

UNIVERSIDADE FEDERAL ESPÍRITO SANTO - UFES



UFES

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E SUAS APLICAÇÕES: ÁREAS E VOLUMES

LUIZA LUCIA MENDES DA COSTA MACHADO

Vitória - Espírito Santo

JUNHO DE 2021

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E SUAS APLICAÇÕES: ÁREAS E VOLUMES

LUIZA LUCIA MENDES DA COSTA MACHADO

Dissertação de Mestrado apresentada
à Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFES como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Antonio dos
S. Bayer.

Vitória - Espírito Santo

Junho de 2021

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E SUAS APLICAÇÕES: ÁREAS E VOLUMES

LUIZA LUCIA MENDES DA COSTA MACHADO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 29 de Junho de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos S. Bayer (Orientador)
UFES

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva
UFES

Prof. Dr. Pedro Matos da Silva
IFES

Dedico este trabalho a todos que lutam por uma sociedade mais justa e humana.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter me proporcionado a chance de realizar este curso.

Agradeço ao meu pai Luiz Claudio e minha mãe Luzia pelo apoio e incentivo de sempre.

Ao meu marido Flávio pela paciência e compreensão naquelas horas em que não estive presente devido aos estudos.

Às minhas irmãs Karoliny e Klaudia pelas palavras amigas nos momentos de desespero.

Aos meus amigos do PROFMAT por terem compartilhado o conhecimento de vocês nos grupos de estudos.

Aos mestres que me ensinaram a matemática.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Obrigado a todos que acreditaram no meu potencial, sem vocês não eu teria chegado até aqui.

*“Aquilo que se faz por amor está
sempre além do bem e do mal”.*
(Friedrich Nietzsche)

Resumo

A Matemática possui prestígio e se destaca por sua utilidade prática: as áreas de geometria, de grandezas e medidas possibilitam ao homem uma compreensão espacial do mundo e se complementam. Algumas grandezas geométricas, como áreas e volumes, são elos de ligação entre essas áreas da Matemática e são conceitos importantes, os quais devem ser trabalhados com os estudantes ainda em idade escolar. A dissertação em tela visa contribuir para o ensino e aprendizagem de áreas e volumes, proporcionando um estudo teórico-metodológico sobre estas grandezas, amparado no Princípio de Cavalieri e buscando a dedução das fórmulas para o cálculo de áreas e volumes para diferentes figuras planas e sólidos geométricos, respectivamente. Para isso, descreve-se inicialmente um estudo sobre as orientações presentes em documentos oficiais da educação brasileira a respeito da grandeza volume; contextualiza-se o conceito de volume historicamente, abordando a contribuição de diversos matemáticos, com destaque para a influência de Cavalieri e seu Princípio e define-se os conceitos de área e volume propondo, através de sequências didáticas, processos para dedução de fórmulas para o cálculo destas grandezas em figuras planas e sólidos geométricos – a partir do Princípio de Cavalieri. De modo a promover um estudo mais abrangente sobre as grandezas e os sólidos geométricos, busca-se analisar cada tipo de sólido, destacando seus elementos, nomenclaturas e classificações. Para evidenciar a utilidade prática de volumes e do Princípio de Cavalieri, finaliza-se esta dissertação apresentando aplicações na resolução de problemas diversos. O trabalho fornece ainda conceitos matemáticos com o necessário rigor, mas de forma acessível aos alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Volume, Área, Princípio de Cavalieri.

Abstract

Mathematics has prestige and stands out for its practical usefulness: the areas of geometry, magnitudes and measures enable man to have a spatial understanding of the world and complement each other. Some geometrical quantities, such as areas and volumes, are the links between these areas of Mathematics and are important concepts, which must be worked with students still in school age. The screen research aims to contribute to the teaching and learning of areas and volumes, providing a theoretical and methodological study on these quantities, based on Cavalieri's Principle and seeking to deduce formulas for the calculation of areas and volumes for different flat and solid figures geometric, respectively. To this end, a study is initially described on the guidelines present in official documents of Brazilian education regarding the greatness of volume; the concept of volume is contextualized historically, addressing the contribution of several mathematicians, with emphasis on the influence of Cavalieri and his Principle and the concepts of area and volume are defined by proposing, through didactic sequences, processes for deducting formulas for the calculation of these quantities in flat figures and geometric solids - based on Cavalieri's Principle. In order to promote a more comprehensive study on the quantities and geometric solids, we seek to analyze each type of solid, highlighting its elements, nomenclatures and classifications. In order to highlight the practical usefulness of volumes and the Cavalieri Principle, this research ends with applications for solving various problems. The research also provides mathematical concepts with the necessary rigor, but in an accessible way to high school students.

Keywords: Volume, Area, Cavalieri's Principle.

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Papiro de Moscou | 20 |
| 1.2 | Indivisíveis de Cavalieri | 21 |
| 1.3 | Bonaventura Francesco Cavalieri | 22 |
| 1.4 | Geometria dos Indivisíveis | 24 |
| 3.1 | Quadrado de lado n | 32 |
| 3.2 | Quadrado de lado 5 decomposto em $5^2 = 25$ quadrados unitários | 32 |
| 3.3 | Quadrados Q e Q' | 33 |
| 3.4 | Quadrado Q e retângulo R | 34 |
| 3.5 | Aproximação por falta | 35 |
| 3.6 | Princípio de Cavalieri para áreas | 36 |
| 3.7 | Paralelogramo $ABCD$ | 37 |
| 3.8 | Área de um paralelogramo | 38 |
| 3.9 | Área de triângulo ABC | 38 |
| 3.10 | Trapézio $ABCD$ | 39 |
| 3.11 | Losango $ABCD$ | 40 |
| 4.1 | Material dourado | 42 |
| 4.2 | Bloco Retangular | 43 |
| 4.3 | Cubo de aresta 4 decomposto | 43 |
| 4.4 | Cubo unitário decomposto | 44 |
| 4.5 | Poliedro retangular | 46 |
| 4.6 | Aproximação inferior para o volume de um sólido | 46 |
| 4.7 | Tronco de cone aproximado por blocos retangulares | 47 |
| 4.8 | Pilhas de cartas com mesmo volume | 48 |
| 4.9 | Sólidos de mesmo volume | 49 |
| 4.10 | Prisma | 50 |
| 4.11 | Elementos do prisma | 51 |
| 4.12 | Nomenclatura dos prismas | 52 |
| 4.13 | Classificação dos prismas | 53 |

| | |
|---|----|
| 4.14 Paralelepípedo | 53 |
| 4.15 Paralelepípedo Retângulo | 54 |
| 4.16 Cubo | 54 |
| 4.17 Volume de um prisma | 55 |
| 4.18 Cilindro | 56 |
| 4.19 Cilindro reto e cilindro oblíquo | 56 |
| 4.20 Volume do cilindro | 57 |
| 4.21 Pirâmide qualquer | 58 |
| 4.22 Pirâmide | 58 |
| 4.23 Nomenclatura das pirâmides | 59 |
| 4.24 Secção de pirâmide | 60 |
| 4.25 Razão de semelhança | 61 |
| 4.26 Pirâmides de mesma base e altura | 62 |
| 4.27 Prisma triangular | 63 |
| 4.28 Decomposição do prisma em pirâmides | 63 |
| 4.29 Volume da pirâmide | 64 |
| 4.30 Cone | 65 |
| 4.31 Volume do cone | 66 |
| 4.32 Esfera | 66 |
| 4.33 Seção de uma esfera | 67 |
| 4.34 Área da seção | 67 |
| 4.35 Volume da esfera | 68 |
| 4.36 Cunha esférica | 69 |
| 4.37 Segmento esférico | 70 |
| 4.38 Volume de um segmento esférico | 70 |
| 4.39 Calota esférica | 72 |
| 4.40 Volume de uma calota esférica | 72 |
| 4.41 Rotação do círculo em torno do eixo vertical | 74 |
| 4.42 Toro | 74 |
| 4.43 Toro e cilindro | 75 |
| 4.44 Interseção de dois cilindros circulares | 76 |
| 4.45 Sólido gerado pela interseção de dois cilindros circulares | 76 |
| 4.46 Interseção parcial dos cilindros | 77 |
| 4.47 Secções nos sólidos S e C | 77 |
| 4.48 Problema 1 sobre volumes | 79 |
| 4.49 Problema 1 sobre volumes - solução | 79 |
| 4.50 Problema 2 sobre volumes | 80 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.51 | Problema 3 sobre volumes | 81 |
| 4.52 | Problema 3 sobre volumes - solução | 82 |
| 4.53 | Problema 4 sobre volumes - solução | 82 |
| 4.54 | Altura do tetraedro regular | 83 |
| 4.55 | Problema 5 sobre volumes - solução | 84 |
| 4.56 | Questão 61 - ENEM 2015 | 85 |
| 4.57 | Questão 61 - ENEM 2015 - Solução | 86 |
| 4.58 | Questão 59 - ENEM 2016 | 87 |
| 4.59 | Bloco e esfera | 88 |
| 4.60 | Bloco e esfera - solução | 89 |

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

ENQ - Exame Nacional de Acesso

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

MEC - Ministério da Educação

OCN - Orientações Curriculares Nacionais

PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SEDU-ES - Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Um Pouco de História | 19 |
| 1.1 | A Grandeza Volume | 19 |
| 1.2 | A História de Cavalieri | 22 |
| 1.3 | Contribuições de Cavalieri na Geometria | 23 |
| 2 | A Grandeza Volume nos Documentos Oficiais de Educação do Brasil | 27 |
| 3 | O Princípio de Cavalieri para Regiões Planas | 30 |
| 3.1 | O Conceito de Área | 30 |
| 3.1.1 | A Ideia de Área | 31 |
| 3.1.2 | Área de Polígonos | 31 |
| 3.1.3 | Área do Quadrado | 31 |
| 3.1.4 | Área do Retângulo | 34 |
| 3.1.5 | Definição de Área de uma Figura Plana | 34 |
| 3.2 | O Princípio de Cavalieri para Áreas | 35 |
| 3.2.1 | Área do Paralelogramo | 37 |
| 3.2.2 | Área do Triângulo | 38 |
| 3.2.3 | Área do Trapézio | 39 |
| 3.2.4 | Área do Losango | 39 |
| 4 | O Princípio de Cavalieri para Sólidos | 41 |
| 4.1 | O Conceito de Volume | 41 |
| 4.1.1 | Uma Ideia Intuitiva de Volume | 41 |
| 4.1.2 | Volume de um Bloco Retangular | 42 |
| 4.1.2.1 | Volume de um Cubo | 43 |
| 4.1.2.2 | Volume de um Bloco Retangular Qualquer | 45 |
| 4.1.3 | Definição Geral de Volume | 45 |
| 4.2 | O Princípio de Cavalieri para Volumes | 48 |
| 4.3 | Aplicações do Princípio de Cavalieri | 50 |
| 4.3.1 | Prisma | 50 |

| | | |
|----------|--|----|
| 4.3.1.1 | Volume de um Prisma | 54 |
| 4.3.2 | Cilindro | 55 |
| 4.3.2.1 | Volume de um Cilindro | 57 |
| 4.3.3 | Pirâmide | 58 |
| 4.3.3.1 | Volume de uma Pirâmide | 60 |
| 4.3.4 | Cone | 64 |
| 4.3.4.1 | Volume de um Cone | 65 |
| 4.3.5 | Esfera | 66 |
| 4.3.5.1 | Volume de uma Esfera | 68 |
| 4.3.6 | Cunha Esférica | 69 |
| 4.3.6.1 | Volume de uma Cunha Esférica | 69 |
| 4.3.7 | Segmento Esférico | 70 |
| 4.3.7.1 | Volume de um Segmento Esférico | 70 |
| 4.3.8 | Calota Esférica | 72 |
| 4.3.8.1 | Volume de uma Calota Esférica | 72 |
| 4.3.9 | Toro | 73 |
| 4.3.9.1 | Volume de um Toro | 74 |
| 4.3.10 | Interseção de Dois Cilindros de Mesmo Raio | 76 |
| 4.3.10.1 | Volume da Interseção de Dois Cilindros de Mesmo Raio | 77 |
| 4.4 | Resolução de Problemas | 78 |
| 4.4.1 | Problemas Sobre Volumes | 78 |
| 4.4.2 | Problemas com Aplicação do Princípio de Cavalieri | 85 |

5 Considerações Finais

Introdução

A matemática possui prestígio, está presente em diversas situações da vida e oferece soluções práticas para muitos problemas. Mesmo esta sendo a opinião de várias pessoas, muitas vezes na escola, a matemática se destaca mais pelas dificuldades e pelo medo que desperta nos alunos do que por sua importância e utilidade. Percebe-se com certa frequência falta de relação entre a matemática da vida e a escolar, fazendo com que seja vista por alguns estudantes como fria e complicada (THOMAZ, 1999, p. 6). Às vezes, os alunos trazem de suas vivências raciocínios matemáticos bem estruturados, mas não conseguem aplicá-los na escola, pois os conhecimentos que ali são trabalhados não possuem relações com suas experiências (THOMAZ, 1999, p. 7).

À medida que os alunos avançam na educação escolar, as dificuldades com a Matemática tornam-se mais perceptíveis. No Ensino Fundamental, os alunos percebem facilmente as possibilidades de aplicações cotidianas dos conteúdos estudados, mas no Ensino Médio, relacionar a matemática com a vida prática nem sempre é imediato (BRASIL, 2005, p. 3).

