UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Crislaine Kuster

Classificação de álgebras antiassociativas

VITÓRIA
2021

Crislaine Kuster

Classificação de álgebras antiassociativas

Dissertação de mestrado apresentada ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do t´ıtulo de Mestre em Matematica

Orientador:
Prof. Dr. Renato Fehlberg Júnior

Coorientador:
Prof. Dr. Ivan Kaygorodov

VITÓRIA
2020

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

K97c

KUSTER, CRISLAINE, 1998-
Classificação de Álgebras Antiassociativas / CRISLAINE KUSTER. - 2021.
68 f.

Orientador: Renato Fehlberg Júnior.
Coorientador: Ivan Kaygorodov.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

I. Fehlberg Júnior, Renato. II. Kaygorodov, Ivan. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 51

Classificação de Álgebras Antiassociativas

Crislaine Kuster

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 18 de fevereiro de 2021 por:

Prof. Dr. Renato Fehlberg Júnior
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Ivan Kaygorodov
Universidade Federal do ABC
Coorientador

Ana Claudia Locateli

Prof.ª Drª Ana Cláudia Locateli
Universidade Federal do Espírito Santo

Tiago Macedo

Prof. Dr. Tiago Rodrigues Macedo
Universidade Federal de São Paulo

Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, fevereiro de 2021

Dedicatória

Dedico o presente trabalho aos meus pais, por sempre me apoiarem tanto e por todo ensinamento, formando, assim, a pessoa que sou hoje.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao autor da vida, criador do universo e meu Pai amado que está comigo dia após dia.

Aos meus pais, Cézar e Marta, pelo grande amor que têm por mim e por sempre me incentivarem a seguir meus sonhos, como também às minhas irmãs, Cristina e Krícia, pelo apoio de sempre.

À República "café na veia", "café com pipoca" que seja, minhas amigas e irmãs do coração, Rafaela, Elizângela e Cristina, que moraram comigo durante esse período da minha graduação e do meu mestrado. Agradeço muito a Deus por tê-las em meu viver. Vocês me ajudaram muito, obrigada!

Desde o ensino fundamental, eu já amava desafios e problemas matemáticos e foi então que a OBMEP me pescou e abriu as portas desse mundo maravilhoso. Agradeço muito à OBMEP pela oportunidade. Nesse momento, ao ganhar uma medalha na prova, fui convidada a participar do PIC-jr(porém eu não tinha acesso a um computador para acessar o fórum online) e nesse ponto chave da história agradeco muito a minha professora de matemática, Letícia, que acreditou em mim. Ela me emprestou seu notebook duas vezes por semana, o ano todo! Pois saiba que com os esforços daquele ano, eu pude participar de um evento maravilhoso (4° Encontro do Hotel de Hilbert-EHH, organizado pela OBMEP) e este por sua vez me fez ter a certeza de que matemática era uma possibilidade válida a seguir como profissão. E mais que isso, uma paixão.

Agradeço a todos os professores do departamento de matemática da UFES que de certa forma contribu´ıram em meu caminhar nessa etapa. Em especial, ao meu orientador Renato Fehlberg Júnior e ao meu coorientador Ivan Kaygorodov pela atencão e dedicação de sempre, além do belo exemplo de excelentes profissionais.

Como também ao professor Fábio Júlio que sempre me motivou muito a seguir a carreira acadêmica e pelas conversas acolhedoras. À professora Marta, saiba que tu és uma inspiração pra mim, sua aula é perfeita. Falando em aula boa, agradeco ao professor Gilvan que me cativou com sua aula de álgebra, tu realmente sabes ensinar. Agradeço aos professores Apoenã, Ginnara e Carolina por serem sempre tão amáveis comigo, além de serem excelentes profissionais. Ao professor Leonardo, por se preocupar com meus estudos e planos futuros, obrigada pelos teus conselhos.

Agradeço aos amigos que a UFES me deu, em especial, a Rayane, uma amiga pra vida toda que amo muito. Aos colegas de turma e/ou de corredor que se tornaram grandes amigos com a convivência: Brayan, Wayner, Tiago, Caio, Rafael, Joelso (óh pai), Adriana (Drica), Vinicio (Marcinho) e tantos outros, agradeço muito por ter vocês caminhando junto comigo. Agradeço também ao café que sempre me impulsiona nas lutas diárias!

Agradeço por fim à CAPES pela bolsa de Mestrado concedida, a qual foi fundamental neste período.

”Ninguém, além de você, pode determinar seu valor.”

“Não é o que o mundo reserva pra você, mas o que você traz para o mundo.”

“É preciso imaginação para acreditar em algo.”

“Deixe suas ambições e aspirações guiarem você.”

“Vá para onde sua paixão te mandar.”

“Mentes curiosas nos impulsionam pra frente.”

“Quando realmente se esforça, tudo dá certo.”

“Acredito que há sempre algo bom para aprender nas situações. Mesmo as ruins. Eu acho que constrói caráter.”

- Anne with an E

Resumo

O propósito deste trabalho é classificar as álgebras antiassociativas puras, ou seja, que não satisfazem a identidade $xyz=0$, de dimensões 4 e 5 sobre $\mathbb{C}$.

Palavras-chave: Álgebras antiassociativas, classificação algébrica, extensões centrais.

Abstract

The purpose of this work is to classify pure antiassociative algebras, that is, that do not satisfy the identity $xyz=0$, of dimensions 4 and 5 over $\mathbb{C}$.

Key-Words: Antiassociative algebras, algebraic classification, central extensions.

Sumário

Introdução

A classificaçao algébrica, a menos de isomorfismos, de álgebras definidas por identidades polinomiais é um problema clássico na teoria de álgebras não-associativas. Existem muitos resultados para a classificação algébrica de variedades de álgebras em dimensão baixa, dentre elas, álgebras de Jordan, de Novikov, de Lie, de Malcev, de Leibnz, de Tortkara, bicomutativas e associativas (veja, por exemplo, as referências [7],[8],[14], [16],[18],[20],[21],[22],[23] e [26]).

Muitos desses resultados baseiam-se na classificação de álgebras por extensões centrais. Estas, por sua vez, desempenham um papel importante tanto em matemática como também em física, em áreas como mecânica quântica e teoria quântica de campos. Sua importância ocorre do fato de que o grupo de simetria de um sistema quantizado geralmente é uma extensão de um grupo de simetria clássico e do mesmo modo a correspondente álgebra de Lie simétrica de um sistema quântico é, geralmente, uma extensão central de uma álgebra simétrica classica.

Em 1978, Skjelbred e Sund (referência [26]) desenvolveram um método por extensões centrais para a classificação de álgebras de Lie nilpotentes. Este método consiste no cálculo de extensões centrais de álgebras de dimensões menores, visto que toda álgebra nilpotente é extensão central de alguma álgebra de dimensão menor. Para tanto, ele relaciona órbitas, sob a ação do grupo de automorfismos de álgebras (conhecidas) em subconjuntos do conjunto das grassmanianas s-dimensionais dos seus grupos de cohomologia, com extensões centrais s-dimensionais dessas álgebras.

O presente trabalho se concentrará na classificação algébrica de álgebras antiassociativas, i.e., álgebras definidas pela identidade

$$x(yz) + (xy)z = 0.$$

Introduzidas em [27], tais álgebras vem adquirindo visibilidade em vários trabalhos científicos, devido à sua ligação com problemas físicos e à sua relação com outras álgebras. Por exemplo, se A é uma álgebra anticomutativa (isto é, satisfaz a identidade $xy = -yx$), então A é antiassociativa se, e somente se, A é uma $CB-$ álgebra, i.e. para quaisquer $x, y \in A$ se $xy = 0$, então $(xz)y = 0 \forall z \in A$ (ver [24]). Em particular, uma álgebra anticomutativa que satisfaz a identidade $x(xy) = 0$ está contida na variedade das álgebras antiassociativas (ver [13]). Uma álgebra de mock-Lie dual (ver [5]) é uma álgebra anticomutativa e antiassociativa (que, por sua vez, é uma álgebra de Tortkara). As álgebras antiassociativas também estao relacionadas com álgebras anticomutativas g-alternativas (ver [6]). Outro fato interessante é que ao considerarmos apenas a parte imaginária dos octônios, tal estrutura satisfaz a antiassociatividade. Além disso, as álgebras antiassociativas desempenham um importante papel em Teoria de Calibre (veja [2]).

Note que, como estamos interessados na classificação de álgebras antiassociativas sobre $\mathbb{C}$ e essas álgebras são nilpotentes (ver [25]), podemos utilizar um método análogo ao método descrito por Skjelbred e Sund. Mais geralmente, toda álgebra antiassociativa sobre um corpo algebricamente fechado de característica distinta de 2 tem índice de nilpotência no máximo 4, ou seja, ela satisfaz a identidade $xyzw = 0$ (veja [25, Lema 1.1]). Dessa forma, podemos descrevê-las em dois conjuntos distintos: as álgebras que satisfazem a identidade $xyz = 0$, denominadas álgebras não-puras, e as álgebras que não satisfazem a identidade $xyz = 0$, denominadas álgebras puras.

As álgebras que satisfazem a identidade $xyz = 0$ estão contidas na interseçao de variedades de álgebras definidas por famílias de identidades polinomiais de grau 3, como por exemplo, álgebras de Leibniz, Zinbiel, associativas, Novikov, dentre outras. Com isso, a classificação das álgebras antiassociativas não puras de dimensão até 5 pode ser extraída da classificação dessas álgebras: ver [3] para dimensão 3, [22] para dimensão 4 e em [10] para dimensão 5. Na literatura, ainda não temos a classificação das álgebras antiassociativas de dimensão 4 e 5 sobre $\mathbb{C}$. Assim, o presente trabalho se concentrará na classificação desses casos.

A dissertação está estruturada em quatro capítulos. No primeiro capítulo, apresentaremos os pré-requisitos para a classificação das álgebras desejadas, dentre eles, definiremos e apresentaremos propriedades dos tipos de álgebras presentes e daremos uma breve introduçao às ferramentas básicas para o desenvolvimento do trabalho nessa teoria, como homologia, ações de grupo e a sequência características de dimensões de radicais. No segundo capítulo, apresentaremos o método que utilizaremos em nossa classificação (análogo ao método Skejelbred-sund em [26]).

No capítulo 3, apresentaremos os resultados obtidos na classificação das álgebras antiassociativas puras de dimensão 4 e de dimensão 5. A lista completa dessas álgebras pode ser encontrada nas Tabelas 3.3 e 3.13, respectivamente. Por fim, no quarto cap´ıtulo, apresentaremos a classificação das álgebras antiassociativas de dimensão 3 e as extensões centrais 2−dimensionais das álgebras de dimensão 2. Esses resultados já foram obtidos em [3]. Aqui faremos todos os cálculos nesses casos, usando o método apresentado neste trabalho.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Álgebras: propriedades e exemplos

Iniciaremos esta seção definindo a estrutura mais básica e essencial em nossos estudos: uma álgebra.

Definição 1.1.1. *Seja* $\mathbb{F}$ *um corpo. Um conjunto* A *é denominado uma álgebra sobre* $\mathbb{F}$ *se satisfaz os seguintes itens:*

1. $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*
2. $(A, +)$ *é um* $\mathbb{F}-$*módulo, com* $1 \cdot x = x\ \forall x \in A$ *e* $1 \in \mathbb{F}$ *a identidade em* $\mathbb{F}$*, ou seja,*
$$a(\lambda b + \mu c) = \lambda ab + \mu ac \ \text{ e } \ (\lambda b + \mu c)a = \lambda ba + \mu ca, \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \ \forall \ a, b, c \in A.$$
3. $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b), \ \forall a, b \in A, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}.$

Assim, a grosso modo, uma álgebra é um espaço vetorial sobre um corpo munido de uma multiplicação. Para um estudo mais abrangente e detalhado dessa estrutura algébrica, as referências [19], [27] são ótimas escolhas.

De posse dessa definição, temos vários exemplos, até então já conhecidos, dessa estrutura algébrica, dentre eles:

- O conjunto das matrizes $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, $M_{n\times n}(\mathbb{F})$, com a multiplicação usual de matrizes é uma $\mathbb{F}$-álgebra ***associativa***, ou seja,
$$a(bc) = (ab)c \quad \forall \ a, b, c \in M_{n\times n}(\mathbb{F}).$$
- Dizemos que uma álgebra A é uma ***álgebra de Leibniz à direita*** se seu produto satisfaz a seguinte identidade
$$(ab)c = a(bc) + (ac)b \ \ \forall \ a, b, c \in A.$$
E dizemos que A é uma ***álgebra de Leibniz à esquerda*** se satisfaz a seguinte identidade
$$a(bc) = b(ac) + (ab)c \ \ \forall \ a, b, c \in A.$$
Além disso, se A também satisfaz $a^2 = 0, \ \forall \ a \in A$, então A será chamada de ***álgebra de Lie.*** E com isso, a identidade de Leibniz será equivalente a
$$a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0, \ \ \forall a, b, c \in A. \text{ (identidade de Jacobi)}$$
Resumindo, álgebras de Leibniz podem ser vistas como uma generalização não anticomutativa das álgebras de Lie.

- Por fim, dizemos que $(A, \cdot)$, munida de um produto $\cdot$, é ***antiassociativa*** se seu produto é antiassociativo, i.e.,

$$x(yz) = -(xy)z, \quad \forall x, y, z \in A.$$

Como estamos interessados em álgebras antiassociativas o seguinte resultado será útil (veja [25, Lema 1.1]):

Lema 1.1.2. *Toda álgebra antiassociativa é nilpotente, com índice de nilpotência no máximo* 4.

Por fim, considere também o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.3. *Definindo o seguinte produto no conjunto das matrizes $n \times n$ sobre* $\mathbb{F}$

$$[\cdot, \cdot] : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \times M_{n\times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{F})$$

$$[A, B] = AB - BA,$$

*verificamos que $(M_{n\times n}(\mathbb{F}), [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de **Lie**.*

*Mais geralmente, dada uma álgebra associativa $(A, \cdot)$, se definimos o produto $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$ sobre o espaço A teremos que $(A, [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de **Lie**.*

Quando o corpo $\mathbb{F}$ considerado já está subentendido chamaremos uma $\mathbb{F}$-álgebra A simplesmente por uma álgebra A. Além disso, denotaremos o produto $a \cdot b$, quando não houver ambiguidade de notações, por ab para cada $a, b \in A$, como feito já na Definição 1.1.1.

Definição 1.1.4. *Sejam A e B duas $\mathbb{F}$-álgebras. Uma aplicação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é denominada um **morfismo de $\mathbb{F}$-álgebras** se satisfaz a seguinte igualdade*

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad a, b \in A.$$

*Quando φ for uma bijeção, denominaremos este por **isomorfismo** e se, além disso, temos $A = B$, então o isomorfismo será chamado de **automorfismo** de A.*

Em geral, vamos nos referir a isomorfismos e automorfismos de álgebras simplesmente como isomorfismos e automorfismos.

Exemplo 1.1.5. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$, o conjunto de todos as transformações lineares de V em V (que por sua vez são morfismos em V), $End(V)$, com a operação de composição de funções é uma álgebra associativa. Em particular, o conjunto de todos os automorfismos de uma dada álgebra A será também uma álgebra.*

Seja $(A, \cdot)$ uma álgebra. Definimos $A^1 := A$, $A^2 := A \cdot A$, e, indutivamente,

$$A^n := \sum_{i=1}^{n} A^i \cdot A^{n-i}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Com isso, a cadeia de subconjuntos , $A^1 \supseteq A^2 \cdots \supseteq A^n \cdots$, é uma cadeia de ideais da álgebra A, chamada de ***série central descendente de A***.

Uma álgebra A é dita ***nilpotente*** se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Ademais, chamamos de ***nil-índice*** de A o menor n que satisfaz tal propriedade.

Exemplo 1.1.6. *O conjunto das matrizes $k \times k$ sobre $\mathbb{F}$ não é nilpotente, no entanto o subconjunto das matrizes estritamente triangulares superiores será uma álgebra nilpotente com nil-índice k.*

Para a classificação de álgebras também precisamos do seguinte objeto:

Definição 1.1.7. *Seja A uma álgebra, definimos o anulador de A por*

$$Ann(A) = \{x \in A;\ Ax + xA = 0\}.$$

Assim sendo, de posse de tais definições, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.8. *Seja $\varphi : (A_1, \cdot) \longrightarrow (A_2, \circ)$ um isomorfismo de álgebras. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\varphi(Ann(A_1^n)) = Ann(A_2^n).$$

Demonstração. Com efeito, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, para cada $x \in A_1$ vale que $\varphi(x) \circ \varphi(A_1^n) = \varphi(x \cdot A_1^n)$. Logo

$$x \in Ann(A_1^n) \Longleftrightarrow \varphi(x) \in Ann(A_2^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

E, portanto, o resultado segue. □

Desse modo, a dimensão de $Ann(A^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ é um invariante no conjunto das classes de álgebras isomorfas.

1.2 Cohomologia

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos de cohomologia necessários para o método que usaremos na classificação das álgebras antiassociativas. Assim, o nosso próximo passo é entender melhor sobre o segundo grupo de cohomologia de uma álgebra antiassociativa, visto que o segundo grupo de cohomologia, $H^2(A, V)$, está relacionado com as extensões centrais $(A \oplus V)$ da álgebra A pelo $\mathbb{F}$-espaço verorial V.

Seja $(A, \cdot)$ uma álgebra antiassociativa e V um espaço vetorial.

Definição 1.2.1. *O conjunto $Z^2(A, V)$ é definido como o conjunto das aplicações bilineares $\vartheta : A \times A \longrightarrow V$, que satisfazem a seguinte igualdade*

$$\vartheta(xy, z) + \vartheta(x, yz) = 0, \quad \forall\ x, y, z \in A. \tag{1.1}$$

Os elementos de $Z^2(A, V)$ serão chamados de cociclos.

Adiante, se ϑ é uma aplicação bilinear, considere $A_\vartheta = A \oplus V$ e defina o seguinte produto $\cdot_\vartheta$ em A_ϑ

$$(x + x') \cdot_\vartheta (y + y') = xy + \vartheta(x, y), \ \forall\ (x + x'), (y + y') \in A_\vartheta.$$

Com essa definição, temos o seguinte resultado:

Lema 1.2.2. *A_ϑ é uma álgebra antiassociativa se, e somente se, $\vartheta \in Z^2(A, V)$.*

Demonstração. Com efeito, dados quaisquer $x, y, z \in A$ e $x', y', z' \in V$ temos que:

$$((x + x') \cdot_\vartheta (y + y')) \cdot_\vartheta (z + z') + (x + x') \cdot_\vartheta ((y + y') \cdot_\vartheta (z + z')) = 0$$
$$\Longrightarrow (xy)z + \vartheta(xy, z) + x(yz) + \vartheta(x, yz) = 0$$
$$\Longrightarrow \vartheta(xy, z) + \vartheta(x, yz) = 0.$$

Com isso, $\vartheta \in Z^2(A, V)$.

Reciprocamente, por definição de A_ϑ, temos a seguinte igualdade $((x+x')\cdot_\vartheta (y+y'))\cdot_\vartheta (z+z')+(x+x')\cdot_\vartheta ((y+y')\cdot_\vartheta (z+z')) = (xy)z+x(yz)+\vartheta(xy, z)+\vartheta(x, yz)$.

Assim, usando que A é uma álgebra antiassociativa e que $\vartheta \in Z^2(A, V)$, concluiremos que A_ϑ é uma álgebra antiassociativa. □

Neste caso, se $\vartheta \in Z^2(A, V)$ e $dim\, V = n$, então dizemos que A_ϑ é uma extensão central n-dimensional de A por V. Mais geralmente, temos:

Definição 1.2.3. *Uma álgebra A' é uma extensão central de outra álgebra A por V se existe uma sequência exata curta*

$$0 \to V \xrightarrow{\varphi} A' \xrightarrow{\psi} A \to 0$$

e, além disso, temos também que $\varphi(V) \subset Ann(A')$.

Definição 1.2.4. *Seja A uma álgebra antiassociativa e seja $\vartheta \in Z^2(A, V)$. Definimos o anulador de ϑ por*

$$\vartheta^\perp = \{x \in A\ ; \vartheta(x, A) + \vartheta(A, x) = 0\}.$$

A primeira consequência dessa definição que veremos é que a extensão A_ϑ possui anulador não trivial, como segue no seguinte lema

Lema 1.2.5. *Se $\vartheta \in Z^2(A, V)$ então $Ann(A_\vartheta) = (\vartheta^\perp \cap Ann(A)) \oplus V$.*

Demonstração. De fato, dado $X = x + x' \in Ann(A_\vartheta)$, para quaisquer $Y = y + y', Z = z + z' \in A_\vartheta$, temos a seguinte igualdade

$$0 = X \cdot_\vartheta Y + Z \cdot_\vartheta X = (x+x')\cdot_\vartheta (y+y') + (z+z')\cdot_\vartheta (x+x') = (xy+zx) + (\vartheta(x, y) + \vartheta(z, x)).$$

Assim, $x \in Ann(A) \cap \vartheta^\perp$ e pela arbitrariedade de Y e Z tomados, segue que $X \in (Ann(A) \cap \vartheta^\perp) \oplus V$. Agora, se $X = x + x' \in (Ann(A) \cap \vartheta^\perp) \oplus V$, então

$$X \cdot_\vartheta Y + Z \cdot_\vartheta X = (x+x')\cdot_\vartheta (y+y') + (z+z')\cdot_\vartheta (x+x') = (xy+zx) + (\vartheta(x, y) + \vartheta(z, x)) = 0,$$

para $Y = y + y', Z = z + z' \in A_\vartheta$ quaisquer. Logo, $X \in Ann(A_\vartheta)$. □

Nosso próximo passo é mostrar que toda álgebra antiassociativa é extensão central de uma álgebra antiassociativa de dimensão menor e isso nos permitirá classificar as álgebras antiassociativas a partir do estudo de suas extensões centrais.

Proposição 1.2.6. *Seja A uma álgebra antiassociativa, então existe, a menos de isomorfismos, uma única álgebra antiassociativa A' e um elemento $\vartheta \in Z^2(A', Ann(A))$, com $\vartheta^\perp \cap Ann(A') = 0$, tal que*

$$A \cong A'_\vartheta \ \text{ e } \ A/Ann(A) \cong A'.$$

Demonstração. Seja $(A, \cdot)$ uma álgebra antiassociativa. De acordo com o Lema 1.1.2, $Ann(A) \neq 0$ e, com isso, tome A' o complemento linear de $Ann(A)$ em A, i.e., $A = A' \oplus Ann(A)$. Note que podemos garantir a existência de A', pois $Ann(A)$ é um subespaço de A.

Considere a projeção linear

$$P : A \longrightarrow A'$$
$$x + y \in A' \oplus Ann(A) \mapsto x.$$

Defina o produto em A' por $x \circ y = P(xy)$ e observe que

$$P(xy) = P((x - P(x) + P(x))(y - P(y) + P(y))) = P(P(x)P(y)) = P(x) \circ P(y).$$

Portanto, P é um homomorfismo. Assim, $P(A) = A'$ é uma álgebra antiassociativa e $A/Ann(A) \cong A'$. Definindo $\vartheta : A' \times A' \longrightarrow Ann(A)$ por $\vartheta(x, y) = xy - x \circ y$, obtemos que

$$(x + v) \cdot_\vartheta (y + u) = x \circ y + \vartheta(x, y) = x \circ y + x \cdot y - x \circ y = xy = (x + v)(y + u),$$

$\forall\, x, y \in A'$, $\forall\, v, u \in Ann(A)$. Desse modo, A'_ϑ e A são a mesma, a menos de isomorfismos, álgebra antiassociativa e, consequentemente, $Ann(A'_\vartheta) = Ann(A)$. Daí, pelo Lema 1.2.2, vemos que $\vartheta \in Z^2(A', Ann(A))$ e também, pelo Lema 1.2.5, temos $\vartheta^\perp \cap Ann(A') = 0$. Portanto, A é extensao central de A', ou seja, o resultado segue. $\square$

Sejam A uma álgebra antiassociativa e V um espaço vetorial. Dada $f \in Hom(A, V)$, o conjunto dos homomorfismos de A em V, definimos $\delta f : A \times A \longrightarrow V$ por $\delta f(x, y) = f(xy)$. Então segue que

$$\delta f(xy, z) + \delta f(x, yz) = f((xy)z) + f(x(yz)) = f((xy)z + x(yz)) = f(0) = 0 \quad \forall x, y, z \in A.$$

Com isso, $\delta f \in Z^2(A, V)$ e, consequentemente, temos a seguinte aplicação

$$\delta : Hom(A, V) \longrightarrow Z^2(A, V)$$
$$f \longrightarrow \delta f.$$

Desse modo, definimos $B^2(A, V)$ como sendo a imagem da aplicação δ, e chamaremos os elementos deste conjunto de cobordos. Note ainda que $B^2(A, V) \subseteq Z^2(A, V)$, como um subespaço, pois δ é linear.

Lema 1.2.7. *Sejam $\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ uma base de V e $\vartheta \in Z^2(A, V)$. Então, ϑ pode ser escrito unicamente da forma*

$$\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i(x, y)e_i \quad \textit{onde,} \quad \vartheta_i \in Z^2(A, \mathbb{F}).$$

Demonstração. Basta definir, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$, a aplicacão bilinear

$$\vartheta_i : A \times A \longrightarrow \mathbb{F}$$

dada por $\vartheta_i(x, y) = a_i$, onde, para cada $x, y \in A$, temos $\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i$.

Para provar a unicidade, considere $\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y)e_i$, com isso, $\sum_{i=1}^{s}(\vartheta_i - \theta_i)(x, y)e_i = 0$. Como $e_1, e_2, \cdots, e_s$ são linearmente independentes, segue que $(\vartheta_i - \theta_i)(x, y) = 0, \forall x, y \in A$ e $\forall i = 1, 2, \cdots, s$. Portanto $\vartheta_i = \theta_i$, $\forall\, i = 1, 2, \cdots, s$. $\square$

Observe que, pelo Lema 1.2.7, temos $\vartheta^\perp = \vartheta_1^\perp \cap \vartheta_2^\perp \cap \cdots \cap \vartheta_s^\perp$. De fato, dado $x \in A$, como $\{e_1, \cdots, e_s\}$ é linearmente independente, temos

$$x \in \vartheta^\perp \iff \vartheta(x, y) + \vartheta(z, x) = \sum_{i=1}^{s} (\vartheta_i(x, y) + \vartheta_i(z, x))e_i = 0, \ \forall\, y, z \in A$$

$$\iff \vartheta_i(x, y) + \vartheta_i(z, x) = 0, \ \forall\, y, z \in A, \text{ e } \forall\, i = 1, \cdots, s \iff x \in \vartheta_1^\perp \cap \vartheta_2^\perp \cap \cdots \cap \vartheta_s^\perp.$$

Além disso, temos

Proposição 1.2.8. $\vartheta \in B^2(A, V) \iff \vartheta_i \in B^2(A, \mathbb{F}), \ \forall \ i \in \{1, 2, \cdots, s\}$.

