Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Vetores e Transformações lineares no plano

Marcio Antonio do Vale

Vitória - Espírito Santo

Fevereiro de 2021

Vetores e Transformações lineares no plano

Marcio Antonio do Vale

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer.

Vitória - Espírito Santo
Fevereiro de 2021

Vetores e Transformações lineares no plano

Marcio Antonio do Vale

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de fevereiro de 2021.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer - Orientador
UFES

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva
UFES

Prof. Dra. Andréa Gomes Guimarães
UFF

Dedico, aos que me ensinaram os valores da vida, meus pais, meu tudo, Ângela Maria Marchi do Vale e Marcos Taddeu do Vale (in memoriam).

Dedico aos meus amores, Danieli Braide e Luísa do Vale por sempre me inspirar, com confiança e amor.

Agradecimentos

A Deus, por toda graça derramada em minha vida, possibilitando mais essa realização.
Aos meus pais, Ângela e Marcos (in memoriam), e meu irmão, Lucas, por me apoiar incondicionalmente, sempre disponíveis a me ajudar.
Às mulheres de minha vida, Danieli e Luísa, que sempre me inspiraram com muito amor e muita paciência.
A todos os professores do programa PROFMAT da Universidade Federal do Espírito Santo, especialmente ao meu Orientador.
Enfim, agradeço a todos, familiares e amigos pelos incentivos e palavras de apoio.

"Não diga que vitória está perdida, se é de batalhas que se vive a vida."
Raul Seixas

Resumo

Esta dissertação visa conceituar função de forma ampla, explorando melhor as funções injetoras, sobrejetoras, compostas e inversas. Em seguida, aborda-se o conceito de vetor geométrico e sua transição para forma algébrica, com enfoque para vetores no plano cartesiano, realizando operações com vetores no plano e a validade de suas propriedades. Destaca-se também matrizes, validando suas operações com algumas propriedades, e assim direciona-se para compreensão dos espaços vetoriais com suas operações. Por fim, conceitua-se transformações lineares e apresenta-se algumas transformações do plano, lineares ou não, como a rotação, a reflexão, o alongamento, o cisalhamento e a translação, todas com uma linguagem simples e acessível, repleto de exemplos ilustrados que evidenciam como se dá cada uma dessas transformações.
Palavras-chave: Vetor. Espaço vetorial. Transformação linear no plano.

Abstract

This dissertation aims to conceptualize mathematical functions in detail, exploring the injector, subjective, composite and inverse functions. Then, it approaches the concept of geometric vector and its transition to algebraic form, with focus on vectors on the Cartesian plane, performing operations with vectors on the plane and the validity for their properties. Matrices also were highlighted, validating their operations with some properties, and thus forward to the understanding of vector spaces with their operations. Finally, define linear transformations and some plane transformations are presented, linear or not, such as rotation, reflection, elongation, shear and translation, all with a simple and accessible language, full of illustrated examples that show how to determine each one of these transformations.
Keywords: Vector. Vector Space. Linear transformation in the plane.

Sumário

Introdução **1**

1 Funções **4**

1.1 Definição 4

1.1.1 Função composta 7

1.1.2 Função inversível 8

2 Vetores **10**

2.1 Vetores no plano 10

2.2 Reta orientada e segmento orientado 10

2.3 Características de um segmento orientado 11

2.3.1 Medida 11

2.3.2 Direção e sentido 11

2.4 Segmentos equipolentes 12

2.4.1 Propriedades da equipolência 12

2.5 Vetores no plano 12

2.6 Vetores no plano e sistema de coordenadas 14

2.6.1 Adição de vetores 15

2.6.2 Produto de um vetor por escalar 18

2.7 Vetores paralelos 20

2.8 Dependência linear no plano 21

3 Matrizes **23**

3.1 Matrizes 23

3.2 Nomenclatura de Matrizes 23

3.3 Operações com matrizes 25

3.3.1 Adição ou soma de matrizes 25

3.3.2 Multiplicação de uma matriz por escalar 27

3.3.3 Multiplicação de matrizes 28

4 Espaços Vetoriais e Transformações Lineares no Plano **33**

4.1 Espaços vetoriais 33

4.2 Subespaços vetoriais 36

4.3 Transformações lineares 37

4.4 Transformações lineares e matrizes 40

4.5 Transformações especiais do plano 41

4.5.1 Rotações 41

4.5.2 Reflexões 43

4.5.3 Alongamento paralelo ao eixo Oy 44

4.5.4 Cisalhamento paralelo ao eixo Ox 46

4.6 Translações 49

Considerações Finais **58**

Referências Bibliográficas **59**

Lista de Figuras

1.1 Máquina de números ímpares . . . 4
1.2 Função composta . . . 7

2.1 Reta orientada . . . 11
2.2 Segmento orientado . . . 11
2.3 Conjunto de figuras . . . 12
2.4 Segmentos A_iB_i que tem as mesmas características do AB . . . 13
2.5 Vetor $\overrightarrow{AB}$ transferido para origem do plano cartesiano . . . 14
2.6 Ponto (a,b) . . . 15
2.7 Vetor (a,b) . . . 15
2.8 Soma de vetores . . . 15
2.9 Soma de vetores paralelos . . . 16
2.10 Regra do paralelogramo . . . 16
2.11 Subtração de vetores . . . 17

4.1 Adição de vetores . . . 39
4.2 Retângulo ABCD . . . 42
4.3 Retângulo ABCD girado 120º . . . 43
4.4 Reflexão em torno do eixo Ox . . . 44
4.5 Alongamento de 2 unidade em relação ao eixo Oy . . . 46
4.6 Cisalhamento paralelo ao eixo Ox . . . 47
4.7 Cisalhamento paralelo ao eixo Oy . . . 47
4.8 Polígono da Letra F . . . 49
4.9 Polígono da Letra F itálica . . . 49
4.10 Translação de vetores . . . 51
4.11 Mapa do jogo toca do coelho . . . 52
4.12 Contração vertical . . . 53
4.13 coelho no ponto B . . . 54
4.14 Coelho em tamanho normal no ponto B . . . 54
4.15 Rotação . . . 55

4.16 coelho no ponto C 56
4.17 coelho no ponto C, rotacionado 45º 56
4.18 coelho no ponto D, onde está a comida 57

Introdução

O objetivo central deste trabalho de dissertação é abordar algumas transformações no plano, especialmente algumas transformações lineares especiais, utilizando uma linguagem bastante elementar, ilustrando com exemplos simples, de forma que seja acessível a um aluno do ensino médio, com algum conhecimento de funções e matrizes.

Para isto, sentimos a necessidade de usar a linguagem de vetores no plano, assunto este, normalmente ausente no ensino básico (ensinos fundamental II e médio) na área da Matemática, aparecendo apenas no ensino da Física que trata de vetores, sob o ponto de vista geométrico, de forma bem superficial.

O tratamento algébrico e formal do conceito de vetores (e mais geralmente de espaços vetoriais) é tradicionalmente feito numa disciplina introdutória de Álgebra Linear para aqueles cursos de nível superior que utilizam esta linguagem em outras disciplinas de Matemática. Em geral, o estudante sente grande dificuldade para absorver a linguagem. Uma das razões dessa dificuldade é o grau de abstração do conceito algébrico de vetor. A rigor, um vetor no plano ou no espaço é uma classe de equivalência determinada por uma relação de equivalência definida num conjunto de segmentos orientados. De fato, nas aplicações físicas no ensino médio, não se usa representantes para os vetores geométricos. Aparentemente não há uma "forma canônica" de se representar um vetor. No entanto há. Uma vez que se encontra uma forma canônica de se escolher um representante para a classe de equivalência as dificuldades abstratas desaparecem. Veja que este contexto de vetores é completamente análogo ao estudo de frações no ensino fundamental. A rigor, uma fração é uma classe de equivalência determinada por uma relação de equivalência definida num conjunto de pares de números inteiros. Colocado dessa forma, o estudo de frações é extremamente abstrato. No entanto, há uma forma canônica de se representar uma fração. Isto torna o entendimento de frações possível para o estudante do ensino fundamental.

Assim como é feito no estudo de frações no ensino fundamental, onde o conceito original é logo simplificado, acreditamos que no estudo de vetores possamos fazer o mesmo. Uma vez entendida a definição via classe de equivalência, podemos trabalhar com representantes e tornar o entendimento de vetores bem acessível. Isto vai permitir, por exemplo, o estudo de transformações no plano, que é nosso objetivo central aqui. O caminho pode se tornar natural e a compreensão da geometria dos movimentos pode se tornar motivante, tanto do ponto vista geométrico quanto algébrico, em processos úteis e aplicáveis.

Organizamos o nosso trabalho em quatro capítulos que tratam, de forma elementar funções, vetores no plano, matrizes e espaços vetoriais, respectivamente, além de um apêndice, que tem leitura complementar e opcional, contendo algumas demonstrações, omitidas no texto. A intenção de se colocar algumas demonstrações num apêndice foi tornar o texto leve e de leitura agradável. Esta organização foi pensada e inspirada no texto base "Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear"de João Bosco Pitombeira de Carvalho [3], que trata de transformações lineares, numa tentativa de fornecer uma linguagem simples e acessível a um aluno do Ensino Médio.

No primeiro capítulo, tratamos de funções de uma forma geral, isto é, não apenas as funções reais, como se estuda no ensino básico, mas a construção de relações entre conjuntos quaisquer. Motivamos e introduzimos então os conceitos de imagem inversa de um subconjunto por uma função, imagem direta de um subconjunto por uma função, função injetora, função sobrejetora, função inversível e composição de funções. Esta conceituação se torna interessante, pois amplia a visão de função para situações bem mais gerais, além do conjunto dos números reais.

No segundo capítulo, apresentamos tópicos sobre vetores no plano. Conceito, operações, propriedades e dependência linear. Aqui há uma diferenciação do que é apresentado no estudo de Física no Ensino Médio, tanto do ponto de vista geométrico quanto algébrico. Como já mencionamos acima, o estudo de vetores é ausente no ensino de Matemática do Ensino Médio, mesmo lá sendo estudados matrizes e geometria analítica. Portanto, este capítulo é fundamental para o nosso trabalho.

No terceiro capítulo, apresentamos as matrizes. De um ponto de vista prático, matrizes podem ser utilizadas para organizar informações. Por exemplo, apresentamos aqui também uma possibilidade de se representar pontos ou coleções de pontos do plano cartesiano, utilizando matrizes. Como podemos operar com matrizes, isto nos permite uma manipulação algébrica dessas informações. Do ponto de vista teórico, matrizes são essenciais no estudo de transformações lineares.

Apresentamos no quarto capítulo a noção de espaços vetoriais, partindo de exemplos que discutimos previamente. Esperamos com isto que, mesmo com a linguagem abstrata utilizada na definição de um espaço vetorial, o conceito possa ser de fácil compreensão. É necessário perceber a importância da teoria dos espaços vetoriais, pois permite uma unificação de linguagem das operações com os elementos de diversos conjuntos tais como, o conjunto dos números reais, das funções reais, das matrizes, dos vetores no plano ou em dimensões superiores. Apresentamos então algumas transformações lineares especiais no plano, a saber, rotações, reflexões, alongamentos e cisalhamentos.

1 Funções

O objetivo deste capítulo é explanar, de maneira sucinta, relações entre conjuntos, definidas como funções, de um ponto de vista mais abrangente de acordo com [3]. Para um maior aprofundamento podemos utilizar a referência [4].

1.1 Definição

Dados A e B conjuntos quaisquer não-vazios, uma função de A em B , que denotamos por $f : A \to B$, é uma correspondência que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $y \in B$. O elemento y é o resultado da aplicação de f em x, denominado **imagem** de x, que representamos por $f(x)$. Dizemos que A é o conjunto **domínio** da função e B é o **contradomínio** da função f. Vejamos as situações a seguir:

Exemplo 1.1.1. *Os números naturais ímpares podem ser obtidos a partir de uma função,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *onde* $x \mapsto 2 \cdot x + 1$.

De maneira informal podemos compreender função, como uma máquina que utiliza todos os elementos do domínio e realiza suas transformações, gerando suas imagens, veja a ilustração na figura 1.1.

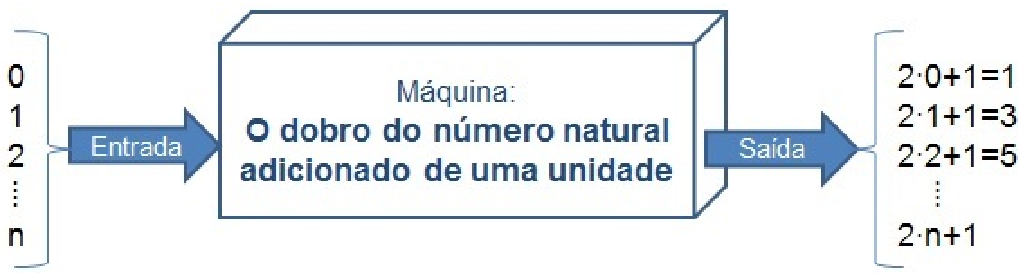


Figura 1.1: Máquina de números ímpares

Observe a tabela abaixo onde se lista os elementos do domínio e suas imagens, pela função dada.

Números naturais (Domínio)	Números naturais ímpares (Imagem)
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$
$\vdots$	$\vdots$
n	$2 \cdot n + 1$

Em qualquer momento podemos nos deparar com relações entre grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Esta é uma situação na qual precisamos da noção de função.

Exemplo 1.1.2. *Considere o conjunto $A = \{0, 1, 4, 9, 25\}$, onde definimos a relação g de tal forma que cada elemento $x \in A$ se relaciona com o elemento $y \in \mathbb{R}$, colocando x o quadrado de y.*

Note que $(-1)^2 = 1 = (+1)^2$, logo $g(1) = \pm 1$ o que não caracteriza uma função, pois existem elementos do domínio que relacionam com dois elementos.

Exemplo 1.1.3. *Em determinado posto de combustível de uma cidade A o preço da gasolina é R\$ $4,10$. Podemos perceber que a relação entre a quantidade de gasolina abastecida por determinado cliente está diretamente relacionada com o valor pago, que depende da lei $V(x) = 4,10x$, onde x é a quantidade de litros de combustível abastecido pelo cliente e $V(x)$ é o valor pago em reais por este cliente. Assim, para uma quantia de 100 reais, a quantidade de litros de combustível que o cliente pode abastecer é dado por $V(x) = 100$.*

$$4,10x = 100,\ ou\ seja\ 41x = 1000,\ o\ que\ nos\ fornece\ x = \frac{1000}{41}$$

Fazendo a aproximação do resultado temos que o cliente pode ser abastecido com $24,39$ litros.

Este exemplo, nos leva a definição de imagem inversa, vejamos a seguir.

Definição 1.1.1. *Dada uma função $f : A \to B$ e um elemento $y \in B$, a **imagem inversa** de y pela função f, é o subconjunto de A constituído pelos elementos x tais que $f(x) = y$ e a denotamos por $f^{-1}(y)$.*

De uma forma geral, a partir de um subconjunto M de B, a imagem inversa de M pela função f, $f^{-1}(M)$, é o subconjunto de A que contém os elementos x tais que $f(x)$ é elemento de M.

Definição 1.1.2. *Considerando um conjunto A qualquer e uma $I_A : A \to A$ definida por $I_A(x) = x$, para qualquer elemento x de A, é dita função identidade.*

Exemplo 1.1.4. *Considere a função real* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, onde* $f(x) = x$*, é denominada função identidade dos reais.*

Exemplo 1.1.5. *Dado o conjunto* H *de toda humanidade, podemos definir a função* $\mathcal{M} : H \to H$ *que relaciona a cada ser humano a sua mãe.*

Note que no exemplo anterior nem todo o contradomínio H foi utilizado, pois existem mulheres que não são mães, assim como os homens, obviamente, também não podem ser. Podemos perceber que para algumas funções todo o contradomínio é utilizado e para outras não, isso nos motiva a definir certo tipo de funções.