A construção da Matemática está diretamente relacionada à experiência humana ao longo de sua história. Não foi construída por poucos intelectuais em um curto intervalo de tempo e tampouco é um produto pronto e acabado. Seu desenvolvimento gradual, contou com a contribuição de diversas pessoas pertencentes a diferentes culturas e sociedades, em momentos distintos da história da humanidade e continua em permanente evolução (BRASIL, 2018, p. 522). É importante despertar nos alunos a relevância da matemática e seu significado enquanto conhecimento da humanidade (THOMAZ, 1999, p. 6).

Reforçando este pensamento, em um contexto do Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que “um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história” (BRASIL, 2018, p. 522). O aspecto cultural da matemática tem um papel importante na formação de indivíduos conscientes e cabe ao Ensino Médio contribuir para a formação crítica e autônoma dos estudantes (BRASIL, 2018, p. 463).

No Ensino Médio, a matemática possui valor formativo contribuindo para a construção do pensamento e do raciocínio dedutivo e uma função instrumental, pois serve como ferramenta para a resolução de problemas do mundo em que vivemos (BRASIL, 2000, p. 40). É ainda um meio de comunicação. A linguagem matemática é universal, formal e requer constante prática. Neste nível de ensino os alunos aprofundam o estudo de sua “gramática” e passam a compreender como utilizá-la com mais rigor (BRASIL,

2005, p. 9).

É um desejo de muitos educadores que seus alunos atinjam níveis de ensino além do Ensino Médio, mas isso não é possível sem uma base firme de matemática. Por isso, é importante mostrar aos estudantes que a matemática pode proporcionar possibilidades interessantes no futuro (BRASIL, 2005, p. 3).

Uma área da matemática que contribui para a compreensão do mundo é a Geometria. “A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços” (BRASIL, 2002, p. 120). É uma ferramenta interessante para descrição e interação com o espaço no qual vivemos e é possivelmente a área da matemática mais concreta e relacionada com a realidade. Desta forma, é papel da escola fornecer aos alunos uma boa base de conhecimentos geométricos.

O processo de aprendizagem de geometria se dá por etapas e à medida que os alunos avançam, aprimoram importantes habilidades como visualização geométrica, raciocínio lógico, construção geométrica e compreensão de sistemas dedutivos. No ensino fundamental os alunos refletem através de experimentações e deduções informais a respeito de conceitos básicos de geometria, especialmente de geometria plana. No ensino médio ocorre um aprofundamento das ideias e conceitos geométricos. Os alunos passam a analisar e compreender postulados, teoremas e demonstrações, bem como passam a conhecer e refletir sobre as inúmeras possibilidades de aplicação da geometria na resolução de problemas práticos da vida (BRASIL, 2002, p. 120).

As formas tridimensionais, suas representações, planificações e relações com objetos do mundo real são trabalhadas e aprofundadas no ensino médio e estes conceitos ficam alocados dentro da unidade temática Geometria Espacial (BRASIL, 2002, p. 120). Seu estudo tem importância na formação do aluno, pois através dela consegue perceber relações entre os conceitos matemáticos formais e as necessidades da vida humana. Para isso, é necessário que se explore a relação entre a matemática escolar e a matemática da vida real. A geometria espacial ao receber um tratamento mais contextualizado pode ser melhor compreendida pelos estudantes e permitir que eles assimilem melhor alguns conceitos e resultados.

Outra área da matemática de relevância e utilidade prática é a de grandezas e medidas. Desde os primórdios da humanidade interessou-se pelo ato de medir e foi justamente esta necessidade que motivou o início dos estudos sobre sistemas de numeração, da geometria, entre outros. Na sociedade atual este conhecimento não é menos importante, pois está presente em diferentes atividades da vida humana como na agricultura, construção civil, culinária, costura, entre outros.

O campo de grandezas e medidas é vasto e contempla grandezas de naturezas diversas como velocidade, tempo, massa, etc. Destacam-se ainda neste campo as chamadas grandezas geométricas como comprimento, área e volume. Estas grandezas são tratadas por alguns como parte da geometria, mas recomendações curriculares recentes as incluem na área de grandezas e medidas (LIMA e BELLEMAIN, 2010, p. 136). Ainda segundo os autores Lima e Bellemain, “o estudo das grandezas geométricas é uma maneira privilegiada de se promover a ligação entre esses dois importantes campos da matemática escolar” (LIMA e BELLEMAIN, 2010, p. 137).

Os argumentos expostos acima evidenciam a relevância dos campos de geometria, de grandezas e medidas na formação escolar dos estudantes. Também justificam a motivação pela escolha do estudo sobre grandezas geométricas, especialmente a grandeza volume, nesta dissertação.

Tratando-se da grandeza volume, faz sentido refletir sobre como calculá-la para diferentes tipos de figuras tridimensionais. Neste contexto o Princípio de Cavalieri ganha destaque, pois é uma ferramenta interessante para o cálculo dos volumes de sólidos geométricos.

Diferentes documentos oficiais de educação orientam quanto à utilização do Princípio de Cavalieri para justificar as fórmulas para cálculo de volume dos principais sólidos geométricos em estudos com alunos do Ensino Médio (MORAIS, 2013, p. 38). Porém, diversos livros didáticos não o mencionam ou limitam-se apenas a um breve comentário sobre ele e isso faz com que muitos professores contentem-se em fornecer fórmulas prontas para volume dos principais sólidos sem justificar suas origens. Isso compromete a aprendizagem dos alunos e contribui para que a matemática seja considerada por alguns como distante da realidade e de difícil compreensão.

Desta forma, escolheu-se dedicar esta dissertação ao estudo da grandeza volume amparada no Princípio de Cavalieri para oferecer aos docentes e discentes do Ensino Médio uma fundamentação teórica e prática acerca deste princípio e de todo o processo de obtenção das tão conhecidas fórmulas para cálculo dos volumes de sólidos geométricos. Além disso, por dispensar o uso de cálculo integral, este princípio pode ser trabalhado com alunos de ensino médio, permitindo aplicações diferentes das de sólidos tradicionais. Iremos abordar o Princípio de Cavalieri como um axioma e com alguns exemplos é possível convencer os estudantes de sua validade. Desta forma, podemos justificar vários resultados sobre o estudo de volumes. Espera-se que esta dissertação possa contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de volumes e motivar o espírito de investigação em alunos e professores.

O objetivo geral desta dissertação é proporcionar um estudo teórico e prático sobre áreas e volumes, amparados no Princípio de Cavalieri, para dedução das fórmulas de

cálculo destas grandezas para diferentes figuras planas e sólidos geométricos.

Os objetivos específicos da dissertação são:

- Destacar as orientações de documentos oficiais sobre volume;
- Contextualizar historicamente a grandeza volume e Cavalieri;
- Definir áreas e volumes;
- Definir e aplicar o Princípio de Cavalieri para áreas e volumes.

Esta dissertação é constituída por 5 capítulos. O Capítulo 1 fornece uma pesquisa histórica sobre a grandeza volume destacando seu desenvolvimento ao longo da história e personalidades que contribuíram para sua estruturação. O capítulo apresenta ainda um pouco da história do matemático Bonaventura Cavalieri e destaca suas contribuições no ramo da Geometria.

O Capítulo 2 apresenta orientações de diferentes documentos oficiais da educação e orientações curriculares sobre o ensino da grandeza volume no ensino médio.

O Capítulo 3 trata do Princípio de Cavalieri para regiões planas. Define o conceito matemático de área. Por meio de uma sequência didática, aplica o Princípio de Cavalieri na dedução de fórmulas para cálculo de áreas de algumas figuras planas.

O Capítulo 4 trata do Princípio de Cavalieri e aplicações para sólidos geométricos. Define o conceito matemático de volume. Por meio de uma sequência didática, aplica o Princípio de Cavalieri na dedução de fórmulas para cálculo de volumes de alguns sólidos geométricos. O capítulo também apresenta aplicações de volume e do Princípio de Cavalieri na resolução de problemas diversos.

O Capítulo 5 fornece as considerações finais sobre a dissertação, destacando os pontos relevantes, amparados na fundamentação teórica e propondo possibilidades para a continuidade deste estudo.

Capítulo 1

Um Pouco de História

Neste capítulo apresentaremos um pouco da história e desenvolvimento dos processos para cálculo de volumes, a história de Bonaventura Cavalieri e suas contribuições para a geometria e o cálculo de volumes.

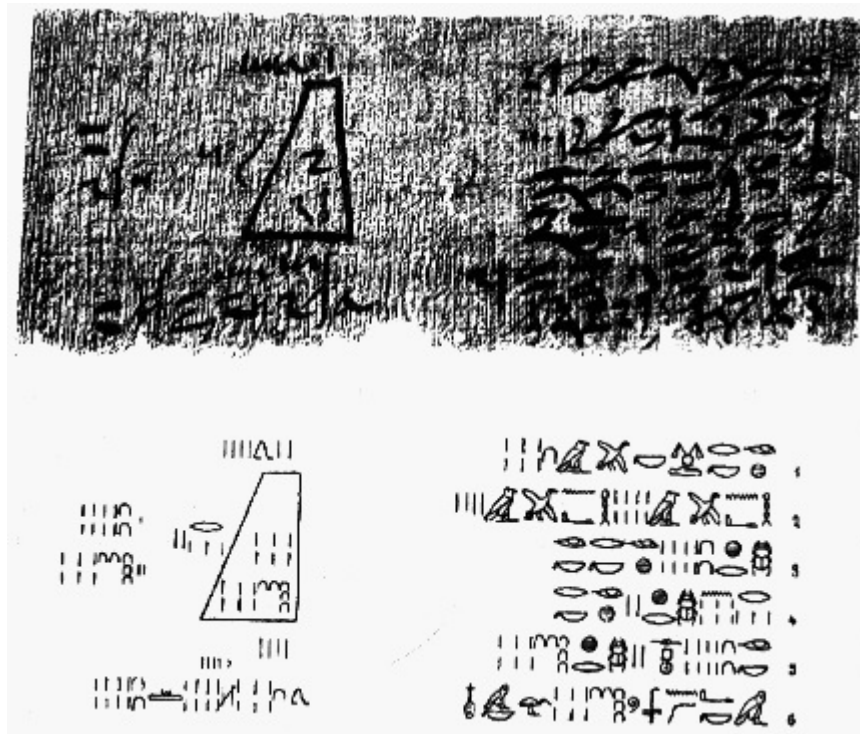
1.1 A Grandeza Volume

Nos tempos antigos o homem fez descobertas geométricas a partir de observações do cotidiano. Os babilônios e egípcios aplicavam noções primitivas de geometria para resolverem problemas diversos, dentre eles o cálculo de comprimentos, áreas e volumes, porém sem o uso de demonstrações e conceituações teóricas formais (EVES, 2011, p. 60).

Os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. conheciam o cálculo da área do retângulo, do triângulo retângulo isósceles e do trapézio retângulo, também o volume de um paralelepípedo reto-retângulo, prisma reto de base trapezoidal e de um cilindro circular. Calculavam erroneamente o volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular como o produto da altura pela semissoma das bases (EVES, 2011, p. 60).

Os egípcios desenvolveram fórmulas de mensuração para cálculo de áreas de terras e volume de grãos. Calculavam o volume de um cilindro reto como o produto da área da base pelo comprimento da altura. O Papiro de Moscou, de origem egípcia, apresenta um problema com a fórmula correta para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide quadrada (EVES, 2001, p. 75). A figura a seguir apresenta este problema no Papiro de Moscou com a transcrição hieroglífica.

Figura 1.1: Papiro de Moscou



Fonte: Imática.¹

Os primeiros indivíduos conhecidos como matemáticos foram Tales de Mileto (625 - 546 a.C.) e Pitágoras (570 - 495 a.C.), responsáveis pelas primeiras demonstrações matemáticas. Iniciou-se com eles o desenvolvimento da geometria pelos gregos, que organizaram dedutivamente, com axiomas, teoremas, entre outros, o modelo matemático cuja estrutura é utilizada até hoje (BOYER, 2010, p. 34-35).

Por volta de 300 a.C., Euclides se destaca como autor de *Os Elementos*, obra composta por treze livros contemplando conceitos de geometria, aritmética e álgebra. O cálculo de volumes é apresentado no Livro XII dos Elementos. Euclides calculou os volumes do cilindro, prisma, pirâmide e cone, mas não apresentou uma fórmula para o volume da esfera (EVES, 2011, p. 165-175).

Em meados de 200 a.C., Arquimedes publicou o trabalho intitulado *Sobre a esfera e o cilindro*, composto por dois livros, nos quais apresenta as áreas de uma esfera e de uma calota esférica. Apresentou ainda, com rigor e elegância, o cálculo do volume da esfera (EVES, 2011, p. 194).

Herão, em meados do século I d.C., contribuiu com trabalhos geométricos dos quais destaca-se a obra intitulada *A Métrica* composta por três livros. O Livro I dedicou-se à medida de área para diversas figuras planas e espaciais: quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, outros quadriláteros particulares, polígonos regulares desde o triângulo equilátero

¹Disponível em: <<http://www.matematica.br/historia/pmoscou.html>>. Acesso em: 25 set. 2020.

