiana (9.4) não depende de t e ϕ . Portanto, as componentes t e ϕ produzem duas quantidades conservadas E e L :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = E, \quad (9.10)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = L. \quad (9.11)$$

Devido ao fato de a órbita está confinada no plano equatorial $\theta = \pi/2$, temos

$$\dot{t} = -\frac{E}{A(x)}, \quad (9.12)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{C(x)}, \quad (9.13)$$

em que E é a energia da partícula e L é o momento angular orbital. Devido ao fato de que a Lagrangiana é uma constante. Então, da equação (9.4), temos

$$-A(x)\dot{t}^2 + B(x)\dot{x}^2 + C(x)\dot{\phi}^2 = 2\delta \quad (9.14)$$

em que a constante $\delta = 0$ para órbitas nulas ou $\delta = 1$ órbitas tipo-tempo por uma redefinição do parâmetro afim (ou seja, agora o parâmetro afim é tempo próprio da partícula) ao longo da geodésica.

Visto que, estamos interessados no estudos das órbitas nulas, ou seja, órbitas compostas por fótons, vamos adotar $\delta = 0$. Substituindo as expressões (9.12) e (9.13), temos

$$\dot{x}^2 = \frac{E^2}{A(x)B(x)} - \frac{L^2}{B(x)C(x)}, \quad (9.15)$$

em que λ é o parâmetro afim. O potencial efetivo para o movimento do fóton é dado por

$$V(x) = \frac{L^2 R(x)}{B(x)C(x)}, \quad (9.16)$$

em que $R(x)$ é dado por

$$R(x) \equiv \frac{C(x)}{A(x)b^2} - 1 \quad (9.17)$$

e $b = E/L$ é parâmetro de impacto. O movimento do fóton é permitido na região $V(x) \geq 0$. Assume-se que há pelo menos uma solução positiva de $D(x) = 0$, em que

$$D(x) = \frac{C'(x)}{C(x)} - \frac{A'(x)}{A(x)} \quad (9.18)$$

em que $(')$ denota a diferenciação em relação à coordenada radial x . Chamamos a maior solução positiva de $D(x) = 0$ o raio da esfera de fótons x_m .

Fazendo na equação (9.15) a substituição $\dot{x} = \frac{dx}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda}$, obtemos

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{R(x)C(x)}{B(x)} \quad (9.19)$$

Em seu movimento, um fóton se aproxima de um objeto gravitacional a partir do infinito, é espalhado a uma distância mais próxima $x = x_0$ e retorna para infinito. No caso de espalhamento, a condição $x_0 > x_m$ deve ser satisfeita. Observe que $x = x_0$ é a maior raiz positiva de $R(x) = 0$ e que $B(x)$ e $C(x)$ não divergem para $x \geq x_0$. Assim, $V(x)$ se anula em $x = x_0$. Como \dot{x} se anula em $x = x_0$, a partir da equação (9.15), obtemos

$$\frac{A_0}{C_0} = \frac{E^2}{L^2} = \frac{1}{b^2}, \quad (9.20)$$

em que, o índice “0” indica as quantidades avaliadas em $x = x_0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o parâmetro de impacto b é positivo desde que consideremos apenas um raio de luz.

Assim podemos reescrever a equação (9.20)

$$R(x) \equiv \frac{A_0 C}{A C_0} - 1, \quad (9.21)$$

O parâmetro de impacto é definido

$$b_c(x_m) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow x_m} \sqrt{\frac{C_0}{A_0}}, \quad (9.22)$$

e indica $x_0 \rightarrow x_m$ ou $b \rightarrow b_c$ no limite de deflexão forte. O ângulo de deflexão da luz é definido por

$$\alpha(x_0) = I(x_0) - \pi, \quad (9.23)$$

em que a função $I(x_0)$ é dado por

$$I(x_0) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{R(x)C(x)}{B(x)}}} \quad (9.24)$$

Introduzindo a transformação de coordenada

$$z \equiv 1 - \frac{x_0}{x}, \quad (9.25)$$

$I(x_0)$ é dado, agora, por

$$I(x_0) = 2 \int_0^1 f(z, x_0) dz, \quad (9.26)$$

em que a função $f(z, x_0)$ é definida por

$$f(z, x_0) \equiv \frac{2x_0}{\sqrt{G(z, x_0)}}, \quad (9.27)$$

na qual a função $G(z, x_0)$ é dada por

$$G(z, x_0) \equiv R \frac{C}{B} (1 - z)^4 \quad (9.28)$$

Visto que, a expansão de uma função $F(r)$ qualquer em potências de z é dada por

$$F = F_0 + F_0' r_0 z + \left(\frac{1}{2} F_0'' r_0^2 + F_0' r_0 \right) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad (9.29)$$

e

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_0} - \frac{F_0' r_0}{F_0^2} z + \frac{r_0}{F_0^3} \left(-\frac{1}{2} F_0 F_0'' r_0 + F_0'^2 r_0 - F_0 F_0' \right) z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad (9.30)$$

dessa forma, a expansão de $R(x)$ em séries de potência é

$$R(x) = D_0 x_0 z + \left[\frac{x_0}{2} \left(\frac{C_0''}{C_0} - \frac{A_0''}{A_0} \right) + \left(1 - \frac{A_0' x_0}{A_0} \right) D_0 \right] x_0 z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad (9.31)$$

Usando as equações (9.29)-(9.31), obtemos a expansão de $G(z, x_0)$ em potências de z da seguinte forma

$$G(z, x_0) = c_1(x_0)z + c_2(x_0)z^2, \quad (9.32)$$

em que

$$c_1(x_0) = \frac{C_0 D_0 x_0}{B_0} \quad (9.33)$$

e

$$c_2(x_0) = \frac{C_0 x_0}{B_0} \left\{ D_0 \left[\left(D_0 - \frac{B'_0}{B_0} \right) x_0 - 3 \right] + \frac{x_0}{2} \left(\frac{C''_0}{C_0} - \frac{A''_0}{A_0} \right) \right\}, \quad (9.34)$$

respectivamente. No limite de campos fortes, $x_0 \rightarrow x_m$, de $D_m = 0$, obtemos

$$c_1(x_m) = 0 \quad \text{e} \quad c_2(x_m) = \frac{C_m x_m^2}{2B_m} D'_m \quad (9.35)$$

em que

$$D'_m = \frac{C''_m}{C_m} - \frac{A''_m}{A_m} \quad (9.36)$$

e, portanto, obtemos

$$G_m(z, x_m) = c_2(x_m) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad (9.37)$$

Isso mostra que a divergência de $f(z, x_0)$ está associada a um fator z^{-1} e que a integral $I(x_0)$ diverge logicamente no limite de deflexão forte $x_0 \rightarrow x_m$.

Separamos a integral $I(x_0)$ em uma parte divergente $I_D(x_0)$ e uma parte regular $I_R(x_0)$. Definimos a parte divergente $I_D(x_0)$ como

$$I_D(x_0) = \int_0^1 f_D(z, x_0) dz, \quad (9.38)$$

em que $f_D(z, x_0)$ é definida por

$$f_D(z, x_0) = \frac{2x_0}{\sqrt{c_1(x_0)z + c_2(x_0)z^2}} \quad (9.39)$$

Podemos integrar $I_D(x_0)$ e obter

$$I_D(x_0) = \frac{4x_0}{\sqrt{c_2(x_0)}} \log \frac{\sqrt{c_2(x_0)} + \sqrt{c_1(x_0) + c_2(x_0)}}{\sqrt{c_1(x_0)}} \quad (9.40)$$

Uma vez que as expansões de $c_1(x_0)$ e $b(x_0)$ em potências de $x_0 - x_m$ são dadas por

$$c_1(x_0) = \frac{C_m x_m D'_m}{B_m} (x_0 - x_m) + \mathcal{O}((x_0 - x_m)^2) \quad (9.41)$$

e

$$b(x_0) = b_c(x_m) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{C_m}{A_m}} D'_m (x_0 - x_m)^2 + \mathcal{O}((x_0 - x_m)^3). \quad (9.42)$$

O coeficiente $c_1(x_0)$ no limite de deflexão forte $x_0 - x_m$ é descrito por

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_m} c_1(x_0) = \lim_{b \rightarrow b_c} \frac{2C_m x_m \sqrt{D'_m}}{B_m} \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right)^{1/2}. \quad (9.43)$$

Assim, obtemos a parte divergente $I_D(b)$ no forte limite de deflexão $b \rightarrow b_c$, de maneira que

$$I_D(x_0) = -\frac{x_m}{\sqrt{c_2(x_m)}} \log \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right) + \frac{x_m}{\sqrt{c_2(x_m)}} \log x_m^2 D'_m + \mathcal{O}[(b - b_c) \log(b - b_c)] \quad (9.44)$$

Definimos a parte regular $I_R(x_0)$ como

$$I_R(x_0) \equiv \int_0^1 f_R(z, x_0) dz \quad (9.45)$$

em que $f_R(z, x_0)$ é definida por

$$f_R(z, x_0) = f(z, x_0) - f_D(z, x_0), \quad (9.46)$$

Observe que $I(x_0) = I_D(x_0) + I_R(x_0)$. Expandindo $I_R(x_0)$ em potências de $x_0 - x_m$ e concentrando no termo principal $I_R(x_m)$, visto que estamos interessados na parte regular I_R no limite de deflexão forte $x_0 \rightarrow x_m$ ou $b \rightarrow b_c$. Deve-se integrar analiticamente ou numericamente a parte regular

$$I_R(x_0) = \int_0^1 f_R(z, x_m) dz + \mathcal{O}[(x_0 - x_m) \log(x_0 - x_m)] \quad (9.47)$$

ou

$$I_R(b) = \int_0^1 f_R(z, b_c) dz + \mathcal{O}[(b - b_c) \log(b - b_c)] \quad (9.48)$$

O ângulo de deflexão no limite de campos fortes, $x_0 \rightarrow x_m$ ou $b \rightarrow b_c$, é dado por

$$\alpha(b) = -\bar{a} \ln \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right) + \bar{b} + \mathcal{O}[(b - b_c) \log(b - b_c)], \quad (9.49)$$

na qual \bar{a} e \bar{b} são dados por

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{2B_m A_m}{C_m'' A_m - C_m A_m''}} \quad (9.50)$$

e

$$\bar{b} = \bar{a} \ln \left[x_m^2 \left(\frac{C_m''}{C_m} - \frac{A_m''}{A_m} \right) \right] + I_R(r_m) - \pi. \quad (9.51)$$

9.2 Algumas aplicações

Terminada a apresentação teórica do método, vamos fazer a sua aplicação para verificar se estamos aptos a utiliza-lo. A primeira tentativa é reproduzir os resultados da deflexão da luz para a solução de Schwarzschild obtidos Bozza [17] e Tsukamoto [104]. Isto feito, vamos aplicá-lo em outras soluções esfericamente simétricas, incluindo um buraco de minhoca. É importante ressaltar que o objetivo deste capítulo é calcular o desvio da luz no limite de campo forte de forma analítica.