Definição 1.1.3. *Considere* $f : A \to B$*. Dizemos que* f *é* ***sobrejetora*** *se, dado qualquer* $y \in B$*, existe* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$*.*

Assim, convém distinguir em uma função os elementos do contradomínio que são relacionados com o domínio.

Exemplo 1.1.6. *Considere a função real* f*, definida por* $y = ax+b$*, com* $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $b \in \mathbb{R}$*. Qualquer que seja* y *do contradomínio existe um* x *tal que* $x = \frac{y-b}{a}$*. Portanto a função* f *é dita sobrejetora.*

Definição 1.1.4. *Dados* $f : A \to B$ *e um subconjunto* N *de* A*, o conjunto imagem de* N *pela função* f *é o subconjunto* $f(N)$ *de* B *formado pelas imagens de elementos* N*. Quando* $N = A$*, dizemos que* $f(N) = f(A) \subset B$ *é imagem de* f*.*

Exemplo 1.1.7. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = x^2 - 2$*, para todo número* $x \in \mathbb{R}$*.*

Note que esta função não é sobrejetora, pois existem valores y do contradomínio que não são imagens de nenhum elemento do domínio, veja:

$$y = x^2 - 2 \ \Leftrightarrow \ y + 2 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+2} \ ou \ x = -\sqrt{y+2}$$

Assim para que x exista é necessário que $y + 2 \geq 0$, isto é, $y \geq -2$. Podemos dizer que o conjunto imagem da função f é $Im_f = [-2, \infty[$. Assim podemos definimos uma nova função $g : \mathbb{R} \to [-2, \infty[$, dada por $g(x) = x^2 - 2$ que é uma função sobrejetor.
Observe também que neste exemplo, para alguns y da imagem, a função possui dois elementos do domínio que se relacionam com y. Por exemplo, para $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, $f(x_1) = f(-1) = -1$ e $f(x_2) = f(1) = -1$, assim $f(x_1) = f(x_2)$. O exemplo acima motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.5. *Uma função* $f : A \to B$ *é* ***injetora*** *se, para todos* $x_1, x_2 \in A$ *distintos* $(x_1 \neq x_2)$*, então suas imagens também são distintas, isto é,* $f(x_1) \neq f(x_2)$*. Ou seja, para que* f *seja injetora é necessário que sempre que* $x_1, x_2 \in A$*, com* $f(x_1) = f(x_2)$*, então* $x_1 = x_2$*.*

Exemplo 1.1.8. *A função real definida no conjunto dos números reais, $f(x) = x^2$, não é injetora nem sobrejetora, pois $f(-1) = f(1)$. Portanto ela não é injetora. Além disso $f(x) \geq 0$, para todo x real, o que mostra, que ela não é sobrejetora.*

A segunda formulação da definição de função injetora é conveniente, pois lida com igualdades, no entanto para entendimento preciso de função injetora a primeira formulação é conveniente.
Nem todas as funções são injetoras e/ou sobrejetoras. A partir dessas observações, chegamos ao conceito de função bijetora.

Definição 1.1.6. *Uma função $f : A \to B$ é bijetora se ela é injetora e sobrejetora.*

Exemplo 1.1.9. *Dada a função real g, com $g(x) = x^3$. Note que ela é injetora, pois se $g(x) = g(y)$, isto é $x^3 = y^3$, então $x = y$. Ela também é sobrejetora, pois qualquer y real é raiz cúbica de algum x, a saber $x = \sqrt[3]{y}$. Por tanto g é bijetora.*

1.1.1 Função composta

Definição 1.1.7. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. A função composta de f com g, que representamos por $g \circ f$, é a função de domínio A e contradomínio C, tal que para todo $x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

A representação gráfica abaixo, nos ajuda a compreender melhor esta definição.

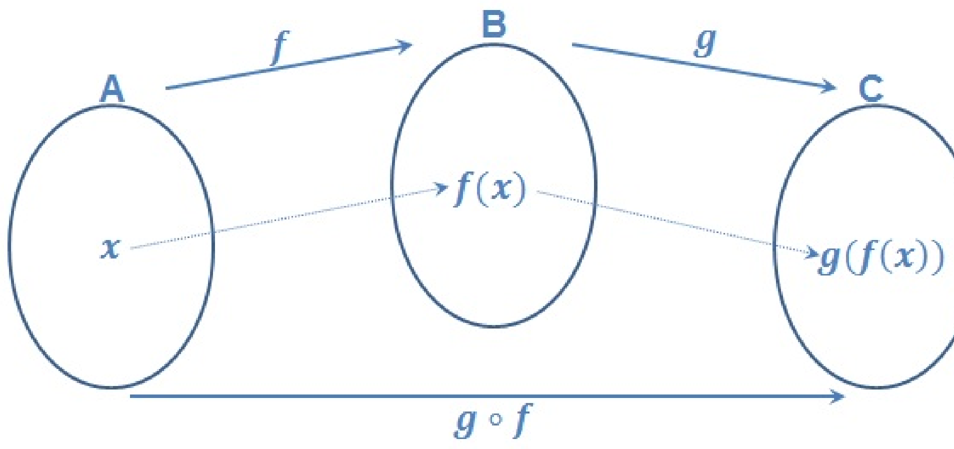


Figura 1.2: Função composta

Observe que o exemplo abaixo mostra que em geral $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Exemplo 1.1.10. *Sejam as funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2 - x$. Podemos compor f com g e verificar a diferença da composição g com f.*

Veja que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2-x)^2 - 1 = 4 - 4x + x^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$. Por outro lado $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 - (x^2 - 1) = -x^2 + 3$. Assim verificamos que $f \circ g \neq g \circ f$.

1.1.2 Função inversível

Definição 1.1.8. *Uma função $f : A \to B$ é **inversível** se existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$ onde I_A e I_B são funções identidades de A e B, respectivamente. Neste contexto dizemos que, g é uma inversa para f e, reciprocamente a f é uma inversa para g.*

É possível mostrar que se f é inversível, existe uma única função g que satisfaz a definição acima, portanto a função inversa é única [4].

Exemplo 1.1.11. *Considere as funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 1$ e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Observe que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x + 1 - 1 = x$, além de verificar que $g(f(x)) = g(x^3 - 1) = \sqrt[3]{(x^3-1)+1} = \sqrt[3]{x^3} = x$. Portanto, para todos os $x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$, o que caracteriza, pela discussão acima que, f e g são funções inversas uma da outra.*

Teorema 1.1.1. *Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, existe uma função g de B em A, tal que $g \circ f = I_A$, isto é, ela admite inversa à esquerda.*

DEMONSTRAÇÃO
Suponha que $f : A \to B$ seja uma função injetora. Portanto cada $y \in f(A)$ determina um único valor $x \in A$, tal que $y = f(x)$.
Defina $g : B \to A$, como:

$$g(y) = \begin{cases} x, \text{se } y = f(x) \\ \text{qualquer elemento de } B, \text{se } y \notin f(A) \end{cases}$$

Note que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, para todo $x \in A$, portanto $g \circ f = I_A$.
Reciprocamente, suponha que exista $g : B \to A$, tal que $g \circ f = I_A$.
Sejam $x_1, x_2 \in A$, com $f(x_1) = f(x_2)$. Como g é uma função de B em A e $f(x_1), f(x_2) \in B$, concluímos que

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ se, e somente se,}$$

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2), \text{ o que equivale}$$

$$I_A(x_1) = I_A(x_2), \text{ ou seja}$$

$$x_1 = x_2$$

Portanto, $f : A \to B$ é uma função injetora.

Teorema 1.1.2. *Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se existe uma função g de B em A, tal que $f \circ g = I_B$, isto é, ela admite inversa à direita.*

DEMONSTRAÇÃO

Suponha que $f : A \to B$ seja uma função sobrejetora.
Assim para todo $y \in B$ é possível escolher pelo menos um $x \in A$, tal que $y = f(x)$.
Para cada $y \in B$, escolha um $x \in A$, tal que $f(x) = y$, com $g(y) = x$. Definimos então uma função $g : B \to A$, tal que

$$f(x) = y, \text{ logo } f(g(y)) = y, \text{ segue que } (f \circ g)(y) = y$$

Portanto $f \circ g = I_B$
Agora, considere $g : B \to A$, tal que $f \circ g = I_B$. Logo, para todo $y \in B$, temos um $x = g(y) \in A$, então $f(x) = f(g(y)) = y$, isto é, f é sobrejetora.

Corolário 1.1.1. *Uma função $f : A \to B$ é bijetora, se somente se, f é inversível.*

DEMONSTRAÇÃO

Segue dos Teoremas 1.1.1 e 1.1.2, que uma função f possui inversa se, e somente se, f é injetora e sobrejetora, isto é, f é uma função bijetora.

Exemplo 1.1.12. *Determine o número de diagonais de um polígono convexo a partir da construção de uma função.*

Note que a partir de cada vértice de um polígono de $n \geq 3$ lados, $A_1A_2...A_n$, tem-se $n - 3$ diagonais, visto que uma diagonal é um segmento de reta, ligando vértices não adjacentes. Ao contabilizarmos as diagonais de cada um dos vértices, teremos duplicidade, visto que, por exemplo as diagonais A_1A_3 e A_3A_1 são as mesmas. Desta forma chegamos a relação $D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.
Observe que o conceito de função está presente em diversas áreas, por exemplo álgebra, geometria, análise, probabilidade, etc.

2 Vetores

O objetivo deste capítulo é fazer uma introdução ao estudo de vetores, para trabalhar no plano. Conforme [3] os vetores são um instrumento útil no estudo das transformações lineares planas. Para um maior conhecimento podemos consultar [2], [7] e [9].

2.1 Vetores no plano

Dentre as grandezas que podemos mensurar, existem aquelas que são perfeitamente determinadas a partir apenas de um valor numérico e sua unidade de medida, como por exemplo, distância, temperatura, volume, área, densidade, massa, comprimento. Logo, quando dizemos que o volume de uma caixa d'água é 20 dm^3, que a idade de seu filho é 4 anos e 6 meses ou que a temperatura do ambiente é $38C$, essas grandezas ficam completamente determinadas. Essas são denominadas grandezas escalares.
Porém, existem outras grandezas que não ficam determinadas se dissermos apenas um valor numérico e uma unidade de medida. Imagine um automóvel que se desloca por uma certa rodovia, a uma velocidade de $80km/h$. Perceba que apenas o valor numérico e sua unidade não são suficientes, para se obter todas as informações do conceito de velocidade. Pois precisamos saber a direção e sentido da mesma.
Quando tratamos de grandezas tais como deslocamento, velocidade, aceleração, força, peso e outras, precisamos de mais informações para estarem bem definidas. Essas informações estão relacionadas com *direção*, *sentido* e *intensidade*, das quais falaremos mais adiante.

2.2 Reta orientada e segmento orientado

Numa reta r podemos fixar um sentido *positivo* (+), representando por uma seta, o que caracteriza uma reta orientada. O sentido oposto é *negativo* $(-)$ (veja na figura abaixo).

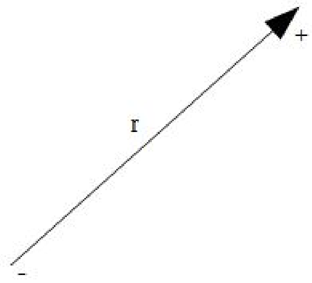


Figura 2.1: Reta orientada

Dada uma reta r, considere um par de pontos pertencentes a ela, A e B. O segmento orientado que tem como origem o ponto A e como extremidade o ponto B, será representado por AB e é o conjunto de pontos de r entre A e B, incluindo A e B. Geometricamente indicamos a extremidade por uma seta.

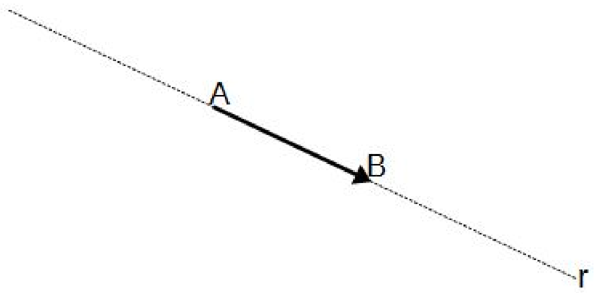


Figura 2.2: Segmento orientado

Dado um segmento orientado AB, o segmento BA é dito *oposto* ao segmento AB. Quando o início e a extremidade de um segmento coincidem, dizemos que ele é um segmento nulo.

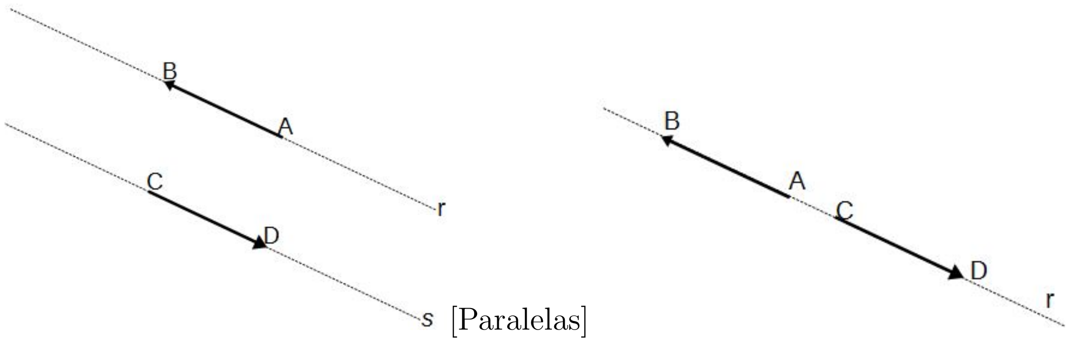
2.3 Características de um segmento orientado

2.3.1 Medida

Fixe uma unidade de medida. A cada segmento podemos associar um único número real, não negativo, que é a sua medida (em relação à unidade de medida fixada). Esta medida é chamada *intensidade*. Note que para o número real zero esse segmento orientado seria um ponto e o denominamos segmento nulo.

2.3.2 Direção e sentido

Dados dois segmentos orientados, não nulos, AB e CD dizemos que eles têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas (figura 2.3.1) ou coincidentes (figura 2.3.2).



[Paralelas] [coincidentes]

Figura 2.3: Conjunto de figuras

Caso os dois segmentos orientados, não nulos, AB e CD tenham a mesma direção, podemos comparar seus sentidos. Se eles estão sobre uma mesma reta, fixe um sentido para a reta e diga que eles têm o mesmo sentido se ambos têm o sentido da reta ou eles têm sentido oposto ao da reta orientada. Caso contrário, os segmentos têm sentidos opostos. Se as retas suportes são paralelas, eles têm o mesmo sentido se o quadrilátero $ACDB$, nesta ordem , for convexo.

2.4 Segmentos equipolentes

Definição 2.4.1. *Dois segmentos orientados AB e CD são ditos segmento equipolentes quando têm a mesma direção, sentido e intensidade.*

Observe que dois segmentos nulos são sempre equipolentes e a equipolência dos segmentos AB e CD é representada por $AB \sim CD$.