Demonstração. Com efeito, se $\vartheta \in B^2(A, V)$, então existe $f \in Hom(A, V)$ tal que $\vartheta = \delta f$ e definimos $f_i(x) = a_i$, onde $f(x) = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i$. Assim, vemos que $\vartheta_i = \delta f_i$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Por outro lado, se $\vartheta_i = \delta f_i$, definimos $f(x) = \sum_{i=1}^{s} f_i(x) e_i$, para cada $x \in A$. Assim, $\vartheta = \delta f$ e o resultado segue. □

Adiante, com o intuito de encontrar uma base para $Z^2(A, \mathbb{F})$, considere $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ base da álgebra A, então denotaremos por Δ_{ij} a forma bilinear dada por

$$\Delta_{ij} : A \times A \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$\Delta_{ij}(e_i, e_j) = 1 \text{ e } \Delta_{ij}(e_l, e_k) = 0 \text{ se } (l, k) \neq (i, j).$$

Entao, o conjunto $\{\Delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ forma uma base para o espaço das aplicações bilineares em A. Assim, cada $\vartheta \in Z^2(A, \mathbb{F})$ pode ser escrito por $\vartheta = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij} \Delta_{ij}$ onde os c_{ij}'s satisfazem a equação (1.1) que caracteriza os elementos de $Z^2(A, \mathbb{F})$.

O próximo resultado nos diz que a dimensão do conjunto $B^2(A, \mathbb{F})$ é igual a dimensão de A^2, mais precisamente, ele nos apresenta um modo para obter uma base de $B^2(A, \mathbb{F})$.

Lema 1.2.9. *Seja A uma álgebra antiassociativa n-dimensional e seja $\{e_1, \cdots, e_m\}$ uma base de A^2. Então o conjunto $\{\delta e_1^*, \cdots, \delta e_m^*\}$, onde $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$(delta de Kronecker), é uma base para $B^2(A, \mathbb{F})$.*

Demonstração. Iniciaremos estendendo a base de A^2 para uma base $\{e_1, \cdots e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ de A. Com isso, $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ forma uma base de $Hom(A, \mathbb{F})$, pois dado $\varphi \in Hom(A, \mathbb{F})$ segue que se $\varphi(e_i) = \alpha_i$, podemos escrever $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$. Ademais, considere $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* = 0$, desse modo,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_j) = a_j \Longrightarrow a_j = 0, \ \forall \ j = 1, 2, \cdots, n.$$

Assim, seja $\delta f \in B^2(A, \mathbb{F})$, onde $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$, então temos

$$\delta f(e_j, e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(\sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i^*(e_j e_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta e_i^*(e_j, e_k).$$

$$\therefore \delta f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta e_i^*.$$

Desse modo, $\delta e_1^*, \cdots, \delta e_m^*$ geram o conjunto $B^2(A, \mathbb{F})$. Adiante, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ tais que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta e_i^* = 0$. Então

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta e_i^*(A, A) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i^*(A^2) = 0.$$

Como $e_1^*, \cdots, e_m^*$ são linearmente independentes, segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Portanto $\{\delta e_1^*, \cdots, \delta e_m^*\}$ é um conjunto linearmente independente e, assim, uma base para $B^2(A, \mathbb{F})$. □

Definimos o ***segundo grupo de cohomologia de*** A ***sobre*** V por

$$H^2(A,V) := \frac{Z^2(A,V)}{B^2(A,V)}.$$

Além disso, definiremos uma notação matricial que será muito utilizada na classificação.

Definição 1.2.10. *Dado* $[\vartheta] = \sum_{1\leq i,j\leq n} c_{ij}[\Delta_{ij}] \in H^2(A,V)$*, então a matriz que representa* $[\vartheta]$ *é dada por* (c_{ij})*.*

Vejamos todas essas definições em um exemplo.

Exemplo 1.2.11. *Seja* $A_{2,2}$ *a álgebra antiassociativa 2-dimensional dada por* $e_1e_1 = e_2$, $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2e_2 = 0$*. Para simplificar, omitiremos o produto quando estes forem nulos, ou seja,* $A_{2,2} : e_1e_1 = e_2$*.*

Note que $Z^2(A_{2,2}, \mathbb{F}) \subset \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}\rangle$ *. Assim, seja*

$$\vartheta = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} \in Z^2(A_{2,2}, \mathbb{F}).$$

Observe que

$$a_{22} = \vartheta(e_1e_1, e_2) + \vartheta(e_1, e_1e_2) = 0 \Rightarrow a_{22} = 0,$$
$$a_{21} + a_{12} = \vartheta(e_1e_1, e_1) + \vartheta(e_1, e_1e_1) = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{21}.$$

Portanto $Z^2(A_{2,2}, \mathbb{F}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}-\Delta_{21}\rangle$ *. Adiante, pelo Lema 1.2.9, temos que* $B^2(A_{2,2}, \mathbb{F}) = \langle \Delta_{11}\rangle$ *. Com isso, obtemos que*

$$H^2(A_{2,2}, \mathbb{F}) = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]\rangle .$$

Desse modo, dado $[\vartheta] = \lambda([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) \in H^2(A_{2,2}, \mathbb{F})$*, então a matriz que representa* $[\vartheta]$ *é dada por* $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$*.*

Apresentaremos agora um resultado interessante que relaciona classes de cohomologia iguais com respectivas álgebras isomorfas, mais precisamente, veremos que a classe das álgebras isomorfas a A_ϑ é caracterizada unicamente por $[\vartheta] \in H^2(A,V)$.

Lema 1.2.12. *Sejam* $\vartheta, \theta \in Z^2(A,V)$ *tais que* $[\vartheta] = [\theta]$*. Então* $\vartheta^\perp \cap Ann(A) = \theta^\perp \cap Ann(A)$*, ou seja,* $Ann(A_\vartheta) = Ann(A_\theta)$*. Além disso,* $A_\vartheta \cong A_\theta$*.*

Demonstração. Observe que $[\vartheta] = [\theta]$ implica que $\theta = \vartheta + \delta f$, para algum $f \in Hom(A,V)$. Logo, $\theta(x,y) = \vartheta(x,y) + f(x\cdot y)$. Assim,

$$\vartheta(x,y) = 0 \text{ e } x\cdot y = 0 \iff \theta(x,y) = 0 \text{ e } x\cdot y = 0, \ x,y \in A.$$

Portanto, $\vartheta^\perp \cap Ann(A) = \theta^\perp \cap Ann(A)$ e, pelo Lema 1.2.5, $Ann(A_\vartheta) = Ann(A_\theta)$.

Por fim, definimos a aplicação linear $\sigma : A_\vartheta \longrightarrow A_\theta$ dada por

$$x + v \mapsto x + f(x) + v, \ x \in A, \quad v \in V.$$

Daí, uma verificação direta mostra que σ é um isomorfismo e o resultado segue. $\square$

A próxima definição nos diz como obter uma considerável parte da classificação de tais álgebras de uma dada dimensão, estendendo álgebras de dimensão menor trivialmente.

Definição 1.2.13. *Seja A uma álgebra antiassociativa e $\boldsymbol{I}$ um subespaço não nulo de $Ann(A)$. Se $A = A_0 \oplus \boldsymbol{I}$, para alguma subálgebra A_0 de A, então $\boldsymbol{I}$ é chamada de componente anuladora de A.*

*Desse modo, dizemos que uma álgebra A é **split** se esta contém componente anuladora não trivial, caso contrário, dizemos que tal álgebra é **não-split**.*

Considere $\varphi : (A_1, \cdot) \to (A_2, \circ)$ um isomorfismo de álgebras antiassociativas e tome $x \in A_1$ e $y \in A_2$ tais que $\varphi(x) = y$. Assim, vemos que

Afirmação 1.2.14. $\mathbb{F}x$ *é uma componente anuladora se, e somente se,* $\mathbb{F}y$ *também o é.*

Justificativa. *De fato, se $A_1 = \boldsymbol{I}_1 \oplus \mathbb{F}x$, então $A_2 = \boldsymbol{I}_2 + \mathbb{F}y$ onde $\boldsymbol{I}_2 = \varphi(\boldsymbol{I}_1)$. Logo, dados $a = \varphi(a_1) \in I_2$ e $by \in \mathbb{F}y, b \in \mathbb{F}$, segue que*

$$a \cdot by = \varphi(a_1) \circ \varphi(bx) = \varphi(a_1 \cdot bx) = 0$$

e portanto $A_2 = \boldsymbol{I}_2 \oplus \mathbb{F}y$ e com isso $\mathbb{F}y$ é componente anuladora de A_2. A volta da afirmação segue analogamente, observando que $\varphi^{-1} : A_2 \to A_1$ é também um isomorfismo.

Finalizaremos essa seção com uma proposição que caracteriza a existência de uma componente anuladora em A_ϑ em função de $\vartheta \in Z^2(A, V)$.

Proposição 1.2.15. *Seja $\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i(x, y)e_i \in Z^2(A, V)$ e suponha que $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A) = 0$. Então, A_ϑ tem uma componente anuladora não trivial se, e somente se, $[\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s]$ são linearmente dependentes em $H^2(A, \mathbb{F})$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \{e_1, \cdots, e_s\}$ uma base fixada de V. Suponhamos inicialmente que A_ϑ tem uma componente anuladora. Como $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A) = 0$, pelo Lema 1.2.5 temos $Ann(A_\vartheta) = V$ e, com isso, existe $v_1 \in V$ tal que $A_\vartheta = A_0 \oplus \mathbb{F}v_1$, com A_0 subálgebra de A_ϑ e $\mathbb{F}v_1$ componente anuladora de A_ϑ.

Assim, completamos o conjunto $\{v_1\}$ de forma que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ seja uma base de V e consideremos $A = (a_{ij})$ a matriz de mudança de base de β para α, ou seja, $e_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}v_j$. Desse modo, podemos escrever

$$\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i(x, y)e_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\vartheta_i(x, y)v_j \right).$$

Como $A_\vartheta \cdot A_\vartheta \subset A_0$ e, consequentemente, $A_\vartheta \cdot A_\vartheta \subset A_\vartheta - \mathbb{F}v_1$, segue que $\sum_{i=1}^{s} a_{i1}\vartheta_i(x, y) = 0$, para todos $x, y \in A$. Logo, $\sum_{i=1}^{s} a_{i1}\vartheta_i = 0$ e, portanto, $\sum_{i=1}^{s} a_{i1}[\vartheta_i] = 0$. Mas, se $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{s1} = 0$, então teríamos $det(A) = 0$, o que seria uma contradição, pois A é matriz de mudança de base. Daí, concluímos que $[\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s]$ são linearmente dependentes em $H^2(A, \mathbb{F})$.

Reciprocamente, suponha que $[\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s]$ são linearmente dependentes em $H^2(A, \mathbb{F})$. Sem perda de generalidade, assuma que $[\vartheta_s] = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i[\vartheta_i]$, onde $\alpha_i \in \mathbb{F}$, e considere

$$\theta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y)e_i, \text{ dada por } \theta_i = \vartheta_i, \text{ se } i = 1, 2, \cdots, s-1, \text{ e } \theta_s = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i\vartheta_i.$$

Assim, $\theta \in Z^2(A, \mathbb{F})$ e $[\vartheta] = [\theta]$. Logo $A_\vartheta \cong A_\theta$. Observe também que

$$\theta(x, y) = \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i(x, y)e_i + \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i\vartheta_i(x, y)e_s = \sum_{i=1}^{s-1} \vartheta_i(x, y)(e_i + \alpha_i e_s) = \sum_{i=1}^{s-1} \vartheta_i(x, y)w_i,$$

onde $w_i = (e_i+\alpha_i e_s)$, para cada $i = 1, 2, \cdots, s-1$. Assim, $A_\theta \subset A \oplus \langle w_1, w_2, \cdots, w_{s-1}\rangle$. Portanto, A_θ tem uma componente anuladora e consequentemente, pelo isomorfismo $A_\vartheta = A_\theta$, segue que A_ϑ também terá componente anuladora. □

1.3 Ações de grupo

Nesta seçao introduziremos o conceito de ação de grupos, uma ferramenta algébrica muito útil ao distinguir duas álgebras obtidas pelo método que utilizaremos. Para mais detalhes sobre essa ferramenta, as referências [11] e [12] são ótimas opções.

Definição 1.3.1. *Uma **ação de um grupo** G em um conjunto A é uma aplicação de $G\times A$ para A, denotada por $g\cdot a$, $\forall\ a \in A$ e $\forall\, g \in G$, que satisfaz as seguintes propriedades:*
i) $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1g_2) \cdot a$, $\forall a \in A$ e $\forall\, g_1, g_2 \in G$;
ii) $1_g \cdot a = a$, $\forall a \in A$.

Nesse caso, dizemos que G age em A.

Definição 1.3.2. *Dado $x \in A$, a $G-$ órbita de x com relação à ação do grupo G é definida pelo conjunto*

$$Orb(x) := \{g \cdot x,\ g \in G\}.$$

Escrevemos, às vezes, apenas órbita de x, quando o grupo considerado já está subentendido. A partir dessa definição temos o resultado a seguir (descrito em [11, Proposição 2, cap. 4]).

Proposição 1.3.3. *Duas órbitas distintas são disjuntas, ou seja, se $Orb(x) \cap Orb(y) \neq \emptyset$, então $Orb(x) = Orb(y)$.*

Seja $Aut(A)$ o grupo dos automorfismos de uma álgebra antiassociativa $(A, \cdot)$. Com isso, dados $\varphi \in Aut(A)$ e $\vartheta \in Z^2(A, V)$ definimos $\varphi\vartheta(x, y) = \vartheta(\varphi(x), \varphi(y))$. Assim, observe que $\varphi\vartheta \in Z^2(A, V)$. Com efeito, dados $x, y, z \in A$ quaisquer, temos que

$$\varphi\vartheta(xy, z) + \varphi\vartheta(x, yz) =$$

$$\vartheta(\varphi(xy), \varphi(z)) + \vartheta(\varphi(x), \varphi(yz)) = \vartheta(\varphi(x)\varphi(y), \varphi(z)) + \vartheta(\varphi(x), \varphi(y)\varphi(z)) = 0.$$

Consequentemente, $Aut(A)$ age em $Z^2(A, V)$, visto que

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)\vartheta(x, y) = \vartheta(\varphi_1(\varphi_2(x)), \varphi_1(\varphi_2(y))) = (\varphi_1\vartheta)(\varphi_2(x), \varphi_2(y)) = (\varphi_1\varphi_2)\vartheta(x, y),$$

ou seja, $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\vartheta = \varphi_1(\varphi_2\vartheta)$ e $I_A\vartheta(x, y) = \vartheta(I_A(x), I_A(y)) = \vartheta(x, y)$, onde $I_A \in Aut(A)$ é a identidade em A. Mais geralmente, vemos que

Lema 1.3.4. *$Aut(A)$ age em $H^2(A, V)$.*

Demonstração. Considere $\varphi \in Aut(A)$ e $\vartheta \in Z^2(A, V)$. Observe, primeiramente, que

$$\varphi\vartheta \in B^2(A, V) \iff \vartheta \in B^2(A, V).$$

Com efeito, se $\vartheta = \delta f$ para algum $f \in Hom(A, V)$, então $\varphi\vartheta(x, y) = \vartheta(\varphi(x), \varphi(y)) = f(\varphi(x)\varphi(y))$.

$$\therefore\ \varphi\vartheta = \delta(f \circ \varphi) \Longrightarrow \varphi\vartheta \in B^2(A, V).$$

Por outro lado, se $\varphi\vartheta = \delta f$ para algum $f \in Hom(A, V)$, então $\vartheta(x, y) = \varphi\vartheta(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = f(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = \delta(f \circ \varphi^{-1})$.

$$\therefore\ \vartheta = \delta(f \circ \varphi^{-1}) \Longrightarrow \vartheta \in B^2(A, V).$$

Assim sendo, dado $[\vartheta] = \vartheta + B^2(A, V) \in H^2(A, V)$ segue que $\varphi[\vartheta] = [\varphi\vartheta] \in H^2(A, V)$ e, pela afirmação acima, se $[\vartheta] \neq [0]$ então $\varphi[\vartheta] = [0]$. A partir daí, as propriedades ***i*** e ***ii*** da definição de ação de grupo podem ser vistas facilmente, donde conclui-se que $Aut(A)$ age em $H^2(A, V)$. $\square$

A observação a seguir mostra como podemos visualizar matricialmente a ação de $Aut(A)$ em $Z^2(A, V)$.

Observação 1.3.5. *Considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de A e seja $\varphi \in Aut(A)$, representado matricialmente por (a_{ij}). Escreva $C = (c_{ij})$ e $C' = (c'_{ij})$ as matrizes representando $\vartheta, \varphi\vartheta \in Z^2(A, V)$, respectivamente. Vemos que*

$$\begin{aligned}
c'_{ij} &= \varphi\vartheta(e_i, e_j)\\
&= \vartheta(\varphi(e_i), \varphi(e_j))\\
&= \vartheta\left(\sum_{s=1}^{n} a_{si}e_s, \sum_{r=1}^{n} a_{rj}e_r\right)\\
&= \sum_{s=1}^{n} a_{si} \sum_{r=1}^{n} a_{rj}\vartheta(e_s, e_r)\\
&= \sum_{s=1}^{n} a_{si} \sum_{r=1}^{n} a_{rj}c_{sr}\\
&= \sum_{s=1}^{n} a_{si} \sum_{r=1}^{n} c_{sr}a_{rj}\\
&= (\varphi^T C\varphi)_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto $C' = \varphi^T C\varphi$.

Sejam V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial, $GL(V)$ o conjunto de todas as aplicacões lineares bijetivas em V e $\psi \in GL(V)$. Assim, para cada $\vartheta \in Z^2(A, V)$ defina $\psi\vartheta(x, y) = \psi(\vartheta(x, y))$. Pela linearidade de ψ, segue que $\psi\vartheta \in Z^2(A, V)$ e, consequentemente, teremos que $GL(V)$ age em $Z^2(A, V)$. Dessa forma, temos também o seguinte resultado

Lema 1.3.6. *$GL(V)$ age em $H^2(A, V)$.*

Demonstração. Observe que $\vartheta \in B^2(A, V) \iff \psi\vartheta \in B^2(A, V)$. Com efeito, se $\vartheta = \delta f$; $f \in Hom(A, V)$, então

$$\psi\vartheta(x, y) = \psi(\vartheta(x, y)) = \psi(f(x) \cdot f(y)) = \psi(f(x)) \cdot \psi(f(y)) = \delta(\psi \circ f)(x, y)\text{e},$$

portanto, $\psi\vartheta = \delta(\psi \circ f) \in B^2(A, V)$. Desse modo, $GL(V)$ age em $H^2(A, V)$. $\square$

O próximo resultado nos mostra como ações de grupos são úteis para detectar quando duas extensões são isomorfas.

Proposição 1.3.7. *Sejam $\vartheta, \theta \in Z^2(A, V)$ tais que $Ann(A_\vartheta) = Ann(A_\theta) = V$. Então,*

$$A_\vartheta \cong A_\theta \Longrightarrow \exists\ \varphi \in Aut(A) \ \text{e}\ \exists\ \psi \in GL(V), \ \text{tais que } [\varphi\vartheta] = [\psi\theta].$$

Em particular, se $\vartheta = \theta$ e supondo que $\vartheta^\perp \cap Ann(A) = 0$, então podemos descrever $\varphi \in Aut(A_\vartheta)$ por

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ \phi & \psi \end{pmatrix} : \varphi_0 \in Aut(A), \ \psi \in GL(V) \ \text{e}\ \phi \in Hom(A, V)$$

tal que $\vartheta(\varphi_0(x), \varphi_0(y)) = \phi(xy) + \varphi(\vartheta(x, y)), \ \forall x, y \in A$.

Demonstração. Com efeito, suponha que $(A_\vartheta, \cdot_\vartheta) \cong (A_\theta, \cdot_\theta)$, então existe um isomorfismo $\varphi : A_\vartheta \longrightarrow A_\theta$. De acordo com a Afirmação 1.1.8, $\varphi(V) = \varphi(Ann(A_\vartheta)) = Ann(A_\theta) = V$. Considere $\psi := \varphi|_V \in GL(V)$.

Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base de A e escreva $\varphi(e_i) = e'_i + v_i$, onde $e'_i \in A$ e $v_i \in V$. Então, φ induz um isomorfismo $\varphi_0 : A \longrightarrow A$ dado por $\varphi_0(e_i) = e'_i$ e uma aplicação linear $\phi : A \longrightarrow V$ dada por $\phi(e_i) = v_i$, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.

Portanto, podemos descrever φ como uma matriz da forma

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ \phi & \psi \end{pmatrix} : \varphi_0 \in Aut(A), \ \psi \in GL(V) \ \text{e}\ \phi \in Hom(A, V).$$

Considere $x, y \in A$, então

$$\varphi(x \cdot_\vartheta y) = \varphi(xy + \vartheta(x, y)) = \varphi_0(xy) + \phi(xy) + \psi(\vartheta(x, y))$$

e também $\varphi(x) \cdot_\theta \varphi(y) = (\varphi_0(x) + \phi(x)) \cdot_\theta (\varphi_0(y) + \phi(y)) = \varphi_0(x)\varphi_0(y) + \theta(\varphi_0(x), \varphi_0(y))$.

Como φ_0 é um isomorfismo, segue que

$$\theta(\varphi_0(x), \varphi_0(y)) = \phi(xy) + \psi(\vartheta(x, y)) \ \forall\, x, y \in A.$$

Ou seja, $\varphi_0\theta = \delta\phi + \psi\vartheta$ e, consequentemente, $[\varphi_0\theta] = [\psi\vartheta]$, como queríamos. □

Para finalizar esta seção descreveremos o grupo de cohomologia e o grupo dos automorfismos da álgebra antiassociativa 3-dimensional $A_{3,2}$. Esses resultados que serão úteis nos cálculos de extensões de $A_{3,2}$, posteriormente no Capítulo 3.

Exemplo 1.3.8. *Considere a álgebra antiassociativa 3-dimensional, com base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $A_{3,2} : e_1^2 = e_2$ (aqui e em todos casos que descreveremos uma álgebra pelos produtos dos elementos de uma base, omitiremos os produtos nulos).*

Analogamente ao que foi feito no Exemplo 1.2.11, obtemos que

$$Z^2(A_{3,2}, \mathbb{F}) = \langle\ \Delta_{11}, \Delta_{12} - \Delta_{21}, \Delta_{13}, \Delta_{31}, \Delta_{33} \rangle\ .$$

De acordo com o Lema 1.2.9, temos $B^2(A_{3,2}, \mathbb{F}) = \langle\ \Delta_{11} \rangle$. Com isso,

$$H^2(A_{3,2}, \mathbb{F}) = \langle\ [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{13}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}] \rangle\ .$$

Logo, dado $[\vartheta] = \alpha_1([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + \alpha_2[\Delta_{13}] + \alpha_3[\Delta_{31}] + \alpha_4[\Delta_{33}]$*, este será representado matricialmente por* $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$.

Além disso, podemos escrever $A_{3,2} = A_{2,2} \oplus V$*, com* $V = \mathbb{F}e_3$*. Pelo Lema 1.3.7, segue que*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ \phi & \psi \end{pmatrix} : \varphi_0 \in Aut(A_{2,2}),\ \psi \in GL(V) \text{ e } \phi \in Hom(A_{2,2}, V).$$

Dessa forma, considerando $\varphi \in Aut(A_{2,2})$*, se* $\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$*, então temos* $\varphi(e_2) = \varphi(e_1e_1) = a_{11}^2 e_2$*. Adiante, dado* $\phi \in Hom(A_{2,2}, V)$ *qualquer, se* $\phi(e_1) = \lambda e_3$*, então* $\phi(e_2) = \phi(e_1e_1) = \phi(e_1)\phi(e_1) = \lambda^2 e_3e_3 = 0$*. Portanto, obtemos que*

$$Aut(A_{3,2}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} ;\ a_{33}a_{11} \neq 0,\ a_{ij} \in \mathbb{F} \right\}.$$

Por fim, segundo a observação 1.3.5, a matriz que representa $[\varphi\vartheta]$ *será dada por*

$$A^T CA = \begin{pmatrix} \alpha^* & a_{11}^3 & a_{11}a_{23} + a_{33}(a_{11}\alpha_2 + a_{31}\alpha_4) \\ -a_{11}^3 & 0 & 0 \\ a_{11}(-a_{23} + \alpha_3 a_{33}) + a_{31}a_{33}\alpha_4 & 0 & a_{33}^2\alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Na matriz acima, não descrevemos o valor de α^* explicitamente, pois este pode ser tomado igual a zero, visto que $\Delta_{11} \in B(A_{3,2}, \mathbb{F})$ e estamos considerando a ação de φ em $[\vartheta] \in H^2(A_{3,2}, \mathbb{F})$.

Capítulo 2

Descrição do método usado na classificação

Neste capítulo descreveremos o método que usaremos na classificação das álgebras anti-associativas.

Tal método foi descrito inicialmente em 1978 por Skjelbred-Sund em [26] com o intuito de classificar álgebras de Lie nilpotentes. Posteriormente, métodos análogos a este têm sido utilizados na classificação de diversos tipos de álgebras nilpotentes como, por exemplo, álgebras de Malcev em [18], álgebras de Jordan em [15], álgebras associativas em [8] e álgebras de Novikov em [20].

Desta forma, o método que utilizaremos (análogo ao método desenvolvido por Skjelbred e Sund) relaciona órbitas, sob a acão do grupo de automorfismos de álgebras antiassociativas (conhecidas de dimensão $n-s$) em subconjuntos do conjunto das grassmanianas s-dimensionais dos seus grupos de homologia, com extensões centrais s-dimensionais dessas álgebras. Portanto, de acordo com a Proposição 1.2.6, ao aplicar tal método estaremos classificando todas as álgebras antiassociativas de uma dada dimensão n desejada.

2.1 O "pano de fundo" do método

Sejam A uma álgebra antiassociativa e V um espaço vetorial de dimensão finita. Inicialmente, note que o Lema 1.3.7 pode ser refraseado da seguinte forma:

Lema 2.1.1. *Sejam $\vartheta(x,y)=\sum_{i=1}^{s}\vartheta_i(x,y)e_i$ e $\theta(x,y)=\sum_{i=1}^{s}\theta_i(x,y)e_i$ elementos de $Z^2(A,V)$. Suponha que A_ϑ é não-split e $\vartheta^\perp\cap Ann(A)=\theta^\perp\cap Ann(A)=0$. Então, $A_\vartheta\cong A_\theta$ se, e somente se, existe $\varphi\in Aut(A)$ tal que o conjunto $\{[\varphi\theta_i];\ i=1,\cdots,s\}$ gera o mesmo subespaço em $H^2(A,V)$ que o conjunto $\{[\vartheta_i];\ i=1,\cdots,s\}$.*

Demonstração. Se $A_\vartheta\cong A_\theta$, pelo Lema 1.3.7 existem $\varphi\in Aut(A)$ e $\psi\in GL(V)$ tais que $[\varphi\vartheta]=[\psi\theta]$. Considere $\psi(e_i)=\sum_{j=1}^{s}a_{ij}e_j$. Logo,

$$(\varphi\theta-\psi\vartheta)(x,y)=\sum_{j=1}^{s}\left(\varphi\theta_j-\sum_{i=1}^{s}a_{ij}\vartheta_i\right)(x,y)e_j.$$

Assim, como $[\varphi\vartheta]=[\psi\theta]$, segue que $\varphi\theta_j-\sum_{i=1}^{s}a_{ij}\vartheta_i\in B^2(A,\mathbb{F})$, $\forall\, j=1,\cdots,s$. Daí, temos $[\varphi\theta_j]=\sum_{i=1}^{s}a_{ij}[\vartheta_i]$ e, portanto, o resultado segue.