9.2.1 Métrica de Schwarzschild

Para verificar o método, vamos aplicá-lo na solução de Schwarzschild. Para tal, vamos utilizar os coeficientes métricos para a métrica de Schwarzschild, de acordo com a notação (9.2)

$$A(r) = 1 - \frac{2}{r}, \quad B(r) = \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-1} \quad \text{and} \quad C(r) = r^2, \quad (9.52)$$

adotando $m = 1$ para simplificar os cálculos.

É importante notar que, sempre usaremos a transformação (9.25) e lembre-se que teremos um regime de campos forte quando $r_0 \rightarrow r_m$

No caso Schwarzschild, o valor da esfera de fótons r_m é $3m$ e pode ser encontrado pela equação (9.18).

Agora podemos encontrar as quantidades c_1 , c_2 e $G(z, r_0)$ no regime de campos fortes. Portanto, de acordo com as expressões (9.32), (9.33) e (9.34), temos

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_2 = 9, \\ G(z) &= -6z^3 + 9z^2. \end{aligned} \quad (9.53)$$

A partir desses resultados, temos as expressões para $f_D(z, x_0)$ e $f_R(z, x_0)$, no regime de campos fortes

$$f_D(z) = \frac{2}{z} \quad \text{e} \quad f_R(z) = -2 \frac{-3 + \sqrt{-6z + 9}}{z\sqrt{-6z + 9}} \quad (9.54)$$

Com os resultados acima, é possível calcular I_R , a partir da equação (9.26)

$$I_R = 2 \ln(12 - 6\sqrt{3}) \quad (9.55)$$

Com todos os resultados, podemos calcular \bar{a} e \bar{b} , dados pelas equações (9.50) e (9.51)

$$\bar{a} = 1, \quad \bar{b} = \ln[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi. \quad (9.56)$$

Esse resultado é mesmo encontrado em [17, 104]. Não podemos esquecer que b_c , parâmetro de impacto crítico que, para a métrica de Schwarzschild é $3\sqrt{3}$.

Portanto, a expressão para o ângulo de deflexão da luz para a métrica de Schwarzschild é dada por

$$\alpha(b) = -\ln\left(\frac{b}{3\sqrt{3}} - 1\right) + \ln[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi. \quad (9.57)$$

O gráfico do ângulo de deflexão da luz para métrica de Schwarzschild pode ser visto na figura (9.1).

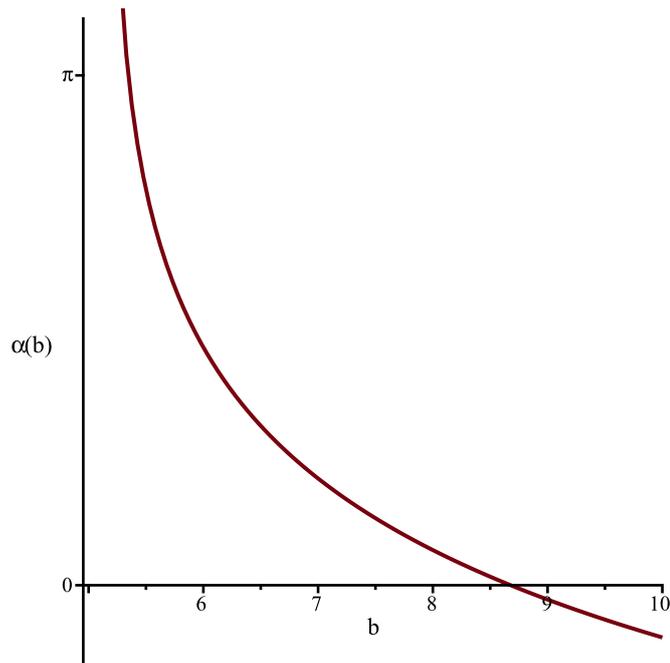


Figura 9.1: Ângulo de deflexão em função do parâmetro de impacto para métrica de Schwarzschild.

Conseguimos reproduzir o mesmos resultados de Bozza e Tsukamoto.

9.2.2 Buraco negro dilatônico

A ideia agora, é aplicar o método em outras soluções esfericamente simétricas. Nesta seção vamos aplicar em um nova solução de buraco negro dilatônico encontrado na seção (8.4). De acordo com a notação (9.2), temos

$$\begin{aligned}
 A(x) &= P(x) \left[\left(1 + \frac{p}{x} \right)^{\frac{2}{(\lambda^2+1)}} \right]^{-1}, & B(x) &= \frac{1}{P(x)} \left(1 + \frac{p}{x} \right)^{\frac{2}{(\lambda^2+1)}} \\
 C(x) &= x^2 \left(1 + \frac{p}{x} \right)^{\frac{2}{(\lambda^2+1)}}, & & (9.58)
 \end{aligned}$$

em que $p = \sqrt{k^2 + q_1^2} - k$, $q_1 = q\sqrt{\lambda^2 + 1}$ and $P(x) = 1 - \frac{2k}{x}$.

Nesse caso, para o cálculo do ângulo de deflexão vamos adotar as constantes $k = 1$, $q = 1$ e $\lambda = 1$. Resolvendo $D(x) = 0$, na equação (9.18), podemos encontrar o valor da esfera de fótons x_m

$$x_m = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, \quad (9.59)$$

considerando apenas soluções positivas.

Podemos calcular o parâmetro impacto crítico a partir da equação (9.22)

$$b_c = \frac{(7 + \sqrt{17}) \sqrt{3 + \sqrt{17}}}{4 \sqrt{-1 + \sqrt{17}}} \quad (9.60)$$

As quantidades c_1 e c_2 em regime de campo forte são

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{289 + 71 \sqrt{17}}{2 (7 + \sqrt{17})^2}, \quad (9.61)$$

enquanto, as expressões para f_D e f_R quando $x_0 \rightarrow x_m$ são

$$f_D(z) = 2 \frac{(3/4 + 1/4 \sqrt{17}) \sqrt{2} (7 + \sqrt{17})}{z \sqrt{289 + 71 \sqrt{17}}} \quad (9.62)$$

$$f_R(z) = - \frac{(7 + \sqrt{17}) \sqrt{3 + \sqrt{17}}}{2 z \sqrt{289 + 71 \sqrt{17}}} \left[\sqrt{2} \sqrt{3 + \sqrt{17}} \sqrt{(-14z + 19) \sqrt{17} - 66z + 85} \right. \\ \left. - 2 \sqrt{289 + 71 \sqrt{17}} \right] \frac{1}{\sqrt{(-14z + 19) \sqrt{17} - 66z + 85}} \quad (9.63)$$

Depois do cálculo da integral (9.26), temos

$$I_R = - \frac{1}{2 \sqrt{19 \sqrt{17} + 85}} \left[\sqrt{3 + \sqrt{17}} (7 + \sqrt{17}) \left(4 \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{5 \sqrt{17} + 19}}{\sqrt{19 \sqrt{17} + 85}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \ln(17) - 2 \ln(68) + 2 \ln(-1 + \sqrt{17}) \right) \right] \quad (9.64)$$

ou

$$I_R \approx 1,359819743 \quad (9.65)$$

As quantidades \bar{a} e \bar{b} são

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{2} (7 + \sqrt{17})}{2\sqrt{17 + 7\sqrt{17}}} \quad (9.66)$$

$$\bar{b} = -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{17} (\ln(2) - 1/8 \ln(17) - 1/4 \ln(9 + \sqrt{17})) \sqrt{17 + 7\sqrt{17}}}{17} - \pi + I_R \quad (9.67)$$

Por fim, temos a expressão do ângulo de deflexão da luz em função do parâmetro de impacto para campos fortes

$$\alpha(b) = -1,161410646 \ln\left(\frac{b}{4,199595155} - 1\right) - 0,366718994. \quad (9.68)$$

De fato, todos os cálculos são feitos com valores exatos. A forma decimal é para tornar os resultados mais compactos. As expressões originais são muito grandes.

O gráfico de $\alpha(b)$ esta solução dilatônica se encontra na figura (9.2).

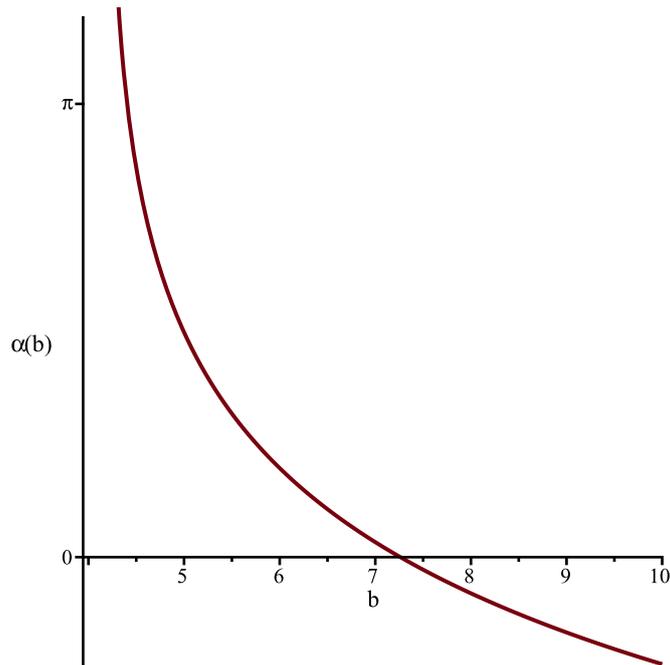


Figura 9.2: Ângulo de deflexão em função do parâmetro de impacto para um buraco negro dilatônico.

9.2.3 Buraco de minhoca de anti-Fisher

A métrica em questão nesta seção é chamada buraco de minhoca de anti-Fisher. As solução de buraco de minhoca de anti-Fisher é uma solução das equações de Einstein com um campo escalar fantasma sem massa minimamente acoplado à gravidade [14, 20, 51].

A métrica é, usando a mesma notação que o elemento de linha (9.2)

$$\begin{aligned}
 A(x) &= e^{-2 \frac{m}{k} \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{k}\right)}, & B(x) &= e^{2 \frac{m}{k} \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{k}\right)} \\
 C(x) &= e^{2 \frac{m}{k} \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{k}\right)} (k^2 + x^2)
 \end{aligned} \tag{9.69}$$

Por simplicidade vamos adotar $m = k = 1$. Nesse casos, temos

$$D(x) = \frac{2x - 4}{k^2 + x^2} \tag{9.70}$$

e fazendo $D(x) = 0$ temos encontramos o valor esfera de fótons é $x_m = 2$.