2.4.1 Propriedades da equipolência

i. $AB \sim AB$, propriedade reflexiva.

ii. Se $AB \sim CD$ e $CD \sim AB$, propriedade simétrica.

iii. Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, então $AB \sim EF$, propriedade transitiva.

iv. Dado um segmento orientado AB e um ponto C, existe um único D tal que $AB \sim CD$, propriedade da unicidade.

2.5 Vetores no plano

Dado um plano, temos uma infinidade de segmentos orientados. Seja AB um segmento orientado fixo, com A diferente de B e considere o conjunto $\mathcal{S}_{AB}$ de todos os segmentos orientados deste plano, com mesma direção, sentido e intensidade do segmento orientado AB. No caso em que A é igual a B, $\mathcal{S}_{AB}$ é um conjunto de pontos, a saber o próprio plano. Cada um desses pontos, visto como segmento tem intensidade nula (figura 2.4). Seja AB um segmento orientado fixo.

$$\mathcal{S}_{AB} = \{A_iB_i;\ A_iB_i \sim AB\}$$

Definimos o vetor $\overrightarrow{AB}$ com msendo qualquer elemento desse conjunto.

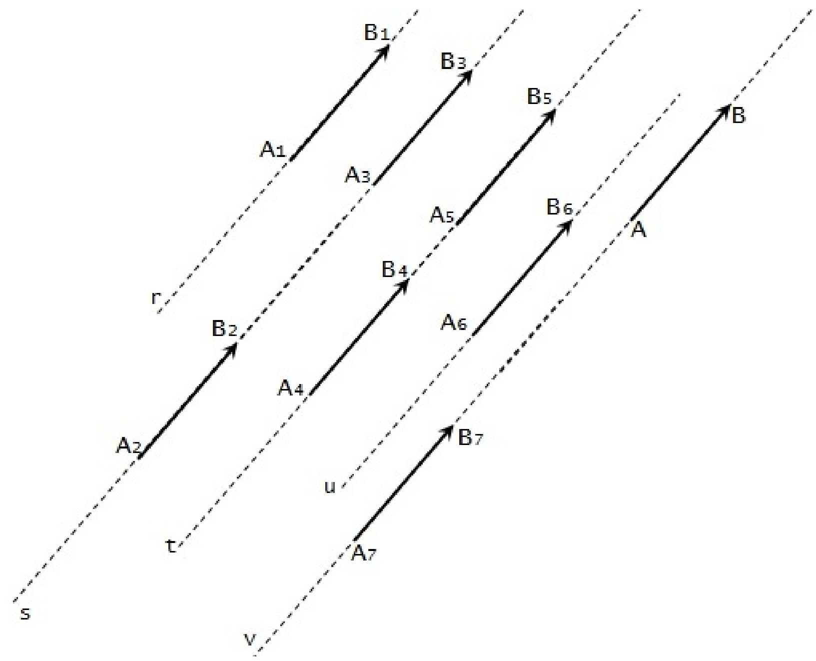


Figura 2.4: Segmentos A_iB_i que tem as mesmas características do AB

Vamos denotar este vetor por $\overrightarrow{AB}$. A medida ou módulo desse vetor, que é a intensidade do segmento orientado AB, será denotada por $|\overrightarrow{AB}|$.
Observe que:

i) Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, AB, $CD \in \mathcal{S}_{AB}$.

ii) Todo vetor é dito unitário se, seu módulo é 1, isto é, $|\overrightarrow{AB}| = 1$.

iii) Vetores são colineares se possuírem a mesma direção.

2.6 Vetores no plano e sistema de coordenadas

Dado um segmento orientado AB, onde $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, usando a regra do paralelogramo podemos obter um único vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$, que parte da origem do sistema de coordenadas, $O = (0, 0)$ e tem extremidade em $P = (x_p, y_p)$, tal que OP está em $\mathcal{S}_{\mathcal{AB}}$, isto é, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. como na figura 2.5.
Veja que:

$$x_p = x_B - x_A \text{ e } y_p = y_B - y_A, \text{ então}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

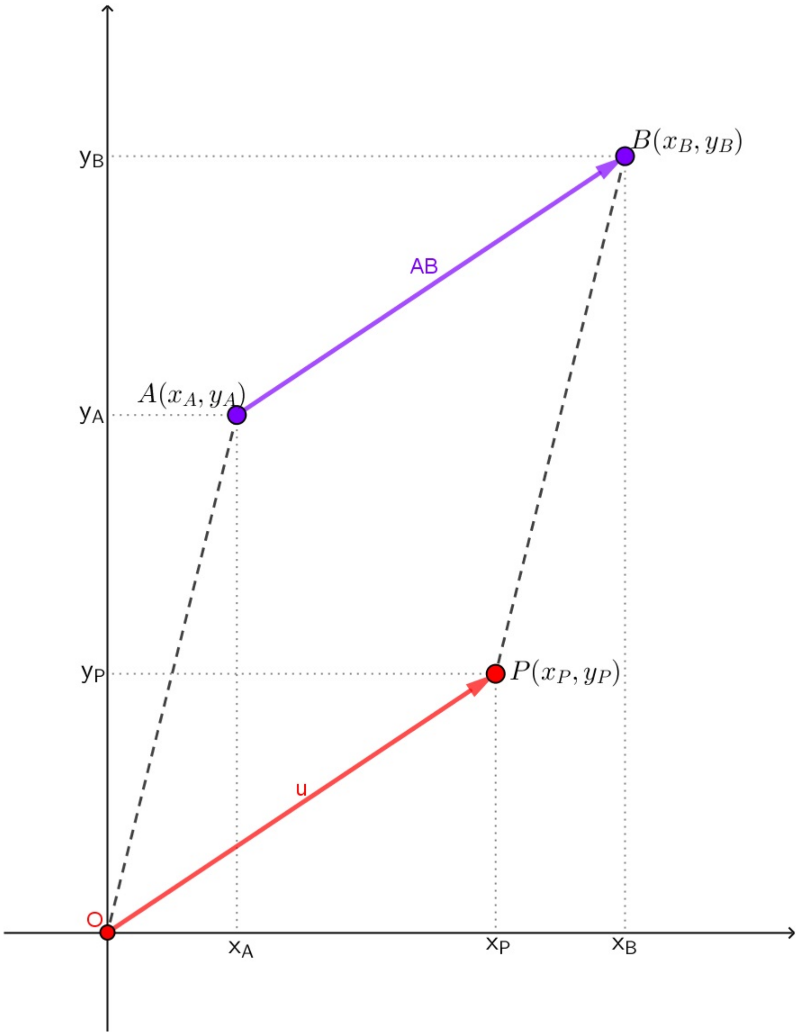


Figura 2.5: Vetor $\overrightarrow{AB}$ transferido para origem do plano cartesiano

Desta forma, fixando um sistema de coordenadas cartesianas xOy, com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ o vetor $\overrightarrow{AB}$ deste plano, tem seu representante **canônico** $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$, que tem a origem do vetor como a origem do sistema cartesiano e extremidade do vetor como sendo o ponto $P = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Note também que ao tratarmos do par ordenado (a, b), teremos uma visão além do ponto localizado no plano cartesiano ortogonal xOy, bem como na figura 2.6, um vetor como na figura 2.7.

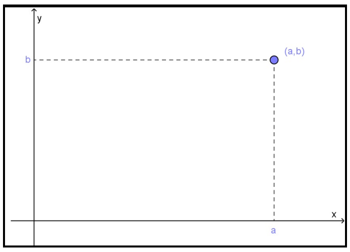


Figura 2.6: Ponto (a,b)

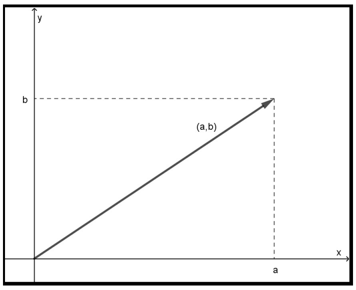


Figura 2.7: Vetor (a,b)

2.6.1 Adição de vetores

Dados quaisquer dois vetores do plano $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, não paralelos, podemos escolher segmentos orientados como sendo seus representantes, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. E a adição de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$, escrito como $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, pode ser vista na figura abaixo.

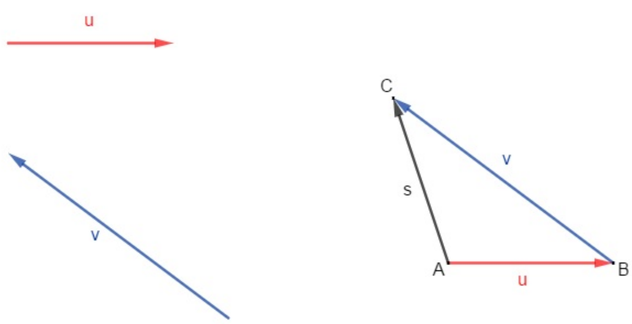


Figura 2.8: Soma de vetores

Um representante do vetor soma $\overrightarrow{s}$ é $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
No caso em que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos, seus representantes podem ser escolhidos sobre uma mesma reta, como é exposto na figura abaixo.

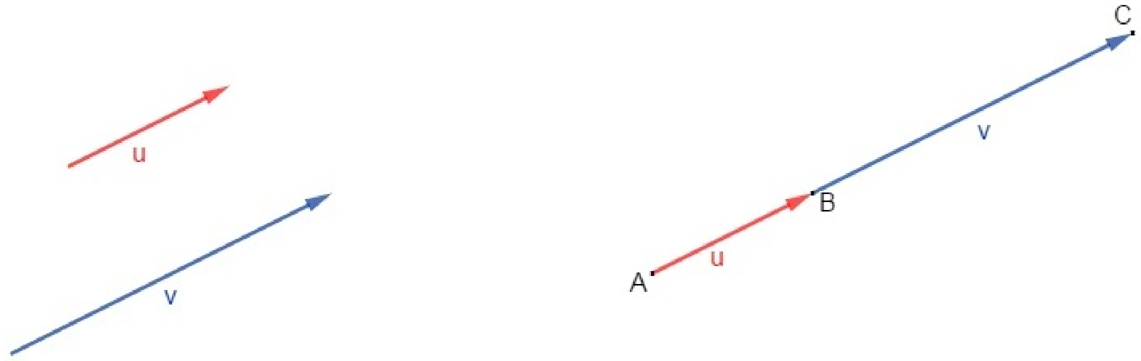


Figura 2.9: Soma de vetores paralelos

Novamente $\overrightarrow{AC}$ é o resultado da adição $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

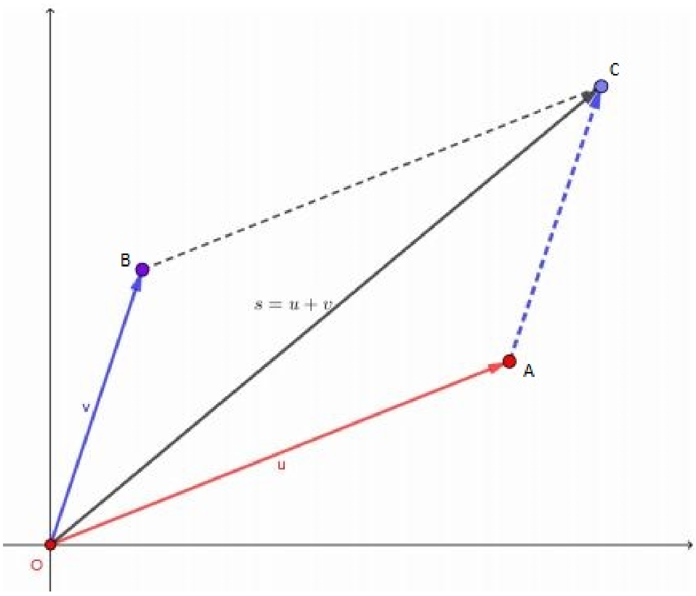
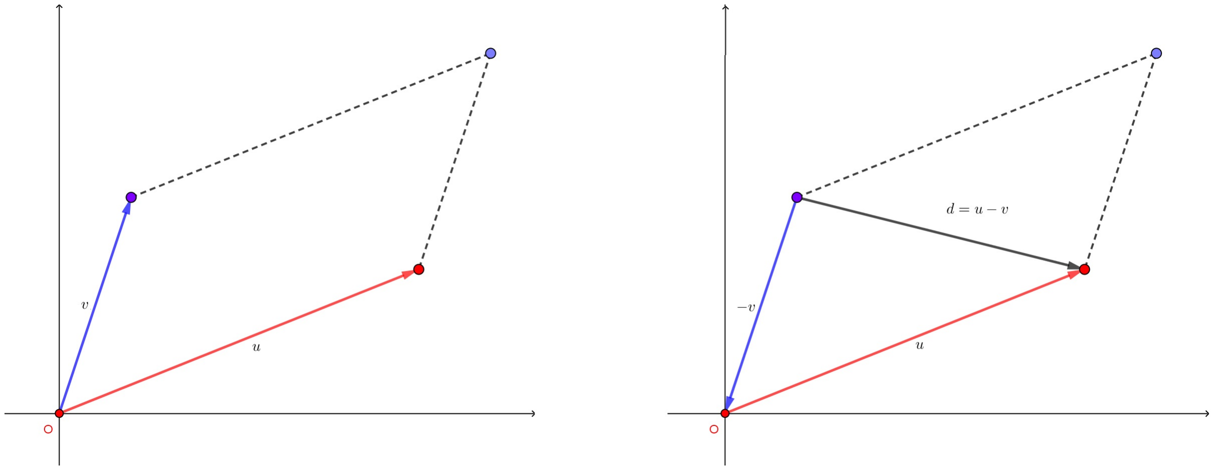


Figura 2.10: Regra do paralelogramo

É preciso verificar que a adição independe da escolha de seus representantes. Isto pode ser feito usando a representação única dos vetores na origem, como segue.
Dados $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$, se $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{C'D'}$ são outros representantes para $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente. Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ são equipolentes ao mesmo segmento $\overrightarrow{OP}$, com origem na origem no sistema de coordenadas e de maneira análoga $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{C'D'}$ são equipolentes a um segmento $\overrightarrow{OR}$, logo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'}$.

No caso dos vetores serem paralelos, não há a necessidade de usar a regra do

paralelogramo, porém, é necessário usar os seus representantes com origem na origem do sistema de coordenadas.
Podemos definir a operação de subtração a partir da operação anterior, como a adição do oposto, isto é $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$, logo podemos visualizar graficamente esta operação nas figuras abaixo.



[h]

Figura 2.11: Subtração de vetores

Propriedades da adição

Para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, temos:

i. Associativa: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

ii. Comutativa: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

iii. Representado por $\overrightarrow{0}$ é o vetor nulo, para todo $\overrightarrow{v}$, se tem: $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$.

iv. Qualquer que seja o vetor $\overrightarrow{v}$, existe um só vetor $\overrightarrow{w}$, chamado de vetor oposto, tal que: $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Denotamos este vetor $\overrightarrow{w}$ por $-\overrightarrow{v}$.

