

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

**TEORIA DOS JOGOS: UMA ESTRATÉGIA PARA O ENSINO E  
APRENDIZADO DE MATEMÁTICA**

BRENO PORTUGAL FALQUETO

**ORIENTADORA: PROFA. DRA. ROSA ELVIRA QUISPE CCOYLLO**

Vitória - ES  
2020

Breno Portugal Falqueto

## **JOGOS: UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO ALIADA À TEORIA DOS JOGOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Vitória - ES  
2020

Breno Portugal Falqueto

## **JOGOS: UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO ALIADA À TEORIA DOS JOGOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Membros da Banca:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.  
(Orientadora- Universidade Federal do Espírito Santo - UFES)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Julia Schaetzle Wrobel.  
(Examinadora- Universidade Federal do Espírito Santo-UFES)

---

Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer.  
(Examinador- Universidade Federal do Espírito Santo-UFES)

---

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos.  
(Examinador- Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT)

Vitória - ES  
2020

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por fortalecer minha fé a cada dia e sempre me renovar.

À minha família, que sempre se mostrou presente com palavras de carinho e apoio.

À minha mãe, Lívia Maria Teixeira Portugal Faustino, por ser minha base.

Ao meu irmão, Zelier Portugal Falqueto, pelos incentivos.

Ao meu namorado, Leomar Cardoso Tiroli, por ser meu refúgio nos momentos difíceis.

À minha orientadora, Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo, que mesmo sabendo das minhas dificuldades, sempre me prestou auxílio quando solicitada.

A todos os meus professores do PROFMAT da UFES.

Aos meus colegas de mestrado, que tornaram todo esse tempo mais leve e, certamente, único.

Ao meu amigo, Maxwell Soares de Oliveira, por todos os conselhos.

À minha amiga, Júlia Alcântara Roldi de Azeredo, que mesmo distante, sempre esteve presente.

À minha amiga, Rita de Cássia Fundão Reis Campos, que nunca mediu esforços para me ajudar no que fosse preciso.

## RESUMO

Aumentar o interesse na disciplina ao otimizar o tempo em sala de aula com contribuição positiva, torna-se uma tarefa essencial, pois o desinteresse atrelado à evasão são realidades presenciadas em todo âmbito escolar. Este trabalho foca em um tema muito apreciado, principalmente no que tange o ambiente educacional: jogos, que tem como principal finalidade, o ensino e aprendizado de forma lúdica da matemática. Por esta razão, jogos, como o Jogo de Nim e o Pôquer, foram escolhidos, que aliados à Teoria dos Jogos, possibilitará estratégias vencedoras para cada um entre as situações possíveis.

**Palavras-chave:** ambiente educacional, jogos, Jogo de Nim, Pôquer, Teoria dos Jogos, sequência didática.

## **ABSTRACT**

Increasing interest in the discipline by optimizing time in the classroom with a positive contribution, becomes an essential task, because the disinterest linked to dropout are realities witnessed throughout the school. This work focuses on a highly appreciated theme, mainly regarding the educational environment: games, whose main purpose is the playful teaching and learning of the mathematics. For this reason, games, like Game of Nim and Poker, were chosen, allied to Game Theory, which allows determining a winning strategy for each game among the possible situations.

**Keywords:** scholar scope, games, Nim Game, Poker, Game Theory, teaching sequence.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Bingo de Frações	16
<b>Figura 2</b> - Tangram	16
<b>Figura 3</b> - Configuração (3, 5, 2) (I)	25
<b>Figura 4</b> - Configuração (3, 5, 2) (II)	26
<b>Figura 5</b> - Configuração (3, 5, 2) (III)	26
<b>Figura 6</b> - Configuração (7, 9, 4) (I)	27
<b>Figura 7</b> - Configuração (7, 9, 4) (II)	27
<b>Figura 8</b> - Configuração (7, 9, 4) (III)	28
<b>Figura 9</b> - Configuração (7, 9, 4) (IV)	28
<b>Figura 10</b> - Configuração (7, 9, 4) (V)	28
<b>Figura 11</b> - Configuração (7, 9, 4) (VI)	29
<b>Figura 12</b> - Configuração (7, 9, 4) (VII)	29
<b>Figura 13</b> - Configuração (7, 9, 4) (VIII)	29
<b>Figura 14</b> - Configuração (7, 9, 4) (IX)	30
<b>Figura 15</b> - Triângulo de Pascal	35
<b>Figura 16</b> - Stomachion: arranjo original encontrado no Códex C	36
<b>Figura 17</b> - Diagrama Representando o Princípio de Inclusão-Exclusão	43
<b>Figura 18</b> - Livro “Theory of Games and Economic Behaviour”	46
<b>Figura 19</b> - Exemplo de Royal Straight Flush	52
<b>Figura 20</b> - Exemplo de Straight Flush	52
<b>Figura 21</b> - Exemplo de Quadra	52
<b>Figura 22</b> - Exemplo de Full House	53
<b>Figura 23</b> - Exemplo de Flush	53
<b>Figura 24</b> - Exemplo de Sequência	53
<b>Figura 25</b> - Exemplo de Trinca	53
<b>Figura 26</b> - Exemplo de Dois Pares	54
<b>Figura 27</b> - Exemplo de Par	54
<b>Figura 28</b> - Exemplo de Carta Alta	54
<b>Figura 29</b> - Partida entre dois jogadores	59
<b>Figura 30</b> - Estratégia vencedora - Grupo 1 (I)	66

<b>Figura 31</b> - Estratégia vencedora - Grupo 1 (II)	67
<b>Figura 32</b> - Questionário do Grupo 1 (I)	73
<b>Figura 33</b> - Questionário do Grupo 1 (II)	74
<b>Figura 34</b> - Questionário do Grupo 3 (I)	74
<b>Figura 35</b> - Questionário do Grupo 3 (II)	75
<b>Figura 36</b> - Questionário do Grupo 3 (III)	75



## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b> Análise dos possíveis valores de $(a_i, b_i, c_i)$	22
<b>Tabela 2:</b> Matriz dos play-offs do Dilema dos Prisioneiros	48
<b>Tabela 3:</b> Matriz dos play-offs do Chicken Game	49

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
Justificativa	12
Motivação e Objetivos	15
Metodologia de Desenvolvimento do Trabalho	17
Organização do Trabalho	18
CAPÍTULO 1	19
NÚMEROS BINÁRIOS	19
1.1. Fatos Históricos	19
1.2. Definição de Número Binário	19
1.3. Proposição	21
1.4. Jogo de Nim	24
1.5. Estratégias para jogar o Jogo de Nim	25
1.6. A matemática (das estratégias) do Jogo de Nim	30
1.7. Conclusão	34
CAPÍTULO 2	35
ANÁLISE COMBINATÓRIA	35
2.1. Fatos Históricos	35
2.2. Princípio Fundamental da Contagem	36
2.3. Conclusão	38
CAPÍTULO 3	39
PROBABILIDADE	39
3.1. Fatos Históricos	39
3.2. Definição de Probabilidade	40
3.2.1. Propriedades imediatas da definição	41
3.3. Princípio de Inclusão-Exclusão	42
3.4. Probabilidade Condicional	43
CAPÍTULO 4	45
TEORIA DOS JOGOS	45
4.1. Considerações Iniciais	45
4.2. Fatos históricos	45

4.3. Definições relevantes – jogo, jogador e Teoria dos Jogos	46
4.4. Dilema dos Prisioneiros	47
4.5. Equilíbrio de Nash	48
4.6. Chicken Game	48
4.7. Le Her - Introdução	49
4.8. Pôquer	50
4.8.1. Texas Hold'em	51
4.8.1.1. Cálculo das possibilidades do ranking das mãos do Texas Hold'em	55
4.8.1.2. Cálculo das probabilidades do ranking das mãos do Texas Hold'em	57
4.8.1.3. Cálculo da probabilidade de uma partida do Texas Hold'em	58
CAPÍTULO 5	60
METODOLOGIA/PROPOSTA DE ENSINO	60
5.1. Considerações Iniciais	60
5.2. Sequência Didática	61
5.3. Avaliação da Sequência Didática	64
5.4. Resultado e Análise de Dados	65
5.5. Considerações Finais	76
REFERÊNCIAS	78

# INTRODUÇÃO

---

## Justificativa

A Grécia Antiga, apontada como berço da civilização ocidental, tinha a Educação voltada para uma formação elevada do homem, de futuros mestres e formadores de ideais, para uma individualidade perfeita e independente. No diálogo “*Protágoras*” (século IV a.C.) de Platão, se concebe à educação como uma espécie de modeladora do corpo e da alma, onde a Educação Física, a Música e a Literatura eram as três bases que sustentavam a formação do homem grego.

A educação elementar das crianças se iniciava aos sete e terminava aos treze anos, logo só aqueles com mais recursos poderiam continuar sua educação.

Desde o momento em que a Matemática começou a tomar forma como uma área de conhecimento, ainda na era platônica e pitagórica, já estava associada a uma classe privilegiada sendo considerada uma ciência nobre, desligada dos ofícios e das atividades manuais. Recebeu status de nobreza e ainda hoje ela é tratada como tal. Mas por outro lado o ensino dessa disciplina sempre foi rodeado por muitas dificuldades e obstáculos quase intransponíveis. BERTI (2005, p.98).

A partir dos dezesseis anos começava a educação superior, que era dada pelos sofistas, que ensinavam aos jovens a arte da oratória. Com a chegada do período helenístico (336-146 a.C.) começou a ser exigido dos alunos um conhecimento enciclopédico em detrimento dos aspectos físicos e estéticos, que perderam sua força. Iniciou-se a separação entre as disciplinas humanistas (Gramática, Retórica e Dialética) e as científicas (Aritmética, Geometria, Música, Astronomia), e o estudo da Filosofia se intensificou. Com o tempo, a educação grega foi se modificando e deixou para trás a sua essência inicial. A busca pela virtude decorrente de uma formação mais ética acabou dando lugar a um tipo de educação mais utilitarista, que preparasse o

aluno para a vida privada e pública. Uma espécie de adestramento infantil. (JAEGER, 2001)

Os fatos supracitados formam parte da história da educação que propiciou a popularização da Matemática como disciplina oferecida nas escolas, onde antigamente só aqueles com mais recursos podiam ascender a uma educação elevada, e que agora é universal. Talvez este seja o ponto de partida para que essa disciplina comece a ser estigmatizada pelos alunos ao longo dos tempos. Estudos apontam que no Brasil esse sentimento se repete em praticamente todos os segmentos da educação.

Para os professores da disciplina, matemática precisa tornar-se fácil, o que pressupõe que ela seja difícil. Estes identificam na voz do aluno que ela é considerada chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e por consequência, o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não a aprender. Como resultado de tantos sentimentos ruins que esta disciplina proporciona ao aluno, somado ao bloqueio em não dominar sua linguagem e não ter acesso ao seu conhecimento vem o sentimento de ódio pela matemática. Ódio, porque ela é difícil. SILVEIRA (2002, p. 8).

Dantas Filho (2017, p. 100) diz que conforme a avaliação do Fórum Econômico Mundial, a educação em Matemática no Brasil é considerada uma das piores do Mundo. Entre 139 países avaliados, o Brasil ocupou a 133ª colocação. Previamente, em 2014, menos de 6% dos alunos brasileiros se encontravam em nível adequado de aprendizado, isto é, grande parte dos alunos eram analfabetos funcionais e não conseguiam racionar nem interpretar dados simples (SAEB<sup>1</sup>). Em 2016, o Brasil era um dos dez países com maior número de estudantes com baixo rendimento escolar em Matemática, segundo a OCDE<sup>2</sup>. E o (PISA-2016<sup>3</sup>) classificou o Brasil na 58ª posição, entre 65 países participantes. Nessa pesquisa, dos alunos avaliados, 75% não souberam fazer média simples e 63% não foram capazes de responder perguntas sobre percentuais.

---

<sup>1</sup> Sistema de Avaliação da Educação Básica (DANTAS FILHO, 2017).

<sup>2</sup> Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (DANTAS FILHO, 2017).

<sup>3</sup> Programa Internacional de Avaliação do Aluno (DANTAS FILHO, 2017).

Os alunos fracassados no ensino fundamental, provavelmente farão péssimo ensino médio, conseqüentemente evadirão da escola ou não terão desejos e ou condições de entrar na faculdade. Por não possuírem leitura crítica nem reflexiva, não terão clara visão de mundo e nem esquadrinharão o que ele detém. SILVA (2004); OLIVEIRA (2005).

Em vista disso, visando reduzir parte desse problema, o presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de motivar e revelar ao aluno que a Matemática está presente em tudo o que o cerca: na forma geométrica hexagonal de um favo de mel; nas órbitas dos planetas; na forma microscópica da dupla hélice do DNA; na forma fractal de um floco de neve; na simetria das asas de uma borboleta; e até mesmo em jogos, que é especificamente o tema envolvido neste estudo.

A motivação no contexto escolar tem sido avaliada como um determinante crítico do nível e da qualidade da aprendizagem e do desempenho. Um estudante motivado mostra-se ativamente envolvido no processo de aprendizagem, engajando-se e persistindo em tarefas desafiadoras, despendendo esforços, usando estratégias adequadas, buscando desenvolver novas habilidades de compreensão e de domínio. Apresenta entusiasmo na execução das tarefas e orgulho acerca dos resultados de seus desempenhos, podendo superar previsões baseadas em suas habilidades ou conhecimentos prévios. GUIMARÃES; BORUCHOVITCH (2004, p. 143).

Para abordar o tema dos jogos, será apresentado uma introdução à Teoria dos Jogos. Esta pesquisa pretende fazer ligações interessantes entre a Matemática e alguns jogos, tendo como foco o estudo de decisões estratégicas que podem ser tomadas a fim de favorecer algum jogador.

Juntamente com a relação: Teoria dos Jogos - Matemática (Números Binários, Análise Combinatória e Teoria das Probabilidades) - Jogos, serão abordados aspectos históricos a respeito da Teoria dos Jogos, assim propiciando mecanismos para uma futura compreensão desta. Também serão abordados aspectos históricos dos jogos em geral, para depois exemplificar alguns. Por fim, serão ressaltadas algumas relações desses jogos com a Teoria dos Jogos, fornecendo uma visão macro de toda a pesquisa.

## Motivação e Objetivos

É o jogo e pelo jogo que a civilização surge e se desenvolve. Tudo isso se dá devido ao fascínio e atração provocada pelo jogo no homem. O jogo é um recorte do tempo, onde a pessoa assume uma vida paralela à real e, como é sabido que a cultura humana só se dá com a existência da segunda realidade, é natural uma certa tendência do homem ao jogo, por este ser um grande agente responsável por essa manifestação. HUIZINGA (2000)

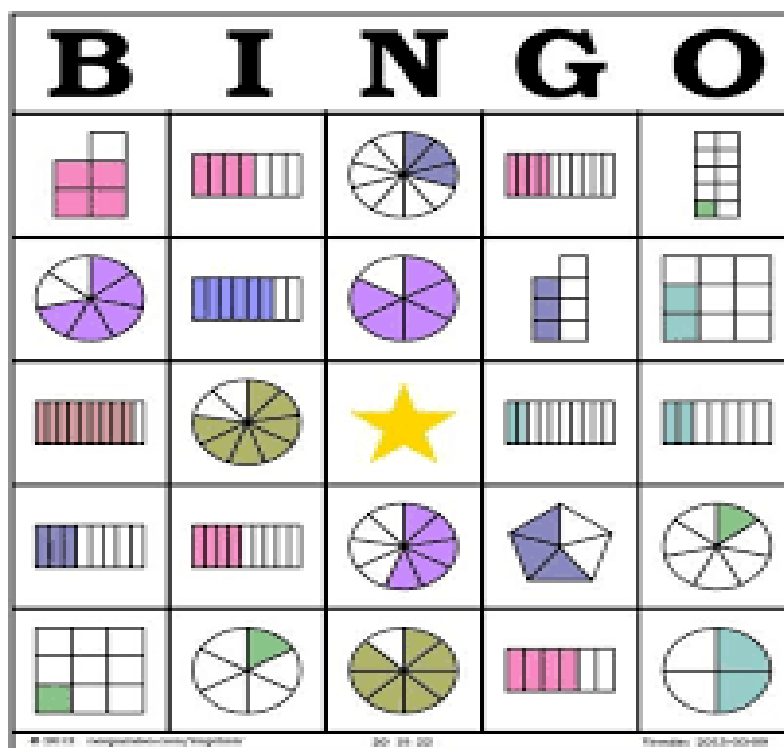
Jogos, de um modo geral, chamam a atenção de crianças, adolescentes e adultos. Baseado nisso é que foi idealizado este trabalho: ao relacionar algo prazeroso para a maioria dos estudantes com outro nem tanto, a Matemática. Assim pode ser que o aluno transfira parte desse prazer para esta disciplina tão estigmatizada. Esta associação poderá propiciar maior dedicação e interesse por parte do aluno, ajudando-o a superar possíveis obstáculos e dificuldades que se apresentem no estudo dessa ciência.

(...) autores como Grandó e Kishimoto defendem que o uso de jogos é uma alternativa de resgatar tais vontades, sempre tendo em vista os valores pedagógicos, ou seja, o desencadeamento de explorações e aplicações de conceitos matemáticos a partir do jogo. ALVES; OLIVEIRA (2016, p. 2).

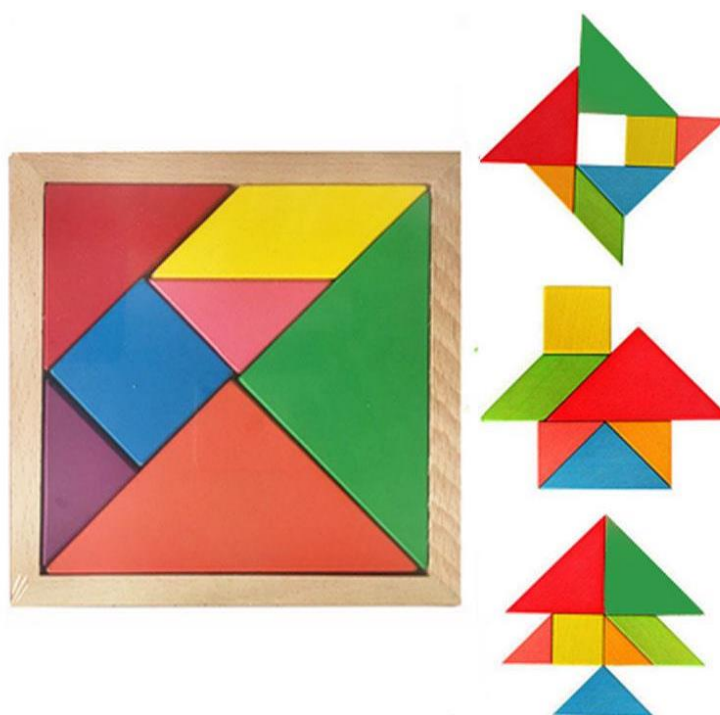
Diversos jogos podem ser utilizados como recurso didático para o ensino-aprendizagem da Matemática, como exemplos podem ser citados: o “Bingo de Frações” (figura I), que pode ser aplicado para os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental ou quinta etapa da EJA<sup>4</sup>, é um jogo que permite aos participantes relacionar cada fração com a imagem correspondente na cartela; o “Tangram” (figura II), que é um outro jogo que pode ser utilizado como recurso visando reforçar alguns conceitos da Geometria Plana; o jogo de “Perguntas e Respostas”, onde perguntas são elaboradas sobre o conteúdo que é objeto de estudo, e os alunos, divididos em grupos, respondem e marcam pontos.