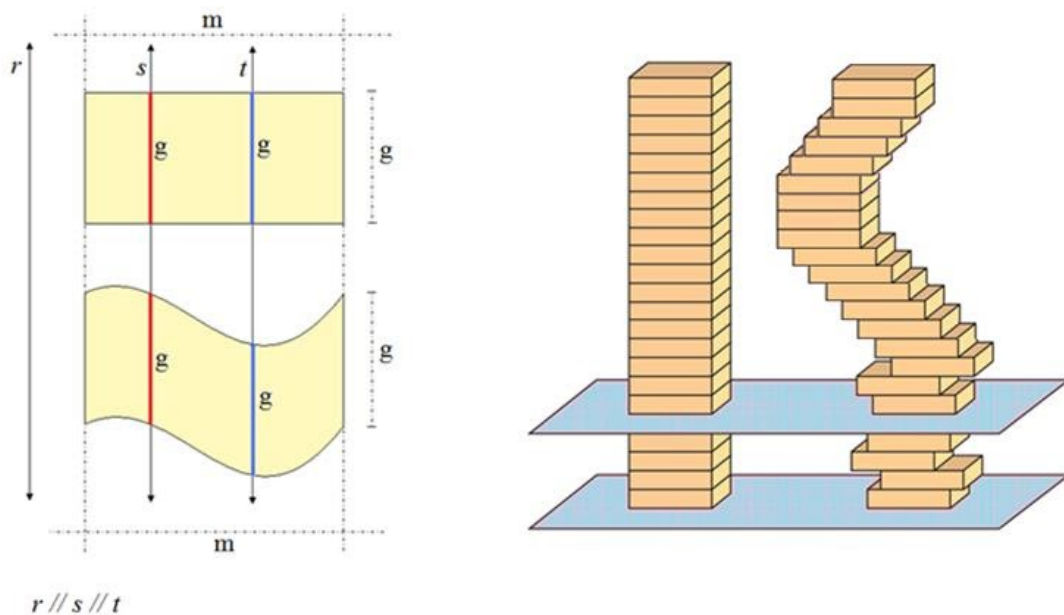
até o dodecágono regular, círculos e seus segmentos, elipses, segmentos parabólicos e da superfície de cilindros, cones, esferas e zonas esféricas. Já o Livro II ocupou-se com a mensuração de volumes de cones, cilindros, paralelepípedos, prismas, pirâmides, troncos de cones e de pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros, os cinco sólidos regulares e alguns prismatoides (EVES, 2011, p. 205).

As metodologias utilizadas pelos matemáticos antigos eram engenhosas e trabalhosas. Atualmente, o cálculo do volume é realizado de forma mais rápida através de conceitos do cálculo infinitesimal.

Johann Kepler (1571 - 1630 d.C.) foi um dos precursores do cálculo. Desenvolveu um processo de cálculo integral ainda primitivo e com ele encontrou o volume de 93 sólidos obtidos pela rotação de segmentos de seções cônicas em torno de um eixo no plano. Acredita-se que este trabalho de Kepler tenha influenciado Cavalieri em seu *método dos indivisíveis* (EVES, 2011, p. 358).

No início do século XVII, o padre italiano Bonaventura Cavalieri, deu um grande passo na matemática com o seu livro: *Geometria Indivisibilibus Continuorum* (Geometria dos Indivisíveis). Neste livro está enunciado o seu princípio, tema deste trabalho (EVES, 2011, p. 425). Cavalieri considera uma região plana como formada por cordas paralelas e um sólido como constituído de placas planas paralelas, como pode ser observado na figura a seguir.

Figura 1.2: Indivisíveis de Cavalieri



Fonte: Portal da Matemática.²

²Disponível em: <<http://mauroweigel.blogspot.com/2010/08/bonaventura-cavalieri.html>>. Acesso em: 25 set. 2020.

Newton e Leibniz, na segunda metade do século XVII, a partir dos trabalhos iniciais de Fermat e Descartes, desenvolveram o Cálculo Infinitesimal. As ideias de Cavalieri influenciaram fortemente Leibniz. E Newton usou a terminologia introduzida por Cavalieri em alguns de seus trabalhos (EVES, 2011, 436-445).

No próximo capítulo discutiremos mais sobre o princípio de Cavalieri e abordaremos a sua aplicação no cálculo de áreas e volumes.

1.2 A História de Cavalieri

Nesta seção, apresentamos uma breve biografia de Cavalieri. Os relatos históricos fornecidos baseiam-se no artigo *Bonaventura Francesco Cavalieri* de JJ O'Connor e EF Robertson (2014).

Figura 1.3: Bonaventura Francesco Cavalieri



Fonte: Maths history.³

Bonaventura Francesco Cavalieri nasceu em Milão, na Itália no ano de 1598. Ainda menino tornou-se membro da ordem religiosa dos Jesuati, sendo, posteriormente, em 1616, transferido para o mosteiro da referida ordem. Lá aprendeu Matemática e conheceu os trabalhos de Euclides que estimularam seu interesse pela área. Ainda no mosteiro, Cavalieri foi discípulo de Galileu.

³Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri/>>. Acesso em: 25 set. 2020.

Em 1619, candidatou-se para a cadeira de Matemática em Bolonha, mas foi considerado muito jovem para a posição. Em 1621, ordenou-se diácono e assistente do cardeal Frederico Borromeo no mosteiro em Milão. Começou a ensinar Teologia e somente depois de oito anos foi apontado para a cadeira de Matemática em Bolonha, em 1629.

Em 1632, Cavalieri publicou o livro *Directorium Universale Uranometricum*. Neste trabalho divulgou tabelas de senos, tangentes, secantes, cossenos e logaritmos e foi um dos que viabilizaram a introdução dos logaritmos como uma ferramenta computacional na Itália.

Em 1635, publicou *Geometria Indivisibilibus Continuorum*, sua obra mais conhecida, desenvolvendo a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas: uma região, por exemplo, pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou “indivisíveis” e que um sólido pode ser considerado como composto de regiões que têm volumes indivisíveis. O raciocínio utilizado é similar ao desenvolvido por Arquimedes, e a diferença está no modo como demonstraram esta ideia. A teoria de Cavalieri foi utilizada até ser substituída pelo Cálculo Integral e permitiu-lhe determinar rapidamente áreas e volumes de figuras e sólidos geométricos.

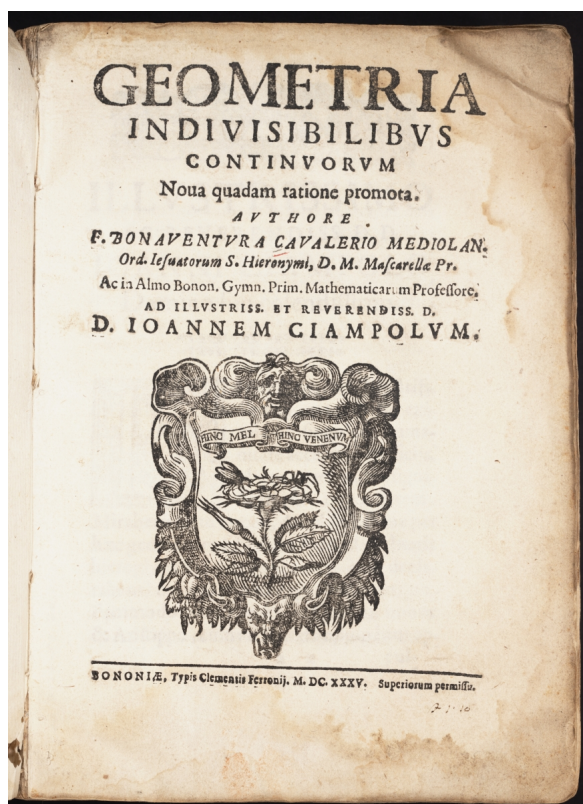
Por não apresentar o rigor matemático esperado para a época, seu método recebeu críticas. Então, em 1647, ele publicou a obra *Exercitationes geometricae*, apresentando sua teoria de forma mais clara. Essa obra se tornou importante fonte para os matemáticos do século XVII.

Cavalieri também escreveu trabalhos sobre Astronomia e Óptica e manteve correspondência com muitos matemáticos da época, entre eles Galileu, Torricelli e Viviani. Ele permaneceu na Itália até sua morte no dia 30 de novembro de 1647.

1.3 Contribuições de Cavalieri na Geometria

Cavalieri colaborou e influenciou a matemática, nas áreas de geometria, trigonometria e astronomia. Foi o primeiro autor italiano a mensurar os logaritmos, mas é lembrado por um dos livros mais importantes do início do período moderno, “*A Geometria indivisibilibus continuorum*”, publicado em 1635. Sua principal influência para este trabalho está nas tentativas anteriores de Kepler em achar certas áreas e certos volumes (EVES, 2011, p. 425).

Figura 1.4: Geometria dos Indivisíveis



Fonte: MAA.⁴

Nessa obra, Cavalieri aborda o *método dos indivisíveis*, onde fala que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos e que o volume pode ser composto de áreas que são volumes indivisíveis. Esse método não era baseado em aproximações e sim em uma correspondência dos elementos um a um. O historiador Howard Eves descreve o tratado e as ideias de área e volume pensadas por Cavalieri:

O tratado de Cavalieri é longo demais e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por indivisível. Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado por uma infinidade de secções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original (este último resultado pode ser ilustrado claramente formando-se uma pilha vertical de cartas e depois deformando suas laterais transformando-as em superfícies curvas; o volume evidentemente não se altera com essa deformação). Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados Princípios de Cavalieri (EVES, 2011, p. 425-426).

⁴Disponível em: <<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-cavalieri-s-geometria-indivisibilibus>>. Acesso em: 25 set. 2020.

Em sua obra “*A Geometria indivisibilis continuorum*”, Cavalieri diz que “os conjuntos formados por todas as linhas de uma figura e por todos os planos de um corpo geométrico são grandezas que podem ter relações determinadas com os conjuntos correspondentes de outra figura ou corpo” (PINTO, 2008, p. 71). Em outras palavras, a argumentação era baseada na possibilidade de igualar uma dada figura a uma parte de outra e assim, o conjunto das linhas da primeira estará para o conjunto das linhas da segunda, na proporção da parte em relação ao todo (PINTO, 2008, p. 71).

É possível afirmar que Cavalieri compara o indivisível de um corpo a uma superfície, o de uma superfície a uma linha e o de uma linha a um ponto. Porém Cavalieri empregava o termo *indivisíveis* de forma reduzida em sua teoria. Essa palavra não aparece escrita nas demonstrações ou nos raciocínios, mas apenas nos comentários e notas explicativas. Cavalieri usa expressões como (conjunto de) “todas as linhas da superfície” e “todos os planos de um sólido” como correspondentes dos “indivisíveis” (DE GANDT, 1986, p.37-38).

Quando Cavalieri mencionava “todas as linhas” (*omnes lineae*) ou “todos os planos” (*omnia plana*) de uma figura geométrica e os chamava de equivalentes a essa figura, não estava calculando as “somas” dessas linhas ou desses planos. Ele afirma que o conjunto de um número indefinido (infinito) de elementos é, por via de regra, indefinido por si próprio (infinito) e logo, tais conjuntos não se podem relacionar entre si (PINTO, 2008, p. 71).

A ideia básica de Cavalieri de reduzir a relação entre a figura plana para as relações entre segmentos (cordas) e da relação entre figuras sólidas para as relações entre figuras planas (secções plana) se assemelhava a de Arquimedes cujo método era interpretar a figura plana e sólida como constituídas por uma série de fios ou pesadas folhas paralelas entre si, conhecido na Renascença como o método de exaustão (PINTO, 2008, p. 73).

O matemático italiano comprova que o número exato de linhas paralelas não é importante, podendo ser comparadas ou manipuladas, sem que se saiba exatamente quantas são. Segundo Pinto (2008, p. 74), é possível afirmar:

- a) se as áreas de duas figuras planas são iguais, (os conjuntos de) todas as linhas dessas figuras são iguais (livro II, teorema 2).
- b) a proporcionalidade entre as figuras é a mesma que entre os (conjuntos) de linhas (livro II, teorema 3) (CAVALIERI, 1653: 99-195).

Essencialmente, é possível afirmar que “se quisermos conhecer a razão entre duas figuras planas ou entre dois sólidos, será suficiente encontrar a razão que possuem os agregados de todas as linhas dessas figuras, ou de todos os planos sólidos” (DE GANDT, 1986, p. 42).

Assim, somos capazes de dizer que uma região é formada por segmentos ou indivisíveis e que um sólido é composto de regiões que têm volumes indivisíveis. Porém, para calcular uma área, devemos comparar a superfície com outra que tenha o mesmo número de linhas ao invés de somar um número infinito de linhas.

Pelo seu trabalho sobre os indivisíveis, o matemático italiano Bonaventura Cavalieri ganhou notoriedade e é considerado um dos precursores do cálculo integral (EVES, 2011, p. 426).