Por outro lado, se $\{[\varphi\theta_i],\ i = 1, \cdots, s\}$ gera o mesmo subespaço em $H^2(A, V)$ que o conjunto $\{[\varphi\vartheta_i],\ i = 1, \cdots, s\}$, então existe matriz invertível (a_{ij}) tal que, para cada $j = 1, \cdots, s$, temos $[\varphi\theta_j] = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}[\vartheta_i]$.

Dessa forma, defina a aplicação linear $\psi : V \longrightarrow V$ por $\psi(e_i) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}e_j$, então $\psi\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\vartheta_i(x, y)e_j$. Assim,

$$(\varphi\theta - \psi\vartheta)(x, y) = \sum_{j=1}^{s}(\varphi\theta_j - \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\vartheta_i)(x, y)e_j.$$

Logo, $[\varphi\vartheta] = [\psi\theta]$ e, pelo Lema 1.3.7, temos que $A_\vartheta \cong A_\theta$. □

Considere agora a seguinte definição:

Definição 2.1.2. *Seja V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita, a grassmanniana s-dimensional de V, $G_s(V)$, é definida pelo conjunto de todos os subespaços de V de dimensão s.*

Assim, vemos que existe uma ação natural de $Aut(A)$ em $G_s(H^2(A, \mathbb{F}))$, dada por

$$G_s(H^2(A, \mathbb{F})) \xrightarrow{\varphi \in Aut(A)} G_s(H^2(A, \mathbb{F}))$$
$$W = \langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s]\rangle \mapsto \varphi W = \langle [\varphi\vartheta_1], [\varphi\vartheta_2], \cdots, [\varphi\vartheta_s]\rangle.$$

Observe que φW, assim definida, pertence a $G_s(H^2(A, \mathbb{F}))$, visto que φ é um automorfismo. Logo, denotaremos a órbita de W sobre a ação de $Aut(A)$ por $Orb(W)$. Assim, temos:

Lema 2.1.3. *Sejam $W_1 = \langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s]\rangle$, $W_2 = \langle [\theta_1], [\theta_2], \cdots, [\theta_s]\rangle \in G_s(H^2(A, \mathbb{F}))$. Se $W_1 = W_2$, então $\cap_{i=1}^{s}\vartheta_i^{\perp} \cap Ann(A) = \cap_{i=1}^{s}\theta_i^{\perp} \cap Ann(A)$.*

Demonstração. Sejam $W_1 = W_2$, logo existe uma matriz invertível (a_{ij}) tal que $[\vartheta_i] = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}[\theta_j]$, para cada $i = 1, 2, \cdots, s$. Com isso, existe $f_i \in Hom(A, \mathbb{F})$ tal que $\vartheta_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\theta_j + \delta f_i$, para cada $i = 1, 2, \cdots, s$. Assim,

$$\vartheta_i(x, y) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\theta_j(x, y) + f_i(xy).$$

Consequentemente, obtemos que $\vartheta_1(x, y) = \vartheta_2(x, y) = \cdots = \vartheta_s(x, y) = xy = 0$ se, e somente se, $\theta_1(x, y) = \theta_2(x, y) = \cdots = \theta_s(x, y) = xy = 0$, ou seja, $\cap_{i=1}^{s}\vartheta_i^{\perp} \cap Ann(A) = \cap_{i=1}^{s}\theta_i^{\perp} \cap Ann(A)$. □

O lema acima garante que o seguinte conjunto está bem definido:

$$T_s(A) := \{W = \langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s]\rangle \in G_s(H^2(A, \mathbb{F}))\ ;\ \cap_{i=1}^{s}\vartheta_i^{\perp} \cap Ann(A) = 0\}.$$

Afirmação 2.1.4. *$Aut(A)$ age em $T_s(A)$.*

Demonstração. Dados $\varphi \in Aut(A)$ e $W = \langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s]\rangle \in G_s(H^2(A, \mathbb{F}))$, basta observar que, para cada $i = 1, 2, \cdots, s$,

$$x \in (\varphi\vartheta_i)^{\perp} \cap Ann(A) \iff \varphi(x) \in \vartheta_i^{\perp} \cap Ann(A).$$

Como φ é um automorfismo, $\varphi W \in T_s(A) \iff W \in T_s(A)$. □

2.2 O método

A fim de construir todas as álgebras n-dimensionais com centro s-dimensional, considere A uma álgebra antiassociativa de dimensão $n-s$, V um espaço vetorial gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_s$ e denote por $E(A,V)$ o conjunto de todas as álgebras antiassociativas de dimensão n sem componente anuladora que são extensões centrais de A por V e tem anulador s-dimensional.

Com isso, de acordo com o Lema 1.2.5 , tais álgebras serão da forma A_ϑ para algum $\vartheta \in Z^2(A,V)$, com $Ann(A_\vartheta) = V$ e $\vartheta^\perp \cap Ann(A) = 0$. Além disso, pelo Lema 1.2.15, podemos escrever

$$E(A,V) = \{A_\vartheta : \vartheta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i(x,y)e_i \quad \text{e} \quad \langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s] \rangle \in T_s(A)\}.$$

Denote por $[A_\vartheta]$ a classe das álgebras isomorfas a $A_\vartheta \in E(A,V)$.

O resultado a seguir nos garante que a classe de álgebras isomorfas, $[A_\vartheta]$, depende unicamente do $\vartheta \in H^2(A,V)$ considerado. Assim, podemos construir todas as álgebras antiassociativas de dimensão n e com centro s-dimensional, a partir de álgebras antiassociativas de dimensão $n-s$.

Teorema 2.2.1. *Existe uma correspondência $1-1$ entre o conjunto de $Aut(A)$-órbitas em $T_s(A)$ e o conjunto das classes de isomorfismos de $E(A,V)$. Além disso, dado $\vartheta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i(x,y)e_i$, esta correspondência é descrita por*

$$\{Orb(W) : W \in T_s(A)\} \leftrightarrow \{[A_\theta] : A_\theta \in E(A,V)\}$$

$$Orb\langle [\vartheta_1], \cdots, [\vartheta_s] \rangle \mapsto [A_\vartheta].$$

Este teorema, por sua vez, é consequência do seguinte lema:

Lema 2.2.2. *Sejam $A_\vartheta, A_\theta \in E(A,V)$ e suponha que $\vartheta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i(x,y)e_i$ e $\theta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \theta^i(x,y)e^i$. Então $[A^\vartheta] = [A^\theta]$ se, e somente se,*

$$Orb\langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s] \rangle = Orb\langle [\theta_1], [\theta_2], \cdots, [\theta_s] \rangle .$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1.1 , $A_\vartheta \cong A_\theta$ se, e somente se, existe $\varphi \in Aut(M)$ tal que

$$\langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s] \rangle = \langle [\varphi\theta_1], [\varphi\theta_2], \cdots, [\varphi\theta_s] \rangle$$

Assim, teremos que $[A_\vartheta] = [A_\theta]$ se, e somente se,

$$Orb\langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \cdots, [\vartheta_s] \rangle = Orb\langle [\theta_1], [\theta_2], \cdots, [\theta_s] \rangle .$$

□

Desse modo, cada órbita de $Aut(A)$ em $T_s(A)$ corresponde unicamente a uma classe de isomorfismo de $E(A,V)$ e vice-versa, com isso garantimos a veracidade do teorema.

Assim, prosseguiremos em nossa classificação com os seguintes passos:

1. Para uma dada álgebra antiassociativa A de dimensão $n-s$, determine $H^2(A,V)$, $Ann(A)$, e $Aut(A)$.
2. Determine o conjunto das $Aut(A)-$órbitas em $T_s(A)$.
3. Para cada órbita, construa a álgebra antiassociativa correspondente, de acordo com o Teorema 2.2.1.

2.3 A sequência característica de dimensões de radicais

Nesta seçao descreveremos a sequência característica de dimensões de radicais que será usada no estudo das órbitas de $T_s(A)$ fixas pela ação de $Aut(A)$.

Assim, com tal objetivo em mente, considere A uma álgebra antiassociativa e V um espaço vetorial.

Lema 2.3.1. *Dados $\varphi \in Aut(A)$ e $\vartheta \in Z^2(A, V)$, então $dim\, \vartheta^{\perp} = dim\, (\varphi\vartheta)^{\perp}$.*

Demonstração. Com efeito, temos que

$$\varphi(x) \in \vartheta^{\perp} \iff \vartheta(\varphi(x), A) + \vartheta(A, \varphi(x)) = 0$$

$$\iff \varphi(\vartheta(x, A)) + \varphi(\vartheta(A, x)) = 0 \iff x \in (\varphi\vartheta)^{\perp}.$$

Portanto, temos uma aplicação bijetiva $\sigma : \varphi\vartheta^{\perp} \longrightarrow \vartheta^{\perp}$ dada por $x \mapsto \varphi(x)$. Assim, se $\{e_1, \cdots, e_s\}$ é uma base para $\varphi\vartheta^{\perp}$, então $\{\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_s)\}$ forma uma base para $\vartheta^{\perp}$ e, com isso, o resultado segue. □

Agora, considere a seguinte definição:

Definição 2.3.2. *Sejam $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s \in Z^2(A, V)$. Defina $\Psi(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s) = (m_1, \cdots, m_s)$, a sequência ordenada decrescente de $dim\, \vartheta_1^{\perp}, \cdots, dim\, \vartheta_s^{\perp}$.*

Dessa forma, decorre imediatamente do Lema 2.3.1 que

Corolário 2.3.3. *Dados $\varphi \in Aut(A)$ e $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s \in Z^2(A, V)$, então*

$$\Psi(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s) = \Psi(\varphi\vartheta_1, \cdots, \varphi\vartheta_s).$$

Adiante, apresentaremos mais uma definição que será importante para a construção da nossa função Ψ.

Definição 2.3.4. *Dados dois conjuntos parcialmente ordenados A e B, definimos a ordem lexicográfica no produto cartesiano $A \times B$ por*

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ se } a < a' \text{ ou } a = a' \text{ e } b \leq b'.$$

Além disso, de forma análoga, podemos generalizar essa definição para o produto $A_1 \times \cdots \times A_n$, onde A_i, $i = 1, \cdots, n$ são conjuntos parcialmente ordenados.

Agora, dado $W \in G_s(H^2(A, \mathbb{F}))$, estamos aptos a definir a sequência característica de dimensões de radicais (veja referência [15, Definição 4.1]).

Definição 2.3.5. *A sequência característica de dimensões de radicais, denotada por $\Psi(W)$, é definida pelo menor limite superior para a ordem lexicográfica do conjunto*

$$\{\Psi(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s);\ \vartheta_1, \cdots, \vartheta_s \in Z^2(A, \mathbb{F}) \ \text{ e } \ W = \langle [\vartheta_1], \cdots, [\vartheta_s] \rangle \}.$$

Proposição 2.3.6. *Sejam $\varphi \in Aut(A)$ e $W \in G_s(H^2(A, \mathbb{F}))$. Então, $\Psi(W) = \Psi(\varphi W)$.*

Demonstração. Considere $\Psi(W) = \Psi(\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_s)$, com $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s \in Z^2(A, \mathrm{F})$, pelo Corolário 2.3.3, temos $\Psi(\vartheta_1, \cdots \vartheta_s) = \Psi(\varphi\vartheta_1, \cdots, \varphi\vartheta_s)$. Portanto, $\Psi(W) \leq \Psi(\varphi W)$.

Por outro lado, se $\Psi(\varphi W) = \Psi(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \cdots, \varphi\theta_s)$, para $\theta_1, \cdots, \theta_s \in Z^2(A, \mathrm{F})$, entao, novamente pelo Corolario 2.3.3, temos $\Psi(\theta_1, \cdots, \theta_s) = \Psi(\varphi\theta_1, \cdots, \varphi\theta_s)$. Logo, $\Psi(\varphi W) \leq \Psi(W)$ e, assim, temos a igualdade desejada. $\square$

Com isso, dados $W_1, W_2 \in G_s(H^2(A, \mathrm{F}))$, se $\Psi(W_1) \quad \Psi(W_2)$, então $Orb(W_1) \cap Orb(W_2) = \emptyset$. Ou seja, a sequência característica de dimensões de radicais é um invariante para $Orb(W)$.

No exemplo a seguir, usaremos a sequência característica de dimensões de radicais para o estudo de $Aut(A_{3,2})$-orbitas disjuntas em $T_2(A_{3,2})$.

Exemplo 2.3.7. *Novamente, consideramos a álgebra $A_{3,2}$ descrita no Exemplo 1.3.8. Temos $T_2(A_{3,2}) := \{W = \langle \vartheta_1, \vartheta_2\rangle \in G_2(H^2(A_{3,2}, \mathrm{F})) : \vartheta_1^\perp \cap \vartheta_2^\perp \cap Ann(A_{3,2}) = 0\}$ e tome $W, U \in T_2(A_{3,2})$ dados por*

$$W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{31}]\rangle \quad e \quad U = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}], [\Delta_{13}] - [\Delta_{31}]\rangle .$$

Observe que $([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}])^\perp = \langle e_3 \rangle$ e $([\Delta_{31}])^\perp = \langle e_2 \rangle$. Desse forma, obtemos que $\Psi(W) = (1, 1)$. De maneira totalmente análoga temos que $\Psi(U) = (1, 0)$. Com isso, as $Aut(A_{3,2})-$órbitas geradas por W e U serão disjuntas.

Dessa forma, a sequência característica de dimensões de radicais será um modo eficaz na hora de distinguir duas álgebras, uma vez que órbitas distintas em $T_s(A)$ correspondem a extensões centrais $s-$dimensionais de A não isomorfas.

Capítulo 3

Classificação algébrica de álgebras antiassociativas de dimensão ≤ 5

Neste capítulo, classificaremos, a menos de isomorfismo, as álgebras antiassociativas puras de dimensão até 5 sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Mais precisamente, apresentaremos os resultados já conhecidos para essas dimensões e faremos a classificação das álgebras antiassociativas puras de dimensões 4 e 5.

3.1 Dimensão 1

Seja A uma álgebra antiassociativa de dimensão 1, ou seja, $A = \langle e_1 \rangle$. Logo, $e_1e_1 = \lambda e_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ e, assim, $(e_1e_1)e_1 + e_1(e_1e_1) = 0 \Longrightarrow 2\lambda^2 e_1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$.

Desse modo, toda álgebra antiassociativa de dimensão 1 é trivial, ou seja, $xy = 0,\ \forall\ x, y \in A$. Portanto, a menos de isomorfismo, existe apenas uma álgebra antiassociativa de dimensão 1, a qual chamaremos de $A_{1,1}$.

3.2 Dimensão 2

Para extensões centrais com componente anuladora, temos apenas a extensão central de dimensão 1 de $A_{1,1}$: $A_{2,1} = A_{1,1} \oplus \mathbb{C}e_2$.

Agora, no caso de extensões centrais de $A_{1,1}$ sem componente anuladora, observe que $H^2(A_{1,1}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}] \rangle$ e $Aut(A_{1,1}) = \{\lambda Id;\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, onde Id é a identidade em $A_{1,1}$. Além disso, dado $[\vartheta] = [\lambda\Delta_{11}] \in H^2(A_{1,1}, \mathbb{C})$, segue da definição que se $\lambda \quad 0$, então $\vartheta^{\perp} = \{0\}$. Desse modo, $T_1(A_{1,1}) = G_1(H^2(A_{1,1}, \mathbb{C})) = \{\langle \lambda[\Delta_{11}] \rangle ; \lambda \neq 0\}$.

Logo, considere $W = \langle \lambda[\Delta_{11}] \rangle \quad T_1(A_{1,1})$ qualquer. Então, tomando $\varphi = \lambda^{-1/2} Id$, obtemos $\varphi W = \langle [\Delta_{11}] \rangle$. Pela arbitrariedade de W, segue que existe apenas uma órbita invariante pela ação de $Aut(A_{1,1})$ em $T_1(A_{1,1})$.

Com isso, pelo Teorema 2.2.1, a álgebra correspondente a esta órbita é descrita por

$A_{2,2} : e_1e_1 = e_2$.

3.3 Dimensão 3

As álgebras antiassociativas de dimensão 3 sobre $\mathbb{C}$ já foram classificadas (veja [3]) e estão listadas na tabela abaixo. Na seção 4.1 (do Apêndice), faremos explicitamente essa classificação usando as técnicas contidas nesse trabalho.

Tabela 3.1: Álgebras antiassociativas de dimensão 3

$A_{3,1}$:	Trivial
$A_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_2$
$A_{3,3}$:	$e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_1 = -e_3$
$A_{3,4}$:	$e_1e_1 = e_3, \quad e_2e_2 = e_3$
$A^{\alpha}_{3,5}$:	$e_1e_1 = \alpha e_3, \quad e_2e_1 = e_3, \quad e_2e_2 = e_3, \ \alpha \in \mathbb{C}$
$A_{3,6}$:	$e_1e_1 = e_2, \quad e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_1 = -e_3$

3.4 Dimensão 4

Nesta seção, classificaremos as álgebras antiassociativas puras de dimensão 4.

Observe que, segundo o Lema 1.1.2, as álgebras antiassociativas satisfazem a igualdade $xyzw = 0$. Desse modo, podemos descrever tais álgebras em duas classes disjuntas: as álgebras antiassociativas que satisfazem a igualdade $xyz = 0$ e, portanto, satisfazem $xyzw = 0$, e as álgebras que não satisfazem a igualdade $xyz = 0$. Assim, temos:

Definição 3.4.1. *Dizemos que uma álgebra A é pura se ela não satisfaz a igualdade $xyz = 0$. Caso contrário, dizemos que A é uma álgebra não-pura.*

Note que toda álgebra não-pura satisfaz trivialmente a identidade de Leibniz e, neste caso, tal classificação foi apresentada em [22, Tabela 1]. Essas, por sua vez, juntamente com as álgebras antiassociativas com componente anuladora, estão descritas na seguinte tabela:

Tabela 3.2: Álgebras antiassociativas de dimensão 4 que satisfazem $xyz = 0$

$A_{4,1}$	Trivial
$A_{4,2}$	$e_1e_1 = e_2$
$A_{4,3}$	$e_1e_1 = e_2, \ e_3e_3 = e_4$
$A_{4,4}$	$e_1e_2 = e_3, \ e_2e_1 = -e_3$
$A^{\lambda}_{4,5}$	$e_1e_1 = e_3, \ e_1e_2 = e_3, \ e_2e_2 = \lambda e_3, \ \lambda \in \mathbb{C}$
$A_{4,6}$	$e_1e_1 = e_3, \ e_1e_2 = e_3, \ e_2e_1 = e_3$
$A_{4,7}$	$e_1e_2 = e_4, \ e_3e_1 = e_4$
$A_{4,8}$	$e_1e_2 = e_3, \ e_2e_1 = e_4, \ e_2e_2 = -e_3$
$A^{\lambda}_{4,9}$	$e_1e_1 = e_3, \ e_1e_2 = e_4, \ e_2e_1 = -\lambda e_3, \ e_2e_2 = -e_4, \ \lambda \in \mathbb{C}$
$A^{\lambda}_{4,10}$	$e_1e_1 = e_4, \ e_1e_2 = \lambda e_4, \ e_2e_1 = -\lambda e_4, \ e_2e_2 = e_4, \ e_3e_3 = e_4, \ \lambda \in \mathbb{C}$
$A_{4,11}$	$e_1e_2 = e_4, \ e_1e_3 = e_4, \ e_2e_1 = -e_4, \ e_2e_2 = e_4, \ e_3e_1 = e_4$
$A_{4,12}$	$e_1e_1 = e_4, \ e_1e_2 = e_4, \ e_2e_1 = -e_4, \ e_3e_3 = e_4$
$A_{4,13}$	$e_1e_2 = e_3, \ e_2e_1 = e_4$
$A_{4,14}$	$e_1e_1 = e_4, \ e_1e_2 = e_3, \ e_2e_1 = -e_3, \ e_2e_2 = 2e_3 + e_4$
$A^{\lambda}_{4,15}$	$e_1e_2 = e_4, \ e_2e_1 = \lambda e_4, \ e_2e_2 = e_3, \ \lambda \in \mathbb{C}$
$A_{4,16}$	$e_1e_2 = e_4, \ e_2e_1 = -e_4, \ e_3e_3 = e_4$

Na tabela acima, temos o isomorfismo $A^{\lambda}_{4,10} \cong A^{-\lambda}_{4,10}$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.4.1 Extensões centrais puras

Nos concentraremos agora na classificação das álgebras antiassociativas puras. Observe que $A_{3,6}$ é uma álgebra pura de dimensão 3, logo sua extensão central 1− dimensional com componente anuladora $A_{4,17}$, descrita na tabela 3.3, será uma álgebra antiassociativa de dimensão 4. Adiante, a contra-positiva da afirmação 3.4.2, a seguir, nos oferece uma direção para esse estudo.

Afirmação 3.4.2. *Toda álgebra não pura é extensão central de uma álgebra com produto nulo. Reciprocamente, toda extensão central de uma álgebra com produto nulo será uma álgebra não pura.*

Justificativa. *Note que, pela Proposição 1.2.6, existe uma única álgebra A' tal que $A \cong A'_\vartheta$ com $A/Ann(A) \cong A'$, $\vartheta \in Z^2(A', Ann(A))$ e $\vartheta^\perp \cap Ann(A') = 0$. Resta verificar que A' é uma álgebra com produto nulo. Mas, isso é uma consequência da hipótese de que A é não pura (e, portanto, $A^2 \subset Ann(A)$) e do isomorfismo $A/Ann(A) \cong A'$.*

Por fim, dada uma extensão central A de uma álgebra com produto nulo, teremos que $A^2 \subset Ann(A)$ e, consequentemente, $xyz = 0$, $\forall\ x, y, z \in A$, ou seja, A é uma álgebra não pura.

Considere também a seguinte observacão:

Observação 3.4.3. *Não existem extensões centrais não-split de álgebras antiassociativas puras.*

Justificativa. *Seja A uma álgebra antiassociativa pura. Sejam $(xy)z \neq 0$ e considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de A tal que $e_1 = (xy)z$. Note que para qualquer $\vartheta \in H^2(A, \mathbb{C})$ temos que $e_1 \in \vartheta^\perp$. Com efeito, se $e_1 \notin \vartheta^\perp$, então $\vartheta = \sum_{i,j} c_{ij}[\Delta_{ij}]$, onde ou $c_{i1} \neq 0$ ou $c_{1i} \neq 0$. Dessa forma, temos que $((xy)z)e_i \neq 0$ ou $e_i((xy)z) \neq 0$ em A_ϑ, o que contradiz o lema 1.1.2. Por outro lado, $e_1 \in Ann(A)$, pois caso contrário teríamos novamente uma contradição com o lema 1.1.2. Assim, $T_s(A) = \emptyset$ e, portanto, o resultado segue.*

Desse modo, as extensões centrais das álgebras $A_{2,1}$ e $A_{3,1}$ (com produto nulo) já estão listadas na Tabela 3.2.

Extensões centrais de $A_{2,2}$ sem componente anuladora

Nesse caso, como $G_2(H^2(A_{2,2}, \mathbb{F})) = \emptyset$, então não existem extensões centrais 2-dimensionais de $A_{2,2}$.

Extensões Centrais de $A_{3,2}$

Relembre que $A_{3,2} : e_1^2 = e_2$. No Exemplo 1.3.8 obtemos que

$$H^2(A_{3,2}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{13}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}] \rangle,$$

$Ann(A_{3,2}) = \langle e_2, e_3 \rangle$ e que

$$Aut(A_{3,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} ;\ a_{33}a_{11} \neq 0,\ a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Agora considere $W = \langle [\vartheta] \rangle \in T_1(A_{3,2}) = \{[\vartheta] \in G_1(H^2(A_{3,2}, \mathbb{C}));\ \vartheta^\perp \cap \langle e_2, e_3 \rangle = \emptyset\}$, ou seja, $\vartheta = \alpha_1(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \alpha_2\Delta_{13} + \alpha_3\Delta_{31} + \alpha_4\Delta_{33}$.

Observação 3.4.4. *Não podemos ter ϑ com $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, pois nesse caso teríamos $e_3 \in \vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{3,2})$ e, assim, $W \notin T_1(A_{3,2})$. Analogamente, não podemos ter $\alpha_1 = 0$. Desse modo, sem perda de generalidade consideramos $\alpha_1 = 1$.*

Com isso, para $\varphi \in Aut(A_{3,2})$, $[\varphi\vartheta]$ será representado matricialmente (veja o Exemplo 1.3.8) por

$$\begin{pmatrix} \alpha^* & a_{11}^3 & a_{11}a_{23} + a_{33}(a_{11}\alpha_2 + a_{31}\alpha_4) \\ -a_{11}^3 & 0 & 0 \\ a_{11}(-a_{23} + a_{33}\alpha_3) + a_{31}a_{33}\alpha_4 & 0 & a_{33}^2\alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, devemos analisar os seguintes casos:

1. $\alpha_4 = 0$

   Neste caso, tomando $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtemos que $\varphi W = \langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + \alpha[\Delta_{13}]\rangle$, com $\alpha = \alpha_2 + \alpha_3$. Note que, pela observação 3.4.4, temos $\alpha \neq 0$. Assim, considere $\psi \in Aut(A_{3,2})$ dado por $a_{11} = a_{22} = 1$ e $a_{33} = \alpha^{-1}$ e teremos

   $$\psi(\varphi W) = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}]\rangle := W_1.$$

2. $\alpha_4 \neq 0$

   Neste caso, considerando $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_4^{-1/2}\alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_4^{-1/2} \end{pmatrix}$, obtemos que

   $$\varphi W = \langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + \alpha[\Delta_{13}] + [\Delta_{33}]\rangle, \quad \text{com} \quad \alpha = (\alpha_2 + \alpha_3)\alpha_4^{-1/2}.$$

   Com isso, se $\alpha = 0$, temos $\varphi W = \langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{33}]\rangle := W_3$. Se, porém, $\alpha \neq 0$, considere $\psi \in Aut(A_{3,2})$ dado por $a_{11} = a_{33} = 1$, $a_{23} = a_{31} = \frac{-\alpha}{2}$ e teremos

   $$\psi(\varphi W) = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{33}]\rangle := W_2.$$

Note que, para qualquer $\vartheta \in Z^2(A_{3,2}, \mathbb{C})$, se $\varphi\vartheta = \alpha_1'(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \alpha_2'\Delta_{13} + \alpha_3'\Delta_{31} + \alpha_4'\Delta_{33}$, então vemos que $\alpha_4 = 0 \iff \alpha_4' = 0$, para qualquer que seja $\varphi \in Aut(A_{3,2})$. Desse modo, não pode existir $\varphi \in Aut(A_{3,2})$ tal que $\varphi W_1 = W_2$. Assim, as órbitas $Orb(W_i)$, $i = 1, 2$, em $T_1(A_{3,2})$ são disjuntas.