---

<sup>4</sup> Educação de Jovens e Adultos.



**Figura 1** - Bingo de Frações  
 Fonte: Página Atividades PIBID<sup>5</sup>.



**Figura 2** - Tangram  
 Fonte: Página DHgate<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Disponível em: <https://pibidifsparq.blogspot.com/2019/06/bingo-de-fracoes.html>. Acesso em: 05 outubro. 2020.

<sup>6</sup> Disponível em: [https://pt.dhgate.com/product/colorful-wooden-tangram-7-pcs-set-jigsaw/4875524\\_39.html](https://pt.dhgate.com/product/colorful-wooden-tangram-7-pcs-set-jigsaw/4875524_39.html). Acesso em: 05 outubro. 2020.



Jogos podem ser escolhidos para introduzir, aprimorar ou tornar mais claro a compreensão do conteúdo.

Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos estudantes, que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam de Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. TIMM; GROENWALD (2008, p. 1).

### **Objetivo geral**

Essa pesquisa tem por objetivo utilizar temas do Ensino Médio e Teoria dos Jogos para analisar estratégias vencedoras em alguns jogos. Além disso, objetiva-se também estimular a criatividade do aluno e o seu raciocínio lógico.

### **Objetivo específico**

Contextualizar, por meio de jogos, conteúdos já estudados, por exemplo: divisão euclidiana, análise combinatória, probabilidade, etc., utilizar o sistema de numeração binário para analisar estratégias para o Jogo de Nim, apresentar a Teoria dos Jogos aos alunos e utilizá-la para apresentar aos alunos o Pôquer.

### **Metodologia de Desenvolvimento do Trabalho**

A priori, serão feitas recapitulações/abordagens sobre Números Binários, Análise Combinatória e Teoria das Probabilidades, assim o aluno conseguirá ter um conhecimento prévio para compreender a Teoria dos Jogos. Em seguida será fornecida uma explanação sobre esta Teoria, com a parte histórica, propulsores e conceitos necessários para a compreensão dos jogos abordados. Após, os alunos poderão perceber a relação existente entre a Matemática e a Teoria estudada anteriormente. Havendo esse amadurecimento, serão abordados alguns jogos (Jogo de Nim, Pôquer), nos

quais os alunos conseguirão compreender mais concretamente os conceitos abordados pela Teoria. Os alunos perceberão, por fim, a importância da Teoria e como ela pode ajudar nas possíveis tomadas de decisões nos jogos.

### **Organização do Trabalho**

É feita uma introdução a respeito do desenvolvimento da Matemática e uma pequena amostra do que será abordado nos outros capítulos. No Capítulo 1, apresentamos um breve apanhado sobre Números Binários a fim de que o leitor tenha o conhecimento necessário, para que em seguida possa compreender o Jogo de Nim. No Capítulo 2, uma abordagem geral sobre Análise Combinatória é colocada, também com o intuito de situar o leitor em capítulos que seguirão. Assim como foi salientado pelos Capítulos 3 e 4, o Capítulo 3, que diz respeito à Probabilidade, segue a mesma ideia. Já no Capítulo 4 abordamos o tema central deste trabalho, Teoria dos Jogos, com seus aspectos históricos, definições e exemplos. No Capítulo 5, a teoria englobada até então, é posta na prática, por meio de uma sequência didática, analisada por dados estatísticos.

# NÚMEROS BINÁRIOS

---

## 1.1. Fatos Históricos

O matemático George Boole, em 1854, publicou um artigo fundamental conhecido como Álgebra Booleana, que foi importante na aplicação a circuitos eletrônicos por meio do Sistema Binário. A tese de Claude Shanon, “*A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*”, implementou a Álgebra Booleana e aritmética binária, em 1937.

Na linguagem de computador, temos a simplificação do cálculo binário para a lógica booleana. Nesse caso, cada dígito binário dentro de um computador, que é constituído pelos números 0 e 1, recebe o nome de bit, que vem do termo em inglês Binary Term. (PRONATEC, 2019)

O sistema binário é base para a Álgebra booleana que permite fazer operações lógicas e aritméticas usando-se apenas dois dígitos ou dois estados (sim e não, falso e verdadeiro, tudo ou nada, 1 ou 0, ligado e desligado). Toda a eletrônica digital e computação está baseada nesse sistema binário e na lógica de Boole, que permite representar por circuitos eletrônicos digitais (portas lógicas) os números, caracteres, realizar operações lógicas e aritméticas. Os programas de computadores são codificados sob forma binária e armazenados nas mídias (memórias, discos...) sob esse formato. (SCOTTI, et al, 2018)

## 1.2. Definição de Número Binário

De acordo com SCOTTI, et al (2018, p. 2):

O sistema binário ou base 2, é um sistema de numeração posicional em que todas as quantidades se representam com base em dois números. Símbolos da base Binária: 0 e 1.

Com o intuito de concretizar a definição acima, temos que compreender como converter um número escrito no sistema posicional de base 10 para a base 2. Para isso, é necessário dividir sucessivamente o número que se quer converter por 2 e os quocientes consecutivos. Assim, o número binário será formado pelo quociente da última divisão, cujo valor é um, seguido dos restos de todas as divisões na sequência em que foram realizadas.

Por exemplo, para transformar o número 11 (na base 10) em um número binário (na base 2), serão feitos os seguintes cálculos:

$$11 / 2 = 5 \text{ resto } 1$$

$$5 / 2 = 2 \text{ resto } 1$$

$$2 / 2 = 1 \text{ resto } 0$$

Assim, 11 (na base 10) é igual a 1011 (na base 2) ou também:

$$11 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1011_2$$

A seguir serão definidos a adição, algumas propriedades e lemas a respeito de números binários com base no artigo *Jogos: Cê Manja ou Nim?*, de Davi Lopes (2017).

**Definição:** Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$  não negativos, eles serão **representados** na base 2 na forma:

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k)$$

$$b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_s)$$

Compostos dos algarismos 0 ou 1 (valores atribuídos a  $a_i$  e  $b_i$ ; para  $i = 0, 1, 2, \dots, \max\{k, s\}$ ) e correspondendo a escrita de cada número à forma:  $a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_k \cdot 2^k$  e  $b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_s \cdot 2^s$ , respectivamente.

A efeito de comparação de números binários será considerado o seguinte: se dois números na base 2 não tem o mesmo número de algarismos, então ao menor deles será acrescentado zeros à esquerda, sem alterar o seu valor, de forma que os números tenham a mesma quantidade de algarismos. Por exemplo: 11 e 111 serão vistos como 011 e 111.

A **soma**<sup>7</sup> de dois números, representados na base 2, será definido na forma:

$$a \oplus b = c = (c_0, c_1, \dots, c_k), \text{ onde } c_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = b_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq b_i \end{cases}; \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Para exemplificar a definição acima será calculado  $11 \oplus 14$ .

$$\begin{aligned} 11 \oplus 14 &= (1011)_2 + (1110)_2 \\ &= (0101)_2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

### 1.3. Proposição

Sejam  $a, b, c$  números inteiros não negativos<sup>8</sup> na representação binária. Então, para a adição de números binários são válidas as seguintes propriedades:

**1ª – Comutativa:**  $a \oplus b = b \oplus a$ ;

**2ª – Associativa:**  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ ;

**3ª – Existência do Elemento Neutro:**  $a \oplus 0 = a$ ;

**4ª – Existência do Inverso Aditivo:**  $a \oplus a = 0$ ;

**5ª – Unicidade do Elemento Neutro:** Se  $a \oplus b = a$ , então  $b = 0$ ;

**6ª – Unicidade do Inverso Aditivo:** se  $a \oplus b = 0$ , então  $b = a$ .

#### Demonstração:

**1ª–** Se  $a \oplus b = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ , onde  $x_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = b_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq b_i \end{cases}$

$$b \oplus a = (x'_0, x'_1, x'_2, \dots), \text{ onde } x'_i = \begin{cases} 0, & \text{se } b_i = a_i \\ 1, & \text{se } b_i \neq a_i \end{cases}$$

Assim, pela definição da adição, percebemos que  $a \oplus b = b \oplus a$ .

**2ª–** Se  $a \oplus b = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ , onde  $x_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = b_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq b_i \end{cases}$

$$b \oplus c = (x'_0, x'_1, x'_2, \dots), \text{ onde } x'_i = \begin{cases} 0, & \text{se } b_i = c_i \\ 1, & \text{se } b_i \neq c_i \end{cases}$$

<sup>7</sup> Vale ressaltar que a adição, como está sendo definida, não é a adição usual praticada para os números na base 10, sendo esta adição exclusiva para o Sistema Binário.

<sup>8</sup>  $a, b$  ou  $c$  podem ser iguais a 0, que corresponde ao mesmo 0 na base 10, visto que 0 na base 2 é:  $(0)_2 = 0 \cdot 2^0 = 0$ .

Então  $(a \oplus b) \oplus c = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ , onde  $y_i = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i = c_i \\ 1, & \text{se } x_i \neq c_i \end{cases}$

$$a \oplus (b \oplus c) = (y'_0, y'_1, y'_2, \dots), \text{ onde } y'_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = x'_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq x'_i \end{cases}$$

Dessa forma, basta mostrar que  $y_i = y'_i$  para todo  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . Para isso, analisemos todos os possíveis valores de  $(a_i, b_i, c_i)$ :

$(a_i, b_i, c_i)$	$x_i = a_i \oplus b_i$	$x'_i = b_i \oplus c_i$	$y_i = x_i \oplus c_i$	$y'_i = a_i \oplus x'_i$
(0,0,0)	0	0	0	0
(0,0,1)	0	1	1	1
(0,1,0)	1	1	1	1
(0,1,1)	1	0	0	0
(1,0,0)	1	0	1	1
(1,0,1)	1	1	0	0
(1,1,0)	0	1	0	0
(1,1,1)	0	0	1	1

**Tabela 1** - Análise dos possíveis valores de  $(a_i, b_i, c_i)$   
Fonte: LOPES (2017, p. 3).

Assim, concluímos que  $y_i = y'_i$ , e conseqüentemente que:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

**3ª**– Por definição:  $a \oplus 0 = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ , onde  $x_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = 0 \\ 1, & \text{se } a_i \neq 0 \end{cases}$

Observe que  $a_i$  só assume valores 0 ou 1, dessa forma, se conclui que, para cada valor de  $i$ , logo  $a \oplus 0$  será o próprio  $a$ .

**4ª**– Por definição:  $a \oplus a = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ , onde  $x_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = a_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq a_i \end{cases}$

Como  $a = a$ , logo  $x_i = 0$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Assim,  $a \oplus a = 0$ . Logo  $a$  é um inverso aditivo do próprio  $a$ .

**5ª**– Por hipótese, temos  $a \oplus b = a$ . Somando-se  $a$  em ambos os lados à esquerda, e utilizando as propriedades de adição já provadas, tem-se:

$$a \oplus (a \oplus b) = a \oplus a \rightarrow \text{Aplicando a boa definição da adição}$$

$$(a \oplus a) \oplus b = a \oplus a \rightarrow \text{Aplicando a associatividade}$$

$$0 \oplus b = 0 \rightarrow \text{Aplicando a propriedade do inverso aditivo}$$

$$b \oplus 0 = 0 \rightarrow \text{Pela propriedade da Comutatividade}$$

$$b = 0 \rightarrow \text{Aplicando a propriedade do neutro aditivo}$$

**6ª**– Por hipótese, temos  $a \oplus b = 0$ . Somando-se  $a$  em ambos os lados, à esquerda, por meio das propriedades da tem-se:

$$a \oplus (a \oplus b) = a \oplus 0 \rightarrow \text{Aplicando a boa definição da adição}$$

$$(a \oplus a) \oplus b = a \oplus 0 \rightarrow \text{Aplicando a associatividade}$$

$$0 \oplus b = a \oplus 0 \rightarrow \text{Aplicando a propriedade do inverso aditivo}$$

$$b \oplus 0 = a \oplus 0 \rightarrow \text{Aplicando a propriedade da Comutatividade}$$

$$b = a \quad \rightarrow \text{Aplicando a propriedade do neutro aditivo}$$

■

Com base nas propriedades supracitadas, serão destacados dois lemas que fundamentarão o Jogo de Nim, e são precisamente esses resultados os que fornecerão uma estratégia vencedora.

**Lema 1:** Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , e  $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$  inteiros não negativos, tais que  $n_i = n'_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , exceto para um  $i = j$ , isto é,  $n_j \neq n'_j$ . Se  $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k = 0$ , então  $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k \neq 0$ .

**Demonstração:**

Utilizando o método de demonstração denominado de contra positiva, supor que  $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k = 0$ . Dessa forma, tem-se a soma:

$$(n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k) \oplus (n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k) = 0 \oplus 0 = 0$$

Logo utilizando as propriedades de associatividade e comutatividade:

$$(n_1 \oplus n'_1) \oplus (n_2 \oplus n'_2) \oplus \dots \oplus (n_k \oplus n'_k) = 0.$$

Por hipótese  $n_i = n'_i$ ; para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ ; exceto para um  $i = j$ , então  $n_i \oplus n'_i = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ ; exceto para um  $i = j$ . Assim:

$$0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus (n_j \oplus n'_j) \oplus \dots \oplus (0 \oplus 0) = 0$$

Daí tem-se que  $(n_j \oplus n'_j) = 0$ , logo pela unicidade do inverso aditivo:  $n_j = n'_j$ , absurdo!, portanto  $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k \neq 0$ .

■

**Lema 2:** Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$  inteiros não negativos, satisfazendo a condição  $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k \neq 0$ . Então, existem  $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$  inteiros não

negativos, tais que  $n_i = n'_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , exceto para um  $i = j$ , onde  $n'_j < n_j$ , e que satisfazem  $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k = 0$ .

### Demonstração:

Seja  $s = n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k$ . Por hipótese  $s \neq 0$ , logo existe pelo menos um algarismo 1 em  $s$  (na representação em base 2). Considere  $d$  a posição do algarismo 1 de  $s$  mais à esquerda. Dessa forma, deve existir um  $i = j$ , tal que  $n_j$  possui o algarismo 1 na posição  $d$ . Caso contrário, só se teria 0 na posição  $d$  de cada  $n_i$ , para  $i=1,2,\dots, k$ ; e que ao efetuar a soma dos  $n_i$ , o algarismo da posição  $d$  também seria 0. Absurdo!

Em outras palavras, podemos expressar:

$$s = (00 \dots 01s_{k-1} \dots s_2s_1)_2 \quad \text{e} \quad n_j = (x_{t+k}x_{t+k-1} \dots x_{k+1}1x_{k-1} \dots x_2x_1)_2$$

Agora defina  $n'_j = s \oplus n_j$ . Nota-se que  $n'_j < n_j$ , visto que:

$$n'_j = (x_{t+k}x_{t+k-1} \dots x_{k+1}0x'_{k-1} \dots x'_2x'_1)_2 < (x_{t+k}x_{t+k-1} \dots x_{k+1}1x_{k-1} \dots x_2x_1)_2$$

Ao definir os  $n'_i = n_i$ , para  $i \neq j$ , se chegará ao resultado procurado:

$$\begin{aligned} n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k &= n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n'_j \oplus \dots \oplus n_k \\ &= n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus (s \oplus n_j) \oplus \dots \oplus n_k \\ &= (n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k) \oplus s \\ &= s \oplus s \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

## 1.4. Jogo de Nim

O jogo de Nim, praticado na Europa desde o século XVI, teve sua origem na antiga China; e para jogá-lo é suficiente dispor de palitos, pedrinhas, favas, moedas ou quaisquer objetos pequenos. Em que consiste o jogo: É escolhido um número arbitrário de pilhas destes objetos, normalmente de três a seis, e em seguida alguém (jogador) é selecionado para ser o primeiro a jogar. Cada jogador deve remover de uma das pilhas um número qualquer de objetos, pelo menos um; ganha o Jogo quem retirar o último objeto da mesa.



Dispõe-se sobre uma mesa um número  $N$  de palitos separados em três grupos, de  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  palitos ( $n_1 + n_2 + n_3 = N$ ), de modo que  $n_i \neq n_j$ , se  $i \neq j$ . O jogo é realizado por dois jogadores. Cada jogador, na sua vez, deve retirar um número qualquer ( $\neq 0$ ) de palitos de um, e de apenas um, dos grupos. Os jogadores alternam-se e quem retirar o(s) último(s) palito(s) ganha o jogo. HEFEZ (2014, p.77)

Charles L. Bouton, que deu o nome ao Jogo, publicou um artigo em 1901 que o esclareceu definitivamente. Neste artigo ele desenvolveu um método que envolve escrever o número de palitos em cada pilha em notação binária.

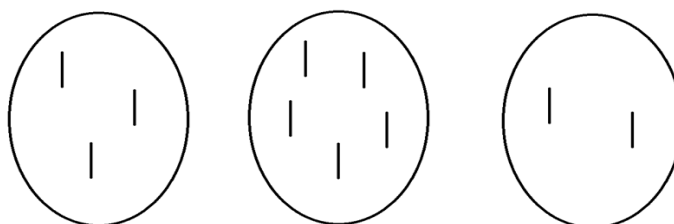
Em 1910, o matemático Moore propôs um jogo alternativo ao Jogo de Nim, chamado de Nimk, publicando um artigo que mostrava as estratégias para esta nova modalidade do jogo. Nimk é como o Jogo de Nim, mas ao invés de poder retirar palitos de uma única pilha, pode ser retirado palitos de uma a  $k$  pilhas. Por exemplo: em Nim2 pode-se retirar qualquer número de palitos de uma ou duas pilhas. Em 1961, o Jogo ganhou notoriedade com a aparição no filme *O Ano Passado em Marienbad*, de Alain Resnais.

### 1.5. Estratégias para jogar o Jogo de Nim

A seguir serão apresentados exemplos específicos de estratégias vencedoras para o Jogo de Nim.

#### a) Configuração (3, 5, 2)

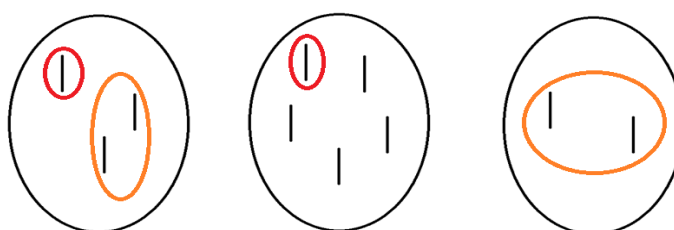
Primeiramente vamos entender o significado da configuração (3, 5, 2). O número 3 representa a quantidade de palitos no primeiro grupo; o 5, no segundo; e 2 no terceiro, como na ilustração abaixo.



