



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

Águila de Jesus dos Santos

**Estudo do desempenho do Método dos
Elementos de Contorno utilizando esquema de
integração autoadaptativo em problemas de
campo escalar bidimensionais**

Vitória, ES

2021

Áquila de Jesus dos Santos

**Estudo do desempenho do Método dos Elementos de
Contorno utilizando esquema de integração
autoadaptativo em problemas de campo escalar
bidimensionais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Professor Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Vitória, ES

2021

Áquila de Jesus dos Santos

Estudo do desempenho do Método dos Elementos de Contorno utilizando esquema de integração autoadaptativo em problemas de campo escalar bidimensionais/ Áquila de Jesus dos Santos. – Vitória, ES, 2021- 83 pág. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Professor Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Dissertação de Mestrado – UFES, Centro Tecnológico, Departamento de Pós Graduação em Engenharia Mecânica 2021.

1. Integração Numérica. 2. MEC. 2. Equação de Lapace. 3. Equação da Advecção-Difusão. 4. Equação de Helmholtz. I. Santos, Áquila de Jesus. II. Universidade Federal do Espírito Santo. III. Estudo comparativo de diferentes formulações do Método dos Elementos de Contorno para o problema de Helmholtz.



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
CENTRO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Estudo do desempenho do Método dos Elementos de Contorno utilizando esquema de integração autoadaptativo em problemas de campo escalar bidimensionais

Áquila de Jesus dos Santos

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
Orientador (PPGEM/UFES)

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara
Examinador Interno (PPGEM/UFES)

Dr. André Bulcão
Examinador Externo (CENPES/Petrobrás)

Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago
Examinador Externo (COPPE/UFRJ)

Prof. Dr. Lucas Silveira Campos
Examinador Externo (DEM/UFES)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 06 de maio de 2021.

ASSINATURAS (4)

Documento original assinado eletronicamente, conforme MP 2200-2/2001, art. 10, § 2º, por:

LUCIANO DE OLIVEIRA CASTRO LARA

CIDADÃO
assinado em 12/08/2021 18:37:44 -03:00

LUCAS SILVEIRA CAMPOS

CIDADÃO
assinado em 13/08/2021 11:33:39 -03:00

ANDRE BULCAO

CIDADÃO
assinado em 17/08/2021 13:34:21 -03:00

JOSÉ ANTONIO FONTES SANTIAGO

CIDADÃO
assinado em 23/08/2021 00:06:31 -03:00



INFORMAÇÕES DO DOCUMENTO

Documento capturado em 23/08/2021 00:06:32 (HORÁRIO DE BRASÍLIA - UTC-3)
por ANDRÉIA GUZI EYNG (CIDADÃO)
Valor Legal: ORIGINAL | Natureza: DOCUMENTO NATO-DIGITAL

A disponibilidade do documento pode ser conferida pelo link: <https://e-docs.es.gov.br/d/2021-H7R0QN>

Agradecimentos

À Deus, que com sua infinita sabedoria, foi um importante guia durante minha trajetória.

Às minha família, pelo amor, incentivo e apoio essenciais para a conclusão de mais essa etapa de nossas vidas.

Ao Departamento de Pós Graduação Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, UFES, seu corpo docente e administrativo, que oportunizaram a janela pela qual vislumbro um horizonte superior.

Ao Professor Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto pela orientação, dedicação e paciência durante a elaboração deste trabalho.

Aos amigos e colegas discentes pelo companheirismo e vivência.

E a todos os demais que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta conquista.

O meu sincero agradecimento.

*"A quem eu devo?
Eu devo tudo a Ti!
A Deus seja a glória."*

RESUMO

Neste trabalho é analisada a influência da integração numérica na precisão do Método dos Elementos de Contorno (MEC) quando este é aplicado a problemas de campo bidimensionais, utilizando elementos isoparamétricos lineares, quadráticos e cúbicos. Para elementos de alta ordem, ao contrário dos elementos constantes e lineares, o modus operandi das transformações de coordenadas, os procedimentos de integração numérica e o tratamento de integrais singulares não são simples, uma vez que o Jacobiano da transformação não é mais constante em todo o elemento e precisam ser tratados numericamente. Nesse sentido, a avaliação do impacto do esquema de integração auto-adaptativo na solução de integrais do MEC tem um destaque especial neste trabalho. Exemplos de problemas de campo escalar, associados às equações de Laplace e Advecção-Difusão, e problemas de Autovalor, associados à equação de Helmholtz, são resolvidos utilizando a Quadratura Gaussiana (Gauss-Legendre) clássica e o esquema de integração autoadaptativo proposto por (TELLES, 1987). Em seguida, seus resultados são comparados com as soluções analíticas, ou numéricas já validadas, para avaliação da eficiência numérica.

Palavras-chave: Equação de Laplace; Equação de Convecção-Advecção; Equação de Helmholtz; Método dos Elementos de Contorno; Integração Numérica; Integração Gaussiana.

ABSTRACT

his work analyzes the influence of numerical integration on the accuracy of the Boundary Element Method (BEM) when applied to two-dimensional field problems, using linear, quadratic and cubic isoparametric elements. For high-order elements, unlike constant and linear elements, the modulus operandi of coordinate transformations, numerical integration procedures and the treatment of singular integrals are not simple, since the Jacobian The transformation is no longer constant throughout the element and need to be handled numerically. In this sense, the evaluation of the impact of the self-adaptive integration scheme in the solution of integrals in the BEM has a special emphasis in this work. Examples of scalar field problems, associated with Laplace and Advection-Diffusion equations, and Eigenvalue problems, associated with Helmholtz equation, are solved using the classical Gaussian Quadrature (Gauss-Legendre) and the self-adaptive integration scheme proposed by (TELLES, 1987). Then, their results are compared with validated analytical or numerical solutions to assess numerical efficiency.

Keywords: Laplace equation; Convection-Advection Equation; Helmholtz equation; Boundary Elements Method; Numerical Integration; Gaussian integration.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação gráfica da deformação gerada por \mathbf{f}	19
Figura 2 – Região S	20
Figura 3 – Domínio Ω de Contorno S	22
Figura 4 – Contorno Aproximado	22
Figura 5 – Elemento Linear	23
Figura 6 – Contorno curvo	24
Figura 7 – Elemento Quadrático	25
Figura 8 – Elemento Cúbico	27
Figura 9 – Definições geométricas do problema	30
Figura 10 – Ângulo interno do contorno	33
Figura 11 – Exemplo I: Integral	55
Figura 12 – Exemplo I: Erro	55
Figura 13 – Exemplo II: Integral	56
Figura 14 – Exemplo II: Erro	56
Figura 15 – Interpretação gráfica das integrais (NPG = 8)	57
Figura 16 – Exemplo III: Integral	58
Figura 17 – Exemplo III: Erro	58
Figura 18 – Procedimentos para definição de R_{min}	59
Figura 19 – Parâmetros L e R_{min}	61
Figura 20 – Posicionamento os pontos de integração em cada formulação	62
Figura 21 – Exemplo III(v.2): Integral	62
Figura 22 – Exemplo III(v.2): Erro	62
Figura 23 – Esquema Representativo do Caso Difusivo I	64
Figura 24 – Erro Médio: Exemplo Laplace I (NPG)	65
Figura 25 – Esquema Representativo do Caso Difusivo II	66
Figura 26 – Erro Médio: Exemplo Laplace II (NEC)	66
Figura 27 – Esquema Representativo do Caso Difusivo III	67
Figura 28 – Erro Médio: Exemplo Laplace III	68
Figura 29 – Esquema Representativo do Caso Difusivo Advectivo I	69
Figura 30 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (NPI)	70
Figura 31 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (Pe)	71
Figura 32 – Esquema Representativo do Caso Difusivo Advectivo II	72
Figura 33 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (NPI)	73
Figura 34 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (NPI - Afast)	73
Figura 35 – Esquema Representativo do Caso de Autovalor I	75
Figura 36 – Erro Médio: Exemplo Helmholtz I (NPI)	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores nodais de ϕ_i para o elemento linear	23
Tabela 2 – Valores nodais de ϕ_i para o elemento quadrático	25
Tabela 3 – Valores nodais de ϕ_i para o elemento cúbico	27
Tabela 4 – Coordenadas dos Pontos de Integração do Exemplo I	54
Tabela 5 – Coordenadas dos Pontos de Integração do Exemplo II	56
Tabela 6 – Coordenadas dos Pontos de Integração do Exemplo II	58

Lista de abreviaturas e siglas

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECID	Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVF	Método dos Volumes Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
NEC	Número de Elementos de Contorno
NPI	Número de Pontos Internos
NPG	Número de Pontos Integração da Quadratura Gaussiana
GDL	Número de Graus de Liberdade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Histórico do Método de Elementos de Contorno	15
1.2	Objetivo do Trabalho	16
1.3	Organização dos Capítulos	17
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	18
2.1	Matriz Jacobiana e Jacobiano de uma Transformação	18
2.2	Elementos de Contorno	21
2.2.1	Elementos de Contorno Lineares Contínuos	22
2.2.2	Elementos de Contorno Quadráticos Contínuos	24
2.2.3	Elementos de Contorno Cúbicos Contínuos	26
2.3	Funções de Base Radial	27
3	O PROBLEMA DE LAPLACE	30
3.1	Solução Fundamental	31
3.2	Equação Integral de Contorno	31
3.3	Discretização via MEC	33
4	O PROBLEMA ADVECTIVO DIFUSIVO	37
4.1	Regularização do Termo de Domínio	38
4.2	Tratamento do Termo Regularizado	39
4.3	Tratamento do Termo Excedente	40
4.4	Discretização via MEC	41
5	O PROBLEMA DE HELMHOLTZ	42
5.1	Formulação Integral Forte do Problema	43
5.2	Regularização do Termo de Domínio	43
5.3	Tratamento do Termo Regularizado	44
5.4	Tratamento do Termo Excedente	45
5.5	Discretização via MEC	45
5.6	Aplicação da Equação de Helmholtz ao Problema de Autovalor	46
5.6.1	Construção da Matriz de Inércia	47
6	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	49
6.1	Classificação das Integrais	51
6.2	A Transformada de Telles	51
6.3	Aplicações da Transformada de Telles	53
6.3.1	Exemplo I	54
6.3.2	Exemplo II	55

6.3.3	Exemplo III	57
6.4	Esquema de Integração Autoadaptativo	59
6.4.1	Exemplo III (Via Esquema Adaptativo)	60
	7 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	63
7.1	Metodologia	63
7.2	Laplace	64
7.2.1	Caso Laplace I	64
7.2.2	Caso Laplace II	65
7.2.3	Caso Laplace III	67
7.3	Advecção-Difusão	68
7.3.1	Caso Advecção-Difusão I	69
7.3.2	Caso Advecção-Difusão II	71
7.4	Helmholtz	74
7.4.1	Caso Helmholtz I	74
	8 CONCLUSÕES	77
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80

1. INTRODUÇÃO

A grande dificuldade existente na obtenção de soluções analíticas que atendam modelagens de problemas de alta complexidade física, englobando por exemplo: regime transiente, numerosos graus de liberdade, domínios com alta complexidade geométrica e heterogeneidades, gera oportunidades para a aplicação de soluções numéricas, capazes de simular os problemas propostos. A aplicação adequada dos métodos numéricos, obedecendo às devidas condições essenciais e naturais, possibilita a obtenção rápida de resultados que atuam como respaldo no aceite/aprovação de determinado projeto de engenharia, seja na fabricação, operação ou manutenção. Neste contexto, a rapidez e robustez do método numérico são fatores de extrema importância na garantia da confiabilidade dos resultados obtidos.

A robustez do Método dos Elementos de Contorno (MEC) é fortemente dependente do cálculo correto das integrais de contorno que surgem com a aplicação do método a um determinado problema. É possível fazer o cálculo analítico destas integrais em certos casos particulares. Entretanto, torna-se inviável realizá-lo para elementos de ordem superior, isto é, onde a variação da variável básica ao longo do elemento não é considerada constante. Um agravante surge no caso de elementos com geometria não retilínea, como no caso de elementos isoparamétricos quadráticos ou superiores em que a função que realiza a transformação das coordenadas globais num sistema estratégico local, o Jacobiano, não é mais um valor constante e sim uma função da forma geométrica do elemento (DOMINGUEZ, 1993).

Tais dificuldades foram motivação para diversos trabalhos de pesquisa que propõem abordagens alternativas para o cálculo das integrais do MEC. Em geral, utiliza-se de técnicas já consagradas de integração numérica, como a integração Gaussiana, acopladas a esquemas que propõem aumentar a precisão destas ou viabiliza-las, de algum modo. Esquemas usuais são: A partição de domínio (BREBBIA; WALKER, 1980); o esquema de integração de autoadaptativo (TELLES, 1987) ou a adoção da coordenada do ponto fonte fora do elemento de contorno (BREBBIA; WALKER, 1980).

O presente trabalho visa apresentar o esquema autoadaptativo proposto por Telles (1987) e avaliar seu impacto na precisão do MEC se comparado à formulações que utilizam a integração Gaussiana padrão (Gauss-Legendre). As aplicações são problemas bidimensionais homogêneos e isotrópicos relacionados às Equações de Laplace, Advecção-Difusão e Helmholtz. Aos problemas de Laplace será aplicada a formulação clássica do MEC

que utiliza solução fundamental, tal formulação é exposta em Brebbia, Telles e Wrobel (1984). Já aos problemas de Advecção-Difusão e Helmholtz será aplicada a formulação do MEC com Integração Direta (MECID), proposto em Loeffler (2015).

Destaca-se que aqui não serão levados em conta os efeitos transientes, pois o foco é apresentar as respostas estacionárias relativas ao potencial analisado, seja o valor da variável básica ponto a ponto ou a obtenção de Autovalores para problemas de vibração. Vale ressaltar que existem outros métodos numéricos que podem ser utilizados para resolver problemas de potencial, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) (HUGHES, 1987), o Método das Diferenças Finitas (MDF) (STRICKWERDA, 1989), o Método dos Volumes Finitos (MVF) (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000), o Método dos Elementos Espectrais (DOYLE, 1997), entre outros.

1.1 Histórico do Método de Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é geralmente associado a formulações diretas nas quais o problema desconhecido são as variáveis físicas. Por exemplo, potenciais ou fluxos, o que é mais atraente que as formulações indiretas, que envolvem conceitos como fontes ou dipolos. A formulação direta adotada neste capítulo é mais geral e simples de se aplicar em códigos computacionais.

A formulação da equação integral de contorno de problemas potenciais pode ser atribuída a Jaswon (1963) e Symm (1963), que já em 1963 apresentaram um método numérico para resolver equações integrais do tipo de Fredholm. Eles discretizaram o contorno dos problemas em vários segmentos, ou elementos, e assumiram uma densidade de fonte constante em cada um deles. A técnica de colocação foi empregada para gerar uma série de equações integrais, e os coeficientes de influência foram computados usando a fórmula de Simpson, com exceção dos coeficientes singulares que foram computados analiticamente ou pela soma dos termos fora da diagonal. No trabalho pioneiro deles, até propuseram uma formulação mais geral usando potenciais e derivadas como desconhecidos e os resultados foram relatados para algumas aplicações (JASWON, 1963; SYMM, 1963; JASWON; PONTER, 1963). Todas as bases para essa formulação vieram, provavelmente, devido ao surgimento do Método dos Elementos Finitos naquela época.

Desde 1978, a popularidade do Método dos Elementos de Contorno tem aumentado. A interpretação do método, em termos de declarações de tipo residual variacional ou ponderada, ajudou a esclarecer sua relação com outras técnicas numéricas, como Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos. Ao mesmo tempo, elementos de ordem superior começaram a ser desenvolvidos seguindo o trabalho de transformações do tipo jacobiano, usadas primeiramente em elementos finitos. A conscientização da

importância de técnicas precisas de integração numérica levou à investigação e consequente desenvolvimento de abordagens adequadas para integrandos singulares e quase singulares.

Uma das grandes vantagens do MEC frente aos métodos de domínio é a redução da dimensão do problema, um problema bidimensional, por exemplo, requer uma malha com elementos meramente unidimensionais. Tal fato, torna o MEC bastante adequado à solução numérica de problemas físicos modelados por equações diferenciais parciais em que seus operadores são auto-adjuntos (BREBBIA; WALKER, 1980). Entretanto, a complexidade de se obter determinadas soluções fundamentais para operadores diferenciais mais robustos em conjunto com a presença de matrizes complexas, foram alguns dos fatores que motivaram a proposição de novas abordagens para o MEC.

Neste contexto, surgem abordagens que se utilizam uma solução fundamental mais simples, normalmente de Poisson/Laplace, e aproximam integrais remanescentes de domínio via funções de bases radiais, como técnica Dupla Reciprocidade (MECDR) (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1991).

Loeffler (2015), também propõe uma nova formulação baseada em aproximações por bases radiais, denominada Interpolação Direta (MECID), que mostra-se capaz de prover bons níveis gerais de precisão numa ampla gama de problemas de campo escalar (SANTOS; NETTO, 2018) (NETO; LARA; BARCELOS, 2015), (NETO; MANSUR; BARCELOS,), (BARCELOS; LOEFFLER; BARBOSA, 2018).

1.2 Objetivo do Trabalho

Em um método numérico como o MEC, a precisão numérica é sempre um alvo de investigações mais aprofundadas que se concentram em entender as limitações do método e propor novas abordagens que possam torna-lo ainda mais robusto e preciso. Nessa conjuntura, o foco principal deste trabalho é determinar o comportamento das formulações de elementos de contorno quando acoplados a um esquema autoadaptativo que propõe aumentar a qualidade dos resultados no cálculo das integrais quase singulares e singulares que aparecem nas matrizes do método quando este é utilizado para resolver problemas de campo escalar bidimensionais utilizando a formulação clássica e a formulação MECID.

São dois os contextos onde as integrações quase singulares e singulares aparecem nas formulações aqui estudadas: Nas integrais de contorno clássicas do MEC, quando o ponto campo se aproxima do ponto fonte e nas integrais advindas da interpolação proposta pela MECID, quando os pólos internos estão muito próximos ao contorno. Assim, o objetivo geral desta dissertação é avaliar o impacto da utilização de um esquema de integração autoadaptativo frente a integração Gaussiana nestes dois contextos.

1.3 Organização dos Capítulos

No capítulo 2 alguns conceitos importantes para o entendimento do MEC serão apresentados, para facilitar o entendimento de terminologias e aplicações feitas nos capítulos posteriores.

No capítulo 3, a formulação básica do MEC para resolver a equação de Laplace é apresentada. Inicialmente concentra-se no desenvolvimento das técnicas integrais básicas para resolver a equação de Laplace. A equação integral geral é deduzida da equação diferencial parcial governante e das condições de contorno, então, uma equação integral de contorno é obtida usando a solução fundamental (3.1) e o teorema de Green. As propriedades das soluções fundamentais são demonstradas. O problema é então expresso na forma matricial. O procedimento descrito neste capítulo é encontrado nas obras Brebbia e Walker (1980) e Partridge, Brebbia e Wrobel (1991).

No capítulo 4, expõe-se a aplicação do MEC na solução do problema de advectivo-difusivo. Apresenta-se a princípio a equação de Advecção-Difusão e algumas de suas aplicações, posteriormente é apresentada a formulação integral forte do problema e a relação entre o termo difusivo e equação de Laplace. O procedimento de regularização e tratamento do termo advectivo é então apresentado e por fim a forma final matricial do problema é esboçada.

No capítulo 5, a formulação forte do problema de Helmholtz é apresentada juntamente com os procedimentos aplicados para sua solução via MEC e sua forma matricial é exposta ao final. Na seção 5.6, o problema de autovalor e autovetor para sistemas não amortecidos, com vibração livre é apresentado juntamente com sua aplicação na equação de Helmholtz.

O capítulo 6 aborda a integração numérica, expõe-se o procedimento clássico com integração Gaussiana e também o esquema autoadaptativo proposto por (TELLES, 1987).

No capítulo 7, apresenta-se as simulações numéricas realizadas com o objetivo de avaliar o impacto numérico. Dois problemas de campo escalar são resolvidos nas seções 7.2 e 7.3 referentes à problemas de Laplace e de Advecção-Difusão respectivamente. Outros dois problemas de determinação de autovalor advindos da equação de Helmholtz são resolvidos na seção 7.4.