Com isso, obtemos as álgebras antiassociativas puras $A_{4,18}$ e $A_{4,19}$, descritas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Álgebras antiassociativas puras de dimensão 4

$A_{4,17}$	$e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_2e_1 = -e_3.$
$A_{4,18}$	$e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = -e_4,\ e_1e_3 = e_4.$
$A_{4,19}$	$e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = -e_4,\ e_3e_3 = e_4.$

Extensões centrais de $A_{3,3}$, de $A_{3,4}$ e de $A^{\alpha}_{3,5}$

Relembre que

$A_{3,3} : e_1e_2 = e_3,\ e_2e_1 = -e_3.$

$A_{3,4} : e_1e_1 = e_3 = e_2e_2.$

$A^{\alpha}_{3,5} : e_1e_1 = \alpha e_3,\ e_2e_1 = e_3 = e_2e_2,\ \alpha \in \mathbb{C}.$

Temos que $Ann(A_{3,3}) = Ann(A_{3,4}) = Ann(A^{\alpha}_{3,5}) = \langle e_3 \rangle$. Além disso, note que $Z^2(A_{3,3}, \mathbb{C}) = Z^2(A_{3,4}, \mathbb{C}) = Z^2(A^{\alpha}_{3,5}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

A fim de calcular seus respectivos grupos de cohomologia, de acordo com o Lema 1.2.9, temos

$$B^2(A_{3,3}, \mathbb{C}) = \langle \delta e_3^* \rangle = \langle \Delta_{12} - \Delta_{21} \rangle \text{ e } B^2(A_{3,4}, \mathbb{C}) = \langle \delta e_3^* \rangle = \langle \Delta_{11} + \Delta_{22} \rangle.$$

Portanto, $H^2(A_{3,3}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle$ e $H^2(A_{3,4}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$.

Para o caso de $A^{\alpha}_{3,5}$ temos que se $\alpha = 0$, então $B^2(A^0_{3,5}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{21} + \Delta_{22} \rangle$ e, consequentemente, $H^2(A^0_{3,5}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$, com $[\Delta_{22}] = -[\Delta_{21}]$. Caso α 0, então $B^2(A^{\alpha}_{3,5}, \mathbb{C}) = \langle \frac{1}{\alpha}\Delta_{11} + \Delta_{21} + \Delta_{22} \rangle$ e

$$H^2(A^{\alpha}_{3,5}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle, \quad \text{com } [\Delta_{22}] = -\frac{1}{\alpha}[\Delta_{11}] - [\Delta_{21}].$$

Vamos mostrar que $T_1(A_{3,3}) = T_1(A_{3,4}) = T_1(A^{\alpha}_{3,5}) = \emptyset$. Para isso, consideramos $A_{3,3}$ (e os outros casos serão análogos). Seja $[\vartheta] = \alpha_1[\Delta_{11}] + \alpha_2[\Delta_{12}] + \alpha_3[\Delta_{22}] \in H^2(A_{3,3}, \mathbb{C})$ qualquer. Note que, ao calcular $\vartheta^{\perp}$, obtemos que $e_3 \in \vartheta^{\perp}$ $Ann(A_{3,3})$, logo $[\vartheta]$ / $T_1(A_{3,3})$, ou seja,

$$T_1(A_{3,3}, \mathbb{C}) = \{W = \langle [\vartheta] \rangle \in G_1(H^2(A_{3,3}, \mathbb{C})) : \vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{3,3}) = 0\} = \emptyset.$$

Desse modo, pelo Teorema 2.2.1, teremos que os conjuntos das classes de isomorfismos de $E(A_{3,3}, \mathbb{C})$, $E(A_{3,4}, \mathbb{C})$ e $E(A^{\alpha}_{3,5}, \mathbb{C})$ são vazios e portanto não teremos extensões centrais 1-dimensional de $A_{3,3}$, de $A_{3,4}$ e de $A^{\alpha}_{3,5}$ sem componente anuladora.

3.5 Dimensão 5.

As álgebras antiassociativas de dimensão 5 com componente anuladora serão todas as extensões centrais com componente anuladora das álgebras de dimensão 4, descritas na Seção 3.4. Como estamos apenas interessados nas álgebras antiassociativas puras, teremos apenas as extensões de $A_{4,17}$, $A_{4,18}$ e $A_{4,19}$, que serão, respectivamente:

$$\begin{array}{lllll} A_{5,1} & : & e_1e_1 = e_2, \quad e_1e_2 = e_4, \quad e_2e_1 = -e_4 & & \\ A_{5,2} & : & e_1e_1 = e_2, \quad e_1e_2 = e_4, \quad e_2e_1 = -e_4, & e_1e_3 = e_4 & \\ A_{5,3} & : & e_1e_1 = e_2, \quad e_1e_2 = e_4, \quad e_2e_1 = -e_4, & e_3e_3 = e_4 & \end{array}$$

Assim, nas próximas subseções descreveremos as álgebras de dimensão 5 sem componente anuladora.

Observação 3.5.1. *Como* $G_4(H^2(A_{1,1}, \mathbb{C})) = \emptyset$, *não temos extensões centrais de dimensão* 4 *de* $A_{1,1}$.

Extensões centrais das álgebras de dimensão 2.

Esta classificação já foi feita em [3, Tabela 4] e são descritas abaixo. Note que todas essas álgebras são não puras.

Tabela 3.5: Extensões centrais 3-dimensionais das álgebras de dimensão 2

A_1	$e_1e_2 = e_3,\ e_2e_1 = e_4,\ e_2e_2 = e_5$
A_2	$e_1e_1 = e_5,\ e_1e_2 = e_3,\ e_2e_1 = e_4,\ e_2e_2 = e_5$
A_3	$e_1e_1 = e_3,\ e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = e_4,\ e_2e_2 = e_5$
A_4^{λ}	$e_1e_1 = e_3 + \lambda e_5,\ e_1e_2 = e_3,\ e_2e_1 = e_4,\ e_2e_2 = e_5,\ \lambda \in \mathbb{C}$

3.5.1 Extensões centrais das álgebras de dimensão 3.

Nesta seção descreveremos as álgebras antiassociativas de dimensão 5 que são extensões centrais das álgebras antiassociativas de dimensão 3, descritas na seção 3.3. Como classificaremos apenas as álgebras puras, não olharemos para as extensões centrais de $A_{3,1}$, essas, por sua vez, podem ser encontradas em [10].

Observação 3.5.2. *A fim de simplificar notação, omitiremos as entradas nulas dos automorfismos descritos no cálculo das órbitas.*

Extensões centrais de $A_{3,2}$.

Primeiramente, relembre dos resultados já descritos sobre $A_{3,2}$ no Exemplo 1.3.8, que são: $H^2(A_{3,2}, \mathbb{C}) = \langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{13}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}] \rangle$, $Ann(A_{3,2}) = \langle\, e_2, e_3 \rangle$ e

$$Aut(A_{3,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} ;\ a_{33}a_{11} \neq 0,\ a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Com isso, seja $W = \langle\, [\vartheta_1], [\vartheta_2] \rangle \in T_2(A_{3,2})$, onde $\vartheta_1 = \alpha_1(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \alpha_2\Delta_{13} + \alpha_3\Delta_{31} + \alpha_4\Delta_{33}$ e $\vartheta_2 = \beta_1(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \beta_2\Delta_{13} + \beta_3\Delta_{31} + \beta_4\Delta_{33}$. Por definição, $W \in T_2(A_{3,2}) \iff \vartheta_1^{\perp} \cap \vartheta_2^{\perp} \cap \langle\, e_2, e_3 \rangle = 0$.

Por fim, temos que $[\varphi\vartheta_2]$ é representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} \alpha^* & a_{11}^3\beta_1 & a_{11}a_{23}\beta_1 + a_{33}(a_{11}\beta_2 + a_{31}\beta_4) \\ -a_{11}^3\beta_1 & 0 & 0 \\ a_{11}(-a_{23}\beta_1 + a_{33}\beta_3) + a_{31}a_{33}\beta_4 & 0 & a_{33}^2\beta_4 \end{pmatrix}.$$

Além disso, pelos resultados obtidos na seção 3.4.1, podemos considerar

$$\vartheta_1 \in \{[\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}], [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{33}]\}.$$

Portanto, temos os seguintes casos para analisar:

1. $\vartheta_1 = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]$. Note que podemos supor $\beta_1 = 0$. Assim, teremos o seguintes casos para considerar:

   (a) $\beta_4 = 0$.

i. Se $\beta_2 = 0$, então temos o representante $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{31}] \rangle \ := W_1$.

ii. Se β_2 0, então temos a família de representantes $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}] \rangle \ := W_2^{\lambda}$.

(b) Se β_4 0, então suponha $\beta_4 = 1$.

i. Se $\beta_2 /= \beta_3$, então considere $a_{11} = \frac{1}{\beta_2-\beta_3}$, $a_{33} = 1$ e $a_{31} = \frac{-\beta_3}{\beta_2-\beta_3}$ e obtemos o representante $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{13}] + [\Delta_{33}] \rangle \ := W_3$.

ii. Se $\beta_2 = \beta_3$, então considere $a_{11} = a_{33} = 1$ e $a_{31} = -\beta_2$ e obtemos o representante $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{33}] \rangle \ := W_4$.

2. $\vartheta_1 = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}]$. Note que podemos tomar $\beta_1 = 0$. Assim, teremos o seguintes casos para considerar:

(a) $\beta_4 = 0$.

i. Se $\beta_2 = 0$ e $\beta_3 \neq 0$, considerando $a_{11} = a_{33} = -a_{23} = 1$, obtemos o representante W_1.

ii. Se $\beta_2 = -\beta_3$, temos o representante $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}], [\Delta_{13}] - [\Delta_{31}] \rangle \ := W_5$.

iii. Se $\beta_2 /= -\beta_3$, considerando $a_{11} = a_{33} = 1$ e $a_{23} = \frac{-\beta_3}{\beta_2+\beta_3}$, obtemos o representante W_2^{λ}.

(b) Se $\beta_4 /= 0$, entao podemos supor $\beta_4 = 1$.

i. Se $\beta_3 = \beta_2$, então considerando $a_{11} = 1$, $a_{33} = 1$ e $a_{31} = -\beta_2$, obtemos o representante $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}], [\Delta_{33}] \rangle \ := W_6$.

ii. Se β_3 β_2, considerando $a_{11} = \beta_3 - \beta_2$, $a_{33} = (\beta_3 - \beta_2)^2$ e $a_{31} = -\beta_2(\beta_3 - \beta_2)$, obtemos o representante $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}], [\Delta_{31}] + [\Delta_{33}] \rangle \ := W_7$.

3. $\vartheta_1 = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{33}]$. Note que podemos supor $\beta_4 = 0$. Assim, temos dois casos para considerar.

(a) $\beta_1 = 0$.

i. Se $\beta_2 = 0$, então temos o representante $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{33}], [\Delta_{31}] \rangle \ := W_8$.

ii. Se $\beta_2 \neq 0$, então temos a família de representantes $\langle\, [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{33}], [\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}] \rangle \ := W_9^{\lambda}$.

(b) Se $\beta_1 /= 0$, podemos supor $\beta_1 = 1$.

i. Se $\beta_2 = \beta_3$, considerando $a_{11} = 1$, $a_{33} = \frac{1}{2\beta_2}$ e $a_{23} = \frac{1}{2}$, recairemos no caso 2(b)ii.

ii. $\beta_2 /= \beta_3$.

A. Se $\beta_2 + \beta_3 \neq 0$, considerando $a_{11} = 1$, $a_{33} = \frac{1}{\beta_2+\beta_3}$ e $a_{23} = \frac{\beta_3}{\beta_2+\beta_3}$, recairemos, novamente, no caso 2(b)ii.

B. Se $\beta_3 = -\beta_2 /= 0$, considerando $a_{11} = -1$, $a_{23} = -2\beta_2^2$, $a_{33} = 2\beta_2$ e $a_{31} = \beta_2$, obtemos o representante W_3.

O próximo passo é verificar que todas as órbitas são disjuntas.

Justificativa. *Note que, pela observação 3.4.4, para provar que* $Orb(W_1)$, $Orb(W_2^{\lambda})$ *e* $Orb(W_5)$ *são disjunta das demais, resta verificar que estas órbitas são duas a duas disjuntas. Observe também que* $\Psi(W_1) = (1, 1)$, $\Psi(W_2^{\lambda}) = (1, 1)$ *e* $\Psi(W_5) = (1, 0)$, *ou seja,* $Orb(W_5)$ *é disjunta das demais.*

Adiante, note que $\Psi(W_3) = (1, 1)$, $\Psi(W_4) = (2, 1)$, $\Psi(W_3^{\lambda}) = (1, 0)$, $\Psi(W_6) = (2, 0)$, $\Psi(W_7) = (1, 0)$, $\Psi(W_8) = (1, 0)$ *e* $\Psi(W_9^{\lambda}) = (1, 0)$. *Assim, pela Proposição 2.3.6, restará verificar os seguintes casos:*

- $Orb(W_1)$ e $Orb(W_2^{\lambda_2})$ são disjuntas.

  Seja $\varphi \in Aut(A_{3,2})$ e suponha que $\varphi W_1 = W_2^{\lambda}$. Assim, temos que existem $x, y \in \mathbb{F}$ tais que $[\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}] =$

$$x(a_{11}^3\ ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + a_{11}a_{23}([\Delta_{13}] - [\Delta_{31}])) + ya_{11}a_{33}[\Delta_{31}].$$

  Com isso, temos $xa_{11}^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ e, consequentemente, obtemos $0 = xa_{11}a_{33} + xa_{11}a_{23} = 1$, uma contradição. Portanto tais órbitas são disjuntas.

- $Orb(W_2^{\lambda_1})$ e $Orb(W_2^{\lambda_2})$ são disjuntas, para λ_1, λ_2 distintos.

  Suponha que exista $\varphi \in Aut(A_{3,2})$ tal que $\varphi W_2^{\lambda_1} = W_2^{\lambda_2}$. Logo, existem $x, y \in \mathbb{C}$ tais que $[\Delta_{13}] + \lambda_2[\Delta_{31}] =$

$$x(a_{11}^3\ ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + a_{11}a_{23}([\Delta_{13}] - [\Delta_{31}]) + a_{11}a_{33}[\Delta_{13}]) + y(a_{11}a_{33}([\Delta_{13} + \lambda_1[\Delta_{31}])).$$

  Dessa forma, note que devemos ter $x = 0$ e $a_{11}a_{33}y = 1$, com isso, $\lambda_2 = ya_{11}a_{33}\lambda_1 = \lambda_1$. Portanto, o resultado segue.

- $Orb(W_9^{\lambda_1})$ e $Orb(W_9^{\lambda_2})$ são disjuntas, para λ_1, λ_2 distintos.

  Suponha que $\varphi W_9^{\lambda_1} = W_9^{\lambda_2}$, para algum $\varphi \in Aut(A_{3,2})$. Logo, existem $x, y \in \mathbb{C}$ tais que $[\Delta_{13}] + \lambda_2[\Delta_{31}] = x\varphi(([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{33}]) + y\varphi([\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}]) =$

$$xa_{11}^3\ (([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + xa_{11}a_{23}([\Delta_{13}] - [\Delta_{31}]) + xa_{33}^2[\Delta_{33}] +$$
$$xa_{31}a_{33}([\Delta_{13}] + [\Delta_{31}]) + ya_{11}a_{33}[\Delta_{13}] + y\lambda_1 a_{11}a_{33}[\Delta_{31}].$$

  Assim, $xa_{11}^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ e $ya_{11}a_{33} = 1$. Portanto, $\lambda_2 = ya_{11}a_{33}\lambda_1 = \lambda_1$, contradizendo nossa hipótese.

- $Orb(W_7)$ é disjunta de $Orb(W_8)$ e de $Orb(W_9^{\lambda})$.

  Observe que $[\Delta_{31}] \notin \varphi W_7$ para qualquer que seja $\varphi \in Aut(A_{3,2})$.

  De fato, considere $\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in Aut(A_{3,2})$, assim temos que

$$\varphi W_7 = \langle a_{11}^3\ ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + a_{11}a_{23}([\Delta_{13}] - [\Delta_{31}]) + a_{11}a_{33}[\Delta_{13}],$$
$$a_{33}(a_{11}[\Delta_{31}] + a_{31}([\Delta_{13}] + [\Delta_{31}]) + a_{33}[\Delta_{33}])\rangle\ .$$

  Com isso, suponha que existam $x, y \in \mathbb{C}$, tais que

$$x\varphi(([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{13}]) + y\varphi([\Delta_{31}] + [\Delta_{33}]) = [\Delta_{31}], \text{ então}$$

  teremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} xa_{11}^3 = 0 \\ ya_{33}^2 = 0 \\ xa_{11}(a_{23} + a_{33}) + y(a_{31}a_{33}) = 0 \\ -xa_{11}a_{23} + ya_{33}^2(a_{11} + a_{31}) = 1 \end{cases}$$

  Relembre que, como φ é um automorfismo, $a_{11}, a_{33} \neq 0$. Assim, da primeira e da quarta equação resulta que $x = y = 0$, uma contradição! Portanto, $Orb(W_7)$ e $Orb(W_8)$ são disjuntas. O caso em que $Orb(W_7) \cap Orb(W_9^{\lambda}) = \emptyset$ segue análogo.

- $Orb(W_8)$ *é disjunta de* $Orb(W_9^\lambda)$.

  Por fim, suponha que exista $\varphi \in Aut(A_{3,2})$ *tal que* $\varphi W_8 = W_9^\lambda$. *Dessa forma, temos* $[\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}] \in \varphi W_5$, *ou seja, existem* $x, y \in \mathbb{C}$ *tais que*

$$[\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}] = x\varphi(([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{33}]) + y\varphi([\Delta_{31}]).$$

Considerando $\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ *teremos o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} xa_{11}^3 = 0 \\ xa = 0 \\ x(a_{11}a_{23} + a_{31}a_{33}) = 1 \\ x(-a_{11}a_{23} + a_{31}a_{33}^2) + ya_{33}a_{11} = \lambda \end{cases}$$

Como φ *é um automorfismo, da primeira equação temos* $x = 0$, *resultando numa contradição na segunda equação do sistema! Portanto tais órbitas são disjuntas.*

Com isso, a tabela a seguir apresenta todas as órbitas encontradas.

Tabela 3.6: Representantes das órbitas em $T_2(A_{3,2})$ fixas pela ação de $Aut(A_{3,2})$

W_1	$\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{31}]\rangle$
W_2	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]), [\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}]\rangle$
W_3	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]), [\Delta_{13}] + [\Delta_{33}]\rangle$
W_4	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]), [\Delta_{11}]\rangle$
W_5	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{13}], [\Delta_{13}] - [\Delta_{31}]\rangle$
W_6	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{13}], [\Delta_{33}]\rangle$
W_7	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{13}], [\Delta_{31}] + [\Delta_{33}]\rangle$
W_8	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{33}], [\Delta_{31}]\rangle$
W_9^λ	$\langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) + [\Delta_{33}], [\Delta_{13}] + \lambda[\Delta_{31}]\rangle$

Portanto as álgebras antiassociativas de dimensão 5 que são extensões centrais de $A_{3,2}$ serao:

$A_{5,4}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_3e_1 = e_5$		
$A_{5,5}^\lambda$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_1e_3 = e_5$	$e_3e_1 = \lambda e_5$	
$A_{5,6}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_1e_3 = e_5$	$e_3e_3 = e_5$	
$A_{5,7}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_3e_3 = e_5$		
$A_{5,8}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_1e_3 = e_4 + e_5$	$e_3e_1 = -e_5$	
$A_{5,9}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_1e_3 = e_4$	$e_3e_3 = e_5$	
$A_{5,10}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_1e_3 = e_4$	$e_3e_1 = e_5$	$e_3e_3 = e_5$
$A_{5,11}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_3e_3 = e_4$	$e_3e_1 = e_5$	
$A_{5,12}^\lambda$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = -e_4$	$e_1e_3 = e_5$	$e_3e_1 = \lambda e_5$	$e_3e_3 = e_4$

Extensões centrais de $A_{3,3}$, de $A_{3,4}$, de $A_{3,5}^\alpha$.

Analogamente à dimensão 4, podemos verificar que

$$T_2(A_{3,3}) = T_2(A_{3,4}) = T_2(A_{3,5}^\alpha) = \emptyset,$$

ou seja, também não teremos extensões centrais 2-dimensionais de $A_{3,3}$, $A_{3,4}$ e $A_{3,5}^\alpha$

3.5.2 Extensões centrais das álgebras de dimensão 4.

Nesta seção, descreveremos as álgebras antiassociativas que são extensões centrais 1-dimensionais das álgebras antiassociativas de dimensão 4. Novamente, como estamos apenas interessados nas álgebras puras, não estudaremos as extensões de $A_{4,1}$.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,2}$.

Relembre que $A_{4,2} : e_1e_1 = e_2$.

Assim, seguindo os passos do método, devemos inicialmente determinar os seguintes conjuntos $Ann(A_{4,2})$, $H^2(A_{4,2}, \mathbb{C})$ e $Aut(A_{4,2})$. Desse modo, por simples verificação, obtemos que $Ann(A_{4,2}) = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$ e o Lema 1.2.9 garante que $B^2(A_{4,2}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}\rangle$. Além disso, $Z^2(A_{4,2}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, (\Delta_{12} - \Delta_{21}), \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{31}, \Delta_{33}, \Delta_{34}, \Delta_{41}, \Delta_{43}, \Delta_{44}\rangle$. Portanto,

$$H^2(A_{4,2}, \mathbb{C}) = \langle ([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]), [\Delta_{13}], [\Delta_{14}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}], [\Delta_{34}], [\Delta_{41}], [\Delta_{43}], [\Delta_{44}]\rangle .$$

Por fim, escrevendo $A_{4,2} = A_{1,1} \oplus V$, com $V = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$, o Lema 1.3.7 nos diz um caminho para determinar $Aut(A_{3,2})$, este é $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ \phi & \psi \end{pmatrix} : \varphi_0 \in Aut(A_{1,1}),\ \psi \in GL(V)$ e $\phi \in Hom(A_{2,2}, V)$. Logo, segue que

$$Aut(A_{4,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} ;\ a_{11}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) \neq 0,\ a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Para os próximos passos do método, seja $W = \langle [\vartheta]\rangle \in T_1(A_{4,2})$ tal que

$$\vartheta = \alpha_1(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \alpha_2\Delta_{13} + \alpha_3\Delta_{14} + \alpha_4\Delta_{31} + \alpha_5\Delta_{33} + \alpha_6\Delta_{34} + \alpha_7\Delta_{41} + \alpha_8\Delta_{43} + \alpha_9\Delta_{44}.$$

Com isso, para cada $\varphi \in Aut(A_{4,2})$, temos que $\varphi\vartheta = \alpha_1^*(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \alpha_2^*\Delta_{13} + \alpha_3^*\Delta_{14} + \alpha_4^*\Delta_{31} + \alpha_5^*\Delta_{33} + \alpha_6^*\Delta_{34} + \alpha_7^*\Delta_{41} + \alpha_8^*\Delta_{43} + \alpha_9^*\Delta_{44}$, onde

$$\begin{aligned}
\alpha_1^* &= a_{11}^3\alpha_1\\
\alpha_2^* &= a_{11}a_{23}\alpha_1 + a_{11}a_{33}\alpha_2 + a_{11}a_{43}\alpha_3 + a_{31}a_{33}\alpha_5 + a_{31}a_{43}\alpha_6 + a_{33}a_{41}\alpha_8 + a_{41}a_{43}\alpha_9\\
\alpha_3^* &= a_{11}a_{24}\alpha_1 + a_{11}a_{34}\alpha_2 + a_{11}a_{44}\alpha_3 + a_{31}a_{34}\alpha_5 + a_{31}a_{44}\alpha_6 + a_{34}a_{41}\alpha_8 + a_{41}a_{44}\alpha_9\\
\alpha_4^* &= -a_{11}a_{23}\alpha_1 + a_{11}a_{33}\alpha_4 + a_{31}a_{33}\alpha_5 + a_{33}a_{41}\alpha_6 + a_{11}a_{43}\alpha_7 + a_{31}a_{43}\alpha_8 + a_{41}a_{43}\alpha_9\\
\alpha_5^* &= a_{33}^2\alpha_5 + a_{33}a_{43}(\alpha_6 + \alpha_8) + a_{43}^2\alpha_9\\
\alpha_6^* &= a_{33}a_{34}\alpha_5 + a_{33}a_{44}\alpha_6 + a_{34}a_{43}\alpha_8 + a_{43}a_{44}\alpha_9\\
\alpha_7^* &= -a_{11}a_{24}\alpha_1 + a_{11}a_{34}\alpha_4 + a_{31}a_{34}\alpha_5 + a_{34}a_{41}\alpha_6 + a_{11}a_{44}\alpha_7 + a_{31}a_{44}\alpha_8 + a_{41}a_{44}\alpha_9\\
\alpha_8^* &= a_{33}a_{34}\alpha_5 + a_{34}a_{43}\alpha_6 + a_{33}a_{44}\alpha_8 + a_{43}a_{44}\alpha_9\\
\alpha_9^* &= a_{34}^2\alpha_5 + a_{34}a_{44}(\alpha_6 + \alpha_8) + a_{44}^2\alpha_9
\end{aligned}$$

Observação 3.5.3. *Seja $W = \langle[\vartheta]\rangle \in T_1(A_{4,2})$ onde $\vartheta = \alpha_1(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \alpha_2\Delta_{13} + \alpha_3\Delta_{14} + \alpha_4\Delta_{31} + \alpha_5\Delta_{33} + \alpha_6\Delta_{34} + \alpha_7\Delta_{41} + \alpha_8\Delta_{43} + \alpha_9\Delta_{44}$. Como $Ann(A_{4,2}) = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$ e $\vartheta^\perp \cap Ann(A_{4,2}) = 0$, devemos ter $\alpha_1 = 0$. Assim, podemos considerar $\alpha_1 = 1$. Analogamente, não devemos ter $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0$ e, também, $\alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$.*

Observação 3.5.4. *Podemos considerar $\alpha_4 = \alpha_7 = 0$, pois caso contrário aplicamos $\varphi \in Aut(A_{4,2})$ dado por $a_{ii} = 1$, $i = 1, 3, 4$, $a_{23} = \alpha_4$ e $a_{24} = \alpha_7$. Assim, $\varphi\vartheta = \Delta_{12} - \Delta_{21} + (\alpha_2 + \alpha_4)\Delta_{13} + (\alpha_3 + \alpha_7)\Delta_{14} + \alpha_5\Delta_{33} + \alpha_6\Delta_{34} + \alpha_8\Delta_{43} + \alpha_9\Delta_{44}$.*

Observação 3.5.5. *Se $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$, então $\alpha_5^* = \alpha_6^* = \alpha_8^* = \alpha_9^* = 0$. Além disso, considerando $\varphi \in Aut(A_{4,2})$ dado por $a_{11} = a_{34} = a_{43} = 1$, vemos que $\varphi\vartheta$*

irá permutar os coeficientes α_2 e α_3, α_5 e α_9 e também α_6 com α_8, em outras palavras, teremos

$$(\alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_5^*, \alpha_6^*, \alpha_8^*, \alpha_9^*) = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_6, \alpha_5).$$

Assim sendo, como estamos analisando as órbitas em $T_1(A_{4,2})$ fixas pela ação de $A_{4,2}$, esta observação reduzirá os casos a serem considerados no estudo de tais órbitas.