DEMONSTRAÇÕES

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1)$, $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2)$ e $\overrightarrow{w} = (a_3, b_3)$, com entradas reais. Veja que:

i. Associativa

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3)$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3)$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3)$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3)$$

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=(a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3))$$
$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$$

ii. Comutativa

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a_1,b_1)+(a_2,b_2)$$
$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$
$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a_2+a_1,b_2+b_1)$$
$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$$
$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$$

iii. Demonstrado forma mais ampla na proposição 4.1.1.

iv. Demonstrado de forma mais ampla na proposição 4.1.2.
Sendo esse vetor único podemos denotar, $\overrightarrow{w}=-\overrightarrow{v}$. Assim, $-\overrightarrow{v}$ é o único vetor tal que $\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{0}$.
Além disso, o oposto de $\overrightarrow{v}$, a saber $-\overrightarrow{v}$, é obtido multiplicando o escalar (-1) por $\overrightarrow{v}$, pois $\overrightarrow{v}+(-1)\cdot\overrightarrow{v}=1\cdot\overrightarrow{v}+(-1)\cdot\overrightarrow{v}=[1+(-1)]\cdot\overrightarrow{v}=0\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, então $(-1)\cdot\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}$

2.6.2 Produto de um vetor por escalar

Considerando um número real k e um vetor $\overrightarrow{u}$, podemos definir a operação multiplicação por escalar $k\cdot\overrightarrow{u}$ da seguinte forma. Se $k=0$ ou $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, colocamos $k\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$. Caso contrário, $k\cdot\overrightarrow{u}$ é paralelo a $\overrightarrow{u}$ e terá o mesmo sentido de $\overrightarrow{u}$ se $k>0$, sentido oposto se $k<0$ e terá módulo $|k\cdot\overrightarrow{u}|=|k|\cdot|\overrightarrow{u}|$.

Propriedades do produto de um vetor por um escalar

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

i. $a\cdot(b\cdot\overrightarrow{u})=(a\cdot b)\cdot\overrightarrow{u}$

ii. $(a+b)\cdot\overrightarrow{u}=a\cdot\overrightarrow{u}+b\cdot\overrightarrow{u}$

iii. $a\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=a\cdot\overrightarrow{u}+a\cdot\overrightarrow{v}$

iv. $1\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$

DEMONSTRAÇÕES
Sejam $a,b\in\mathbf{R}$ e os vetores $\overrightarrow{u}=(x_1,y_1)$ e $\overrightarrow{v}=(x_2,y_2)$, do plano xOy.

i. $a \cdot (b \cdot \overrightarrow{u}) = (a \cdot b) \cdot \overrightarrow{u}$

$$a(b\overrightarrow{u}) = a(b(x_1, y_1))$$

$$a(b\overrightarrow{u}) = a(bx_1, by_1)$$

$$a(b\overrightarrow{u}) = (abx_1, aby_1)$$

$$a(b\overrightarrow{u}) = (ab)(x_1, y_1)$$

$$a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$$

ii. $(a + b) \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{u}$

$$(a + b)\overrightarrow{u} = (a + b)(x_1, y_1)$$

$$(a + b)\overrightarrow{u} = ((a + b)x_1, (a + b)y_1)$$

$$(a + b)\overrightarrow{u} = (ax_1 + bx_1, ay_1 + by_1)$$

$$(a + b)\overrightarrow{u} = (ax_1, ay_1) + (bx_1, by_1)$$

$$(a + b)\overrightarrow{u} = a(x_1, y_1) + b(x_1, y_1)$$

$$(a + b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$$

iii. $a \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a \cdot \overrightarrow{u} + a \cdot \overrightarrow{v}$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (a(x_1 + x_2), a(y_1 + y_2))$$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (ax_1 + ax_2, ay_1 + ay_2)$$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (ax_1, ay_1) + (ax_2, ay_2)$$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2)$$

$$a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$$

iv. $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

$$1 \cdot \overrightarrow{u} = 1 \cdot (x_1, y_1)$$

$$1 \cdot \overrightarrow{u} = (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1)$$

$$1 \cdot \overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$$

$$1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$

2.7 Vetores paralelos

Definição 2.7.1. *Dois vetores têm a mesma direção, se os segmentos orientados que os representam, tem a mesma direção. Dois vetores são paralelos se possuem a mesma direção.*

Proposição 2.7.1. *Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, não nulos, são paralelos se, e somente se, existe um número real k, tal que $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$.*

DEMONSTRAÇÃO

Considere os vetores do plano, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, paralelos. Então podemos encontrar seus representantes canônicos, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivos, isto é, vetores que partem da origem e estão, sobre a mesma reta suporte, como vimos na figura **??**.

Portanto existe um $k \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$.

É fácil verificar a recíproca, de forma análoga.

Partindo desse resultado, note que tomando $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2)$, com as suas componentes diferentes de zero, segue que:

$$(a_1, b_1) = k \cdot (a_2, b_2)$$
$$(a_1, b_1) = (k \cdot a_2, k \cdot b_2)$$
$$a_1 = k \cdot a_2 \text{ } e \text{ } b_1 = k \cdot b_2$$
$$\frac{a_1}{a_2} = k \text{ } e \text{ } \frac{b_1}{b_2} = k$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$$

Assim os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ com componentes diferentes de zero , são paralelos se, e somente se, $a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$, então $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 = 0$.

Dessa forma, mesmo que essas componentes não sejam nulas, podemos caracterizar o fato de dois vetores serem paralelos, a saber se $a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$.

Proposição 2.7.2. *Sejam os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não paralelos (não nulos). Todo vetor do plano pode ser escrito de uma única maneira como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Isto é, dado um vetor $\overrightarrow{w}$, existem α, $\beta \in \mathbb{R}$, determinados de forma única, tais que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.*

DEMONSTRAÇÃO

Tome $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2)$. A partir de um vetor $\overrightarrow{w} = (m, n)$, determinaremos α, $\beta \in \mathbb{R}$, tais que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

Então utilizando suas coordenadas, temos:

$$(m, n) = \alpha(a_1, b_1) + \beta(a_2, b_2)$$

$$(m, n) = (\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2)$$

Com isso, o par (α,β) é solução do sistema linear, abaixo:

$$\begin{cases} m = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ n = \alpha b_1 + \beta b_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Resolvendo o sistema, obtemos a única solução $(\alpha, \beta) = (\frac{mb_2 - na_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{na_1 - mb_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1})$, com $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, o que é garantido uma vez que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são paralelos.

Definição 2.7.2. *Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é gerado por $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$, se existem α, $\beta \in \mathbb{R}$, tais que $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{v}_1 + \beta \overrightarrow{v}_2$. Neste caso dizemos também que $\overrightarrow{u}$ é uma combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$. Os valores α e β são chamados de coeficientes da combinação linear.*

Exemplo 2.7.1. *Verifique que qualquer vetor do plano pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u} = (-2, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (3, -2)$. Em seguida escreva o vetor $\overrightarrow{w} = (3, 3)$ como uma combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$*

SOLUÇÃO: Observe que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são paralelos, pois $\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-2}$. Assim, qualquer vetor do plano pode ser escrito de forma única como uma combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Agora, vamos determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de forma que:

$$\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}$$

$$(3, 3) = \alpha(-2, 1) + \beta(3, -2)$$

$$(3, 3) = (-2\alpha + 3\beta,\ \alpha - 2\beta)$$

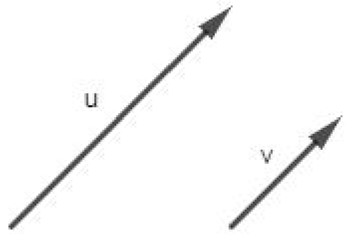
$$\begin{cases} 3 = -2\alpha + 3\beta \\ 3 = \alpha - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -15 \\ \beta = -9 \end{cases}$$

2.8 Dependência linear no plano

Definição 2.8.1. *Dois vetores, não nulos, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **Linearmente Dependente** (abreviadamente LD) se eles são paralelos. Caso contrário, são **Linearmente Independentes** (abreviadamente LI). Se um dos vetores for o vetor nulo, eles são linearmente dependentes.*

Em outras palavras, dados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos, dizemos que o par ordenado $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é **LD**, se existir um $k \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$, caso contrário dizemos que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é **LI**.



$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ LD

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ LI

Exemplo 2.8.1. *Verifique se o par de vetores* $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{2},\ -3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (-\frac{4}{3},\ 8)$ *é linearmente independentes ou linearmente dependentes.*
Para isso temos que verificar se $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são paralelos.*

$$\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{4}) = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$$

Portanto $\overrightarrow{u}$ *é paralelo a* $\overrightarrow{v}$*, logo são classificados como* ***Linearmente Dependentes****.*

Exemplo 2.8.2. *Encontre os números reais* a *e* b *tais que* $a \cdot \overrightarrow{v_1} + b \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v}$*, sendo* $\overrightarrow{v} = (2, 10)$*,* $\overrightarrow{v_1} = (5, 3)$ *e* $\overrightarrow{v_2} = (2, -1)$*.*

Perceba que v_1 e v_2 não são paralelos, visto que $\frac{5}{2} \neq \frac{3}{-1}$, assim $\{v_1, v_2\}$ é LI, formando uma base do plano. Podemos então obter qualquer vetor do plano a partir deles, note que substituindo os vetores na igualdade dada, temos:

$$a \cdot (5, 3) + b \cdot (2, -1) = (2, 10)$$

$$(5a, 3a) + (2b, -b) = (2, 10)$$

$$5a + 2b = 2 \ e \ 3a - b = 10$$

Neste sistema de equações obtemos a solução $a = 2$ e $b = -4$. Portanto $2\overrightarrow{v_1} - 4\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v}$.

3 Matrizes

Neste capítulo iremos fazer uma introdução ao estudo de matrizes, a saber, definições, tipos, operações, relações entre vetores e matrizes, de acordo com as construções feitas por [5], [6] e [7].

3.1 Matrizes

Dados m e $n \in \mathbb{N}^*$, a matriz é uma tabela com números quaisquer, organizados em m linhas e n colunas, da forma.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Os elementos a_{ij} são chamados entradas da matriz, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ e indicam a i-ésima linha e a j-ésima coluna que a entrada está localizada na matriz.
A matriz pode ser denotada por $A = A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$, para todos $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, logo "$m \times n$" é chamado de dimensão da matriz, não podendo realizar este produto. Por exemplo, o elemento a_{32} está na 3^a linha e 2^a coluna.

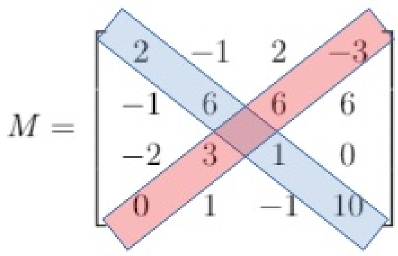
3.2 Nomenclatura de Matrizes

1. Uma **Matriz retangular** é caracterizada por possuir o número de linhas diferente do número de colunas $(m \neq n)$.
   Exemplo: A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz retangular de dimensão 2×3.

2. Uma **Matriz linha** tem dimensão $1 \times n$, isto é, possui apenas uma linha.
   Exemplo: A matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha de dimensão 1×4.

3. Uma **Matriz coluna** tem dimensão $m \times 1$ isto é, possui apenas uma coluna.
   Exemplo: A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \\ 10 \\ -11 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de dimensão 5×1.

4. Uma **Matriz quadrada** possui o número de linhas igual ao número de colunas, $n = m$, desta forma sua dimensão $n \times n$, pode ser dita apenas ordem n.
   Exemplo: A matriz $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.
   Observação:
   a) Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$, de ordem n, os elementos a_{ii}, formam a **diagonal principal**. Assim a diagonal principal é $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn})$.
   b) Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$, de ordem n, os elementos a_{ij}, onde $i + j = n + 1$, formam a **diagonal secundária**. Assim a diagonal secundária é $(a_{1n}, a_{2\ n-1}, a_{3\ n-2}, \cdots, a_{n1})$.
   Exemplo: Dada a matriz abaixo



   Vemos que na matriz M quadrada de dimensão 4×4, sua diagonal principal é $(2, 6, 1, 10)$ e sua diagonal secundária é $(-3, 6, 3, 0)$.

5. Uma **Matriz nula** $m \times n$, tem todas as entradas nulas.
   Exemplo: As matrizes $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes nulas.
   De forma geral podemos representar uma matriz nula por 0.

6. Dada a matriz A, $m \times n$, a **Matriz oposta** $m \times n$ de A, tem mesma ordem de A, é denotada por $-A$ e tem todas as entradas, iguais aos elementos opostos da matriz A.

Exemplo: As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ e $-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -10 \end{bmatrix}$ são matrizes opostas.

7. Uma **Matriz identidade** de ordem n, cujas entradas são:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

A matriz identidade é representada por $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ ou simplesmente I, quando a dimensão está no contexto.

Exemplo: As matrizes $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são chamadas matrizes identidades.

3.3 Operações com matrizes

3.3.1 Adição ou soma de matrizes

Dadas duas matrizes de mesma dimensão, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, a soma delas é uma terceira matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, de mesma dimensão, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Em outras palavras a matriz soma é a matriz obtida somando as respectivas entradas de cada uma delas.

Exemplo 3.3.1. *Considere as matrizes* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$*, então*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.3.2. *Dadas as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$, *então*

$$A + B = \begin{pmatrix} 10 & \frac{3}{2} \\ 1+\pi & -10 \end{pmatrix}$$

Observação: A diferença das duas matrizes A e B será, $A - B = A + (-B)$.

Propriedades da soma

Dadas as matrizes A, B e C, temos:

i. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativa)

ii. $A + B = B + A$ (comutativa)

iii. $A + 0 = 0 + A = A$ (elemento neutro da adição)

iv. $A + (-A) = -A + A = 0$ (elemento simétrico)

DEMONSTRAÇÕES

Dadas as matrizes de mesma ordem, A, B e C, com entradas reais, isto é $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ e $C = [c_{i,j}]$, com $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ reais, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

i. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativa)

$$A + (B + C) = [a_{i,j}] + ([b_{i,j}] + [c_{i,j}])$$

$$A + (B + C) = [a_{i,j}] + [b_{i,j} + c_{i,j}]$$

$$A + (B + C) = [a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j}]$$

$$A + (B + C) = [(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j}]$$

$$A + (B + C) = [a_{i,j} + b_{i,j}] + [c_{i,j}]$$

$$A + (B + C) = ([a_{i,j}] + [b_{i,j}]) + [c_{i,j}]$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

ii. $A + B = B + A$ (comutativa)

$$A + B = [a_{i,j}] + [b_{i,j}]$$

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

$$A + B = [b_{i,j} + a_{i,j}]$$

$$A + B = [b_{i,j}] + [a_{i,j}]$$

$$A + B = B + A$$

iii. $A + 0 = 0 + A = A$ (elemento neutro da adição)

Demonstrado de forma mais ampla na proposição 4.1.1.

iv. $A - A = -A + A = 0$ (elemento simétrico)

Demonstrado de forma mais ampla na proposição 4.1.2.

3.3.2 Multiplicação de uma matriz por escalar

Considere um número k, o produto da matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ por esta constante é a matriz $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, em outras palavras, a matriz B é obtida multiplicando todas as entradas da matriz A, pelo número k.

Exemplo 3.3.3. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \pi \\ -1 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *e* $k = -2$, *temos:*

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} -2 \cdot 0 & -2 \cdot 1 & -2 \cdot \pi \\ -2 \cdot (-1) & -2 \cdot (-2) & -2 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2\pi \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matriz por um escalar

Sejam A e B matrizes de mesma dimensão, e p,$q \in \mathbb{R}$, temos:

i. $(pq)A = p(qA)$;

ii. $(p + q)A = pA + qA$;

iii. $p(A + B) = pA + pB$;

iv. $1 \cdot A = A$.