Capítulo 2

A Grandeza Volume nos Documentos Oficiais de Educação do Brasil

Neste capítulo apresentaremos algumas instruções verificadas em documentos oficiais de educação e orientações curriculares brasileiros sobre o ensino da grandeza volume no ensino médio. Os documentos pesquisados foram: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN e PCN+), Orientações Curriculares Nacionais (OCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Os documentos analisados apresentam discussões sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio e foram construídos a partir da contribuição de equipes pertencentes a diferentes sistemas de ensino, professores, alunos e docentes da comunidade acadêmica. São documentos de relevância para a prática docente e que se complementam em muitos aspectos.

Todos os documentos verificados refletem sobre a contribuição do ensino médio na formação intelectual e social do aluno. E isso pode ser visto no trecho da OCN que diz:

O ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. (BRASIL, 2006, p. 69).

Neste contexto, a matemática é apresentada como parte do conhecimento humano necessária para a formação dos jovens e dentre suas contribuições destacam-se a capacidade de leitura e interpretação do mundo, além de desenvolver habilidades que serão necessárias na vida social e profissional dos alunos. A etapa de formação matemática do Ensino Médio possui características e necessidades próprias, conforme explicam os PCN's de Ensino Médio:

Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber (BRASIL, 2002, p. 108).

Outro ponto de contato entre os documentos analisados é a divisão da matemática em eixos ou áreas. Percebe-se uma variação entre as áreas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, mas como nos interessa ao estudo esta última etapa de ensino, apresentaremos as ideias relacionadas à ela. Porém, em ambos os níveis as áreas independem da série escolar, sendo trabalhadas concomitantemente em todas as séries da etapa de ensino escolar, seja fundamental ou médio.

Os PCN's de Ensino Médio propõem a sistematização dos conceitos matemáticos em três eixos, também chamados de temas estruturadores: 1 - Álgebra: números e funções, 2 - Geometria e medidas e 3 - Análise de dados (BRASIL, 2002, p. 117). Por sua vez, o Eixo Geometria e Medidas é segmentado em quatro unidades temáticas, das quais destacamos a de Geometria Espacial e a de Métrica. Enquanto a Geometria Espacial se preocupa com o estudo de diferentes formas geométricas espaciais, suas representações, características, propriedades, postulados, teoremas e axiomas a elas ligadas, a unidade Métrica está relacionada ao estudo e cálculo de grandezas e medidas como comprimento, área e volume (BRASIL, 2002, p. 122).

O documento oficial mais recente com orientações sobre o ensino e aprendizagem de matemática no Ensino Médio é a BNCC que teve sua última versão publicada em 2018. Este documento segmenta a matemática escolar nas seguintes áreas: aritmética, álgebra, grandezas e medidas, geometria, probabilidade e estatística (BRASIL, 2018, p. 510).

Em ambos os documentos, percebe-se uma tendência, já apresentada anteriormente segundo Lima e Bellemain (2010), em separar os campos de geometria e de grandezas e medidas. Estes campos relacionam-se quando tratam de grandezas geométricas. A OCN reforça o papel da geometria e a aponta como um estudo que favorece o cálculo de grandezas geométricas ao dizer que

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2006, p. 75).

Os PCN's de Ensino Médio também caminham nesta direção e complementam com a necessidade de se aliar a geometria ao cálculo de medidas e grandezas em situações concretas do cotidiano como segue

Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si (...) A Geometria, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema. (BRASIL, 2002, p. 120-121).

Tratando-se do conceito de volume, os documentos o inserem nas áreas ligadas à grandezas e medidas. Também destacam a importância de outras disciplinas como Física e Química na consolidação do conceito de grandezas para os alunos e estimulam o estabelecimento de relações entre elas (BRASIL, 2006, p. 76).

No Ensino Fundamental os alunos têm contato com grandezas geométricas, inclusive a de volume, porém de forma mais intuitiva. O aprofundamento deste estudo se dá no Ensino Médio e os documentos analisados discorrem sobre como o volume de um sólido pode ser trabalhado em sala de aula. A BNCC orienta à ampliação da noção de medida para diferentes grandezas com destaque para a área de superfícies planas e o volume de alguns sólidos geométricos (BRASIL, 2018, p. 517). A OCN complementa ao destacar que o aluno nesta etapa de aprendizagem encontra-se em condições para compreender demonstrações e raciocínios que resultam em fórmulas (BRASIL, 2006, p. 76).

Em relação ao trabalho com volumes, a OCN considera relevante para a formação matemática do aluno ir além de uma simples apresentação de fórmula, fazendo-o perceber os processos que conduzem ao estabelecimento das fórmulas. Destaca o Princípio de Cavalieri como ponto de partida no estudo dos volumes de sólidos no intuito de favorecer a compreensão do significado das fórmulas pelos estudantes (BRASIL, 2006, p. 76).

Percebe-se que todos os documentos analisados, ainda que sigam caminhos distintos, possuem um direcionamento comum para o ensino de volume no Ensino Médio, relacionando-o com outras grandezas e até disciplinas, trabalhando a matemática em um contexto real, ligado ao cotidiano do aluno e que conduzam o estudante ao raciocínio lógico matemático para ser capaz de compreender processos para estabelecimento de fórmulas.

Capítulo 3

O Princípio de Cavalieri para Regiões Planas

O *Princípio de Cavalieri* faz parte da teoria dos indivisíveis e é uma ferramenta prática para o cálculo de áreas de regiões planas e volumes de sólidos. Apresentaremos neste capítulo um estudo sobre áreas e volumes procurando definir estas grandezas e calculá-las para algumas figuras planas e sólidos, utilizando para isso o Princípio de Cavalieri.

Toda a construção teórica que será apresentada neste capítulo está de acordo com as orientações da OCN quando dizem “quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes, considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação” (BRASIL, 2006, p.76). Desta forma, apresentaremos conceitos e fórmulas de modo que o aluno consiga compreender os processos de construção e não se limite a decorar fórmulas prontas.

Destaca-se ainda que os conceitos geométricos apresentados possuem como referência os livros *Medidas e Formas em Geometria*, de Elon Lages Lima (2006), *Geometria*, de Antônio Caminha Muniz Neto (2013) e *Matemática - ciência e aplicações, v. 2* de Gelson Iezzi et. al. (2017).

3.1 O Conceito de Área

Nesta seção apresentaremos o conceito de área através de um processo de construção que nos conduz desde uma ideia intuitiva a uma definição formal e calculamos a área de um quadrado e um retângulo.

3.1.1 A Ideia de Área

A *área* de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado (NETO, 2013, p. 180). Para medir a porção do plano que uma figura F ocupa, definimos uma unidade de área e a comparamos com a figura F . O resultado desta comparação é um número que expressa quantas vezes F contém a unidade de área (LIMA, 2006, p. 11).

3.1.2 Área de Polígonos

Dado um polígono P , associamos à ele um número real não negativo e o chamamos *área de P* atendendo as seguintes propriedades:

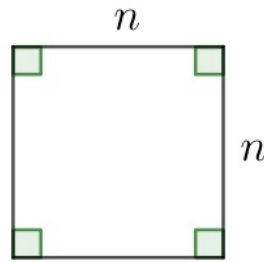
1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.;
2. Se P é um quadrado de lado 1 cm , então sua área é 1 cm^2 ;
3. Se um polígono convexo P é decomposto em um número n de outros polígonos convexos P_1, P_2, \dots, P_n , então a área de P é a soma das áreas dos polígonos P_i , com $i = 1, 2, \dots, n$;
4. Se um polígono Q está contido em um polígono P , então a área de P é maior que a área de Q .

Para que o conceito de *área* para polígonos seja útil, consideramos a validade dos postulados acima. Convencionamos também adotar como unidade de medida de área um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento, chamado *quadrado unitário*. Denotaremos a área de um polígono P por $A(P)$. A partir disso, estabeleceremos a fórmula para cálculo das áreas de quadrados e retângulos.

3.1.3 Área do Quadrado

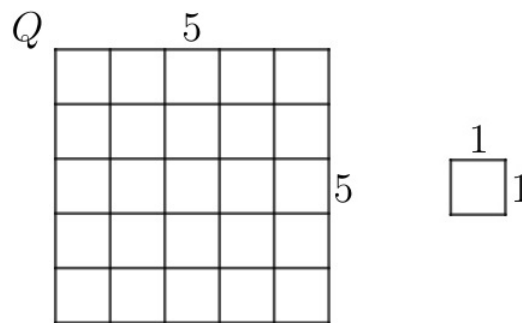
O *quadrado* é o quadrilátero que possui os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos. Vamos a seguir apresentar uma construção que nos permitirá verificar a fórmula para cálculo da área do quadrado.

Seja Q um quadrado de lado n , com $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 0$, conforme figura a seguir.

Figura 3.1: Quadrado de lado n 

Fonte: O próprio autor

Este quadrado pode ser decomposto, através de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, cada um deles unitários e portanto de área 1. Logo, o quadrado Q deve ter área $A(Q) = n^2$.

Figura 3.2: Quadrado de lado 5 decomposto em $5^2 = 25$ quadrados unitários

Fonte: O próprio autor

Agora, se um quadrado Q possui lado medindo $\frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 0$, um quadrado unitário se decompõe, por meio de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados congruentes a Q , formando um quadrado de área 1. Logo, pela Propriedade 3

$$n^2 \cdot A(Q) = 1$$

De onde conclui-se que

$$A(Q) = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional $\frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ e $m > 0$, é possível decompor cada lado de Q em m segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$ cada um. Desta forma, o quadrado Q se decompõe em m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$ e área $\frac{1}{n^2}$. Assim,

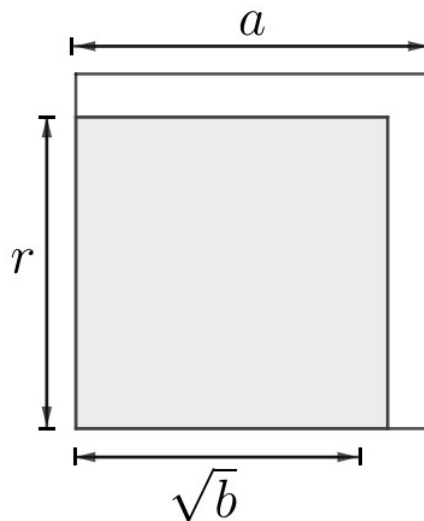
$$A(Q) = m^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{m^2}{n^2}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Com isso, é possível concluir que um quadrado Q cuja medida do lado é um número racional $a = \frac{m}{n}$ tem sua área dada por

$$A(Q) = a^2.$$

Resta mostrar que se um quadrado Q possui lado cuja medida é um número irracional a , então sua área será dada por $A(Q) = a^2$. Para isso, seja Q um quadrado de lado a , com a irracional. E ainda b um número real tal que $b < a^2$. Tomamos um número racional $r < a$, tão próximo de a que se tenha $b < r^2 < a^2$ (tomando r como uma aproximação por falta de a , com erro inferior a $a - \sqrt{b}$, tem-se $\sqrt{b} < r < a$).

Figura 3.3: Quadrados Q e Q'



Fonte: O próprio autor

Seja Q' um quadrado de lado r tomado no interior de Q . Como r é racional, $A(Q') = r^2$. Como Q' está contido em Q , pela Propriedade 4, tem-se $A(Q') < A(Q)$, ou seja, $r^2 < A(Q)$. Como $b < r^2$, tem-se que $b < A(Q)$. Portanto, todo número real $b < a^2$, é também menor do que a área de Q .

De modo análogo, prova-se que todo número real c tal que $c > a^2$, é maior do que a área de Q . Assim, $A(Q)$ não pode ser menor e maior do que a^2 de onde se conclui que $A(Q) = a^2$.

Temos portanto que dado um número real a qualquer (inteiro, fracionário ou irracional) e sendo Q um quadrado de lado a , sua área é expressa pela fórmula

$$A(Q) = a^2.$$

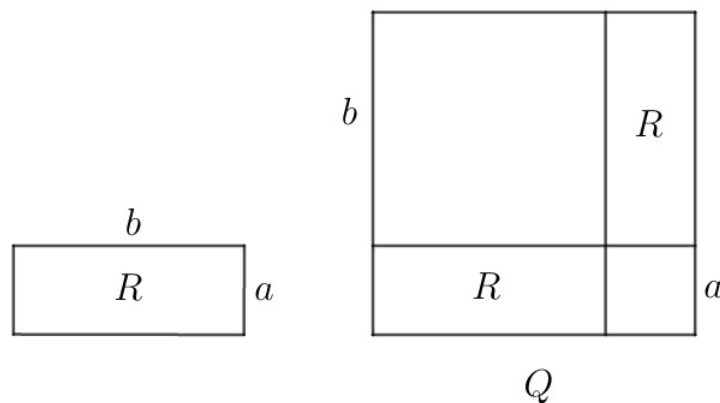
3.1.4 Área do Retângulo

O *retângulo* é o quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.

Poderíamos construir um raciocínio análogo ao realizado para o quadrado a fim de verificar a fórmula para cálculo da área de um retângulo, mas vamos utilizar um raciocínio elegante fazendo com que a área do retângulo recaia na área do quadrado (LIMA, 2006, p. 15).

Dado um retângulo R de base b e altura a , construímos um quadrado Q de lado medindo $a + b$, composto por dois retângulos iguais ao R e dois quadrados, um de lado a e outro de lado b .