Desse modo, feitas tais observações, devemos considerar os seguintes casos:

1. $\vartheta = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + \alpha_2[\Delta_{13}] + \alpha_3[\Delta_{14}]$.

   Note que $\alpha_2\alpha_3 \neq 0$. Considerando $a_{11} = a_{22} = a_{44} = 1$, $a_{34} = \frac{1-\alpha_3}{\alpha_2}$ e $a_{43} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_3}$, obtemos $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{14}] \rangle$, que não iremos considerar pois a álgebra obtida teria anulador de dimensão 2, ou seja, seria isomorfa a uma extensão central 2-dimensional das álgebras de dimensão 3 estudadas na seção 3.5.1.

2. $\vartheta = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + \alpha_2[\Delta_{13}] + \alpha_3[\Delta_{14}] + \alpha_5[\Delta_{33}]$, com $\alpha_5 \neq 0$. Note que $\alpha_3 \neq 0$. Então, considerando $a_{11} = 1$, $a_{33} = \alpha_5^{-1/2}$, $a_{43} = -\alpha_2\alpha_3^{-1}\alpha_5^{-1/2}$ e $a_{44} = \alpha_3^{-1}$, obtemos o representante $\varphi W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{14}] + [\Delta_{33}] \rangle := W_1$.

3. $\vartheta = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + \alpha_2[\Delta_{13}] + \alpha_3[\Delta_{14}] + \alpha_6[\Delta_{34}] + \alpha_8[\Delta_{43}]$, onde $(\alpha_6, \alpha_8) \neq (0, 0)$

   (a) Se $\alpha_6 + \alpha_8 \neq 0$. Note que podemos supor $\alpha_8 \neq 0$. Assim, escolhendo $a_{11} = 1$, $a_{23} = a_{31} = -\alpha_3(\alpha_6 + \alpha_8)^{-1}$, $a_{24} = -\alpha_2\alpha_6(\alpha_6 + \alpha_8)^{-1}$, $a_{41} = -\alpha_2(\alpha_6 + \alpha_8)^{-1}$, $a_{34} = 1$ e $a_{43} = \alpha_8^{-1}$, obtemos a família de representantes $\varphi W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{34}] + \lambda[\Delta_{43}] \rangle := W_2^{\lambda}$.

   (b) Se $\alpha_6 + \alpha_8 = 0$ e $\alpha_6 \neq 0$, temos três casos.

      i. Se $\alpha_2 \neq 0$, entao, escolhendo $a_{11} = 1$, $a_{33} = \alpha_2^{-1}$, $a_{34} = -\alpha_3\alpha_6^{-1}$ e $a_{44} = \frac{\alpha_2}{\alpha_6}$, obtemos o representante $\varphi W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{13}] + [\Delta_{34}] - [\Delta_{43}] \rangle := W_3$.

      ii. Finalmente, se $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, então, consideramos $a_{11} = a_{44} = 1$ e $a_{33} = \alpha_6^{-1}$ e teremos que $\varphi W = W_2^{-1}$.

4. $\vartheta = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + \alpha_2[\Delta_{13}] + \alpha_6[\Delta_{34}]$, com $\alpha_6 \neq 0$. Considerando $a_{11} = a_{33} = 1$, $a_{23} = -\alpha_2$, $a_{41} = -\alpha_2\alpha_6^{-1}$ e $a_{44} = \alpha_6^{-1}$, obtemos que $\varphi W = W_2^0$.

5. $\vartheta = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + \alpha_2[\Delta_{13}] + \alpha_3[\Delta_{14}] + \alpha_5[\Delta_{33}] + \alpha_6[\Delta_{34}] + \alpha_8[\Delta_{43}]$ com $\alpha_5 \neq 0$ e $(\alpha_6, \alpha_8) \neq (0, 0)$.

   (a) Se $\alpha_8 = 0$ e $\alpha_6 \neq 0$, considerando $a_{11} = a_{44} = 1$, $a_{33} = -\alpha_6$, $a_{43} = \alpha_5$, recaímos novamente no caso 4.

   (b) Se $\alpha_6 = 0$ e $\alpha_8 \neq 0$, consideremos $a_{11} = a_{43} = 1$, $a_{34} = -\alpha_8$ e $a_{44} = \alpha_5$ e recaímos novamente no caso 4.

   (c) Se $\alpha_6 + \alpha_8 \neq 0$, considerando $a_{11} = a_{43} = a_{44} = 1$ e $a_{34} = -(\alpha_6 + \alpha_8)\alpha_5^{-1}$, obtemos novamente o caso 3a.

   (d) Se $\alpha_6 + \alpha_8 = 0$. Tomando $a_{11} = 1$, $a_{33} = \alpha_5^{-1/2}$, $a_{44} = \alpha_5^{1/2}\alpha_6^{-1}$, $a_{31} = -\alpha_2(2\alpha_5)^{-1}$ e $a_{23} = -a_{24} = -\alpha_2(2\alpha_5^{1/2})^{-1}$, obtemos que $\varphi W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{14}] + [\Delta_{33}] + [\Delta_{34}] - [\Delta_{43}] \rangle$. Note que se $\lambda = 0$, temos que

   $$W_4 := \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{33}] + [\Delta_{34}] - [\Delta_{43}] \rangle .$$

   Se $\lambda = 1$, temos o representante

   $$W_5 := \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] + [\Delta_{14}] + [\Delta_{33}] + [\Delta_{34}] - [\Delta_{43}] \rangle .$$

   Caso contrário, consideramos $\psi \in Aut(A_{4,2})$ dado por $a_{11} = a_{33} = a_{44} = \lambda^2$ e teremos $\psi(\varphi W) = W_5$.

6. $\vartheta = [\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+\alpha_2[\Delta_{13}]+\alpha_3[\Delta_{14}]+\alpha_5[\Delta_{33}]+\alpha_6[\Delta_{34}]+\alpha_8[\Delta_{43}]+\alpha_9[\Delta_{44}]$ com $\alpha_9 \neq 0$. Por fim, considerando $a_{11} = 2\alpha_9$, $a_{33} = a_{34} = 1$, $a_{43} = -(1+\alpha_6+\alpha_8-(\alpha_6^2+2\alpha_6\alpha_8+\alpha_8^2-4\alpha_5\alpha_9)^{1/2})(2\alpha_9)^{-1}$ e $a_{44} = -(\alpha_6+\alpha_8-(\alpha_6^2+2\alpha_6\alpha_8+\alpha_8^2-4\alpha_5\alpha_9)^{1/2})(2\alpha_9)^{-1}$, recairemos em algum dos casos anteriores.

Nosso próximo passo é verificar que todas as órbitas encontradas são disjuntas.

Justificativa. *Verificaremos inicialmente que $Orb(W_1)$ é uma órbita disjunta das demais. Seja $\varphi \in Aut(A_{4,2})$ arbitrário, logo $\varphi([\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{14}]+[\Delta_{33}])$ é representado matricialmente por*

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11}^3 & a_{31}a_{33}+a_{11}(a_{23}+a_{43}) & a_{31}a_{34}+a_{11}(a_{24}+a_{44}) \\ -a_{11}^3 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}a_{23}+a_{31}a_{33} & 0 & a_{33}^2 & a_{33}a_{34} \\ -a_{11}a_{24}+a_{31}a_{34} & 0 & a_{33}a_{34} & a_{34}^2 \end{pmatrix}.$$

Com isso, analisando apenas os coeficientes $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9$ de $\varphi\vartheta$, verificamos que a órbita gerada por W_1 é disjunta das demais órbitas.

Analisaremos que $Orb(W_2^\lambda)$ é disjunta das demais. Para tanto, consideremos $\varphi \in Aut(A_{4,2})$ e temos que $\varphi([\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{34}]+\lambda[\Delta_{43}])$ é representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11}^3 & a_{11}a_{23}+\lambda a_{33}a_{41}+a_{31}a_{43} & a_{11}a_{24}+\lambda a_{34}a_{41}+a_{31}a_{44} \\ -a_{11}^3 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}a_{23}+a_{33}a_{41}+\lambda a_{31}a_{43} & 0 & (1+\lambda)a_{43}a_{33} & \lambda a_{34}a_{43}+a_{33}a_{44} \\ -a_{11}a_{24}+a_{34}a_{41}+\lambda a_{31}a_{44} & 0 & a_{34}a_{43}+\lambda a_{33}a_{44} & (1+\lambda)a_{34}a_{44} \end{pmatrix}.$$

Como $\alpha_5^* = \alpha_9^* = 0$, temos que $Orb(W_2^\lambda)$ é disjunta de $Orb(W_4)$ e de $Orb(W_5)$. Agora suponha que temos $\varphi W_2^\lambda = W_3$ para algum $\varphi \in Aut(A_{4,2})$. Observe que, como $\alpha_5^* = \alpha_9^* = 0$, temos que ou $a_{33} = a_{44} = 0$ ou $a_{34} = a_{43} = 0$ e, em ambos os casos, teremos $\lambda = -1$. Assim, se $\lambda = -1$, então ao supormos $\alpha_4^* = \alpha_7^* = 0$, teremos também $\alpha_2^* = \alpha_3^* = 0$. Portanto, $Orb(W_2^\lambda)$ é disjunta de $Orb(W_3)$. Por contas análogas, $Orb(W_4)$ e $Orb(W_5)$ são disjuntas.

Suponha agora que exista $\varphi \in Aut(A_{4,2})$ tal que $\varphi W_2^{\lambda_1} = W_2^{\lambda_2}$. Como $\alpha_5^* = \alpha_9^* = 0$, devemos ter ou $a_{33} = a_{44} = 0$ ou $a_{34} = a_{43} = 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $a_{34} = a_{43} = 0$, logo, teremos $a_{33}a_{44} = 1$ e $\lambda_2 = \lambda a_{33}a_{44} = \lambda_1$. Com isso, $Orb(W_2^{\lambda_1})$ e $Orb(W_2^{\lambda_2})$ são disjuntas, vemos que para λ_1 e λ_2 distintos.

Por fim, para verificar que $Orb(W_3)$ é disjunta de $Orb(W_4)$ e de $Orb(W_5)$, note que para qualquer $\varphi \in Aut(A_{4,2})$, temos que $\alpha_5^* = 0$ em $\varphi([\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{13}]+[\Delta_{34}]+\lambda[\Delta_{43}])$.

Resumindo, teremos as seguintes órbitas:

$$\begin{array}{ll} W_1: & \langle [\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{14}]+[\Delta_{33}]\rangle \\ W_2^\lambda: & \langle [\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{34}]+\lambda[\Delta_{43}]\rangle \\ W_3: & \langle [\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{13}]+[\Delta_{34}]-[\Delta_{43}]\rangle \\ W_4: & \langle [\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{33}]+[\Delta_{34}]-[\Delta_{43}]\rangle \\ W_5: & \langle [\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]+[\Delta_{14}]+[\Delta_{33}]+[\Delta_{34}]-[\Delta_{43}]\rangle. \end{array}$$

Assim, segundo o Teorema 2.2.1, obtemos as seguintes extensões centrais de $A_{4,2}$:

$$\begin{array}{llllll} A_{5,13}: & e_1e_1 = e_2 & e_1e_2 = e_5 & e_2e_1 = -e_5 & e_1e_4 = e_5 & e_3e_3 = e_5 \\ A_{5,14}^\lambda: & e_1e_1 = e_2 & e_1e_2 = e_5 & e_2e_1 = -e_5 & e_3e_4 = e_5 & e_4e_3 = \lambda e_5 \end{array}$$

$A_{5,15}$: $e_1e_1 = e_2$ $e_1e_2 = e_5$ $e_2e_1 = -e_5$ $e_1e_3 = e_5$ $e_3e_4 = e_5$ $e_4e_3 = -e_5$
$A_{5,16}$: $e_1e_1 = e_2$ $e_1e_2 = e_5$ $e_2e_1 = -e_5$ $e_3e_3 = e_5$ $e_3e_4 = e_5$ $e_4e_3 = -e_5$
$A_{5,17}$: $e_1e_1 = e_2$ $e_1e_2 = e_5$ $e_2e_1 = -e_5$ $e_1e_4 = e_5$ $e_3e_3 = e_5$ $e_3e_4 = e_5$
$e_4e_3 = -e_5$

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,3}$.

Relembre que $A_{4,3}$: $e_1e_1 = e_2,\ e_3e_3 = e_4$. Com isso, obtemos que $Ann(A_{4,3}) = \langle e_2, e_4\rangle$ e que, de acordo com o Lema 1.2.9, $B^2(A_{4,3}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{33}\rangle$. Além disso, $Z^2(A_{4,3}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12} - \Delta_{21}, \Delta_{13}, \Delta_{31}, \Delta_{33}, \Delta_{34} - \Delta_{43}\rangle$, consequentemente,

$$H^2(A_{4,3}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{13}], [\Delta_{31}], [\Delta_{34}] - [\Delta_{43}]\rangle .$$

Por fim, teremos que o grupo $Aut(A_{4,3})$ consiste de matrizes invertíveis das formas

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{33}^2 \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{13}^2 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{31}^2 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere agora $W = \langle [\vartheta]\rangle \in T_1(A_{4,3})$ tal que $\vartheta = \alpha_1\nabla_1 + \alpha_2\nabla_2 + \alpha_3\nabla_3 + \alpha_4\nabla_4$, onde $\nabla_1 = \Delta_{12} - \Delta_{21}$, $\nabla_2 = \Delta_{13}$, $\nabla_3 = \Delta_{31}$ e $\nabla_4 = \Delta_{34} - \Delta_{43}$. Com isso, temos que $\varphi_1\vartheta = \alpha_1^*\nabla_1 + \alpha_2^*\nabla_2 + \alpha_3^*\nabla_3 + \alpha_4^*\nabla_4$, onde

$$\begin{cases} \alpha_1^* = a_{11}^3\alpha_1 \\ \alpha_2^* = a_{11}a_{23}\alpha_1 + a_{11}a_{33}\alpha_2 - a_{33}a_{41}\alpha_4 \\ \alpha_3^* = -a_{11}a_{23}\alpha_1 + a_{11}a_{33}\alpha_3 + a_{33}a_{41}\alpha_4 \\ \alpha_4^* = a_{33}^3\alpha_4 \end{cases}$$

Analogamente, temos que $\varphi_2\vartheta = \alpha_1^*\nabla_1 + \alpha_2^*\nabla_2 + \alpha_3^*\nabla_3 + \alpha_4^*\nabla_4$, onde

$$\begin{cases} \alpha_1^* = a_{31}^3\alpha_4 \\ \alpha_2^* = -a_{13}a_{21}\alpha_1 + a_{13}a_{31}\alpha_3 + a_{31}a_{43}\alpha_4 \\ \alpha_3^* = a_{13}a_{21}\alpha_1 + a_{13}a_{31}\alpha_2 - a_{31}a_{43}\alpha_4 \\ \alpha_4^* = a_{13}^3\alpha_1 \end{cases}$$

Note que, como $Ann(A_{4,3}) = \langle e_2, e_4\rangle$, não podemos ter $\alpha_1 = 0$, pois neste caso $\vartheta^\perp \cap Ann(A_{4,3}) = \langle e_2\rangle$, assim consideraremos $\alpha_1 = 1$. Analogamente, não devemos ter $\alpha_4 = 0$.

Agora, considere $\varphi \in Aut(A_{4,3})$ dado por $a_{11} = \alpha_1^{-1/3}$, $a_{23} = \alpha_3\alpha_1^{-1}\alpha_4^{-1/3}$ e $a_{33} = \alpha_4^{-1/3}$. Então, obtemos $\langle \nabla_1 + \lambda\nabla_2 + \nabla_4\rangle$, onde $\lambda = (\alpha_2 + \alpha_3)\alpha_1^{-1/3}\alpha_4^{-1/3}$.

Assim, se $\lambda = 0$, temos o representante $\langle \nabla_1 + \nabla_4\rangle$. Por outro lado, se $\lambda \neq 0$, então tome $a_{11} = a_{33} = \lambda$ e obtemos o representante $\langle \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_4\rangle$. Note que as órbitas encontradas são disjuntas, pois se existir $\varphi \in Aut(A_{4,3})$ tal que $\varphi(\nabla_1+\nabla_4) = \nabla_1+\nabla_2+\nabla_4$, então, como $\alpha_3^* = -\alpha_2^*$, teríamos que $1 = 0$.

Portanto temos as seguintes extensões centrais correspondentes

$A_{5,18}$: $e_1e_1 = e_2$, $e_3e_3 = e_4$, $e_1e_2 = e_5$, $e_2e_1 = -e_5$, $e_3e_4 = e_5$, $e_4e_3 = -e_5$
$A_{5,19}$: $e_1e_1 = e_2$, $e_3e_3 = e_4$, $e_1e_2 = e_5$, $e_2e_1 = -e_5$, $e_3e_4 = e_5$, $e_4e_3 = -e_5$,
$e_1e_3 = e_5$

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,4}$.

Relembre que $A_{4,4}$: $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_1 = -e_3$.
Desse modo, $Ann(A_{4,4}) = \langle e_3, e_4 \rangle$ e, segundo o Lema 1.2.9, $B^2(A_{4,4}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{12} - \Delta_{21} \rangle$. Obtemos também que $Z^2(A_{4,4}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{24}, \Delta_{41}, \Delta_{42}, \Delta_{44} \rangle$. Com isso,

$$H^2(A_{4,4}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{14}], [\Delta_{22}], [\Delta_{24}], [\Delta_{41}], [\Delta_{42}], [\Delta_{44}] \rangle .$$

No entanto, considerando $W = \langle [\vartheta] \rangle \in G_1(H^2(A_{4,4}, \mathbb{C}))$, vemos que $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{4,4}) = \langle e_3 \rangle \neq 0$. Com isso, $T_1(A_{4,4}) = \emptyset$ e portanto, pelo Teorema 2.2.1, não teremos extensões centrais 1-dimensionais de $A_{4,4}$ sem componente anuladora.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A^{\lambda}_{4,5}$.

Relembre que $A_{4,5}$: $e_1e_1 = e_3$, $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_2 = \lambda e_3$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, temos que $Ann(A_{4,5}) = \langle e_3, e_4 \rangle$. Pelo Lema 1.2.9, $B^2(A_{4,5}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11} + \Delta_{12} + \lambda\Delta_{22} \rangle$. Além disso, obtemos que $Z^2(A^{\lambda}_{4,5}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{24}, \Delta_{41}, \Delta_{42}, \Delta_{44} \rangle$. Com isso, temos

$$H^2(A^{\lambda}_{4,5}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{14}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}], [\Delta_{24}], [\Delta_{41}], [\Delta_{42}], [\Delta_{44}] \rangle .$$

Analogamente ao caso de $A_{4,4}$, teremos que

$$\vartheta^{\perp} \cap Ann(A^{\lambda}_{4,5}) = \langle e_3 \rangle \neq 0 \Longrightarrow T_1(A^{\lambda}_{4,5}) = \emptyset, \quad \langle [\vartheta] \rangle \in G_1(H^2(A^{\lambda}_{4,5}, \mathbb{C})).$$

Portanto, não teremos extensões centrais 1-dimensionais sem componente anuladora de $A^{\lambda}_{4,5}$.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,6}$.

Relembre que $A_{4,6}$: $e_1e_1 = e_3$, $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_1 = e_3$. Dessa forma, $Ann(A_{4,6}) = \langle e_3, e_4 \rangle$ e,pelo Lema 1.2.9, $B^2(A_{4,6}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{21} \rangle$. Além disso, obtemos que $Z^2(A_{4,6}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{24}, \Delta_{41}, \Delta_{42}, \Delta_{44} \rangle$. Assim, segue que

$$H^2(A_{4,6}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{14}], [\Delta_{22}], [\Delta_{24}], [\Delta_{41}], [\Delta_{42}], [\Delta_{44}] \rangle .$$

Assim, $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{4,6}) = \langle e_3 \rangle \neq \emptyset$, para cada $W = \langle [\vartheta] \rangle \in G_1(H^2(A_{4,6}, \mathbb{C}))$. Por consequência, temos $T_1(A_{4,6}) = \emptyset$ e portanto não há extensões centrais 1-dimensionais sem componente anuladora de $A_{4,6}$.

Extensões centrais 1-dimensionais de $A_{4,7}$.

Relembre que $A_{4,7}$: $e_1e_2 = e_4$, $e_3e_1 = e_4$. Assim, $Ann(A_{4,7}) = \langle e_4 \rangle$ e, de acordo com oLema 1.2.9, segue que $B^2(A_{4,7}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{12} + \Delta_{31} \rangle$. Obtemos também que $Z^2(A_{4,7}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{32}, \Delta_{33} \rangle$. Consequentemente, temos

$$H^2(A_{4,7}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}], [\Delta_{23}], [\Delta_{32}], [\Delta_{33}] \rangle .$$

Neste caso, $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{4,7}) = \langle e_4 \rangle \neq 0$, para cada $W = \langle [\vartheta] \rangle \in G_1(H^2(A_{4,7}, \mathbb{C}))$. Assim, analogamente aos casos $A_{4,4}, A^{\alpha}_{4,5}, A_{4,6}$, segue que $T_1(A_{4,7}) = \emptyset$ e portanto não há extensões centrais 1-dimensionais sem componente anuladora de $A_{4,7}$.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,8}$.

Relembre que $A_{4,8}$: $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_1 = e_4$, $e_2e_2 = -e_3$. Com isso, $Ann(A_{4,8}) = \langle e_3, e_4 \rangle$ e $Z^2(A_{4,8}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{14} - \Delta_{24} - \Delta_{31}, \Delta_{21}, \Delta_{22} \rangle$. Pelo Lema 1.2.9, temos $B^2(A_{4,8}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{12} - \Delta_{22}, \Delta_{21} \rangle$. Portanto,

$$H^2(A_{4,8}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{14}] - [\Delta_{24}] - [\Delta_{31}] \rangle .$$

Além disso, temos

$$Aut(A_{4,8}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{11}^2 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{11}^2 \end{pmatrix} ; a_{11} \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{C} \right\} .$$

Dessa forma, considere $W = \langle [\vartheta] \rangle \in T_1(A_{4,8})$, onde $[\vartheta] = \alpha_1[\Delta_{11}] + \alpha_2[\Delta_{12}] + \alpha_3([\Delta_{14}] - [\Delta_{24}] - [\Delta_{31}])$. Observe que, como $Ann(A_{4,8}) = \langle e_3, e_4 \rangle$, então $\alpha_3 \neq 0$ e, logo, podemos considerar $\alpha_3 = 1$. Feitas tais considerações, aplicando $\varphi \in Aut(A_{4,8})$, obtemos

$$\varphi[\vartheta] = \alpha_1^*[\Delta_{11}] + \alpha_2^*[\Delta_{12}] + \alpha_3^*([\Delta_{14}] - [\Delta_{24}] - [\Delta_{31}]),$$

onde $\alpha_1^* = a_{11}(a_{11}\alpha_1 - a_{31} + a_{41})$, $\alpha_2^* = a_{11}^2\alpha_2$ e $\alpha_3^* = a_{11}^3$

Note que, como $Ann(A_{4,8}) = \langle e_3, e_4 \rangle$, não podemos ter $\alpha_3 = 0$. Logo, suponha $\alpha_3 = 1$. Assim, temos dois casos para considerar:

1. Se $\alpha_2 = 0$.
   Considerando $a_{11} = 1$ e $a_{31} = \alpha_1$, obtemos o representante $\langle [\Delta_{14}] - [\Delta_{24}] - [\Delta_{31}] \rangle$.
2. Se $\alpha_2 \neq 0$.
   Considerando $a_{11} = \alpha_2$ e $a_{31} = \alpha_1\alpha_2$, temos o representante $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{14}] - [\Delta_{24}] - [\Delta_{31}] \rangle$.

Uma vez que $\alpha_2^* = 0 \iff \alpha_2 = 0$, concluímos que as órbitas encontradas são disjuntas. Portanto, pelo Teorema 2.2.1, temos as seguintes extensões centrais de $A_{4,8}$:

$$\begin{array}{llllllll} A_{5,20} & : & e_1e_2 = e_3 & e_2e_1 = e_4 & e_2e_2 = -e_3 & e_1e_4 = e_5 & e_2e_4 = -e_5 & e_3e_1 = -e_5. \\ A_{5,21} & : & e_1e_2 = e_3 + e_5 & e_2e_1 = e_4 & e_2e_2 = -e_3 & e_1e_4 = e_5 & e_2e_4 = -e_5 & e_3e_1 = -e_5. \end{array}$$

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,9}^\lambda$.

Relembre que $A_{4,9}^\lambda$: $e_1e_1 = e_3$, $e_1e_2 = e_4$, $e_2e_1 = -\lambda e_3$, $e_2e_2 = -e_4$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dessa forma, $Ann(A_{4,9}^\lambda) = \langle e_3, e_4 \rangle$ e $Z^2(A_{4,9}^\lambda, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22} \rangle$. Além disso, segundo o Lema 1.2.9, $B^2(A_{4,9}^\lambda, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11} - \lambda\Delta_{21}, \Delta_{12} - \Delta_{22} \rangle$. Logo temos que

$$H^2(A_{4,9}^\lambda, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{21}, \Delta_{12} \rangle .$$

Agora, seja $[\vartheta] = \alpha_1[\Delta_{21}] + \alpha_2[\Delta_{12}] \in G_1(H^2(A_{4,9}^\lambda, \mathbb{C}))$. Observe que $e_3, e_4 \in \vartheta^\perp$, ou seja, $\vartheta^\perp \cap Ann(A_{4,9}^\lambda) \neq 0$. Com isso, $T_1(A_{4,9}^\lambda) = \emptyset$ e portanto, de acordo com o Teorema 2.2.1 , não teremos extensões centrais 1-dimensionais sem componente anuladora de $A_{4,9}^\lambda$.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A^{\lambda}_{4,10}$.

Relembre que $A^{\lambda}_{4,10}$: $e_1e_1 = e_4$, $e_1e_2 = \lambda e_4$, $e_2e_1 = -\lambda e_4$, $e_2e_2 = e_4$, $e_3e_3 = e_4$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Desse modo, $Ann(A^{\lambda}_{4,10}) = \langle e_4 \rangle$ e $Z^2(A^{\lambda}_{4,10}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{32}, \Delta_{33} \rangle$. Pelo Lema 1.2.9, segue que $B^2(A^{\lambda}_{4,10}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11} + \lambda(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \Delta_{22} + \Delta_{33} \rangle$. Portanto, temos

$$H^2(A^{\lambda}_{4,10}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}], [\Delta_{23}], [\Delta_{31}], [\Delta_{32}] \rangle .$$

Agora, observe que $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{4,10}) = \langle e_4 \rangle = 0$ para $W = \langle [\vartheta] \rangle \in G_1(H^2(A_{4,10}, \mathbb{C}))$. Com isso, $T_1(A_{4,10}) = \emptyset$ e, de acordo com o Teorema 2.2.1, não existem extensões centrais 1−dimensionais de $A_{4,10}$ sem componente anuladora.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,11}$.