DEMONSTRAÇÕES

Dados $k, w \in \mathbb{R}$ e as matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$ de entradas reais,para todos $i \in \{1, 2, \cdot, m\}$ e $j \in \{1, 2, \cdot, n\}$, temos

i. $(kw)A = k(wA)$

$$(kw)A = (kw)[a_{ij}]$$

$$(kw)A = [(kw)a_{ij}]$$

$$(kw)A = [k(wa_{ij})]$$

$$(kw)A = k([wa_{ij}])$$

$$(kw)A = k(w[a_{ij}])$$

$$(kw)A = k(wA)$$

ii. $(k+w)A = kA + wA$

$$(k+w)A = (k+w)[a_{ij}]$$

$$(k+w)A = [(k+w)a_{ij}]$$

$$(k+w)A = [ka_{ij} + wa_{ij}]$$

$$(k+w)A = [ka_{ij}] + [wa_{ij}]$$

$$(k+w)A = k[a_{ij}] + w[a_{ij}]$$

$$(k+w)A = kA + wA$$

iii. $k(A+B) = kA + kB$

$$k(A+B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$$

$$k(A+B) = k[(a_{ij} + b_{ij})]$$

$$k(A+B) = [k(a_{ij} + b_{ij})]$$

$$k(A+B) = [ka_{ij} + kb_{ij}]$$

$$k(A+B) = [ka_{ij}] + [kb_{ij}]$$

$$k(A+B) = k[a_{ij}] + k[b_{ij}]$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

iv. $1 \cdot A = A$

$$1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}]$$

$$1 \cdot A = [1 \cdot a_{ij}]$$

$$1 \cdot A = [a_{ij}]$$

$$1 \cdot A = A$$

3.3.3 Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes retangulares só é definida em casos específicos de suas dimensões: o número de colunas da primeira matriz, deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, a multiplicação A por B é $C = A \cdot B = [c_{ik}]_{m\times p}$, com os elementos c_{ik} definidos por:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

$$\text{onde } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ e } k \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Exemplo 3.3.4. *A tabela abaixo mostra a quantidade de café Conilon e Arábica produzidas em milhões de sacas, na safra 18/19, pelas regiões agrícolas 1 e 2 do Espírito Santo.*

	Conilon	*Arábica*
Região 1	8	1
Região 2	2	3

Segue também a tabela que mostra os preços em reais por saca (reais).

	preço por saca (R$)
Conilon	340
Arábica	440

Determine os valores x e y, que são respectivamente, os valores arrecadados com a venda do café produzido pelas Regiões 1 e 2, de acordo com a matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Solução: A partir da matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 340 \\ 440 \end{bmatrix}$, podemos realizar a multiplicação $A \cdot B$ facilmente, posicionando-as da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 340 \\ 440 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 8 \times 340 + 1 \times 440 \\ 2 \times 340 + 3 \times 440 \end{array} \end{array}$$

Assim $A \cdot B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3160 \\ 2000 \end{bmatrix}$, que está em milhões de reais.
Portanto o valor arrecadado com a produção de café na região 1 do Espírito Santo é de 3,16 milhões de reais e na Região 2 do Espírito Santo é de 2 milhões de reais.

Exemplo 3.3.5. *Sejam as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. *Realize as operações $B \cdot A$ e $A \cdot B$, se possível.*

$B \cdot A$

Solução: $B \cdot A$
Esta operação não é possível ser realizada, uma vez que a primeira matriz B tem ordem

2×3 e a segunda matriz A tem ordem 2×2, logo o número de colunas da primeira matriz é diferente do número de linhas da segunda matriz.

$A \cdot B$
Aqui podemos realizar a operação, logo temos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes
Considere as matrizes A, B e C, quando for possível realizar as multiplicações, temos que:

i. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

ii. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

iii. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

iv. $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$ e $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

DEMONSTRAÇÃO

i. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
   Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times q}$ e $C_{q\times n}$, matrizes com entradas reais.

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \sum_{l=1}^{q} (b_{kl}c_{lj})$$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (a_{ik}b_{kl})c_{lj}$$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q} (\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl})c_{lj}$$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{l=1}^{q} (AB)_{il}c_{lj}$$

$$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}$$

   Portanto $A(BC) = (AB)C$

ii. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$, matrizes com entradas reais.

$$[A \cdot (B + C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

$$[A \cdot (B + C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})$$

$$[A \cdot (B + C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}$$

$$[A \cdot (B + C)]_{ij} = [A \cdot B + A \cdot C]_{ij}$$

Portanto, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

iii. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

Sejam $A_{p\times n}$, $B_{m\times p}$ e $C_{m\times p}$, matrizes com entradas reais.

$$[(B + C) \cdot A]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (B + C)_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (b_{ik} + c_{ik})a_{kj}$$

$$[(B + C) \cdot A]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (b_{ik}a_{kj} + c_{ik}a_{kj})$$

$$[(B + C) \cdot A]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^{p} c_{ik}a_{kj}$$

$$[(B + C) \cdot A]_{ij} = [B \cdot A + C \cdot A]_{ij}$$

Portanto, $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

iv. Sejam I_m e I_n as matrizes identidades de ordem m e n respectivamente e A uma matriz $m \times n$. Então $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$

Dada a Matiz A, com entradas a_{ij}, números reais e a matriz identidade I_n, onde cada elemento $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{se } i = j \\ 0 & , \text{se } i \neq j \end{cases}$, com $1 \leq i, j \leq n$. Assim, ao multiplicar a linha i da matriz A com a colina j da matriz I_n, obtemos um x_{ij}, veja:

$$x_{ij} = a_{i1} \cdot \delta_{1j} + a_{i2} \cdot \delta_{2j} + \cdots + a_{ij} \cdot \delta_{jj} + \cdots + a_{in} \cdot \delta_{nj}$$

$$x_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{ij} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0$$

$$x_{ij} = a_{ij}$$

Portanto o resultado do produto $A \cdot I_n$, será a própria matriz A.

De forma análoga, pomos demonstra que $I_m \cdot A = A$.

Note que a multiplicação matricial, nem sempre é comutativa, mesmo que, em ambos os lados seja possível realizar a operação.

Exemplo 3.3.6. *Dadas as matrizes quadradas* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, *realize as multiplicações:*

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$

Solução:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Observe que $A \cdot B \neq B \cdot A$, como havíamos comentado, a multiplicação de matrizes não é comutativo.

4 Espaços Vetoriais e Transformações Lineares no Plano

Neste capítulo iremos aplicar nossos conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores para tratarmos de transformações lineares no plano, para isso podemos nos aprofundar mais nas referências [1], [3] e [8].

4.1 Espaços vetoriais

Podemos pensar nos espaços vetoriais como uma unificação de linguagem (funções, polinômios, matrizes, vetores, ...). Isto nos motiva a fazer a definição seguinte.
Considere um conjunto V, não-vazio, no qual estão definidas duas operações $\oplus$ e $\odot$, ou seja:

i. para todos $u, v \in V,$ a soma $u \oplus v$ está definida em V.

ii. para todos $a \in \mathbb{R}, u \in V,$ o produto $a \odot u$ está definido em V.

Este conjunto V, munido dessas operações, é chamado de espaço vetorial real, se as propriedades a seguir são válidas.

A) A operação $\oplus$ satisfizer:

$[A_1]$ $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w),$ para todos $u, v, w \in V$

$[A_2]$ $u \oplus v = v \oplus u,$ tal que para todos $u, v \in V$

$[A_3]$ existe um elemento $0 \in V,$ para todo $u \in V, u \oplus 0 = u$

$[A_4]$ para todo $u \in V,$ existe $v \in V, u \oplus v = 0$

M) A operação $\odot$ satisfizer:

$[M_1]$ $(\alpha \odot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ e $u \in V$

$[M_2]$ $(\alpha \oplus \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u$, para todos $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ e $u \in V$

$[M_3]$ $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \beta \odot v$, para todos $\alpha \in$ R e $u, v \in V$

$[M_4]$ $1 \odot u = u$, para todo $u \in V$

Destacamos que cada espaço vetorial tem suas operações definidas de alguma maneira. As operações e $\odot$ de de um espaço vetorial podem ser bem diferentes do habitual, isto é, para um mesmo conjunto podem existir operações distintas que o tornam um espaço vetorial. Outra observação interessante sobre o conceito de espaços vetoriais é que não necessariamente precisamos usar o conjunto dos números reais como escalares. Para cada espaço, devemos conhecer seus elementos e suas operações, que devem satisfazer as oito propriedades acima, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1.1. *Tomando o conjunto de todas as matrizes que possuem m linhas e n colunas, denotado aqui por $M(m,n)$, como vimos anteriormente, considere as operações de adição e multiplicação por escalar da seguinte forma: Dados $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M(m,n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:*

- $A + B = C = [c_{ij}]_{m\times n}$, *onde* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- $\alpha \cdot A = D = [d_{ij}]_{m\times n}$ *onde* $d_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Perceba que C e D também são matrizes com m linhas e n colunas, portanto $C, D \in M(m,n)$ e verificamos facilmente que ambas as operações satisfazem as quatro propriedades de adição e as quatro propriedades de multiplicação por escalar. Por tanto, $M(m,n)$ como as duas operações definidas acima é um espaço vetorial.

Exemplo 4.1.2. *Outro exemplo de espaço vetorial é o conjunto $\mathcal{F}$ de todas as funções reais, ou seja, as funções que têm como domínio e contradomínio o conjunto dos números reais. Tomando $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos as operações de adição e multiplicação por escalar da maneira seguinte.*

- *Adição: $f + g$ também é um função real de variável real, definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.*

- *Multiplicação por escalar: $\alpha \cdot f$ também é uma função real de variável real, definida por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.*

Veja que para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $f + g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \cdot f \in \mathcal{F}$. Para verificar as propriedades, temos:

Propriedades $[A_1]$,$[A_2]$,$[M_1]$,$[M_2]$,$[M_3]$,$[M_4]$**:** A validade de cada uma dessas propriedades, decorrem das propriedades do conjunto dos números reais. Veja por exemplo a propriedade $[A_1]$. Dadas as funções reais $f, g, h \in \mathcal{F}$, com qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$, pois $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são números reais,

que satisfazem a associatividade da adição, em $\mathbb{R}$.
Propriedade $[A_3]$**:** Essa propriedade exige que exista uma função $\mathbf{0} \in \mathcal{F}$, onde a sua soma, com qualquer outra função $f \in \mathcal{F}$, resulta na própria f. Essa função $\mathbf{0}$ pode ser a função constante, igual a zero.
Propriedade $[A_4]$**:** Essa propriedade exige que para qualquer função $f \in \mathcal{F}$, exista uma função $g \in \mathcal{F}$, tal que **f+g=0**. Para isso, basta tomar a função **g=-f**.
Portanto o conjunto $\mathcal{F}$, com suas operações definidas acima, é um espaço vetorial.

Exemplo 4.1.3. *Podemos citar o conjunto V, de todas as listas de n números reais, isto é, V é conjunto de elementos da forma $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, com todos os $x_i \in \mathbb{R}$, com $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*
Assim, dados $u = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $v = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, do conjunto V, onde todos os a_i e b_i são números reais, podemos definir as operações abaixo:

- $u + v = (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in V$, *note que todos os $a_i + b_i$ são números reais;*

- $k \cdot u = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = (k \cdot a_1, k \cdot a_2, \cdots, k \cdot a_n) \in V$, *veja que todos $k \cdot a_i$ são números reais.*

É fácil verificar que essas operações satisfazem as propriedades apresentadas na definição. Por isso, V é um espaço vetorial, que é denotado por $\mathbb{R}^n$. Os elementos de um espaço vetorial serão denominados vetores, independente de sua natureza (polinômios, matrizes, números, funções, etc.), entretanto em nosso texto daremos um enfoque para os vetores do plano cartesiano xOy, o $\mathbb{R}^2$. E também quando apresentamos os par ordenado $P = (a, b)$, deve ser visto com o vetor $\overrightarrow{OP}$ no sistema xOy.

Proposição 4.1.1. *O elemento neutro $e = 0$, do espaço vetorial V é único.*

DEMONSTRAÇÃO
Suponha que existam dois elementos neutros no espaço vetorial V, e_1 e e_2.
Se e_1 é neutro, então $e_1 + e_2 = e_2$; por outro lado, e_2 também é neutro, logo $e_1 + e_2 = e_1$.
Portanto $e_1 = e_2$, isto é, o elemento neutro é único, o denotamos por $e = 0$.

Proposição 4.1.2. *Para cada u, existe um único elemento simétrico $(-u)$ no espaço vetorial V.*

DEMONSTRAÇÃO
Dado $u \in V$, suponha que existam u_1 e u_2, elementos no espaço vetorial V, tais que sejam elementos simétricos de u, isto é, $u + u_1 = 0$ e $u + u_2 = 0$. Logo

$$u_1 = u_1 + 0 = u_1 + (u + u_2) = (u_1 + u) + u_2 = 0 + u_2 = u_2$$

Portanto o simétrico de u é único e o denotamos por $(-u)$.

Proposição 4.1.3. *Sejam u, v e w vetores de um espaço vetorial V. Se $u + v = u + w$ então $v = w$. Assim, vale a regra do cancelamento para a adição.*

DEMONSTRAÇÃO
Veja que

$$v = 0 + v = (-u + u) + v = -u + (u + v) = -u + (u + w) = (-u + u) + w = 0 + w = w$$

Proposição 4.1.4. $0 \cdot u = 0$ *para todo* $u \in E$.

DEMONSTRAÇÃO
Perceba que $u + 0 \cdot u = 1 \cdot u + 0 \cdot u = (1 + 0) \cdot u = 1 \cdot u = u = u + 0$. Logo $u + 0 \cdot u = u + 0$. Pela proposição anterior, $0 \cdot u = 0$.

Proposição 4.1.5. *Seja α um número real qualquer e $0 \in V$, então $\alpha \cdot 0 = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO
Note que $\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + 0$. Portanto, $\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + 0$. pela Proposição 4.1.3, temos $\alpha \cdot 0 = 0$.

Proposição 4.1.6. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$. Se $\alpha \cdot u = 0$ então $\alpha = 0$ ou $u = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO
Suponha por contradição que $\alpha \neq 0$ e $u \neq 0$. Como $\alpha \neq 0$, então $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, decorrendo que: $\alpha \cdot u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot u = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 \Leftrightarrow 1 \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$, contradição.

Proposição 4.1.7. *Seja u um vetor do espaço vetorial V, então temos que $(-1) \cdot u = -u$*

DEMONSTRAÇÃO
Basta notar que $u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0 = u + (-u)$. Desta forma $u + (-1) \cdot u = u + (-u)$, portanto pela Proposição 4.1.3, temos que $(-1) \cdot u = -u$.

4.2 Subespaços vetoriais

Seja E um espaço vetorial. Um subconjunto, não vazio S de E é um subespaço vetorial de E, se ele é um espaço vetorial com as operações originadas de E.

Teorema 4.2.1. *Um subconjunto S, não-vazio, de um espaço vetorial E é um subespaço vetorial de E se estiverem satisfeitas as condições:*

i. *Para quaisquer $u, v \in S$, temos que $u + v \in S$;*

ii. *Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in S$, temos que $\alpha \cdot u \in S$.*

DEMONSTRAÇÃO

Se S é um subespaço de E, obviamente estão satisfeitas os itens i e ii, pois as duas operações definidas em E, também são definidas em S, com todas as oito propriedades. Reciprocamente, suponha que os itens i e ii valham, então S é fechado em relação a adição e em relação a multiplicação por escalar, assim S herda todas as propriedade de E, com exceção possivelmente, da existência do *nulo* e do *oposto*.

No entanto, note que o item ii. acima garante que para qualquer elemento $u \in S$ e qualquer k real, em especial $0 \cdot u = 0$ e $(-1) \cdot u = -u$ estão em S, portanto ele é um subespaço vetorial de E.