O valor do parametro de impacto crítico é

$$b_c = \sqrt{5} e^{\pi-2 \arctan(2)} \quad (9.71)$$

As expressões para c_1 e c_2 e G no regime de campos fortes são dadas por

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 4, \quad (9.72)$$

$$G(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{5} \left[(z^2 - 2z + 5) e^{4 \arctan\left(2 \frac{z}{-5+z}\right)} - 5 (-1 + z)^2 \right] \quad (9.73)$$

Agora, podemos ter as expressões f_D e f_R , no limite $x_0 \rightarrow x_m$, como o valor de I_R

$$f_D = \frac{2}{z}, \quad (9.74)$$

$$f_R = -2 \frac{\left(\sqrt{z^2 - 2z + 5} \sqrt{(z^2 - 2z + 5) e^{4 \arctan\left(2 \frac{z}{-5+z}\right)} - 5 (-1 + z)^2} - 2 \sqrt{5} z \right)}{\sqrt{z^2 - 2z + 5} z \left(\sqrt{(z^2 - 2z + 5) e^{4 \arctan\left(2 \frac{z}{-5+z}\right)} - 5 (-1 + z)^2} \right)} \quad (9.75)$$

Infelizmente, devido a complexidade da expressão para f_R não conseguimos fazer a integral de forma analítica, como ocorreu em [17, 82]. Isso significa que \bar{b} , neste caso, só pode ser obtido numericamente.

$$\bar{a} = 1 \quad \text{e} \quad \bar{b} = 3 \ln(2) - \ln(5) - 0.983455521 \quad (9.76)$$

De posse dos valores de \bar{a} e \bar{b} , estamos habilitados a plotar o gráfico do ângulo de deflexão da luz em função do parâmetro de impacto de acordo com a figura 9.3.

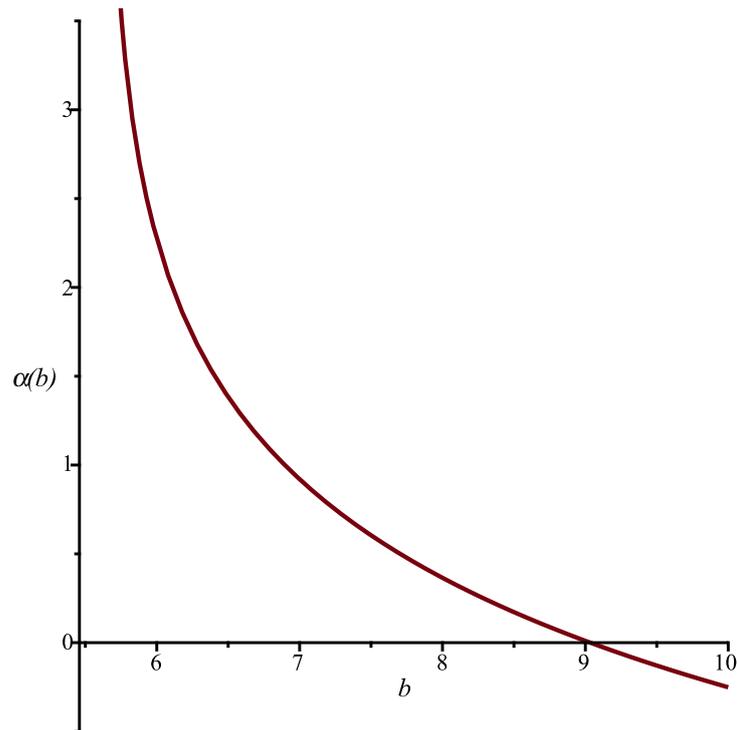


Figura 9.3: Ângulo de deflexão em função do parâmetro de impacto para buraco de minhoca Anti-Fisher.

9.2.4 Um outra solução dilatônica

Um outra tentativa de obter o ângulo de deflexão da luz de forma analítica foi bem-sucedida. Aplicamos o método em uma outra solução estática de buracos negro dilatônico. Essa solução é mais conhecida e pode ser encontrada em [43, 60, 65, 66].

De acordo com a notação (9.2), temos

$$\begin{aligned}
 A(r) &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right), & B(r) &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \\
 C(r) &= r^2 \left(1 - \frac{c}{mr}\right), & & (9.77)
 \end{aligned}$$

onde $r_+ = 2m$ e $c = Q^2 e^{2\phi_\infty}$. Q é a carga elétrica e ϕ_∞ é o valor assintótico do campo escalar. Por simplicidade, estamos adotando $m = c = 1$.

Como fizemos nas outras aplicações, podemos calcular o valor da esfera de fótons, a partir da equação (9.18)

$$x_m = \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, \quad (9.78)$$

sempre considerando apenas soluções positivas.

Para essa solução temos que o valor do parâmetro de impacto crítico é

$$b_c = \frac{(7 + \sqrt{17}) \sqrt{3 + \sqrt{17}}}{4 \sqrt{-1 + \sqrt{17}}}. \quad (9.79)$$

As quantidades importantes a serem calculadas são c_1 , c_2 , G , f_D e f_R no regime de campo forte, ou seja $r_0 \rightarrow r_m$.

Os coeficientes c_1 e c_2 no regime de campo forte

$$c_1 = 0, \quad (9.80)$$

$$c_2 = \frac{19\sqrt{17} + 85}{12 + 4\sqrt{17}} \quad (9.81)$$

e a função $G(z, x_0)$ para campo forte é

$$G(z) = -\frac{z^2 (4\sqrt{17}z - 7\sqrt{17} + 12z - 17) (3 + \sqrt{17} + 4z)}{24 + 8\sqrt{17}} \quad (9.82)$$

Para eliminar a divergência logarítmica no limite de campo forte $r_0 \rightarrow r_m$, temos que fazer

$$f_R(z, x_0) = f(z, x_0) - f_D(z, x_0), \quad (9.83)$$

na qual as funções f e f_D são dadas por

$$f = \frac{(7 + \sqrt{17}) \sqrt{2} \sqrt{3 + \sqrt{17}}}{z \left(\sqrt{3 + \sqrt{17} + 4z} \right) \left[\sqrt{(-4z + 7) \sqrt{17} - 12z + 17} \right]} \quad (9.84)$$

$$f_D = \frac{(7 + \sqrt{17}) \sqrt{3 + \sqrt{17}}}{z \sqrt{19\sqrt{17} + 85}} \quad (9.85)$$

Com isso, podemos calcular a integral (9.47), obtendo

$$I_R = -\frac{\sqrt{2}(7 + \sqrt{17})}{2\sqrt{17 + 7\sqrt{17}}} \left[-3 \ln(2) - \ln(17) + \ln(49 - 9\sqrt{17}) + 2 \operatorname{arccoth} \left(\frac{(-5\sqrt{17} + 51)\sqrt{7 + \sqrt{17}}\sqrt{17 + 7\sqrt{17}}}{544} \right) \right] \quad (9.86)$$

ou

$$I_R = 0,3245830766 \quad (9.87)$$

Por fim, os valores \bar{a} and \bar{b} são

$$\bar{a} = 1.161410646 \quad \text{e} \quad \bar{b} = 1.161410646. \quad (9.88)$$

Agora, estamos habilitados a fazer o gráfico do ângulo de deflexão em função do parâmetro de impacto b , de acordo com a equação (9.1), é dado pela figura (9.4).

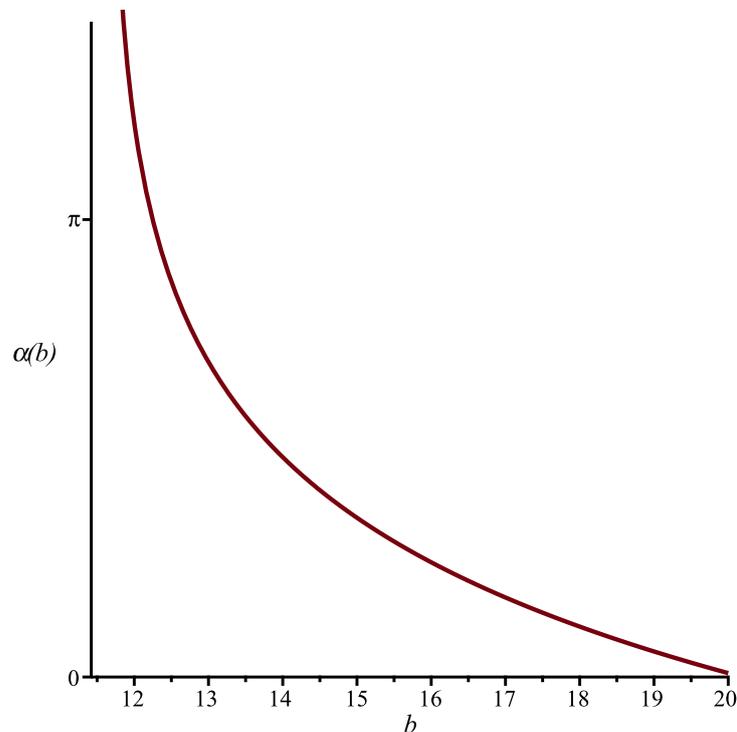


Figura 9.4: Ângulo de deflexão em função do parâmetro de impacto para outra solução dilatônica.

Foi possível calcular a deflexão da luz em todos os casos, exceto em uma integral em um dos casos. Isso nos diz que o método é bastante confiável. Entretanto, todas as métricas utilizadas são assintoticamente planas. Até o término deste trabalho não conseguimos utilizar em métricas que não são assintoticamente planas. Será objeto estudo futuro.

Algoritmo de Janis-Newman

Buracos negros são objetos importantes em qualquer teoria de gravitação, tanto na esfera da gravitação clássica quanto na quântica. Por esta razão, é um passo fundamental, em qualquer teoria, obter todas as soluções possíveis de buracos negros. Os buracos negros com rotação são os casos mais relevantes para a astrofísica, pois acredita-se que a maioria dos buracos negros astrofísicos estão girando. Estas soluções também podem fornecer métrica exterior para estrelas que giram.

A solução mais geral deste tipo na gravidade de Einstein-Maxwell com constante cosmológica Λ é a métrica Plebański-Demiański [90, 91]: possui seis cargas: massa m , carga NUT, carga elétrica q , carga magnética p , spin a e aceleração α . Um trabalho desafiador é generalizar esta solução para Lagrangianas mais complexas, envolvendo campos escalares e outros campos de calibre com interações não-mínimas, como é geralmente o caso da supergravidade. À medida que a complexidade das equações de movimento aumenta, é mais difícil encontrar soluções analíticas exatas. Por esse motivo, é interessante encontrar algoritmos que gerem novas soluções, ou seja, procedimentos que transformam uma configuração original para outra configuração com maior complexidade [52].

Um algoritmo *on-shell*¹ não preserva necessariamente as equações de movimento, mas são, no entanto, muito úteis: fornecem um ansatz motivado, e é sempre mais fácil verificar se um ansatz satisfaz as equações do que resolvê-las do zero.

O algoritmo Janis-Newman (JNA) é uma técnicas de geração de solução (off-shell), que - em sua formulação original - gera métricas com rotação a partir de estáticas. Foi encontrado por Janis e Newman como uma derivação alternativa da métrica de Kerr [84]. Logo depois ela foi usada novamente para descobrir a métrica de Kerr-Newman [83]. Este algoritmo fornece uma maneira de gerar métricas com simetria axial e estacionárias a partir de métricas estáticas e esfericamente simétricas através de uma complexificação particular de coordenadas de tempo (nula) e radial, seguido por uma transformação de coordenadas complexas [52].

¹Na física, particularmente na teoria quântica de campos, as configurações de um sistema físico que satisfaçam as equações clássicas de movimento são chamadas on-shell, e aquelas que não são chamados de off-shell.