Figura 3.4: Quadrado Q e retângulo R



Fonte: O próprio autor

A área do quadrado Q é $A(Q) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Por outro lado, $A(Q) = a^2 + b^2 + 2 \cdot A(R)$. Logo, podemos concluir que

$$A(R) = a \cdot b.$$

3.1.5 Definição de Área de uma Figura Plana

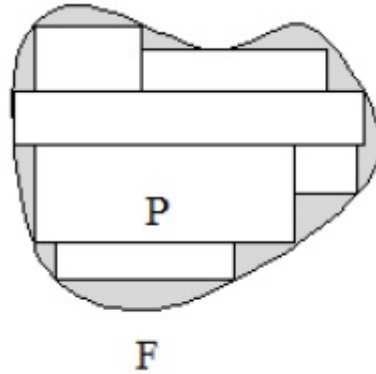
A área de uma figura plana F é um número real não negativo que indicaremos por $A(F)$. É possível determiná-la quando se conhece seus valores aproximados por falta ou excesso.

Os valores de $A(F)$ aproximados por falta são as áreas dos polígonos P contidos em F , enquanto os valores de $A(F)$ aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contêm F . Quaisquer que sejam os polígonos P e P' , tem-se as desigualdades

$$A(P) \leq A(F) \leq A(P').$$

Para definição de área, tomaremos polígonos retangulares (reunião de vários retângulos justapostos) contidos na figura F , ou seja, consideraremos apenas valores aproximados por falta para o número real $A(F)$.

Figura 3.5: Aproximação por falta



Fonte: Kurokawa (2015, p. 10)

Define-se então a *área da figura P* como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F . Logo, para todo polígono retangular P contido em F tem-se

$$A(P) \leq A(F).$$

E ainda, para qualquer número $b < A(F)$, tem-se um polígono retangular P , contido em F tal que

$$b < A(P) \leq A(F).$$

A definição acima foi apresentada por Elon Lages Lima em seu livro intitulado *Medida e Forma em Geometria*.

3.2 O Princípio de Cavalieri para Áreas

Dando continuidade ao estudo de áreas para figuras planas, apresentamos nesta seção um resultado interessante para o cálculo de áreas de regiões planas conhecido como o *Princípio de Cavalieri* para áreas.

Para iniciarmos, é necessário apresentar o pensamento de Cavalieri sobre alguns conceitos e significar termos utilizados por ele. Em sua *Teoria dos Indivisíveis* Cavalieri considerava um *indivisível* de uma região plana como uma corda desta região e toda região plana é composta por uma infinidade de cordas paralelas (EVES, 2011, p. 426).

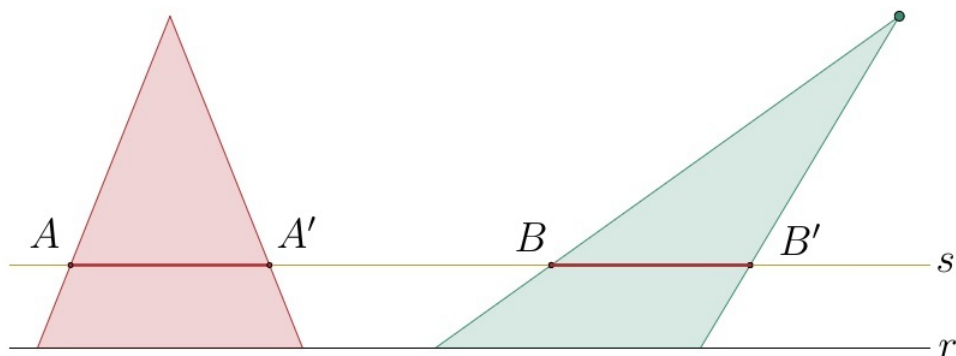
Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. (EVES, 2011, p. 426).

Generalizando os resultados acima temos o chamado *Princípio de Cavalieri* para áreas que será enunciado aqui como Axioma.

Axioma 1: *Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

Particularmente é possível dizer que: se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta com o mesmo comprimento, então as duas regiões têm a mesma área. A figura a seguir ilustra este princípio.

Figura 3.6: Princípio de Cavalieri para áreas



Fonte: APM - PT.¹

Na figura anterior, dada a reta r , se para toda reta s paralela à r secante às duas porções do plano o segmento AA' é igual ao seu correspondente BB' , então as duas porções do plano têm a mesma área.

Mesmo sendo aceito com facilidade enquanto axioma, é possível provar o Princípio de Cavalieri para áreas utilizando Cálculo Integral. Segundo Paterlini,

É possível demonstrar esse resultado desde que as regiões não sejam muito complicadas. Em particular, vale para discos e regiões elípticas. A ideia inicial da demonstração é simples: estamos “fatiando” as duas regiões. Se a quantidade de fatias for finita e se cada fatia de uma região tiver área sempre na mesma razão que a fatia correspondente da outra região, então somamos as

¹Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/vTk5uFp4>>. Acesso em: 08 out. 2020.

áreas das fatias de cada região e obtemos o resultado. A dificuldade é que, no Princípio de Cavalieri, as “fatias” são segmentos. Portanto, não têm área, mas comprimentos, e sua quantidade é infinita. Assim, para a demonstração, precisamos de uma técnica que permita obter a área de uma região através da soma dos comprimentos de infinitos segmentos. Essa técnica é fornecida pela teoria de integração de funções reais, estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral (Paterlini, 2010).

Apresentamos a seguir um processo de dedução das fórmulas para calcular áreas de algumas figuras planas como o paralelogramo, triângulo, trapézio e losango.

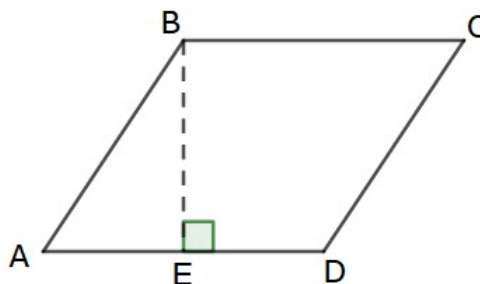
3.2.1 Área do Paralelogramo

Um *paralelogramo* é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos. Para determinar a área do paralelogramo, utilizamos o Princípio de Cavalieri.

Tomando um lado do paralelogramo como base, sua altura é um segmento de perpendicular que liga a base ao lado oposto ou ao seu prolongamento.

Seja $ABCD$ um paralelogramo de base AB medindo b e altura BE medindo a .

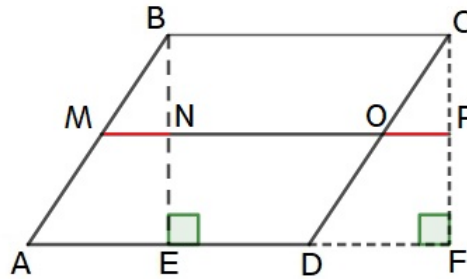
Figura 3.7: Paralelogramo $ABCD$



Fonte: O próprio autor

Prolongando-se o segmento AD até o pé da perpendicular baixada de C tem-se o ponto F . Uma paralela ao segmento AD intersecta os segmentos AB , BE , CD e CF nos pontos M , N , O e P respectivamente. Os triângulos ABE e DCF são congruentes, pois $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BE} = \overline{CF}$ e $\widehat{ABE} = \widehat{DCF}$. Aqui temos que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo.

Figura 3.8: Área de um paralelogramo



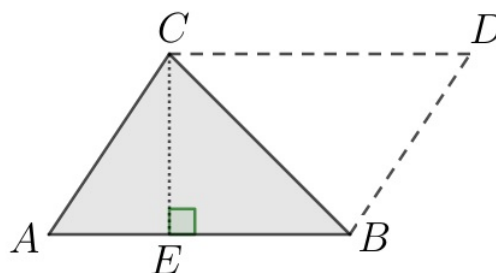
Fonte: O próprio autor

Agora, seja MO paralelo a base AD um indivisível do paralelogramo $ABCD$ e NP paralelo a base EF um indivisível do retângulo $BCFE$. Como ABE e DCF são congruentes, o indivisível $MN = OP$, assim $MO = NP$. Portanto, podemos estabelecer correspondência entre todos os indivisíveis do paralelogramo com todos os indivisíveis do retângulo e, pelo Princípio de Cavalieri, a soma dos indivisíveis será igual, logo a área do paralelogramo é igual a área do retângulo. Como $\overline{AD} = \overline{EF} = b$, a área do paralelogramo será

$$A(ABCD) = b \cdot a.$$

3.2.2 Área do Triângulo

Para determinar a área de um triângulo, utilizamos a área do paralelogramo, uma vez que todo triângulo é metade de um paralelogramo. Desta forma, dado um triângulo ABC traçamos pelos vértices C e B paralelas aos lados AB e AC respectivamente. As paralelas encontram-se no ponto D , formando assim o paralelogramo $ABDC$. Seja CE a altura do paralelogramo medindo a e tendo AB medida igual a b , sabe-se que a área de $ABDC$ é ab .

Figura 3.9: Área de triângulo ABC 

Fonte: O próprio autor

Os triângulos ABC e BCD possuem um lado comum compreendido entre dois

ângulos iguais, logo são congruentes e possuem a mesma área. Portanto, $A(ABDC) = 2 \cdot A(ABC)$ e então

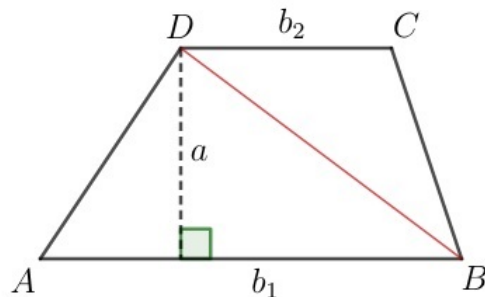
$$A(ABC) = \frac{ab}{2}.$$

3.2.3 Área do Trapézio

Um *trapézio* é um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos. Para calcular sua área iremos decompô-lo em triângulos.

Seja $ABCD$ um trapézio de altura a onde AB e CD são lados paralelos e medem respectivamente b_1 e b_2 .

Figura 3.10: Trapézio $ABCD$



Fonte: O próprio autor

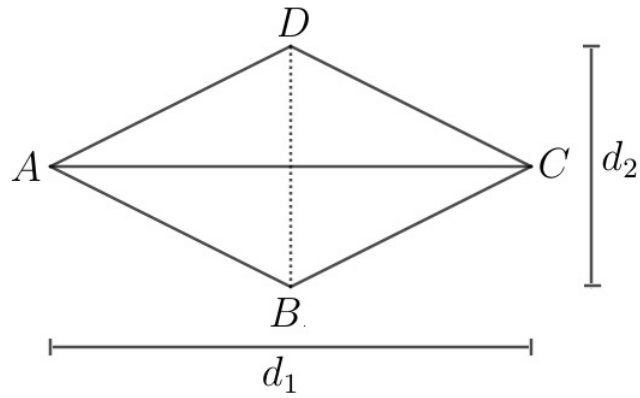
Traçando-se a diagonal BD , decomparamos o trapézio em dois triângulos ABD de base b_1 e altura a e BCD de base b_2 e altura a . Desta forma,

$$A(ABCD) = A(ABD) + A(BCD) = \frac{a \cdot b_1}{2} + \frac{a \cdot b_2}{2} = \frac{a \cdot (b_1 + b_2)}{2}.$$

3.2.4 Área do Losango

Um *losango* é um quadrilátero que possui os quatro lados iguais. Do mesmo modo empregado para o trapézio, para calcularmos a área de um losango, iremos decompô-lo em triângulos.

Seja portanto um losango $ABCD$ cujas diagonais AC e BD medem d_1 e d_2 respectivamente.

Figura 3.11: Losango $ABCD$ 

Fonte: O próprio autor

A diagonal BD decompõe o losango em dois triângulos congruentes ABD e BCD . Desta forma, a área do losango será dada por

$$A(ABCD) = 2 \cdot A(ABD) = 2 \cdot \frac{d_2 \cdot \frac{d_1}{2}}{2}.$$

Portanto, a área do losango será

$$A(ABCD) = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Capítulo 4

O Princípio de Cavalieri para Sólidos

4.1 O Conceito de Volume

Nesta seção apresentamos o conceito de volume por meio de um processo similar ao adotado para área que nos conduz desde uma ideia intuitiva até uma definição formal, calculamos o volume de um cubo unitário e de um bloco retangular.

4.1.1 Uma Ideia Intuitiva de Volume

A palavra *volume* possui diferentes significados que variam conforme o contexto. Na física, por exemplo, diz respeito ao som. O volume é a percepção subjetiva do ser humano relativamente à potência. A intensidade do som é definida de acordo com a quantidade de energia (potência acústica) atravessada por segundo numa superfície. Quanto maior for a potência, maior será o volume. Porém, estamos interessados no significado de volume em um contexto matemático.

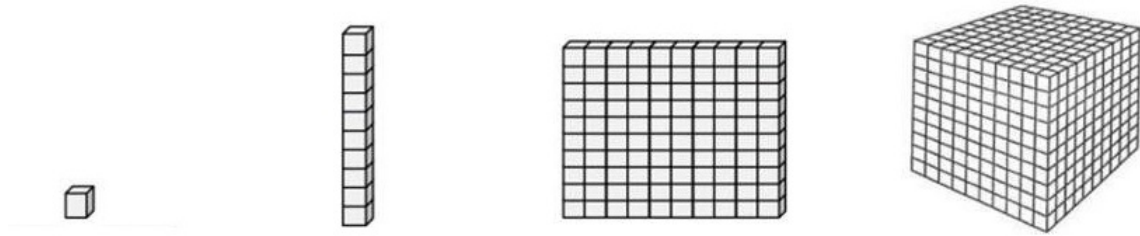
Em matemática, *volume* é uma grandeza geométrica relacionada às formas tridimensionais. O *volume de um sólido* é a quantidade de espaço que ele ocupa. Sendo assim, nos interessamos por calcular a grandeza volume e, para isso, devemos comparar o espaço ocupado com uma unidade, tendo como resultado a medida do volume.