Exemplo 4.2.1. *Seja $E = \mathbb{R}^2$, o plano cartesiano que contém todos os vetores do plano, em especial qualquer que seja $P = (a, b) \in E$ deve ser visto com sendo $\overrightarrow{OP}$, e considere $S = \{(x, y);\ y = -x\}$, é um subconjunto de vetores do plano que tem a segunda componente igual ao oposto da primeira, podemos escrever também $S = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}\}$, isto é vetores cuja direção é a mesma da bissetriz do 2º e 4º quadrantes do plano. Evidente que $S \neq \emptyset$, pois $(0, 0) \in S$, assim podemos tomar $u, v \in S$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $u + v$ e αu terão a mesma direção da bissetriz do 2º e 4º quadrantes do plano, ou seja S é um subespaço de E.*

Exemplo 4.2.2. *Agora, o subconjunto $S = \{(x, y);\ y = x + 1\}$ do plano $\mathbb{R}^2$, não é um subespaço do plano.*

i. *Dados $u = (a, a + 1)$, $v = (b, b + 1) \in S$, temos que $u + v = (a + b, a + b + 2) \notin S$.*

ii. *Dado $u = (a, a + 1) \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha u = (\alpha a, \alpha a + \alpha) \in S$, só se $\alpha = 1$, mas essa propriedade deveria ser válida para qualquer número real α. Portanto S não é um subespaço do plano.*

Observe que bastaria mostrar que uma das propriedades não é satisfeita.

4.3 Transformações lineares

Neste momento falaremos de um tipo de aplicação ou função, onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores. Estamos particularmente focados nas funções lineares, que serão definidas abaixo, como transformações lineares.

Definição 4.3.1. *Uma transformação linear T do espaço vetorial V no espaço vetorial W, é uma função $T : V \to W$, ou seja, uma função que associa a cada vetor $v \in V$ um único vetor $w = T(v) \in W$, tal que:*

i. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, *para todos* $u, v \in V$

ii. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$, *para todos* $u \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$

De modo particular, podemos tomar $V = W = \mathbb{R}^2$, onde as transformações lineares passam a ser realizadas no plano cartesiano. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 4.3.1. *Considere a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *de modo que* $T(x, y) = (3x, x - y)$ *é uma transformação linear.*

De fato:

i. Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$.
Então:
$T(u+v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$T(u+v) = (3(x_1 + x_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$
$T(u+v) = (3x_1 + 3x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$
$T(u+v) = (3x_1 + 3x_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2)$
$T(u+v) = (3x_1 + 3x_2, (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2))$
$T(u+v) = (3x_1, x_1 - y_1) + (3x_2, x_2 - y_2)$
$T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:
$T(\alpha u) = T(\alpha(x_1, y_1)) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) = (3\alpha x_1, \alpha x_1 - \alpha y_1)$
$T(\alpha u) = \alpha(3x_1, x_1 - y_1) = \alpha T(x_1, y_1) = \alpha T(u)$

Podemos escrever esta transformação linear, no formato matricial

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.3.2. *Considere a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *de modo que* $T(x, y) = (x+y, x, y)$. T *é uma transformação linear.*

De fato:

i. Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$.
Então:
$T(u+v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$T(u+v) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$T(u+v) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(u+v) = (x_1+y_1, x_1, y_1) + (x_2+y_2, x_2, y_2)$
$T(u+v) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$
$T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:
$T(\alpha u) = T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x, \alpha y)$
$T(\alpha u) = \alpha(x + y, x, y) = \alpha T(x, y) = \alpha T(u)$

Podemos escrever esta transformação linear, no formato matricial

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.3.3. *Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 1, y + 2)$, que* ***não é linear****. Veja que $T(x, y) = (x, y) + (1, 2)$, e escrevendo na forma matricial, temos:*

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim aplicando o vetor $\overrightarrow{u} = (3, 1)$, temos $T\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, *graficamente vemos a operação adição de vetores relacionada diretamente com a operação adição de matrizes (figura 4.1).*

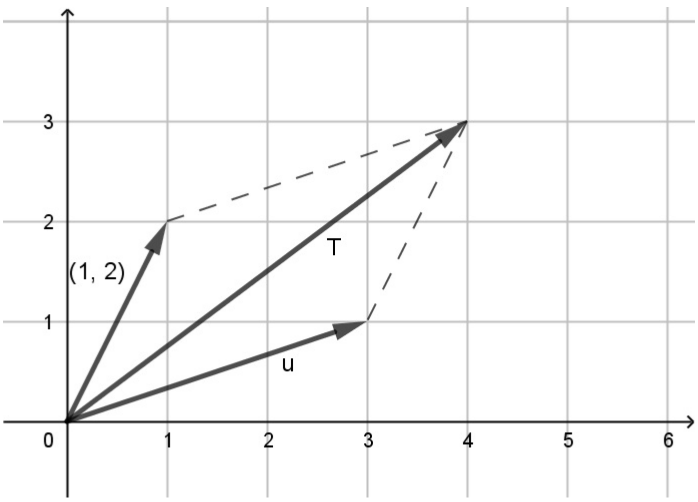


Figura 4.1: Adição de vetores

4.4 Transformações lineares e matrizes

Teorema 4.4.1. *Uma transformação* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *é linear se, e somente se, pode ser escrita na forma* $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

DEMONSTRAÇÕES

Dado $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, então aplicaremos v na transformação linear T. Escreva $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Segue que:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = xT\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yT\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como, existem a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, tais que $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, temos

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reciprocamente, se $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, vetores do $\mathbb{R}^2$, e k uma constante real, aplicaremos $(u + v)$ e $(k \cdot u)$ em $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$$\textbf{(i)}\ T(u+v) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_1 + x_2) + c(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{bmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{bmatrix} (ax_1 + cy_1) + (ax_2 + cy_2) \\ (cx_1 + dy_1) + (cx_2 + dy_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax_2 + cy_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T(u) + T(v)$$

$$\textbf{(ii)}\ T(k \cdot u) = T\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} akx_1 + cky_1 \\ ckx_1 + dky_1 \end{bmatrix}$$

$$T(k \cdot u) = k \cdot \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = k \cdot T(u)$$

Portanto, toda aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, escrita na forma $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, é linear.

4.5 Transformações especiais do plano

Existem algumas transformações lineares (e não lineares) do plano muito úteis. Descreveremos aqui as transformações lineares seguintes: rotações, reflexões alongamentos e cisalhamentos. Falaremos, com alguns detalhes, sobre elas. Uma transformação essencial, que não é linear, é a translação. Falaremos também sobre ela pela sua importância e simplicidade.

4.5.1 Rotações

Seja θ um número real qualquer. Uma **rotação** do plano de um ângulo θ em torno da origem no sentido anti-horário é dada pela transformação linear R_θ definida da forma seguinte.

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta \\ x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta \end{bmatrix}$$

Veja que, pelo teorema 4.4.1, R_θ é uma transformação linear. A expressão acima está na forma matricial. Escrita na forma vetorial temos:

$$R_\theta(x, y) = (x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta, x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta)$$

Além disso, observe que R_θ é inversível e sua inversa é a transformação linear dada pela rotação do ângulo $-\theta$ em torno da origem, uma vez que

$$R_\theta \circ R_{-\theta} = R_{-\theta} \circ R_\theta = Id.$$

Assim, a inversa da rotação R_θ é outra rotação $R_{-\theta}$, a saber $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Exemplo 4.5.1. *Dado o retângulo abaixo, com vértices A, B, C e D, vamos realizar uma rotação de 120^o, no sentido anti-horário, em torno da origem. Na prática, basta aplicar a rotação no conjunto de vértices do retângulo para obter o conjunto de vértices da sua imagem.*

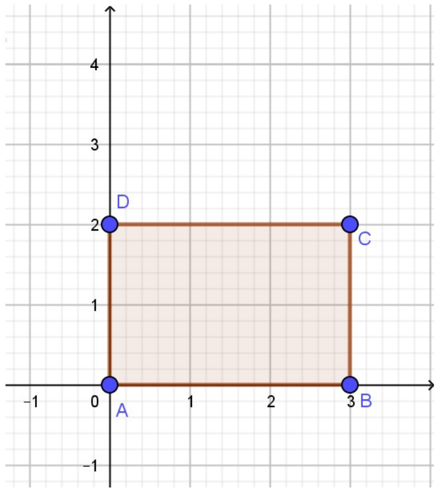


Figura 4.2: Retângulo ABCD

Escrevendo na forma matricial as coordenadas dos vértices $A = (0;0)$, $B = (3;0)$, $C = (3;2)$ e $D = (0;2)$, obtemos $M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Agora, aplicando a transformação, obtemos:

$$\begin{aligned} R_{120^0}[M] &= \begin{bmatrix} \cos 120^0 & -\sin 120^0 \\ \sin 120^0 & \cos 120^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3+2\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{2-3\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim temos $A' = (0;0)$, $B' = (-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, $C' = (-\frac{3+2\sqrt{3}}{2}, -\frac{2-3\sqrt{3}}{2})$ e $D' = (-\sqrt{3};-1)$, com ilustração na figura 4.3.

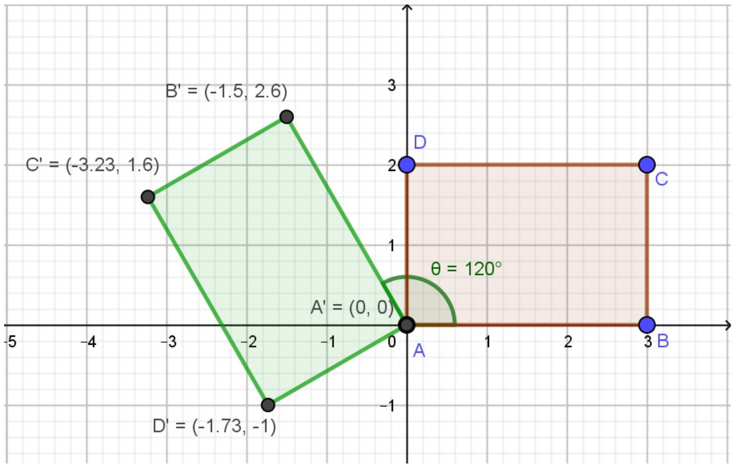


Figura 4.3: Retângulo ABCD girado 120º

4.5.2 Reflexões

As **reflexões** que vamos descrever são em torno dos eixos coordenados Ox e Oy. A reflexão em torno do eixo Ox, que chamaremos de S_x, é definida por

$$S_x \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou seja, } S_x \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Por outro lado, a reflexão em torno do eixo Oy é a transformação S_y do plano definida por

$$S_y \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou seja, } S_y \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Novamente, veja que, pelo teorema 4.4.1, tanto S_x quanto S_y são transformações lineares.

Além disso, observe que S_x e S_y são inversíveis e cada uma delas é sua própria inversa, uma vez que

$$S_x \circ S_x = Id \text{ e } S_y \circ S_y = Id$$

Assim, $S_x^{-1} = S_x$ e $S_y^{-1} = S_y$.

Uma transformação que possui a propriedade de ser inversível e ela ser a sua própria inversa é chamada de **involução**. Assim, as reflexões são involuções. Uma observação importante é que é possível mostrar que toda reflexão do plano em torno de uma reta pode ser vista como uma reflexão em torno de um dos eixos coordenados, depois de uma eventual mudança de coordenadas.

Exemplo 4.5.2. *Considere o polígono P cujos vértices são os pontos $A = (4; 4)$, $B = (5; 2)$, $C = (4; 3)$, $D = (2; 1)$, $E = (1; 2)$, $F = (3; 4)$ e $G = (2; 5)$.*

Vamos aplicar a reflexão em relação ao eixo Ox neste polígono. Novamente, podemos escrever as coordenadas dos vértices em forma de uma matriz e aplicar a reflexão simultaneamente em todos eles, como segue,

$$\begin{aligned} S_x[P] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -3 & -1 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que todos os pontos do novo polígono mantém suas abscissas, entretanto as ordenadas se tornam opostas em relação ao polígono P. Perceba isto na figura 4.4.

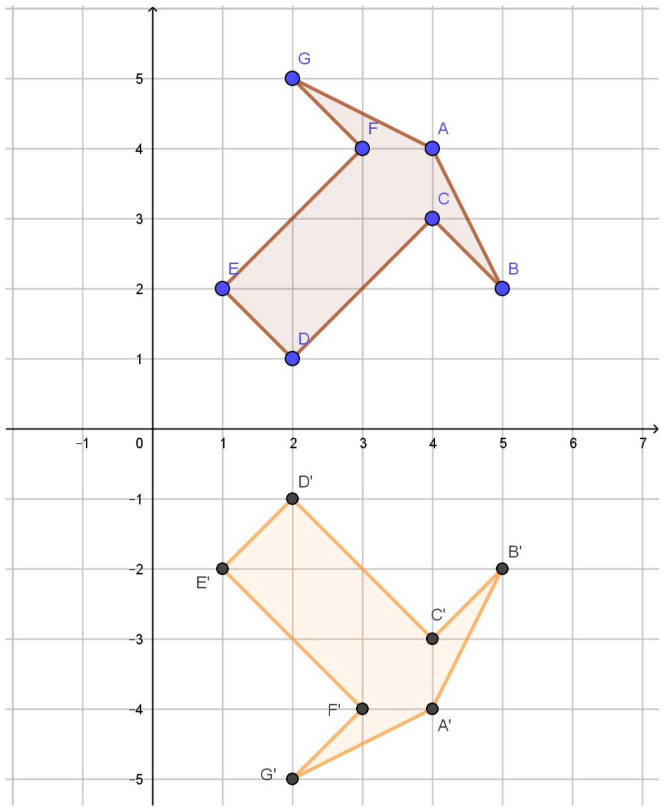


Figura 4.4: Reflexão em torno do eixo Ox

4.5.3 Alongamento paralelo ao eixo Oy

Seja k um número real positivo. O **alongamento** paralelo ao eixo das ordenadas é a transformação A_k do plano definida por

$$A_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ k \cdot y \end{bmatrix}$$

Perceba que se $0 < k < 1$, temos uma compressão ao longo do eixo Oy. Se $k > 1$, temos um alongamento propriamente dito, ao longo do eixo Oy. Denominamos k de constante de alongamento. Note que, caso seja definido para $k < 0$, temos além da compressão (para $-1 < k < 0$) e o alongamento (para $k < -1$) teremos também a reflexão em relação ao eixo Ox. Temos que A_k, para algum $k > 0$, é uma transformação linear. Isto segue do teorema 4.4.1.

De novo, observe que o alongamento A_k é inversível, com inversa dada também por uma transformação linear do tipo alongamento, a saber, $A_{\frac{1}{k}}$. Veja:

$$(A_{\frac{1}{k}} \circ A_k) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A_{\frac{1}{k}} \left[A_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] = A_{\frac{1}{k}} \begin{bmatrix} x \\ k \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{k} \cdot k \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

e

$$(A_k \circ A_{\frac{1}{k}}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A_k \left[A_{\frac{1}{k}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] = A_k \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{k} \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ k \cdot \frac{1}{k} \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, $A_k \circ A_{\frac{1}{k}} = A_{\frac{1}{k}} \circ A_k = Id$ e, portanto, a aplicação inversa do alongamento A_k é a aplicação $A_{\frac{1}{k}}$, isto é, $A_k^{-1} = A_{\frac{1}{k}}$.

Exemplo 4.5.3. *Dados os vértices de um triângulo, $A = (1;1)$, $B = (5;1)$ e $C = (3;5)$, podemos aplicar a transformação de alongamento ao longo do eixo Oy, usando a constante de alongamento igual a 2 unidades.*

Então temos,

$$A_2 [\Delta ABC] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Obtemos o triângulo $\Delta A'B'C'$, com $A' = (1;2)$, $B' = (5;2)$ e $C' = (3;10)$. Veja a figura 4.5.