O objetivo inicial deste estudo era poder encontrar uma solução com rotação para a solução estática de k -essência [23]. Ao pesquisar na literatura, vimos que o algoritmo de Janis-Newman era e ainda é frequentemente utilizado, por isso decidimos utilizá-lo. Ao decorrer deste capítulo, vamos apresentar o método e aplicá-lo em algumas soluções estáticas, incluindo k -essência. Mostraremos que a aplicação do método de Janis-Newman conduz em muitos casos a resultados errôneos, que não satisfazem as equações de campo

10.1 O algoritmo de Janis-Newman

O algoritmo de Janis-Newman fornece uma maneira de derivar soluções rotacionais em quatro dimensões, aplicando transformações complexas peculiares a uma métrica estática. Usando uma função genérica $f(r)$, pode-se começar com uma métrica (estática) inicial da forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (10.1)$$

O algoritmo prossegue da seguinte forma:

1. Transformando para coordenadas nulas

Escolhemos a transformação nula

$$du = dt - f^{-1}dr, \quad (10.2)$$

transformando a métrica para obter

$$ds^2 = -fdu^2 - 2dudr + r^2d\Omega^2. \quad (10.3)$$

2. Introdução de tetradas nulas do formalismo de Newman-Penrose

Introduz-se um conjunto de tetradas nulas

$$e_a^\mu = \{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\} \quad (10.4)$$

e reescrevemos a métrica inversa da seguinte forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu \quad (10.5)$$

com

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Para a métrica (10.3) as tetradas são dadas por

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad n^\mu = \delta_u^\mu - \frac{f}{2} \delta_r^\mu, \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{1}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu \right). \quad (10.7)$$

3. Complexificação

O elemento crucial do algoritmo de Janis-Newman é a complexificação das coordenadas r e u , assim temos um novo sistema de coordenadas

$$u = u' + ia \cos \theta, \quad r = r' - ia \cos \theta, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi, \quad (10.8)$$

em que a é um parâmetro real arbitrário, com a restrição de que $r', u' \in \mathbb{R}$.

A função $f(r)$ deve ser substituída por uma nova função $f(r, \bar{r}) \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(r) \rightarrow f(r, \bar{r}) = f(r', \theta'). \quad (10.9)$$

Esta etapa é a mais difícil de realizar porque não existe uma regra a priori para escolher qualquer complexificação particular e é necessário verificar sistematicamente se as equa-

ções de Einstein serão satisfeitas. O conjunto de regras mais comumente utilizados [52] são:

$$r \longrightarrow \frac{1}{2}(r + \bar{r}) = \text{Re } r, \quad (10.10)$$

$$\frac{1}{r} \longrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) = \frac{\text{Re } r}{|r|^2}, \quad (10.11)$$

$$r^2 \longrightarrow |r|^2. \quad (10.12)$$

Sob a transformação 10.8, as tetradas se transformam

$$e_a^\mu \longrightarrow e'^\mu_a = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} e_a^\nu \equiv \{l'^\mu, n'^\mu, m'^\mu, \bar{m}'^\mu\}, \quad (10.13)$$

com

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial r} & \frac{\partial u'}{\partial \theta} & \frac{\partial u'}{\partial \phi} \\ \frac{\partial r'}{\partial u} & \frac{\partial r'}{\partial r} & \frac{\partial r'}{\partial \theta} & \frac{\partial r'}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial u} & \frac{\partial \theta'}{\partial r} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta'}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial u} & \frac{\partial \phi'}{\partial r} & \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} & \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ia \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & -ia \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

e assim, temos uma novo conjunto de tetradas

$$\begin{aligned} l'^\mu &= \delta_r^\mu, & n'^\mu &= \delta_u^\mu - \frac{f}{2} \delta_r^\mu, \\ m'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left[\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu - ia \sin \theta (\delta_u^\mu - \delta_r^\mu) \right]. \end{aligned} \quad (10.15)$$

4. Obtendo a nova métrica

Pode-se finalmente reconstruir a métrica $g'^{\mu\nu}$ do novo conjunto de tetradas $\{l'^\mu, n'^\mu, m'^\mu, \bar{m}'^\mu\}$,

$$g'^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + l'^\nu n'^\mu - (m'^\mu \bar{m}'^\nu + m'^\nu \bar{m}'^\mu). \quad (10.16)$$

Inicialmente, o elemento de linha da “nova” métrica encontra-se nas coordenadas nulas. Além de encontrar as componentes covariantes $g'_{\mu\nu}$ da nova métrica, devemos operar uma mudança de coordenada para as coordenadas de Boyer–Lindquist, para que a nova métrica tenha uma forma similar à métrica de Kerr.

10.2 Aplicações

O algoritmo de Janis-Newman se mostrou prático e eficiente para transformar métricas estáticas e esféricamente simétricas em métricas estacionárias com simetria axial, no vácuo, como mostrado em [84] que encontra a métrica de Kerr partindo da métrica de Schwarzschild, e em [83] que encontra a métrica de Kerr-Newman partindo da métrica de Reissner-Nordström. Todas as soluções citadas acima são soluções das equações de Einstein, sejam elas estáticas ou estacionárias. Um desafio para esse método é sua aplicabilidade em outros tipos de teoria, além das soluções de vácuo ou da ação de Einstein Maxwell. Aplicamos o algoritmo de Janis-Newman, em soluções estáticas, em 3 tipos de teorias: k -essência [23], dilaton [44] e solução de Fisher.

10.2.1 Teoria de k -essência

Nosso objetivo é gerar métricas com rotação a partir de uma solução estática encontrada na teoria k -essência. A métrica tem a seguinte forma

$$ds^2 = -\frac{(9b^2 - x^2)^2}{9} dt^2 + \frac{9}{(9b^2 - x^2)^2} dx^2 + \frac{3}{(9b^2 - x^2)} d\Omega^2. \quad (10.17)$$

Para esta transformação usaremos o algoritmo de Janis-Newman. Ele é baseado em uma complexa transformação de coordenadas.

Em primeiro lugar, introduzimos as coordenadas nulas

$$du = dt - f(x)^{-1} dx. \quad (10.18)$$

Portanto, a métrica torna-se

$$ds^2 = -f(x) du^2 - 2dudx + g(x) d\Omega^2, \quad (10.19)$$

em que $f(x) = \frac{(9b^2 - x^2)^2}{9}$ e $g(x) = \frac{3}{(9b^2 - x^2)}$.

A partir da forma contravariante da métrica, introduzimos um conjunto de tetradas nulas

$$e_a^\mu = \{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}, \quad (10.20)$$

expressas por

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, 1, 0, 0), & n^\mu &= \left(1, -\frac{f(x)}{2}, 0, 0\right), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2g(x)}} \left(0, 0, i, \frac{1}{\sin \theta}\right) & \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2g(x)}} \left(0, 0, -i, \frac{i}{\sin \theta}\right), \end{aligned} \quad (10.21)$$

em que a métrica é escrita a partir da seguinte combinação

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - (m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu). \quad (10.22)$$

O passo a seguir é o elemento crucial do JNA: as coordenadas u e x são complexizadas e um novo parâmetro positivo real a , que posteriormente será identificado com o momento angular por massa de unidade, é introduzido:

$$u = u' + ia \cos \theta, \quad x = x' - ia \cos \theta, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi, \quad (10.23)$$

em a base de tetradas se transformam como vetores

$$e_a'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} e_a^{\nu}, \quad (10.24)$$

e as funções se transformam da seguinte maneira

$$f(x) \rightarrow f(x, \bar{x}) = \frac{(9b^2 - \rho^2)^2}{9} \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow g(x, \bar{x}) = \frac{3}{9b^2 - \rho^2}, \quad (10.25)$$

em que $\rho^2 = |x|^2 = x\bar{x} = x^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

Após a complexa transformação temos um novo conjunto de tetradas.

$$\begin{aligned}
 l'^{\mu} &= l^{\mu}, & n'^{\mu} &= \left(1, -\frac{f(x, \bar{x})}{2}, 0, 0\right), \\
 m'^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2g(x, \bar{x})}} \left(ia \sin \theta, -ia \sin \theta, 1, \frac{i}{\sin \theta}\right) \text{ e} \\
 \bar{m}'^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2g(x, \bar{x})}} \left(-ia \sin \theta, ia \sin \theta, 1, -\frac{i}{\sin \theta}\right).
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Usando novamente

$$g'^{\mu\nu} = l'^{\mu} n'^{\nu} + l'^{\nu} n'^{\mu} - (m'^{\mu} \bar{m}'^{\nu} + m'^{\nu} \bar{m}'^{\mu}), \tag{10.27}$$

finalmente encontramos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & -1 & 0 & a \sin^2 \theta (f - 1) \\ -1 & 0 & 0 & a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & g & 0 \\ a \sin^2 \theta (f - 1) & a \sin^2 \theta & 0 & [g + (2 - f)a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \tag{10.28}$$

em coordenadas nulas, com $f = f(x, \bar{x})$ e $g = g(x, \bar{x})$

Convertendo de coordenadas nulas para coordenadas de Boyer-Lindquist, encontramos a forma final para a métrica com rotação

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{(9b^2 - \rho^2)^2}{9} & 0 & 0 & a \sin^2 \theta \left[\frac{(9b^2 - \rho^2)^2}{9} - 1 \right] \\ 0 & \frac{9}{(9b^2 - \rho^2)^2 (3a^2 \cos^2 \theta - 3a^2 - 9b^2 + \rho^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{9b^2 - \rho^2} & 0 \\ a \sin^2 \theta \left[\frac{(9b^2 - \rho^2)^2}{9} - 1 \right] & 0 & 0 & \left\{ -\frac{3}{9b^2 - \rho^2} + 3a^2 \left[(9b^2 - \rho^2)^2 - \frac{2}{3} \right] \sin^2 \theta \right\} \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \tag{10.29}$$

Além disso, podemos escrever a expressão do campo escalar adaptada ao quadro de rotação diretamente da expressão estática

$$\phi(r, \theta) = \frac{4}{3\epsilon} \left[2\sqrt{x^2 + a^2 \cos^2(\theta)} - \frac{9b}{2} \ln \left(\frac{3b + \sqrt{x^2 + a^2 \cos^2(\theta)}}{3b - \sqrt{x^2 + a^2 \cos^2(\theta)}} \right) \right]. \tag{10.30}$$

Testando a métrica acima, não fomos capazes de confirmar a solução das equações de Einstein. Porém, quando fazemos $a = 0$, retornamos à solução estática perfeitamente.

10.2.2 Buraco negro dilatônico

Desta vez, vamos testar o algoritmo de Janis-Newman e, uma solução estática de buraco negro chamada de *buraco negro dilatônico linear* encontrada por Clément et al. [44]. O elemento de linha dessa solução é dada por

$$ds^2 = -\frac{r-b}{r_0}dt^2 + \frac{r_0}{r-b}dr^2 + r_0rd\Omega^2, \quad (10.31)$$

em que $b = 2M$ e r_0 é uma constante.

Antes de tudo, devemos introduzir a coordenada nula

$$du = dt - f(r)^{-1}dx. \quad (10.32)$$

Portanto, a métrica se torna

$$ds^2 = -f(r)du^2 - 2dudr + g(r)d\Omega^2, \quad (10.33)$$

em que $f(r) = \frac{r-b}{r_0}$ and $g(r) = r_0r$.