Por fim, no capítulo 8, as conclusões colocadas e as sugestões para trabalhos futuros são expostas.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 Matriz Jacobiana e Jacobiano de uma Transformação

No cálculo vetorial, a matriz Jacobiana de uma função de múltiplas variáveis é a matriz de todas as suas derivadas parciais de primeira ordem. Quando esta matriz é quadrada, isto é, quando a função toma o mesmo número de variáveis como entrada que o número de componentes do vetor de sua saída, seu determinante é conhecido como o determinante Jacobiano ou simplesmente Jacobiano.

Suponha que $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja uma função tal que cada uma de suas derivadas parciais de primeira ordem existam em \mathbb{R}^n . Então a matriz Jacobiana, $[\mathbf{J}]$, de \mathbf{f} é definida (SIMON; BLUME, 1994):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Quando $m = n$, a matriz Jacobiana é quadrada, então seu Jacobiano é uma função bem definida de \mathbf{x} . Ele carrega informações importantes sobre o comportamento local de \mathbf{f} . Por exemplo, a função \mathbf{f} tem localmente na vizinhança de um ponto \mathbf{p} uma função inversa que é diferenciável se, e somente se, o Jacobiano for diferente de zero em \mathbf{p} . O determinante Jacobiano também aparece ao se fazer uma mudança de variáveis ao avaliar uma integral múltipla de uma função sobre uma região dentro de seu domínio. Para acomodar a mudança de coordenadas, a magnitude do determinante Jacobiano surge como um fator multiplicativo dentro da integral (APOSTOL, 1967).

Quando $m = 1$, isto é, quando $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de valor escalar, a matriz Jacobiana se reduz a um vetor linha. Este vetor linha de todas as derivadas parciais de primeira ordem de \mathbf{f} é o gradiente de \mathbf{f} , ou seja, $\mathbf{J}_f = \nabla f$.

Para o caso unidimensional $m = n = 1$, isto é, quando $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de valor escalar de uma única variável, a matriz Jacobiana tem uma única entrada. Esta entrada é a derivada da função \mathbf{f} e também o Jacobiano da transformação.

Ou seja, o Jacobiano de uma função vetorial multivariável generaliza o conceito

de gradiente de uma função escalar multivariável, que por sua vez generaliza a derivada de uma função escalar de uma única variável. Em outras palavras, a matriz Jacobiana de uma função escalar em várias variáveis é a transposta do seu gradiente e o gradiente de uma função escalar de uma única variável é sua derivada.

Em cada ponto onde uma função é diferenciável, sua matriz Jacobiana também pode ser entendida como o ente que armazena as informações de dilatação, contração e/ou rotação que a função impõe localmente nas proximidades deste ponto.

Por exemplo, se $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é usado para transformar suavemente uma imagem, vide figura (1), a matriz Jacobiana $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}}]$, descreve como a imagem na vizinhança de $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ é transformada.

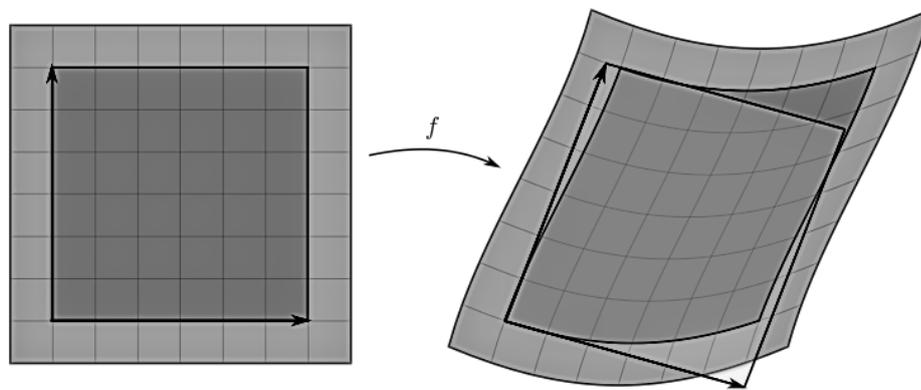


Figura 1 – Representação gráfica da deformação gerada por \mathbf{f}

Se f é diferenciável em um ponto \mathbf{p} em \mathbb{R}^n , então seu diferencial é representado pela matriz jacobiana $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}}]_{\mathbf{p}}$. Nesse caso, a transformação linear apresentada na equação (2.2) é a melhor aproximação linear de \mathbf{f} na vizinhança do ponto \mathbf{p} .

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = [\mathbf{J}_{\mathbf{f}}]_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \quad (2.2)$$

onde o termo $\sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$ representa a estimativa de erro da aproximação e tende a zero mais rapidamente que a norma $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$, ou seja:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \frac{\sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = 0 \quad (2.3)$$

Assim, para pontos nas vizinhanças de \mathbf{p} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) \simeq [J_{\mathbf{f}}]_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad (2.4)$$

Para o caso unidimensional, esta aproximação se reduz ao polinômio de Taylor de grau um:

$$f(x) - f(p) = f'(p)(x - p) \quad (2.5)$$

Essa aproximação é de grande importância no cálculo numérico, sendo utilizada para resolver sistemas não-lineares pelo método de Newton (ou método do Gradiente Iterativo).

Para demonstrar a aplicação do conceito de Jacobiano na transformação de coordenadas, propõem-se a resolução da integral I_e abaixo:

$$I_e = \int_S (x^2 + y^2) dA, \quad S : x^2 + y^2 \leq R^2 \quad (2.6)$$

No plano cartesiano, a região S representa um círculo de raio R centrado na origem, vide figura (2).

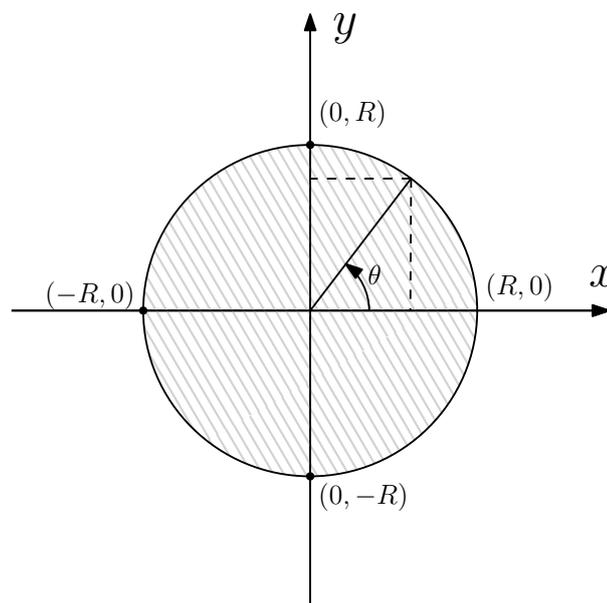


Figura 2 – Região S

A proposta inicial é resolver a integral utilizando o sistema cartesiano padrão xy . Escreve-se então:

$$I_e = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (2.7)$$

É possível calcular tal integral; entretanto, serão necessárias diversas operações e manipulações matemáticas devido aos limites de integração apresentarem funções compostas.

Dado que a região S é circular, uma estratégia alternativa é utilizar-se de coordenadas polares para simplificar o processo de integração. Toma-se então a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.8)$$

Neste ponto surge o Jacobiano. Ele é o responsável por relacionar os diferenciais do sistema cartesiano, (dx, dy) , com os diferenciais polares, $(dr, d\theta)$, através da seguinte expressão:

$$|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{dx dy}{dr d\theta} \quad (2.9)$$

O Jacobiano é o determinante da matriz Jacobiana, assim:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \quad (2.10)$$

A integral pode então ser reescrita nas coordenadas polares:

$$I_e = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta \quad (2.11)$$

Integrando em r :

$$I_e = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} R^4 d\theta \quad (2.12)$$

Integrando em θ

$$I_e = \frac{1}{2} \pi R^4 \quad (2.13)$$

2.2 Elementos de Contorno

Seja a curva plana indicada na figura (3), de domínio Ω e contorno S qualquer. Deseja-se calcular o perímetro dessa curva. Em diversos problemas, a integral ao longo do contorno S pode ser bastante difícil, ou mesmo impossível, de se calcular analiticamente; uma estratégia para o cálculo do perímetro é a divisão do contorno S em uma soma de pequenos pedaços s_1, s_2, \dots, s_n , ou seja:

$$S = \sum_{i=1}^n s_i \quad (2.14)$$

onde n é o número de fragmentos em que o contorno foi dividido. Uma vez que estes pedaços podem ter uma forma qualquer, cada pedaço poderá ser aproximado por uma forma conhecida. Por simplicidade, esta forma é quase sempre dada por um polinômio (linha reta, parábola, etc).

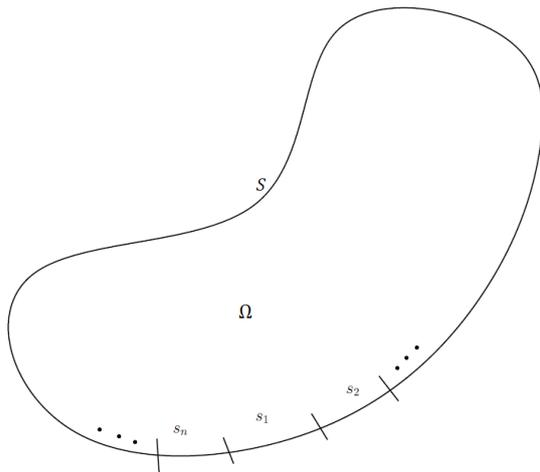
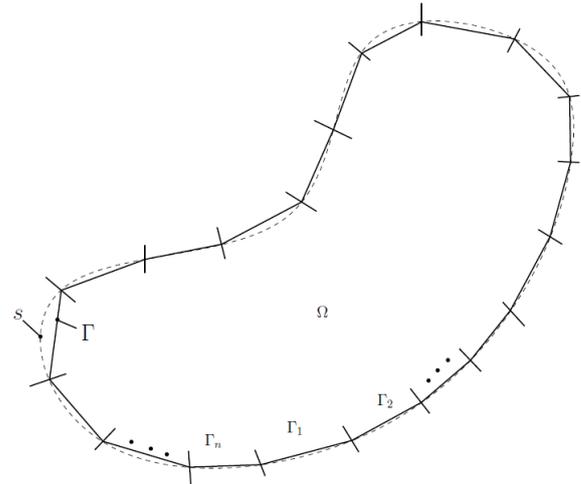
Figura 3 – Domínio Ω de Contorno S 

Figura 4 – Contorno Aproximado

Dessa maneira, cada segmento s_1, s_2, \dots, s_n é aproximado por formas conhecidas $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, chamados **Elementos de Contorno** (figura 4). Assim, o contorno Γ aproximado é:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (2.15)$$

Tomando o limite para infinitos elementos:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (2.16)$$

Onde Γ é o contorno aproximado.

Há diversos tipos de elementos de contorno, aplicados aos mais diversos problemas. Nas subsecções subsequentes serão discutidos os elementos utilizados no presente trabalho. É preciso salientar que todos os elementos aqui utilizados tem formulação isoparamétrica, ; ou seja, as mesmas funções de forma usadas para interpolar a geometria são também usadas para interpolar as variáveis físicas (potencial escalar e derivada do potencial escalar).

2.2.1 Elementos de Contorno Lineares Contínuos

Na discretização por elementos lineares isoparamétricos, a geometria e as variáveis físicas são aproximadas por um mesmo polinômio de 1^o grau, necessitando de dois nós, um em cada extremidade do elemento.

As variáveis u ou q podem ser escritas em termos de funções de interpolação que dependem da coordenada local adimensional η , ou seja:

$$u(\eta) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$q(\eta) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde as funções de interpolação são (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.19)$$

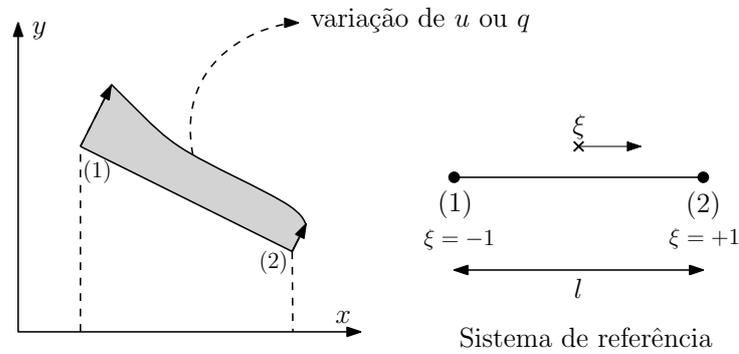


Figura 5 – Elemento Linear
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

Essas funções são lineares em η . As expressões (2.17) e (2.18) fornecem os valores nodais das variáveis u ou q quando aplicadas aos nós, ou seja, para a figura (5):

Nó	η	ϕ_1	ϕ_2
1	-1	1	0
2	+1	0	1

Tabela 1 – Valores nodais de ϕ_i para o elemento linear
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

A avaliação das integrais expostas nos capítulos posteriores requerem o uso de um Jacobiano que relacione a variável local η com o contorno Γ . Para uma curva como a dada na figura (6), a transformação é simples (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} d\eta = |J|d\eta \quad (2.20)$$

onde $|J|$ é o Jacobiano.

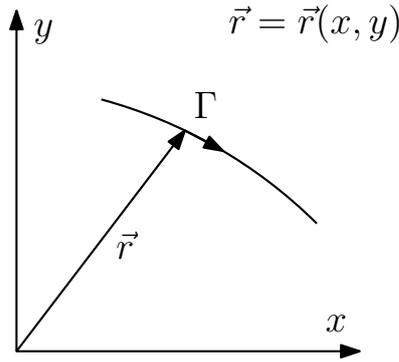


Figura 6 – Contorno curvo
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

Observe que, para calcular os valores do Jacobiano na equação (2.20), é necessário conhecer a variação das coordenadas x e y em termos de η . Isto pode ser feito definindo a forma geométrica do elemento da mesma maneira que as variáveis u e q são definidas, isto é, usando interpolação linear:

$$\begin{aligned}x &= \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 \\ y &= \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde o subscrito indica o número do nó. Este é um conceito semelhante ao dos elementos isoparamétricos comumente usados na análise de elementos finitos (BATHE, 1996).

Aplicando as definições de ϕ_1 e ϕ_2 da equação (2.19), pode-se escrever:

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{2}(1 - \eta)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \eta)x_2 \right] = \frac{x_2 - x_1}{2}\tag{2.22}$$

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{2}(1 - \eta)y_1 + \frac{1}{2}(1 + \eta)y_2 \right] = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

O Jacobiano no caso dos elementos lineares pode ser então calculado:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2} = \frac{l}{2}\tag{2.23}$$

Onde l é o comprimento do elemento.

2.2.2 Elementos de Contorno Quadráticos Contínuos

Quando se propõem discretizar o contorno por elementos quadráticos, a geometria e as variáveis físicas são aproximadas por um polinômio do 2º grau, necessitando de três nós, um em cada extremidade do elemento e um nó central.

As variáveis u ou q podem ser escritas em termos de funções de interpolação quadráticas que dependem da coordenada adimensional local η :

$$u(\eta) = \sum_{i=1}^3 \phi_i u_i = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$q(\eta) = \sum_{i=1}^3 \phi_i q_i = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde as funções de interpolação são (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\eta}{2}(\eta - 1) \\ \phi_2 &= (1 - \eta)(1 + \eta) \\ \phi_3 &= \frac{\eta}{2}(\eta + 1) \end{aligned} \quad (2.26)$$

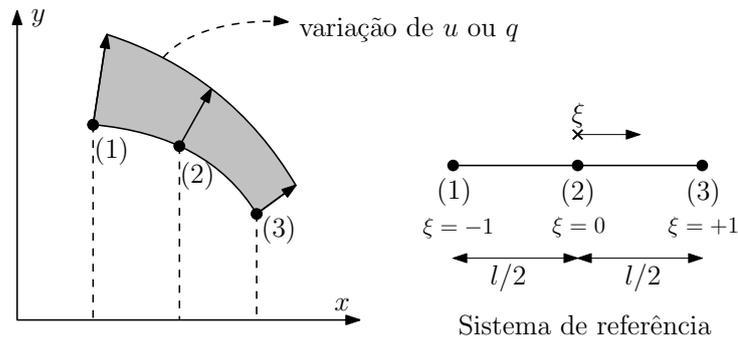


Figura 7 – Elemento Quadrático
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

Essas funções são quadráticas em η . As expressões (2.24) e (2.25) fornecem os valores nodais das variáveis u ou q quando aplicadas aos nós, ou seja, para a figura (7):

Nó	η	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
1	-1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	+1	0	0	1

Tabela 2 – Valores nodais de ϕ_i para o elemento quadrático
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

Para elementos quadráticos o Jacobiano, $|J|$, é dado (DOMINGUEZ, 1993):

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\eta} = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^3 \frac{d\phi_i}{d\eta} y_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^3 \frac{d\phi_i}{d\eta} x_i \right]^2} \quad (2.27)$$

onde o subscrito i indica o número do nó; e:

$$\left(\frac{d\phi_1}{d\eta}\right) = \eta - \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{d\phi_2}{d\eta}\right) = -2\eta; \quad \left(\frac{d\phi_3}{d\eta}\right) = \eta + \frac{1}{2} \quad (2.28)$$

As Equações (2.27) e (2.28) evidenciam que o Jacobiano não é mais constante; este agora é função da forma do elemento.

2.2.3 Elementos de Contorno Cúbicos Contínuos

A discretização via elementos cúbicos aproxima a geometria e as variáveis físicas por um polinômio de 3º grau, necessitando de quatro nós em cada elemento.

As variáveis u ou q podem então ser escritas em termos de funções de interpolação cúbicas que dependem da coordenada η :

$$u(\eta) = \sum_{i=1}^4 \phi_i u_i = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$q(\eta) = \sum_{i=1}^4 \phi_i q_i = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

onde as funções de interpolação são (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{16}(1 - \eta)(9\eta^2 - 1) \\ \phi_2 &= \frac{9}{16}(1 - 3\eta)(1 - \eta^2) \\ \phi_3 &= \frac{9}{16}(1 + 3\eta)(1 - \eta^2) \\ \phi_4 &= \frac{1}{16}(1 + \eta)(9\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.31)$$

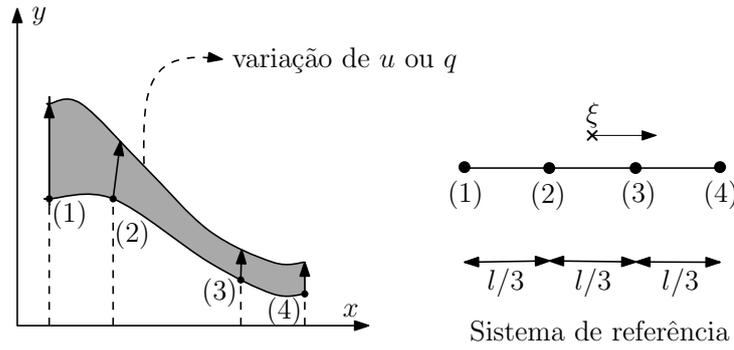


Figura 8 – Elemento Cúbico
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

Essas funções são cúbicas em η . As expressões (2.29) e (2.30) fornecem os valores nodais das variáveis u ou q quando aplicadas aos nós, ou seja, para a figura (8):

Nó	η	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
1	-1	1	0	0	0
2	-1/3	0	1	0	0
3	+1/3	0	0	1	0
4	+1	0	0	0	1

Tabela 3 – Valores nodais de ϕ_i para o elemento cúbico
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

Para elementos cúbicos o Jacobiano, $|J|$, é dado:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\eta} = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^4 \frac{d\phi_i}{d\eta} y_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^4 \frac{d\phi_i}{d\eta} x_i \right]^2} \quad (2.32)$$

onde o subscrito i indica o número do nó; e:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\phi_1}{d\eta} \right) &= \frac{-27\eta^2 + 18\eta + 1}{16}; & \left(\frac{d\phi_2}{d\eta} \right) &= \frac{81\eta^2 - 18\eta - 27}{16}; \\ \left(\frac{d\phi_3}{d\eta} \right) &= \frac{-81\eta^2 - 18\eta + 27}{16}; & \left(\frac{d\phi_4}{d\eta} \right) &= \frac{27\eta^2 + 18\eta - 1}{16} \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.3 Funções de Base Radial

Segundo Fasshauer (2007), uma função $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita radial desde que exista uma função, de um único argumento, $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \psi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| \quad (2.34)$$

A norma usualmente utilizada é a distância euclidiana, embora outras funções de distância também sejam possíveis. Por exemplo, a métrica de Lukaszzyk-Karmowski (LUKASZYK, 2004).