Costuma-se tomar como unidade de volume um cubo denominado *cubo unitário*, cujas arestas medem 1 unidade de comprimento. Seu volume será igual a 1 por definição. Assim, o volume de um sólido S será um número que represente quantas vezes o sólido contém o cubo unitário. Denotaremos o volume de um sólido S por $V(S)$.

Uma proposta interessante para introdução da ideia intuitiva de volume nas escolas é a utilização do *Material Dourado*. Este material é composto por cubinhos unitários, barras, placas e um cubo. Pensando-se no cubinho unitário como a unidade de medida de volume, este tem volume igual a 1. Uma barra é composta por 10 cubinhos, logo seu

volume é 10. Uma placa é formada por 10 barras, logo seu volume é 100. E, por fim, o cubo é formado por 10 placas e seu volume é 1000.

Figura 4.1: Material dourado



Fonte: Andressa Biassio et al.¹

Este processo de determinar o volume por comparação com uma unidade de medida torna-se simples em alguns sólidos, porém se o sólido S possuir um formato bastante irregular esta tarefa torna-se difícil. Portanto, a ideia apresentada é apenas um passo que utilizaremos como guia para chegar em uma definição mais precisa.

Outro método utilizado para o cálculo de volume bastante artesanal, mas engenhoso, é através da imersão de um objeto para o qual desejamos obter o volume em um reservatório contendo uma quantidade conhecida de água, enchendo-o até os bordos. Neste caso, o volume do objeto será igual ao de água transbordada que poderá ser medida através de uma escala impressa na parede do reservatório. É um método simples, mas que não se aplica a objetos muito grandes nem muito pequenos. E ainda impossibilita responder perguntas do tipo: qual medida deve ter a aresta de um cubo para que comporte x litros de água?

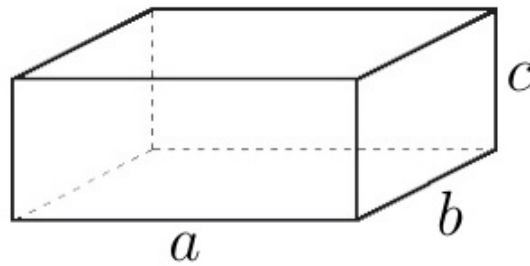
Portanto, precisamos obter métodos para o cálculo de volumes sistemáticos e gerais, que se apliquem a volumes de qualquer tamanho, em casos concretos e abstratos.

4.1.2 Volume de um Bloco Retangular

Um *bloco retangular* é um sólido limitado por 6 retângulos, chamados de *face*. Esses retângulos formam 3 pares, sendo que em cada par os retângulos são iguais. Os lados dos retângulos são chamados *arestas*. Os pontos de encontro das arestas são os *vértices*. O bloco retangular fica inteiramente determinado conhecendo-se 3 de suas arestas que concorrem em um vértice. Um tijolo é um exemplo de bloco retangular.

¹Disponível em: <<https://www.researchgate.net/figure/Figura-3-Composicao-do-material-dourado>>. Acesso em: 03 out. 2020.

Figura 4.2: Bloco Retangular



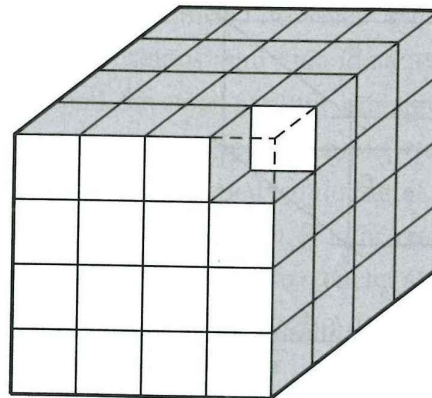
Fonte: O próprio autor

4.1.2.1 Volume de um Cubo

O *cubo* é um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm todas o mesmo comprimento. As 6 faces do cubo são quadrados iguais.

Já definimos um *cubo unitário* como sendo o que cujas arestas medem 1 unidade e seu volume é 1. Seja agora um cubo C de aresta medindo n unidades de comprimento, com $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Podemos decompor o cubo C em n^3 cubos unitários justapostos, portanto o volume de C é n^3 . Fornecemos a seguir uma representação para o caso $n = 4$.

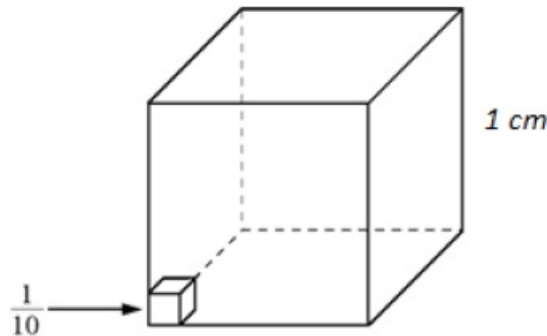
Figura 4.3: Cubo de aresta 4 decomposto



Fonte: Lima (2006, p. 63)

De modo análogo, tomando um cubo unitário e o decompondo cada aresta no mesmo número inteiro m de partes iguais, decomponemos o cubo em m^3 cubos justapostos de arestas $\frac{1}{m}$ cada um. Temos assim, que um cubo de aresta $\frac{1}{m}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, tem volume igual a $\frac{1}{m^3} = \left(\frac{1}{m}\right)^3$, pois sendo Q o cubo de arestas $\frac{1}{m}$, segue que $m^3 \cdot V(Q) = 1$. Daí, $V(Q) = \frac{1}{m^3}$. A imagem a seguir apresenta o caso $m = 10$.

Figura 4.4: Cubo unitário decomposto



Fonte: Pontes (2014, p. 22)

Se a aresta do cubo C possui por medida um número racional $\frac{m}{n}$, é possível decompor cada aresta em m partes iguais de comprimento $\frac{1}{n}$ cada. Desta forma, o cubo C ficará decomposto em m^3 cubos justapostos com arestas medindo $\frac{1}{n}$. O volume de cada cubo menor será $\frac{1}{n^3}$ e o volume de C será

$$V(C) = m^3 \cdot \frac{1}{n^3} = \left(\frac{m}{n}\right)^3.$$

Desta forma, concluímos que se um cubo possui aresta de comprimento dado por um número racional a , então $V(C) = a^3$.

Este resultado é suficiente para o cálculo de volume de um cubo sob o ponto de vista estritamente prático, já que não é possível obter como medida de aresta um número irracional através da medição direta. Neste caso, trabalha-se com valores aproximados.

Porém, teoricamente, em Matemática ou outras aplicações de natureza científica, números irracionais aparecem. Por exemplo, se a aresta de um cubo for a diagonal de um quadrado unitário, sabe-se, desde Pitágoras, que medirá $\sqrt{2}$. Desta forma, precisamos verificar a validade da fórmula para volume de cubo com aresta irracional. Para isso, repetiremos o processo aplicado na obtenção da área do quadrado.

Seja um cubo C de aresta medindo o número irracional b e x um número racional tal que $x < b^3$. É possível aproximar o número b por um valor racional $r < b$, tão próximo de b que $x < r^3 < b^3$. Então, o cubo C , cuja aresta tem medida b , contém um cubo D , cuja aresta tem como medida r . Segue-se que $V(D) < V(C)$ e como $V(D) = r^3$, conclui-se que $r^3 < V(C)$ e, portanto, $x < V(C)$.

De modo análogo, prova-se que todo racional y tal que $y > b^3$, é maior do que o volume de C . Assim, $V(C)$ não pode ser menor e maior do que b^3 de onde conclui-se que $V(C) = b^3$.

Temos portanto que dado um número real b qualquer (inteiro, fracionário ou irracional) e sendo C um cubo de aresta b , seu volume é expresso pela fórmula

$$V(C) = b^3.$$

4.1.2.2 Volume de um Bloco Retangular Qualquer

Poderíamos construir um raciocínio análogo ao realizado para o cubo a fim de verificar a fórmula para cálculo do volume de um bloco retangular qualquer, mas vamos utilizar a teoria das proporções (LIMA, 2006, p. 67).

Seja então $V(a, b, c)$ o volume de um bloco retangular com arestas a , b e c . Para todo número natural n , tem-se

$$V(na, b, c) = V(a, nb, c) = V(a, b, nc) = n \cdot V(a, b, c),$$

Pois cada um dos três primeiros números é o volume de um bloco formado pela justaposição de n blocos com arestas a , b e c respectivamente. Além disso, $V(a, b, c)$ é uma função crescente de cada uma das variáveis a , b e c . Segue-se que o volume $V(a, b, c)$ é diretamente proporcional às arestas a , b e c , ou seja, para todo número real positivo k , tem-se

$$V(k \cdot a, b, c) = V(a, k \cdot b, c) = V(a, b, k \cdot c) = k \cdot V(a, b, c).$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(a \cdot 1, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = a \cdot V(1, b \cdot 1, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c) = \\ &= a \cdot b \cdot V(1, 1, c \cdot 1) = a \cdot b \cdot c \cdot V(1, 1, 1) = a \cdot b \cdot c, \end{aligned}$$

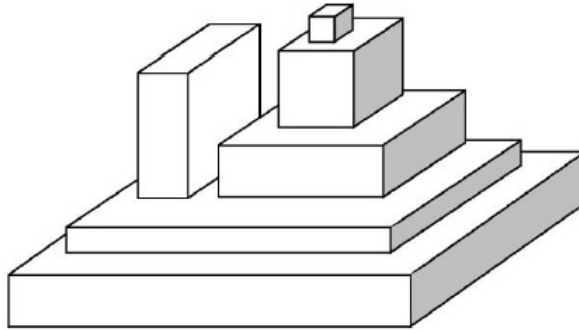
pois $V(1, 1, 1)$ é o volume de um cubo unitário.

4.1.3 Definição Geral de Volume

Até aqui apresentamos uma ideia intuitiva sobre volume e a utilizamos para calcular o volume de um bloco retangular como sendo o número de vezes que este contém um cubo unitário. O objetivo agora é chegar a uma definição geral de volume que se aplique também a sólidos mais irregulares que o bloco retangular.

Um *poliedro retangular* é todo sólido formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos. Seu volume será dado pela soma dos volumes dos blocos retangulares que o compõem.

Figura 4.5: Poliedro retangular



Fonte: Pontes (2014, p. 25)

Dado um sólido S , deseja-se definir com precisão o número que representa $V(S)$, ou seja, o número que representa quantas vezes o cubo unitário está contido em S . Desta forma, tem-se que todo poliedro retangular P contido em S satisfaz a condição

$$V(P) \leq V(S).$$

Acrescentando-se mais blocos retangulares a P dentro de S , obtém-se o poliedro retangular P' , maior que P , de forma que

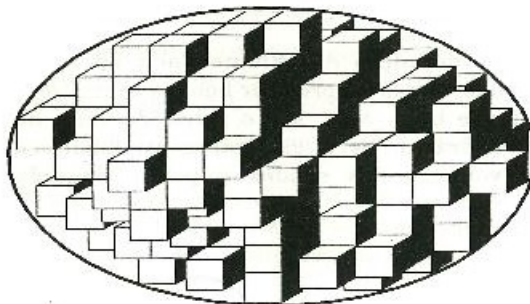
$$V(P) \leq V(P') \leq V(S).$$

Perceba que é possível acrescentar blocos retangulares quanto se queira a P de forma que o novo poliedro retangular, ainda contido em S , tenha seu volume cada vez mais próximo de $V(S)$. Então, devemos ter $V(S)$ como o número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S .

Isto significa que dado qualquer número real r tal que $r < V(S)$, é possível achar um poliedro retangular R , contido em S , onde

$$r < V(R) \leq V(S).$$

Figura 4.6: Aproximação inferior para o volume de um sólido



Fonte: Lima (2006, p. 69)

Portanto, temos definida uma aproximação por falta para o volume de um sólido. É também possível definir uma aproximação por excesso para $V(S)$. Para isso, considere agora todos os poliedros retangulares Q que contêm o sólido S . Estes devem satisfazer a condição

$$V(S) \leq V(Q).$$

É possível encontrar poliedros retangulares cada vez menores, contendo S , de forma que seus volumes sejam aproximações por excesso para $V(S)$ cada vez melhores.