A partir da forma contravariante da métrica, introduzimos um conjunto de tetradas nulas expressas por

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, 1, 0, 0), & n^\mu &= \left(1, -\frac{f(r)}{2}, 0, 0\right), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2g(r)}} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right), \end{aligned} \quad (10.34)$$

em que a métrica pode ser construída a partir da equação (10.22)

Como já visto, a complexificação das coordenadas r e u é dada por

$$u = u' + ia \cos\theta, \quad r = r' - ia \cos\theta, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi. \quad (10.35)$$

As funções se transformam da seguinte maneira

$$f(r) \rightarrow f(r, \bar{r}) = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - br}{r_0 r} \quad \text{e} \quad g(r) \rightarrow g(r, \bar{r}) = r_0 r. \quad (10.36)$$

Após a transformação complexa, temos um novo conjunto de tetradas

$$l'^{\mu} = l^{\mu}, \quad n'^{\mu} = \left(1, -\frac{f(r, \bar{r})}{2}, 0, 0 \right),$$

$$m'^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2g(r, \bar{r})}} \left(ia \sin \theta, -ia \sin \theta, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right). \quad (10.37)$$

Usando novamente a expressão (10.22), finalmente encontramos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & -1 & 0 & a \sin^2 \theta (f - 1) \\ -1 & 0 & 0 & a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & g & 0 \\ a \sin^2 \theta (f - 1) & a \sin^2 \theta & 0 & [g + (2 - f)a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (10.38)$$

em coordenadas nulas, com $f = f(r, \bar{r})$ e $g = g(r, \bar{r})$.

Convertendo de coordenadas nulas para coordenadas Boyer-Lindquist encontramos a forma final para métrica de rotação

$$g_{tt} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}{r_0 r}, \quad g_{rr} = -\frac{r_0 r}{r^2 - 2Mr + a^2},$$

$$g_{\theta\theta} = -r_0 r, \quad g_{t\phi} = \left(1 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}{r_0 r} \right) a \sin^2 \theta,$$

$$g_{\phi\phi} = \left[\left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}{r_0 r} - 2 \right) - r_0 r \right] \sin^2 \theta, \quad (10.39)$$

no entanto, a versão com rotação para o buraco negro dilatônico linear já foi encontrada por [44] usando o *modelo sigma*. A solução encontrada por Clément et al. é ligeiramente diferente da solução encontrada usando o algoritmo de Janis-Newman.

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}{r_0 r}, & g_{rr} &= -\frac{r_0 r}{r^2 - 2Mr + a^2}, \\
g_{\theta\theta} &= -r_0 r, & g_{t\phi} &= 2aM \sin^2 \theta, \\
g_{\phi\phi} &= r_0 r \frac{(4M^2 a^2 \sin^2 \theta + 2Mr - r^2 - a^2) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}.
\end{aligned} \tag{10.40}$$

Também não foi possível verificar a solução (10.43) como solução das equações de Einstein. Notamos que os componentes g_{tt} , g_{rr} e $g_{\theta\theta}$ são os mesmos em ambas as técnicas, mas os componentes $g_{t\phi}$ e $g_{\phi\phi}$ são diferentes, o que nos faz pensar que alguns erros são causados na transformação da coordenada ϕ .

Também notamos, em ambas as técnicas, que a expressão do campo escalar é a mesma

$$e^{2\phi} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r_0 r}. \tag{10.41}$$

10.2.3 Solução de anti-Fisher

Essa solução estática e esfericamente simétrica foi encontrada a partir de uma ação da relatividade geral minimamente acoplada a um campo escalar fantasma [19].

$$ds^2 = P^\eta dt^2 - P^{-\eta} dr^2 - P^{1-\eta} r^2 d\Omega^2, \tag{10.42}$$

em que $P = 1 - \frac{2m}{r}$ e η é uma constante.

Aplicando as mesmas etapas do algoritmo de Janis-Newman dos exemplos anteriores na solução acima, encontramos

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)^\eta, & g_{rr} &= -\frac{\Sigma^\eta (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)^{1-\eta}}{\Delta}, \\
g_{\theta\theta} &= -\Sigma^\eta (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)^{1-\eta}, & g_{t\phi} &= \left[1 - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)^\eta\right] a \sin^2 \theta, \\
g_{\phi\phi} &= \left[\Sigma^\eta (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)^{1-\eta} + a^2 \sin^2 \theta \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)^{1-\eta}}{\Sigma^\eta}\right] \sin^2 \theta,
\end{aligned} \tag{10.43}$$

em $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$.

Mais uma vez, não foi possível verificar essa transformação da métrica como solução das equações de Einstein. Se adotarmos $\eta = 0$, nos termos da suposta solução acima, temos a métrica de Kerr.

10.2.4 Teoria de Brans-Dicke

Em 1982, Krori e Bhattacharjee [76] encontraram uma solução com rotação para uma solução estática na teoria de Brans e Dicke usando técnicas do algoritmo de Janis-Newman.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2r_0 r}{\rho}\right)^\eta (dt - \omega d\phi)^2 - \left(1 - \frac{2r_0 r}{\rho}\right)^\xi \rho \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\right) + 2 \left(1 - \frac{2r_0 r}{\rho}\right)^\sigma \omega (dt - \omega d\phi) d\phi, \quad (10.44)$$

em que $\omega = a \sin^2 \theta$, $\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 + a^2 - 2r_0 r$ e $\sigma = \frac{\eta + \xi - 1}{2} = -\frac{c}{2\lambda}$.

Conseguimos reproduzir os resultados de Krori e Bhattacharjee mas não pudemos verificar esta solução como uma solução da equação de Einstein. De acordo com Pirogov [89], a solução citada acima é inválida.

Conclusão

Este trabalho encerra um período de estudo que se iniciou com o estudo de soluções estáticas e esfericamente simétricas na teoria de k -essência. Pouco tempo depois, as mesmas soluções foram encontradas na teoria de Rastall. Inspirado nessa coincidência, foi proposto um estudo sobre uma possível dualidade, entre k -essência e Rastall. Posteriormente, um estudo da estabilidade dessas soluções estáticas e esfericamente simétricas.

No capítulo 3, fizemos uma breve revisão da teoria de k -essência e alguns exemplos de sua aplicação. Apresentamos alguns exemplos, tais como: Teoria de cordas, modelo condensado fantasma e campo taquiônico. A teoria de k -essência é definida por uma função geral $F(X, \phi)$, em que X é o termo cinético usual de um campo escalar.

No capítulo 4, da mesma forma, apresentamos a teoria de Rastall de forma breve. A teoria de Rastall é uma extensão não conservativa da relatividade geral na qual o tensor energia-momento da matéria tem uma divergência proporcional ao gradiente do escalar de Ricci R . Nesse capítulo, apresentamos a teoria de Rastall em alguns cenários, por exemplo, *Cosmologia em Rastall e o modelo Λ CMD* e *Estrela de nêutrons*. Ainda neste capítulo, trouxemos uma tentativa de formulação Lagrangiana para teoria de Rastall, já que a ausência de uma formulação Lagrangiana é um motivo de crítica para essa teoria.

No capítulo 5, apresentamos uma revisão das soluções estáticas e esfericamente simétricas nas teorias de k -essência e Rastall. O estudo desse tipo de configuração é o cerne desse trabalho. No caso de k -essência, foram encontradas duas soluções especiais: a primeira, fixando $f(X) = F_0 X^n$, encontramos uma solução para $n = 1/3$ não assintoticamente plana, com um único horizonte no qual f_X diverge enquanto X e f são finitos. A configuração resultante pode ser caracterizada como um buraco negro com um interior semelhante a Schwarzschild imerso em um espaço-tempo assintoticamente singular; a segunda solução foi obtida escolhendo $n = 1/2$ e introduzindo uma constante cosmológica. Esta solução também é não assintoticamente plana, mas agora há dois horizontes com área infinita da superfície. Neste caso, a função $f(X)$ é regular nos horizontes, mas o campo escalar ϕ diverge no horizonte. Além dos horizontes, o espaço-tempo muda sua assinatura, porém, ainda permanecendo Lorentziano, e a solução descreve um universo anisotrópico Kantowski-Sachs com singularidades que podem ser alcançadas por corpos de teste em tempo finito. Entre os dois horizontes há uma região estática com geometria de um buraco de minhoca. Para o caso de Rastall,

soluções exatas com um campo escalar sem massa foram encontradas fixando o parâmetro livre a (em $a = 1$, relatividade geral é recuperada) em alguns valores particulares. Surpreendentemente, algumas dessas soluções exatas são, do ponto de vista geométrico, idênticas às encontradas no contexto da teoria de k -essência [23]. Tais soluções, têm características muito particulares, algumas delas semelhantes ao caso do buraco negro frio (por exemplo, elas possuem uma área de horizonte infinito), mas tendo singularidades na região assintótica em vez de espaço-tempo plano. Mostramos também que, na ausência de um termo potencial, é, em princípio, possível ter buracos negros com área de horizonte finita e com campo escalar finito e regular, ao contrário do que ocorre no caso de k -essência. Além desses casos com características semelhantes àsquelas encontradas no contexto de k -essência, novas estruturas foram encontradas, um pouco semelhantes à solução de Schwarzschild na relatividade geral, mas sem achatamento assintótico.

Devido a essa surpreendente coincidência entre as soluções de teorias tão diferentes, k -essência e Rastall, seria muito interessante estudar em que condições essas teorias são coincidentes. Isso foi feito no capítulo 6, no qual estudamos as condições de equivalência entre a teoria de k -essência e a gravidade de Rastall na presença de um campo escalar, que chamamos de dualidade k - \mathcal{R} . Essas duas teorias realmente surgiram em contextos muito diferentes, sendo a teoria de k -essência, como foi visto, é baseada em uma generalização do termo cinético de um campo escalar, enquanto a teoria de Rastall é uma teoria não conservativa da gravidade que pode ser vista como uma possível implementação fenomenológica dos efeitos quânticos nas teorias gravitacionais. Tal equivalência foi revelada no caso de modelos esfericamente simétricos estáticos [22, 23], mais explicitamente abordado neste trabalho para todos os casos em que os campos métricos e escalares dependem essencialmente de uma única coordenada, e a teoria de k -essência é especificada por uma função de lei de potência do termo cinético usual, ao qual um termo potencial pode ser adicionado. Essa generalização abrange diversos modelos estáticos e cosmológicos, incluindo todas as cosmologias homogêneas.