**Figura 3** - Configuração (3, 5, 2) (I)  
Fonte: O autor (2020).

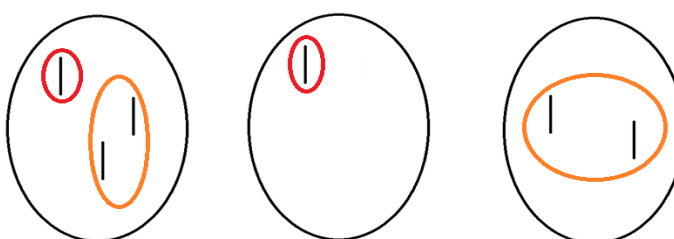
A **estratégia** consistirá em *dividir cada grupo de palitos utilizando a(s) maior(es) potência(s) de 2 possível, independentemente da quantidade de palitos em cada grupo, e em seguida, ver se a configuração está equilibrada, ou seja, se a quantidade de potências de dois se apresenta em pares ao considerar os três grupos (Observe a definição da soma binária e suas propriedades). Caso não esteja, se retirará o quantitativo de palitos a fim de deixar o sistema em equilíbrio.*

Por exemplo, na configuração (3, 5, 2), a divisão de cada grupo em potências de 2 se apresenta da forma seguinte:



**Figura 4** - Configuração (3, 5, 2) (II)  
Fonte: O autor (2020).

A partir disso, percebemos que existem dois grupos com 1 palito cada e dois grupos com 2 palitos cada, tendo apenas um grupo com 4 palitos. Logo, a configuração está em desequilíbrio. Assim, para que o jogador tenha vantagem em sua jogada, ele terá que tirar os 4 palitos do segundo grupo, procurando assim deixar o sistema em equilíbrio.



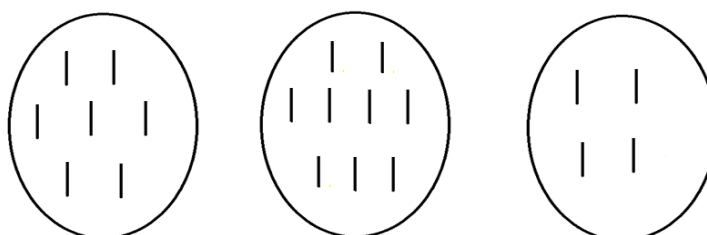
**Figura 5** - Configuração (3, 5, 2) (III)  
Fonte: O autor (2020).

E sempre que o jogador receber alguma configuração em equilíbrio, como a de cima, este estará em desvantagem, pois qualquer jogada que este faça fará com que o sistema volte a se desequilibrar.

Ganhará o jogador que conseguir, em sua última jogada, entregar para o seu adversário um sistema equilibrado, ou melhor, receber uma configuração desequilibrada (e que ele, com conhecimento de causa, consiga equilibrar).

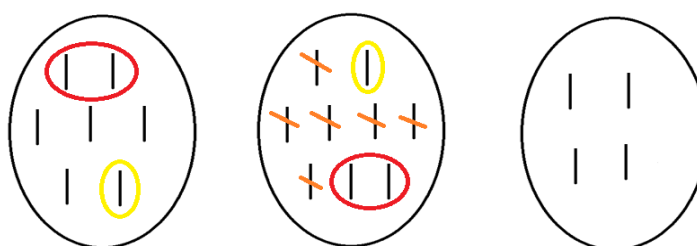
### b) Configuração (7, 9, 4)

Análogo ao que foi feito com a configuração (3,5,2) acima, vamos dividir cada grupo da configuração (7, 9, 4) em potências de 2.



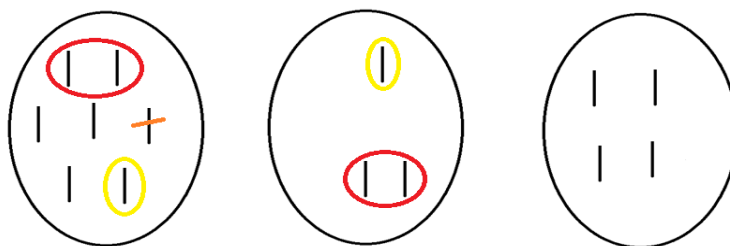
**Figura 6** - Configuração (7, 9, 4) (I)  
Fonte: O autor (2020).

Observe que há uma potência  $2^3 = 8$  no segundo grupo, porém não encontramos essa mesma potência em algum dos outros dois grupos para formar uma paridade. Logo, procuramos paridades de outras potências menores no primeiro e terceiro grupo, como prioridade.



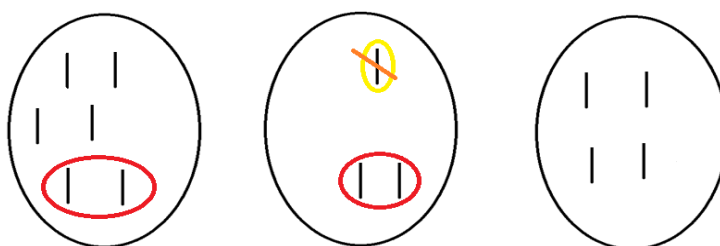
**Figura 7** - Configuração (7, 9, 4) (II)  
Fonte: O autor (2020).

Podemos perceber que existem dois grupos com 1 palito, dois grupos com 2 palitos e dois grupos com 4 palitos, tendo um excedente de 6 palitos no segundo grupo. Logo, o sistema está em desequilíbrio, e para equilibrá-lo é necessário que sejam tirados os 6 palitos sobrantes. Após efetivar tal jogada, teremos a seguinte configuração:



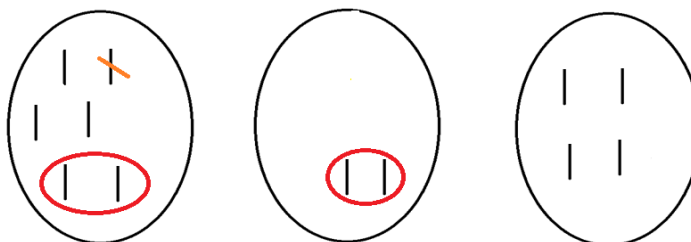
**Figura 8** - Configuração (7, 9, 4) (III)  
Fonte: O autor (2020).

Ao receber um jogo com a configuração acima, o jogador já estará em desvantagem, pois o sistema está em equilíbrio, logo qualquer jogada que ele faça, o desequilibrará novamente. Acima foi considerado a próxima jogada: o jogador tirará 1 palito (riscado) do primeiro grupo e a configuração ficará como a ilustração abaixo.



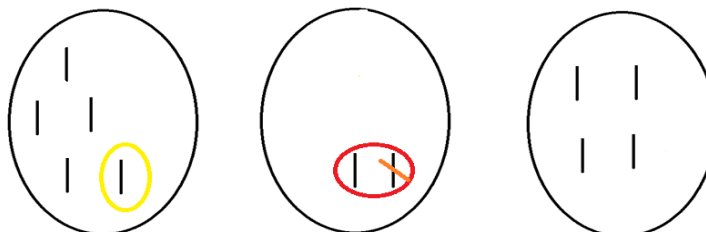
**Figura 9** - Configuração (7, 9, 4) (IV)  
Fonte: O autor (2020).

Ao retirar 1 palito do primeiro grupo, este terá uma nova configuração, logo, a partir da divisão em potências de 2, percebemos que existem dois grupos com 2 palitos, no primeiro e segundo grupo, e dois grupos com 4 palitos no primeiro e terceiro grupos, tendo 1 palito em excesso no segundo grupo, como mostra a imagem acima. Ao retirá-lo, o jogador fará com que o sistema volte a ficar equilibrado.



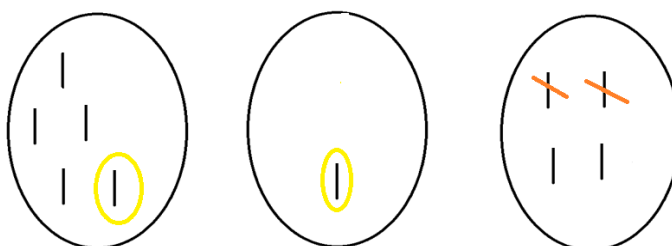
**Figura 10** - Configuração (7, 9, 4) (V)  
Fonte: O autor (2020).

Com o sistema equilibrado, qualquer jogada que o jogador fizer o desfavorecerá. Como foi mostrado acima, ele retirará 1 palito (riscado) do grupo um e a configuração do jogo ficará como a ilustração abaixo.



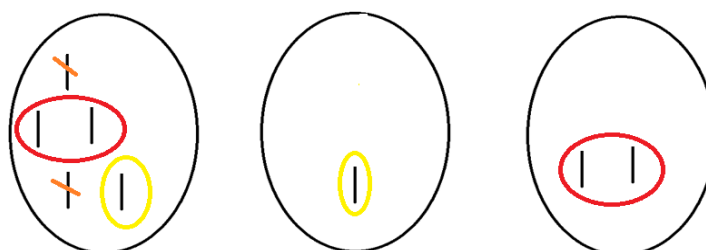
**Figura 11** - Configuração (7, 9, 4) (VI)  
Fonte: O autor (2020).

Percebemos que para manter o equilíbrio, o jogador optará por retirar 1 palito (riscado) do segundo grupo, dessa forma se terá dois grupos com 1 palito e dois grupos com 4 palitos.



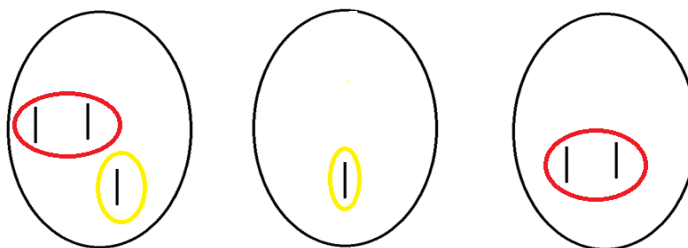
**Figura 12** - Configuração (7, 9, 4) (VII)  
Fonte: O autor (2020).

Estando o sistema em equilíbrio, qualquer jogada feita pelo jogador o prejudicará. Supor que, este opte por tirar 2 palitos (riscados) do terceiro grupo.



**Figura 13** - Configuração (7, 9, 4) (VIII)  
Fonte: O autor (2020).

A fim de que o sistema volte a ficar em equilíbrio, 2 palitos do primeiro grupo devem ser retirados para que se tenham dois grupos com 1 palito e dois grupos com 2 palitos.



**Figura 14** - Configuração (7, 9, 4) (IX)  
Fonte: O autor (2020).

Por fim, o jogador que recebe um sistema equilibrado como a configuração acima estará na desvantagem, como foi visto (Figura 5) na configuração (3, 5, 2), no exemplo anterior.

### 1.6. A matemática (das estratégias) do Jogo de Nim

Antes de compreender a Matemática por trás do jogo vamos chamar a *soma de números binários*, antes definida, como **soma Nim**.

Vale ressaltar que **jogos de soma zero** são jogos que o ganho de um jogador equivale à derrota do outro; a cada jogada, revezadas, os jogadores utilizam de estratégias específicas para conseguir a vitória.

Com base nos resultados matemáticos apresentados neste capítulo será feito uma análise das jogadas e estratégias do Jogo de Nim, com destaque aos dois lemas antes expostos e que serão amplamente utilizados no jogo. Temos que, se a soma Nim de determinada situação é zero (0), então **qualquer** alteração (jogada) a esta situação fará com que a soma resulte diferente de zero. Se uma situação apresenta soma Nim diferente de zero (0), então **existe** uma jogada que a tornará igual a zero.

Dessa forma, o jogador que estiver com soma Nim igual a zero (0) em sua jogada, sairá desfavorecido, pois qualquer jogada feita por ele alterará a soma Nim, fazendo com que o jogador em determinado momento (se continuar esta situação no restante do jogo) perca por não conseguir mais jogar. Assim, para que um jogador apresente a estratégia vencedora (estratégia para vencer o jogo), basta que ele receba a cada jogada, uma situação na qual a soma Nim seja diferente de 0.

Para exemplificar, considere um jogo com dois participantes: jogador A (jogador experiente)<sup>9</sup> e jogador B (jogador inexperiente<sup>10</sup>), e a seguinte configuração inicial: (3, 5, 2), onde 3 representa a quantidade de palitos no primeiro grupo; 5, no segundo; e 2 no terceiro. A princípio, vamos supor que o jogador A comece jogando, e em seguida o jogador B, assim revezando-se um após o outro. Abaixo segue a forma como o jogo desenrolou-se:

$$(3,5,2) \rightarrow (3,1,2) \rightarrow (2,1,2) \rightarrow (2,0,2) \rightarrow (0,0,2) \rightarrow (0,0,0)$$

Observando o mesmo jogo, a partir da Soma Nim, tem-se:

$$3 \oplus 5 \oplus 2 = 4 \rightarrow \text{Jogo Inicial com soma Nim diferente de zero}$$

$$3 \oplus 1 \oplus 2 = 0 \rightarrow \text{É aplicado o Lema 2 pelo jogador A}$$

$$2 \oplus 1 \oplus 2 = 1 \rightarrow \text{É aplicado o Lema 1 pelo jogador B}$$

$$2 \oplus 0 \oplus 2 = 0 \rightarrow \text{É aplicado novamente o Lema 2 pelo jogador A}$$

$$0 \oplus 0 \oplus 2 = 2 \rightarrow \text{É aplicado o Lema 1 pelo jogador B}$$

$$0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \rightarrow \text{É aplicado novamente o Lema 2 pelo jogador A, que ganha o jogo.}$$

Seu equivalente binário será:

$$(011)_2 \oplus (101)_2 \oplus (010)_2 = (100)_2 \rightarrow \text{Jogo Inicial com soma Nim não zero}$$

$$(011)_2 \oplus (001)_2 \oplus (010)_2 = (000)_2 \rightarrow \text{É aplicado o Lema 2 pelo jogador A}$$

$$(010)_2 \oplus (001)_2 \oplus (010)_2 = (001)_2 \rightarrow \text{É aplicado o Lema 1 pelo jogador B}$$

$$(010)_2 \oplus (000)_2 \oplus (010)_2 = (000)_2 \rightarrow \text{É aplicado o Lema 2 pelo jogador A}$$

$$(000)_2 \oplus (000)_2 \oplus (010)_2 = (010)_2 \rightarrow \text{É aplicado o Lema 1 pelo jogador B}$$

$$(000)_2 \oplus (000)_2 \oplus (000)_2 = (000)_2 \rightarrow \text{É aplicado novamente o Lema 2 pelo jogador A, que ganha o jogo.}$$

O jogo, como foi descrito acima, se desenrola de acordo às jogadas do jogador A, que manteve o domínio do jogo até o final. Observe que este contou com dois fatores favoráveis: iniciar o jogo com soma Nim diferente de zero e

<sup>9</sup> É o jogador que conhece o jogo de Nim e, por meio da Teoria dos Jogos, sabe utilizar de estratégias para conseguir a melhor configuração no jogo.

<sup>10</sup> É o jogador que não conhece ou conhece pouco o jogo de Nim. Não possui estratégias bem definidas.

ser experiente no jogo, assim suas estratégias bem definidas e conscientes o levaram a vencer o jogo, independentemente das jogadas do jogador B.

Agora, vamos **supor** que o jogador B inicie o jogo, seguido pelo jogador A, revezando-se um após o outro. Sendo o jogador B inexperiente e quem inicia a jogada, se procederá a uma análise de jogo diferente da anterior.

Pela configuração que foi dada, o jogador B possui 10 possibilidades de escolhas de como os palitos podem ser tirados nos grupos:

(2,5,2)	(3,4,2)	(3,5,1)
(1,5,2)	(3,3,2)	(3,5,0)
(0,5,2)	(3,2,2)	
	(3,1,2)	
	(3,0,2)	

Dentre essas dez possibilidades, somente uma tem soma Nim igual a zero, a possibilidade (3,1,2), que fará com que o jogador B domine no momento o jogo.

Mesmo sem conhecer estratégias dominantes<sup>11</sup>, o jogador inexperiente pode fazer escolhas espertas, aumentando assim a probabilidade de vencer o jogo. Essa tomada de decisão de forma consciente, visando maximizar o ganho ou minimizar a perda é o que estuda a *Teoria dos Jogos*, que será abordada de forma mais ampla no capítulo 5 deste trabalho.

Uma maneira de o jogador B aumentar as suas chances de vencer é *aumentando a probabilidade de suas escolhas, ou seja, diminuindo o máximo que pode o número de palitos*. Porém, deve ser levado em consideração que ao tirar todos os palitos de um grupo, em uma única jogada (que não seja a última), o jogador pode estar favorecendo o oponente, já que este terá menos grupos para se preocupar, simplificando a configuração. Desta forma, o jogador B pode optar por tirar 4 palitos do segundo grupo, tornando a configuração inicial em (3, 1, 2).

O jogador A, por ser um jogador experiente, observará que a configuração recebida por ele é desvantajosa, assim, qualquer jogada que ele

---

<sup>11</sup> Este conceito será abordado no capítulo de Teoria dos Jogos.



fizer, dará vantagem ao jogador B, que porventura não saberá usufruir por não ter tanto conhecimento do jogo.

Pensando de forma análoga ao jogador B em sua primeira jogada, o jogador A ao receber o jogo com a configuração (3, 1, 2) poderá optar por tirar apenas 1 palito do primeiro ou do terceiro grupo, pois assim a probabilidade não aumentará tanto quanto se tirar 2 ou 3 palitos. Por conveniência, o jogador A optará por tirar 1 palito do terceiro grupo, tornando a configuração (3, 1, 1).

O jogador B, recebendo a configuração (3, 1, 1), pode observar que tem 20% de chance de fazer uma escolha qualquer, pois há 5 palitos ao todo. Mas, ao agir de forma estratégica, e lembrando que o jogo é sequencial<sup>12</sup>, este pode optar por tirar os 3 palitos do primeiro grupo, simplesmente: (0, 1, 1).

Ao receber esta configuração, ambos os jogadores sabem que o jogador B venceu o jogo, mesmo sendo inexperiente, este utilizou de decisões estratégicas, analisando as possibilidades de cada jogada dentro jogo.