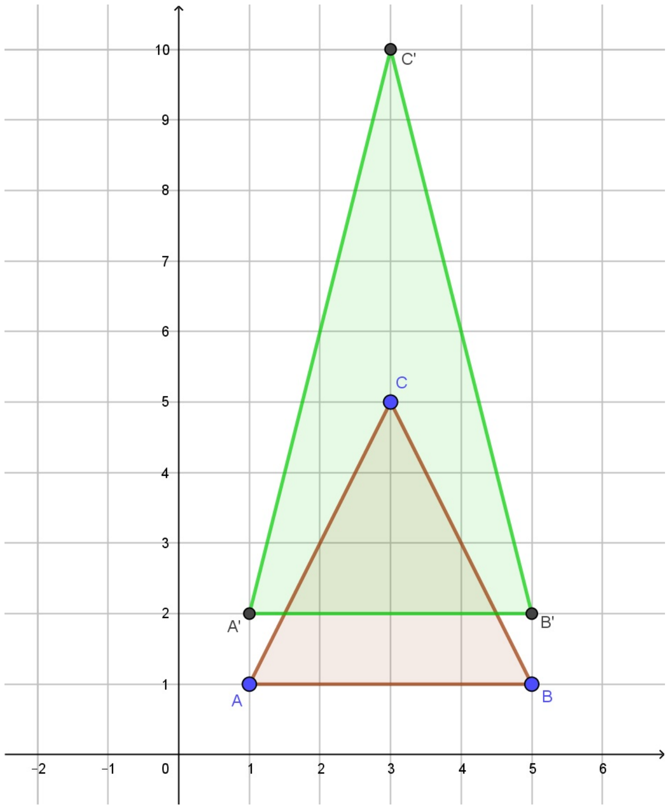


Figura 4.5: Alongamento de 2 unidade em relação ao eixo Oy

4.5.4 Cisalhamento paralelo ao eixo Ox

Seja $k > 0$ um número real positivo. O **cisalhamento** paralelo ao eixo Ox é a transformação linear plana definida por

$$C_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$$

De modo análogo, podemos definir o cisalhamento paralelo ao eixo Oy:

$$C_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + kx \end{bmatrix}$$

Desta forma, do teorema 4.4.1, segue que os cisalhamentos paralelos aos eixos Ox e Oy são transformações lineares, veja as figuras 4.6 e 4.7.

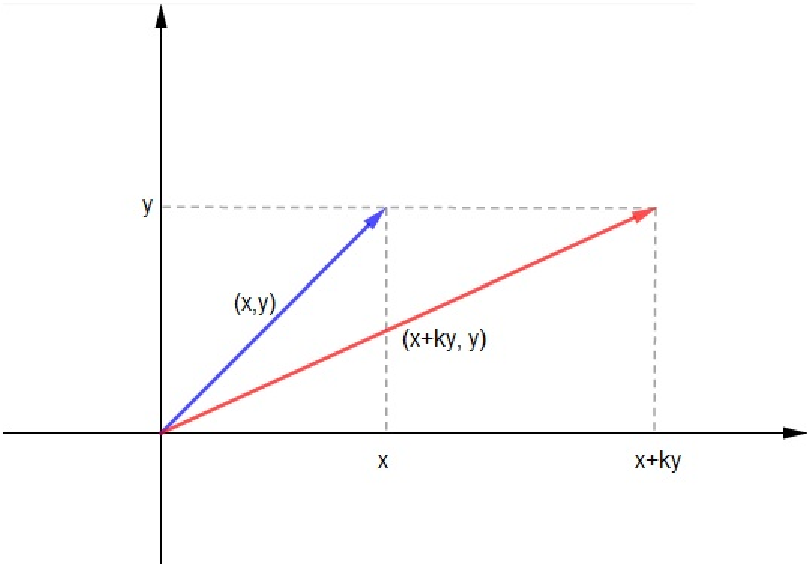


Figura 4.6: Cisalhamento paralelo ao eixo Ox

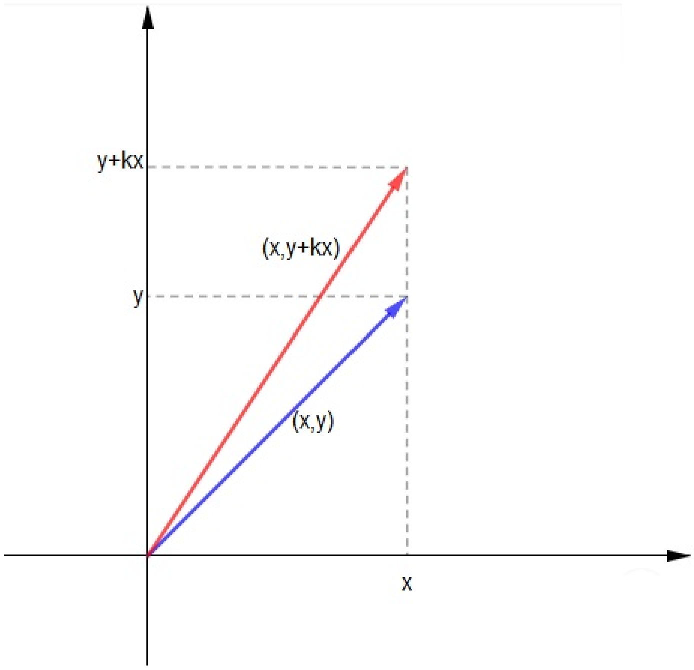


Figura 4.7: Cisalhamento paralelo ao eixo Oy

Também aqui, observe que os cisalhamentos são aplicações lineares inversíveis, com inversa dada também por uma transformação linear do tipo cisalhamento. Por exemplo, no caso de cisalhamentos ao longo do eixo Oy, temos:

$$
\begin{aligned}
(C_{-k} \circ C_k)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= C_{-k}\left[C_k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right] = C_{-k}\begin{bmatrix} x \\ y+kx \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ (y+kx)-kx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(C_k \circ C_{-k})\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= C_k\left[C_{-k}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right] = C_k\begin{bmatrix} x \\ y-kx \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ (y-kx)+kx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Assim, $C_k \circ C_{-k} = C_{-k} \circ C_k = Id$ e, portanto, a aplicação inversa do cisalhamento C_k é a aplicação C_{-k}, isto é, $C_k^{-1} = C_{-k}$.

Exemplo 4.5.4. *Considere o polígono $ABCDEFGHIJ$, formado pelos pontos da figura 4.8, que representa o desenho da letra F. Por meio da transformação cisalhamento ao longo do eixo Ox, com constante de cisalhamento $k = \dfrac{1}{2}$, vamos encontrar as coordenadas do novo polígono formado.*

Aplicamos a transformação no conjunto de vértices (dispostos em forma matricial):

$$
\begin{aligned}
C_{\frac{1}{2}}[F] &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 2 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos os pontos do novo polígono que representa o estilo itálico da letra F, em caixa alta, com $A' = (0;0)$, $B' = (2;4)$, $C' = (4;4)$, $D' = (\frac{7}{2};3)$, $E' = (\frac{5}{2};3)$, $F' = (2;2)$, $G' = (3;2)$, $H' = (\frac{5}{2};1)$, $I' = (\frac{3}{2};1)$ e $J' = (1;0)$, como podemos ver na figura 4.9.

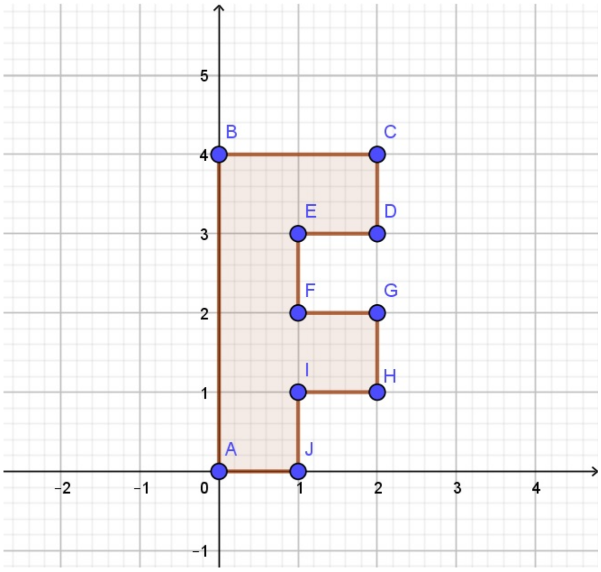


Figura 4.8: Polígono da Letra F

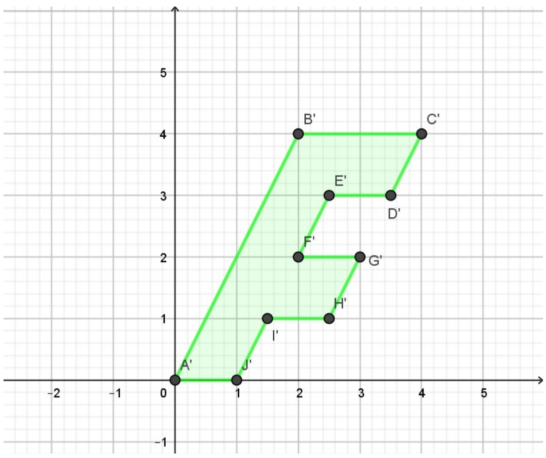


Figura 4.9: Polígono da Letra F itálica

4.6 Translações

Uma **Translação** é uma transformação do plano da forma:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$

onde $m, n \in$ e são denominados parâmetros da translação T. A translação **não é uma transformação linear**, para m e n não nulos, no entanto é muito utilizada. Veja: Dados $u = (a; b)$ e $v = (c; d)$ vetores no plano e $\alpha \in$, temos,

$$\begin{aligned}
T(u)+T(v) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = T(u+v),
\end{aligned}$$

sempre que $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \cdot a \\ \alpha \cdot b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \cdot a \\ \alpha \cdot b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \cdot m \\ \alpha \cdot n \end{bmatrix} = \alpha \cdot T(u).
\end{aligned}$$

No entanto, a translação é um movimento rígido, útil para deslocar figuras no plano.

Exemplo 4.6.1. *Considere o polígono com vértices* $A(0;0)$, $B(0;4)$, $C(2;4)$, $D(2;3)$, $E(1;3)$, $F(1;2)$, $G(2;2)$, $H(2;1)$, $I(1;1)$ *e* $J(1;0)$. *Veja a figura 4.10. Utilizando a transformação do plano, por translação e com parâmetros* 2 *e* 4, *temos:*

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ y+4 \end{bmatrix}$$

Considere então a matriz $M_{2\times 10}$, de forma que cada coluna seja a abscissa e a ordenada, respectivamente de cada vértice do polígono. Vamos aplicar a translação dada.

$$\begin{aligned}
T(M) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 8 & 7 & 7 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos os pontos $A'(2;4)$, $B'(2;8)$, $C'(4;8)$, $D'(4;7)$, $E'(3;7)$, $F'(3;6)$, $G'(4;6)$, $H'(4;5)$, $I'(3;5)$ e $J'(3;4)$, que podem ser vistos na figura 4.10. Observe que com o parâmetro 2 a figura representada pela letra "F", sofreu uma translação de 2 unidades para a direita e o com o parâmetro 4, a figura sofreu uma translação de 4 unidade para cima, permanecendo com suas dimensões e estruturas inalteradas, podendo assim ser confirmado que o novo objeto encontrado é congruente ao original. Assim, toda transformação do plano por translação, proporciona apenas um deslocamento do objeto original.

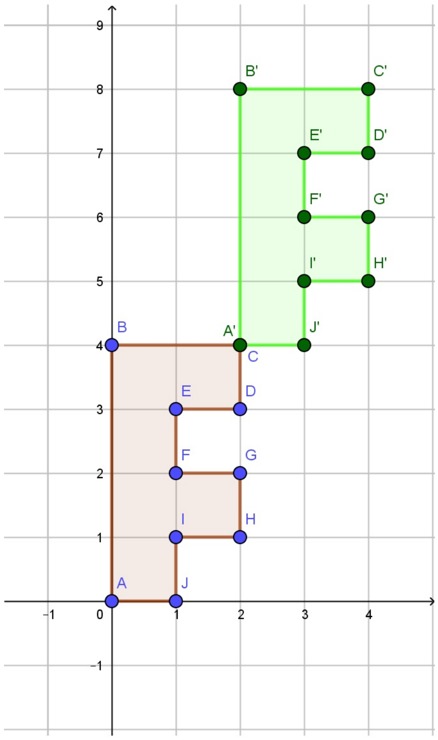


Figura 4.10: Translação de vetores

Exemplo 4.6.2. ***Toca do Coelho***: *Este exemplo consiste em um jogo, que tem como objetivo deslocar um coelho de sua toca, no ponto* $A(0,0)$ *até a comida no ponto* $D(16,24)$, *passando por* $B(10,0)$ *e* $C(16,6)$, *sendo este coelho representado inicialmente pelos vértices do triângulo* ΔMNP, *com* $M(2,0)$ *a cabeça do coelho,* $N(-1,2)$ *e* $P(-1,-2)$ *os pés. Para realizar tal feito, devemos fazer algumas transformações, de acordo com o trajeto a ser tomado, veja a figura abaixo 4.11.*

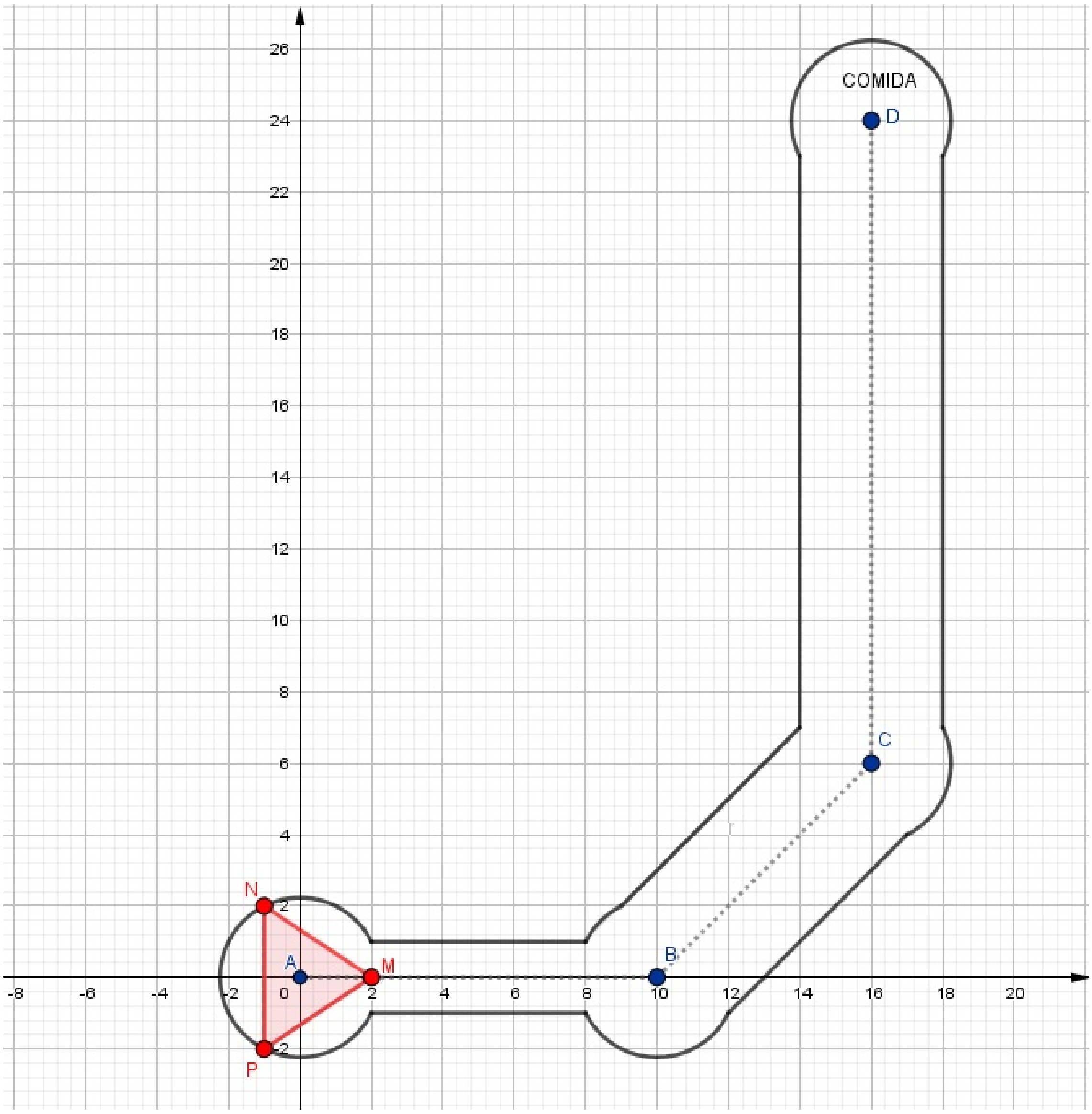


Figura 4.11: Mapa do jogo toca do coelho

Observe que o trajeto de AB está estreito, exigindo que o coelho contraia pela metade na direção do eixo Oy, ao chegar no ponto B o coelho poderá voltar ao seu tamanho original e assim tendo que fazer uma rotação para pegar o caminho em direção ao ponto C. Ao chegar no ponto C o coelho deverá fazer outra rotação para assim atingir a saída, em direção a comida no ponto D.