Relembre que $A_{4,11}$: $e_1e_2 = e_4$, $e_1e_3 = e_4$, $e_2e_1 = -e_4$, $e_2e_2 = e_4$, $e_3e_1 = e_4$. Assim, $Ann(A_{4,11}) = \langle e_4 \rangle$ e, pelo Lema 1.2.9, $B^2(A_{4,11}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{12} + \Delta_{13} - \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{31} \rangle$. Além disso, temos também que $Z^2(A_{4,11}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{32}, \Delta_{33} \rangle$. Com isso, segue que

$$H^2(A_{4,11}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}], [\Delta_{23}], [\Delta_{32}], [\Delta_{33}] \rangle .$$

Contudo, considerando $\vartheta \in G_1(H^2(A_{4,11}, \mathbb{C}))$, observe que $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{4,11}) = \langle e_4 \rangle = 0$, ou seja, $T_1(A_{4,11}) = \emptyset$ e portanto, pelo Teorema 2.2.1, não teremos extensões centrais 1-dimensionais de $A_{4,11}$ sem componente anuladora.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,12}$.

Relembre que $A_{4,12}$: $e_1e_1 = e_4$, $e_1e_2 = e_4$, $e_2e_1 = e_4$, $e_3e_3 = e_4$. Dessa forma, $Ann(A_{4,12}) = \langle e_4 \rangle$ e pelo Lema 1.2.9, $B^2(A_{4,12}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11} + \Delta_{12} - \Delta_{21} + \Delta_{33} \rangle$. Além disso, obtemos também que $Z^2(A_{4,12}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{32}, \Delta_{33} \rangle$. Portanto, temos

$$H^2(A_{4,12}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}], [\Delta_{23}], [\Delta_{31}], [\Delta_{32}] \rangle .$$

Agora, note que, analogamente ao caso de $A_{4,11}$, obtemos $T_1(A_{4,12}) = \emptyset$ e portanto não teremos extensões centrais 1-dimensionais de $A_{4,12}$ sem componente anuladora.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,13}$.

Relembre que $A_{4,13}$: $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_1 = e_4$. Daí, segue que $Ann(A_{4,13}) = \langle e_3, e_4 \rangle$ e $Z^2(A_{4,13}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{14} - \Delta_{31}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23} - \Delta_{42} \rangle$. Adiante, pelo Lema 1.2.9, temos $B^2(A_{4,13}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{12}, \Delta_{21} \rangle$. Desse modo, obtemos

$$H^2(A_{4,13}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{14}] - [\Delta_{31}], [\Delta_{22}], [\Delta_{23}] - [\Delta_{42}] \rangle .$$

Por fim, teremos que o grupo $Aut(A_{4,13})$ consiste de matrizes invertíveis das formas

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{11}a_{22} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{11}a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{12}a_{21} \\ a_{41} & a_{42} & a_{12}a_{21} & 0 \end{pmatrix} .$$

Desse modo, consideramos agora $W = \langle[\vartheta]\rangle \in T_1(A_{4,13})$, com $[\vartheta] = \alpha_1[\Delta_{11}] + \alpha_2([\Delta_{14}] - [\Delta_{31}]) + \alpha_3[\Delta_{22}] + \alpha_4([\Delta_{23}] - [\Delta_{42}])$. Assim, como $Ann(A_{4,13}) = \langle e_1, e_4\rangle$, devemos ter α_2 ou $\alpha_4 \neq 0$. Assim $\varphi_1[\vartheta] = \alpha_1^*[\Delta_{11}] + \alpha_2^*([\Delta_{14}] - [\Delta_{31}]) + \alpha_3^*[\Delta_{22}] + \alpha_4^*([\Delta_{23}] - [\Delta_{42}])$, onde

$$\alpha_1^* = a_{11}(a_{11}\alpha_1 + (-a_{31} + a_{41})\alpha_2)$$
$$\alpha_2^* = a_{11}^2 a_{22}\alpha_2$$
$$\alpha_3^* = a_{22}(a_{22}\alpha_3 + (a_{32} - a_{42})\alpha_4)$$
$$\alpha_4^* = a_{11}a_{22}^2\alpha_4.$$

E, analogamente, $\varphi_2[\vartheta] = \alpha_1^*[\Delta_{11}] + \alpha_2^*([\Delta_{14}] - [\Delta_{31}]) + \alpha_3^*[\Delta_{22}] + \alpha_4^*([\Delta_{23}] - [\Delta_{42}])$, onde

$$\alpha_1^* = a_{21}(a_{21}\alpha_3 + (a_{31} - a_{41})\alpha_4)$$
$$\alpha_2^* = a_{12}a_{21}^2\alpha_4$$
$$\alpha_3^* = a_{12}(a_{12}\alpha_1 + (-a_{32} + a_{42})\alpha_2)$$
$$\alpha_4^* = a_{12}^2 a_{21}\alpha_2.$$

Dessa forma, devemos considerar os seguintes casos:

1. Se $[\vartheta] = \alpha_1[\Delta_{11}] + \alpha_2([\Delta_{14}] - [\Delta_{31}]) + \alpha_3[\Delta_{22}] + \alpha_4([\Delta_{23}] - [\Delta_{42}])$ com $\alpha_2 = 0$. Nesse caso, podemos supor $\alpha_2 = 1$.
   (a) Se $\alpha_4 = 0$, temos os casos:
      i. Se $\alpha_3 = 0$, considerando $a_{12} = a_{21} = 1$ e $a_{32} = \alpha_1$, temos o representante
      $$\langle [\Delta_{23}] - [\Delta_{42}]\rangle := W_1.$$
      ii. Se α_3 0, tome $\varphi \in Aut(A_{4,13})$ dado por $a_{11} = \alpha_3^{1/4}$, $a_{31} = \alpha_1\alpha_3^{1/4}$ e $a_{22} = \alpha_3^{-1/2}$, logo
      $$\varphi W = \langle [\Delta_{14}] - [\Delta_{31}] + [\Delta_{22}]\rangle := W_2.$$
   (b) Se α_4 0, então consideramos $\varphi \in Aut(A_{4,13})$ dado por $a_{11} = \alpha_4^{1/3}$, $a_{22} = \alpha_4^{-2/3}$, $a_{31} = \alpha_1\alpha_4^{1/3}$ e $a_{32} = -\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_4^{-2/3} = -\alpha_3\alpha_4^{-5/3}$ e teremos
   $$\varphi W = \langle [\Delta_{14}] - [\Delta_{31}] + [\Delta_{23}] - [\Delta_{42}]\rangle := W_3.$$
2. Se $[\vartheta] = \alpha_1[\Delta_{11}] + \alpha_3[\Delta_{22}] + \alpha_4([\Delta_{23}] - [\Delta_{42}])$, logo, α_4 0. Nesse caso, podemos supor $\alpha_4 = 1$.
   (a) Se $\alpha_1 = 0$, considere $\varphi \in Aut(A_{4,13})$ dado por $a_{11} = a_{22} = 1$ e $a_{32} = -\alpha_3$. Assim, temos $\varphi W = W_1$.
   (b) Por fim, se $\alpha_1 /= 0$, então tome $\varphi_1 \in Aut(A_{4,13})$ dado por $a_{11} = \alpha_1^{-1/2}$, $a_{22} = \alpha_1^{1/4}$, $a_{32} = -\alpha_3\alpha_1^{1/4}$ e teremos $\varphi_1 W = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{23}] - [\Delta_{42}]\rangle$. Considere agora $\varphi_2 \in Aut(A_{4,13})$ dado por $a_{12} = a_{21} = 1$ e obtemos que $\varphi_2(\varphi_1 W) = W_2$.

Nosso próximo passo é verificar que tais órbitas encontradas, W_i, $i = 1, 2, 3$, são todas disjuntas entre si, como segue na justificativa a seguir

Justificativa. *Com efeito, note que se α_2 0, então, ao considerar $\varphi_i \in Aut(A_{4,13})$, para $i = 1, 2$, obtemos que*

$$\varphi_i([\Delta_{14}] - [\Delta_{31}] + [\Delta_{22}]) = \alpha_1^*[\Delta_{11}] + \alpha_2^*([\Delta_{14}] - [\Delta_{31}]) + \alpha_3^*[\Delta_{22}] + \alpha_4^*([\Delta_{23}] - [\Delta_{42}]),$$

onde $(\alpha_1^*, \alpha_3^*) = 0$ e (α_2^*, α_4^*) 0. Assim, as órbitas geradas por W_2 e por W_3 serão disjuntas.

Para finalizar, observe que $\Psi(W_1) = (1)$ e $\Psi(W_i) = (0)$, $i = 2, 3$, assim, pela Proposição 2.3.6, W_1 e W_i, para $i = 2, 3$, possuem órbitas disjuntas.

Daí, pelo Teorema 2.2.1, obtemos as seguintes extensões centrais de $A_{4,13}$

$$A_{5,22} : e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_1 = e_4, \quad e_2e_3 = e_5, \quad e_4e_2 = -e_5$$
$$A_{5,23} : e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_1 = e_4, \quad e_1e_4 = e_5, \quad e_3e_1 = -e_5, \quad e_2e_2 = e_5$$
$$A_{5,24} : e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_1 = e_4, \quad e_1e_4 = e_5, \quad e_3e_1 = -e_5, \quad e_2e_3 = e_5, \quad e_4e_2 = -e_5$$

Extensões centrais 1 dimensionais de $A_{4,14}$

Relembre que $A_{4,14} : e_1e_1 = e_4,\ e_1e_2 = e_3,\ e_2e_1 = -e_3,\ e_2e_2 = 2e_3 + e_4$. Consequentemente, temos $Ann(A_{4,14}) = \langle e_3, e_4\rangle$ e $Z^2(A_{4,14}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}\rangle$. Segundo o lema 1.2.9, obtemos também que $B^2(A_{4,14}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{12} - \Delta_{21} + 2\Delta_{22}, \Delta_{11} + \Delta_{22}\rangle$.

Desse modo, segue que $H^2(A_{4,14}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}]\rangle$.

Agora, considere $[\vartheta] = \alpha_1[\Delta_{11}]+\alpha_2[\Delta_{12}] \in G_1(H^2(A_{4,14}, \mathbb{C}))$. Observe que $e_3, e_4 \in \vartheta^{\perp}$, ou seja, $\vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{4,14}) \neq 0$. Logo, $T_1(A_{4,14}) = \emptyset$ e portanto, de acordo com o Teorema 2.2.1, não teremos extensões centrais 1-dimensionais sem componente anuladora de $A_{4,14}$.

Extensões centrais 1 dimensionais de $A^{\lambda}_{4,15}$.

Relembre que $A^{\lambda}_{4,15} : e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = \lambda e_4,\ e_2e_2 = e_3,\ \lambda \in \mathbb{C}$. Desta forma, temos $Ann(A^{\lambda}_{4,15}) = \langle e_3, e_4\rangle$ e, também

$$Aut(A^{\lambda}_{4,15}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{22}^2 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & (1+\lambda)a_{12}a_{22} & a_{11}a_{22} \end{pmatrix} ;\ a_{11}, a_{22} \neq 0;\ a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Adiante, de acordo com o lema 1.2.9, $B^2(A^{\lambda}_{4,15}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{22}, \Delta_{12} + \lambda\Delta_{21}\rangle$.

Além disso, $Z^2(A^{\lambda}_{4,15}, \mathbb{C}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{13} + \lambda\Delta_{24} - \lambda^2\Delta_{31} - \Delta_{42}, \Delta_{23} - \Delta_{32}\rangle$ e, consequentemente, temos

$$H^2(A^{\lambda}_{4,15}, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}], [\Delta_{13}] - \lambda^2[\Delta_{31}] + \lambda[\Delta_{24}] - [\Delta_{42}], [\Delta_{23}] - [\Delta_{32}]\rangle.$$

Seja $W = \langle [\vartheta]\rangle \in T_1(A^{\lambda}_{4,15})$, com $[\vartheta] = \alpha_1\nabla_1 + \alpha_2\nabla_2 + \alpha_3\nabla_3 + \alpha_4\nabla_4$, onde

$$\nabla_1 = [\Delta_{11}],\quad \nabla_2 = [\Delta_{21}],\quad \nabla_3 = [\Delta_{13}] - \lambda^2[\Delta_{31}] + \lambda[\Delta_{24}] - [\Delta_{42}] \text{ e } \nabla_4 = [\Delta_{23}] - [\Delta_{32}].$$

Observe que, como $Ann(A^{\lambda}_{4,15}) = \langle e_3, e_4\rangle$, devemos ter $\alpha_3 \neq 0$. Assim, podemos considerar $\alpha_3 = 1$. Dessa forma, dado qualquer $\varphi \in Aut(A^{\lambda}_{4,15})$, obtemos que

$$\varphi[\vartheta] = \alpha_1^*\nabla_1 + \alpha_2^*\nabla_2 + \alpha_3^*\nabla_3 + \alpha_4^*\nabla_4,$$

onde

$$\alpha_1^* = a_{11}(a_{11}\alpha_1 + a_{31}(1 - \lambda^2))$$
$$\alpha_2^* = a_{11}a_{22}\alpha_2 + a_{12}a_{31} + a_{22}a_{31}\alpha_4 - a_{11}a_{12}(-1 + \lambda)\alpha_1 + a_{22}a_{31}\alpha_4\lambda + 2a_{22}a_{41}\lambda + a_{12}a_{31}\lambda - a_{11}a_{32}\lambda(1+\lambda)$$
$$\alpha_3^* = a_{11}a_{22}^2\alpha_3$$
$$\alpha_4^* = a_{22}^2(a_{22}\alpha_4 + a_{12}(1 + \lambda + \lambda^2))$$

Observe que, como $Ann(A^{\lambda}_{4,15}) = \langle e_3, e_4\rangle$, não podemos ter $\alpha_3 = 0$, logo podemos supor $\alpha_3 = 1$. Assim, teremos os seguintes casos

1. $\lambda = 0$.
   (a) Suponha $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1\alpha_4 \neq 0$. Então, escolhendo $a_{11} = \alpha^{-2}$, $a_{22} = \alpha$, $a_{12} = -\alpha_4\alpha$ e $a_{31} = -\alpha_1\alpha^{-2}$, obtemos que $\varphi W = \langle \nabla_2 + \nabla_3 \rangle$.
   (b) Suponha $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1\alpha_4 = 0$. Então, considerando $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{31} = 1 - \alpha_1$, obtemos o representante $\varphi W = \langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle$. Observe que, considerando $\varphi \in Aut(\mathrm{A}^0_{4,15})$ dado por $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{31} = -1$ e $a_{12} = 1$, obtemos que $\varphi(\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle) = \langle \nabla_3 + \nabla_4 \rangle$.

2. $\lambda = 1$.
   (a) $\alpha_1 = 0$. Considerando $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = \frac{-\alpha_4}{3}$, $a_{32} = \alpha_2$ e $a_{41} = \frac{\alpha_2}{2}$, obtemos o representante $\langle \nabla_3 \rangle$.
   (b) $\alpha_1 \neq 0$. Considerando $a_{11} = \alpha_1^{-1/2}$, $a_{22} = \alpha_1^{1/4}$ e $a_{32} = \frac{\alpha_1^{1/4}\alpha_2}{2}$, obtemos o representante $\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle$.

3. $\lambda = -1$.
   (a) $\alpha_1 = 0$. Considerando $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = -\alpha_4$, $a_{32} = \alpha_2$ e $a_{41} = \frac{\alpha_2}{2}$, obtemos o representante $\langle \nabla_3 \rangle$.
   (b) $\alpha_1 \neq 0$. Considerando $a_{11} = \alpha_1^{-1/2}$, $a_{22} = \alpha_1^{1/4}$ e $a_{41} = \frac{\alpha_2}{2}$, obtemos o representante$\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle$.

4. $\lambda \notin \{0, \pm 1\}$.
   (a) Se $1 + \lambda + \lambda^2 \neq 0$, considerando $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = \frac{-\alpha_4}{1+\lambda+\lambda^2}$, $a_{31} = \frac{-1+\alpha_1}{\lambda^2-1}$ e $a_{32} = \frac{\alpha_2(\lambda^3-1)+\alpha_4(\alpha_1-\lambda)}{\lambda^2(\lambda^3-1)}$, obtemos o representante $\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle$.
   (b) Suponha $1 + \lambda + \lambda^2 = 0$.
      i. Se $\alpha_4 = 0$, considerando $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{31} = \frac{\alpha_1-1}{\lambda^2-1}$, $a_{32} = \frac{\alpha_2}{\lambda^2-\lambda}$ e $a_{41} = \frac{\alpha_2}{\lambda^2-\lambda}$, obtemos o representante $\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle$.
      ii. Se $\alpha_4 \neq 0$, considerando $a_{11} = \alpha_4^2$ $y = \alpha_4$, $a_{22} = \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\lambda^2-1}$, $a_{32} = \frac{\alpha_4(\alpha_2(\lambda^2-1)+\alpha_1\alpha_4)}{\lambda^2(\lambda^2-1)}$ e $a_{41} = -\frac{\alpha_4^2(\alpha_2-\alpha_4\alpha_1-\alpha_2\lambda+\alpha_1\alpha_4\lambda)}{2\lambda^2(\lambda-1)}$, obtemos o representante $\langle \nabla_3 + \nabla_4 \rangle$.

Nosso próximo passo é verificar que as órbitas encontradas são todas disjuntas entre si.

Justificativa. *Verificaremos primeiro para $\lambda = 0$, onde temos as órbitas $Orb(\langle \nabla_2 + \nabla_3 \rangle)$ e $Orb(\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle)$. Com efeito, suponha que exista $\varphi \in Aut(A^0_{4,15})$ tal que $\varphi(\langle \nabla_2 + \nabla_3 \rangle) = \langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle$. Assim, temos que*

$$\nabla_1 + \nabla_3 = a_{11}a_{31}\nabla_1 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{31})\nabla_2 + a_{11}a_{22}^2\nabla_2 + a_{22}^2a_{12}\nabla_4.$$

Dessa forma, temos $a_{22}^2 a_{12} = 0$, o que implica que $a_{12} = 0$ e, com isso, $(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{31}) = 0$, consequentemente, temos $a_{11}a_{22} = 0$. Uma contradição, pois φ é um automorfismo.

Suponha agora $\lambda = \pm 1$ e observe que $\alpha_1^* = 0$ em $\varphi\nabla_3$ para qualquer $\varphi \in Aut(A^{\pm 1}_{4,15})$. Com isso, concluimos que $\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle$ e $\langle \nabla_3 \rangle$ possuem órbitas disjuntas.

Por fim, considere $\lambda \notin \{0, \pm 1\}$. Suponha, por contradição, que exista $\varphi \in Aut(A^{\lambda}_{4,15})$ tal que $\varphi(\langle \nabla_1 + \nabla_3 \rangle) = \langle \nabla_3 + \nabla_4 \rangle$. Com isso, temos $\nabla_3 + \nabla_4 =$

$$(a_{11}^{2}+a_{11}a_{31}(1-\lambda^{2}))\nabla_{1}+(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{12}(-1+\lambda)+2a_{22}a_{41}\lambda+a_{12}a_{31}\lambda^{3}-a_{11}a_{32}\lambda(1+\lambda))\nabla_{2}+$$

$$a_{11}a_{22}^2\nabla_3 + a_{22}^2 a_{12}(1+\lambda+\lambda^2)\nabla_4.$$

Note que, se $(1+\lambda+\lambda^2)=0$*, então já temos uma contradição, pois* α_4^* *seria* 0. *Analogamente, não podemos ter* $(1-\lambda^2)=0$. *Por outro lado, se* $(1+\lambda+\lambda^2)(1-\lambda^2)\neq 0$*, considerando* $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{12}=\frac{1}{1+\lambda+\lambda^2}$, $a_{31}=\frac{1}{\lambda^2-1}$ *e* $a_{32}=\frac{1}{(1-\lambda^2)(1+\lambda+\lambda^2)}$*, teremos que* $\varphi(\langle\nabla_1+\nabla_3\rangle)=\nabla_3+\nabla_4$.

Portanto, teremos os seguintes representantes

$$\langle\nabla_2+\nabla_3\rangle_{\lambda=0}, \langle\nabla_3\rangle, \langle\nabla_1+\nabla_3\rangle_{\lambda=\pm1} \text{ and } \langle\nabla_3+\nabla_4\rangle_{\lambda=\omega,\omega^2}$$

,onde ω é a raiz cúbica da unidade.

Esses representantes correspondem às seguinte álgebras:

Extensões centrais 1 **dimensionais de** $A_{4,16}$**.**

Relembre que $A_{4,16}: e_1e_2=e_4,\ e_2e_1=-e_4,\ e_3e_3=e_4$.
Observe que $Ann(A_{4,16})=\langle e_4\rangle$ e, pelo Lema 1.2.9, temos $B^2(A_{4,16},\mathbb{C})=\langle\Delta_{12}-\Delta_{21}+\Delta_{33}\rangle$. Além disso, obtemos que $Z^2(A_{4,16},\mathbb{C})=\langle\Delta_{11},\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{21},\Delta_{22},\Delta_{23},\Delta_{31},\Delta_{32},\Delta_{33}\rangle$. Portanto, segue que

$$H^2(A_{4,16})=\langle[\Delta_{11}],[\Delta_{12}],[\Delta_{13}],[\Delta_{21}],[\Delta_{22}],[\Delta_{23}],[\Delta_{31}][\Delta_{32}]\rangle.$$

No entanto, considerando $\vartheta\in G_1(H^2(A_{4,16},\mathbb{C}))$, observe que $\vartheta^\perp\cap Ann(A_{4,16})=\langle e_4\rangle=0$. Com isso, $T_1(A_{4,16})=\emptyset$ e portanto, pelo Teorema 2.2.1, não teremos extensões centrais 1-dimensionais de $A_{4,16}$ sem componente anuladora.

A Tabela 3.13, a seguir, reúne todas as álgebras antiassociativas de dimensão 5 puras encontradas.

Tabela 3.13: Lista de álgebras antiassociativas puras de dimensão 5.

$A_{5,1}$	:	$e_1e_1=e_2,$	$e_1e_2=e_4,$	$e_2e_1=-e_4$		
$A_{5,2}$	:	$e_1e_1=e_2,$	$e_1e_2=e_4,$	$e_2e_1=-e_4,$	$e_1e_3=e_4$	
$A_{5,3}$	:	$e_1e_1=e_2,$	$e_1e_2=e_4,$	$e_2e_1=-e_4,$	$e_3e_3=e_4$	
$A_{5,4}$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_3e_1=e_5$	
$A_{5,5}^\lambda$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_1e_3=e_5$	$e_3e_1=\lambda e_5$
$A_{5,6}$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_1e_3=e_5$	$e_3e_3=e_5$
$A_{5,7}$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_3e_3=e_5$	
$A_{5,8}$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_1e_3=e_4+e_5$	$e_3e_1=-e_5$
$A_{5,9}$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_1e_3=e_4$	$e_3e_3=e_5$
$A_{5,10}$	:	$e_1e_1=e_2$ $e_3e_3=e_5$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_1e_3=e_4$	$e_3e_1=e_5$
$A_{5,11}$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_3e_3=e_4$	$e_3e_1=e_5$
$A_{5,12}^\lambda$	:	$e_1e_1=e_2$ $e_3e_3=e_4$	$e_1e_2=e_4$	$e_2e_1=-e_4$	$e_1e_3=e_5$	$e_3e_1=\lambda e_5$
$A_{5,13}$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_5$	$e_2e_1=-e_5$	$e_1e_4=e_5$	$e_3e_3=e_5$
$A_{5,14}^\lambda$	:	$e_1e_1=e_2$	$e_1e_2=e_5$	$e_2e_1=-e_5$	$e_3e_4=e_5$	$e_4e_3=\lambda e_5$
$A_{5,15}$	:	$e_1e_1=e_2$ $e_4e_3=-e_5$	$e_1e_2=e_5$	$e_2e_1=-e_5$	$e_1e_3=e_5$	$e_3e_4=e_5$
5,16		$e_1e_1=e_2$ $e_3e_4=e_5$	$e_1e_2=e_5$ $e_4e_3=-e_5$	$e_2e_1=-e_5$	$e_1e_4=e_5$	$e_3e_3=e_5$

$A_{5,17}$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_5$	$e_2e_1 = -e_5$	$e_3e_3 = e_5$	$e_3e_4 = e_5$
$A_{5,18}$	:	$e_1e_1 = e_2$, $e_4e_3 = -e_5$	$e_3e_3 = e_4$,	$e_1e_2 = e_5$,	$e_2e_1 = -e_5$,	$e_3e_4 = e_5$,
$_{5,19}$		$e_1e_1 = e_2$, $e_4e_3 = -e_5$,	$e_3e_3 = e_4$, $e_1e_3 = e_5$	$e_1e_2 = e_5$,	$e_2e_1 = -e_5$,	$e_3e_4 = e_5$,
$_{5,20}$		$e_1e_2 = e_3$ $e_3e_1 = -e_5$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = -e_3$	$e_1e_4 = e_5$	$e_2e_4 = -e_5$
$_{5,21}$		$e_1e_2 = e_3 + e_5$ $e_3e_1 = -e_5$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = -e_3$	$e_1e_4 = e_5$	$e_2e_4 = -e_5$
$_{5,22}$		$e_1e_2 = e_3$,	$e_2e_1 = e_4$,	$e_1e_4 = e_5$,	$e_3e_1 = -e_5$,	$e_2e_2 = e_5$
$A_{5,23}$	:	$e_1e_2 = e_3$, $e_4e_2 = -e_5$	$e_2e_1 = e_4$,	$e_1e_4 = e_5$,	$e_3e_1 = -e_5$,	$e_2e_3 = e_5$,
$_{5,24}$		$e_1e_2 = e_3$,	$e_2e_1 = e_4$,	$e_2e_3 = e_5$,	$e_4e_2 = -e_5$	
$A_{5,25}$	:	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_5$	$e_2e_2 = e_3$	$e_1e_3 = e_5$	$e_4e_2 = -e_5$
$A^{\lambda}_{5,26}$	:	$e_1e_2 = e_4$ $e_3e_1 = -\lambda^2 e_5$	$e_2e_1 = \lambda e_4$ $e_2e_4 = \lambda e_5$	$e_2e_2 = e_3$ $e_4e_2 = -e_5$	$e_1e_1 = e_5$	$e_1e_3 = e_5$
$A_{5,27}$	:	$e_1e_2 = e_4$ $e_2e_4 = e_5$	$e_2e_1 = e_4$ $e_4e_2 = -e_5$	$e_2e_2 = e_3$	$e_1e_3 = e_5$	$e_3e_1 = -e_5$
$_{5,28}$		$e_1e_2 = e_4$ $e_2e_4 = -e_5$	$e_2e_1 = -e_4$ $e_4e_2 = -e_5$	$e_2e_2 = e_3$	$e_1e_3 = e_5$	$e_3e_1 = -e_5$
$A_{5,29}$	:	$e_1e_2 = e_4$ $e_2e_4 = \omega e_5$	$e_2e_1 = \omega e_4$ $e_4e_2 = -e_5$	$e_2e_2 = e_3$ $e_2e_3 = e_5$	$e_1e_3 = e_5$ $e_3e_2 = -e_5$	$e_3e_1 = -\omega\ e_5$
$A_{5,30}$	:	$e_1e_2 = e_4$ $e_2e_4 = \omega^2 e_5$	$e_2e_1 = \omega^2 e_4$ $e_4e_2 = -e_5$	$e_2e_2 = e_3$ $e_2e_3 = e_5$	$e_1e_3 = e_5$ $e_3e_2 = -e_5$	$e_3e_1 = -\omega e_5$

Na tabela acima, ω é a raiz cúbica da unidade.