Agora, considere um **segundo exemplo** com uma configuração inicial diferente: (9, 5, 12). Será feita uma análise semelhante ao exemplo anterior.

$$(9,5,12) \rightarrow (8,5,12) \rightarrow (8,4,12) \rightarrow (2,4,12) \rightarrow (2,4,6) \rightarrow (2,4,0) \rightarrow \\ \rightarrow (2,2,0) \rightarrow (1,2,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0,1,0) \rightarrow (0,0,0)$$

Na sua representação em soma de Nim:

$$\begin{aligned} 9 \oplus 5 \oplus 12 = 0 &\rightarrow \text{Jogo Inicial com soma Nim zero} \\ 8 \oplus 5 \oplus 12 = 1 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 1} \text{ pelo jogador A} \\ 8 \oplus 4 \oplus 12 = 0 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 2} \text{ pelo jogador B} \\ 2 \oplus 4 \oplus 12 = 10 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 1} \text{ pelo jogador A} \\ 2 \oplus 4 \oplus 6 = 0 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 2} \text{ pelo jogador B} \\ 2 \oplus 4 \oplus 0 = 6 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 1} \text{ pelo jogador A} \\ 2 \oplus 2 \oplus 0 = 0 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 2} \text{ pelo jogador B} \\ 1 \oplus 2 \oplus 0 = 3 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 1} \text{ pelo jogador A} \\ 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 2} \text{ pelo jogador B} \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 1} \text{ pelo jogador A} \\ 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 &\rightarrow \text{É aplicado o } \textit{Lema 2} \text{ pelo jogador B, que ganha o jogo.} \end{aligned}$$

---

<sup>12</sup> Jogo onde um jogador tem conhecimento da jogada do jogador antecessor.

E seu equivalente binário será:

$(1001)_2 \oplus (0101)_2 \oplus (1100)_2 = (0000)_2 \rightarrow$  Jogo Inicial com soma Nim zero  
 $(1000)_2 \oplus (0101)_2 \oplus (1100)_2 = (0001)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 1* por A  
 $(1000)_2 \oplus (0100)_2 \oplus (1100)_2 = (0000)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 2* por B  
 $(0010)_2 \oplus (0100)_2 \oplus (1100)_2 = (1010)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 1* por A  
 $(0010)_2 \oplus (0100)_2 \oplus (0110)_2 = (0000)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 2* por B  
 $(0010)_2 \oplus (0100)_2 \oplus (0000)_2 = (0110)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 1* por A  
 $(0010)_2 \oplus (0010)_2 \oplus (0000)_2 = (0000)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 2* por B  
 $(0001)_2 \oplus (0010)_2 \oplus (0000)_2 = (0011)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 1* por A  
 $(0001)_2 \oplus (0001)_2 \oplus (0000)_2 = (0000)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 2* por B  
 $(0000)_2 \oplus (0001)_2 \oplus (0000)_2 = (0001)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 1* por A  
 $(0000)_2 \oplus (0000)_2 \oplus (0000)_2 = (0000)_2 \rightarrow$  Foi aplicado o *Lema 2* por B, que ganha o jogo.

A partir deste exemplo prático é possível visualizar e compreender como cada jogador reagiu a cada configuração do jogo, e como fez uso de estratégias algumas vezes baseado nos lemas, outras analisando às probabilidades envolvidas em cada jogada para vencer o jogo. Dessa forma foi possível utilizar a teoria de Números Binários, aliada à Teoria dos Jogos, a fim de encontrar uma estratégia vencedora no Jogo de Nim.

## 1.7. Conclusão

Neste capítulo foi abordado um pouco da teoria de Números Binários, que inclui definições, propriedades e lemas de suma importância, que foram responsáveis por fazer uma ligação com o Jogo de Nim, atrelando a teoria à prática, que servirá de apoio para o capítulo sobre Teoria dos Jogos.

# ANÁLISE COMBINATÓRIA

## 2.1. Fatos Históricos

Como visto, a ideia de número surgiu a partir da necessidade do homem contar. Com o passar dos anos e com a evolução da Matemática, métodos eficazes de contagem surgiram, dentre esses, a Análise Combinatória:

Era uma vez um matemático chamado Pascal que ficou famoso quando inventou um triângulo formado por números, o Triângulo de Pascal, e deu assim o pontapé inicial para a Análise Combinatória. TAVARES; BRITO (2005, p. 1).

Blaise Pascal, matemático francês, que viveu no século XVII, escreveu uma obra intitulada *Traité du Triangle Arithmétique* e o publicou dois anos mais tarde. Nela é possível encontrar “triângulos numéricos, construídos de uma forma diferente da que habitualmente usamos hoje: a partir da segunda linha, cada elemento é obtido como soma dos elementos da linha anterior situados à esquerda ou exatamente acima do elemento” (TAVARES; BRITO, 2005).

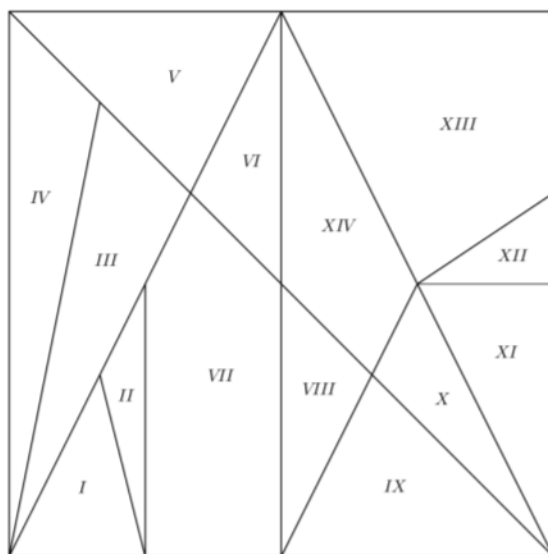
1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

**Figura 15** - Triângulo de Pascal  
Fonte: Página Pinterest.<sup>13</sup>

<sup>13</sup> Disponível em: [https://br.pinterest.com/pin/180214422578058836/?nic\\_v2=1a5Ukl0j8](https://br.pinterest.com/pin/180214422578058836/?nic_v2=1a5Ukl0j8). Acesso em: 09 outubro. 2020.

Relatos apontam que desde a antiguidade clássica houve estudos sobre Combinatória. Arquimedes (287 a.C – 212 a.C) estudou o *Stomachion*, jogo semelhante ao Tangram<sup>14</sup>, constituído de catorze peças que devem ser encaixadas para formar um quadrado. (EVES, 2004)

A partir desse trecho, os pesquisadores perceberam que estavam diante de um problema de combinatória e, mais do que isso, poderia ser o primeiro trabalho registrado na Antiguidade sobre essa área da Matemática. SILVA (2017, p. 42)



**Figura 16** - Stomachion: arranjo original encontrado no Códex C  
Fonte: SILVA, 2017.

É manifestado por Tavares e Brito (2005, p. 3) o afirmado em 2003 pelo historiador de Matemática da Universidade de Standford (Califórnia), Reviel Netz: “o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória”.

## 2.2. Princípio Fundamental da Contagem

MORGADO et al (2006, p. 2) afirmam que “na Análise Combinatória são estudadas estruturas e relações discretas, sendo os problemas mais frequentes a demonstração de existência de subconjuntos de elementos de um

<sup>14</sup> O Tangram é um quebra-cabeças geométrico chinês formado por 7 peças: são 2 triângulos grandes, 2 pequenos, 1 médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. É possível montar mais de 5000 figuras.

conjunto finito dado, que satisfazem determinadas condições, e a contagem ou classificação de subconjuntos de um conjunto finito que atendem a certas condições dadas”.

Dentro da Análise Combinatória destaca-se um dos seus principais fundamentos, O *Princípio Fundamental da Contagem*:

Se uma decisão  $D_1$  pode ser tomada de  $p$  modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão  $D_2$  pode ser tomada de  $q$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual a  $p \cdot q$ . LIMA et al (2006, p. 125).

**Exemplo:** Para fazer uma viagem Rio-São Paulo-Rio, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

*Resolução:* Há três modos de escolher o transporte de ida. Depois disso, há duas alternativas para a volta. Dessa forma, a resposta é:  $3 \cdot 2 = 6$ .

Muitas das questões envolvendo teoria da Combinatória podem ser resolvidas pelo Princípio supracitado (OLIVEIRA, 2018). Outro conceito que vale salientar é o de *Combinação Simples*.

Para que o conceito seja mais bem compreendido, observe a seguinte situação: de quantos modos podemos escolher  $p$  objetos distintos entre  $n$  objetos distintos? Ou ainda, quantos são os subconjuntos com  $p$  elementos do conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

Cada subconjunto com  $p$  elementos é chamado de uma *combinação simples* de uma classe  $p$  dos  $n$  objetos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  são:

$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_1, a_2, a_4\}$	$\{a_1, a_2, a_5\}$	$\{a_1, a_3, a_4\}$
$\{a_1, a_3, a_5\}$	$\{a_1, a_4, a_5\}$	$\{a_2, a_3, a_4\}$	$\{a_2, a_3, a_5\}$
	$\{a_2, a_4, a_5\}$	$\{a_3, a_4, a_5\}$	

Como pôde ser observado, o número de combinações simples de classe 3 de 5 objetos é 10.

Segundo MORGADO, et al (2006, p. 34), O número de combinações simples de classe  $p$  de  $n$  objetos é representado e formulado por:

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n - 1) \dots (n - p + 1)}{p!}, 0 < p \leq n$$

**Exemplo:** Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar, se dispomos de 10 frutas diferentes?

*Resolução:* Para formar uma salada basta escolher 4 das 10 frutas, o que pode ser feito de  $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$  modos.

**Exemplo:** De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?

*Resolução:* As alternativas são:

4 homens, 2 mulheres

3 homens, 3 mulheres

2 homens, 4 mulheres

Utilizando a definição de combinação simples, temos:

$$C_7^4 \cdot C_4^2 + C_7^3 \cdot C_4^3 + C_7^2 \cdot C_4^4 = 35 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 371 \text{ modos.}$$

Um outro método de resolução deste exemplo é: podemos contar todas as escolhas de 6 pessoas e abater as escolhas sem mulheres (6 homens) e com apenas uma mulher (e 5 homens), logo:

$$C_{11}^6 - C_7^6 - C_7^5 \cdot C_4^1 = 462 - 7 - 84 = 371 \text{ modos.}$$

### 2.3. Conclusão

Este capítulo teve como foco uma sucinta apresentação da *Análise Combinatória* com o intuito de situar o leitor para os capítulos subsequentes. No próximo, será abordado a *Probabilidade* para que assim esta teoria, junto à *Análise Combinatória*, possam ser aplicadas na Teoria dos Jogos.

# PROBABILIDADE

---

## 3.1. Fatos Históricos

Teoria das Probabilidades originou-se com Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), devido à curiosidade de um cavalheiro, o Chevalier de Méré, jogador apaixonado que em cartas discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas. Despertado seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas. LIMA et al (2006, p. 5)

A teoria elementar das probabilidades já havia sido objeto de atenção muito antes desse período, por causa do fascínio das pessoas pelos jogos de azar. Na *Divina Comédia*, de Dante Alighieri (1265 – 1321) há uma referência a probabilidades em jogos de dados.

O livro *De Ludo Aleae*<sup>15</sup>, de Jerônimo Cardano (1501 – 1576), foi a primeira obra conhecida em que se estudam as probabilidades. A respeito do livro de Cardano, Isaac Todhunter (1820 – 1884), matemático britânico, em seu livro *História da Teoria Matemática da Probabilidade*, ressalta que livro pode ser bem descrito como um manual para jogadores.

Este contém muito sobre jogos, com descrição de jogos e com as precauções que se deve ter para se proteger de adversários dispostos a trapacear (TODHUNTER, 1865).

São exemplos de jogos exclusivamente dependentes da sorte: roleta e dados, pois a vitória ou a derrota, nesses casos, não é influenciada por qualquer outro fator (como a habilidade), que não a sorte de uns e o azar de outros jogadores. Jogos que dependam principalmente da sorte são os jogos de cartas, pois embora o fator sorte ou azar seja o preponderante para se chegar ao resultado, alguma habilidade pode influenciar na vitória. Nos jogos de bingo, o resultado depende

---

<sup>15</sup> “Liber de Ludo Aleae” ou *Livro sobre os jogos de Azar*, foi publicado em 1663.

exclusivamente da sorte, ou ao menos esta é a principal determinante do resultado. Já os chamados jogos de habilidade, não são considerados jogos de azar, mas sim lícitos, como ocorre com as competições esportivas, bem como os jogos de dama e xadrez, que dependem da inteligência, da perspicácia e do raciocínio. Entretanto a aposta em si (feita por terceiros) sobre o futuro resultado de em tais jogos lícitos é considerada jogo de azar. GARCIA (2008, p. 562-3)

### 3.2. Definição de Probabilidade

Segundo LIMA et al (2006, p. 128), “Diremos que um experimento é **determinístico** quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados experimentos **aleatórios**. Fenômenos aleatórios acontecem constantemente em nossa vida diária. São frequentes perguntas tais como: choverá amanhã? Qual será a temperatura máxima no próximo domingo? Qual será o número de ganhadores da Loteria Esportiva? Quantos habitantes terá o Brasil no ano 2030?”.

A primeira tarefa consiste em descrever todos os possíveis resultados do experimento e calcular seu número. De outra forma: *explicitar qual é o número de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele*. Este conjunto é chamado Espaço Amostral. LIMA et al (2006, p. 129)

A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é, portanto, uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de casos possíveis. MORGADO et al (2006, p. 127)

A Probabilidade de um evento A é definida por:



$$\text{Probabilidade de } A = P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

**Exemplo:** Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? Qual é a probabilidade de obter pelo menos 2 caras?

*Resolução:* Para facilitar vamos indicar com  $C$  cara e com  $K$  coroa. Dessa forma, o espaço amostral é o conjunto:

$$\Omega = \{(CCC), (CCK), (CKC), (KCC), (CKK), (KCK), (KKC), (KKK)\}$$

Donde,  $\#(\Omega) = \text{número de casos possíveis} = 8$ . Indiquemos  $A$  como o evento “obter 2 caras”, assim:

$$A = \{(CCK), (CKC), (KCC)\}.$$

Logo,  $\#(A) = 3$ , e portanto:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

Agora, vamos indicar  $B$  como o evento “obter pelo menos duas caras”:

$$B = \{(CCK), (CKC), (KCC), (CCC)\}.$$

Nota-se que:  $\#(B) = 4$  e  $P(B) = \frac{\#(B)}{\#(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ .

### 3.2.1. Propriedades imediatas da definição

Como o próprio título diz, as propriedades abaixo são imediatas, logo não serão demonstradas.

- I. Para todo evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
- II.  $P(\Omega) = 1$ ,  $\Omega$  é o conjunto de casos possíveis ou espaço amostral;
- III.  $P(\emptyset) = 0$ ;
- IV. Se  $A$  e  $B$  são eventos e  $A \cap B = \emptyset$ , então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Com o intuito de facilitar a compreensão das propriedades, alguns exemplos serão dados a seguir.

**Exemplo:** No lançamento de um dado honesto, qual é a probabilidade de se obter o número 3?

*Resolução:* Uma vez que um dado é numerado de 1 a 6, então,

$$\#(\Omega) = \text{número de casos possíveis} = 6$$

Vamos indicar o evento A como “obter o número 3”, logo  $\#(A) = 1$ .

Assim,

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{1}{6}; \quad 0 \leq \frac{1}{6} \leq 1.$$

**Exemplo:** No lançamento de um dado honesto, qual é a probabilidade de se obter um número par ou o número 3?

*Resolução:* Como no exemplo anterior, o número de casos possíveis é 6, isto é,  $\#(\Omega) = 6$ .

Considere A como o evento “obter um número par”, assim:  $\#(A) = 3$ , pois há 3 números pares num dado numerado de 1 a 6. Logo:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

Agora considere B como o evento “obter o número 3”. Pelo exemplo acima:

$$P(B) = \frac{\#(B)}{\#(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

E pela propriedade IV, dado que  $A \cap B = \emptyset$ , tem-se:

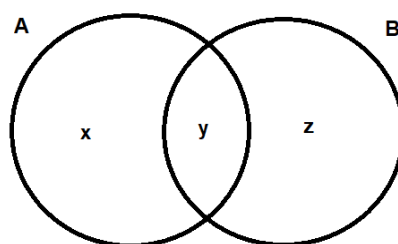
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

### 3.3. Princípio de Inclusão-Exclusão

Segundo LIMA et al (2006, p. 61), “O Princípio de Inclusão-Exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos”. Na sua versão mais simples, ele afirma que:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

O diagrama abaixo representa o Princípio, e consecutivamente uma justificativa para a equação:



**Figura 17** - Diagrama Representando o Princípio de Inclusão-Exclusão  
Fonte: O autor (2020).

Pelo diagrama:  $\#(A \cup B) = x + y + z$

$$\begin{aligned} \text{e } \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) &= (x + y) + (y + z) - y \\ &= x + y + z \\ &= \#(A \cup B). \end{aligned}$$

■

### 3.4. Probabilidade Condicional

Dados dois eventos A e B, é definido a *probabilidade condicional de B dado A*, como a razão ou o número  $P(A \cap B) / P(A)$ . Representaremos este número pelo símbolo  $P(B/A)$ . Tem-se então simbolicamente,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Note-se que este número só está definido quando  $P(A) > 0$ .

A equação acima também pode ser escrita ou é equivalente a:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Se  $P(B) > 0$  tem-se também:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

**Exemplo:** Um grupo de 360 pessoas está classificado da seguinte forma:

	Fala inglês	Fala alemão	Fala francês
Homens	92	35	47
Mulheres	101	33	52

Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabendo-se que esta pessoa fala francês, qual é a probabilidade de que seja homem?

*Resolução:* Seja  $A$  o evento que ocorre se a pessoa escolhida fala francês e  $B$  se a pessoa escolhida é homem. Temos:

$$P(A) = \frac{47 + 52}{360} = \frac{99}{360}$$

$$P(A \cap B) = \frac{47}{360}$$

Portanto:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \frac{47}{47 + 52} = \frac{47}{99}$$

É a probabilidade de que essa pessoa que fala francês seja homem.

# TEORIA DOS JOGOS

---

## 4.1. Considerações Iniciais

Neste capítulo será abordado a Teoria dos Jogos, que servirá de ligação entre o conteúdo matemático apresentado nos capítulos anteriores e alguns jogos significativos à experiência de ensino-aprendizagem do próximo capítulo.

Em se tratando da teoria dos jogos, no capítulo serão apresentados: fatos históricos a respeito da Teoria e algumas definições relevantes que a constroem e fundamentam. Por fim alguns jogos serão incorporados: Dilema dos Prisioneiros, Chicken Game e Pôquer, para exemplificar a teoria e dar uma percepção clara da sua relevância.