Somas de funções de base radial são tipicamente usadas para aproximar funções. Este processo de aproximação também pode ser interpretado como um caso simples de rede neural.

Tipos de funções de base radial usados comumente incluem:

- Multi-quadrática:

$$\psi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$$

- Splines poli-harmônicas:

$$\psi(r) = r^k, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

- *Thin plate spline*:

$$\psi(r) = r^2 \ln(r)$$

No presente trabalho, funções de base radial do tipo "*Thin plate spline*" são utilizadas para realizar aproximações; visando, possibilitar a transformação de integrais de domínio em integrais de contorno. O procedimento generalizado para tal aplicação é ilustrado a seguir.

Considere uma aproximação $h(X)$ de uma função $f(X)$, tal que:

$$f(X) \simeq h(X) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \psi(X - X_j) \quad (2.35)$$

onde $\psi(X - X_j)$ é uma função de base radial e α_j são coeficientes desconhecidos, que podem ser determinados impondo-se:

$$h(X_i) = f(X_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.36)$$

A combinação das equações 2.35 e 2.36 resulta em um sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \psi(X_1 - X_1) & \psi(X_1 - X_2) & \cdots & \psi(X_1 - X_N) \\ \psi(X_2 - X_1) & \psi(X_2 - X_2) & \cdots & \psi(X_2 - X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi(X_N - X_1) & \psi(X_N - X_2) & \cdots & \psi(X_N - X_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(X_1) \\ f(X_2) \\ \vdots \\ f(X_N) \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Ou, em forma compacta:

$$[\Psi]\{\alpha\} = \{\mathbf{f}\} \quad (2.38)$$

onde $[\Psi]$ é a matriz simétrica chamada matriz de interpolação, $\{\alpha\}$ e $\{\mathbf{f}\}$ são matrizes colunas. O problema será bem posto, isto é, a solução existirá e será única, se e somente se a matriz for não-singular. No entanto, para que a matriz de interpolação tenha esta característica, a função deverá ser definida como positiva; entretanto, não é objetivo deste trabalho se aprofundar no tema, maiores detalhes sobre funções radiais e suas aplicações podem ser encontradas em Fasshauer (2007) ou Buhmann (2003).

3. O PROBLEMA DE LAPLACE

A Equação de Laplace é uma equação diferencial parcial elíptica de alta relevância, uma vez que possibilita modelar o comportamentos do potencial em vários campos da ciência, como, por exemplo, a astronomia, termofísica, a mecânica dos fluidos, entre outras aplicações. Com efeito, a teoria geral de soluções para a equação de Laplace é conhecida como teoria do potencial. Em duas dimensões, i.e. no espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , a equação de Laplace toma a forma, em coordenadas cartesianas, da equação (3.1):

$$\nabla^2 u(x, y) = u_{,ii} = 0 \quad (3.1)$$

Considere que busca-se a solução da equação de Laplace em um domínio bidimensional, figura (9).

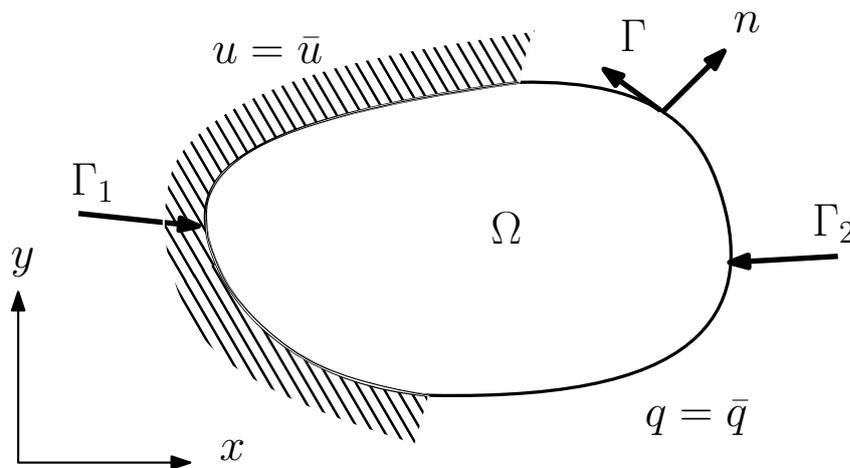


Figura 9 – Definições geométricas do problema
Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

No contorno são aplicadas condições: essenciais, $u = \bar{u}$, em Γ_1 e naturais, $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$, em Γ_2 . Onde \mathbf{n} é o vetor normal externo ao contorno, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ e as barras indicam valores conhecidos. Condições de contorno mais complexas, tais como combinações das anteriores, isto é:

$$\alpha u + \beta q = \gamma \quad (3.2)$$

onde α , β e γ são parâmetros conhecidos, podem ser facilmente incluídos (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984), mas eles não serão considerados aqui por uma questão de simplicidade.

3.1 Solução Fundamental

A solução fundamental para o problema de Laplace, u^* , representa o campo gerado por uma fonte unitária concentrada atuando em um ponto ξ , denominado ponto fonte. O efeito dessa fonte é propagado de ξ para o infinito, sem qualquer consideração das condições de contorno. Por isso, u^* satisfaz a seguinte equação de Poisson:

$$k\nabla^2 u^* + \delta(X - \xi) = 0 \quad (3.3)$$

onde $\delta(X - \xi)$ representa uma função de delta de Dirac que vai ao infinito no ponto ξ e é igual a zero nos demais pontos. A integral de $\delta(X - \xi)$ sobre o domínio é igual à unidade. O uso da função delta de Dirac é uma maneira de representar fontes concentradas e forças unitárias ao lidar com equações diferenciais.

Para um meio bidimensional homogêneo e isotrópico, a solução fundamental da equação (3.3) é (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$u^*(X, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (3.4)$$

com derivada normal:

$$q^*(X, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.5)$$

onde r é a distância euclidiana do ponto i de aplicação da fonte concentrada a qualquer outro ponto X em consideração.

3.2 Equação Integral de Contorno

A equação integral de contorno inicial requerida pelo MEC pode ser deduzida de maneira simples com base em considerações do Método de Resíduos Ponderados, o Teorema de Gauss- Green e Propriedades do cálculo integral e diferencial. A vantagem de usar uma técnica de Resíduos Ponderados é sua generalidade, ela permite a extensão do método para a solução de equações diferenciais parciais mais complexas e também pode ser usada para relacionar elementos de contorno com outras técnicas numéricas.

O passo inicial desta dedução consiste em multiplicando a equação 3.1 por uma função peso ϖ e integrar sobre o domínio Ω ; assume-se então que o resultado da integral é

nulo, gerando então a seguinte sentença do Método de Resíduos Ponderados:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(X) \varpi d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Com o objetivo de obter uma equação integral que não possua integrais de domínio, a função a ser utilizada como peso de ponderação na sentença de Resíduos Ponderados deve ser escolhida cuidadosamente. Qualquer função harmônica, ou seja, função cujo laplaciano é nulo, satisfaz esta exigência; contudo, por razões numéricas, a escolha mais adequada é a função cujo laplaciano é o delta de Dirac. Faz-se então uso da solução fundamental u^* explicitada na equação 3.4.

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(X) u^*(X, \xi) d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

A aplicação do Teorema de Green, da regra da derivada do produto e propriedades das integrais possibilitam o desenvolvimento matemático de forma que obtêm-se a expressão a seguir:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u(X)}{\partial n} u^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) \frac{\partial u^*(X, \xi)}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} u(X) \nabla^2 u^*(X, \xi) d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

A Presença de uma integral de domínio impossibilita a aplicação imediata do MEC, deve-se primeiramente resolver esta integral. O procedimento de resolução é descrito a seguir:

$$\bar{I} = \int_{\Omega} u(X) \nabla^2 u^*(X, \xi) d\Omega \quad (3.9)$$

Pela equação (3.4):

$$\bar{I} = \int_{\Omega} u(X) \left[\frac{-\delta(X - \xi)}{k} \right] d\Omega \quad (3.10)$$

Fazendo uso da propriedade do delta de Dirac na integração:

$$\bar{I} = -\frac{u(\xi)}{k} \quad (3.11)$$

A Equação (3.8) pode então ser reescrita:

$$\int_{\Gamma} \left[-k \frac{\partial u(X)}{\partial n} \right] u^*(X, \xi) d\Gamma + \int_{\Gamma} u(X) \left[k \frac{\partial u^*(X, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma + u(\xi) = 0 \quad (3.12)$$

Ou ainda:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u(X) q^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X) u^*(X, \xi) d\Gamma \quad (3.13)$$

A Equação (3.13) é a equação integral de contorno quando o ponto fonte encontra-se no interior do domínio. A fim de considerar o ponto ξ no contorno, é necessário a inclusão de um coeficiente $c(\xi)$ conforme segue:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u(X)q^*(X, \xi)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(X, \xi)d\Gamma \quad (3.14)$$

O coeficiente $c(\xi)$ considera as possibilidades de posicionamento do ponto fonte em relação ao domínio Ω e ao contorno Γ .

$$c(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Gamma \\ \frac{\theta_i}{2\pi}, & \xi \in \Gamma \\ 0, & \xi \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (3.15)$$

O procedimento detalhado de definição de $c(\xi)$ pode ser encontrado em Brebbia, Telles e Wrobel (1984). A variável θ_i é o ângulo interno do contorno como demonstrado na figura (10) abaixo.

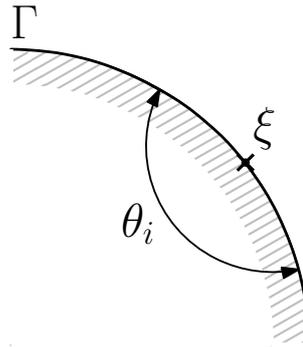


Figura 10 – Ângulo interno do contorno

Quando o ponto fonte encontra-se em ponto suave do contorno, isto é, não é um canto, tem-se:

$$c(\xi) = \frac{\theta_i}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

Esta é a equação integral de contorno geralmente usada como ponto de partida para a formulação do Método dos Elemento de Contorno.

3.3 Discretização via MEC

A Equação (3.14) pode ser então discretizada, gerando o sistema de equações a partir do qual os valores das incógnitas no contorno podem ser encontrados. Elementos lineares serão considerados nesta seção por simplicidade; entretanto, os resultados aqui obtidos podem ser generalizados para elementos superiores.

O contorno considerado é dividido em N elementos e a equação (3.14) pode ser reescrita, na forma discretizada:

$$c(\xi)u(\xi) = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} u(X)q^*(X, \xi)d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} q(X)u^*(X, \xi)d\Gamma \right] \quad (3.17)$$

Utilizando os conceitos expostos na secção (2.2.1) e omitindo propositalmente os argumentos para facilitar a compreensão, pode-se escrever:

$$c(\xi)u(\xi) = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} q^* d\Gamma \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} u^* d\Gamma \right\} \quad (3.18)$$

Uma escrita alternativa é a apresentada a seguir:

$$c(\xi)u(\xi) = \sum_{j=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.19)$$

Os coeficientes h_i e g_i são:

$$\begin{aligned} h_i &= \int \phi_i q^* d\Gamma \\ g_i &= \int \phi_i u^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.20)$$

Neste ponto é necessário se fazer algumas considerações sobre estes coeficientes, dado que, a integração numérica enquanto ferramenta de cálculo das integrais que os definem é o escopo principal deste trabalho.

Ressalta-se que o cálculo destes coeficientes é de grande importância dentro do método, uma vez que a precisão do MEC está fortemente relacionada à obtenção correta de tais coeficientes (BREBBIA; WALKER, 1980). Um capítulo posterior será voltado exclusivamente para discorrer a respeito das técnicas de integração utilizadas neste trabalho para computar estes coeficientes.

Dando sequência ao desenvolvimento do processo de aplicação do MEC sobre a equação de Laplace, observe que está se assumindo que a solução fundamental é aplicada em um determinado nó i , embora isso não esteja explicitamente indicado na notação de u^* e q^* . Assim, para um determinado ponto i , pode-se escrever:

$$cu_i + \sum_{j=1}^N u_j \bar{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} \quad (3.21)$$

Fazendo

$$H_{ij} = \bar{H}_{ij} + c\delta_{ij} \quad (3.22)$$

onde δ é o delta de Kronecker, de tal maneira que o valor de $c(\xi)$ é somado a \bar{H} quando $i = j$, então a equação (3.21) pode agora ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (3.23)$$

Assume-se que a solução fundamental é aplicada em cada nó sucessivamente; assim, um sistema de equações é obtido, resultante da aplicação da equação (3.23) ao longo do contorno discretizado. Este conjunto de equações pode ser expresso em forma matricial como:

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} \quad (3.24)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são duas matrizes $N \times N$ e \mathbf{u} e \mathbf{q} são vetores de tamanho N .

Note que N_1 valores de u e N_2 valores de q são conhecidos em Γ_1 e Γ_2 , respectivamente ($N_1 + N_2 = N$); portanto, existem apenas N variáveis desconhecidas no sistema de equações (3.24). Para introduzir essas condições de contorno na equação (3.24) é necessário reorganizar o sistema movendo as colunas de $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{G}]$. Uma vez que todas as incógnitas são passadas para o lado esquerdo, pode-se escrever:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\} \quad (3.25)$$

onde $\{\mathbf{x}\}$ é um vetor de valores do contorno desconhecidos de u e q , e $\{\mathbf{y}\}$ é encontrado multiplicando as colunas correspondentes de $[\mathbf{H}]$ ou $[\mathbf{G}]$ pelos valores conhecidos de u ou q . É interessante ressaltar que os valores desconhecidos são agora um conjunto de valores do potencial e sua derivada normal, em vez do potencial apenas, como em elementos finitos. Isto é uma consequência do método do elemento de contorno ser uma formulação híbrida e constitui uma vantagem importante sobre os elementos finitos.

A equação (3.25) pode ser resolvida e todos os valores do contorno são então conhecidos. Feito isso, é possível calcular valores internos de u ou suas derivadas. Os valores de u são calculados em qualquer ponto interno i usando a equação a seguir:

$$u_i = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma \quad (3.26)$$

Observe que agora a solução fundamental é considerada atuando em um ponto interno i e que todos os valores de u e q já são conhecidos. O processo é então de integração direta. A mesma discretização é usada para as integrais de contorno, isto é:

$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j \quad (3.27)$$

Os coeficientes \bar{H}_{ij} e G_{ij} devem ser novamente calculados para cada ponto interno.

Os valores dos fluxos internos nas duas direções cartesianas são calculados pela realização de derivadas, nas respectivas direções, na equação (3.26), ou seja:

$$\begin{aligned}(q_x)_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \\ (q_y)_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma\end{aligned}\tag{3.28}$$

Note que as derivadas são realizadas apenas nas soluções fundamentais u^* e q^* , já que estão sendo computadas as variações de potencial ao redor do ponto i .

4. O PROBLEMA ADVECTIVO DIFUSIVO

A equação de convecção-difusão é uma equação parabólica em derivadas parciais, a qual é largamente utilizada para modelar e descrever fenômenos físicos onde há o transporte de determinada grandeza física, como massa ou energia, em dado sistema devido a processos de difusão e convecção (também denominada advecção), daí o nomenclatura usual da equação.

Para o caso mais simples, isto é, quando o coeficiente de difusão e a velocidade de convecção são constantes unitários e não há fontes ou sorvedouros, a equação toma a forma, em notação indicial:

$$u_{,ii} = v_i u_{,i} \quad (4.1)$$

O termo no lado esquerdo representa o processo de difusão enquanto o termo no lado direito modela a advecção (ou convecção).

De forma análoga ao procedimento aplicado no capítulo anterior para resolver a equação de Laplace, ao multiplicar-se ambos os lados da equação (4.1) por uma variável auxiliar, denominada solução fundamental, obtém-se a formulação integral forte do problema.

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi, X)d\Omega(X) = \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}(X)u^*(\xi, X)d\Omega(X) \quad (4.2)$$

A partir deste ponto, a formulação clássica do MEC, que baseia-se no uso da solução fundamental correlata ao problema de advecção-difusão pode ser aplicada; entretanto, há limitações para esta formulação, especialmente para campos de velocidade variáveis (RAMACHANDRAN, 1994).

No presente estudo optou-se por se trabalhar com cada termo separadamente com formulações distintas. O lado esquerdo (difusivo), se visto isoladamente, corresponde a equação diferencial de Laplace, e será tratado matematicamente como foi exposto no capítulo anterior.

Uma vez que o lado difusivo foi solucionado, os esforços são agora para tratamento do lado advectivo da equação de governo, que para ser escrito em termos de integrais de contorno precisa ser tratado através de técnicas matemáticas adequadas. A expressão a seguir apresenta a equação integral no domínio da advecção em separado:

$$I_A = \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}(X)u^*(\xi, X)d\Omega(X) \quad (4.3)$$

Fazendo uso da diferenciação por partes, pode-se escrever:

$$(v_i uu^*)_{,i} = (v_i u)_{,i} u^* + v_i uu^*_{,i} \quad (4.4)$$

$$(v_i uu^*)_{,i} = [v_{i,i} u + v_i u_{,i}] u^* + v_i uu^*_{,i} \quad (4.5)$$

Considerando o fluido incompressível:

$$v_{i,i} = 0 \quad (4.6)$$

Logo:

$$v_i u_{,i} u^* = (v_i uu^*)_{,i} - v_i uu^*_{,i} \quad (4.7)$$

Ou ainda,

$$I_A = \int_{\Omega} (v_i uu^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} v_i uu^*_{,i} d\Omega \quad (4.8)$$

A Equação (4.8) apresenta a forma integral fraca do termo advectivo. Aplicando sobre esta forma integral o Teorema da Divergência, é possível levar a primeira integral para o contorno.

$$I_A = \int_{\Gamma} v_i(X) n_i(X) u(X) u^*(\xi, X) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) u(X) u^*_{,i}(\xi, X) d\Omega \quad (4.9)$$

Dado que a aplicação do MEC não admite integrais sobre o domínio, volta-se então, a partir de agora, o foco para o tratamento da segunda integral que ainda é correlata ao domínio.

4.1 Regularização do Termo de Domínio

Tratar o termo de domínio consiste em utilizar técnicas matemáticas para o manipular e por fim transformar a integral de domínio em uma integral de contorno, possibilitando assim a aplicação do MEC. Há diversas formas de se alcançar tal resultado, gerando diversas formulações diferentes do MEC como a Dupla Reciprocidade (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1991) e o Método de Integração Radial (GAO, 2002). Neste trabalho optou-se por utilizar o método apresentado por Loeffler (2015) que já foi testado e apresenta bons resultados no tratamento de diversos problemas da engenharia (SANTOS; NETTO, 2018) (NETO; LARA; BARCELOS, 2015), (NETO; MANSUR; BARCELOS,), (BARCELOS; LOEFFLER; BARBOSA, 2018).

A formulação com integração direta (MECID) propõe aproximar todo o núcleo da integral de domínio utilizando funções de base radial. Entretanto um procedimento anterior à aproximação é realizado visando regularizar a singularidade existente quando o

ponto fonte ξ coincide com o ponto interpolante X . Tal procedimento consiste em somar e subtrair na equação integral um termo apropriado

$$I_A = \int_{\Gamma} v_i(X) n_i(X) u(X) u^*(\xi, X) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) u(X) u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \\ + \int_{\Omega} v_i(X) u(\xi) u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega - \int_{\Omega} v_i(X) u(\xi) u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.10)$$

Observe que a escolha do termo a ser adicionado e subtraído é tal que propicia escrever:

$$I_A = \int_{\Gamma} v_i(X) n_i(X) u(X) u^*(\xi, X) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) [u(X) - u(\xi)] u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \\ - \int_{\Omega} v_i(X) u(\xi) u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.11)$$

A presença do termo $[u(X) - u(\xi)]$ no núcleo da segunda integral garante a regularização da singularidade existente quando a solução fundamental é avaliada para pontos interpolantes que se aproximam do ponto fonte.