Discutimos configurações cosmológicas com campos escalares e matéria na forma de um fluido perfeito, cuja evolução na teoria de Rastall pode seguir uma das duas leis possíveis: um (R1) assume que não há mistura entre matéria e campo escalar, cada um deles obedecendo separadamente ao a lei de não conservação (6.13), e a outra (R2) atribui toda a não conservação ao campo escalar enquanto a matéria é conservativa, ou seja, $\nabla_\nu T_\mu^\nu[m] = 0$. Resumamos os principais resultados obtidos neste contexto:

1. A dualidade $k - R$ foi estabelecida para a versão R1 da teoria de Rastall com uma equação de estado arbitrária da matéria. Foi descoberto que a equação de estado da matéria é diferente nos modelos de k -essência e Rastall mutuamente dual; no entanto, argumenta-se que as respectivas velocidades do som são as mesmas. Visto que as velocidades do som que caracterizam os campos escalares, ϕ na teoria de k -essência e ψ na de Rastall, também coincidem, concluímos que a dualidade $k - R$ é mantida não apenas para os fundos cosmológicos, mas também para perturbações adiabáticas.
2. Para a versão R2 da teoria de Rastall, descobriu-se que a dualidade $k - R$ existe apenas com fluidos com equação de estado $p = w\rho$, $w = \text{constante}$, que é o mesmo para os modelos de k -essência e Rastall. Além disso, no modelo da k -essência, o campo escalar obedece a mesma equação de estado efetiva. No entanto, no nível perturbativo, os modelos mutuamente duais se comportam, em geral, de maneira diferente.
3. Alguns casos especiais foram discutidos, mostrando como surgem algumas restrições aos parâmetros livres de cada teoria.
4. Foi considerado um exemplo no qual um modelo cosmológico completamente equivalente ao modelo Λ CDM da Relatividade Geral é obtido no nível de fundo, mas características diferentes devem aparecer no nível perturbativo.

A equivalência entre as duas teorias discutidas aqui é um tanto surpreendente por causa de sua origem basicamente diferente. Um aspecto curioso é que a teoria de k -essência tem uma formulação Lagrangiana enquanto a teoria de Rastall não possui uma. É possível que a equivalência estudada aqui possa levar a uma formulação Lagrangiana restrita da teoria de Rastall no mini-super-espaço em termos de funções métricas dependendo de uma única variável. Se isso for verdade, pode sugerir como recuperar uma formulação Lagrangiana completa para a teoria de Rastall em uma estrutura mais geral.

No capítulo 7, analisamos a estabilidade das configurações do tipo buraco negro encontradas anteriormente na teoria de k -essência [23]. Essas soluções foram obtidas no caso em que a função k -essência $F(X, \phi)$ é uma lei de potência dada por $F(X, \phi) = F_0 X^n - 2V(\phi)$. Os casos especiais $n = 1/3$, com $V(\phi) = 0$, e $n = 1/2$, com $V(\phi) = \text{constante}$, admitem solução analítica para uma configuração estática e esfericamente simétrica. O caso $n = 1/2$ leva a uma solução consistente na presença de uma constante cosmológica. Ambas as soluções não são assintoticamente planas. Para $n = 1/3$, o infinito espacial é singular, enquanto a

geometria do caso $n = 1/2$ é regular, com um horizonte degenerado semelhante a buracos negros frios existentes nas teorias escalares-tensoriais [21, 27].

Perturbações radiais lineares foram consideradas. A análise foi realizada utilizando a condição de medidor $\delta\beta = 0$, em que β é o logaritmo do raio da 2-esfera¹. Esta escolha é consistente com a abordagem invariante de calibre para perturbações em configurações estáticas, esféricas simétricas [24, 26, 67]. Ambas as soluções do tipo buraco negro encontradas na teoria de k -essência descritas neste trabalho revelam-se instáveis: é possível obter soluções para as equações perturbadas que crescem sem limites com o tempo, satisfazendo ao mesmo tempo as condições de contorno exigidas.

Além disso, argumenta-se que, pelo menos genericamente, todas as configurações estáticas e esfericamente simétricas em k -essência com $n < 1/2$ devem ser instáveis: isso acontece, de fato, porque a equação mestre para perturbações perde sua natureza hiperbólica. Isso, entretanto, não é provado de uma forma geral porque é necessário levar em consideração as condições de contorno fisicamente motivadas para cada solução particular.

Um ponto de interesse é que para o valor intermediário de n , ou seja, $n = 1/2$ vemos um caso raro em que a equação de perturbação pode ser diretamente integrada sem uma decomposição nos modos Fourier: esta solução analítica mostra explicitamente a instabilidade da solução estática de fundo.

Em alguns casos, quando a velocidade do som é superluminal, isto é, $1/2 < n < 1$, é possível não ter problemas com causalidade se a fase superluminal for um fenômeno transitório [68]. No nosso caso, no entanto, parece não ser possível usar esse argumento, uma vez que nossas soluções são estáticas. Quando a velocidade do som é imaginária, $n < 1/2$, a situação é ainda mais drástica, e as instabilidades parecem ser inevitáveis.

Esses resultados podem ser comparados, entre outros, com os relatados em [24], em que as classes de soluções estáticas de vácuo escalar, esfericamente simétricas conhecidas como Fisher, o qual está relacionado com um campo escalar comum, e anti-Fisher, relacionado com um campo escalar fantasma, que exibem algumas características semelhantes às estruturas aqui estudadas, foram analisadas usando um método semelhante. Esta análise levou a uma conclusão sobre a instabilidade dessas soluções de vácuo escalar. Parece difícil fazer uma afirmação sobre a generalidade da questão da estabilidade dos buracos negros escalar-tensoriais,

¹Em matemática, uma n -esfera (ou hiperesfera) é a generalização da esfera a um espaço euclidiano de dimensão arbitrária. Em outras palavras, a n -esfera é uma hipersuperfície do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , notada em geral \mathbb{S}^n . A hiperesfera no espaço euclidiano de dimensão 2, é a 2-esfera.

mas os resultados obtidos até agora podem levar a algumas dicas sobre esta questão. Em particular, pelo nosso conhecimento, existem apenas dois exemplos de soluções esfericamente simétricas de buracos negros com campos escalares que são estáveis sob perturbações esféricas lineares. Um exemplo é um buraco negro com um campo de escalar conformal sem massa [13, 16], cuja estabilidade foi comprovada em [80]. O outro é uma configuração de “universo negro” com um campo escalar fantasma auto-interagindo [32, 33], que se mostrou estável no caso em que o horizonte do buraco negro coincidiu com o mínimo do raio esférico [26]. Ambos os exemplos são excepcionais, enquanto em casos genéricos as soluções apresentam instabilidades.

Também no capítulo 7, realizamos uma análise de estabilidade das soluções exatas do tipo buraco negro encontradas no contexto da teoria da gravidade de Rastall na presença de um campo escalar auto-interagente, que foram originalmente relatados em [22]. As métricas correspondentes são as mesmas encontradas no contexto das teorias de k -essência [23]. Esta coincidência das métricas encontradas em contextos tão diferentes (o comportamento campos escalares em cada teoria também é bastante diferente) foi discutida em detalhes no capítulo 6, assim como em [35]. A análise de perturbação das soluções k -essência foi mostrada na seção 7.1, como também em [28], e concluiu-se que elas são instáveis. Assim, foi natural realizar uma análise semelhante para as soluções Rastall correspondentes, uma vez que a equivalência com as soluções de k -essência pode não ser preservada no nível perturbativo.

Um resultado surpreendente é que a análise de estabilidade no caso Rastall é inconsistente: perturbações lineares dependentes do tempo esfericamente simétricas simplesmente não existem. Nesse sentido, as soluções podem ser consideradas estáveis sob tais perturbações. A razão para nossa conclusão é que na teoria de Rastall diferentes combinações das equações perturbadas levam a diferentes equações “mestras” para a perturbação do campo escalar, $\delta\phi$. Este problema não existe para soluções de k -essência. Não podemos atribuir esse aspecto a uma escolha errada das coordenadas ou do calibre de perturbação, pois, conforme discutido, por exemplo, em [24, 34, 67], o método de perturbação empregado aqui é equivalente a um método invariante de calibre.

Muito provavelmente, as raízes da inconsistência detectada para soluções do tipo buraco negro de Rastall vêm da ausência de uma formulação Lagrangiana dessa teoria. Deve-se observar que uma inconsistência semelhante foi encontrada no contexto cosmológico, também com um campo escalar como fonte de matéria. Mas, para as soluções cosmológicas, a in-

consistência foi reparada pela introdução de matéria bariônica ordinária. No caso estático e esférico simétrico estudado em [22], tal extensão é menos óbvia.

Houve algumas tentativas de encontrar uma formulação Lagrangiana para a teoria de Rastall [96, 101], mas as teorias resultantes não eram completamente equivalentes à de Rastall, ou requer uma estrutura geométrica completamente nova: usando essas formulações, nós, estritamente falando, nos afastamos do contexto original da teoria de Rastall. Os resultados aqui relatados podem apontar algumas restrições inerentes à aplicabilidade da teoria de Rastall, e, até mesmo, de qualquer teoria não-Lagrangiana. Esperamos estender a análise atual para tentar responder a essa dúvida em nossos trabalhos futuros.

No capítulo 8, trouxemos um conjunto de soluções dilatônicas. Encontramos vários tipos de soluções estáticas e esfericamente simétricas: buracos negros, buracos de minhoca e singularidades. O passo imediato a ser dado é o estudar as propriedades dessas soluções com mais detalhes, como também, realizar o estudo perturbativo dessas soluções para investigar a sua estabilidade.

No capítulo 9, apresentamos um método, desenvolvido por Bozza [17] e aprimorado por Tsukamoto [104], que nos permite calcular, de forma analítica, o desvio da luz muito próximo da esfera de fótons, ou seja, no limite de campo forte. Fizemos algumas aplicações para verificar a eficácia do método. Fomos capazes de calcular de forma analítica todos exemplos utilizados, exceto uma integral em um dos casos, que foi feita de forma numérica. É importante ressaltar que todos os casos estudados são soluções estáticas e esfericamente simétricas assintoticamente planas. Um próximo passo seria adaptar esse método para ser utilizado em métricas que não são assintoticamente planas.

No capítulo 10, apresentamos o algoritmo de Janis-Newman. O algoritmo de Janis-Newman é um método que promete transformar métricas estáticas e esfericamente simétricas, tais como soluções de buracos negros, em métricas com rotação. O método foi desenvolvido por Newman e Janis [85] e foi utilizado para transformar a métrica de Schwarzschild na métrica de Kerr por meio de uma transformação complexa de coordenadas. O mesmo método foi utilizado para encontrar a solução de Kerr-Newman a partir da solução de Reissner-Nordström. O algoritmo de Janis-Newman tem sido bastante utilizado atualmente. De fato, seria muito interessante e útil termos um método off-shell que nos fornecesse métrica com rotação, tipo Kerr, a partir de soluções estática já conhecidas. Nesse sentido, testamos o método utilizando métricas estáticas com o objetivo de encontrar a sua versão com rotação. Conseguimos utilizar o método, porém notamos que ao final do processo essas novas soluções, rotacionais, não se

verificam como soluções das equações de Einstein. Há casos na literatura em que novas soluções com rotação que se originaram de uma solução estática a partir do algoritmo de Janis-Newman e que não são soluções das equações de Einstein, como a encontrada por Krori e Bhattacharjee [76], porém que são aceitos como se fossem. Isso não significa que o algoritmo de Janis-Newman não funcione, apenas não é um método definitivo. Contudo, a busca por métodos que gere nos soluções com rotação a partir de uma solução estáticas é válida. Outros métodos possuem o mesmo tipo de proposta. O método de *modelos sigma*, o qual utilizamos em alguns casos, porém, sem resultado positivo [44]. O formalismo de Quevedo que decompõe o tensor de Riemann em representações irredutíveis de $SO(3, C) \sim SO(3, 1)$ e então usa o grupo de simetria para gerar novas soluções [92, 93], o formalismo baseado nos potenciais de Ernst [53, 54] e o *Método de Espalhamento Inverso* para o campo gravitacional de Zakharov e Belinskii [109] são métodos que podem ser utilizados para gerar novas soluções a partir de soluções conhecidas.