## 4.2. Fatos históricos

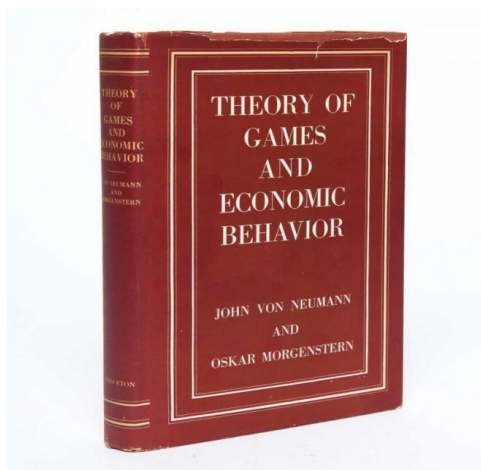
No artigo *Uma Introdução à Teoria dos Jogos*, relatos apontam que os primeiros estudos sobre esta Teoria remontam ao século XVIII, na abordagem de um jogo de cartas chamado "Le Her"<sup>16</sup>. A Uma solução deste para o jogo foi proposta por James Waldegrave, diplomata britânico que serviu como embaixador na Áustria e na França, mas os estudos que realizou não foram aprofundados. (SARTINI et al, 2004)

Sartini et al (2004, p. 2 - 3) ressalta que em 1913, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos. O teorema afirma que o **jogo de xadrez** é estritamente determinado, isto é, em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia que lhe dará a vitória ou conduzirá o jogo ao empate. John von Neumann, em 1928, demonstrou que todo **jogo finito de soma zero** com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas (estratégias nas quais as probabilidades, dos casos

---

<sup>16</sup> Um jogo de cartas francês que remonta ao século XVI e que desempenhou um papel no desenvolvimento da teoria da probabilidade.

possíveis no processo, determinam a melhor escolha), que posteriormente será abordado neste trabalho. Em 1944, Oskar Morgenstern, junto com John von Neumann, publicou o clássico "The Theory of Games and Economic Behaviour", sendo este resultado um importante passo para a conexão entre Economia e Matemática Aplicada. Ainda em 1944, John Forbes Nash Jr. e Reinhard Selten receberam o prêmio Nobel por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.



**Figura 18** - Livro "Theory of Games and Economic Behaviour"  
Fonte: Página Whitmore.<sup>17</sup>

### 4.3. Definições relevantes – jogo, jogador e Teoria dos Jogos

O jogo é uma situação em que os jogadores (participantes) tomam decisões estratégicas em busca de determinados benefícios. Tais decisões afetam a magnitude dos seus próprios resultados e dos resultados dos outros em um processo iterativo. Os resultados dos jogos são denominados de pay-offs e o conjunto desses benefícios para as diferentes combinações de estratégias e decisões tomadas pelos jogadores é chamada de matriz de pay-off. PYNDICK; RUBINFELD (2002, p. 483 - 484)

Jogador é todo agente que participa e possui objetivos em um jogo. Pode ser um país, um grupo ou uma pessoa, o que interessa é que, dentro de um jogo, ele possua interesses específicos e se comporte como um todo. CARVALHO (2017, p. 12)

---

<sup>17</sup> Disponível em: <https://www.whitmorerarebooks.com/pages/books/1892/john-von-neumann-oskar-morgenstern/theory-of-games-and-economic-behavior>. Acesso em: 19 outubro de 2020.

Ao se deparar com um jogo, o jogador precisa decidir qual é a melhor estratégia, a que será utilizada para o melhor resultado possível, com o intuito de maximizar o ganho e/ou minimizar as perdas. Quando uma estratégia é superior às outras, independente da jogada feita pelo oponente, podemos dizer que esta estratégia é *estritamente dominante*. Já uma estratégia é dita *fracamente dominante* quando é superior somente a algumas delas e seu ganho é equivalente ao ganho das outras estratégias.

A Teoria dos Jogos é uma teoria criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais "agentes de decisão" interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo. SARTINI et al (2004, p. 1).

Um exemplo de jogo que aborda bem a teoria acima é o *jogo de xadrez*, pois há interação direta entre os jogadores, onde cada jogada depende da anterior, *criando processos de decisão conscientes e objetivos*, como ressalta a definição.

Percebemos que a Teoria dos Jogos se estende para além das Ciências Exatas, podendo ser aplicada nas mais diversas situações. Um exemplo clássico da aplicação desta Teoria é o *Dilema dos Prisioneiros*.

#### **4.4. Dilema dos Prisioneiros**

Um dos exemplos clássicos desta Teoria é o *Dilema dos Prisioneiros*, pois consegue de forma dinâmica mostrar diferentes campos de atuação da mesma.

Dois suspeitos de um crime (que realmente cometeram conjuntamente) são detidos pela polícia e interrogados em celas separadas. Para cada um deles, a polícia diz: "Se vocês dois confessarem, cada um ficará seis anos preso. Se você confessar e seu parceiro não, você ficará preso apenas pela sua colaboração (por dois anos), e o outro, dez anos pela resistência. Se ninguém confessar, ambos ficarão presos quatro anos. BONTEMPO (1997, p. 2)

Com base no Dilema é possível criar uma matriz que ilustra a situação, tornando mais simples a compreensão.

<b>Suspeito A</b>	<i>Confessar</i>	<i>Não confessar</i>
<b>Suspeito B</b>		
<i>Confessar</i>	<b>(-6; -6)</b>	<b>(-2; -10)</b>
<i>Não confessar</i>	<b>(-10; -2)</b>	<b>(-4; -4)</b>

**Tabela 2** - Matriz dos play-offs do Dilema dos Prisioneiros  
 Fonte: BONTEMPO (1997, p. 3)

Supondo que ambos os suspeitos não se comunicarão durante a tomada de decisão, percebemos que a pena é menor para cada suspeito se optar por confessar (dois ou seis anos), variando de acordo com a decisão do outro. Logo, a melhor estratégia (estratégia vencedora) é *confessar*, pois há chances de um dos prisioneiros ficar preso por menos tempo.

#### 4.5. Equilíbrio de Nash

John Nash, em 1950, propôs um princípio fundamental na Teoria dos Jogos, denominado *Equilíbrio de Nash*. Este ressalta que um par de estratégias está em equilíbrio de Nash se este é a melhor resposta para cada jogador envolvido no jogo. (REIS, 2018).

No *Dilema dos Prisioneiros* percebemos claramente, como foi ressaltado, que a estratégia vencedora para cada jogador é *confessar*, logo (confessar, confessar) é o único equilíbrio de Nash envolvido no Dilema.

#### 4.6. Chicken Game

O Chicken Game ou Jogo do Covarde é um outro jogo interessante e que vale ser englobado pela Teoria dos Jogos.

Nesse jogo, temos dois adolescentes, João e Pedro, que dirigem seus carros em alta velocidade um em direção ao outro. O objetivo é identificar quem desviará primeiro: este será o covarde. O que não desviar será o durão.

Se ambos desviarem ao mesmo tempo, ninguém perde o jogo, mas se ambos forem “durões” e não desviarem sofrerão um acidente gravíssimo, visto a alta velocidade dos carros, pondo em risco suas



próprias vidas. As recompensas podem ser representadas na forma estratégica ou normal.

...O jogo do covarde tem sido empregado não apenas para descrever uma situação no mundo econômico na qual é melhor evitar o enfrentamento, como também foi muito popular na época da Guerra Fria entre os Estados Unidos e a antiga União Soviética, para descrever os riscos de um conflito termonuclear e a necessidade de mecanismos que evitassem o confronto. PEREIRA (2014, p. 34)

		Pedro	
		Não desvia	Desvia
João	Não desvia	(-2,-2)	(2,-1)
	Desvia	(-1,2)	(0,0)

**Tabela 3** - Matriz dos play-offs do Chicken Game  
Fonte: PEREIRA (2014, p. 34)

Os valores descritos na matriz servem apenas para ordenar as preferências de cada jogador. Sabe-se que pela própria definição do jogo, o pior cenário é quando ambos não desviam, logo foi atribuído um resultado com maior perda. Outra fonte de análise pode ser feita quando ambos decidem desviar. Este não é um resultado tão ruim quanto “*não desviar*” para ambos, mas ainda não traria a vitória para qualquer um dos jogadores.

Neste caso, podemos perceber claramente que há dois equilíbrios de Nash: (desvia, não desvia) e (não desvia, desvia). Ou seja, se um dos jogadores (João ou Pedro) opta por não desviar o carro, então o outro tem que fazê-lo, para não cair na pior configuração possível.

#### 4.7. Le Her - Introdução

Como foi ressaltado, *Le Her* é um jogo de cartas francês, que iniciou o estudo da Teoria dos Jogos. Em suma, este consiste:

Descrição do jogo: 13 cartas de um mesmo naipe são embaralhadas. São elas com seus respectivos valores: Ás, um; dois; três; quatro; cinco; seis; sete; oito; nove; dez; Valete, onze; Dama, doze; Rei, treze.

No início do jogo, o jogador I recebe uma carta X, que apenas ele vê, o jogador II recebe uma carta Y que apenas ele vê e uma carta Z é colocada sobre a mesa, que ninguém vê. O jogador I joga primeiro: ele deve decidir se mantém a sua carta X ou se troca com a carta Y, no segundo caso, o jogador II não pode se recusar a fazer a troca. Depois é a vez do jogador II: ele deve decidir se mantém a sua carta ou a troca com a carta Z. Ganha quem tiver a carta de maior valor. SOBRINHO (2013, p. 22)

A análise deste jogo não será foco deste trabalho, que serviu apenas como introdução por ter a sua importância na história da Teoria dos Jogos.

#### 4.8. Pôquer

Alguns atribuem a origem do Pôquer à Dinastia Song (China), do século 10, enquanto outros apontam seu começo com o jogo persa, “As Nas”, do século 16, que pode ter sido ensinado aos europeus pelos marinheiros persas.

Investigando o “As Nas”, houve a percepção de ser um jogo muito semelhante ao Poker, onde há uma hierarquia de jogos e mãos familiares, como pares, trincas e full houses. CBTH (2020)<sup>18</sup>

O nome “Pôquer” pode ter advindo de outros jogos: “Poque” (em francês) ou o “Pochen” (em alemão), que significa “bater”.

Em torno de 1830 foram datados os primeiros arquivos que remetem ao Poker (em inglês), em Nova Orleans. Tais arquivos relatam que o jogo quase sempre era realizado com cerca de 20 cartas, apenas.

A história parece provar que a explosão do Pôquer se deu a partir deste momento, quando passou a figurar em barcos a vapor da região do rio Mississippi, migrando com os pioneiros da corrida ao ouro para Oeste norte-americano. Daí surge toda aquela mitologia em torno do Pôquer e de caubóis, que até hoje é utilizada em filmes, como “Maverick” e, em músicas estilo country. CBTH (2020)

---

<sup>18</sup> Confederação Brasileira de Texas Hold'em. Disponível em: <https://www.cbth.org.br/texas-holdem>. Acesso em: 19 outubro. 2020.

O Pôquer moderno nasceu no centro dos Estados Unidos e nessa época foi introduzido o baralho completo e criado o flush<sup>19</sup>, para depois inventarem o draw poker<sup>20</sup> e o stud de cartas<sup>21</sup>. Este só passou a tomar forma esportiva na década de 1970, com a criação da World Series of Poker (WSOP, 2020).

Pôquer é um jogo de cartas, disputado com o tradicional baralho de 52 cartas. Cada jogador tem por objetivo fazer a melhor combinação com 5 cartas, sendo geralmente apostado com fichas (pote). O jogador que conseguir a melhor mão ou que faça com que todos os jogadores desistam, ganha o pote.

O pôquer possui várias modalidades. Atualmente, a mais conhecida e jogada em todo mundo é o *Pôquer Texas Hold'em*. (CBTH, 2020)

Complexo a ponto de ser considerado um esporte da mente, como xadrez e bridge, ele atrai interessados por probabilidade e estatística, teoria de jogos e até psicologia. LOPES (2013)<sup>22</sup>

#### 4.8.1. Texas Hold'em

O Texas Hold'em é um jogo de pôquer com cartas comunitárias, jogado em mesas com 2 até 10 jogadores. Nessa modalidade cada jogador recebe apenas duas cartas fechadas (carta que somente o próprio jogador vê) e também há 5 cartas comunitárias, que são cartas abertas na mesa e utilizadas simultaneamente por todos os jogadores. Para ganhar você precisa fazer a melhor combinação possível de 5 cartas, dentre as 7 cartas. Assim, nem sempre as duas cartas da mão do jogador serão utilizadas para formar um jogo. EHLERT (2014, p. 268)

A seguir será apresentado o ranking das mãos possíveis no Texas Hold'em, em ordem decrescente de força (POKERSTARS, 2018).

---

<sup>19</sup> Uma combinação de 5 cartas do mesmo naipe.

<sup>20</sup> Modalidade do pôquer geralmente jogada por jogadores casuais, sendo mais rara à nível de competição.

<sup>21</sup> Modalidade do pôquer, também chamada de pôquer aberto, onde se possui uma certa quantidade de cartas abertas e fechadas.

<sup>22</sup> Disponível em: [https://istoe.com.br/321828\\_POQUER+NA+SALA+DE+AULA/](https://istoe.com.br/321828_POQUER+NA+SALA+DE+AULA/). Acesso em: 19 outubro. 2020.

De acordo com a CBTH (2020)<sup>23</sup> o ranking das mãos é dado por:

1. **Royal Straight Flush.** Sequência de dez (T) até Ás (A), sendo todas as cartas do mesmo naipe. É a única mão imbatível no pôquer.



Figura 19 - Exemplo de Royal Straight Flush  
Fonte: Página CBTH-23

2. **Straight Flush.** Qualquer sequência de cartas iguais ou do mesmo naipe.

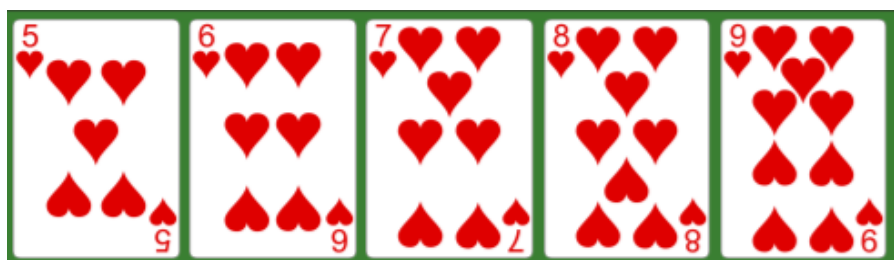


Figura 20 - Exemplo de Straight Flush  
Fonte: Página CBTH-23

3. **Quadra.** Quatro cartas iguais.

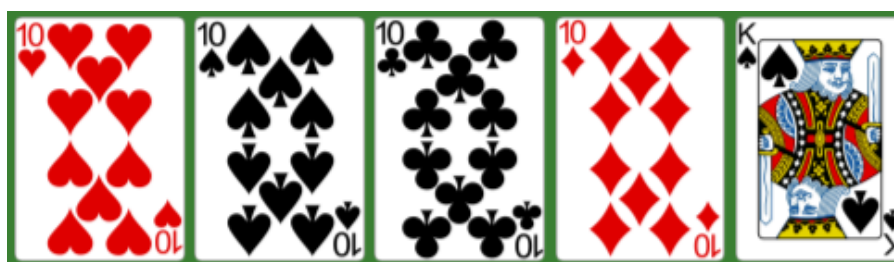


Figura 21 - Exemplo de Quadra  
Fonte: Página CBTH-23

<sup>23</sup> Disponível em: [https://www.cbth.org.br/texas-holdem-regras#:~:text=Ranking%20de%20m%C3%A3os&text=Lembrando%20que%20a%20menor%20carta,a%20maior%20%C3%A9%20o%20%C3%A1s.&text=Sequ%C3%Aancia%20de%20dez\(T\)%20a,%C3%BAnica%20m%C3%A3o%20imbat%C3%ADvel%20no%20poker.&text=Qualquer%20sequ%C3%Aancia%20de%20cartas%20iguais](https://www.cbth.org.br/texas-holdem-regras#:~:text=Ranking%20de%20m%C3%A3os&text=Lembrando%20que%20a%20menor%20carta,a%20maior%20%C3%A9%20o%20%C3%A1s.&text=Sequ%C3%Aancia%20de%20dez(T)%20a,%C3%BAnica%20m%C3%A3o%20imbat%C3%ADvel%20no%20poker.&text=Qualquer%20sequ%C3%Aancia%20de%20cartas%20iguais). Acesso em: 19 outubro. 2020.

4. **Full House.** Uma trinca e uma dupla.

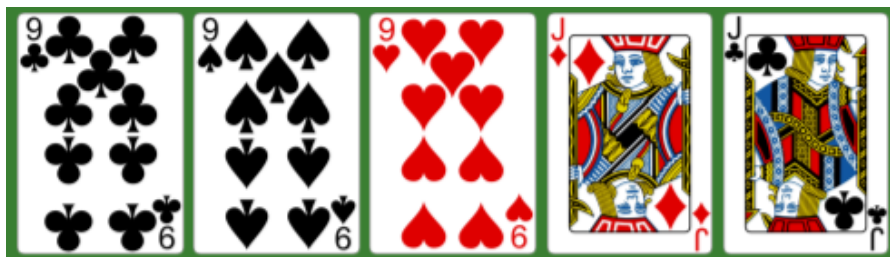


Figura 22 - Exemplo de Full House  
Fonte: Página CBTH-23

5. **Flush.** Quaisquer cinco cartas do mesmo naipe.

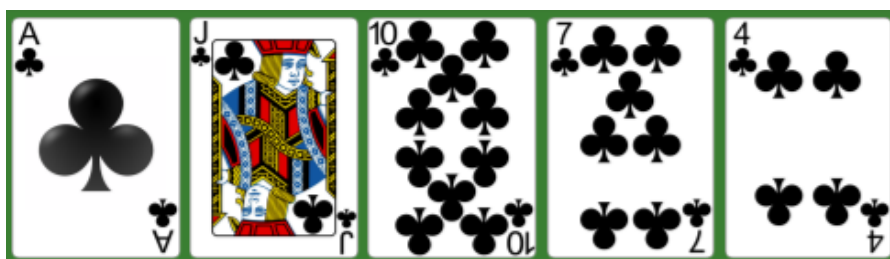


Figura 23 - Exemplo de Flush  
Fonte: Página CBTH-23

6. **Sequência.** Cinco cartas em sequência, não sendo do mesmo naipe.



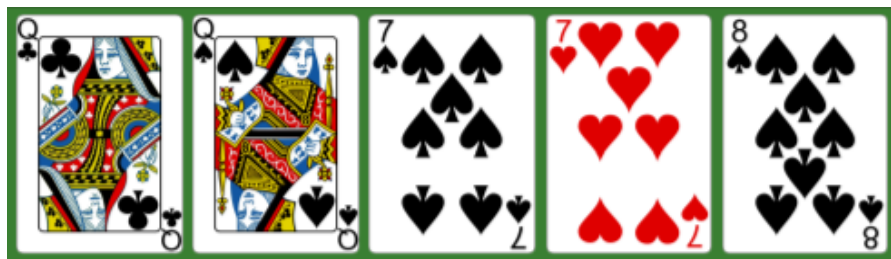
Figura 24 - Exemplo de Sequência  
Fonte: Página CBTH-23

7. **Trinca.** Três cartas iguais.



Figura 25 - Exemplo de Trinca  
Fonte: Página CBTH-23

8. **Dois Pares.** Duas duplas de cartas iguais.



**Figura 26** - Exemplo de Dois Pares  
Fonte: Página CBTH-23

9. **Par.** Duas cartas iguais.



**Figura 27** - Exemplo de Par  
Fonte: Página CBTH-23

10. **Carta Alta.** Qualquer mão que não esteja nas categorias acima.



**Figura 28** - Exemplo de Carta Alta  
Fonte: Página CBTH-23

Com base nisso, serão apresentados alguns cálculos referentes as possibilidades e as probabilidades do ranking das mãos do Texas Hold'em, e o cálculo da probabilidade de um jogo com dois jogadores, que foi tomada como referência da dissertação *A Matemática no Pôquer: Explorando problemas de probabilidade*, de Seldomar Jeske Ehlert (2014).