Ao observar a equação (4.11) nota-se que há agora 2 integrais no domínio. O segundo termo, chamado regularizado será tratado com a formulação MECID e o termo gerado pela regularização, nomeado termo excedente. As secções subsequentes expõe o tratamento de cada um destes dois termos.

4.2 Tratamento do Termo Regularizado

O termo regularizado, T_R , é exposto abaixo.

$$T_R = \int_{\Omega} v_i(X) [u(X) - u(\xi)] u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.12)$$

O MECID preconiza que o todo o núcleo da integral será aproximado por funções de base radial. Em outras palavras, o integrando será aproximado interpolando as funções de base radial, que serão ponderadas por coeficientes por hora indeterminados.

$$v_i(X) [u(X) - u(\xi)] u_{,i}^*(\xi, X) \approx \alpha_j^{\xi} F_j(X_j, X) \quad (4.13)$$

O uso do conceito de primitivas e do Teorema da Divergência em conjunto com propriedades do cálculo integral, possibilita o desenvolvimento a seguir.

$$T_R \approx \int_{\Omega} \alpha_j^{\xi} F_j(X_j, X) d\Omega = \alpha_j^{\xi} \int_{\Omega} \psi_{,ii}^j d\Omega = \alpha_j^{\xi} \int_{\Omega} (\psi_{,i})_{,i}^j d\Omega = \alpha_j^{\xi} \int_{\Gamma} (\psi_{,i} n_i)^j d\Gamma \quad (4.14)$$

Neste ponto é interessante definir uma nova variável que acople o produto entre o cosseno diretor e o gradiente da primitiva como segue.

$$\eta_j = (\psi_{,i} n_i)^j \quad (4.15)$$

A Equação (4.14) pode então ser reescrita.

$$T_R \approx \alpha_j^\xi \int_\Gamma \eta_j d\Gamma \quad (4.16)$$

A integral presente na equação (4.16) pode ser condensada na seguinte notação mais simples:

$$N_j = \int_\Gamma \eta_j d\Gamma \quad (4.17)$$

Desta forma o termo regularizado pode escrito em função dos coeficientes a determinar α_j^ξ e das quantidades N_j , resultando em:

$$T_R \approx \alpha_j^\xi N_j \quad (4.18)$$

4.3 Tratamento do Termo Excedente

Uma vez tratado o termo regularizado, o ultimo termo que demanda tratamento algébrico é o termo de domínio inserido na formulação devido ao artifício da regularização.

$$T_E = \int_\Omega v_i(X) u(\xi) u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.19)$$

Como o termo de potencial $u(\xi)$ é independente das coordenadas espaciais, pode deixar a integral, restando agora apenas os dois outros termos.

$$T_E = u(\xi) \int_\Omega v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.20)$$

Fazendo uso da diferenciação por partes, podemos escrever:

$$(v_i u^*)_{,i} = v_{i,i} u^* + v_i u_{,i}^* \quad (4.21)$$

Pela hipótese de fluido incompressível:

$$v_{i,i} = 0 \quad (4.22)$$

Ou seja,

$$(v_i u^*)_{,i} = v_i u_{,i}^* \quad (4.23)$$

Com o auxílio do Teorema da Divergência e da equação (4.23) o termo excedente pode ser escrito, já no contorno:

$$T_E = u(\xi) \int_\Gamma v_i(X) n_i(X) u^*(\xi, X) d\Gamma \quad (4.24)$$

4.4 Discretização via MEC

Uma vez que todos os termos de domínio foram tratados é possível escrever a equação integral de contorno para o lado advectivo, I_A .

$$I_a = \int_{\Gamma} v_i n_i u^* d\Gamma - \alpha_j^{\xi} N_j - u \int_{\Gamma} v_i n_i u^* d\Gamma \quad (4.25)$$

A partir deste ponto, o MEC é aplicado, o problema é discretizado e o sistema de equações relacionando os valores conhecidos e as incógnitas no contorno pode ser montado. Uma vez executado com sucesso o procedimento de discretização da equação integral de governo é possível gerar um sistema linear responsável por calcular as incógnitas em cada elemento do contorno. Uma visão geral de uma linha do sistema matricial é apresentada a seguir:

$$c(\xi)u(\xi) + \{u_j H_{\xi j}\} - \{q_j G_{\xi j}\} = \{v_i^k n_i^k u_j G_{\xi j}\} + \{\alpha_{\xi j} N_j - u(\xi)\{(v_i n_i)_j G_{\xi j}\} \quad (4.26)$$

Expandindo para todos os nós do problema, temos a forma matricial a seguir:

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{G}']\{\mathbf{u}\} - [\alpha]\{\mathbf{N}\} - [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\} \quad (4.27)$$

Ou ainda:

$$([\mathbf{H}] - [\mathbf{G}'] + [\mathbf{D}])\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} - [\alpha]\{\mathbf{N}\} \quad (4.28)$$

As matrizes $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{G}]$ clássicas da formulação tradicional do MEC, foram abordadas no capítulo anterior. A matriz $[\mathbf{G}']$ é resultado da discretização da primeira integral da equação (4.25), enquanto $[\alpha]\{\mathbf{N}\}$ representa o termo aproximado pelas funções de base radial; e, a matriz $[\mathbf{D}]$ advém do termo excedente tratado na subseção 4.3. Maiores detalhes sobre cada uma destas matrizes podem ser encontrados em Pinheiro (2018).

5. O PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Por definição, som é uma pequena perturbação (P, ρ) dos campos de pressão e densidade de um estado constante (P_0, ρ_0) em um fluido ideal e compressível. Em certo ponto x , as funções $P(x, t)$ e $\rho(x, t)$ representam vibrações com uma pequena amplitude. A relação entre velocidade de propagação de uma onda, densidade e pressão é dada por:

$$P = c^2 \rho \quad (5.1)$$

onde c é a velocidade do som no meio. Utilizando conceitos da equação da continuidade e da equação de Euler, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -c^2 \rho_0 \nabla \cdot (V_t) = c^2 \nabla \cdot (\nabla P) \quad (5.2)$$

Que conduz à equação da onda:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} P_{tt} = 0 \quad (5.3)$$

Assumindo que a equação (5.2) tenha soluções do tipo harmônicas temporais:

$$P(x, t) = u(X) e^{-i\omega t} \quad (5.4)$$

onde $u(x)$ representa a parcela espacial, enquanto $e^{-i\omega t}$ reproduz o comportamento temporal; com $\omega > 0$ sendo a frequência angular. Desse modo, substituindo a solução na forma de harmônicos temporais (5.4) na equação (5.3), obtém-se:

$$\nabla^2 (u(X) e^{-i\omega t}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [u(X) e^{-i\omega t}]}{\partial t^2} = 0 \quad (5.5)$$

Observa-se que o primeiro termo, com o operador Laplaciano ∇^2 , é essencialmente de derivadas espaciais, assim $e^{-i\omega t}$ é tomada como constante, para cada instante t . Já no segundo termo, com derivadas parciais temporais, a função $u(X)$ é, desta vez, tomada como constante, para cada posição x . Assim, é possível escrever:

$$e^{-i\omega t} \nabla^2 (u(X)) + \frac{\omega^2}{c^2} u(X) e^{-i\omega t} = 0 \quad (5.6)$$

Então, a equação (5.6) pode ser simplificada para:

$$u_{,ii} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad (5.7)$$

chamada Equação de Helmholtz.

A equação de Helmholtz, que representa uma forma independente do tempo da equação de onda, surge em vários domínios da ciência quando se busca modelar fenômenos que envolvem harmônicos temporais de fenômenos de propagação e dispersão. Aplicações clássicas da equação de Helmholtz englobam: o estudo da radiação eletromagnética, sismologia e acústica (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2008).

5.1 Formulação Integral Forte do Problema

Integrando a equação (5.7) sobre o domínio físico $\Omega(X)$, usando uma função auxiliar, solução fundamental de um problema correlato, $u^*(\xi; X)$, resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.8)$$

Aplicando a integração por partes e o Teorema da Divergência na equação (5.8), resulta na seguinte expressão:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (5.9)$$

Na equação (5.9), $u(X)$ é o potencial escalar e $q(X)$ é sua derivada normal; $u^*(\xi, X)$ é a solução fundamental para a Equação de Laplace e $q^*(\xi, X)$ é sua derivada normal.

5.2 Regularização do Termo de Domínio

Note que existe uma integral de domínio na equação (5.9). Essa integral de domínio deverá ser transformada em integral de contorno. De forma análoga ao que foi exposto no capítulo 4 a formulação MECID pode ser utilizada para tratá-la. Entretanto, um procedimento anterior à aproximação é realizado visando regularizar a singularidade existente quando o ponto fonte ξ coincide com o ponto interpolante X . Tal procedimento consiste em somar e subtrair na equação integral um termo apropriado, para problema de Helmholtz o procedimento é (LOEFFLER; MANSUR, 2017):

$$I_D = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (5.10)$$

Então:

$$I_D = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(\xi)u^*(\xi; X)d\Omega + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(\xi)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (5.11)$$

Rearranjando os termos:

$$I_D = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left\{ \int_{\Omega} [u(X) - u(\xi)] u^*(\xi; X) d\Omega + \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} \quad (5.12)$$

Ao observar a equação (5.12) nota-se que há agora duas integrais no domínio. O primeiro termo, chamado regularizado será tratado com a formulação MECID e o termo gerado pela regularização, nomeado termo excedente é tratado via Tensor de Galerkin. As secções subsequentes expõe o tratamento de cada um destes dois termos.

5.3 Tratamento do Termo Regularizado

O termo regularizado, T_R , é exposto abaixo.

$$T_R = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} [u(X) - u(\xi)] u^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.13)$$

Como já exposto, a formulação MECID propõe aproximar todo o núcleo da integral de domínio utilizando funções de base radial ponderadas por coeficientes por hora indeterminados.

$$- \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 [u(X) - u(\xi)] u^*(\xi; X) \approx \alpha_j^\xi F_j(X) \quad (5.14)$$

Se é possível encontrar funções primitivas ψ_j das funções radiais utilizadas, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \alpha_j^\xi F_j d\Omega = \int_{\Omega} \alpha_j^\xi (\psi_{ii})^j d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha_j^\xi (\psi_i n_i)^j d\Gamma \quad (5.15)$$

Considerando que:

$$\eta_j = (\psi_i n_i)^j \quad (5.16)$$

onde $n_i(X)$ são os cossenos diretores definidos pela conformação geométrica do corpo. A Equação (5.13) pode então ser reescrita.

$$T_R \approx \alpha_j^\xi \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (5.17)$$

A integral presente na equação (5.17) pode ser condensada em uma notação mais simples.

$$N_j = \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (5.18)$$

Desta forma o termo regularizado pode escrito em função dos coeficientes a determinar α_j^ξ e das quantidades N_j , resultando em:

$$T_R \approx \alpha_j^\xi N_j \quad (5.19)$$

5.4 Tratamento do Termo Excedente

Uma vez tratado o termo regularizado, o ultimo termo que demanda tratamento algébrico é o termo de domínio inserido na formulação devido ao artifício da regularização.

$$T_E = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.20)$$

Este último termo que pode ser tratado matematicamente via Tensor de Galerkin (KYTHE, 1995) e assim ser transformado numa integral de contorno; toma-se inicialmente:

$$G_{,ii}^*(\xi, X) = u^*(\xi, X) \quad (5.21)$$

Pode-se escrever então:

$$T_E = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} u(\xi) G_{,ii}^*(\xi, X) d\Omega \quad (5.22)$$

Ou ainda:

$$T_E = -u(\xi) \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Omega} G_{,ii}^*(\xi, X) d\Omega \quad (5.23)$$

Aplicando o Teorema da Divergência, o termo excedente pode ser reescrito:

$$T_E = -u(\xi) \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\xi, X) n_i(X) d\Gamma \quad (5.24)$$

A derivada direcional de $G^*(\xi, X)$ é:

$$G_{,i}^*(\xi, X) n_i(X) = \frac{1}{4\pi} \{0.5 - \ln[r(\xi, X)]\} r_i n_i \quad (5.25)$$

5.5 Discretização via MEC

Uma vez que todos os termos de domínio foram tratados é possível escrever a equação integral de contorno.

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \\ = \alpha_j^{\xi} N_j - u(\xi) \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\xi, X) n_i(X) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.26)$$

Após a aplicação em todos os nós do contorno usando a técnica de colocação, a equação (5.26) pode ser expressa na forma matricial que correlaciona os valores nodais prescritos com os valores incógnitos.

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 ([\alpha]\{\mathbf{N}\} + \{\mathbf{Z}\}) \quad (5.27)$$

As matrizes $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{G}]$ são clássicas da formulação tradicional do MEC, foram abordadas nos capítulos anteriores. O termo $[\alpha]\{N\}$ representa o termo aproximado pelas funções de base radial; e, o vetor $[\mathbf{Z}]$ advém do termo excedente tratado na subseção 5.4. Maiores detalhes sobre o processo de aplicação do MEC, discretização e construção das matrizes finais via MECID no problema de Helmholtz podem ser encontrados nas referências (LOEFFLER; MANSUR, 2017) e (CAMPOS et al., 2020).

5.6 Aplicação da Equação de Helmholtz ao Problema de Autovalor

O movimento de um sistema de um grau de liberdade (GDL), não amortecido, quando retirado do repouso por uma excitação pontual e deixado para vibrar livremente, pode ser descrito pela frequência de vibração deste, denominada frequência natural. Entretanto, para descrever o movimento de sistemas mais complexos, com n graus de liberdade, é preciso não apenas explicitar a frequência natural como também a configuração de deslocamento natural, o chamado modo de vibração. Além disso, existem tantas frequências e modos naturais de vibração quanto o número de GDL do sistema.

A equação de movimento para um sistema não amortecido com n GLD pode ser escrita como (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2008):

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\ddot{x}(t)\} + [\mathbf{K}]\{x(t)\} &= 0 \\ \{x(0)\} &= \{x_0\} \\ \{\dot{x}(0)\} &= \{\dot{x}_0\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde $x(t)$ é o vetor de deslocamento, $[\mathbf{M}]$ é a matriz de inércia e $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez. Para um sistema físico, $[\mathbf{M}]$ e $[\mathbf{K}]$ são matrizes positivas definitas simétricas.

Para achar a resposta da vibração livre, assume-se a resposta harmônica complexa análoga ao caso de um GDL, isto é

$$\{x(t)\} = \{ue^{i\omega t}\} \quad (5.29)$$

onde u e ω são, respectivamente, vetor e constante a serem determinadas. Substituindo a solução assumida (5.29) na equação (5.28):

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{ue^{i\omega t}\} = 0 \quad (5.30)$$

Como $e^{i\omega t} \neq 0$, chega-se em um problema algébrico de autovalor e autovetor:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{u\} = 0 \quad (5.31)$$

com valores de u e ω desconhecidos. Onde ω , o autovalor, é a frequência natural do sistema, u , o autovetor, é modo de forma do sistema. ω reapresenta a frequência de oscilação enquanto u está associado à configuração de deslocamentos. Isto é, o sistema pode vibrar em sincronia com a frequência e a vibração forma um certo padrão de deslocamento, cuja forma não muda ao longo do movimento; apenas a amplitude da configuração muda. Pode-se observar que existem tantos valores de ω quanto de u , equivalentes ao número de GDL do sistema.

A análise do problema de autovalor, fundamenta-se na obtenção numérica dos valores ω , que atendam a equação (5.31). Onde os valores da matriz $[\mathbf{K}]$ referem-se ao termo difusivo, enquanto os valores da matriz $[\mathbf{M}]$ representam o termo reativo da equação de Helmholtz, tais matrizes são obtidas através dos métodos numéricos onde a matriz de inércia é explicitada.

Além de seu apelo prático, o problema de autovalor pode ser utilizado como uma poderosa ferramenta de avaliação, uma vez que os valores das frequências calculadas estão diretamente relacionados à qualidade e robustez do modelo numérico. No MEC, a consistência da matriz de inércia, que é aproximada usando funções de base radial, é o ponto focal desta análise.

Autovalores negativos e complexos podem surgir relacionados a frequências mais altas, indicando a perda de precisão do modelo numérico.

5.6.1 Construção da Matriz de Inércia

O sistema descrito pela equação 5.27 precisa ser adequadamente operacionalizado, uma vez que envolve simultaneamente tanto valores do potencial quanto de sua derivada normal. Para tanto, é necessário usar novas submatrizes nas quais se destacam os valores nodais de u e q prescritos:

$$\begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Considerando que, para este tipo de problema, os valores prescritos de \bar{u} e \bar{q} são nulos:

$$\begin{aligned} H_{u\bar{q}}u - G_{u\bar{q}}q &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 M_{u\bar{q}}u \\ H_{q\bar{q}}u - G_{q\bar{q}}q &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 M_{q\bar{q}}u \end{aligned} \quad (5.33)$$

Dessas duas últimas equações, eliminando-se a derivada do potencial q encontra-se:

$$\bar{H}u - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \bar{M}u = 0 \quad (5.34)$$

Onde:

$$\bar{H} = H_{qq} - G_{qu}G_{uu}^{-1}H_{uq} \quad (5.35)$$

$$\bar{M} = M_{qq} - G_{qu}G_{uu}^{-1}M_{uq} \quad (5.36)$$

6. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integração numérica é um dos pontos altamente relevantes no contexto do Método dos Elementos de Contorno, sendo tema de diversos trabalhos nas últimas décadas (TANAKA; SLADEK, 1994). A importância desse tópico é percebida a partir das equações 3.24, 4.28, 5.27 (repetida em sua forma geral a seguir), onde os coeficientes das matrizes $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{G}]$ ali representadas podem ser chamados de coeficientes de influência, como apresentado no capítulo 3.

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{b}\} \quad (6.1)$$

Para elementos mais simples como o constante ou o linear, o cálculo analítico das integrais envolvidas na determinação destes coeficientes é relativamente descomplicado.

Portanto, apesar da possibilidade de se utilizar métodos de integração analítica ou semi-analítica para o cálculo das matrizes MEC, esta prática geralmente limita o tipo de elemento que pode ser usado para discretizar o contorno, obrigando o uso de elementos constantes, que precisam de uma discretização com maior número de elementos para obter uma representação das variáveis físicas do problema com a mesma qualidade dos elementos quadráticos ou de maior ordem. Um maior número de elementos implica em matrizes maiores, juntamente com o fato de as matrizes do método serem cheias e não simétricas, eleva o custo computacional do MEC devido ao grande número de operações necessárias ao se montar e resolver o sistema linear associado.

A integração numérica, em sua forma mais avançada, possibilita o uso de elementos quadráticos ou de maior ordem, o que, em primeira instância, reduz a ordem das matrizes. Porém, os métodos conhecidos, em geral, necessitam de uma quantidade elevada de pontos de integração para obter uma boa precisão no cálculo das matrizes. Assim, técnicas que propõem aumentar a precisão das técnicas numéricas, como o esquema autoadaptativo proposto por Telles (1987), são deveras relevantes.

Ao longo dos anos, diversas outros trabalhos foram desenvolvidas no intuito de se calcular de forma mais precisa possível estes coeficientes (HAYAMI; BREBBIA, 1987), (KIM-CHUAN; MUKHERJEE, 1994), (ZHU; SHAH; DATTA, 1996), (JOHNSTON, 1999), (GAO, 2010).

Boa parcela das técnicas que foram apresentadas utilizam-se de quadraturas. As Quadraturas numéricas são técnicas que propõem obter o valor da integral almejada através de uma interpolação linear de valores da função a ser integrada, utilizando-se de

pontos de integração específicos, ζ_i , ponderados por determinados coeficientes, os pesos w_i , assim:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx w_1f(\zeta_1) + w_2f(\zeta_2) + \dots + w_nf(\zeta_n) \quad (6.2)$$

A escolha dos pontos de integração ζ_i e dos pesos w_i é de suma importância para uma boa representação do integrando no intervalo desejado; e pode ser feita de acordo com diversos procedimentos, que, de forma, geral podem ser agrupados em duas categorias (CLAUDIO D.M. MARIN, 1994):

- Quadraturas Fixas: A escolha dos parâmetros ζ_i e w_i não depende do comportamento da função, trata-se apenas de uma escolha do tipo de esquema de integração a ser utilizado; e,
- Quadraturas Adaptativas: neste caso a definição dos pontos de integração ζ_i é feita de acordo com o comportamento da função $f(x)$, de tal forma a obter-se uma maior concentração dos pontos ζ_i na região onde a função apresente uma variação mais acentuada.