Referências Bibliográficas

- [1] Alcubierre, M. **Introduction to 3+1 Numerical Relativity**. International Series of Monogr. OUP Oxford, 2008 (citado na página 15).
- [2] Alishahiha, M., Silverstein, E. e Tong, D. **DBI in the sky**. *Phys. Rev. D* 70 (2004), p. 123505 (citado na página 24).
- [3] Almeida, C. R., Fabris, J. C., Sbisá, F. e Tavakoli, Y. **Quantum cosmology with k-Essence theory**. *Physical and Mathematical Aspects of Symmetries: Proceedings of the 31st International Colloquium in Group Theoretical Methods in Physics*. 2017, pp. 171–176 (citado nas páginas 19, 66, 67).
- [4] Amendola, L. e Tsulikawa, S. **DARK ENERGY: Theory and Observations**. Cambridge University Press, 2010, p. 506 (citado na página 21).
- [5] Arkani-Hamed, N., Cheng, H.-C., Luty, M. A. e Mukohyama, S. **Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity**. *JHEP* 05 (2004), p. 074 (citado na página 19).
- [6] Arkani-Hamed, N., Creminelli, P., Mukohyama, S. e Zaldarriaga, M. **Ghost inflation**. *JCAP* 0404 (2004), p. 001 (citado na página 19).
- [7] Armendariz-Picon, C., Damour, T. e Mukhanov, V. F. **K - inflation**. *Phys. Lett. B* 458 (1999), pp. 209–218 (citado nas páginas 4, 19).
- [8] Armendariz-Picon, C. e Lim, E. A. **Haloes of k-essence**. *JCAP* 0508 (2005), p. 007 (citado na página 19).
- [9] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F. e Steinhardt, P. J. **A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration**. *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), pp. 4438–4441 (citado nas páginas 4, 19, 20).
- [10] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F. e Steinhardt, P. J. **Essentials of k-essence**. *Phys. Rev. D* 63 (2001), p. 103510 (citado nas páginas 4, 19).
- [11] Babichev, E., Mukhanov, V. e Vikman, A. **K-Essence, superluminal propagation, causality and emergent geometry**. *Journal of High Energy Physics* 2008.2 (2008) (citado nas páginas 22, 82).
- [12] Batista, C. E., Daouda, M. H., Fabris, J. C., Piattella, O. F. e Rodrigues, D. C. **Rastall Cosmology and the Λ CDM Model**. *Phys.Rev.D* 85 (2012), p. 084008 (citado nas páginas 4, 25, 27).

- [13] Bekenstein, J. D. **Black holes with scalar charge**. *Annals of Physics* 91.1 (1975), pp. 75–82 (citado na página [146](#)).
- [14] Bergmann, O. e Leipnik, R. **Space-Time Structure of a Static Spherically Symmetric Scalar Field**. *Phys. Rev.* 107 (4 1957), pp. 1157–1161 (citado na página [125](#)).
- [15] Blok, W. J. G. de. **The Core-Cusp Problem**. *Advances in Astronomy* 2010 (2010), pp. 1–14 (citado nas páginas [4](#), [75](#)).
- [16] Bocharova, N., Bronnikov, K. e Melnikov, V. **On an exact solution of the Einstein-scalar field equations**. *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron* 6 (1970), p. 706 (citado na página [146](#)).
- [17] Bozza, V. **Gravitational lensing in the strong field limit**. *Phys. Rev. D* 66 (2002), p. 103001 (citado nas páginas [113](#), [120](#), [121](#), [126](#), [147](#)).
- [18] Brans, C. e Dicke, R. H. **Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation**. *Phys. Rev.* 124 (3 1961), pp. 925–935 (citado na página [141](#)).
- [19] Bronnikov, K. A., Clement, G., Constantinidis, C. P. e Fabris, J. C. **Cold Scalar-Tensor Black Holes: Causal Structure, Geodesics, Stability** (1998), pp. 1–11 (citado na página [140](#)).
- [20] Bronnikov, K. A. **Scalar-tensor theory and scalar charge**. *Acta Phys. Polon.* B4 (1973), pp. 251–266 (citado nas páginas [53](#), [85](#), [125](#)).
- [21] Bronnikov, K. A., Clement, G., Constantinidis, C. P. e Fabris, J. C. **Structure and stability of cold scalar - tensor black holes**. *Phys. Lett.* A243 (1998), pp. 121–127 (citado nas páginas [20](#), [49](#), [76](#), [145](#)).
- [22] Bronnikov, K. A., Fabris, J. C., Piattella, O. F. e Santos, E. C. **Static, spherically symmetric solutions with a scalar field in Rastall gravity**. *Gen. Rel. Grav.* 48.12 (2016), p. 162 (citado nas páginas [4](#), [25](#), [42](#), [50](#), [52](#), [143](#), [146](#), [147](#)).
- [23] Bronnikov, K. A., Fabris, J. C. e Rodrigues, D. C. **On horizons and wormholes in k-essence theories**. *Gravitation and Cosmology* 22.1 (2016), pp. 26–31 (citado nas páginas [4](#), [25](#), [42](#), [52](#), [53](#), [83](#), [92](#), [132](#), [135](#), [143](#), [144](#), [146](#)).
- [24] Bronnikov, K. A., Fabris, J. C. e Zhidenko, A. **On the stability of scalar-vacuum spacetimes**. *The European Physical Journal C* 71.11 (2011), p. 1791 (citado nas páginas [76](#), [79](#), [145](#), [146](#)).
- [25] Bronnikov, K. A. e Kireyev, Y. N. **Instability of black holes with scalar charge**. *Physics Letters A* 67.2 (1978), pp. 95–96 (citado nas páginas [76](#), [79](#)).
- [26] Bronnikov, K. A., Konoplya, R. A. e Zhidenko, A. **Instabilities of wormholes and regular black holes supported by a phantom scalar field**. *Physical Review D* 86.2 (2012), p. 024028 (citado nas páginas [76](#), [79](#), [145](#), [146](#)).

- [27] Bronnikov, K., Clement, G., Constantinidis, C. e Fabris, J. **Cold scalar tensor black holes: Causal structure, geodesics, stability**. *Grav. Cosmol.* 4 (1998), pp. 128–138 (citado nas páginas 20, 101, 145).
- [28] Bronnikov, K., Fabris, J. e Rodrigues, D. C. **Instability of some k -essence spacetimes**. *Int. J. Mod. Phys. D* 29.02 (2020), p. 2050016 (citado nas páginas 5, 146).
- [29] Bronnikov, K., Fabris, J. C., Piattella, O. F., Rodrigues, D. C. e Santos, E. C. **Rastall's theory of gravity: Spherically symmetric solutions and the stability problem** (2020) (citado na página 5).
- [30] Bronnikov, K., Chernakova, M., Fabris, J., Pinto-Neto, N. e Rodrigues, M. **Cold black holes and conformal continuations**. *International Journal of Modern Physics D* 17.01 (2008), pp. 25–42 (citado na página 101).
- [31] Bronnikov, K., Clément, G., Constantinidis, C. e Fabris, J. **Structure and stability of cold scalar-tensor black holes**. *Physics Letters A* 243.3 (1998), pp. 121–127 (citado na página 101).
- [32] Bronnikov, K., Dehnen, H. e Melnikov, V. **Regular black holes and black universes**. *General Relativity and Gravitation* 39.7 (2007), pp. 973–987 (citado na página 146).
- [33] Bronnikov, K. A. e Fabris, J. C. **Regular phantom black holes**. *Physical Review Letters* 96.25 (2006), p. 251101 (citado na página 146).
- [34] Bronnikov, K. A. **Scalar fields as sources for wormholes and regular black holes**. *Particles* 1.1 (2018). Ed. por A. Sedrakian, pp. 56–81 (citado na página 146).
- [35] Bronnikov, K. A., Fabris, J. C., Piattella, O. F., Rodrigues, D. C. e Santos, E. C. **Duality between k -essence and Rastall gravity**. *Eur. Phys. J.* C77.6 (2017), p. 409 (citado nas páginas 4, 25, 57, 146).
- [36] Bronnikov, K. A. e Rubin, S. G. **Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions**. WSP, 2012 (citado nas páginas 42, 44, 48, 96, 98).
- [37] Bullock, J. S. *Notes on the Missing Satellites Problem*. 2010 (citado nas páginas 4, 75).
- [38] Caldwell, R. R. **A Phantom menace?** *Phys. Lett.* B545 (2002), pp. 23–29 (citado nas páginas 19, 21).
- [39] Callan, C. G. e Maldacena, J. M. **Brane death and dynamics from the Born-Infeld action**. *Nucl. Phys.* B513 (1998), pp. 198–212 (citado na página 19).
- [40] Capozziello, S. e De Laurentis, M. **Extended Theories of Gravity**. *Phys. Rept.* 509 (2011), pp. 167–321 (citado nas páginas 1–3).

- [41] Carroll, S. M., Hoffman, M. e Trodden, M. **Can the dark energy equation - of - state parameter w be less than -1?** *Phys. Rev. D* 68 (2003), p. 023509 (citado na página 22).
- [42] Clement, G., Fabris, J. C. e Rodrigues, M. E. **Phantom Black Holes in Einstein-Maxwell-Dilaton Theory.** *Phys. Rev. D* 79 (2009), p. 064021 (citado na página 95).
- [43] Clement, G., Gal'tsov, D. e Leygnac, C. **Linear dilaton black holes.** *Phys. Rev. D* 67 (2003), p. 024012 (citado na página 127).
- [44] Clément, G., Gal'tsov, D. e Leygnac, C. **Linear dilaton black holes.** *Physical Review D* 67.2 (2003) (citado nas páginas 135, 138, 139, 148).
- [45] Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A. e Skordis, C. **Modified gravity and cosmology.** *Physics Reports* 513.1-3 (2012), pp. 1–189 (citado na página 3).
- [46] Cline, J. M., Jeon, S. e Moore, G. D. **The Phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts.** *Phys. Rev. D* 70 (2004), p. 043543 (citado na página 22).
- [47] Darabi, F., Moradpour, H., Licata, I., Heydarzade, Y. e Corda, C. **Einstein and Rastall Theories of Gravitation in Comparison.** *Eur. Phys. J. C* 78 (2018), p. 25 (citado na página 27).
- [48] Darwin, C. G. **The gravity field of a particle.** *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 249.1257 (1959), pp. 180–194 (citado na página 113).
- [49] De Felice, F. e Clarke, C. J. S. **Relativity on curved manifolds.** Cambridge University Press, 1992 (citado na página 105).
- [50] De Moraes, W. A. e Santos, A. F. **Lagrangian formalism for Rastall theory of gravity and Gödel-type universe.** *General Relativity and Gravitation* 51.12 (2019) (citado nas páginas 30, 40).
- [51] Ellis, H. G. **Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity.** *Journal of Mathematical Physics* 14.1 (1973), pp. 104–118 (citado na página 125).
- [52] Erbin, H. **Janis-Newman algorithm: generating rotating and NUT charged black holes.** *Universe* 3.1 (2017), p. 19 (citado nas páginas 131, 134).
- [53] Ernst, F. J. **New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem.** *Phys. Rev.* 167 (5 1968), pp. 1175–1178 (citado na página 148).
- [54] Ernst, F. J. **New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II.** *Phys. Rev.* 168 (5 1968), pp. 1415–1417 (citado na página 148).