#### 4.8.1.1. Cálculo das possibilidades do ranking das mãos do Texas Hold'em

**1. Royal Straight Flush.** Como o baralho tradicional possui 4 naipes (paus, ouros, copas e espadas), existem 4 sequências possíveis para o Royal Straight Flush.

**2. Straight Flush.** Para o Straight Flush, consideramos as sequências de cinco cartas do mesmo naipe com exceção do caso acima. Dessa forma, para cada naipe terão 9 possibilidades de sequências. Logo existem  $4 \cdot 9 = 36$  possibilidades para o Straight Flush.

**3. Quadra.** Como existem 13 cartas de cada naipe, há 13 possibilidades de se ter uma *quadra*. Como o jogo é formado com 5 cartas, a quinta terá 48 possibilidades, não podendo ser as 4 cartas da quadra. Logo, existem:  $13 \cdot 48 = 624$  possibilidades para a Quadra.

**4. Full House.** Para cada trinca, tem-se:  $C_4^3 = 4$  trincas possíveis. Como há 13 cartas de um mesmo naipe, teremos:  $13 \cdot 4 = 52$  combinações possíveis para as trincas.

Para cada dupla, tem-se:  $C_4^2 = 6$  duplas possíveis. Como há 12 cartas (uma a menos devido à trinca formada), então temos:  $12 \cdot 6 = 72$  combinações possíveis para as duplas.

O Full House precisa de uma trinca e uma dupla, logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, haverá:  $52 \cdot 72 = 3744$  possibilidades para o Full House.

**5. Flush.** Para se ter 5 cartas do mesmo naipe, temos:  $C_{13}^5 = 1287$  possibilidades de Flush para cada naipe. Como há 4 naipes:  $4 \cdot 1287 = 5148$  Flushs no baralho, mas o Royal Straight Flush e o Straight Flush não fazem parte do Flush, logo:  $5148 - 36 - 4 = 5108$  possibilidades para o Flush.

**6. Sequência.** Há 10 sequências possíveis (de *A-2-3-4-5* a *10-J-Q-K-A*) em um mesmo naipe. Como há 4 naipes, para cada carta (da sequência) tem 4 possíveis escolhas, assim:  $10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 10240$  escolhas possíveis de Sequência. Como foi feito no caso anterior, o Royal Straight Flush e o Straight

Flush não fazem parte da Sequência, logo:  $10240 - 36 - 4 = 10200$  possibilidades para a Sequência.

**7. Trinca.** Para a trinca, como já foi calculado, existem 52 combinações possíveis. Agora devem ser escolhidas as 2 cartas remanescentes dentre as 48 cartas restantes, ou seja:  $C_{48}^2 = 1128$  possibilidades. Logo, o total de combinações será  $52 \cdot 1128 = 58656$  possibilidades.

Descartando o Full House, temos:  $58656 - 3744 = 54912$  possibilidades para a Trinca.

**8. Dois Pares.** Em um naipe, há:  $C_{13}^2 = 78$  duplas diferentes para Dois Pares. Para cada dupla há:  $C_4^2 = 6$  possibilidades. Como existem duas duplas, tem-se:  $6 \cdot 6 = 36$  possibilidades de formar duas duplas.

Para a última carta teremos 44 possibilidades de escolha. Assim, teremos:  $78 \cdot 36 \cdot 44 = 123552$  possibilidades para Dois Pares.

**9. Um Par.** Para cada par tem-se:  $C_4^2 = 6$  combinações possíveis. Como existem 13 cartas de cada, então terá:  $13 \cdot 6 = 78$  formas distintas de par. Para a terceira carta tem-se 48 possibilidades de cartas; para a quarta, 44; e para a quinta, 40. Como a ordem das três cartas (terceira, quarta e quinta) não importa, então o produto do resultado encontrado terá que ser dividido pela permutação de 3 (por serem 3 cartas). Assim:  $78 \cdot (48 \cdot 44 \cdot 40) / 6 = 1098240$  possibilidades para Um Par.

**10. Carta Alta.** Para descobrir o número de possibilidades de se tirar a mão Carta Alta, basta calcular a combinação de 52 (número total de cartas no baralho) em 5 (número de cartas de um jogo no Texas Hold'em):  $C_{52}^5 = 2598960$ .

Agora, basta tirar todas as mãos citadas anteriormente:  $2598960 - (4 + 36 + 624 + 3744 + 5108 + 10200 + 54912 + 123552 + 1098240) = 1302540$  possibilidades para a Carta Alta.



#### 4.8.1.2. Cálculo das probabilidades do ranking das mãos do Texas Hold'em

Como no baralho há 52 cartas, e partir dessas 5 são selecionadas, ao acaso, o espaço amostral, em todas as mãos, será:  $C_{52}^5 = 2598960$ .

**1. Royal Straight Flush.** Dessa forma, pelo tópico anterior, a probabilidade de se tirar um Royal Straight Flush é:

$$P(\text{Royal Straight Flush}) = \frac{4}{2598960} \approx 0,0001539\%.$$

**2. Straight Flush.** Tomando o número de possibilidades do tópico acima, tem-se que a probabilidade do Straight Flush é:

$$P(\text{Straight Flush}) = \frac{36}{2598960} \approx 0,001385\%.$$

**3. Quadra.** De forma análoga, a probabilidade da Quadra é:

$$P(\text{Quadra}) = \frac{624}{2598960} \approx 0,024\%.$$

**4. Full House.** A probabilidade do Full House é:

$$P(\text{Full House}) = \frac{3744}{2598960} \approx 0,144\%.$$

**5. Flush.** O Flush tem como probabilidade:

$$P(\text{Flush}) = \frac{5108}{2598960} \approx 0,1965\%.$$

**6. Sequência.** A probabilidade da Sequência é:

$$P(\text{Sequência}) = \frac{10200}{2598960} \approx 0,3925\%.$$

**7. Trinca.** A Trinca tem como probabilidade:

$$P(\text{Trinca}) = \frac{54912}{2598960} \approx 2,1128\%.$$

**8. Dois Pares.** A probabilidade de Dois Pares é:

$$P(\text{Dois Pares}) = \frac{123552}{2598960} \approx 4,7539\%.$$

**9. Um Par.** Um Par tem como probabilidade:

$$P(\text{Um Par}) = \frac{1098240}{2598960} \approx 42,2569\%.$$

**10. Carta Alta.** Por fim, a probabilidade de sair uma Carta Alta é:

$$P(\text{Carta Alta}) = \frac{1302540}{2598960} \approx 50,1177\%.$$

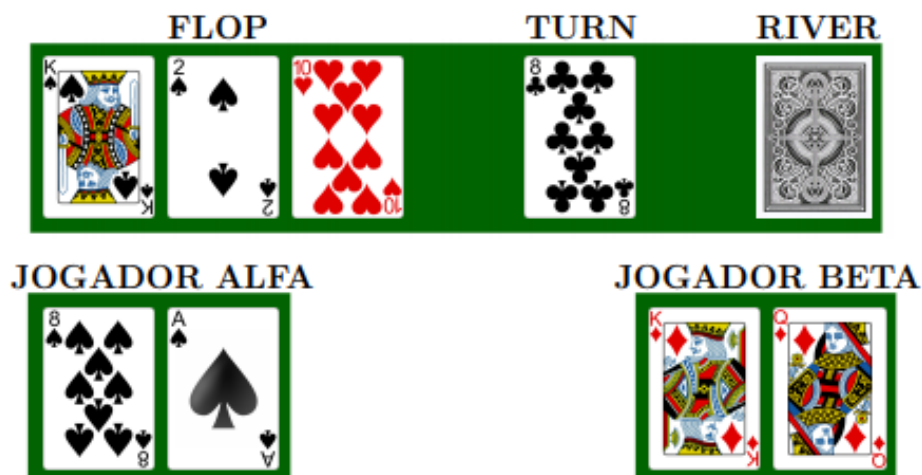
#### 4.8.1.3. Cálculo da probabilidade de uma partida do Texas Hold'em

Neste tópico será abordado, um caso particular de um jogo de Pôquer, para que assim seja calculada as probabilidades de vitória de cada uma das mãos e a melhor decisão a ser tomada, com base na Teoria dos Jogos. Este é um modelo de **partida com dois jogadores**. E ainda está sendo considerado o caso onde o *River* (última carta a ser revelada) está oculto.

Não serão feitas análises com configurações distintas do jogo, pois isto o tornará relativamente complexo, aumentando muito o número casos e de análises que terão que ser feitas.

#### Exemplo de Partida com dois jogadores

Analisemos o seguinte jogo:



**Figura 29** - Partida entre dois jogadores<sup>24</sup>  
 Fonte: EHLERT, 2014.

A partir do momento em que o *Turn*<sup>25</sup> foi revelado, ambos os jogadores (alfa e beta) possuem um par: *jogador alfa* (par de oito) e *jogador beta* (par de rei). Para que o *jogador alfa* ganhe será necessário que no *River* tenha um ás, sendo possível formar *dois pares*; ou um *oito*, formando *uma trinca*; ou ainda uma carta de *espada*, podendo formar *um flush*. Dessa forma, a probabilidade de o *jogador alfa* vencer é:

$$P(\text{jogador alfa}) = \frac{14}{44} \approx 31,82\%$$

Como o jogo possui apenas dois jogadores, então a probabilidade de o *jogador beta* vencer é:

$$P(\text{jogador beta}) = 1 - \frac{14}{44} \approx 68,18\%$$

Desta forma, é possível perceber que a melhor estratégia para o jogador alfa é encerrar a sua jogada, pois suas chances de vitória são consideravelmente menores do que as do jogador beta, minimizando suas perdas. Em contrapartida, se o jogador beta continuar no jogo, esperando virar o River, ele terá grandes chances de vencer a partida.

<sup>24</sup> Flop é o conjunto das três primeiras cartas comunitárias.

<sup>25</sup> A quarta carta comunitária.

# METODOLOGIA/PROPOSTA DE ENSINO

---

## 5.1. Considerações Iniciais

Segundo JESUS (2010, p. 3), a palavra jogo foi originada do latim “incus”, que quer dizer diversão, brincadeira. Nos nossos dicionários as definições mais comuns são: “distração, passatempo, divertimento”.

Jogos, de um modo geral, fazem sucesso, inclusive com adolescentes. Desde brincadeiras na rua a consoles<sup>26</sup> é possível perceber que jogos estão presentes diretamente na rotina de muitos.

No Brasil, a difusão dos computadores pessoais deu-se nos anos 90 (Godoy, 1996). Ao final de 2000, eram 11 milhões os computadores instalados e 10 milhões de usuários conectados à internet, dos quais quase um milhão eram adolescentes (Nogueira, Vargas e Nathan, 2000). Apesar de parcela pequena da população, trata-se de grande número de crianças e adolescentes apropriando-se das novas tecnologias, muitos possivelmente tendo os jogos computadorizados como porta de entrada Greenfield, 1984/1988; Retschitzki & Gurtner, 1995; Sangiorgi, 1988). WOFF; WECHSLER (2002, p. 60).

As aulas puramente expositivas, bem como métodos tradicionais de ensino, conhecidos como “Educação Bancária” por Paulo Freire, estão cada vez mais perdendo espaço. Assim, quando se insiste neste método, muitos alunos vão perdendo o interesse pelo conteúdo, ou até mesmo pela disciplina, prejudicando consideravelmente seu desempenho escolar, como defende Lins:

Tratar-se-ia de uma atitude autoritária e opressiva sobre alunos que se encontrariam passivos e apenas receptivos dos conteúdos e informações que o professor neles depositaria. Este modelo tende a apresentar o professor como alguém que exerce um papel arbitrário sobre o grupo de alunos, os quais estão inteiramente inertes. Desta

---

<sup>26</sup> Videogames.

forma, a prática de se ensinar conteúdos e informar os alunos para que a aprendizagem seja realizada vem sendo entendida como uma atitude tirânica e opressora que deve ser banida das escolas. LINS (2011, p. 2).

Dessa forma, o objetivo deste capítulo é propor métodos de tornar a Matemática mais atrativa, podendo estes (métodos) até ser um fator motivacional para alguns estudantes.

Neste será visada uma forma de se abordar alguns conteúdos por meio de jogos matemáticos para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio, bem como planos de aulas sequenciais que podem orientar de uma forma mais clara a prática docente, que porventura foram aplicados numa turma que leciono na escola estadual de ensino fundamental e médio Francisco Nascimento, que se localiza no município da Serra, Espírito Santo.

Vale ressaltar que na sequência didática, cada plano de aula apresentado a seguir, foi pensado para aulas de 55 minutos de duração, já que é uma realidade da escola em que trabalho.

## **5.2. Sequência Didática**

### **Aula 1: Explicação sobre Teoria dos Jogos**

**A.1.** Nesta primeira aula, fazer um apanhado sobre Teoria dos Jogos, começando pelo aspecto histórico, sendo considerados os fatos mais relevantes de cada período: (*tempo de aula: aproximadamente 25 minutos*)

- Comentar sobre o *Le Her*, primeiro jogo estudado pela Teoria dos Jogos, juntamente de: como, quando e quem forneceu a primeira solução para o jogo;
- Comentar o primeiro teorema da Teoria dos Jogos;
- Salientar a primeira obra publicada sobre o assunto, *The Theory of Games and Economic Behaviour*;
- Destacar a importância de John Forbes Nash Jr e Reinhard Selten, que receberam o prêmio Nobel por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

- B.1.** Explicar as definições de Jogo e Teoria dos Jogos, respectivamente, e em seguida, exemplificar com alguns Jogos (Dilema dos Prisioneiros e Chicken Game). Por fim, abordar o Equilíbrio de Nash, e qual é o equilíbrio em cada jogo comentado. *(tempo de aula: aproximadamente 30 minutos)*.

### **Aula 2: Jogo de Nim: Prática**

- A.2.** Explicar as regras e o objetivo do jogo. Separar os alunos em duplas e deixá-los jogar. A princípio, todas as duplas jogarão com as mesmas configurações: 3 pilhas de palitos (a primeira com 4; a segunda com 5; e a terceira com 7). *(tempo de aula: aproximadamente 20 minutos)*
- B.2.** Explanar os Números Binários: definição e exemplos (utilizados no desenvolvimento deste trabalho); soma de Nim e propriedades. Em seguida, abordar a Divisão Euclidiana na transformação de um número na base 10 para um número binário. *(tempo de aula: aproximadamente 35 minutos)*.

### **Aula 3: Análise do Jogo de Nim**

- A.3.** Relacionar o jogo de Nim com os Números Binários por meio dos teoremas enunciados no capítulo 2 – Números Binários. *(tempo de aula: aproximadamente 15 minutos)*.
- B.3.** Com as mesmas configurações da aula passada, fazer com que os alunos joguem novamente o jogo de Nim, analisando-o e utilizando a estratégia vencedora. *(tempo de aula: aproximadamente 25 minutos)*.
- C.3.** Pedir para que os alunos, em dupla, respondam a um questionário sobre o Jogo de Nim: *(tempo de aula: aproximadamente 15 minutos)*.
- A ordem de quem joga influencia na vitória/derrota?, Quem começa, ganha?
  - Existe algum padrão? (Jogadas que sempre aparecem)

- Tem alguma forma de vencer sempre? (Estratégia vencedora)
- O número de palitos em cada pilha interfere no jogo?
- Qual(is) conteúdo(s) matemático(s) é possível ser observado nesse jogo?
- Você acredita que jogos como esse motivam/estimulam no processo ensino-aprendizagem da Matemática?

#### **Aula 4: Pôquer: Teoria e Prática**

**A.4.** Explicar os fatos históricos do Pôquer, destacando as curiosidades e aspectos mais relevantes: (*tempo de aula: aproximadamente 15 minutos*).

- Explicar as possíveis origens do Pôquer juntamente com a origem do seu nome;
- Abordar as diferentes modalidades de Pôquer existentes, ressaltando a mais jogada a nível profissional (Texas Hold'em);

**B.4.** Comentar a variedade de jogos de Pôquer, ressaltando o jogo englobado neste trabalho: Texas Hold'em. Além disso, enfatizar o ranking das mãos no Texas Hold'em para que os alunos, em grupos de 3, possam jogar, enfim. Qualquer material pode ser usado para simbolizar as fichas para as apostas, já que o objetivo desta aula são as mãos encontradas, e não as apostas em si. Ainda, pedir para que cada aluno anote a sua mão, ao final de cada jogo, além do jogador vencedor. (*tempo de aula: aproximadamente 40 minutos*).

#### **Aula 5: Cálculo do número de possibilidades das mãos vencedoras**

**A.5.** Revisar o conteúdo de Análise Combinatória (Princípio Multiplicativo e Combinação) com os alunos, tomando os exemplos que foram usados no desenvolvimento deste trabalho. (*tempo de aula: aproximadamente 25 minutos*).

- B.5.** A partir do que foi lembrado, propor que os alunos calculem o número de possibilidades das mãos vencedoras da aula anterior. (*tempo de aula: aproximadamente 30 minutos*).

**Aula 6: Cálculo da probabilidade das mãos vencedoras e cálculo da probabilidade de outros jogadores vencerem**

- A.6.** Revisar o conteúdo de Probabilidade (definição, probabilidade da união de dois conjuntos e probabilidade condicional), assim como já foi explanado. (*tempo de aula: aproximadamente 30 minutos*).
- B.6.** Tomando como base o que foi explanado, reorganizar os alunos nos mesmos grupos, fazer com que cada grupo calcule a probabilidade das mãos vencedoras. (*tempo de aula: aproximadamente 10 minutos*).
- C.6.** Explicitar a probabilidade dos outros jogadores (alunos) vencerem, quando estavam jogando na aula anterior. (*tempo de aula: aproximadamente 15 minutos*).

**5.3. Avaliação da Sequência Didática**

A avaliação das aulas foi feita de forma processual, onde a cada aula os alunos davam contribuições, pontuando o que consideravam relevante, esclarecendo as dúvidas que surgiam no decorrer do processo. Jogos foram realizados durante as aulas para que os alunos pudessem conciliar teoria à prática, fazendo da participação/comprometimento um instrumento avaliativo.

Ainda no final de um deles, os alunos responderam a uma atividade: para o Jogo de Nim, foi elaborado um questionário a respeito deste e da teoria abarcada em sala. Para o Pôquer, foi feita uma roda de conversa, onde os alunos apontaram suas convicções e pensamentos a respeito do Jogo.



#### 5.4. Resultado e Análise de Dados

Todo planejamento foi elaborado com o intuito de englobar toda a turma de terceiro ano que lecionei, e escolhi para aplicar a proposta, uma turma com um total de 22 alunos.

Por se tratar de um planejamento diferenciado, houve um comprometimento muito benéfico por parte de todos, com diversos questionamentos.