No ambiente do MEC, a Quadratura Gaussiana é amplamente utilizada para o cálculo numérico de integrais, devido a sua simplicidade e rapidez. O processo de integração via Quadratura Gaussiana pode ser ilustrado de acordo com a expressão que se segue (ABRAMOWITZ M. STEGUN, 1970).

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{p=1}^{NPG} w_p f(\zeta_p) \quad (6.3)$$

onde NPG é o número de pontos de integração, w_i são os pesos de Gauss e ζ_p os pontos de Gauss.

Tal esquema de integração possui a vantagem de calcular de forma precisa as integrais de funções polinomiais de grau $p = 2NPG - 1$ (FRANCO, 2006).

Os pontos de integração, ζ_p , são valores discretos distribuídos ao longo do intervalo real $[-1; 1]$ que é parametrizado por uma variável natural. A distribuição de tais pontos é simétrica em relação à origem, mas estes não se encontram igualmente espaçados ao longo do intervalo de integração. Pode-se adotar um número qualquer de pontos de integração, sendo que para integrandos não expressos por funções polinomiais a escolha de um maior número de pontos de integração proporcionará uma melhor avaliação da integral (FRANCO, 2006).

Mesmo quando existe singularidade na função a ser integrada, a quadratura de Gauss ainda pode ser utilizada, pois como ocorre na formulação direta de Elementos de Contorno, aqui adotada para a equação de Laplace, o valor Principal de Cauchy das integrais resultantes e o valor obtido via quadratura de Gauss são coincidentes quando

estas são calculadas no sentido usual de integração (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

6.1 Classificação das Integrais

De acordo com a função a ser integrada e o intervalo de integração, as integrais podem ser classificadas como sendo (BEER, 2015):

- Integrais Não Singulares (Regulares): Quando o integrando, ao longo de todo o intervalo de integração, não apresenta nenhuma singularidade. Isto é, ao longo do intervalo de integração a função a ser integrada não cresce ou decresce infinitamente em nenhum ponto;
- Integrais Singulares: Quando o integrando apresenta ao menos uma singularidade ao longo do intervalo de integração; e,
- Integrais Quase Singulares: Quando o ponto onde o integrando apresenta uma singularidade não pertence ao intervalo de integração, mas encontra-se próximo a ele. Neste caso, apesar de não se atingir a singularidade no intervalo de integração o integrando apresenta uma elevada taxa de crescimento, isto é, um comportamento assintótico.

No caso específico dos problemas de campo escalar aqui tratados, as soluções fundamentais envolvem funções que se tornam singulares conforme se reduz a distância do chamado ponto fonte em relação ao elemento de contorno ao qual se efetua a integração. Logo, o uso de esquemas de integração autoadaptativos é recomendado, pois conforme o caso, pode-se obter os três tipos de integrações: Singulares, Quase Singulares e Não Singulares, tornando assim a obtenção dos valores numéricos mais precisa. A vantagem dos esquemas de integração autoadaptativos é que, com apenas um único procedimento de integração, consegue-se englobar todos os tipos possíveis de integrais a serem avaliadas.

6.2 A Transformada de Telles

Telles (1987) apresentou um método eficiente para calcular integrais Singulares ou Quase singulares que pode ser aplicado no cálculo das integrais do MEC. Trata-se de uma transformação polinomial de terceiro grau que visa melhorar a aproximação da Quadratura Gaussiana nas proximidades da singularidade. Este procedimento pode ser facilmente implementado no MEC e pode ser implementado de forma autoadaptável, isto é, o método todo produz uma variável que depende da distância do ponto fonte ξ ao elemento.

A autoadaptação do método também o torna inativo quando não for útil, ou seja, para grandes distâncias entre o ponto fonte e o elemento a ser integrado. Tal fato garante maior confiabilidade e segurança na aplicação. A seguir apresenta-se o procedimento de integração utilizando a Transformada 3ª ordem proposta por (TELLES, 1987), que posteriormente será inserido em um esquema de integração autoadaptativo.

Tendo-se, inicialmente, a integral apresentada a seguir, onde a função a ser integrada $f(\eta)$ é singular no ponto $\bar{\eta}$.

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (6.4)$$

sendo η a coordenada natural da integral.

Adota-se então, uma transformação de coordenadas de terceira ordem, dada de acordo com a seguinte relação:

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (6.5)$$

onde:

- γ é a coordenada fornecida pelos pontos de integração da Quadratura Gaussiana e, após a transformação, a coordenada η estará associada ao peso da Quadratura Gaussiana correspondente a ponto de integração original γ ; e,

- a, b, c, d são parâmetros dependentes da posição do ponto de singularidade η .

Tal transformação de coordenadas permanece válida para qualquer posição do ponto de singularidade e produz automaticamente uma maior concentração dos pontos de integração próximos ao ponto de singularidade (TELLES, 1987).

Os parâmetros $a, b, c, e d$ são definidos pela aplicação das seguintes condições:

$$\eta(1) = 1; \quad \eta(-1) = -1; \quad \left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad e \quad \left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (6.6)$$

As duas primeiras condições de contorno expostas na equação (6.6) impõem que o intervalo da função transformada permanece $[-1, 1]$, o que coincide com uso de elementos isoparamétricos em coordenadas generalizadas no MEC. A terceira condição, implica que o Jacobiano dessa transformação deve preferivelmente reduzir a ordem da singularidade no ponto $\bar{\eta}$ e, a quarta condição é introduzida para produzir um ponto de mínimo no Jacobiano para o ponto η (um ponto de máximo no Jacobiano pode também ser obtido). Vale ressaltar que a derivada segunda apresentada na quarta condição corresponde à derivada primeira do jacobiano, que se comporta como a melhor aproximação linear da transformação, vide equação (2.2). Este é o principal fundamento da Transformada de Telles.

A aplicação das condições dadas na equação (6.6) à equação (6.5), fornece a solução em termos dos parâmetros a , b , c , d (TELLES, 1987):

$$a = \frac{1}{Q} \quad b = \frac{-3\bar{\gamma}}{Q} \quad c = \frac{3\bar{\gamma}^2}{Q} \quad d = -b \quad (6.7)$$

sendo:

$$Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2 \quad (6.8)$$

onde $\bar{\gamma}$ é o valor da coordenada γ correspondente ao ponto de singularidade $\bar{\eta}$, isto é:

$$\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta} \quad (6.9)$$

O parâmetro $\bar{\gamma}$ pode ser obtido pela resolução da seguinte equação:

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|} + \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|} + \bar{\eta} \quad \eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad (6.10)$$

A Equação (6.4), pode ser então reescrita da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta(\gamma))J(\gamma)d\gamma \quad (6.11)$$

$J(\gamma)$ é o Jacobiano da Transformação dado por:

$$J(\gamma) = \frac{d\eta}{d\gamma} = 3a\gamma^2 + 2b\gamma + c \quad (6.12)$$

Entretanto, estes valores de coeficientes expressos na equação (6.7), restringem-se, no contexto de elementos de contorno, para casos onde o ponto fonte é colocado no intervalo do elemento, ou seja, a singularidade existente ocorre no elemento de contorno.

Para agrupar no mesmo esquema o calculo das integrais Não Singulares e Quase Singulares torna-se necessário algumas modificações, visando obter-se um esquema de integração autoadaptativo, onde os coeficientes da transformada são determinados de acordo com a distância do ponto fonte ao o elemento de contorno ao longo do qual é feita a integração. Isto é conseguido pela adição de certos parâmetros nas expressões acima apresentadas, conforme será exposto posteriormente na secção 6.4.

6.3 Aplicações da Transformada de Telles

A seguir são apresentados e resolvidos alguns exemplos de integrais envolvendo funções singulares. Apresentam-se os valores das integrais utilizando-se da Transformada de 3ª ordem e do procedimento tradicional da quadratura de Gauss, ambos aplicados adotando-se diferentes números de pontos de integração (NPG). Tais resultados são, então, comparados com soluções de referência apresentadas em Telles (1987). Os exemplos foram

resolvidos com 4, 8, 10, 12, 16 e 20 pontos de integração. O erro percentual, e , foi calculado segundo a expressão convencional:

$$e = 100\% \left| \frac{I_n - I_a}{I_a} \right| \quad (6.13)$$

onde, I_n é o valor numérico e I_a o valor analítico da integral.

6.3.1 Exemplo I

$$I = \int_{-1}^1 \ln(1 - \eta) d\eta = -0.613705639 \quad (6.14)$$

A função logaritmo neperiano é indefinida para o ponto $\eta = 1$, visto que o argumento desta função torna-se nulo para este valor. Sendo assim, a integral a ser avaliada torna-se singular neste ponto.

Aplicando $\eta = 1$ na equação (6.10), tem-se:

$$\bar{\gamma} = 1 \quad (6.15)$$

Da equação (6.8), obtêm-se:

$$Q = 4 \quad (6.16)$$

Logo os coeficientes da transformada, vide (6.5), são:

$$a = 0.25 \quad b = -0.75 \quad c = 0.75 \quad d = 0.75 \quad (6.17)$$

Para melhor ilustrar o procedimento de transposição dos pontos de integração para as proximidades do ponto de singularidade $\eta = 1$, apresenta-se a tabela (4) contendo as coordenadas originais dos pontos de integração (Pontos de Gauss), e dos pontos após a aplicação da transformada (Pontos Transformados), para $NPG = 10$.

i	Pontos de Gauss	Pontos Transformados
1	-0.97390652	-0.92273641
2	-0.86506337	-0.62188772
3	-0.67940956	-0.18415860
4	-0.43339539	0.26372846
5	-0.14887434	0.62089667
6	0.14887434	0.84585798
7	0.43339539	0.95452420
8	0.67940956	0.99176257
9	0.86506337	0.99938577
10	0.97390652	0.99999556

Tabela 4 – Coordenadas dos Pontos de Integração do Exemplo I

Nota-se, que após a aplicação da transformada, os pontos de integração não mais apresentam simetria em relação a origem do sistema de coordenadas naturais, isto se deve ao deslocamento dos pontos na direção da coordenada $\eta = 1$, isto é, o ponto de singularidade.

A Figura (11) apresenta o gráfico contendo o valor numérico da integral, obtido através do procedimento tradicional da Quadratura de Gauss e da Transformada de 3ª ordem, em comparação com o valor analítico I_a . Já a figura (12) exhibe o erro percentual de ambas formulações em relação a solução de referência, em função do número de pontos de integração.

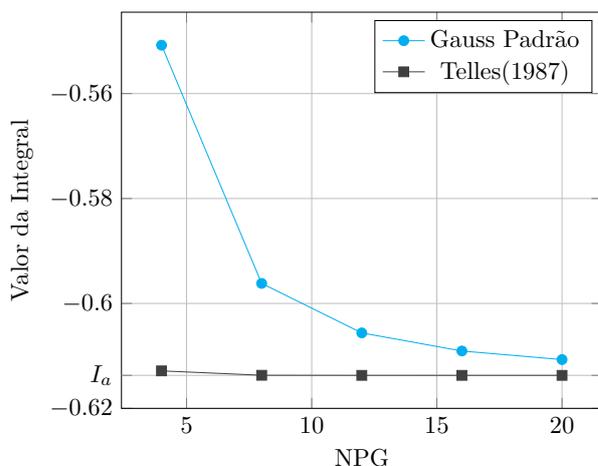


Figura 11 – Exemplo I: Integral

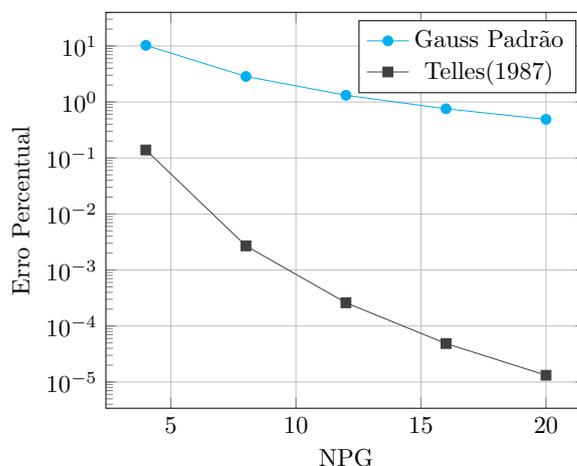


Figura 12 – Exemplo I: Erro

Constata-se uma redução do erro com a utilização da Transformada para todos os valores de NPG. Destaca-se que, se utilizando de apenas 4 (quatro) pontos de integração, os resultados da Transformada são superiores aos resultados da integração clássica de Gauss com até 20 (vinte) pontos. Tal resultado indica a eficácia da Transformada em aumentar a precisão da integração, fato corroborado pela figura (11).

6.3.2 Exemplo II

$$I = \int_{-1}^1 \ln |\eta| d\eta = -2.0 \tag{6.18}$$

Esta integral torna-se singular para o ponto $\bar{\eta} = 0$

Nestes caso tem-se:

$$\bar{\gamma} = 0.0 \tag{6.19}$$

Então:

$$Q = 1.0 \tag{6.20}$$

Logo os coeficientes da transformada, 6.5, são:

$$a = 1.0 \quad b = 0.0 \quad c = 0.0 \quad d = 0.0 \quad (6.21)$$

De forma análoga ao Exemplo I, a tabela (5) compila a posição dos Pontos de Gauss e dos Pontos Transformados para este exemplo.

i	Pontos de Gauss	Pontos Transformados
1	-0.97390652	-0.92374443
2	-0.86506337	-0.64735687
3	-0.67940956	-0.31361366
4	-0.43339539	-0.08140534
5	-0.14887434	-0.00329959
6	0.14887434	0.00329958
7	0.43339539	0.08140534
8	0.67940956	0.31361366
9	0.86506337	0.64735687
10	0.97390652	0.92374443

Tabela 5 – Coordenadas dos Pontos de Integração do Exemplo II

As figuras (13) e (14) apresentam os resultados numéricos da integração e o gráfico contendo o erro percentual do procedimento tradicional da Quadratura de Gauss e da Transformada de 3ª ordem, ambos em relação a solução de referência, para diferentes números de pontos de integração.

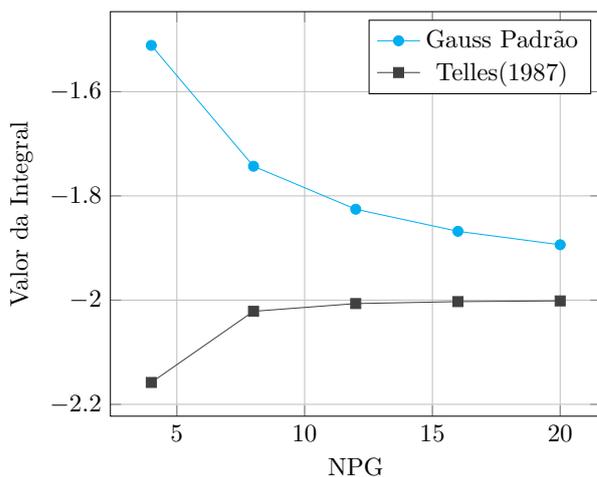


Figura 13 – Exemplo II: Integral

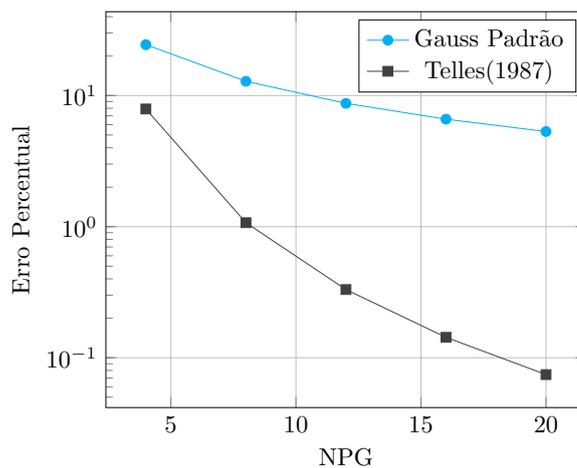


Figura 14 – Exemplo II: Erro

Nota-se novamente uma performance superior da Transformada frente à integração Gaussiana padrão, tal fato se deve ao fato de a Transformada cobrir a região de integração de maneira a alocar um maior número de pontos na região de maior gradiente da função (singularidade). A figura (15) possibilita um maior entendimento de tal procedimento.

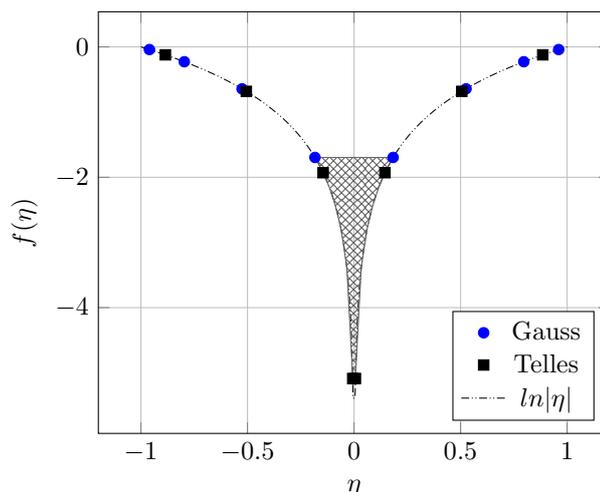


Figura 15 – Interpretação gráfica das integrais (NPG = 8)

O valor de uma integral definida pode ser interpretado geometricamente como uma área sob uma dada curva (APOSTOL, 1967). Para o exemplo em análise, a integral pode ser entendida como o valor negativo da área entre a curva e o eixo definido pela ordenada vertical $f(\eta) = 0$. Aplicando a idéia de quadratura, nota-se que a região hachurada na figura (15) não é contabilizada na integração Gaussiana padrão; entretanto, com a aplicação da Transformada de Telles, o deslocamento dos pontos garante que esta região seja computada.

6.3.3 Exemplo III

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{(1.1 - \eta)^2} = 9.52380952 \quad (6.22)$$

Esta integral torna-se singular para o ponto $\bar{\eta} = 1.1$. Observe que a singularidade não pertence ao intervalo de integração mas se encontra nas proximidades deste, caracterizando uma integral Quase Singular. Ao apresentar este exemplo propõe-se analisar o comportamento da Transformada padrão apresentada e em resolver integrais Quase Singulares. Na secção posterior, após se apresentar o esquema autoadaptativo, este exemplo será novamente resolvido com o auxilio deste e então será possível avaliar a as particularidades do esquema autoadaptativo frente a Transformada padrão.

Aplicando os conceitos já discutidos, tem-se:

$$\bar{\gamma} = 2.13706 \quad (6.23)$$

Então:

$$Q = 14.70106 \quad (6.24)$$

Logo os coeficientes da transformada, são:

$$a = 0.06802 \quad b = -0.43610 \quad c = 0.93198 \quad d = 0.43610 \quad (6.25)$$

De forma análoga aos exemplos anteriores, a tabela (6) compila a posição dos Pontos de Gauss e dos Pontos Transformados para este exemplo.

i	Pontos de Gauss	Pontos Transformados
1	-0.97390652	-0.94803241
2	-0.86506337	-0.74050246
3	-0.67940956	-0.41972829
4	-0.43339539	-0.05526314
5	-0.14887434	0.28746536
6	0.14887434	0.56540939
7	0.43339539	0.76364128
8	0.67940956	0.88932628
9	0.86506337	0.96000649
10	0.97390652	0.99295634

Tabela 6 – Coordenadas dos Pontos de Integração do Exemplo II

As figuras (16) e (17) apresentam os gráficos contendo o valor numérico e o erro percentual para diferentes números de pontos de integração.