As coordenadas dos vértices do triângulo que representa o coelho em sua toca serão pontos em uma matriz $T_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Para sair de sua toca, com o objetivo de chegar no ponto B, ele deve contrair seu tamanho pela metade em direção ao eixo vertical, então devemos aplicar a transformação em cada um dos vértices, como podemos ver na figura 4.12.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Desta forma obtemos $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

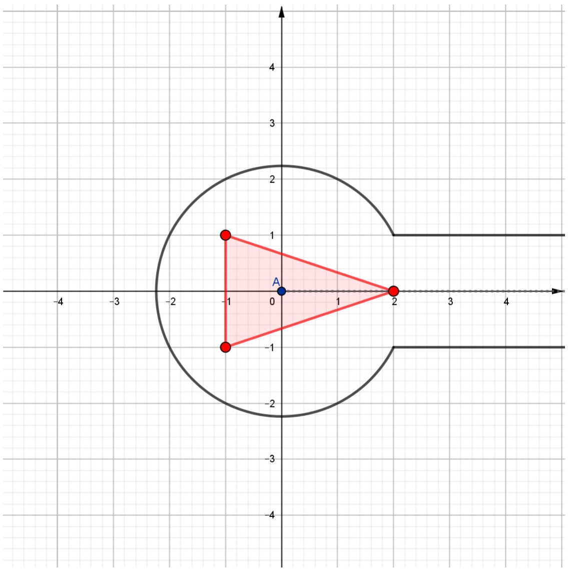


Figura 4.12: Contração vertical

Agora, o coelho conseguirá passar pelo trajeto até o ponto B, para isso é necessário que cada vértice do triângulo seja adicionado o vetor $\overrightarrow{AB} = (10, 0)$, por meio de uma translação. Portanto basta somar a matriz T_1 a matriz $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, acompanhe na figura 4.13.

$$T_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

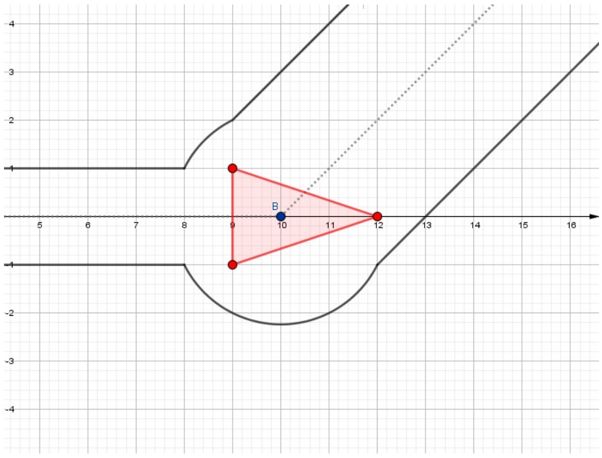


Figura 4.13: coelho no ponto B

O coelho estando no ponto B, poderá voltar ao seu tamanho original, logo ele deverá dilatar sua largura, em torno do ponto $B(10, 0)$. Aplicando a transformação abaixo em cada um de seus vértices, conforme a figura 4.14.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-10 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, obtemos

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

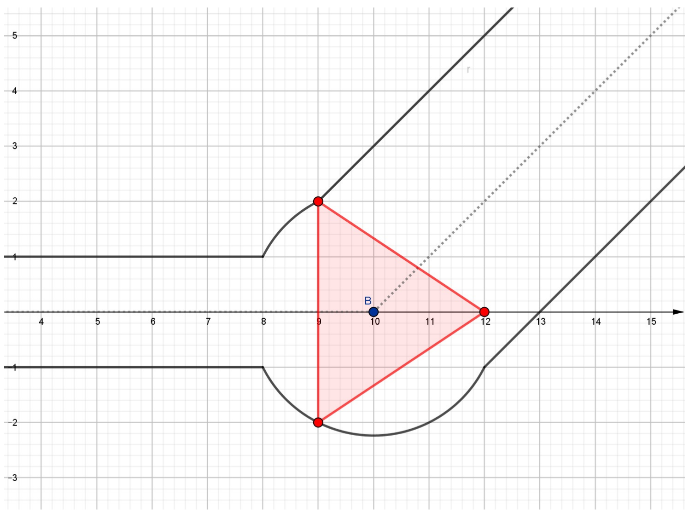


Figura 4.14: Coelho em tamanho normal no ponto B

Neste momento, para acessar o caminho em direção ao ponto C, cada um de seus vértices deverá passar pela transformação abaixo, chamada de rotação de 45 no sentido anti-horário em torno do ponto $B(10,0)$, veja figura 4.15 e acompanhe os cálculos.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-10 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 10+\sqrt{2} & \frac{20-3\sqrt{2}}{2} & \frac{20+\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

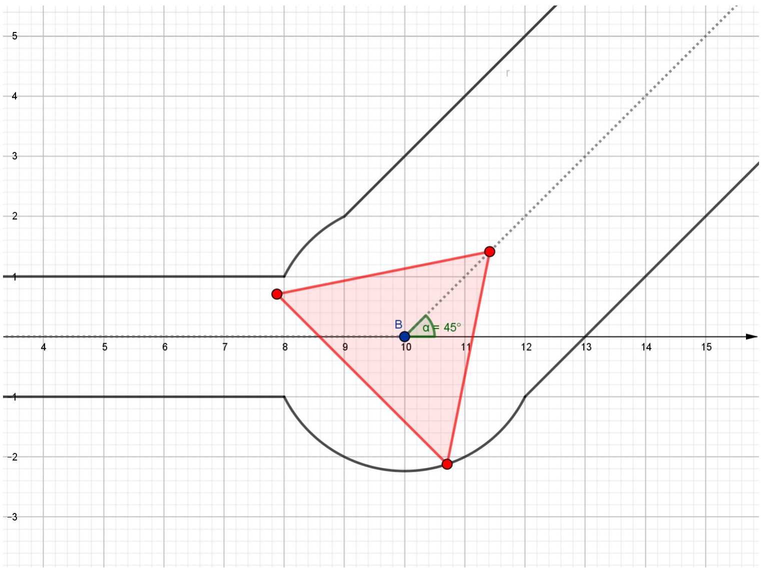


Figura 4.15: Rotação

Para realizar o trajeto do ponto B em direção ao ponto C, realizaremos a soma de cada um de seus vértices ao vetor $\overrightarrow{BC} = (6,6)$, por meio de uma transformação de translação, obtendo a matriz $T_5 = T_4 + \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$, representada na figura 4.16.

$$T_5 = \begin{bmatrix} 10+\sqrt{2} & \frac{20-3\sqrt{2}}{2} & \frac{20+\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T_5 = \begin{bmatrix} 16+\sqrt{2} & \frac{32-3\sqrt{2}}{2} & \frac{32+\sqrt{2}}{2} \\ 6+\sqrt{2} & \frac{12+\sqrt{2}}{2} & \frac{12-3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

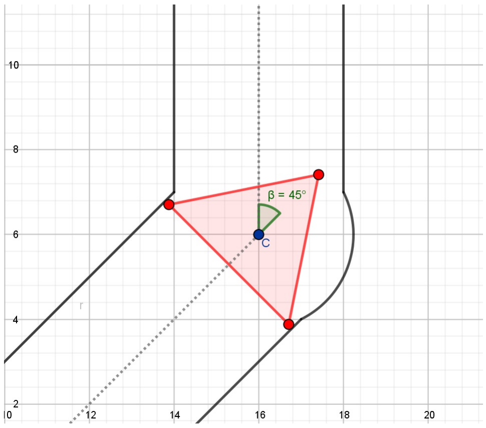


Figura 4.16: coelho no ponto C

Para entrar no túnel que dá acesso ao ponto D, o coelho deve rotacionar mais 45 no sentido anti-horário em torno do ponto $C(16, 6)$. Assim, aplicaremos a transformação abaixo em cada um de seus vértices, obtendo a matriz T_6, como na figura 4.17.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 16 \\ y - 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 18 \\ 18 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

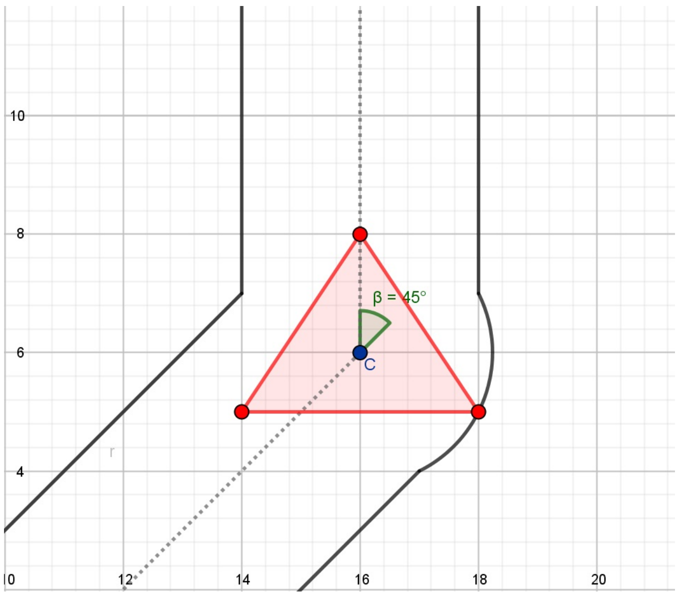


Figura 4.17: coelho no ponto C, rotacionado 45º

Agora, para deslocar o coelho até a comida no ponto $D(16, 24)$, iremos somar cada vértice do triângulo ao vetor $\overrightarrow{CD} = (0, 18)$ obtendo os pontos representados na matriz T_7, usando a transformação por translação, como vemos na figura 4.18.

$$T_7 = T_6 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$T_7 = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 18 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$T_7 = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 18 \\ 26 & 23 & 23 \end{bmatrix}$$

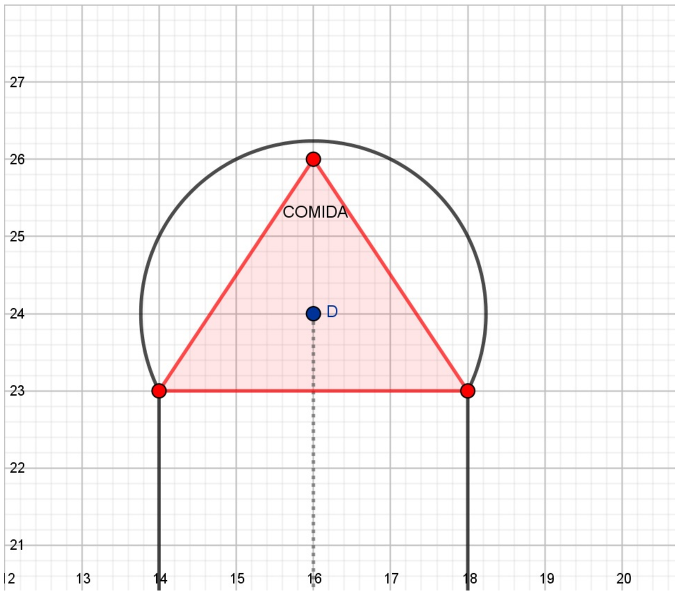


Figura 4.18: coelho no ponto D, onde está a comida

Considerações Finais

Esta dissertação foi idealizada com a intenção de apresentar aos professores, alunos e aos que vierem a ler este trabalho uma maneira de abordar as transformações geométricas no plano no Ensino Médio, a partir dos assuntos de funções, vetores e matrizes.
Aproveitamos esta oportunidade para abordar sobre espaços vetoriais, visto que com esta teoria podemos unificar todos os possíveis espaços, vetores, matrizes, polinômios, funções, com uma linguagem única, diminuindo a distancia entre a Álgebra Linear e o aluno do ensino médio.
Dessa maneira acreditamos que esta proposta possa verdadeiramente contribuir, como uma boa alternativa, para relacionar os conteúdos matemáticos, de forma inovadora e que os assuntos abordados possam ser vistos de forma indissociável.
Acreditamos que o trabalho desenvolvido nesta dissertação, possibilite novas pesquisas, sobre o assunto abordado, colaborando com a melhora do ensino de matemática nas escolas brasileiras.
Sem dúvida, este trabalho não tem a intenção de esgotar as possibilidades, e nem mostrar uma maneira única do ensino de transformações no plano para o ensino médio, mas sim contribuir para novas possibilidades oportunizando adaptações a cada uma realidade de acordo com as intensões dos leitores/professores.
É fato que, esta proposta é uma possibilidade para o ensino de transformações no plano, realizando interações entre os conteúdos, e após sua aplicação em um teste, pode-se analisar os resultados para trabalhos futuros e adaptações e melhoramentos que forem pensados.

Referências Bibliográficas

[1] Anton, H., and Rorres, C. *Algebra Linear com aplicações*, 10 ed. Bookman, Porto Alegre, 2009.

[2] de Camargo, I., and Boulos, P. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, 3 ed. Prentice Hall, São Paulo, 2005.

[3] de Carvalho, J. P. *Vetores, geometria analítica e álgebra linear*, 1 ed. Ao Livro Técnico S.A. - Indústria e Comércio, Rio de Janeiro, 1975.

[4] Hefez, A. *Curso de Álgebra*, 3 ed., vol. 1. IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[5] Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., and de Almeida, N. *Matemática ciência e aplicações*, 7 ed., vol. 2. Saraiva, São Paulo, 2013.

[6] Iezzi, G., and Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar*, 8 ed., vol. 4. Atual Editora, São Paulo, 2013.

[7] Steinbruch, A., and Winterle, P. *Geometria analítica*, 2 ed., vol. 3. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2010.

[8] Steinbruch, A., and Winterle, P. *Álgebra linear*, 2 ed. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2010.

[9] Winterle, P. *Vetores e geometria analítica*, 2 ed. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2014.