Na primeira aula, *Explicação sobre Teoria dos Jogos*, durante cada exemplo, os alunos se envolveram e interagiram com afinco. O que mais me chamou a atenção num dos exemplos abordados nesta aula foi que no *Dilema dos Prisioneiros*, pelo menos 50% dos alunos acreditaram que “não confessar” era a melhor opção. Estes não conseguiam usar da razão, somente, e acabaram utilizando de argumentos com base na emoção, por exemplo: “Mas se fosse meu amigo, eu não iria conseguir confessar”.

Ao abordar a segunda aula, no primeiro contato com o Jogo de Nim, os alunos a cada nova configuração, observaram e conjecturaram hipóteses a respeito de como e quando ganhar o jogo.

Os alunos começaram a perceber que suas conjecturas estavam equivocadas na terceira aula, onde houve uma análise do Jogo de Nim, com uma abordagem da estratégia vencedora.

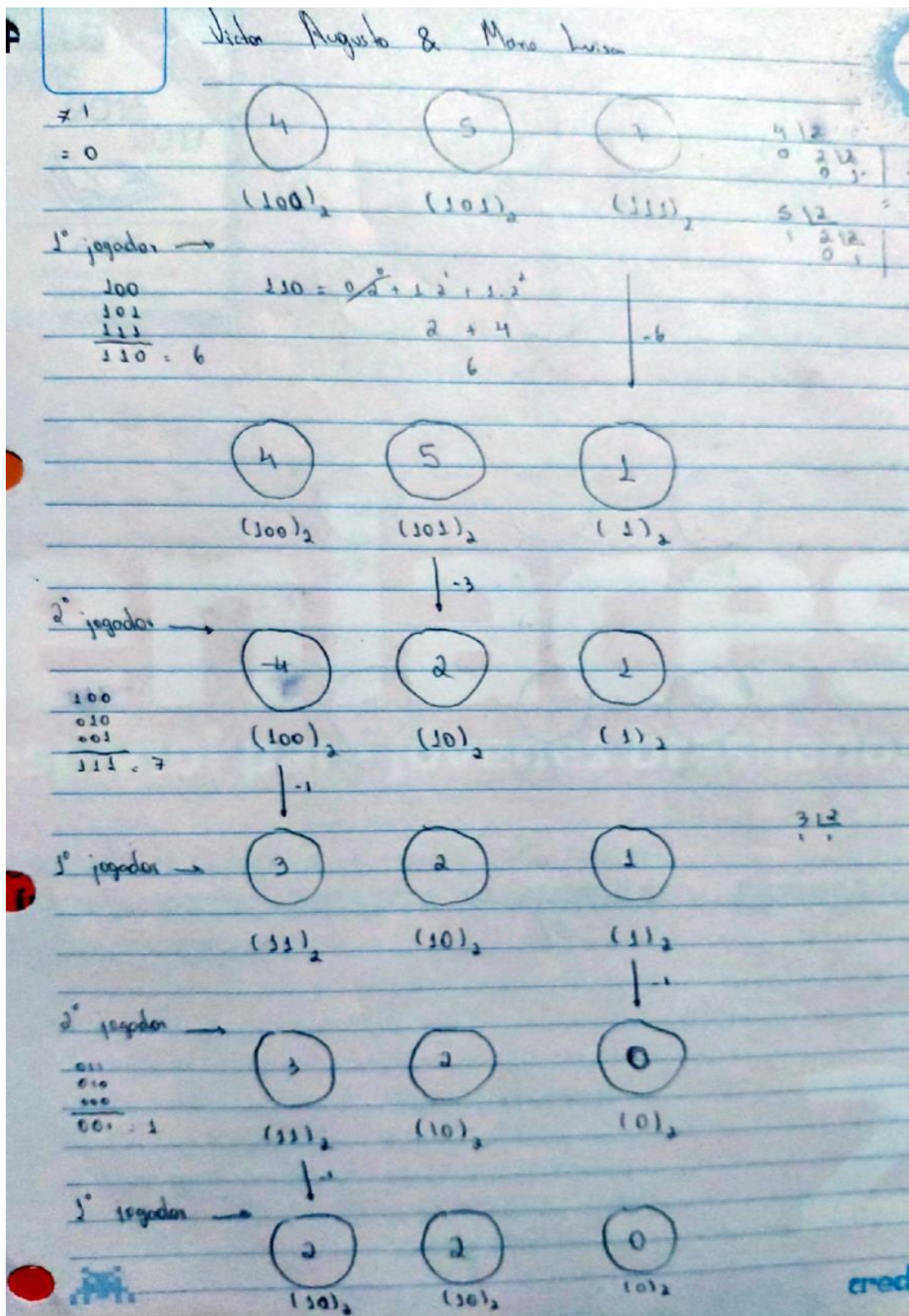
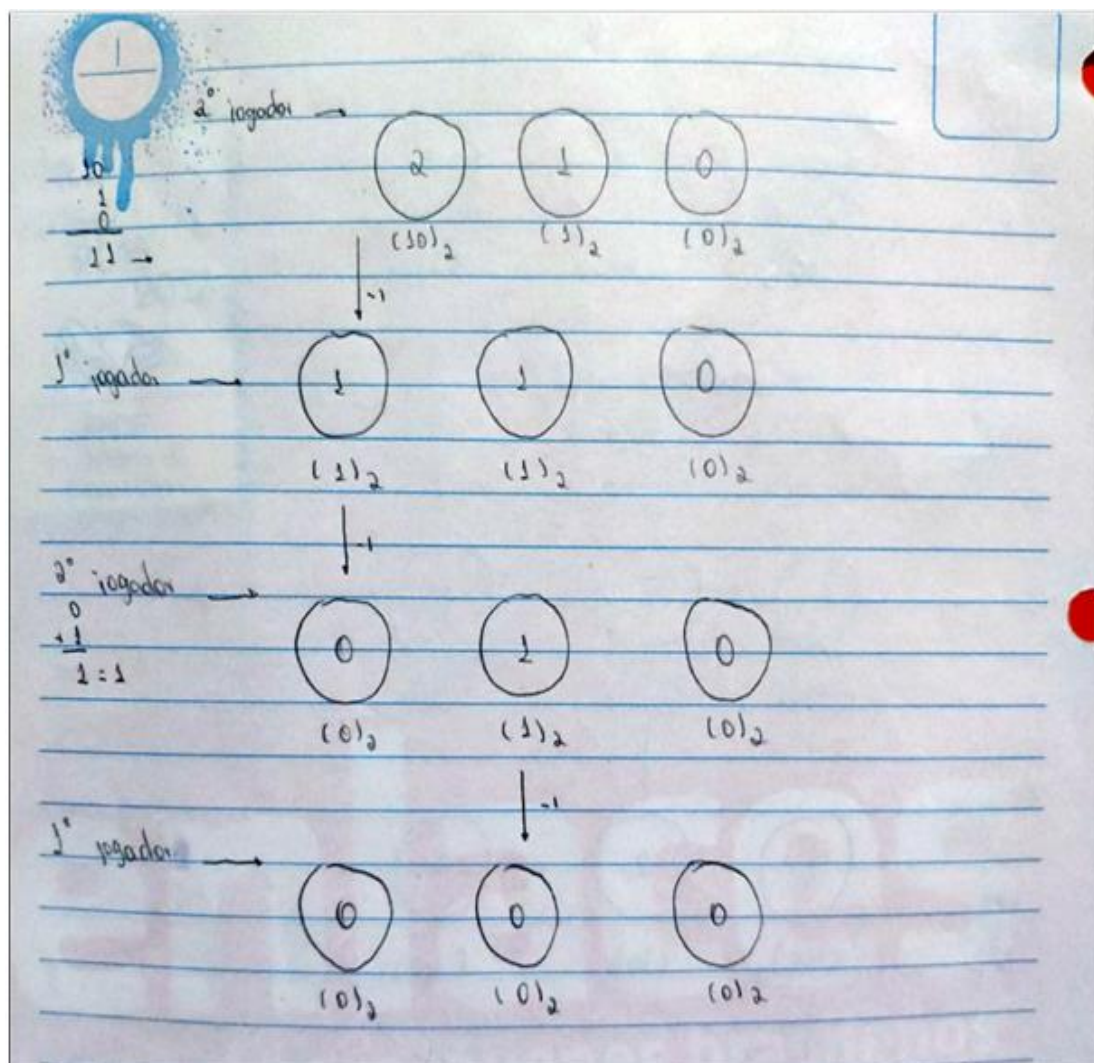


Figura 30- Estratégia vencedora - Grupo 1 (I)  
 Fonte: O autor (2020).

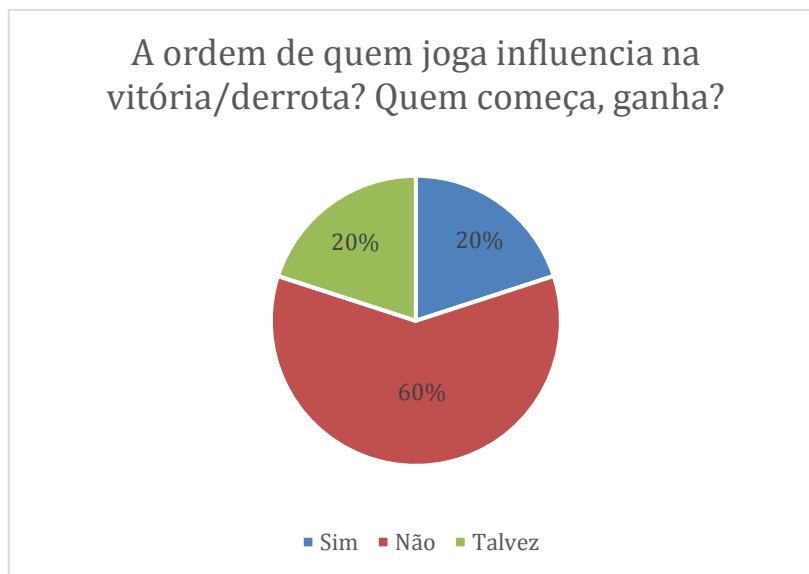


**Figura 31** - Estratégia vencedora - Grupo 1 (II)  
Fonte: O autor (2020).

Em posse desses conhecimentos, todos responderam a um questionário a respeito do Jogo e suas experiências.

Dos 22 alunos que estudam no 3M3, uma turma do terceiro ano do Ensino Médio do turno matutino, da escola estadual EEEFM “Francisco Nascimento”, apenas 15 responderam ao questionário, pois os demais ausentaram-se da aula no dia em que foi aplicado.

Na primeira questão, *A ordem de quem joga influencia na vitória/derrota? Quem começa, ganha?*, 20% dos alunos responderam *Sim*, 60%, *Não* e 20%, *Talvez*. Veja o gráfico abaixo.



Fonte: O autor (2020).

Mesmo com maior parte dos grupos respondendo *Não*, todos acreditaram que ganha o Jogo quem tiver a melhor estratégia.

A resposta de um grupo (Grupo 1) me chamou a atenção, pois os alunos fizeram uma análise anterior e posterior à explanação a respeito do Jogo de Nim:

O resultado entre duas pessoas que não sabem a estratégia do jogo não depende de quem começa, caso as duas pessoas saibam da estratégia, a pessoa que começa ganha. E por fim, caso somente uma pessoa saiba da estratégia é muito provável que a mesma ganhe mesmo sem começar. (Grupo 1)

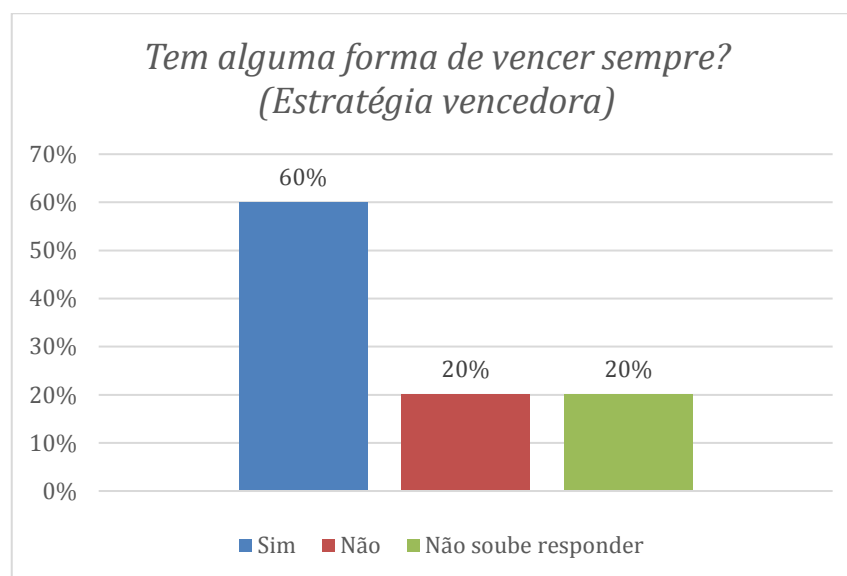
Para a segunda questão, *Existe algum padrão? (Jogadas que sempre aparecem)*, 100% dos alunos responderam que *Sim*. Como constatado, todos acreditaram que há algum padrão no Jogo, mas estes divergiram ao falar das jogadas que se repetiam:

No fim, muitas vezes ocorre de restarem dois palitos em dois montes ou apenas um palito. (Grupo 1).

Sim. Uma pilha sempre se encontrava com um número par e outra com um número ímpar de palitos, dependendo da ordem de jogada e o número de palitos pegos, decide-se quem ganha. (Grupo 2)

Na análise da terceira questão, *Tem alguma forma de vencer sempre? (Estratégia vencedora)*, foi observado uma configuração parecida com a

primeira pergunta: 60% respondeu que *Sim*, 20% que *Não* e 20%, *Não soube responder*. Observe a tabela a seguir.



Fonte: O autor (2020).

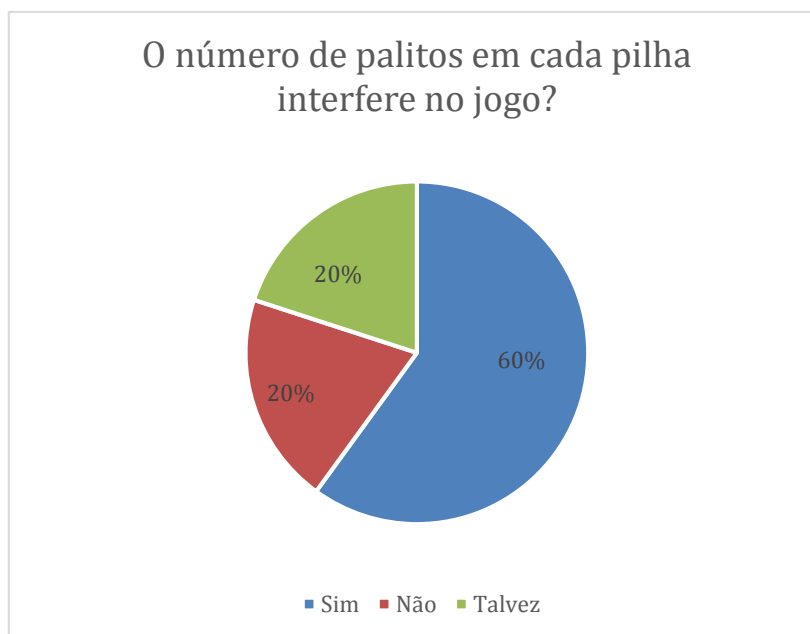
Dos dados tabulados, ressalto a resposta de um grupo (grupo 3) que respondeu *Não*:

Não, pois não tem como saber o que o outro jogador está pensando.  
(Grupo 3)

O restante que acredita existir uma estratégia vencedora, compartilham da ideia de que em determinado momento do Jogo haverá somente dois montes, com a mesma quantidade. Vale o destaque de um grupo (Grupo 1):

Primeiramente reduzindo a apenas dois montes e depois, de acordo com a jogada do adversário, manter em ambos os montes a mesma quantidade de palitos, até sobra um em cada, obrigando o adversário a retirar apenas um e você, o último. (Grupo 1)

A quarta questão, *O número de palitos em cada pilha interfere no jogo?*, também foi analisada de forma análoga, como pode ser observado no gráfico a seguir.

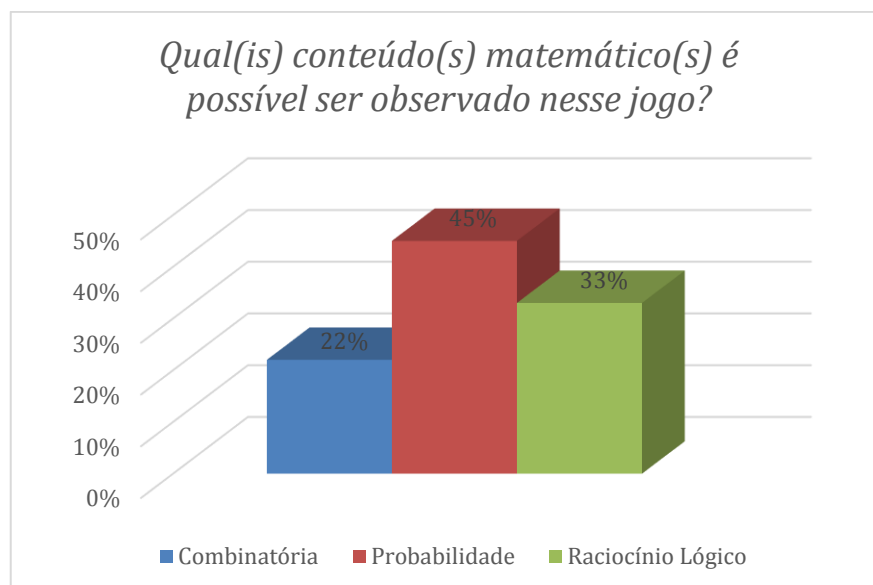


Fonte: O autor (2020).

Achei interessante uma resposta, pois retrata, de certa forma, as estratégias que foram utilizadas pelo grupo:

Sim. Porque dependendo da quantidade de palitos retirados, a pilha será liquidada com maior rapidez, quando uma pilha se dá por acabada, usa-se de estratégias para ganhar o jogo, como deixar uma pilha com número par e outra ímpar. (Grupo 2)

Acredito que a quinta questão, *Qual(is) conteúdo(s) matemático(s) é possível ser observado nesse jogo?*, seja a que tiveram maior dificuldade na hora de responder. Estes não conseguiram, tão facilmente, relacionar conteúdos que já haviam sido estudados com o Jogo. A tabela mostra como foi feita a identificação dos conteúdos.



Fonte: O autor (2020).