Logo, dado qualquer número real r' tal que $r' > V(S)$, é possível achar um poliedro retangular R' , que contém S , onde

$$V(S) \leq V(R) < r'.$$

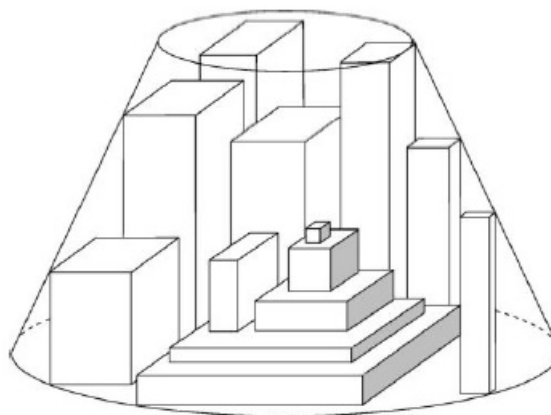
De forma geral, dado um sólido S e dois poliedros retangulares R e R' , onde R está contido em S que por sua vez está contido em R' , tem-se

$$V(R) \leq V(S) \leq V(R').$$

Em outras palavras, dado um sólido S , $V(S)$ é o único número real que satisfaz à condição acima. Isto é provado aplicando-se conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Por mais interessante que seja a definição de volume apresentada nesta seção, nos deparamos com uma dificuldade prática, pois é muito difícil calcular os volumes dos sólidos por essa definição. Imagine que calcular o volume de um tronco de cone por meio da soma de volumes de blocos retangulares justapostos não seja fácil.

Figura 4.7: Tronco de cone aproximado por blocos retangulares



Fonte: Pontes (2014, p. 27)

Para tornar possível o trabalho com volumes no ensino médio, vamos adotar um resultado interessante e prático para o cálculo de volumes de sólidos conhecido como *Princípio de Cavalieri* para volumes que será abordado na próxima seção.

4.2 O Princípio de Cavalieri para Volumes

Para avançarmos no estudo sobre *volumes de sólidos*, vamos utilizar como axioma um resultado conhecido como o *Princípio de Cavalieri* para volumes.

A fim de facilitar a compreensão da ideia de Cavalieri vamos refletir sobre a seguinte situação: com um mesmo jogo de baralho é possível formar pilhas de cartas com formas variadas. Observe figura a seguir

Figura 4.8: Pilhas de cartas com mesmo volume



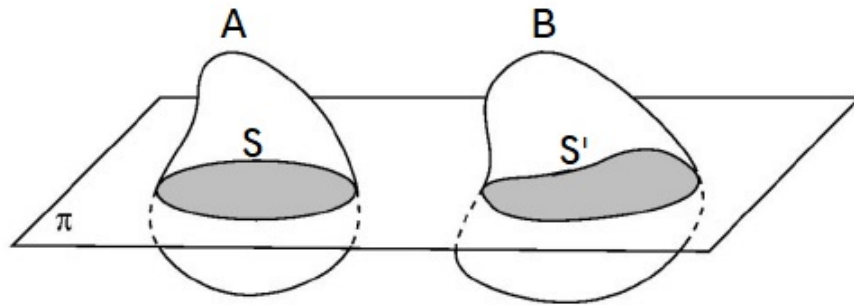
Fonte: Cana Ceciej.²

Analisando as quatro pilhas temos que a primeira representa um bloco retangular, cujo volume já sabemos calcular, a terceira representa um paralelepípedo oblíquo e as demais foram obtidas por movimentações nas posições das cartas. Percebe-se que seus volumes são obtidos pela soma dos volumes das cartas que as formam e, como em todas as pilhas foram utilizadas as mesmas cartas, concluímos que todas possuem o mesmo volume, mesmo tendo formas diferentes.

De modo geral, sejam A e B dois sólidos. Cada plano horizontal π determina nos sólidos A e B seções planas geradas pela interseção dos sólidos com o plano, que indicamos respectivamente por S e S' . Se para todos os planos horizontais π , as seções S e S' possuem a mesma área, o Princípio de Cavalieri afirma que o volume dos sólidos A e B são iguais.

²Disponível em: <<https://canal.ceciej.edu.br>>. Acesso em: 06 out. 2020.

Figura 4.9: Sólidos de mesmo volume



Fonte: Pontes (2014, p. 29)

Enunciamos então o Princípio de Cavalieri para volumes.

Axioma 2: *Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então os volumes de A e B são iguais.*

O Princípio de Cavalieri é tratado como teorema e pode ser demonstrado através de Cálculo Integral em cursos mais avançados. No entanto, conforme dito anteriormente, aceitaremos este princípio como verdadeiro e o trataremos como axioma para o desenvolvimento desta dissertação voltada para o nível de Ensino Médio. Quanto à esta demonstração:

É possível provar esse princípio desde que os sólidos não sejam muito complicados. Em particular, o resultado vale para os sólidos que costumam ser estudados no ensino médio, como poliedros, esferas e elipsoides. Para fazer uma demonstração, novamente a teoria de integração de funções reais fornece a técnica necessária para obter o volume de um sólido através da soma das áreas de infinitas regiões (Paterlini, 2010).

Para aceitar este axioma como verdade basta pensar em dois sólidos A e B e associá-los à ideia das pilhas de cartas de baralho apresentada na introdução desta seção. Observe que duas fatias muito finas, de mesma altura, cujas bases têm a mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume. No exemplo dado, as fatias seriam cartas de baralho com mesma área e espessura. Os dois sólidos podem ser cortados por planos horizontais em fatias finas com volumes aproximadamente iguais. Como o volume de cada sólido é dado pela soma dos volumes das fatias, sendo possível aproximar o volume das fatias tanto quanto se deseje, temos $V(A) = V(B)$.

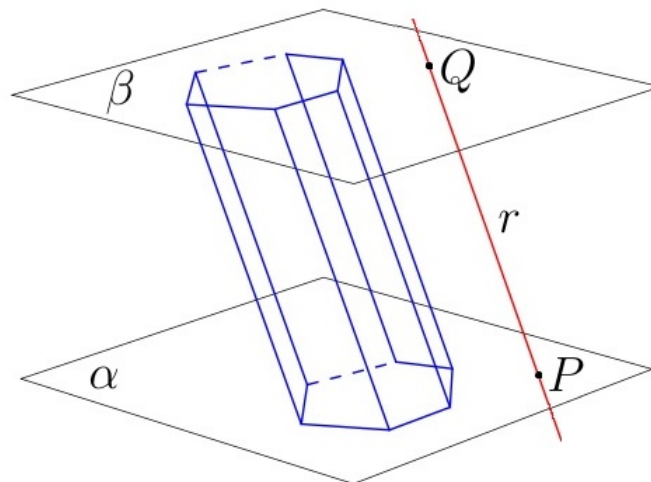
4.3 Aplicações do Princípio de Cavalieri

Nesta seção nos dedicamos em aplicar o Princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de diversos sólidos, alguns bem conhecidos pelos alunos de ensino médio, outros nem tanto. Destacamos que este axioma dispensa o uso de Cálculo Integral viabilizando o estudo de volumes nesta etapa de ensino.

4.3.1 Prisma

Sejam α e β dois planos paralelos distintos. Considere uma região poligonal com n lados contida em α e uma reta r que intersecta os planos α e β nos pontos P e Q respectivamente. *Prisma* é o sólido geométrico formado pela união de todos os segmentos paralelos a PQ que contém uma extremidade na região poligonal e a outra extremidade em β .

Figura 4.10: Prisma



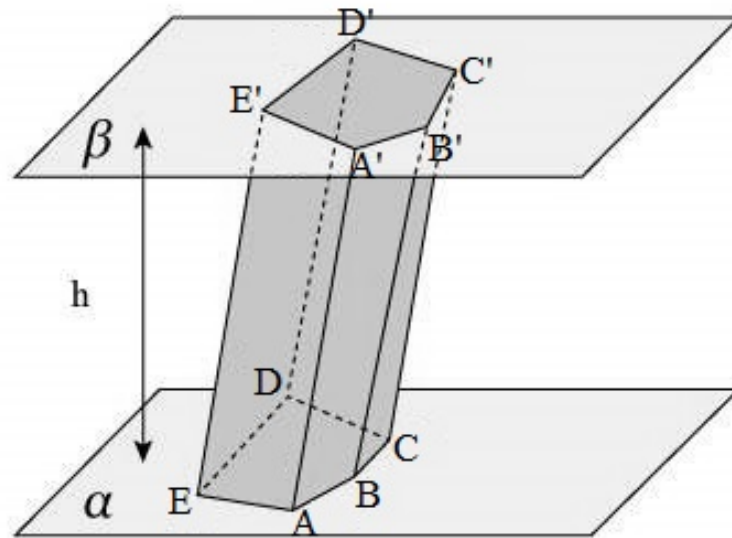
Fonte: Wikipedia.³

I) Elementos de um Prisma:

Considerando o prisma representado na figura a seguir vamos apresentar os principais elementos deste sólido.

³Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Prisma>>. Acesso em: 06 out. 2020.

Figura 4.11: Elementos do prisma



Fonte: Mais bolsas.⁴

Bases: Os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ chamados de *bases* do prisma, são congruentes e estão contidos em planos paralelos entre si (α e β).

Faces laterais: As *faces laterais* de um prisma são os polígonos que não são bases. Um exemplo na imagem acima é o polígono $ABB'A'$. Repare que as faces laterais de um prisma sempre são quadriláteros. Repare também que, em razão de os segmentos de reta que partem de $A'B'C'D'E'$ até o plano α serem paralelos e pelo fato de o próprio polígono ser paralelo ao plano, as faces laterais do prisma são paralelogramos.

Faces: Os polígonos que delimitam o prisma (bases e faces laterais) são coletivamente chamados de *faces* do prisma.

Arestas das bases: São os lados dos polígonos das bases. No prisma dado são os segmentos AB , BC , CD , DE , EA , $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$ e $E'A'$.

Arestas laterais: São os lados dos polígonos das faces laterais. No prisma dado são os segmentos AA' , BB' , CC' , DD' e EE' .

Vértices: São os pontos de encontro entre duas arestas. No prisma dado os vértices são A , B , C , D , E , A' , B' , C' , D' e E' .

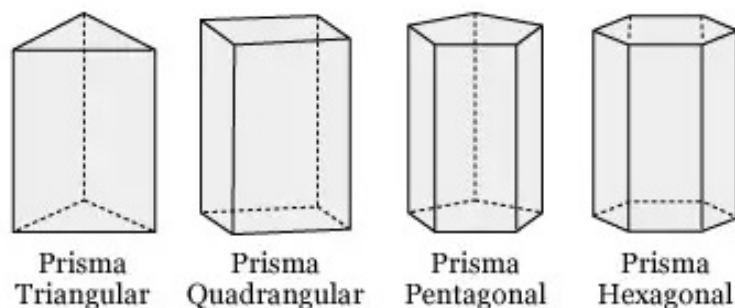
⁴Disponível em: <<https://www.maisbolsas.com.br/enem/matematica/elementos-e-classificacao-do-prisma>>. Acesso em: 08 out. 2020.

Altura: É a distância entre os planos de suas bases.

II) Nomenclatura dos prismas:

Como as bases do prisma são polígonos de n lados, dizemos que trata-se de um *prisma n -gonal*. Mais frequentemente, utiliza-se nomenclaturas alternativas relacionadas ao número de lados do polígono de suas bases. Deste modo, se a base de um prisma for um triângulo, ele será chamado de prisma triangular. Se a sua base for um quadrilátero, ele será chamado de prisma quadrangular. Se a sua base for um pentágono, prisma pentagonal e assim por diante.

Figura 4.12: Nomenclatura dos prismas



Fonte: Mais bolsas.⁵

III) Classificação dos Prismas:

Um prisma pode ser classificado a partir da inclinação de suas arestas.

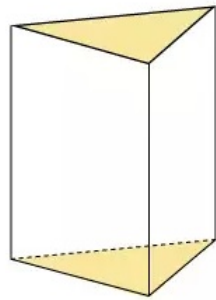
Prisma Reto: As arestas laterais são perpendiculares à base. Suas faces laterais serão sempre retângulos pois só existirão ângulos retos.

Prisma Oblíquo: As arestas laterais não são perpendiculares à base.

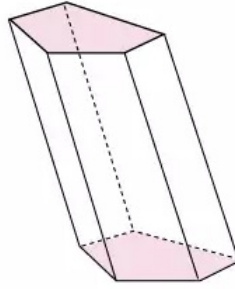
Prisma Regular: é o prisma que possui polígonos regulares nas suas bases.

⁵Disponível em: <<https://www.maisbolsas.com.br/enem/matematica/elementos-e-classificacao-do-prisma>>. Acesso em: 08 out. 2020.

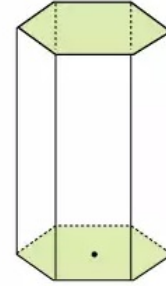
Figura 4.13: Classificação dos prismas



Prisma reto



Prisma oblíquo

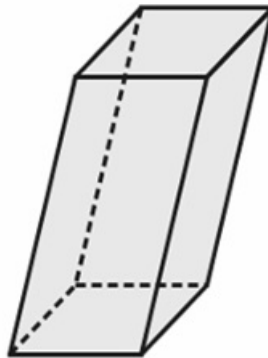


Prisma regular

Fonte: Mais bolsas.

IV) Paralelepípedo:

Figura 4.14: Paralelepípedo



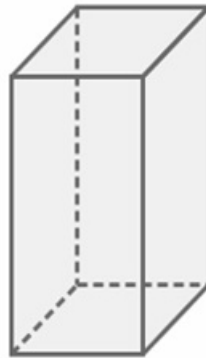
Fonte: O próprio autor.