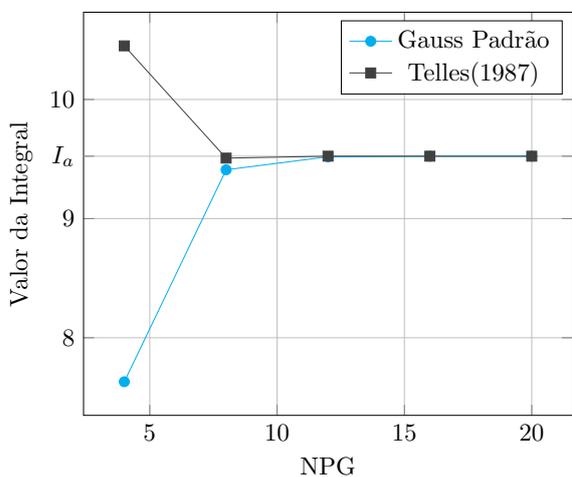


Figura 16 – Exemplo III: Integral

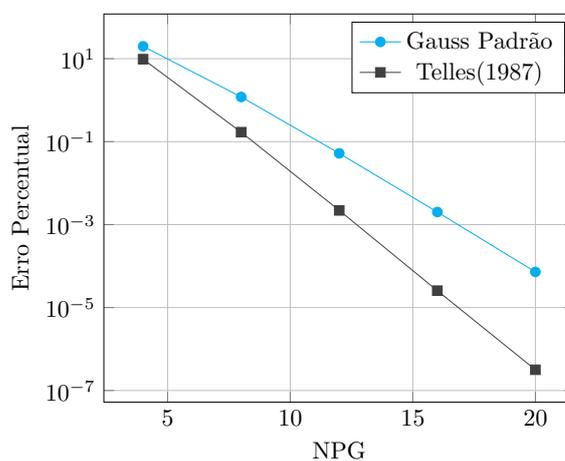


Figura 17 – Exemplo III: Erro

Nota-se que, mesmo se tratando de uma integral Quase Singular, a Transformada padrão, isto é, ainda sem propriedade autoadaptativa, se mostra capaz de apresentar resultados superiores à integração Gaussiana.

6.4 Esquema de Integração Autoadaptativo

No contexto do MEC, um esquema de integração autoadaptativo é pensado para resolver integrais singulares (quando o ponto fonte está sobre o elemento), integrais quase-singulares (quando o ponto fonte encontra-se próximo ao elemento de integração) e integrais não singulares (quando o ponto fonte encontra-se distante do elemento de integração).

Telles (1987) preconiza inicialmente a definição de uma variável D , que atua como um controle do tipo de integração a ser resolvida:

$$D = \frac{2R_{min}}{L} \quad (6.26)$$

Onde : R_{min} é a menor distância entre o ponto fonte e o elemento de integração; e, L é definido como sendo a distância entre os pontos extremos do elemento de contorno.

Outras medidas podem ser utilizadas para a definição de L . Por exemplo, uma alternativa plausível é a adoção do comprimento do elemento de contorno, embora esta nova definição somente irá diferenciar-se da distância entre os pontos extremos do elemento de contorno para elementos possuindo uma geometria curva (elementos quadráticos), mas tendo a desvantagem de ser uma medida computacionalmente mais onerosa (BULCÃO, 1999).

Há diversas formas de calcular o parâmetro R_{min} ; no presente trabalho ele é calculado determinando a menor distância entre o ponto fonte ξ e o ponto sobre a curva que define o elemento de integração, restrito ao intervalo onde o elemento é definido, figura (18.a).

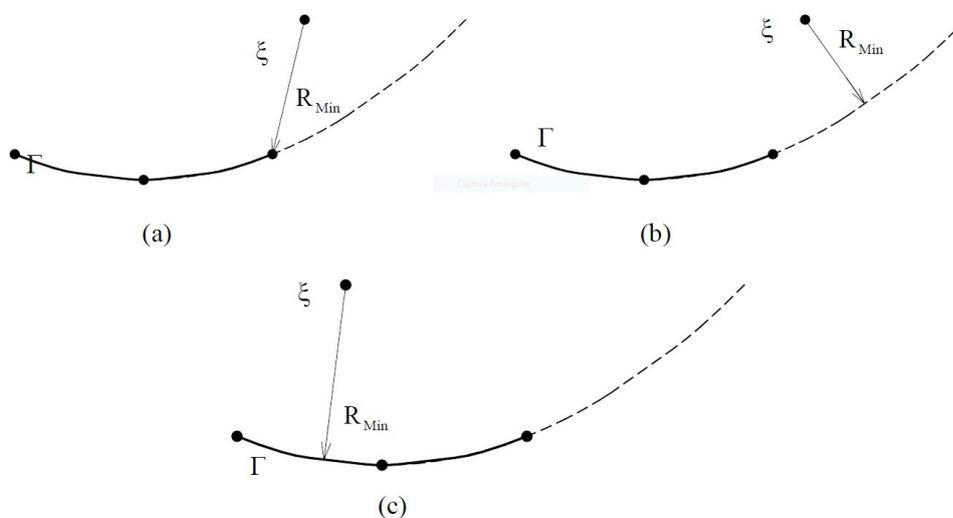


Figura 18 – Procedimentos para definição de R_{min}

Em ambiente computacional, o valor de R_{min} pode ser encontrado com auxílio

de um algoritmo de minimização que converge para a menor distância entre o elemento de integração e o ponto fonte. Neste trabalho, o algoritmo de minimização utilizado é o *Golden Section Search*, exposto com detalhes em Press W.H. Teukolsky, Vetterling e B.P (2007), devido a sua simplicidade e fácil implementação computacional, embora tal algoritmo apresente uma convergência linear.

De posse de D é possível determinar o parâmetro de adaptação \bar{r} , através deste, é definido o tipo de integração a ser efetuada: singular, quase singular ou não singular. É justamente a introdução do parâmetro \bar{r} que faz com que o esquema de integração utilizando a transformada de 3ª ordem torne-se autoadaptativo. Defini-se \bar{r} de acordo com os intervalos:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 0 & 0.00 \leq D < 0.05 \\ \bar{r} &= 0.85 + 0.24 \ln(D) & 0.05 \leq D < 1.30 \\ \bar{r} &= 0.893 + 0.0832 \ln(D) & 1.30 \leq D < 3.618 \\ \bar{r} &= 1 & D \geq 3.618 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Observe que quando $\bar{r} = 1$, os pontos de integração obtidos através da transformação de coordenadas degeneram-se novamente nos pontos de Gauss e Jacobiano da transformação tornando-se unitário. A medida que o valor de \bar{r} tende para zero, o efeito da transformação de coordenadas torna-se cada vez mais acentuado.

Encontra-se então o valor de $\bar{\gamma}$:

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{r}} \quad (6.28)$$

Onde:

$$p = \frac{1}{3(1 + 2\bar{r})^2} \left[4\bar{r}(1 - \bar{r}) + 3(1 - \bar{\eta}^2) \right] \quad (6.29)$$

$$q = \frac{1}{2(1 + 2\bar{r})} \left[\left(\bar{\eta}(3 - 2\bar{r}) - \frac{2\bar{\eta}^3}{1 + 2\bar{r}} \right) \frac{1}{1 + 2\bar{r}} - \bar{\eta} \right] \quad (6.30)$$

A transformação de coordenadas de 3ª ordem pode então ser iniciada através dos cálculos dos parâmetros a, b, c, d, dados agora de acordo com as seguintes expressões:

$$a = \frac{(1 - \bar{r})}{Q} \quad b = -\frac{3\bar{\gamma}(1 - \bar{r})}{Q} \quad c = \frac{(\bar{r} + 3\bar{\gamma}^2)}{Q} \quad d = -b \quad (6.31)$$

6.4.1 Exemplo III (Via Esquema Adaptativo)

Na subsecção 6.3.3, a integral abaixo (equação 6.32) foi resolvida utilizando a formulação padrão da Transformada de Telles. Observou-se que, embora esta seja uma

integral Quase Singular, a Transformada se mostra eficaz em aumentar a precisão da integração. Na presente subsecção, uma vez que o o esquema autoadaptativo foi apresentado, propõem-se resolver novamente esta integral, utilizando agora a formulação autoadaptativa e comparar os resultados com os apresentados anteriormente.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{(1.1 - \eta)^2} = 9.52380952 \quad (6.32)$$

Esta integral torna-se singular para o ponto $\eta = 1.1$ que se encontra nas proximidades do integrando. A figura (19) apresenta estes dados juntamente com os parâmetros geométricos R_{min} e L .

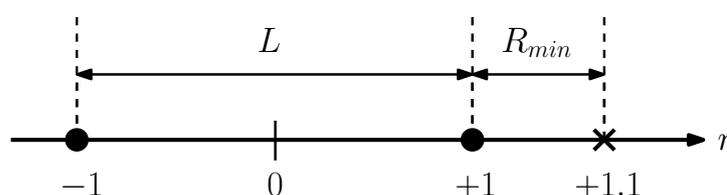


Figura 19 – Parâmetros L e R_{min}

Tem-se então:

$$L = 2 \quad e \quad R_{min} = 0.1 \quad (6.33)$$

Logo, pela equação (6.26):

$$D = \frac{0.2}{2} = 0.1 \quad (6.34)$$

O parâmetro \bar{r} pode ser então determinado:

$$\bar{r} = 0.893 + 0.0832 \ln(0.1) = 0.29737958 \quad (6.35)$$

Das equações (6.29) e (6.30) :

$$p = 0.07022228 \quad e \quad q = -0.15289209 \quad (6.36)$$

Assim, via equação (6.28):

$$\bar{\gamma} = 0.67453554 \quad (6.37)$$

Logo, os coeficientes da transformada, são:

$$a = 0.29709 \quad b = -0.60119 \quad c = 0.70291 \quad d = 0.60119 \quad (6.38)$$

A Figura (20) apresenta graficamente a distribuição dos pontos de integração da Transformada padrão e do esquema autoadaptativo em comparativo com a distribuição Gaussiana padrão.

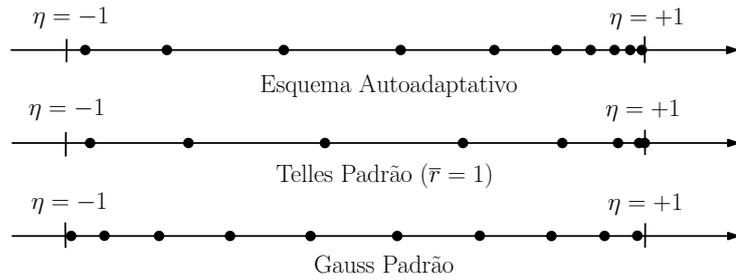


Figura 20 – Posicionamento os pontos de integração em cada formulação

Nota-se que, para a Transformada Padrão, o deslocamento dos pontos de integração em direção à singularidade é tão severo que os 4 pontos mais próximos à extremidade $\eta = +1$ se confundem em uma única entidade. Já no esquema Autoadaptativo o movimento destes é menor; tal fato expõe a capacidade do esquema em se adaptar, otimizando assim a distribuição de pontos no intervalo de integração, possibilitando então uma melhor representação da função; e conseqüentemente, maior precisão do método.

As Figuras (21) e (22) apresentam os gráficos contendo o valor numérico e o erro percentual para diferentes números de pontos de integração.

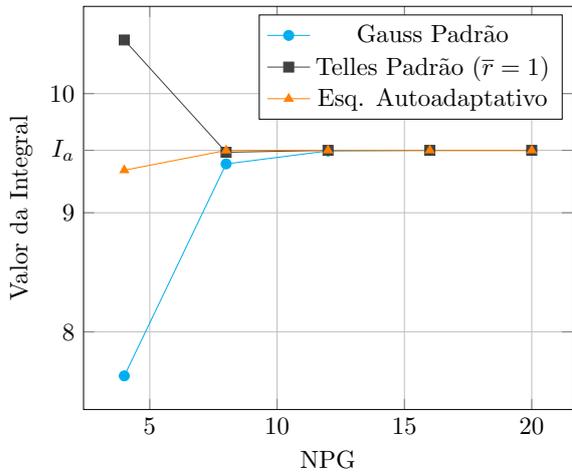


Figura 21 – Exemplo III(v.2): Integral

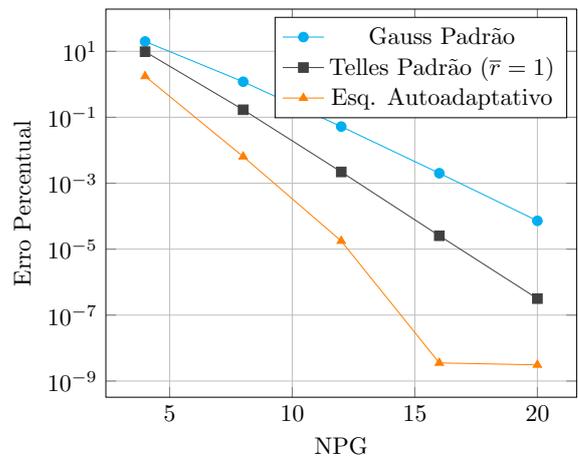


Figura 22 – Exemplo III(v.2): Erro

Em concordância como o que foi discutido anteriormente, observa-se que o esquema autoadaptativo apresenta a maior precisão em resolver a integral proposta.

7. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

7.1 Metodologia

As simulações foram feitas com o auxílio de um computador Dell OptiPlex 7040 com processador Intel(R) Core i5 - 6500 (3.20GHz). Os códigos foram escritos na linguagem FORTRAN77 e compilados via *Microsoft Developer Studio*.

Foram resolvidos 7 exemplos numéricos (3 relacionados à equação de Laplace, 2 concernentes à equação de Advecção-Difusão e um exemplo final relativo a obtenção das frequências naturais correlacionadas à equação de Helmholtz). Os exemplos tem geometria com comprimento significativo unitário e serão abordados com maiores detalhes posteriormente. As propriedades mecânicas também foram tomadas como unitárias.

Como já especificado, foram utilizados elementos isoparamétricos contínuos lineares, quadráticos e cúbicos.

A avaliação da eficiência numérica foi feita através de dois parâmetros. Um parâmetro nodal E

$$E = \left| \frac{\hat{u}_j - u_j}{(\hat{u}_j)_{máx}} \right| \quad (7.1)$$

para cada ponto; e, um parâmetro amostral (E_m)

$$E_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\hat{u}_j - u_j}{(\hat{u}_j)_{máx}} \right| \quad (7.2)$$

que consiste na média dos valores nodais.

Onde \hat{u}_j é o valor da solução analítica no j -ésimo ponto, $(\hat{u}_j)_{máx}$ o maior valor analítico em termos absolutos relacionado, e u_j o valor da solução numérica no j -ésimo ponto e n o número de pontos internos da malha.

Visando evitar dubiedade nas interpretação das siglas, vale ressaltar novamente:

- NEC: Número de Elementos de Contorno
- NPG: Número de Pontos de Gauss (Integração)
- NPI: Número de Pontos Internos (Utilizados na Interpolação - MECID)

7.2 Laplace

Nesta secção são apresentadas os casos regidos pela equação de Laplace resolvidos neste trabalho. O principal objetivo dos experimentos desta secção é averiguar o impacto do esquema proposto por Telles (1987) nas integrais de contorno clássicas do MEC que definem as matrizes $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{G}]$ do problema de Laplace.

7.2.1 Caso Laplace I

O primeiro exemplo consiste na solução de um problema com potencial escalar prescrito na aresta lateral esquerda e derivada do potencial prescrito nas demais arestas, conforme apresentado na figura (23) abaixo.

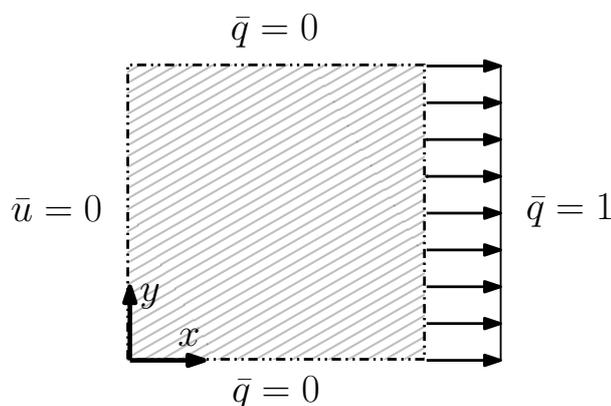


Figura 23 – Esquema Representativo do Caso Difusivo I

A solução analítica para este exemplo é unidimensional, e é apresentada a seguir. Esta expressão é utilizada como referencia na determinação do erro numérico cometido pelas formulações de elementos de contorno.

$$u(x) = x \quad e \quad q(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ +1, & x = 1 \end{cases} \quad (7.3)$$

São apresentados na figura (24) os resultados de erro médio (vide equação 7.2) no cálculo da derivada do potencial escalar na aresta esquerda, $x = 0$, em função do número de pontos de integração utilizados para se calcular as integrais do MEC. As malhas são estabelecidas com $NEC = 20$ e $NPI = 0$. NPG assume valores 04, 08, 16, 32 e 64.

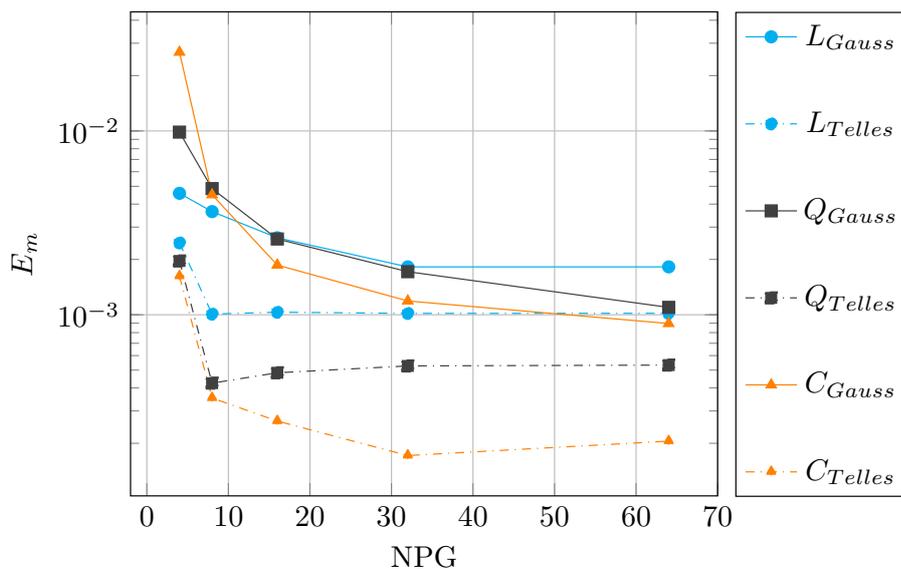


Figura 24 – Erro Médio: Exemplo Laplace I (NPG)

Tendo em vista o escopo deste trabalho, o primeiro dado a ser ressaltado é a performance da Integração Autoadaptativa frente à Integração Gaussiana clássica. Nota-se que a formulação acoplada ao esquema autoadaptativo apresenta valores de erro inferiores à formulação clássica para todos os pontos, independente do tipo de elemento em análise. Há de se destacar também a perda de precisão para valores altos de NPG; a razão para tal não pode ser identificada com precisão. Entre as diversas razões, destaca-se aqui duas: Pode ser devido à limitação do compilador em executar as operações de ponto flutuante ou pode resultar de erros de redundância, produzidos pelo uso de funções de alta ordem para resolver um campo muito simples, de comportamento linear.

em conjunto com pequenas oscilações presentes. Este fato ressalta a importância do esquema de autoadaptativo; dado que este possibilita elevar a precisão na obtenção dos resultados sem necessidade de se elevar o número de pontos de integração.

A razão não pode ser identificada com precisão. Pode ser dada pela limitação do compilador etc... Porém, pode resultar de erros de redundância, produzidos pelo uso de funções de alta ordem para resolver um campo muito simples, de comportamento linear

7.2.2 Caso Laplace II

O segundo caso resolvido consiste na solução de um problema com derivada do potencial prescrita nas arestas laterais e potencial escalar prescrito nas arestas inferior e superior, conforme apresentado na figura (25) a seguir.