Capítulo 4

Apêndice

Nas próximas duas seções faremos a classificação de álgebras antiassociativas de dimensão 3 e a classificação das extensões centrais 2-dimensionais das álgebras de dimensão 2, já conhecidas, deixando aqui explicitamente todos os cálculos. Note que usaremos a mesma técnica usada no Capítulo 3.

4.1 Álgebras antiassociativas de dimensão 3.

Como mencionado na seção 3.3, a classificação das álgebras antiassociativas de dimensão 3 já foi feita em [3]. Nessa seção, aplicaremos o método visto no Capítulo 2 para obtenção de tais álgebras.

Extensões centrais com componente anuladora.

Temos as seguintes álgebras:

$A_{3,1} = A_{2,1} \bigoplus \mathrm{F}e_3$ (Trivial).

$A_{3,2} = A_{2,2} \bigoplus \mathrm{F}e_3 : e_1e_1 = e_2$.

Extensões centrais de $A_{1,1}$ sem componente anuladora.

Observe que $H^2(A_{1,1}, \mathrm{F}) = \langle[\Delta_{11}]\rangle$, logo $G_2(H^2(A_{1,1}, \mathrm{F})) = \emptyset$ e portanto não existem extensões centrais 2-dimensionais de $A_{1,1}$.

Extensões centrais de $A_{2,1}$ sem componente anuladora.

Sabemos que $Z^2(A_{2,1}, \mathrm{F}) \subset \langle\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}$. Ademais, note que a equação (1.1) é trivialmente satisfeita para cada Δ_{ij} presente neste conjunto, daí

$$Z^2(A_{2,1}, \mathrm{F}) = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}\rangle .$$

Como o produto em $A_{2,1}$ é trivial, $B^2(A_{2,1}) = 0$ e, consequentemente,

$$H^2(A_{2,1}, \mathrm{F}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle .$$

Outra consequência imediata do produto em $A_{2,1}$, é que $Ann(A_{2,1}) = A_{2,1}$.

Além disso, como o produto em $A_{2,1}$ é trivial, a condição

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \forall\, x, y \in A_{2,1}$$

é satisfeita para qualquer bijeção de $A_{2,1}$ em $A_{2,1}$, logo $Aut(A_{2,1}) = GL_2(\mathbb{F})$.

Relembre que $T_1(A_{2,1}) = \{W = \langle [\vartheta]\rangle \in H^2(A_{2,1}, \mathbb{F});\ \vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{2,1}) = 0\}$. Desse modo, se $\vartheta = a_1\Delta_{11} + a_2\Delta_{12} + a_3\Delta_{21} + a_4\Delta_{22}$, com $a_i \in \mathbb{F}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, então

$$\vartheta^{\perp} \cap Ann(A_{2,1}) = (a_1\Delta_{11} + a_2\Delta_{12} + a_3\Delta_{21} + a_4\Delta_{22})^{\perp} \cap A_{2,1} = 0.$$

Pretendemos calcular todas as órbitas em $T_1(A_{2,1})$ invariantes pela ação de $Aut(A_{2,1})$, para tanto, tome $W = \langle [\vartheta]\rangle \in T_1(A_{2,1})$ onde

$$[\vartheta] = a_1[\Delta_{11}] + a_2[\Delta_{12}] + a_3[\Delta_{21}] + a_4[\Delta_{22}].$$

Desse modo, a matriz que representa ϑ é $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. Tome $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, de acordo com a observação 1.3.5, a matriz C' que representa $\varphi\vartheta$ é dada por

$$C' = \varphi^T C \varphi = \begin{pmatrix} a_1x^2 + (a_2 + a_3)xz + a_4z^2 & a_1xy + a_2wx + a_3yz + a_4zw \\ a_1xy + a_2yz + a_3wx + a_4zw & a_1y^2 + (a_2 + a_3)wy + a_4w^2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

A fim de facilitar o estudo de tais órbitas, dividiremos nossa busca nos seguintes casos:

1. $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = 0$

   (a) Suponha primeiramente que $a_4 \neq 0$.
   Com essas hipóteses, observe que a representação matricial de $\varphi\vartheta$ é dada por

   $$C' = \begin{pmatrix} a_1x^2 + a_4z^2 & a_1xy + a_4zw \\ a_1xy + a_4zw & a_1y^2 + a_4w^2 \end{pmatrix}.$$

   Logo, consideramos o automorfismo $\varphi = \begin{pmatrix} a_1^{-1/2} & -a_1^{-1/2} \\ a_4^{-1/2} & a_4^{-1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}]\rangle := W_1$.

   (b) Por outro lado, se temos $a_4 = 0$, então $W = \langle a_1[\Delta_{11}]\rangle$ e $\Delta_{11}^{\perp} \cap Ann(A_{2,1}) = \langle e_2\rangle \cap A_{2,1} = \langle e_2\rangle = 0$. Com isso, W não pode pertencer a $T_1(A_{2,1})$.

2. $a_2 \neq 0$ e $a_1 = a_3 = 0$

   (a) Se a_4 0, então a matriz que representa $\varphi\vartheta$ é dada por

   $$C' = \begin{pmatrix} z(a_2x + a_4z) & w(a_2x + a_4z) \\ z(a_2y + a_4w) & w(a_2y + a_4w) \end{pmatrix}.$$

   Assim, tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} a_2^{-1} & 0 \\ -a_4^{-1} & -a_4^{-1} \end{pmatrix}$. Com isso, $C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ e $\varphi W = \langle [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}]\rangle := W_2$

e φW =

(b) Se $a_4 = 0$, suponha primeiramente que $a_1 = 0$.

Note que, podemos representar ϑ matricialmente por $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a_2^{-1/2} \\ a_2^{-1/2} & a_2^{-1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = \langle [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle := W_2^0$.

Agora supondo $a_1 \neq 0$, obtemos que $\varphi\vartheta$ será representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} a_1x^2 + a_2zx & a_1xy + a_2xw \\ a_1xy + a_2yz & a_1y^2 + a_2wy \end{pmatrix}.$$

Assim, tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1/2} \\ a_2^{-1}a_1^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obteremos, novamente, que $\varphi W = W_2^0$.

3. a_3 /= 0 e $a_2 = 0$

(a) Se $a_4 \neq 0$, então a matriz que representa $\varphi\vartheta$, neste caso, é dada por

$$\begin{pmatrix} a_3xz + a_4z^2 & a_3yz + a_4zw \\ a_3wx + a_4zw & a_3wy + a_4w^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} a_4^{1/2}a_3^{-1} & 0 \\ 0 & a_4^{-1/2} \end{pmatrix}$ e obteremos que $\varphi W = \langle \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle = W_2^{\alpha}$, onde $\alpha = a_1a_3^{-2}a_4$.

(b) Se $a_4 = 0$

Temos que $\varphi\vartheta$ será representado matricialmente por $\begin{pmatrix} a_3xz & a_3yz \\ a_3xw & a_3yw \end{pmatrix}$. Tomando $\begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ -a_1 & a_3^{-2} - a_1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ obteremos que $\varphi W = W_2^0$.

4. a_1, a_2 /= 0 e $a_3 = 0$

Neste caso, a matriz que representa $\varphi\vartheta$ é dada por

$$\begin{pmatrix} a_1x^2 + a_2xz + a_4z^2 & a_1xy + a_2wx + a_4zw \\ a_1xy + a_2yz + a_4zw & a_1y^2 + a_2wy + a_4w^2 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1/2} \\ a_2^{-1}a_1^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$ e obtemos que $\varphi W = \langle \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle := W_2^{\alpha}$, onde $\alpha = a_1a_2^{-2}a_4$.

5. $a_2, a_3 \neq 0$ e $a_1 = 0$

(a) Se $a_4 \neq 0$, então a matriz que representa $\varphi\vartheta$ é dada por

$$\begin{pmatrix} (a_2 + a_3)xz + a_4z^2 & a_2wx + a_3yz + a_4zw \\ a_2yz + a_3wx + a_4zw & (a_2 + a_3)wy + a_4w^2 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, se tomarmos $\varphi_1 = \begin{pmatrix} a_4^{1/2}a_2^{-1} & 0 \\ -a_4^{-1/2} & a_4^{-1/2} \end{pmatrix}$, então teremos que a matriz que representa $\vartheta' = \varphi_1\vartheta$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -a_2^{-1}a_3 & 0 \\ a_3a_2^{-1} - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que, se $a_3a_2^{-1}-1 \neq 0$, então ϑ' possui a mesma configuração do caso 3a, logo existe $\varphi' \in Aut(A_{2,1})$ tal que $\varphi' W = W_2^{\alpha}$, com $\alpha = -a_2^{-1}a_3(a_3a_2^{-1} - 1)^{-2}$. Se porém $a_3a_2^{-1} - 1 = 0$, então $\varphi\vartheta$ possui a mesma configuração que o caso 1a e portanto existe $\varphi' \in Aut(A_{2,1})$ tal que $\varphi' W = W_1$.

(b) Se $a_4 = 0$, entao a matriz que representa $\varphi\vartheta$ é

$$\begin{pmatrix} (a_2 + a_3)xz & a_2wx + a_3zy \\ a_2zy + a_3xw & (a_2 + a_3)wy \end{pmatrix}.$$

Assim, considere os seguintes casos

i. $a_2 = -a_3$

A matriz que representa $\varphi\vartheta$ agora é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2(wx - zy) \\ a_2(zy - xw) & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a_2^{-1/2} \\ a_2^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obteremos $\varphi W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]\rangle := W_3$.

ii. $a_2 \neq -a_3$

Neste caso, tomamos $\varphi_1 = \begin{pmatrix} a_2^{-1}(a_2 + a_3)^{1/2} & (a_2 + a_3)^{-1/2} \\ -(a_2 + a_3)^{1/2}a_3^{-1} & (a_2 + a_3)^{-1/2} \end{pmatrix}$ e entao a matriz que representa $\varphi_1\vartheta$ será dada por

$$C' = \begin{pmatrix} -(a_2 + a_3)^2a_2^{-1}a_3^{-1} & 0 \\ a_3a_2^{-1} - a_2a_3^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\alpha_1 \neq 0$ recaímos no caso 1a ou no caso 3a.

6. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Nesse caso, temos $W = \langle a_4[\Delta_{22}]\rangle$. No entanto, observe que $\Delta_{22}^{\perp} \cap Ann(A_{2,1}) = \langle e_1\rangle \cap A_{2,1} = \langle e_1\rangle = 0$. Com isso, W não pode pertencer a $T_1(A_{2,1})$.

7. $a_1, a_2, a_3 \quad 0$

Neste caso, a matriz que representa $\varphi\vartheta$ é dada pela equação 4.1. Tomando $\varphi = \begin{pmatrix} a_3 & a_1^{-1/2} \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, a matriz que representa $\varphi\vartheta$ será

$$\begin{pmatrix} a_1(a_1a_4 - a_2a_3) & 0 \\ a_1^{1/2}(a_3 - a_2) & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, se $\alpha_1 = a_1(a_1a_4 - a_2a_3)$ e $\alpha_2 = a_1^{1/2}(a_3 - a_2)$, temos 3 casos:

(a) Se $\alpha_2 \quad 0$, então $\varphi\vartheta$ possui a mesma configuração que o caso 3a.

(b) Se $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 \neq 0$, então obtemos a mesma configuração que o caso 1a.

(c) Por fim, se ambos α_1 e $\alpha_2 = 0$, então $\varphi\vartheta$ terá a mesma configuração que o caso 6.

Para finalizar devemos mostrar que tais órbitas encontradas são disjuntas e, com isso, estaremos aptos para aplicar o teorema 2.2.1.

Afirmação 4.1.1. *As órbitas W_1, W_2^{α} e W_3, descritas na tabela 4.1, são duas a duas disjuntas.*

Justificativa. *Com efeito, considere* $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ *um automorfismo genérico em* $A_{2,1}$.

Assim, se $\varphi W_1 = W_2^{\alpha}$, *ou seja,* $\varphi([\Delta_{11}] + [\Delta_{22}]) = \lambda(\alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}])$, $\lambda \in \mathbb{F}$, *ter´ıamos*

$$(x^2 + z^2)[\Delta_{11}] + (xy + zw)[\Delta_{12}] + (xy + zw)[\Delta_{21}] + (y^2 + w^2)[\Delta_{22}] = \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}].$$

Porém isso não ocorre, pois os coeficientes de $[\Delta_{12}]$ *e* $[\Delta_{21}]$ *deveriam ser iguais também no lado direito da igualdade e não o são. Logo* W_1 *e* W_2 *são disjuntas.*

Adiante, se $\varphi W_1 = W_3$ *com* $\varphi([\Delta_{11}] + [\Delta_{22}]) = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]$, *então, pelo mesmo argumento, teríamos uma contradição na seguinte igualdade*

$$(x^2 + z^2)[\Delta_{11}] + (xy + zw)[\Delta_{12}] + (xy + zw)[\Delta_{21}] + (y^2 + w^2)[\Delta_{22}] = [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}].$$

Logo W_1 *e* W_3 *são órbitas disjuntas em* $T_1(A_{2,1})$.

Por fim, se $\varphi W_3 = W_2^{\alpha}$ *com* $\varphi([\Delta_{12}] - [\Delta_{21}]) = \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}]$, *então teríamos uma contradição na seguinte igualdade*

$$(wx - yz)[\Delta_{12}] - (wx - yz)[\Delta_{21}] = \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}].$$

Desse modo, W_2^{α} *e* W_3 *são órbitas disjuntas.*

Assim, as órbitas em $T_1(A_{2,1})$ invariantes pela ação de $Aut(A_{2,1})$ são descritas pela Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Órbitas em $T_1(A_{2,1})$ invariantes pela ação de $Aut(A_{3,2})$

W_1	$\langle [\Delta_{11}] +$
W_2^{α}	$\langle \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$, $\alpha \in \mathbb{F}$
W_3	$\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$

Portanto as extensões centrais 1-dimensionais de $A_{2,1}$ correspondentes são $A_{3,3}$, $A_{3,4}$, e $A_{3,5}^{\alpha}$ descritas na tabela 3.1.

Extensões centrais de $A_{2,2}$ sem componente anuladora

Temos que $Ann(A_{2,2}) = \langle e_2 \rangle$ e podemos verificar também que

$$Aut(A_{2,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x^2 \end{pmatrix}, \ x \neq 0 \text{ e } x, y \in \mathbb{F} \right\}.$$

Adiante, segundo o Exemplo 1.2.11, temos $Z^2(A_{2,2}, \mathbb{F}) \subset \langle \Delta_{22}, \Delta_{12}, \Delta_{21} \rangle$.

Agora considere $[\vartheta] = a_1[\Delta_{12}] + a_2[\Delta_{21}] + a_3[\Delta_{22}] \in H^2(A_{2,2}, \mathbb{F})$, por definição, temos que

$$\vartheta(e_1 \cdot e_1, e_1) + \vartheta(e_1, e_1 \cdot e_1) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2.$$

$$\vartheta(e_1 \cdot e_1, e_2) + \vartheta(e_1, e_1 \cdot e_2) = 0 \Longrightarrow a_3 = 0.$$

Com isso,

$$H^2(A_{2,2}, \mathbb{F}) = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle.$$

Assim sendo, dado $[\vartheta] = c([\Delta_{12}]-[\Delta_{21}]) \in T_1(A_{2,2})$, com $c \in \mathbb{F}$, tome $\varphi = \begin{pmatrix} c^{-1/3} & 0 \\ 0 & c^{-2/3} \end{pmatrix}$ e obtemos que $\varphi\vartheta = \Delta_{12} - \Delta_{21}$. Pela arbitrariedade de ϑ segue que existe apenas uma $Aut(A_{2,2})$-órbita em $T_1(A_{2,2})$ e esta é representada por $W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$.

Desse modo, obtemos a seguinte extensão central correspondente:

$A_{3,6} : e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_2e_1 = -e_3.$

4.2 Álgebras antiassociativas de dimensão 4

Nesta secão, descrevemos detalhadamente as extensões centrais 2 – dimensionais das álgebras antiassociativas de dimensão 2. Como já foi citado, tais álgebras já foram classificadas em [22].

Note que, como $G_2(A_{2,2}, \mathbb{F}) = \emptyset$, então não existem extensões centrais 2-dimensionais de $A_{2,2}$. Portanto resta analisarmos as extensões centrais da álgebra $A_{2,1}$.

Extensões centrais de $A_{2,1}$ sem componente anuladora

Relembre que $Aut(A_{2,1}) = GL_2(\mathbb{F})$, $Ann(A_{2,1}) = A_{2,1}$ e também

$$H^2(A_{2,1}, \mathbb{F}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], +[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle .$$

Assim sendo, considere $W = \langle [\vartheta_1], [\vartheta_2] \rangle \in T_2(A_{2,1})$, onde $\vartheta_1 = a_1\Delta_{11} + a_2\Delta_{12} + a_3\Delta_{21} + a_4\Delta_{22}$ e $\vartheta_2 = b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{12} + b_3\Delta_{21} + b_4\Delta_{22}$.

Observe que dado qualquer $[\vartheta] \in H^2(A_{2,1}, \mathbb{F})$, o subespaço $W = \langle [\vartheta] \rangle \in T_1(A_{2,1})$ irá pertencer a exatamente uma órbita do conjuntos das órbitas em $T_1(A_{2,1})$ invariantes pela ação de $Aut(A_{2,1})$. Assim sendo, usando os resultados descritos na tabela 4.1, podemos considerar

$$\vartheta_1 \in \{\Delta_{11} + \Delta_{22},\ \alpha\Delta_{11} + \Delta_{21} + \Delta_{22},\ \Delta_{12} - \Delta_{21}\}.$$

Relembre também que, dado $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ a matriz que representa $\varphi\vartheta_2$ (para $\varphi\vartheta_1$ descreveremos abaixo) é dada por

$$\begin{pmatrix} b_1x^2 + (b_2 + b_3)xz + b_4z^2 & b_1xy + b_2wx + b_3yz + b_4zw \\ b_1xy + b_2yz + b_3wx + b_4zw & b_1y^2 + (b_2 + b_3)wy + b_4w^2 \end{pmatrix}$$

Assim sendo, a fim de facilitar o estudo de tais órbitas dividiremos nossa busca nos seguintes casos:

1. $\vartheta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{22}$

   Neste caso, a matriz representada por $\varphi\vartheta_1$ é dada por $\begin{pmatrix} x^2 + z^2 & xy + zw \\ xy + & 2 \end{pmatrix}$.

   Além disso, sem perda de generalidade, fazendo operações em ϑ_1 e ϑ_2, podemos considerar $\vartheta_2 = b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{12} + b_3\Delta_{21}$, ou seja, tomar $b_4 = 0$. Desse modo, analisaremos os seguintes casos:

(a) $b_1 = 0$ e $b_2 = b_3 = 0$

Neste caso, como estamos trabalhando com elementos da base, podemos tomar múltiplos escalares destes e teremos que

$$W = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{11}] \rangle = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle := W_1.$$

(b) $b_2 \neq 0$ e $b_3 = 0$

Neste caso, tome $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & b_2^{-1/2} \\ b_2^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos que

$$\varphi W = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle := W_2^\lambda, \quad \text{com } \lambda = b_1 b_2^{-1}.$$

(c) $b_3 \neq 0$ e $b_2 = 0$

Considere $\varphi = \begin{pmatrix} b_3^{-1/2} & 0 \\ 0 & b_3^{-1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W =$

$$\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{11}] + b_1^{-1} b_3 [\Delta_{21}] \rangle = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] - b_1 b_3^{-1} [\Delta_{22}] \rangle = W_2^\lambda,$$

com $\lambda = -b_1 b_3^{-1}$.

(d) $b_2, b_3 = 0$ e $b_1 = 0$

Se $b_2 + b_3 = 0$, então relembramos que F é algebricamente fechado, logo existe $i \in$ F tal que $i^2 = -1$, e tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$. Daí teremos que

$$\varphi W = \langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle = W_4.$$

Por outro lado, se $b_2 + b_3 \neq 0$, então $b_2^{-1} + b_3^{-1} \neq 0$. Daí considere $\varphi = \begin{pmatrix} -b_2^{-1/2} & b_3^{-1/2} \\ b_3^{-1/2} & b_2^{-1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W =$

$$\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], -[\Delta_{11}] + \beta[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle, \quad \text{onde } \beta = -b_2^{-3/2} b_3^{-1/2} + b_3^{-3/2} b_2^{-1/2}.$$

Desse modo, se $\beta = 0$, então $\varphi W = W_1$. Caso contrário, $\varphi W = W_2^\lambda$ com $\lambda = 2\beta^{-1}$.

(e) $b_1, b_2, b_3 = 0$

Nesse caso, relembre que o corpo F é algebricamente fechado e considere $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & y_0 \\ -y_0 & 1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, onde y_0 é solução da equação $-b_3 y^2 + b_1 y + b_2 = 0$.

i. Se $det(\varphi) \neq 0$, ou seja, $y_0^2 + 1 \neq 0$

Desse modo, teremos $\varphi W = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}],$

$$(b_1 - (b_2 + b_3)y_0)[\Delta_{11}] + (b_3 - b_2 y_0^2 + b_1 y_0)[\Delta_{21}] + (b_1 y_0^2 + (b_2 + b_3)y_0)[\Delta_{22}] \rangle$$
$$= \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], (b_1 - 2(b_2 + b_3)y_0 - b_1 y_0^2)[\Delta_{11}] + (b_3 - b_2 y_0^2 + b_1 y_0)[\Delta_{21}] \rangle.$$

E portanto recaímos ao caso 1c ou ao caso 1a.

ii. Se $y_0 = i$, então $b_1 i + b_2 + b_3 = 0$

Primeiramente aplicamos $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, onde $i \in$ F; é tal que $i^2 + 1 = 0$, e obtemos que

$$\varphi W = \langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], \frac{ib_2}{b_1}[\Delta_{12}] + \left(1 - \frac{ib_2}{b_1}\right)[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle.$$

Assim, se $1 - \frac{ib_2}{b_1} = 0$, então $\varphi W = \langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{21}] - [\Delta_{22}] \rangle$ e tomando $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ teremos que $\varphi_1(\varphi W) = \langle [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] - 3[\Delta_{21}] \rangle$. Logo recaímos ao caso 2f resolvido adiante.

iii. Se $y_0 = -i$, então $-b_1 i + b_2 + b_3 = 0$

Neste caso, aplicando $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ obtemos que

$$\varphi W = \langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], b_1[\Delta_{11}] + (-b_1 - 2ib_2)[\Delta_{21}]\rangle .$$

Assim se $\gamma = (-b_1 - 2ib_2) = 0$, teremos que $\varphi W = W_3^1$.

Caso contrário, aplicamos $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma- \\ 2b_1 & 2b_1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos $\varphi_1(\varphi W) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}]\rangle$. Assim, recaímos o caso 2b.

2. $\vartheta_1 = \Delta_{21} + \Delta_{22}$, $(\alpha = 0)$

A matriz que representa $\varphi\vartheta$ é dada por $\begin{pmatrix} xz + z^2 & yz + zw \\ wx + & \end{pmatrix}$. Além disso, nessas condiçoes, podemos tomar $\vartheta_2 = b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{12} + b_3\Delta_{21}$ e, assim, devemos considerar os seguintes casos

(a) $b_1 \neq 0$ e $b_2 = b_3 = 0$

Podemos considerar $b_1 = 1$ e tomar $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$. Assim, $\varphi W = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}]\rangle := W_5$.

(b) $b_2 \neq 0$ e $b_1 = b_3 = 0$

Tome $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos que $\varphi W = W_2^{-1}$.

(c) $b_3 \neq 0$ e $b_1 = b_2 = 0$

Considere $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos que $\varphi W = W_3^0$.

(d) $b_1, b_2 \neq 0$ e $b_3 = 0$

Se $b_1 = b_2$, então tome $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que

$$\varphi W = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}]\rangle := W_6.$$

Por outro lado, se $b_1 \neq b_2$, considere $\lambda = (b_1 - b_2)^{-1}b_2$ e tome

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1}).$$

Desse modo, teremos que $\varphi W = W_2^{\gamma}$, onde $\gamma = \lambda^{-\frac{1}{2}}$.

(e) $b_1, b_3 \neq 0$ e $b_2 = 0$

Novamente, relembre que o corpo $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, logo existe $i \in \mathbb{F}$ tal que $i^2 + 1 = 0$.

Assim sendo, considere $\varphi = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & b_1^{\frac{1}{2}} b_3^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W =$

$$\langle -b_1[\Delta_{11}] + ib_1^{\frac{1}{2}}b_3^{\frac{1}{2}}[\Delta_{21}], ib_1^{\frac{1}{2}}b_3^{\frac{-1}{2}}[\Delta_{21}] + b_1b_3^{-1}[\Delta_{22}]\rangle = W_2^{\lambda}, \text{ com } \lambda = -ib_1^{\frac{1}{2}}b_3^{\frac{-1}{2}}.$$

(f) $b_2, b_3 \neq 0$ e $b_1 = 0$

Se $b_2 + b_3 = 0$, temos $\vartheta_2 = b_2(\Delta_{12} - \Delta_{21})$ e então considerando $\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, teremos que $\varphi W = W_4$.

Caso contrário, considere $\varphi = \begin{pmatrix} -(b_2+b_3)^{1/2}b_2^{-1} & (b_2+b_3)^{-1/2} \\ 0 & -(b_2+b_3)^{-1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{12}] - [\Delta_{22}] \rangle$.

Adiante, tome $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, onde $i \in \mathbb{F}$; $i^2 + 1 = 0$, e teremos

$$\varphi_1(\varphi W) = W_2^i.$$

(g) $b_1, b_2, b_3 \neq 0$

i. Se $b_2 + b_3 = b_1$, então tome $\varphi = \begin{pmatrix} b_3^{-1} & (b_2+b_3)^{-1} \\ -b_3^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e recaímos ao caso 2b.

ii. Se $b_2 + b_3 \neq b_1$

Considere $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ -1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos que

$$\begin{aligned} \varphi W &= \langle [\Delta_{12}] + (b_1 - b_2)[\Delta_{22}], [\Delta_{11}] + (b_3 - b_2)[\Delta_{12}] - b_2b_3[\Delta_{22}] \rangle \\ &= \langle [\Delta_{11}] + (b_1b_2 - b_2^2 - b_3b_1)[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + (b_1 - b_2)[\Delta_{22}] \rangle \end{aligned}$$

Aplicando $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ obtemos que

$$\begin{aligned} \varphi_1(\varphi W) &= \langle (b_1b_2 - b_2^2 - b_3b_1)[\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], (b_1 - b_2)[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] \rangle \\ &= \langle ((b_1b_2 - b_2^2 - b_3b_1) + b_1 - b_2)[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}], (b_1 - b_2)[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] \rangle . \end{aligned}$$

Assim, recaímos ao caso 3e (que veremos a seguir) e ao caso 2e, onde $\alpha = ((b_1b_2 - b_2^2 - b_3b_1) + b_1 - b_2)$.