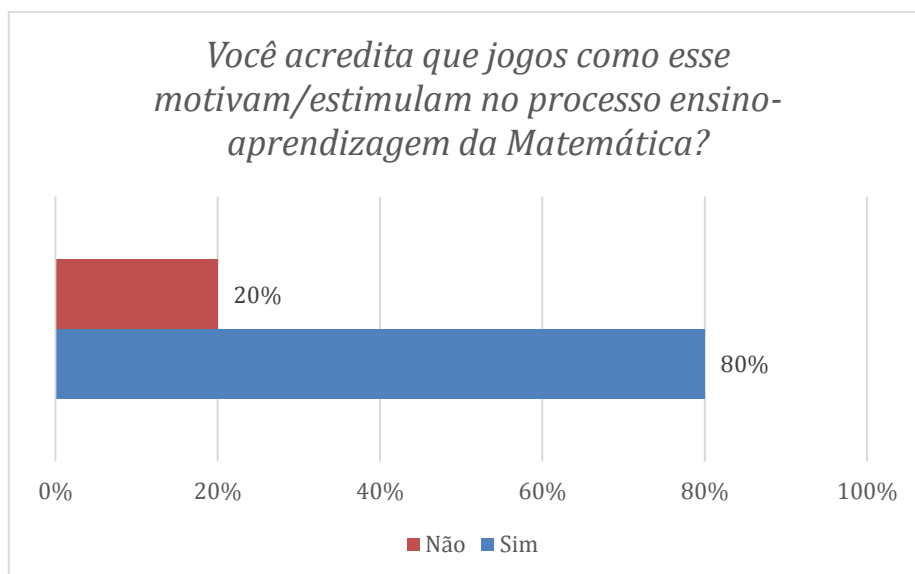
Destaco alguns (Grupos 1, 2 e 3) que além de apontarem o(s) conteúdo(s), explicaram onde cada um se encontra:

Probabilidade (as diferentes variantes de possibilidades de jogadas), Combinatória (o número de jogadas possíveis a cada jogada, além das diferentes disposições de palitos nos montes). (Grupo 1)

No jogo, além do emprego do raciocínio lógico, usa-se do conteúdo referente a Probabilidade, apontando de como com o raciocínio utilizado, quem da dupla irá ganhar o jogo. (Grupo 2)

Combinatória e probabilidade. Vemos que a matéria Combinatória aparece nas possibilidades de pegar os palitos e em Probabilidade as chances de ganhar. (Grupo 3)

A última questão analisada, *Você acredita que jogos como esse motivam/estimulam no processo ensino-aprendizagem da Matemática?*, considero que seja uma das questões mais importantes do questionário, pois acaba sendo o foco deste trabalho. Primeiramente, analisemos a tabela.



Fonte: O autor (2020).

Apenas um grupo (Grupo 4), que representa os 20%, respondeu *Não*. Dessa forma, destacarei a opinião deste:

Esse jogo estimula ao raciocínio lógico e a montar estratégias, porém não motiva o aluno de certa forma pois o jogo é para pontuar, mas por outro lado a aula diferente faz com que haja um interesse maior do aluno. (Grupo 4)

Em contrapartida, outro grupo (Grupo 1) ressaltou que:

Sim, pois as pessoas não se interessam muito pela matemática e os jogos tornam as aulas mais atrativas, melhorando o aprendizado. (Grupo 1)

Seguem dos questionários analisados nesta dissertação:



Jogo de NIM

- 1- Quem começa geralmente ganha?
- 2- Tem algum padrão? (jogadas que sempre aparecem).
- 3- Tem alguma forma de ganhar sempre? (Estratégia vencedora).
- 4- O número de "palitos" em cada pilha vai interferir no jogo?
- 5- Qual (quais) conteúdo(s) matemático(s) você observa nesse jogo?


1- O resultado entre duas pessoas que não sabem da estratégia do jogo não depende de quem começa, caso as duas pessoas saibam da estratégia, a pessoa que começa ganha. E por fim, caso somente uma pessoa saiba estratégia é muito provável que a mesma ganhe mesmo quem começa.

2- No fim, muitas vezes ocorre de restarem dois pilhas em dois montes ou apenas um pilha.

3- Primeiramente reduzindo a apenas dois montes e depois, de acordo com a jogada do adversário, manter em ambas os montes a mesma quantidade de pilhas, até sabermos um em cada, obrigando o adversário a retirar apenas um e você, o último.

4- Não, independente da quantidade a estratégia é a mesma, porém é necessário saber a quantidade de cada monte ao decorrer do jogo.

5- Probabilidade (As diferentes variantes de possibilidades de jogadas) Combinatória (O número de jogadas possíveis a cada jogada; além das diferentes disposições de pilhas nos montes)



credeal

Figura 32 - Questionário do Grupo 1 (I)  
Fonte: O autor (2020).

6- Você acredita que jogos deixo forma  
matiniam / estimulam no processo ensino - aprendizagem da  
matemática?

6- Sim, pois as pessoas não se interessam muito pela matemática  
e os jogos tornam as aulas mais atrativas, melhorando o aprendizado.

Vicini Augusto 3M3  
Maria Luisa

**Figura 33** - Questionário do Grupo 1 (II)  
Fonte: O autor (2020).

01/11/20

Sofia Mexgulbão e Maria Gabriela Souza Cordeiro

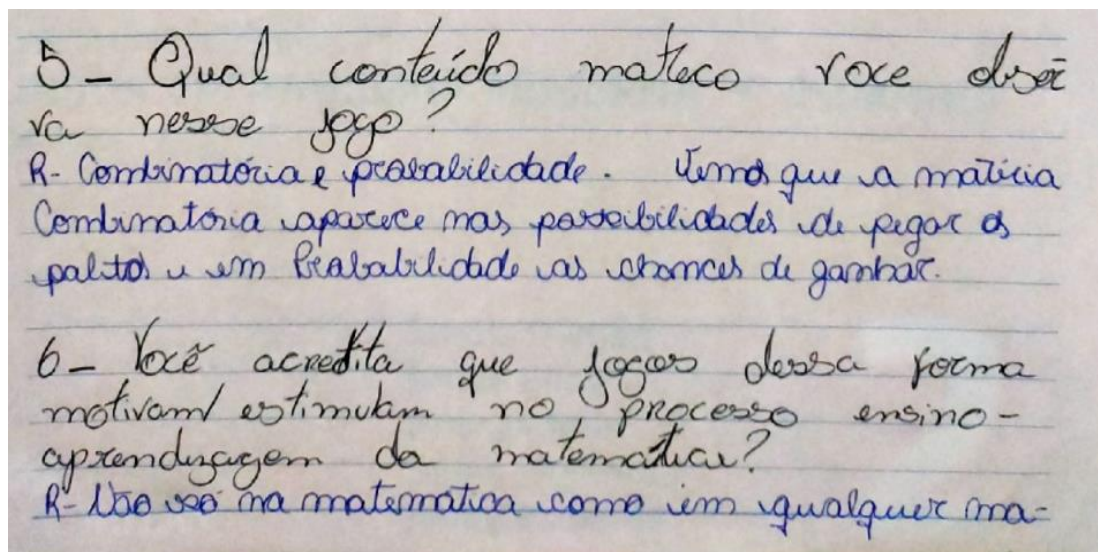
1 - Quem começa geralmente ganha?  
R- Não, tudo depende se o jogador tem ou não uma estratégia.

2 - Tem algum padrão? (Jogadas que sempre aparecem)  
R- Sim, ao estar duas pilhas um jogador decide o futuro do jogo.

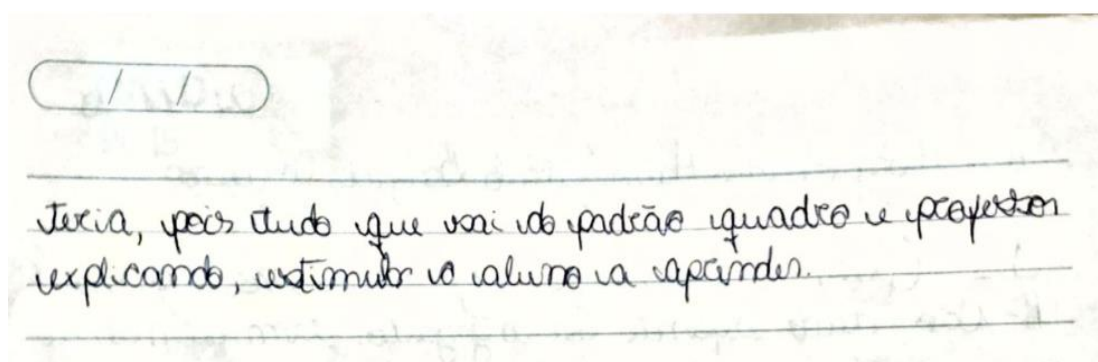
3 - Tem alguma forma de ganhar sempre? (Estratégia vencedora)  
R- Não, pois não tem como saber o que o outro jogador está pensando.

4 - O número de "palitos" em cada pilha vai interferir no jogo?  
R- Interfere a partir do momento que os jogadores escolhem quantas pilhas tirar.

**Figura 34** - Questionário do Grupo 3 (I)  
Fonte: O autor (2020)



**Figura 35** - Questionário do Grupo 3 (II)  
 Fonte: O autor (2020).



**Figura 36** - Questionário do Grupo 3 (III)  
 Fonte: O autor (2020).

Após a tabulação dos resultados do questionário, a atenção ficou voltada novamente à Sequência Didática, mais especificamente na quarta aula. Houve certa dificuldade nesta, pois muitos alunos não conheciam o Pôquer. Dessa forma, ao separar os grupos, priorizei que os alunos com alguma experiência no jogo fizessem grupo com quem não tivesse, para que todos pudessem participar da aula.

Em se tratando das aulas, as que os alunos tiveram maior dificuldade na hora de realizar as atividades foram as quinta e sexta aulas. Mesmo com os conteúdos lembrados (Análise Combinatória, na quinta aula e Probabilidade, na sexta aula), na hora de aplicar no Pôquer a teoria estudada, muitos grupos

precisaram de auxílio. Houve mais dúvida na hora de fazer o cálculo tanto do número de possibilidades quanto da probabilidade das mãos de cada jogador.

Ao findar a Sequência Didática, uma análise de todo o processo foi feita junto à turma. Cada etapa foi questionada por mim (em especial as que eles apresentaram maior dificuldade), e conseqüentemente avaliada pelos alunos em uma roda de conversa, para que assim eu pudesse ter um feedback mais efetivo.

A turma, de um modo geral, achou boa a divisão das aulas da Sequência Didática, porém ressaltaram que deveria haver uma abordagem maior do Pôquer, não ficando restrito a uma aula. Dessa forma, eles conseguiriam compreender melhor o jogo e não teriam tanta dificuldade nas 5ª e 6ª etapas da Sequência. Outro ponto que foi levantado foi que atividades deste tipo “chamam a atenção dos alunos para as aulas”, despertando maior interesse pelos conteúdos estudados e pela disciplina.

## **5.5. Considerações Finais**

Vale ressaltar alguns pontos a respeito deste capítulo, a começar pela sequência didática. Acredito que para a aula 5: *Cálculo do número de possibilidades das mãos vencedoras* e para a aula 6: *Cálculo da probabilidade das mãos vencedoras e cálculo da probabilidade de outros jogadores vencerem*, seria necessário um tempo maior na abordagem dos conteúdos, e respectivamente, do Pôquer, já que houve certa dificuldade na hora de colocar em prática. Além disso, assim como foi feito no Jogo de Nim, um questionário sobre o pôquer também poderia ter sido aplicado.

Outro ponto de análise é a seção 6.4 *Resultado e Análise de Dados*. O questionário a respeito do Jogo de Nim foi muito proveitoso, pois com base nele foi possível observar alguns pontos relevantes: parte dos alunos, mesmo após a explicação do Jogo e da estratégia vencedora, ainda tinham dificuldade em aplicá-la, e conseqüentemente, encontrar uma relação entre a Teoria dos Jogos e o que estava sendo executado; com base nisso, algumas aulas a mais poderiam ter sido aproveitadas para uma abordagem maior do Jogo. Com base nas respostas dos questionários foi possível observar que alguns pensam que

o Jogo não serve como fator motivacional dos alunos, mas que aulas diferenciadas, como as que tinham sido realizadas, estimulam a participação, fomentando a que os alunos saiam do papel passivo e passem para o ativo, estimulando a aprendizagem, mesmo aos poucos, fazendo com que eles se sintam parte dessa construção teórico-prática. De um modo geral, os alunos se envolveram com o Jogo, procurando por uma estratégia vencedora, mesmo se tivessem com uma configuração desfavorável.

Aplicada a sequência didática, penso que a turma, em sua maioria, passou a ter maior comprometimento, não só com as atividades realizadas durante as aulas relacionadas à sequência, mas com outras subsequentes. Em sala, esses passaram a questionar mais, cobrando contextualizações e interdisciplinarização.

Esta foi a primeira vez que apliquei esta Sequência, pois alguns fatos contribuem negativamente, dificultando que atividades como essa sejam abordadas: na escola em que trabalho, EEEFM “Francisco Nascimento”, com exceção da turma em que apliquei a Sequência abordada neste trabalho, todas as outras salas têm pelo menos 40 alunos (as vezes até mais), sendo complicado, ao elaborar uma atividade diferenciada, fazer com que os alunos foquem em cada etapa, realizar o que for proposto, e para o professor, dar um atendimento para cada aluno.

Um outro fato que dificulta na aplicação de propostas como esta é o excesso de conteúdos que devem ser abordados no Currículo Base da Rede Estadual, em cada ano. Dessa forma, o tempo, muitas vezes, torna-se curto para a demanda que é exigida, pois a todo momento é necessário retomar conteúdos, que já foram estudados, para que os alunos compreendam o que deseja ser ensinado.

# REFERÊNCIAS

---

- ABRANTES, M. L. **A Teoria dos Jogos e os oligopólios**. Luanda: Faculdade de Direito de Luanda/Universidade Agostinho Neto, 2004. 120p.
- BERTI, N. M. **O Ensino de Matemática no Brasil: buscando uma compreensão histórica**. UEPG. 2005.
- BONTEMPO, M. T. **Teoria dos jogos aplicada à contabilidade**. São Paulo: FEA/USP. 1997.
- BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME-USP;1996.
- CARVALHO, G. O. D. **A Teoria dos Jogos, o Equilíbrio de Nash e o código de Processo Civil de 2015**. Belo Horizonte: FUMEC-FCH, 2017.
- CHAMPION, D. J. **Sociologia das organizações**. São Paulo: Saraiva, 1985.
- D'AMBROSIO, U. **Educação para uma sociedade em transição**. 2. Ed. Campinas: Papirus, 2001. 197 p.
- DANTE, L. R. **Matemática** - Volume Único. São Paulo, Ática. 2009.
- DANTAS FILHO, J. V. Baixo rendimento na disciplina de matemática. **EDUCA - Revista Multidisciplinar em Educação**, Porto Velho, v. 4, nº 9, p. 98 a 113, set/dez, 2017. Disponível em: <https://www.periodicos.unir.br/index.php/EDUCA/issue/archive>. e-ISSN: 2359-2087.
- DOS SANTOS, R. N. **Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes**. São Paulo: IME-USP. 2007.
- EHLERT, S. J. **A Matemática no Pôquer: Explorando problemas de probabilidade**. Rio Grande do Sul: FURG-PROFMAT. 2014.
- ESCOLA, E. B. "Álgebra Booleana"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/informatica/algebra-booleana.html>. Acesso em 06 de outubro de 2020.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.
- GARCIA, G. F. B. **Curso de Direito do Trabalho**. 2.ed. São Paulo: Método, 2008. p.562-3.
- GRANDO, R.C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**.1. ed. São Paulo: Paulus, 2004.

GUIMARÃES, S. E. R.; BORUCHOVITCH, E. **O Estilo Motivacional do Professor e a Motivação Intrínseca dos estudantes: Uma Perspectiva da Teoria da Autodeterminação**. *Psicologia Reflexão e Crítica*, Londrina, RS, v. 17, n. 2, p. 143-150, 2004.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

HOFF, M. S.; WECHSLER, S. M. **A prática de jogos computadorizados em um grupo de adolescentes**. Campinas, SP, v. 19, n. 2, 2002.

HUIZINGA, J. **O jogo como elemento da cultura**. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva, 1999.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997 – 2v.

JAEGER, W. **Paideia**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

JESUS, A. C. A. **Como aplicar jogos e brincadeiras na educação infantil**. Rio de Janeiro: Brasport, 2010.

LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. **Temas e problemas elementares**. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006.

LINS, M. J. S. C. **Educação bancária: uma questão filosófica de aprendizagem**. UFRJ, 2011.

LOPES, D. **Jogos: Cê Manja ou Nim?**. Semana Olímpica, 2017.

LOPES, J. **Pôquer na sala de aula**. 2013. Disponível em: [https://istoe.com.br/321828\\_POQUER+NA+SALA+DE+AULA/](https://istoe.com.br/321828_POQUER+NA+SALA+DE+AULA/) Acesso em 11 de dezembro de 2018.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO CARVALHO, P. & FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade com as soluções dos exercícios**. Rio de Janeiro: SBM, 2006 (Coleção do Professor de Matemática. 9ª edição).

MIYASCHITA, W. Y. **Sistemas de Numeração: como funcionam e como são estruturados os números**. BAURU: UNESP, 2002.

PEREIRA, S. B. **Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio**. Rio de Janeiro: PUC, 2014.

OLIVEIRA, M. S. **Uma proposta para o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória na perspectiva de resolução de problemas**. Espírito Santo: UFES-PROFMAT. 2018.

OLIVEIRA, K. L.; SANTOS, A. A. A. **Compreensão em leitura e avaliação da aprendizagem em universitários**. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, v.18, p.118-124, 2005.

PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Microeconomia**. 5. ed. São Paulo: Prentice Hill, 2002.

PLATÃO. **Protágoras de Platão**. LOPES R. N. D., tradutor. Editora Perspectiva 2017.

PRONATEC. **Números binários: O que são e para que servem?**. PRONATEC, 2019. Disponível em: <https://pronatec.blog.br/numeros-binarios-o-que-sao-e-para-que-servem/>. Acesso em 06 de outubro de 2020.

REIS, T. **Equilíbrio de Nash: como funciona esse conceito econômico?**. SUNO ARTIGOS, 2018. Disponível em: <https://www.sunoresearch.com.br/artigos/equilibrio-nash/>. Acesso em 19 de outubro de 2020.

SARTINI, B. A. et al. **Uma Introdução a Teoria dos Jogos**. II Bienal. Universidade Federal da Bahia: SBM. 2004.

SCOTTI, H. S., FERREIRA, R. F. **Sistemas de Numeração**. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~bosco.sobral/extensao/sistemas-de-numeracao.pdf> Acesso em: 10 novembro. 2018.

SILVA, F. H. **Simetria e Grafos: Uma abordagem inspirada no stomachion de Arquimedes e no poliomínos**. Campinas: Unicamp, 2017.

SILVA, V. R. **Estratégias de leitura e competência leitora: Contribuições para a prática de ensino em História**. História, São Paulo, v.23, n.1-2, p. 69-83, 2004.

SILVEIRA, M. R. A. **“Matemática é difícil”**: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. UFRRJ. 2002.

SOBRINHO, C. A. S. **Estratégias Discretas em Teoria dos Jogos**. Goiânia: UFG, 2013.

TAVARES, C.S.; BRITO, F.R.M. **Contando a História da Contagem**. Revista do professor de Matemática SBM V-57, junho, 2005.

TODHUNTER, I. **A History of The Mathematical Theory of Probability: from the time of Pascal to that of Laplace**. Cambridge and London: Macmillan and Co., 1865.