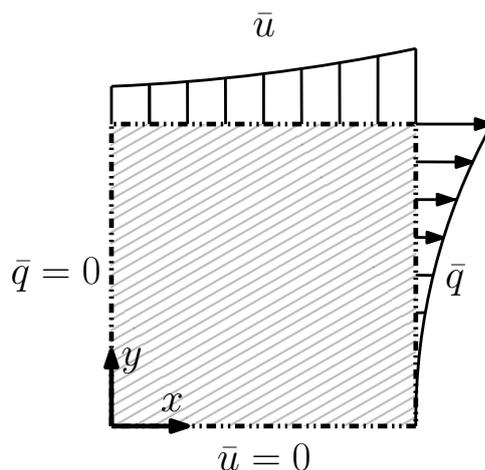


Figura 25 – Esquema Representativo do Caso Difusivo II

A solução analítica para este exemplo, referencia na determinação do erro numérico cometido, tem forma harmônica e é apresentada a seguir.

$$u(x, y) = \cosh(x)\text{sen}(y) \tag{7.4}$$

$$q(x, y) = \text{senh}(x)\text{sen}(y)n_x + \cosh(x)\cos(y)n_y \tag{7.5}$$

A Figura (26) exhibe os resultados de erro médio no cálculo do potencial escalar ao longo da aresta esquerda, $x = 0$, em função do número de elementos de contorno utilizados. As malhas são estabelecidas com $\text{NPG} = 08$, $\text{NPI} = 0$ e $\text{NEC} = 20, 40, 80, 160, 320$.

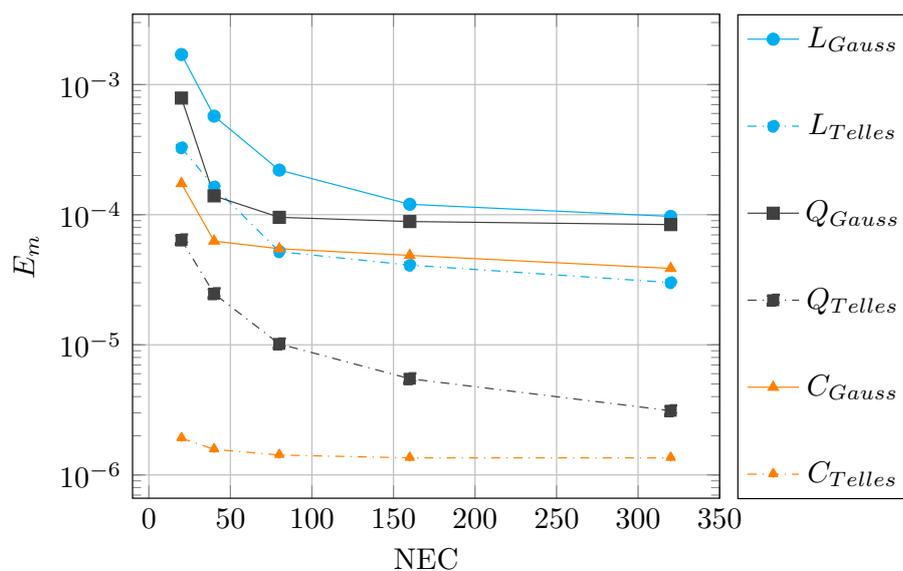


Figura 26 – Erro Médio: Exemplo Laplace II (NEC)

Especialmente neste exemplo de maior complexidade, observa-se que acoplar o esquema de Telles à integração Gaussiana clássica é eficiente em reduzir os valores do erro

médio nos testes executados. A grande influência dos elementos se deve ao fato de estes serem utilizados para representar o contorno do problema, onde se definem os dados de entrada: potencial e/ou derivada do potencial e também as restrições. Mesmo as malhas de contorno mais esparsas são capazes de gerar uma boa representação do problema obtendo bons resultados; e, para as malhas mais densas o valor do erro tende a se estabilizar. Ainda assim, o refinamento do contorno gera uma redução expressiva do erro. Em razão da maior complexidade deste exemplo com relação ao anterior, não foi observado aumento de erros com o aumento da quantidade de pontos de Gauss para elementos de alta ordem.

7.2.3 Caso Laplace III

O terceiro caso puramente difusivo submetido a teste consiste em um domínio semicircular submetido a um campo descontínuo de potencial no contorno reto e derivada do potencial nula em seu contorno curvo, conforme apresentado na figura (27).

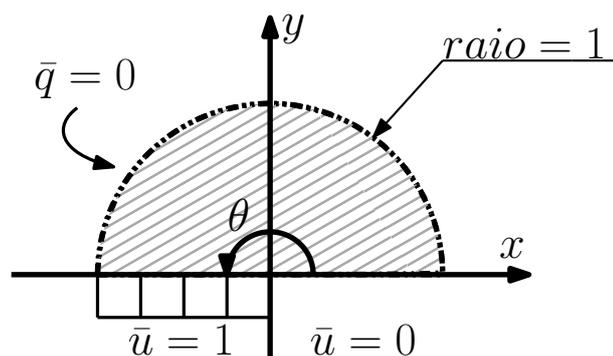


Figura 27 – Esquema Representativo do Caso Difusivo III

Além da singularidade, a condição de isolamento no limite circular impõe um que a derivada do potencial seja independente do ângulo θ , com magnitude inversamente proporcional ao raio. Sua solução é, portanto, uma função hiperbólica. Para propriedades físicas unitárias:

$$u(\theta) = \frac{\theta}{\pi} \quad (7.6)$$

$$q(x) = -\frac{1}{\pi x} \quad em \quad y = 0 \quad (7.7)$$

Expõe-se na figura (28) os resultados de erro no cálculo da derivada do potencial escalar ao longo da base do semicírculo $y = 0$ para $NEC = 20$, $NPI = 0$ e $NPG = 08$.

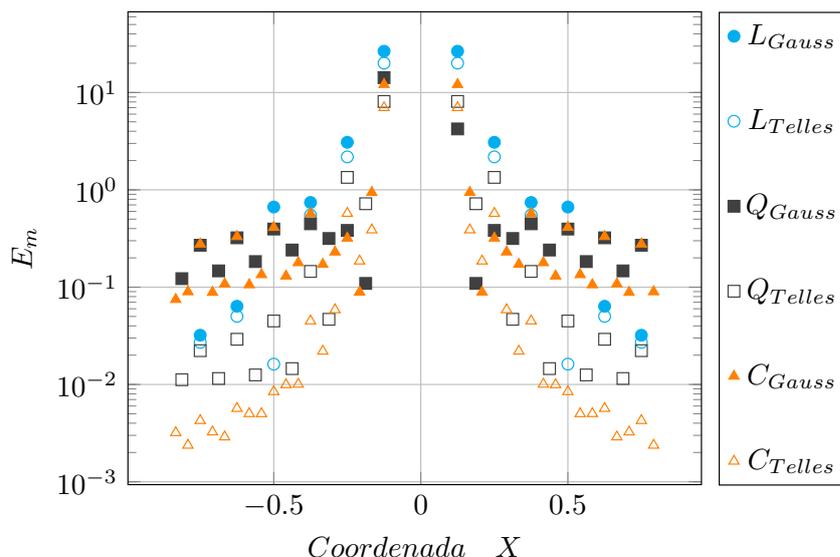


Figura 28 – Erro Médio: Exemplo Laplace III

A presença da descontinuidade física no ponto $x = 0$ acarreta em um modelo matemático tal que a solução do fluxo na base do semicírculo apresenta uma singularidade neste ponto, além de um severo gradiente em sua vizinhança; tais fatos transformam o tratamento numérico deste problema em um desafio. Esta dificuldade é traduzida nos resultados, onde pode-se notar que nas vizinhanças da singularidade os valores são os maiores observados; entretanto, destaca-se também a capacidade do esquema autoadaptativo em reduzir significativamente os valores de erro conforme a distancia da singularidade aumenta quando se utiliza elementos quadráticos ou cúbicos. A dificuldade de se tratar este problema com elementos lineares é esperada devido a complexidade geométrica e física aliada ao relativamente baixo número de elementos de contorno utilizados.

7.3 Advecção-Difusão

Nesta secção são apresentadas os casos regidos pela equação de Advecção-Difusão resolvidos neste trabalho. Para estes problemas entra em cena o número de pontos internos (pólos), que são utilizados para aproximar a integral de domínio apresentada na secção 4.2. O objetivo central dos testes conduzidos nesta secção é estudar o comportamento do MEC, correlacionando o comportamento das formulações em função dos pontos ao número de pontos interpolantes utilizados para representar o domínio interior.

No caso de formulações interpolantes como a MECID, comumente exige-se um afastamento mínimo entre o contorno e as fileiras de polos internos uma vez que a presença de polos nas proximidades do contorno acarreta em integrações quase singulares. Entretanto, tal afastamento gera uma faixa marginal no domínio interno com ausência de polos; prejudicando assim, a correta representação deste via interpolação. A utilização do

esquema autoadaptativo pode ser uma solução para tal situação uma vez que possibilita obter alta precisão na integrais quase singulares. No segundo caso difusivo-advectivo (subsecção 7.3.2) será feito um estudo comparativos destas diferentes abordagens.

7.3.1 Caso Advecção-Difusão I

O primeiro caso de advecção-difusão consiste em submeter o sistema do primeiro caso resolvido referente à equação de Laplace (difusão) a uma corrente convectiva unidimensional, conforme apresentado na figura (29) abaixo.

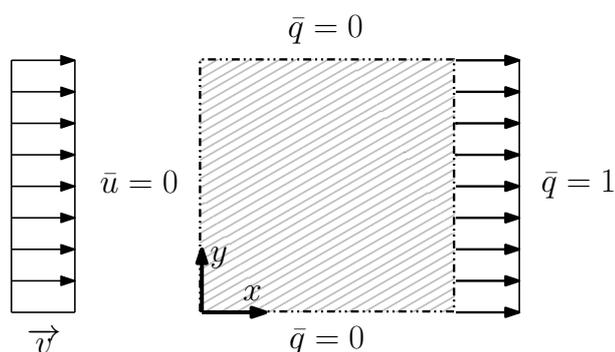


Figura 29 – Esquema Representativo do Caso Difusivo Advectivo I

Este caso é considerado simples, pois há escoamento em apenas uma direção e fluxos nulos em arestas opostas, e tem solução analítica unidimensional tal como apresentada a seguir.

$$u(x) = \frac{e^{vx} - 1}{ve^v} \quad (7.8)$$

$$q(x) = \frac{e^{vx}}{e^v} n_x \quad (7.9)$$

Para este exemplo propõe-se avaliar inicialmente o impacto da inclusão do esquema autoadaptativo na integração numérica conforme se varia o número de pontos interpolantes. Fixou-se $NEC = 20$ e $NPG = 08$. NPI assume valores 16, 64, 144, 400 e 625.

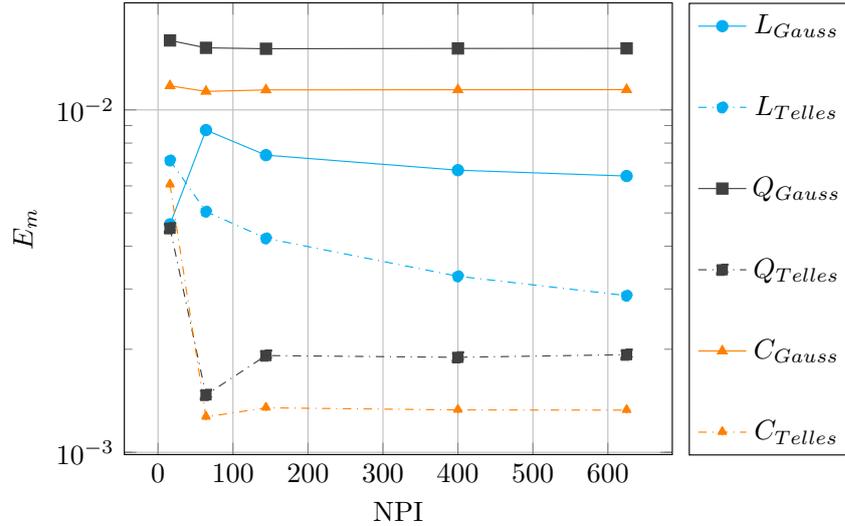


Figura 30 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (NPI)

Os resultados apresentados exibem a já observada superioridade do esquema autoadaptativo. Um dado interessante é que para a formulação com integração Gaussiana padrão, quando se utiliza elementos quadráticos ou cúbicos o aumento de NPI resulta inicialmente numa melhora discreta que dá lugar a uma leve amplificação nos erros; já a formulação Autoadaptativa, entrega valores de erro monotonicamente decrescentes com a incrementação de mais polos de interpolação. Uma possível explicação para tal fato é que, para os elementos quadráticos e cúbicos, os erros e oscilações, já observadas em trabalhos anteriores (BARBOSA; LOEFFLER; BULCÃO, 2017), na determinação dos resultados da parcela difusiva (independente dos pólos) são tais que ofuscam a melhora na precisão da parcela advectiva (dependente dos pólos); e, o acoplamento do esquema autoadaptativo é capaz de mitigar tais oscilações e permitir que o precisão geral do método seja maior. Outra possível explicação para tal evento é que a nuvem de pontos internos é grande o suficiente para que um grande número do pólos se agrupe nas proximidades do contorno aumentando os erros de integração; o fato de de forma mais acentuada formulações com elementos quadráticos e cúbicos se explica pelo fato de estes disporem de mais pontos nodais para o mesmo número de elementos.

Ainda neste exemplo, dedica-se espaço para uma análise da influencia do esquema autoadaptativo em função do Peclet (Pe), que é o agrupamento físico adimensional que governa o balanço de efeitos advectivos e condutivos. Formalmente a definição de Pe é dada (BEJAN, 1993):

$$Pe = \frac{VL}{\alpha} \quad (7.10)$$

onde V é o módulo da velocidade, L o comprimento característico do sistema e α o coeficiente de difusão. Como nos exemplos estudados as propriedades físicas são consideradas unitárias:

$$Pe = |V| \quad (7.11)$$

São apresentados na figura (31) os resultados do erro médio no cálculo da derivada do potencial escalar na aresta esquerda, $x = 0$, conforme se aumenta o valor de Pe , isto é, os efeitos advectivos para os valores: $NEC = 80$, $NPI = 144$ e $NPG = 08$. Pe assume valores 1, 2, 3, 4 e 5.

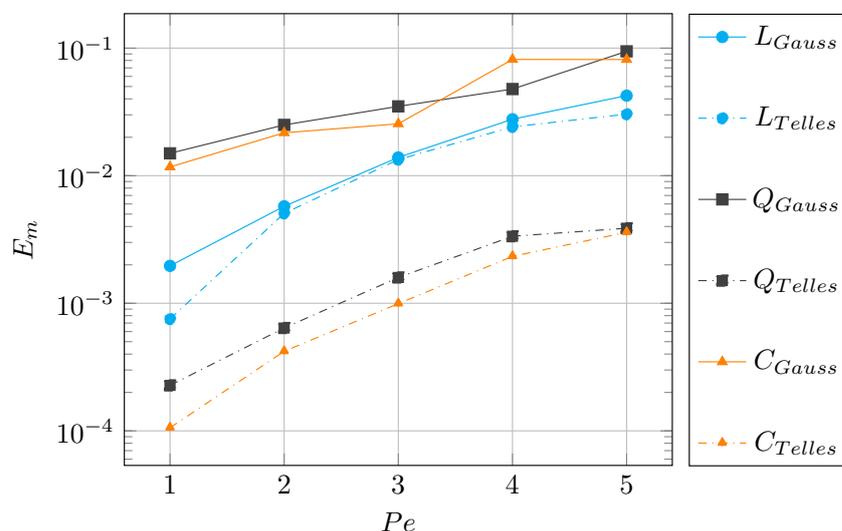


Figura 31 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (Pe)

É importante aqui salientar que a determinação das grandezas de derivada é, geralmente, mais desafiadora que a determinação do potencial escalar. Tal fato, explica a escolha de uma malha mais rica no contorno em conjunto com uma nuvem de pontos internos mais densa. No que tange a precisão, observa-se um aumento do erro com o aumento do Pe em todas as curvas como já observado em outros trabalhos (PINHEIRO, 2018). Persiste a performance inferior dos elementos quadráticos e cúbicos quando utilizada a integração Gaussiana clássica, fato explicado no exemplo anterior. O esquema autoadaptativo mostra-se capaz de aumentar a precisão; em particular nos resultados dos elementos de ordem superior.

7.3.2 Caso Advecção-Difusão II

O segundo exemplo advectivo-difusivo consiste na solução de um problema com derivada do potencial prescrita nas arestas laterais, potencial escalar prescrito nas arestas inferior e superior e convecção bidimensional, conforme apresentado na figura (32) abaixo.

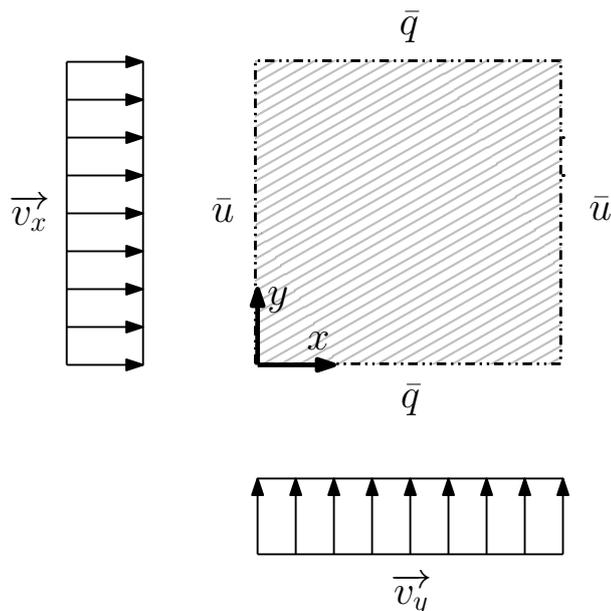


Figura 32 – Esquema Representativo do Caso Difusivo Advectivo II

A velocidade \vec{v} do escoamento é dada:

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} \quad (7.12)$$

Este caso é consideravelmente mais complexo que o anterior, pois há escoamento em ambas as direções do plano cartesiano. A solução analítica é apresentada a seguir.

$$u(x) = e^x + e^y \quad (7.13)$$

$$q(x) = (e^x n_x + e^y n_y) \quad (7.14)$$

Pra este exemplo propõe-se uma análise mais detalhada. Inicialmente, fixa-se NEC e NPG e observa-se a influencia do número de pontos internos. Espera-se que o impacto seja relevante, uma vez que estes são utilizados nas interpolações que aproximam a integral de domínio via MECID.

A Figura (34) exhibe os resultados de erro médio no cálculo do potencial escalar na aresta inferior, $y = 0$, em função do número de pontos internos. Os valores NEC = 80 e NPG = 08 são fixos, enquanto NPI assume os valores 64, 144, 400 e 625.

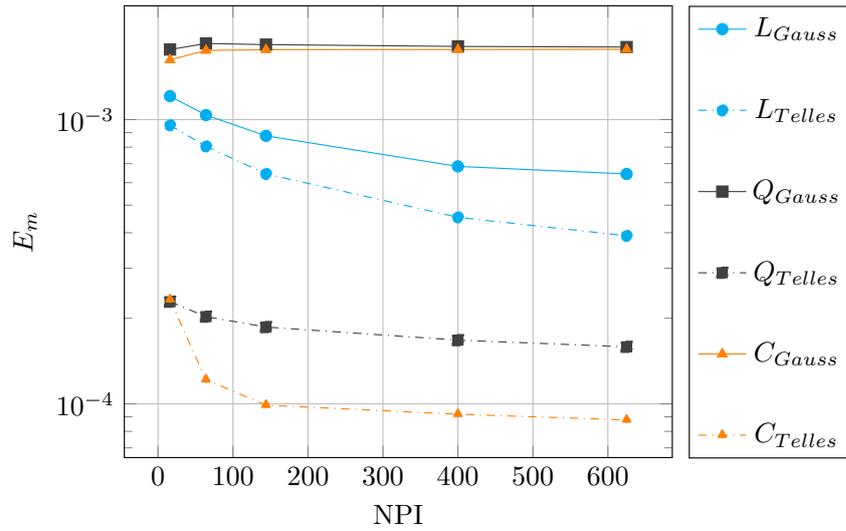


Figura 33 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (NPI)

Para efeitos comparativos, a figura (34) exibe os resultados de erro médio no cálculo do potencial escalar com os mesmos parâmetros, utilizando o estratagema do afastamento.