3. $\vartheta_1 = \alpha\Delta_{11} + \Delta_{21} + \Delta_{22}$, com $\alpha \neq 0$

Neste caso, a matriz que representa $\varphi\vartheta_1$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha x^2 + xz + z^2 & \alpha xy + yz + zw \\ \alpha xy + wx + zw & \alpha y^2 + wy + w^2 \end{pmatrix}.$$

Mais uma vez, fazendo operações em ϑ_1 e ϑ_2, podemos considerar $\vartheta_2 = b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{12} + b_3\Delta_{21}$, ou seja, tomar $b_4 = 0$. Consequentemente, devemos analisar os seguintes casos:

(a) $b_1 \neq 0$ e $b_2 = b_3 = 0$

Neste caso, tome $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos que $\varphi W = W_5$.

(b) $b_2 \neq 0$ e $b_1 = b_3 = 0$

Considere $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1/2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = W_2^0$.

(c) $b_3 \neq 0$ e $b_1 = b_2 = 0$

Neste caso, considere $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha^{-1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = \langle [\Delta_{11}] + \alpha^{-1/2}[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle = W_2^0$.

(d) $b_1, b_2 \neq 0$ e $b_3 = 0$

Se $b_1 = b_2$, então tome $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1/2} \\ 1 & -\alpha^{-1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = W_2^0$.

Caso contrário, seja $i \in \mathrm{F}$; com $i^2 + 1 = 0$ e considere $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_2^{-1/2}\alpha^{1/2} i & -1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$. Assim, obtemos que

$$\varphi W = \langle \vartheta'_1 = -b_2^{-1}\alpha[\Delta_{11}] + b_2^{-1/2}\alpha^{1/2} i[\Delta_{21}] + \alpha[\Delta_{22}], \vartheta'_2 = \alpha^{1/2} b_2^{1/2} i[\Delta_{21}] + h[\Delta_{22}] \rangle,$$

com $h = (b_2 - b_1)$ 0. Opere $\vartheta'_1 - b_2^{-1}\vartheta'_2$ e teremos

$$\varphi W = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + h[\Delta_{22}] \rangle$$

(e) $b_1, b_3 \neq 0$ e $b_2 = 0$

i. Suponha primeiro que $b_1 - b_3\alpha \neq 0$ e considere $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, com $\lambda = (b_3^{-1}(b_3\alpha - b_1))^{1/2}$. Daí, obtemos que

$$\varphi W \langle \vartheta'_1 = \alpha[\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{21}] + \lambda^2[\Delta_{22}], \ \vartheta'_2 = b_1[\Delta_{11}] + b_3\lambda[\Delta_{21}] \rangle .$$

Operamos $\beta_1 = \vartheta'_2 - b_3\vartheta'_1 = (b_1 - b_3\alpha)([\Delta_{11}] + [\Delta_{22}])$ e também $\beta_2 = \vartheta'_2 - b_1(b_1 - b_3\alpha)^{-1}\beta_1 = b_3\lambda[\Delta_{21}] + - b_1[\Delta_{22}]$

Desse modo,

$$\varphi W = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle = \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + -b_1 b_3^{-1}\lambda^{-1}[\Delta_{22}] = W_2^{\gamma},$$

com $\gamma = -b_1 b_3^{-1}\lambda^{-1}$.

ii. Agora suponhamos que $b_1 - b_3\alpha = 0$, assim teremos

$$\vartheta_1 = \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \text{ e } \vartheta_2 = \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}].$$

Com isso, operamos $\beta_1 = \vartheta_2 - b_3\vartheta_1 = -b_3[\Delta_{22}]$.

Logo $W = \langle \alpha[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$. Por fim, considere $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos

$$\varphi W = W_5.$$

(f) $b_2, b_3 \neq 0$ e $b_1 = 0$

i. Considere b_2 b_3 e tomando $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\alpha(b_3 - b_2)}{b_2} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$, obtemos que

$$\varphi W = \langle \lambda_1[\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], \lambda_2[\Delta_{11}] + \lambda_3[\Delta_{12}] + [\Delta_{21}] \rangle ,$$

onde $\lambda_1 = -1 + \frac{\alpha(b_2 - b_3)^2}{b_2^2}$, $\lambda_2 = \frac{b_3 + b_2}{b_2}$ e $\lambda_3 = \frac{b_3}{b^2}$.

Se λ_1 0, então tome $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1^{-1/2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e recairemos ao caso 1. Mas caso $\lambda_1 = 0$, então consideremos os dois casos abaixo:

- Se $\lambda_2 = 0$, logo $b_2 + b_3 = 0$ e também $\lambda_3 + 1 = 0$. Neste caso, tomamos $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi_1(\varphi W) = W_3^{\lambda_3}$.

  Se $\lambda_2 \neq 0$, então tome $\varphi_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2^{-1} & -\lambda_2^{-1}\lambda_3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e recaímos ao caso 2a.

•

ii. Por fim, suponha que $b_2 = b_3$. Desse modo, note que podemos tomar $b_2 = 1$. Relembre que o corpo é algebricamente fechado e considere $i \in \mathbb{F}$ tal que $i^2+1=0$, assim, tomamos $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos

$$\varphi W = \langle\, [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], (\alpha+2)[\Delta_{11}] - i\alpha[\Delta_{12}] + i(\alpha-2)[\Delta_{21}] - \alpha[\Delta_{22}]\rangle .$$

Com isso, recairemos ao caso 1.

(g) $b_1, b_2, b_3 \neq 0$

i. Se $b_2 = b_3$ considere $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ \frac{1-b_1}{2b_2} & i\frac{1+b_1}{2b_2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que

$$\varphi W = \langle\, [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], \lambda_1[\Delta_{11}] + \lambda_2[\Delta_{12}] + (\lambda_2 + \frac{i}{b_2})[\Delta_{21}]\rangle ,$$

onde $\lambda_1 = -\frac{1+b_1^2-2b_1b_2+4\alpha b_2^2}{2b_2^2}$ e $\lambda_2 = -\frac{i(-1+b_1^2+2b_2-2b_1b_2+4\alpha b_2^2)}{4b_2^2}$. Desse modo, recaímos ao caso 1.

ii. Se $b_2 \neq b_3$

A. Considere primeiramente $b_1 \neq \frac{b_2^2}{b_2-b_3} - \alpha(b_2-b_3)$, logo

$$\gamma = ((-1+\alpha)b_2^2 + b_1(b_2-b_3) - 2\alpha b_2b_3 + \alpha b_3^2) \neq 0.$$

Com isso, tomando $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{(b_2-b_3)} & \frac{-b_2}{b_2-b_3} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ obtemos que

$$\varphi W = \langle\, [\Delta_{11}]+[\Delta_{22}], \frac{b_3\sqrt{\gamma}}{b_2-b_3}[\Delta_{12}]+\frac{b_2\sqrt{\gamma}}{b_2-b_3}[\Delta_{21}]+(b_1-\frac{b_2(b_2+b_3)}{b_2-b_3})[\Delta_{22}]\rangle .$$

Assim, novamente recaímos no caso 1.

B. Considere agora $b_1 = \frac{b_2^2}{b_2-b_3} - \alpha(b_2-b_3)$.

- Suponhamos inicialmente $\alpha \neq \frac{-b_2b_3}{(b_2-b_3)^2}$, com isso $\beta = (\alpha(b_2-b_3)^2 + b_2b_3) \neq 0$. Logo tomamos

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_2}{b_3} \\ \frac{\alpha(b_2-b_3)}{b_3} & \frac{-b_2+\alpha(b_2-b_3)}{b_3} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1}),$$

(observe que $det\,\varphi = \beta \neq 0$) e obtemos que $\varphi W = W_5$.

- Caso contrario, se $\alpha = \frac{-b_2b_3}{(b_2-b_3)^2}$, então $b_1 = \frac{b_2(b_2+b_3)}{(b_2-b_3)}$. Daí consideramos $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{-b_2}{b_2-b_3} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = W_3^{\lambda}$, com $\lambda = \frac{b_2}{b_3}$.

4. $\vartheta_1 = \Delta_{12} - \Delta_{21}$

Por fim, fazendo operações em ϑ_1 e ϑ_2, podemos considerar $\vartheta_2 = b_1\Delta_{11} + b_3\Delta_{21} + b_4\Delta_{22}$, ou seja, tomar $b_2 = 0$.

A matriz que representa $\varphi\vartheta$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & wx-yz \\ yz-wx & 0 \end{pmatrix} = (wx-yz)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim sendo, devemos analisar os seguintes casos:

(a) $b_1 \neq 0$ e $b_3 = b_4 = 0$

Neste caso, considere $\varphi = \begin{pmatrix} b_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & b_1^{1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos que $\varphi W = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] - [\delta_{21}] \rangle = W_3^{-1}$.

(b) $b_3 \neq 0$ e $b_1 = b_4 = 0$

Adiante, tome $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & b_3^{-1/2} \\ b_3^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos que

$$\varphi W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{12}] \rangle = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle := W_4.$$

(c) $b_4 \neq 0$ e $b_1 = b_3 = 0$

Neste caso, considere $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & b_4^{1/2} \\ b_4^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e obtemos que $\varphi W = W_3^{-1}$.

(d) $b_1, b_3 \neq 0$ e $b_4 = 0$

Considere $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 b_3^{-1} & b_3^{-1} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e, mais uma vez, teremos $\varphi W = W_4$.

(e) $b_1, b_4 \neq 0$ e $b_3 = 0$

Relembre que estamos trabalhando sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e assim existem y_0 e z_0, tais que $b_4 z_0^2 = -1$ e $b_1 y_0^2 = -1$, daí tome $\varphi = \begin{pmatrix} b_1^{-1/2} & y_0 \\ z_0 & b_4^{-1/2} \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e teremos $\varphi W = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}], [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}] \rangle = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle = W_4$.

(f) $b_3, b_4 \neq 0$ e $b_1 = 0$

Adiante tome $\varphi = \begin{pmatrix} b_3^{-2} & -b_4 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e, novamente, teremos que

$$\varphi W = W_4.$$

(g) $b_1, b_3, b_4 \neq 0$

Por fim, tome $\varphi \in Aut(A_{2,1})$, descrito por $x = -y = b_1^{-1/2}$ e considere z, w tais que $b_4 z^2 + b_3 b_1^{-1/2} z + 1 = 0$ e $b_4 w^2 - b_3 b_1^{-1/2} w + 1 = 0$, ou seja,

$$z = \frac{-b_1^{-1/2} b_3 + \sqrt{b_3^2 b_1^{-1} - 4b_4}}{2b_4} \quad \text{e} \quad w = \frac{b_1^{-1/2} b_3 + \sqrt{b_3^2 b_1^{-1} - 4b_4}}{2b_4}.$$

Com isso, $\varphi W = W_4$.

Portanto teremos as seguintes $Aut(A_{2,1})$-órbitas em $T_2(A_{2,1})$:

Tabela 4.2: Órbitas em $T_2(A_{2,1})$ invariantes pela ação de $Aut(A_{2,1})$

W_1	$\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$
W_2^λ	$\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{11}] \rangle$
W_3^λ	$\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$, $\lambda \in F$
W_4	$\langle [\Delta_{12}],$ [illegible] $\rangle$
W_5	$\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}],$ [illegible] $\rangle$
W_6	$\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}] \rangle$

Agora devemos provar que tais órbitas são duas a duas distintas.

- W_1 é disjunta de W_i; $i = 2, 3, 4, 5, 6$.

  Com efeito, suponha que exista $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ tal que $\varphi W_1 =$

  $$\langle x^2[\Delta_{11}] + xy([\Delta_{12}] + [\Delta_{21}]) + y^2[\Delta_{22}], z^2[\Delta_{11}] + zw([\Delta_{12}] + [\Delta_{21}]) + w^2[\Delta_{22}] \rangle = W_i.$$

  Neste caso, repare que para qualquer base de φW os coeficientes de $[\Delta_{12}]$ e $[\Delta_{21}]$ devem ser iguais em ambos de seus elementos. Com isso, a igualdade acima é falsa para W_2, $W_3^\lambda(\lambda = 1)$, W_4, W_5, W_6.

  Agora, basta verificarmos o que ocorre em W_3^1. Considere $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tal que $\varphi W_3^1 = W_1$. Logo existem $a_1, b_1, a_2, b_2 \in F$ tais que

  $$a_1\varphi\vartheta_1 + b_1\varphi\vartheta_2 = \Delta_{11} \text{ e } a_2\varphi\vartheta_1 + b_2\varphi\vartheta_2 = \Delta_{22},$$

  e assim, igualando os coeficientes de cada lado, temos o seguinte sistema de equações

  $$a_1x^2 + 2b_1xz = 1 \quad (4.2a)$$
  $$a_1xy + b_1(wx + yz) = 0 \quad (4.2b)$$
  $$a_1y^2 + 2b_1wy = 0 \quad (4.2c)$$
  $$a_2x^2 + 2b_2xz = 0 \quad (4.2d)$$
  $$a_2xy + b_2(wx + yz) = 0 \quad (4.2e)$$
  $$a_2y^2 + 2b_2wy = 1 \quad (4.2f)$$

  Considerando que φ é um automorfismo, as igualdades (4.2b) e (4.2c) garantem que $a_1y + 2b_1w = 0$. Substituindo esse resultado na igualdade (4.2b) do sistema, obtemos que $b_1(yz - wx) = 0 \Rightarrow b_1 = 0$. Logo $a_1 = x = 1$ e $y = 0$. No entanto, esse resultado contradiz com a veracidade da igualdade (4.2f) do sistema (4.2).

- W_2^λ é disjunta de W_i; $i = 3, 4, 5, 6$.

  Suponha que existe $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ tal que $\varphi W_2^\lambda = W_i$.

  - Considere $W_i \in \{W_3^{y}, W_6\}$, então existem $a, b \in F$ tais que $a\varphi\vartheta_1 + b\varphi\vartheta_2 = \Delta_{11}$, logo temos o seguinte sistema de equações

    $$a(x^2 + z^2) + b(xz + \lambda z^2) = 1 \quad (4.3a)$$
    $$a(xy + zw) + b(yz + \lambda zw) = 0 \quad (4.3b)$$
    $$a(xy + zw) + b(wx + \lambda zw) = 0 \quad (4.3c)$$
    $$a(y^2 + w^2) + b(yw + \lambda w^2) = 0 \quad (4.3d)$$

Subtraindo a igualdade (4.3b) da igualdade (4.3c), obtemos que $b(wx - yz) = 0 \Rightarrow b = 0$. Sem perda de generalidade, suponha $x = 0$. Assim, da igualdade (4.3b), vemos que $xy + zw = 0 \Rightarrow y = -zwx^{-1}$. Substituindo esse resultado na igualdade (4.3d), temos que

$$y^2 + w^2 = 0 \Rightarrow (z^2x^{-2} + 1)w^2 = 0 \Rightarrow z^2x^{-2} + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -x^2.$$

No entanto, com isso, a igualdade (4.3a) torna-se falsa.

C Considere agora W_i, $i = 4, 5$. Observe que $[\Delta_{21}] \in W_i$, logo existem $a, b \in \mathbb{F}$ tais que $a\varphi\vartheta_1 + b\varphi\vartheta_2 = \Delta_{21}$. Assim teremos o seguinte sistema de equaçoes

$$a(x^2 + z^2) + b(xz + \lambda z^2) = 0 \tag{4.4a}$$

$$a(xy + zw) + b(yz + \lambda zw) = 0 \tag{4.4b}$$

$$a(xy + zw) + b(wx + \lambda zw) = 1 \tag{4.4c}$$

$$a(y^2 + w^2) + b(yw + \lambda w^2) = 0 \tag{4.4d}$$

Suponhamos inicialmente que $\lambda \neq 0$. Assim, resolvendo o sistema (4.4), obtemos que ou $(a, b) = (-\lambda^2, \lambda)$ e $\varphi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ ou então $(a, b) = (0, 1)$ e $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$. No entanto, vemos que

$$c\varphi_i\vartheta_1 + d\varphi_i\vartheta_2 \notin \{\Delta_{12}, \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{22}\}, \quad \text{para quaisquer } c, d \in \mathbb{F} \text{ e } i = 1, 2.$$

Suponhamos agora que $\lambda = 0$. Neste caso, resolvendo o sistema (4.4) obtemos $(a, b) = (0, 1)$ e $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ e novamente teremos que

$$c\varphi_i\vartheta_1 + d\varphi_i\vartheta_2 \notin \{\Delta_{12}, \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{22}\}, \quad \text{para quaisquer } c, d \in \mathbb{F}.$$

Assim sendo, o resultado segue.

- W_3^λ é disjunta de W_i; $i = 4, 5, 6$.

Seja $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ tal que $\varphi W_3^\lambda = W_i$. Observe que $[\Delta_{21}] \in W_i$ para $i = 4, 5, 6$, logo existem $a, b \in \mathbb{F}$ tais que

$$a\varphi\vartheta_1 + b\varphi\vartheta_2 = \Delta_{21}.$$

Com isso, teremos o seguinte sistema de equações

$$ax^2 + b(1 + \lambda)xz = 0 \tag{4.5a}$$

$$axy + b(wx + \lambda yz) = 0 \tag{4.5b}$$

$$axy + b(yz + \lambda wx) = 1 \tag{4.5c}$$

$$ay^2 + b(1 + \lambda)wy = 0 \tag{4.5d}$$

As igualdades (4.5a) e (4.5d) garantem que ou $x = 0$ ou $y = 0$. Note que não podemos ter $b = 0$, pois isso tornaria a igualdade (4.5c) falsa. Assim, se $y = 0$, pela igualdade (4.5b), temos $bwx = 0$, então $wx = 0$, contradizendo o fato de φ ser um automorfismo.

Por outro lado, se $x = 0$, então, da igualdade (4.5b), temos $b\lambda zy = 0$. Desse modo, se $\lambda \neq 0$, então $zy = 0$, contradizendo o fato de φ ser um automorfismo. Caso $\lambda = 0$, relembre que $x = 0$, ou seja, $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & w \end{pmatrix}$, com isso

$$c\varphi\vartheta_1 + d\varphi\vartheta_2 \notin \{\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{22}\} \text{ para quaisquer } c, d \in \mathbb{F}.$$

Portanto $\varphi W_3^\lambda \neq W_i$ para qualquer que seja $\varphi \in Aut(A_{2,1})$.

- W_4 é disjunta de W_i; $i = 5, 6$.

  Suponha que exista $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ tal que $\varphi W_4 = \langle\, xz[\Delta_{11}] + wx[\Delta_{12}] + yz[\Delta_{21}] + yw[\Delta_{22}], xz[\Delta_{11}] + zy[\Delta_{12}] + wx[\Delta_{21}] + wy[\Delta_{22}]\rangle = W_i$. Assim, como $[\Delta_{21}] \in W_i$, segue que este deve ser combinação linear de $\varphi\vartheta_1$ e $\varphi\vartheta_2$, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{F}$ tais que
  $$a\varphi\vartheta_1 + b\varphi\vartheta_2 = [\Delta_{21}].$$
  Com isso, verificando o coeficiente de $[\Delta_{11}]$, temos $axz + bxz = 0 \Rightarrow b = -a$. Analisando o coeficiente de $[\Delta_{12}]$, vemos que $awx - ayz = 0 \Rightarrow wx - yz = 0$, substituindo os resultados obtidos no coeficiente de $[\Delta_{21}]$ obtemos a seguinte contradição $1 = a(yz - wx) = a \cdot 0 = 0$. Portanto, o resultado segue.

- W_5 é disjunta de W_6.

  Considere $\varphi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Aut(A_{2,1})$ tal que $\varphi W_6 =$
  $$\langle\, x^2[\Delta_{11}] + xy[\Delta_{12}] + xy[\Delta_{21}] + y^2[\Delta_{22}], xz[\Delta_{11}] + zy[\Delta_{12}] + wx[\Delta_{21}] + wy[\Delta_{22}]\rangle = W_5.$$
  Logo existem $a, b \in \mathbb{F}$; $a\varphi\vartheta_1 + b\varphi\vartheta_2 = [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}]$.

  Verificando o coeficiente de $[\Delta_{11}]$, concluímos que $x = 0$, desse modo, aplicando tal fato ao coeficiente de $[\Delta_{21}]$ segue que $ay + bw = 0$. Por fim, analisamos o coeficiente de $[\Delta_{22}]$ e obtemos a seguinte contradição $1 = y(ay + bw) = y \cdot 0 = 0$. Portanto, o resultado segue.

Desse modo, as correspondentes álgebras a tais órbitas podem ser descritas conforme a tabela 4.3.

Tabela 4.3: Extensões centrais de $A_{2,1}$ de dimensão 4 sem componente anuladora

$A_{4,7}$	$e_1 \cdot e_1 = e_3,\ e_2 \cdot e_2 = e_4$
$A_{4,8}^{\lambda}$	$e_1 \cdot e_1 = e_3,\ e_2 \cdot e_1 = e_4,\ e_2 \cdot e_2 = e_3 + \lambda e_4,\ \lambda \in \mathbb{F}$
$A_{4,9}^{\lambda}$	$e_1 \cdot e_1 = e_3,\ e_1 \cdot e_2 = e_4,\ e_2 \cdot e_1 = \lambda e_4,\ \lambda \in \mathbb{F}$
$A_{4,10}$	$e_1 \cdot e_2 = e_3,\ e_2 \cdot e_1 = e_4$
$A_{4,11}$	$e_1 \cdot e_1 = e_3,\ e_1 \cdot e_2 = e_3\ \ e_2 \cdot e_2 = e_3,\ e_2 \cdot e_1 = e_4$
$A_{4,12}$	$e_1 \cdot e_1 = e_3,\ e_2 \cdot e_1 = e_4$

Referências Bibliográficas

[1] Abdelwahab H., Calderón A. J., Kaygorodov I., *The algebraic and geometric classification of nilpotent binary Lie algebras*, International Journal of Algebra and Computation, **29** (2019), 6, 1113–1129.

[2] Anco S., On multi-graviton and multi-gravitino gauge theories, Classical and Quantum Gravity, 19, (2002), 24, 6445.

[3] Calderón, A., Ouaridi, A. F., Kaygorodov, I. *On the classification of bilinear maps with radical of a fixed codimension*, Linear and Multilinear Algebra, 2020, DOI:10.1080/03081087.2020.1849001.

[4] Calderón, A. J., Ouaridi, A. F., Kaygorodov, I., *The classification of n-dimensional anticommutative algebras with (n 3)-dimensional annihilator*, Communications in Algebra, **47** (2019), 1, 173–181.

[5] Camacho, L. M., Kaygorodov, I., Lopatkin, V., Salim, M. A., *The variety of dual mock-Lie algebras*, Communications in Mathematics, **28**, (2020), 2, 161–178.

[6] Casas J., Datuashvili T., Ladra M., Action theory of alternative algebras, Georgian Mathematical Journal, 26 (2019), 177–197.

[7] Cicalò, S., De Graaf, W. A., Schneider, C., *Six-dimensional nilpotent Lie algebras*, Linear Algebra and its Applications, **436** (2012), 1, 163–189.

[8] De Graaf, W. A., *Classification of nilpotent associative algebras of small dimension*, International Journal of Algebra and Computation, **28** (2018), 1, 133–161.

[9] De Graaf, W. A., *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*, Journal of Algebra, **309** (2007), 2, 640–653.

[10] Demir, I., *Classification of* 5-*Dimensional Complex Nilpotent Leibniz Algebras*, Representations of Lie algebras, quantum groups and related topics, 95–119, Contemp. Math., 713, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[11] Dummit, D. S., Foote, R. M., *Álgebra abstrata*, Terceira edição, John Wiley, Inc. (2004).

[12] Garcia, A., Lequain, Y., *Elementos de álgebra*, 6ª ed., IMPA (2018).

[13] Garc´ıa-Mart´ınez, X., Van der Linden, T., *A characterisation of Lie algebras amongst anti-commutative algebras*. Journal of Pure and Applied Algebra, **223** (2019), 11, 4857-4870.

[14] Gorshkov, I., Kaygorodov, I., Khrypchenko, M., *The algebraic classification of nilpotent Tortkara algebras*, **48** (2020), 8, 3608-3623.

[15] Hegazi, A. S., Abdelwahab, H., *Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras*, Linear Algebra and its Applications, **494** (2016), 165–218.

[16] Hegazi, A. S., Abdelwahab, H., *The classification of n-dimensional non-associative Jordan algebras with $(n-3)$-dimensional annihilator*, Communications in Algebra, **46** (2018), 2, 629–643.

[17] Hegazi, A. S., Abdelwahab, H., Calderon Martin, A. J., *Classification of nilpotent Malcev algebras of small dimensions over arbitrary fields of characteristic not 2*, Algebras and Representation Theory, **21** (2018), 19–45.

[18] Hegazi, A. S., Abdelwahab, H., Calderon Martin, A. J., *The classication of n-dimensional non-Lie Malcev algebras with $(n-4)$-dimensional annihilator*, Linear Algebra and its Applications, **515** (2016), 15, 32-56.

[19] Jacobson, N., *Lie Algebras*, Interscience, New York (1962).

[20] Karimjanov, I., Kaygorodov, I., Khudoyberdiyev, A., *The algebraic and geometric classification of nilpotent Novikov algebras*, Journal of Geometry and Physics, **143** (2019), 11–21.

[21] Kaygorodov, I., Paez-Guillán, P., Voronin, V., *The algebraic and geometric classification of nilpotent bicommutative algebras*, Algebras and Representation Theory, **23** (2020), 5, 2331–2347.

[22] Kaygorodov, I., Popov, Y., Pozhidaev, A., Volkov, Y., *Degenerations of Zinbiel and nilpotent Leibniz algebras*, arXiv:1611.06454v2 (2020).

[23] Martin, M. E., *Four dimensional Jordan algebras*, International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra, **20** (2013), 4, 303–321.

[24] Saha, R., Towers, D., *On certain classes of algebras in which centralizers are ideals*, arXiv:2004.12110 (2020).

[25] Okubo S., Kamiya N., *Jordan–Lie super algebra and Jordan–Lie triple system*. Journal of Algebra, **198** (1997), 2, 388–411.

[26] Skjelbred, T., Sund, T., *Sur la classification des algebres de Lie nilpotentes*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, **286** (1978), 5, A241–A242.

[27] Zhevlakov, K.A., Slin'ko, A.M., Shestakov, I.P., Shirshov, A.I., *Rings that are nearly associative*, Academic Press (1982).