- [55] Fabris, J. C., Daouda, M. H. e Piattella, O. F. **Note on the Evolution of the Gravitational Potential in Rastall Scalar Field Theories.** *Phys. Lett.* B711 (2012), pp. 232–237 (citado nas páginas 4, 69).
- [56] Fabris, J. C., Piattella, O. F., Rodrigues, D. C., Batista, C. E. e Daouda, M. H. **Rastall cosmology.** *Rastall cosmology.* Vol. 18. 2012, pp. 67–76 (citado na página 25).
- [57] Faraoni, V. **Cosmology in scalar tensor gravity.** Vol. 139. 2004 (citado na página 19).
- [58] Fujii, Y. e Maeda, K. **The scalar-tensor theory of gravitation.** Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007 (citado na página 19).
- [59] Gao, C., Kunz, M., Liddle, A. R. e Parkinson, D. **Unified dark energy and dark matter from a scalar field different from quintessence.** *Physical Review D* 81.4 (2010), p. 043520 (citado na página 69).
- [60] Garfinkle, D., Horowitz, G. T. e Strominger, A. **Charged black holes in string theory.** *Phys. Rev. D* 43 (10 1991), pp. 3140–3143 (citado nas páginas 23, 127).
- [61] Garriga, J. e Mukhanov, V. F. **Perturbations in k-inflation.** *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics* 458.2-3 (1999), pp. 219–225 (citado nas páginas 22, 82).
- [62] Gasperini, M. e Veneziano, G. **The Pre - big bang scenario in string cosmology.** *Phys. Rept.* 373 (2003), pp. 1–212 (citado na página 23).
- [63] Gibbons, G. W. **Aspects of Born-Infeld theory and string / M-theory.** *Rev. Mex. Fis.* 49S1 (2003). [AIP Conf. Proc.589,no.1,324(2001)], pp. 19–29 (citado na página 19).
- [64] Gibbons, G. W. **Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes.** *Nucl. Phys.* B514 (1998), pp. 603–639 (citado na página 19).
- [65] Gibbons, G. **SOLITONS AND BLACK HOLES IN FOUR-DIMENSIONS, FIVE-DIMENSIONS** (1985) (citado na página 127).
- [66] Gibbons, G. W. e Maeda, K.-i. **Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields.** *Nuclear Physics B* 298.4 (1988), pp. 741–775 (citado nas páginas 23, 127).
- [67] Gonzalez, J. A., Guzman, F. S. e Sarbach, O. **Instability of wormholes supported by a ghost scalar field: I. Linear stability analysis.** *Classical and quantum gravity* 26.1 (2008), p. 015010 (citado nas páginas 76, 79, 145, 146).

- [68] Gorini, V., Kamenshchik, A. Y., Moschella, U., Piattella, O. F. e Starobinsky, A. A. **Gauge-invariant analysis of perturbations in Chaplygin gas unified models of dark matter and dark energy**. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2008.2 (2008) (citado nas páginas 22, 145).
- [69] Goulart Santos, P. E. D. **Einstein-Maxwell-dilaton theory: Black holes, wormholes, and applications to AdS/CMT**. Tese de dout. Sao Paulo, IFT, 2017 (citado na página 95).
- [70] Guo, Z.-K. e Ohta, N. **Cosmological Evolution of Dirac-Born-Infeld Field**. *JCAP* 04 (2008), p. 035 (citado na página 24).
- [71] Harko, T., Lobo, F. S. N., Nojiri, S. e Odintsov, S. D. **$f(R, T)$ gravity**. *Phys. Rev. D* 84 (2011), p. 024020 (citado na página 30).
- [72] Harko, T., Lobo, F. S., Nojiri, S. e Odintsov, S. D. **$f(R, T)$ gravity**. *Phys. Rev. D* 84 (2011), p. 024020 (citado na página 36).
- [73] Hochberg, D. e Visser, M. **Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat**. *Phys. Rev. D* 56 (1997), pp. 4745–4755 (citado na página 102).
- [74] Kaluza, T. **Zum Unitätsproblem der Physik**. *Int. J. Mod. Phys. D* 27.14 (2018), p. 1870001 (citado na página 95).
- [75] Klein, O. **Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie**. *Zeitschrift für Physik* 37.12 (1926), pp. 895–906 (citado na página 95).
- [76] Krori, K. D. e Bhattacharjee, D. R. **Kerr-like metric in Brans–Dicke theory**. *Journal of Mathematical Physics* 23.4 (1982), pp. 637–638 (citado nas páginas 141, 148).
- [77] Leigh, R. **Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model**. *Mod. Phys. Lett. A* 4 (1989), p. 2767 (citado na página 4).
- [78] Maldacena, J. M. **The Large N limit of superconformal field theories and supergravity**. *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999), pp. 1113–1133 (citado na página 24).
- [79] Martin, J. e Yamaguchi, M. **DBI-essence**. *Phys. Rev. D* 77 (12 2008), p. 123508 (citado na página 24).
- [80] McFadden, P. L. e Turok, N. **Effective theory approach to brane world black holes**. *Physical Review D* 71.8 (2005), p. 086004 (citado nas páginas 76, 79, 146).
- [81] Misner, C., Thorne, K., Wheeler, J. e Kaiser, D. **Gravitation**. Princeton University Press, 2017 (citado na página 6).
- [82] Nascimento, J., Petrov, A., Porfirio, P. e Soares, A. **Gravitational lensing in black-bounce spacetimes**. *Phys. Rev. D* 102.4 (2020), p. 044021 (citado nas páginas 113, 126).

- [83] Newman, E. T., Couch, E., Chinnapared, K. et al. **Metric of a Rotating, Charged Mass.** *Journal of Mathematical Physics* 6.6 (1965), pp. 918–919 (citado nas páginas [131](#), [135](#)).
- [84] Newman, E. T. e Janis, A. I. **Note on the Kerr Spinning-Particle Metric.** *Journal of Mathematical Physics* 6.6 (1965), pp. 915–917 (citado nas páginas [131](#), [135](#)).
- [85] Newman, E. T. e Janis, A. **Note on the Kerr spinning-particle metric.** *Journal of Mathematical Physics* 6.6 (1965), pp. 915–917 (citado na página [147](#)).
- [86] Oliveira, A., Velten, H. e Fabris, J. **Nontrivial static, spherically symmetric vacuum solution in a nonconservative theory of gravity.** *Phys. Rev. D* 93.12 (2016), p. 124020 (citado na página [53](#)).
- [87] Oliveira, A., Velten, H., Fabris, J. e Casarini, L. **Neutron Stars in Rastall Gravity.** *Phys.Rev.D* 92.4 (2015), p. 044020 (citado na página [25](#)).
- [88] Piattella, O. F., Fabris, J. C. e Bilić, N. **Note on the thermodynamics and the speed of sound of a scalar field.** *Class. Quant. Grav.* 31 (2014), p. 055006 (citado na página [69](#)).
- [89] Pirogov, Y. F. **Towards the rotating scalar-vacuum black holes.** 2.1 (2013), p. 3 (citado na página [141](#)).
- [90] Plebanski, J. e Demianski, M. **Rotating, charged, and uniformly accelerating mass in general relativity.** *Annals of Physics* 98.1 (1976), pp. 98–127 (citado na página [131](#)).
- [91] Plebanski, J. F. **A class of solutions of Einstein-Maxwell equations.** *Annals of Physics* 90.1 (1975), pp. 196–255 (citado na página [131](#)).
- [92] Quevedo, H. **Complex transformations of the curvature tensor.** *General Relativity and Gravitation* 24.7 (1992), pp. 693–703 (citado na página [148](#)).
- [93] Quevedo, H. **Determination of the metric from the curvature.** *General Relativity and Gravitation* 24.8 (1992), pp. 799–819 (citado na página [148](#)).
- [94] Rastall, P. **Generalization of the einstein theory.** *Phys.Rev.D* 6 (1972), pp. 3357–3359 (citado nas páginas [4](#), [25](#), [59](#)).
- [95] Al-Rawaf, A. S. e Taha, M. O. **Cosmology of general relativity without energy-momentum conservation.** *General Relativity and Gravitation* 28.8 (1996), pp. 935–952 (citado na página [50](#)).
- [96] Santos, R. V. dos e Nogales, J. A. C. *Cosmology from a Lagrangian formulation for Rastall's theory.* 2017 (citado na página [147](#)).
- [97] Schutz, B. **A First Course in General Relativity.** Cambridge University Press, 2009 (citado na página [6](#)).

- [98] Sen, A. **Rolling tachyon**. *JHEP* 04 (2002), p. 048 (citado na página 19).
- [99] Sen, A. **Tachyon matter**. *JHEP* 07 (2002), p. 065 (citado na página 19).
- [100] Silverstein, E. e Tong, D. **Scalar speed limits and cosmology: Acceleration from D-celeration**. *Phys. Rev. D* 70 (2004), p. 103505 (citado na página 24).
- [101] Smalley, L. **Variational principle for a prototype Rastall theory of gravitation**. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* 80.1 (1984), pp. 42–48 (citado na página 147).
- [102] Sotiriou, T. P. **Gravity and Scalar Fields**. *Lecture Notes in Physics* (2014), pp. 3–24 (citado na página 19).
- [103] Sotiriou, T. P. **Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology**. Tese de dout. SISSA, Trieste, 2007 (citado nas páginas 1–3).
- [104] Tsukamoto, N. **Deflection angle in the strong deflection limit in a general asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetime**. *Phys. Rev. D* 95.6 (2017), p. 064035 (citado nas páginas 113, 120, 121, 147).
- [105] Tsukamoto, N. **Strong deflection limit analysis and gravitational lensing of an Ellis wormhole**. *Physical Review D* 94.12 (2016), p. 124001 (citado na página 113).
- [106] Visser, M. **Rastall gravity is equivalent to Einstein gravity**. *Phys. Lett. B* 782 (2018), pp. 83–86 (citado na página 27).
- [107] Wald, R. **General Relativity**. University of Chicago Press, 2010 (citado na página 6).
- [108] Yang, R. e Qi, J. **Dynamics of generalized tachyon field**. *The European Physical Journal C* 72.8 (2012), p. 2095 (citado na página 22).
- [109] Zakharov, V. e Belinskii, V. **Integration of the Einstein equations by the inverse scattering method and calculation of the exact soliton solutions**. *Sov. Physics YETP* 48 (1978), pp. 985–994 (citado na página 148).