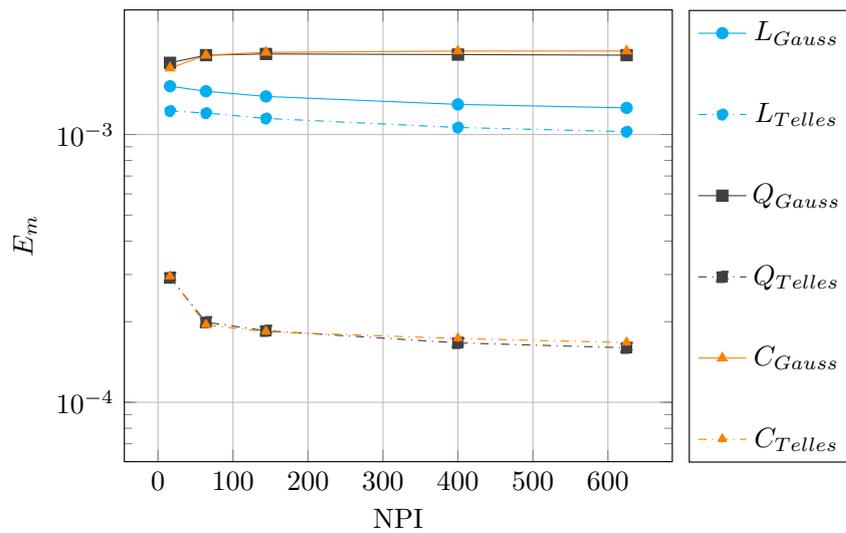


Figura 34 – Erro Médio: Exemplo Difusão-Advecção I (NPI - Afast)

Comparando os gráficos com e sem afastamento, nota-se que de forma geral, há uma redução do erro quando o afastamento não é utilizado, ratificando que a uniformização na distribuição dos polos no interior do domínio é importante na representação da propriedade advectiva. O afastamento dos pontos internos do contorno, feita com o propósito de evitar problemas de integração quase singular, produz uma irregularidade constitutiva que mitiga o efeito positivo da inserção destes. Porém, nos resultados dos elementos quadráticos e cúbicos sem o esquema adaptativo, os resultados praticamente não se alteraram com ou sem afastamento. Tal comportamento se deva ao fato de que os pontos nodais no contorno também são pontos interpolantes; assim, a maior quantidade de

nós nos elementos de ordem superior implica numa maior densidade de polos no contorno, reduzindo o efeito da má aproximação do campo advectivo no intervalo entre o contorno e a nuvem de polos. Porém, com a maior proximidade dos polos relativamente ao contorno, os erros de integração crescem e anulam o ganho com a melhor aproximação do campo advectivo. Esta explicação é ratificada quando se utiliza o esquema adaptativo com afastamento: os valores do erro se reduzem drasticamente para os elementos de ordem superior. Certamente, boa parte do erro se reduziu pela melhor integração no contorno; contudo, o leve – mas constante – ganho de precisão dos elementos de ordem superior com a inserção da maior quantidade de polos contrasta claramente com o comportamento estável da curva de erro sem o esquema de integração. Este contraste se deve ao fato de que o aumento no número de pontos interpolantes no interior não está introduzindo erros de integração, que ocorrem quando os pontos fonte internos estão próximos aos elementos de contorno. Com a distribuição uniforme dos pontos e, conseqüentemente, sem os problemas causados pelo afastamento, os efeitos positivos do uso do esquema adaptativo ficam bem visíveis, para todos os elementos. O ganho de precisão é significativo nos elementos de ordem superior, ao ponto de demandarem poucos polos para uma boa precisão. Entretanto, ressalta-se que este problema consiste de um caso onde o fenômeno advectivo não é preponderante; casos nos quais as velocidades sejam bem maiores, não se pode prescindir da inserção de um número maior de polos e do refino da malha.

7.4 Helmholtz

Nesta secção são apresentados os problemas de determinação das frequências naturais (autovalores) de sistemas regidos pela equação de Helmholtz.

7.4.1 Caso Helmholtz I

Neste primeiro exemplo, as frequências naturais de uma membrana quadrada com tamanho unitário são calculadas. A membrana é fixada em todas as suas bordas, como mostrado na figura (35).

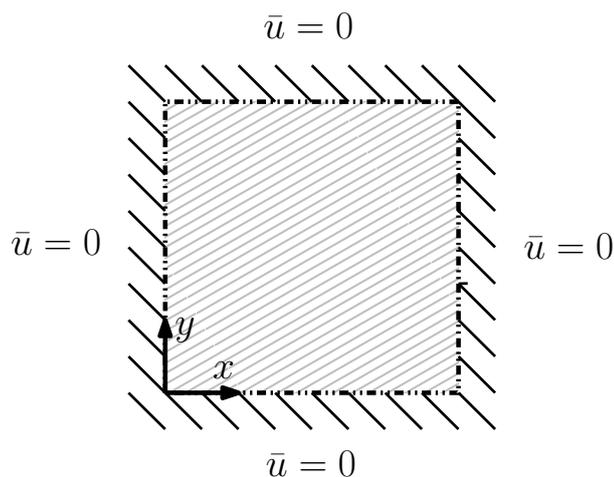


Figura 35 – Esquema Representativo do Caso de Autovalor I

Para este exemplo onde as propriedades mecânicas e a aresta são unitárias, os valores analíticos das frequências naturais são dados pela seguinte equação (MEIROVITCH, 1967):

$$\omega_{mn} = \pi\sqrt{m^2 + n^2} \quad m, n = 1, 2, 3... \quad (7.15)$$

Ressalta-se que, como o modelo é bidimensional, os valores das frequências naturais relacionadas aos modos de vibração transversais também são calculados.

São apresentados na figura (36) os resultados de erro médio na determinação numérica dos 20 primeiras frequências em função do número de pontos de integração utilizados para se calcular as integrais do MEC. Estes resultados foram obtidos com $NEC = 160$, $NPI = 144$ e $NPG = 08$.

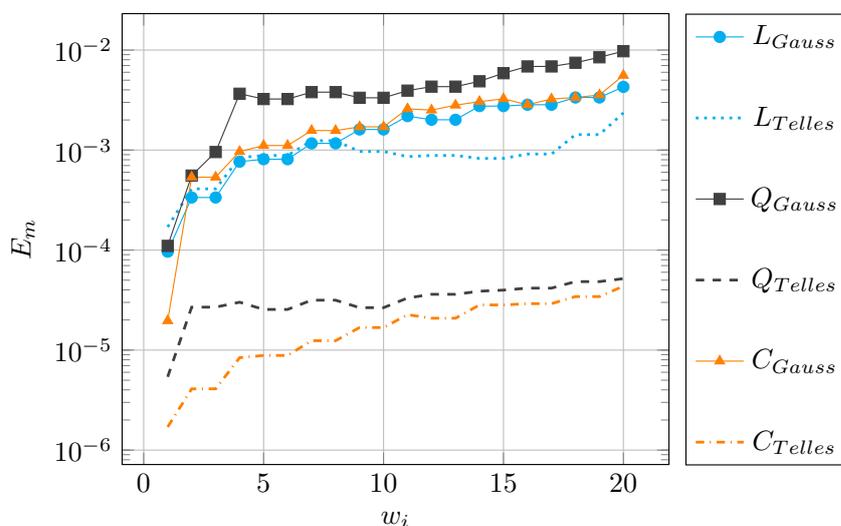


Figura 36 – Erro Médio: Exemplo Helmholtz I (NPI)

De forma similar aos problemas Advectivos-Difusivos os problemas de Helmholtz apresentam integrais a serem resolvidas numericamente tanto na parcela difusiva (matriz $[\mathbf{H}]$) quanto na parcela reativa (matriz $[\mathbf{M}]$) e a escolha do método autoadaptativo proposto por Telles (1987), para se calcular essa integrais se mostra uma estratégia eficaz em aumentar a precisão das frequências obtidas. A performance inferior dos elementos de maior ordem quando utilizada a integração Gaussiana convencional pode ser explicada, assim como nos problemas difusivos-advectivos pela presença das integrais quase singulares nas proximidades do contorno.

8. CONCLUSÕES

O Método dos Elementos de Contorno é um método discreto robusto, capaz de produzir níveis de precisão muito superiores a outros métodos numéricos em muitas aplicações. No entanto, requer um cuidado especial ao lidar numericamente com suas integrais de contorno, uma vez que elas possuem funções singulares em seu núcleo, que são integrais convergentes impróprias.

Assim, a integração numérica é de um dos aspectos mais relevantes do Método dos Elementos de Contorno e o adequado tratamento das integrais singulares ou quase singulares é fundamental para o seu bom desempenho. Neste trabalho, diversas comparações foram feitas demonstrando que o alcance do esquema autoadaptativo se estende além do usualmente apresentado na literatura. Visando uma melhor avaliação de sua potencialidade, elementos de ordem superior foram incluídos na análise, bem como foram simulados problemas com diversas quantidades de pontos de Gauss.

Quando elementos de ordem superior são usados, o tratamento especial das integrais singulares e do Jacobiano envolvido na transformação das coordenadas é imperativo, pois permite o cálculo numérico das integrais fracamente singulares associadas à solução fundamental que, embora sejam fracamente singulares, resultam em um grande erro numérico, caso não sejam devidamente tratadas.

A ideia do esquema autoadaptativo é interessante. Produz automaticamente uma maior concentração dos pontos de integração próximos ao ponto de singularidade. Esta concentração é feita a partir da adoção de uma nova função para distribuição dos pontos de Gauss. Nesse sentido, aplica-se uma transformação de coordenadas de terceira ordem, que se comporta como um Jacobiano. Impõem-se condições na função representativa do posicionamento destes novos pontos e em suas derivadas. Uma vez que a derivada segunda desta função corresponde à derivada primeira do Jacobiano, que é uma aproximação linear de uma transformação, a imposição deste valor nulo significa a imposição de um ponto de máximo ou mínimo.

Nos casos estacionários, governados pela Equação de Laplace, pode-se afirmar que os resultados superiores do esquema autoadaptativo obtidos nas simulações apresentadas apenas ratificaram o que é de domínio dos especialistas no trato com o Método dos Elementos de Contorno: é possível reduzir significativamente os níveis de erro cometidos na integração numérica, comparativamente ao esquema clássico que usa a Quadratura

Gaussiana.

Nestes casos, pode-se ressaltar que em problemas de menor complexidade como os que possuem contornos retilíneos, o uso de elementos lineares foi perfeitamente satisfatório; porém, em casos nos quais o contorno não é curvilíneo, o uso de elementos de ordem superior se faz necessária para uma melhor representação da configuração geométrica e o esquema adaptativo é a melhor forma de se realizar a integração de elementos curvos com singularidade, pois a expressão analítica é muito complexa e extensa.

Observou-se que, dependendo da simplicidade do problema, elementos de ordem muito elevada podem, em circunstâncias específicas, apresentar erros maiores do que elementos de mais baixa ordem, certamente pela complexidade das funções interpolantes utilizadas. À luz do Método dos Resíduos Ponderados constata-se que os casos em que o comportamento da resposta de um dado problema é linear não precisariam ser aproximados por funções de segunda ordem ou superior; assim, resíduos numéricos, de pequena magnitude, podem ser obtidos. As experiências numéricas aqui apresentadas mostraram também que em certas simulações com elementos cúbicos percebeu-se certa perda de precisão, quando se aumentou por demais o número de pontos de Gauss. Contudo, as razões agora devem estar associadas à capacidade da aritmética computacional utilizada.

Nos casos difusivo-advectivos e nos problemas governados pela Equação de Helmholtz, a importância do esquema autoadaptativo ganhou nova dimensão, embora ainda relacionada à integração numérica.

Tais problemas se caracterizam por gerar integrais de domínio que não são transformadas naturalmente em integrais de contorno, a menos que se usem soluções fundamentais correlatas, ou seja, que sejam estritamente correlacionadas ao problema abordado. Tais soluções fundamentais ou funções de Green, embora muito precisas, normalmente estabelecem restrições relacionadas à sua complexidade ou à variação das grandezas envolvidas, como as velocidades ou as propriedades físicas do meio, que precisam ser uniformes.

A alternativa mais viável e bastante comum para superar tais problemas é realizar a aproximação do núcleo destas integrais de domínio através de funções de base radial e ao mesmo tempo usando uma solução fundamental mais simples. Contudo, as técnicas fundamentadas no uso de funções de base radial requerem a introdução de pontos interpolantes no interior, que também são pontos fonte e realizam integração nos pontos campo situados nos elementos de contorno. Caso se adense a malha de pontos internos interpolantes, problemas de integração podem aparecer, devido à proximidade entre os pontos campo e fonte.

As simulações aqui apresentadas mostraram que o esquema autoadaptativo melhorou bastante a qualidade dos resultados numéricos. Mostraram também que o ganho de precisão no uso de elementos de ordem superior, mesmo nos problemas de ondas

estacionárias, não foi tão grande nos problemas com geometria retangular; entretanto, a vantagem dos elementos de alta ordem é evidenciada nos problemas com contornos curvilíneos.

Para trabalhos futuros, sugere-se verificar a eficácia da metodologia aqui apresentada na resolução de problemas de maior complexidade, tanto em termos da conformação geométrica quanto na prescrição de condições de contorno mais elaboradas, em que os elementos de mais alta ordem possam ser melhor aproveitados. Sugere-se, também, a expansão desta análise para problemas tridimensionais.

Referências Bibliográficas

- ABRAMOWITZ M. STEGUN, A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [S.l.]: Dover Publications, 1970. Citado na página 50.
- APOSTOL, T. *Calculus (Vol. 2)*. [S.l.]: Wiley, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 57.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. *Vibrations*. [S.l.]: Nelson Education, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.
- BARBOSA, J. P.; LOEFFLER, C. F.; BULCÃO, A. Um estudo sobre a eficiência da quadratura gaussiana na integração singular com o método dos elementos de contorno. *Blucher Physics Proceeding*, p. 212–217, 2017. ISSN 2358-2359. Citado na página 70.
- BARCELOS, H. de M.; LOEFFLER, C. F.; BARBOSA, J. P. O método dos elementos de contorno com integração direta por funções de base radial na solução do problema de laplace em meios suavemente não homogêneos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 38.
- BATHE, K. *Finite Element Procedures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. Citado na página 24.
- BEER, G. *Advanced Numerical Simulation Methods*. [S.l.]: CRC Press, 2015. Citado na página 51.
- BEJAN, A. *Heat Transfer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993. Citado na página 70.
- BREBBIA, C.; TELLES, J.; WROBEL, L. a. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1984. ISBN 9783540124849. Citado 8 vezes nas páginas 15, 23, 25, 26, 30, 31, 33 e 51.
- BREBBIA, C.; WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*. [S.l.]: Newnes-Butterworths, 1980. ISBN 9780408003407. Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 17 e 34.
- BUHMANN, M. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 29.
- BULCÃO, A. *Formulação do método dos elementos de contorno com dupla reciprocidade usando elementos de ordem superior aplicada a problemas de campo escalar generalizado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 1999. Citado na página 59.
- CAMPOS, L. S. et al. Testing the accomplishment of the radial integration method with the direct interpolation boundary element technique for solving helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 110, p. 16–23, 2020. ISSN 0955-7997. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095579971930606X>>. Citado na página 46.

CLAUDIO D.M. MARIN, J. *Cálculo Numérico Computacional - Teoria e Prática*. [S.l.]: Editora Atlas, 1994. Citado na página 50.

DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements in Dynamics*. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1993. (Computational Engineering). ISBN 9781853122583. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 25.

DOYLE, J. *Wave propagation in structure: spectral analysis using fast discrete fourier transforms*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997. Citado na página 15.

EYMARD, R.; GALLOUËT, T. R.; HERBIN, R. *Handbook of Numerical Analysis (Vol. VII)*. [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 15.

FASSHAUER, G. *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*. [S.l.]: World Scientific Publishers, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

FRANCO, N. *Cálculo Numérico*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2006. Citado na página 50.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002. Citado na página 38.

GAO, X.-W. An effective method for numerical evaluation of general 2d and 3d high order singular boundary integrals. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 45-48, p. 2856–2864, 2010. Citado na página 49.

HAYAMI, K.; BREBBIA, C. A new coordinate transformation method for singular and nearly singular integrals over general curved boundary elements. *Mathematical and Computational Aspects - Boundary Elements X*, v. 9/1, p. 375–399, 1987. Citado na página 49.

HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Prentice Hall, 1987. Citado na página 15.

JASWON, M. Integral equation methods in potential theory. i. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 275, n. 1360, p. 23–32, 1963. Citado na página 15.

JASWON, M.; PONTER, A. An integral equation solution of the torsion problem. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 273, n. 1353, p. 237–246, 1963. Citado na página 15.

JOHNSTON, P. Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, p. 1333–1348, 1999. Citado na página 49.

KIM-CHUAN, T.; MUKHERJEE, S. Hypersingular and finite part integrals in the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 31, n. 17, p. 2299–2312, 1994. ISSN 0020-7683. Citado na página 49.

KYTHER, P. *An Introduction to Boundary Element Methods*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1995. (Symbolic & Numeric Computation). ISBN 9780849373770. Citado na página 45.

LOEFFLER, C.; MANSUR, W. A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 74, p. 14–18, 2017. ISSN 0955-7997. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.

LOEFFLER, C. F. Direct use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 50, p. 97–108, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 38.

LUKASZYK, S. A new concept of probability metric and its applications in approximation of scattered data sets. *Computational Mechanics*, v. 33, n. 4, p. 299–304, jan. 2004. Citado na página 28.

MEIROVITCH, L. *Analytical methods in vibrations*. [S.l.]: Macmillan New York, 1967. v. 438. Citado na página 75.

NETO, C. F. L.; LARA, L. d. O. C.; BARCELOS, H. de M. Comparação de desempenho entre o método dos elementos de contorno com integração direta e o método dos elementos finitos em problemas de poisson. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 3, n. 2, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 38.

NETO, C. L.; MANSUR, W.; BARCELOS, H. Comparação de desempenho entre o método dos elementos de contorno com integração direta e o método dos elementos finitos em problemas de helmholtz. *Blucher Physics Proceedings*, v. 2, p. 67–71. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 38.

PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C.; WROBEL, L. *Dual Reciprocity Boundary Element Method*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1991. (International Series on Computational Engineering). ISBN 9781851667000. Citado 8 vezes nas páginas 16, 17, 23, 24, 25, 27, 30 e 38.

PINHEIRO, V. P. *Aplicação do método dos elementos de contorno com integração direta regularizada a problemas advectivo-difusivos bidimensionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 71.

PRESS W.H. TEUKOLSKY, S.; VETTERLING, W.; B.P, F. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.)*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado na página 60.

RAMACHANDRAN, P. *Boundary element methods in transport phenomena*. [S.l.]: Pergamon Press, 1994. Citado na página 37.

SANTOS, A.; NETTO, F. *Estudo comparativo de diferentes formulações do Método dos Elementos de Contorno para o problema de Helmholtz*. 2018. Monografia (Bacharel em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Brazil. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 38.

SIMON, C.; BLUME, L. *Mathematics for Economists*. [S.l.]: W. W. Norton, 1994. Citado na página 18.

STRICKWERDA, J. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Chapman & Hall, 1989. Citado na página 15.

SYMM, G. Integral equation methods in potential theory. ii. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 275, n. 1360, p. 33–46, 1963. Citado na página 15.

TANAKA, M.; SLADEK, V. Regularization techniques applied to boundary element methods. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, v. 47, n. 10, p. 457–499, 1994. Citado na página 49.

TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, n. 5, p. 959–973, 1987. Citado 11 vezes nas páginas 7, 8, 14, 17, 49, 51, 52, 53, 59, 64 e 76.

ZHU, J.; SHAH, A. H.; DATTA, S. K. The evaluations of cauchy principal value integrals and weakly singular integrals in bem and their applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, n. 6, p. 1017–1028, 1996. Citado na página 49.