O *paralelepípedo* é todo prisma cujas bases são paralelogramos. Sua superfície é a reunião de seis paralelogramos e cada par de faces paralelas e congruentes são ditas opostas.

Tomando uma das faces como base, a altura correspondente é a distância entre esta face e sua oposta, ou seja, é o comprimento da perpendicular baixada de um ponto da face oposta sobre o plano da base.

Um paralelepípedo cujas faces são retângulos é chamado paralelepípedo retângulo ou bloco retangular.

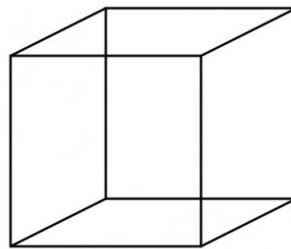
Figura 4.15: Paralelepípedo Retângulo



Fonte: O próprio autor.

Um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis quadrados é chamado de *cubo*. Perceba que o cubo é um paralelepípedo retângulo em que todas as arestas e faces são congruentes.

Figura 4.16: Cubo



Fonte: O próprio autor.

4.3.1.1 Volume de um Prisma

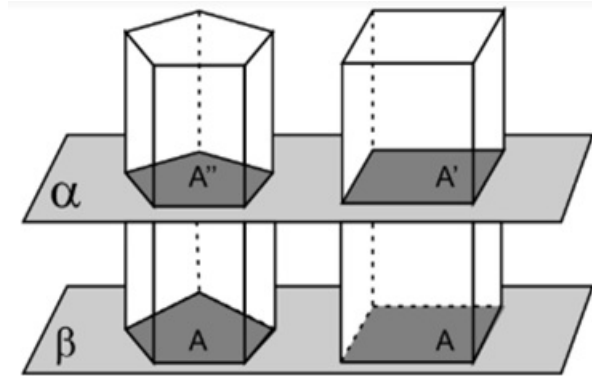
Após definirmos os prismas e apresentarmos seus elementos, nomenclaturas, classificações e casos particulares, vamos apresentar o processo de dedução da fórmula geral para o cálculo do volume de prismas, aplicando para isso o Princípio de Cavalieri.

Teorema 1: *O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.*

Seja um prisma P de altura h com base poligonal de área A e um bloco retangular B também de altura h cuja base é um retângulo de área A , apoiados sobre o mesmo plano horizontal β . Seccionando estes sólidos a uma distância h' de β por um plano α paralelo às bases, obtém-se duas secções de áreas A' e A'' no bloco retangular e no prisma respectivamente.

Sabendo que o paralelepípedo também é um prisma e que toda secção feita por um plano paralelo à base de um prisma determina uma figura congruente à base, segue que $A' = A = A''$.

Figura 4.17: Volume de um prisma



Fonte: O próprio autor.

Como os dois prismas possuem a mesma altura h e as secções feitas paralelas à base determinam figuras equivalentes, ou seja, possuem a mesma área, temos, pelo Princípio de Cavalieri, que os volumes destes sólidos são iguais.

Vimos anteriormente que o volume de um bloco retangular B qualquer de medidas a , b e c é $V(B) = a \cdot b \cdot c$, ou seja, é igual ao produto da área da base pela altura. Portanto, podemos concluir que o volume de um prisma qualquer é dado pelo produto da área de sua base pela altura, assim

$$V(P) = A_b \cdot h.$$

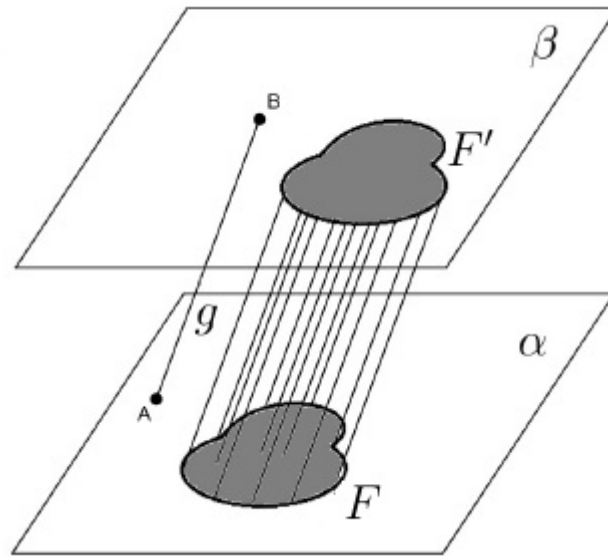
4.3.2 Cilindro

Sejam α e β dois planos paralelos e distintos, uma figura plana F contida em α e um segmento AB , com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ chamado de *geratriz*. O conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a AB com uma extremidade em F e a outra extremidade em β é denominado *cilindro* C , de base F e geratriz AB .

As extremidades não pertencentes à base F dos segmentos que geram o cilindro C compõem uma figura plana F' congruente à F , contida no plano β paralelo ao α . F e F' são chamadas de *bases do cilindro* C .

A *altura* do cilindro C é dada pela distância entre os planos de suas bases, α e β , ou seja, é dada pelo comprimento da perpendicular baixada de um ponto de F' sobre o plano de F .

Figura 4.18: Cilindro



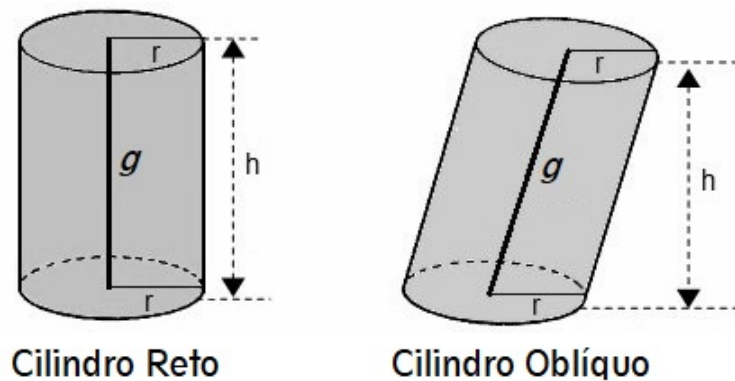
Fonte: O próprio autor.

O cilindro definido na forma que apresentamos é também conhecido como *cilindro generalizado*. Quando as bases do cilindro são círculos, denomina-se *cilindro circular* ou simplesmente *cilindro*.

Perceba que a definição de cilindro apresentada inclui, como caso particular, a possibilidade da base F ser um polígono. Quando isso acontece, o sólido C fica limitado por faces planas e é chamado de *prisma*. Portanto, um *prisma* é, por definição, um cilindro de bases poligonais.

Um cilindro pode ser classificado a partir da posição de sua geratriz. Quando a geratriz do cilindro é perpendicular ao plano da base chama-se *cilindro reto*. Quando a geratriz não é perpendicular à base chama-se *cilindro oblíquo*. A figura a seguir apresenta um exemplo de cilindro reto e de cilindro oblíquo.

Figura 4.19: Cilindro reto e cilindro oblíquo



Cilindro Reto

Cilindro Oblíquo

Fonte: O próprio autor.

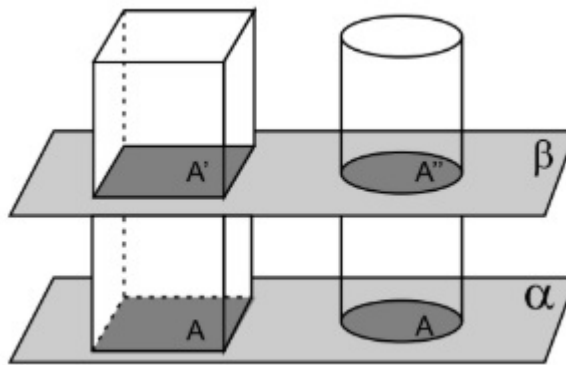
4.3.2.1 Volume de um Cilindro

Após definirmos o cilindro e apresentarmos seus elementos, classificações e casos particulares, vamos aplicar o Princípio de Cavalieri para dedução da fórmula geral para cálculo do volume deste tipo de sólido.

Teorema 2: *O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura.*

Seja C um cilindro de altura h com base dada por uma figura plana de área A e um bloco retangular B também de altura h cuja base é um retângulo de área A , apoiados sobre o mesmo plano horizontal α . Seccionando estes sólidos a uma distância h' de α por um plano β paralelo às bases, obtém-se duas secções de áreas A' e A'' no bloco retangular e no cilindro respectivamente.

Figura 4.20: Volume do cilindro



Fonte: O próprio autor.

Como os dois sólidos possuem a mesma altura e sabendo que as secções feitas paralelas à base determinam figuras congruentes às de suas bases, ou seja, de mesmas áreas, temos, pelo Princípio de Cavalieri, que os volumes destes sólidos são iguais.

Como o volume de um bloco retangular é dado pelo produto da área da base pela altura, podemos concluir que o volume de um cilindro qualquer é dado pelo produto da área de sua base pela altura, assim

$$V(P) = A_b \cdot h.$$

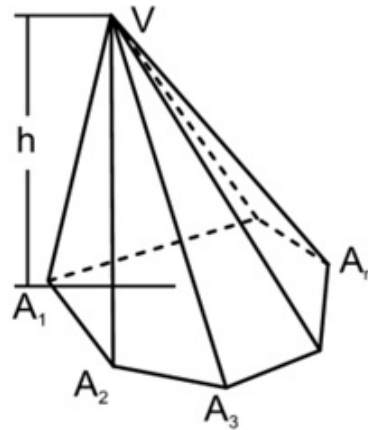
No caso particular do cilindro circular cuja base é um círculo, sabendo-se que um círculo de raio r possui área igual a πr^2 , o volume deste cilindro será

$$V(P) = \pi r^2 h.$$

4.3.3 Pirâmide

Dado um polígono convexo $A_1A_2A_3\dots A_n$ contido em um plano α e um ponto V não pertencente à α , chama-se de *pirâmide* a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em V e a outra em um ponto do polígono.

Figura 4.21: Pirâmide qualquer

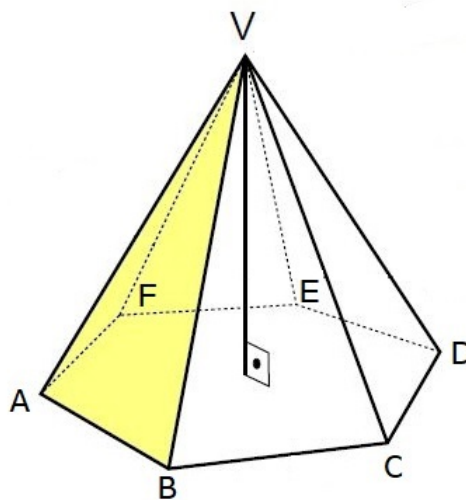


Fonte: O próprio autor.

I) Elementos de uma Pirâmide:

Considerando a pirâmide representada na figura a seguir vamos apresentar os principais elementos deste sólido.

Figura 4.22: Pirâmide



Fonte: O próprio autor.

Vértice: O ponto V é o vértice da pirâmide.

Base: O polígono $ABCDEF$ é a base da pirâmide.

Arestas da base: São os lados do polígono da base. No exemplo dado são os segmentos AB , BC , CD , DE , EF e FA .

Arestas laterais: São os lados dos triângulos das faces laterais. No exemplo dado são os segmentos VA , VB , VC , VD , VE e VF .

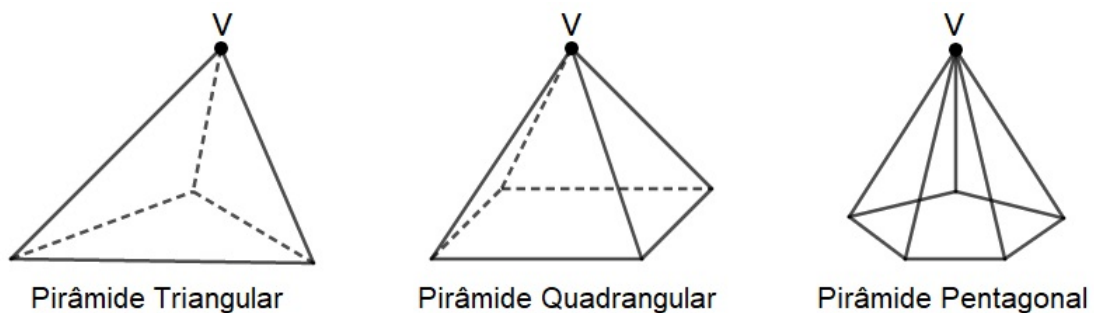
Faces laterais: As faces laterais são os triângulos VAB , VBC , VCD , VDE , VEF e VFA .

Altura: É a distância entre o vértice V e o plano da base.

II) Nomenclatura das pirâmides:

A nomenclatura das pirâmides, assim como dos prismas, está relacionada ao polígono de sua base, ou seja, uma pirâmide cuja base é um triângulo será chamada de *pirâmide triangular*, se a base for um quadrilátero será dita *pirâmide quadrangular*, se for um pentágono será *pirâmide pentagonal* e assim por diante.

Figura 4.23: Nomenclatura das pirâmides



Fonte: O próprio autor.

III) Classificação das Pirâmides:

Pirâmide Reta: A projeção de seu vértice coincide com o ponto que tem a mesma distância dos vértices do polígono da base (o centro geométrico do polígono).

Pirâmide Oblíqua: A projeção do vértice não coincide com o centro da base.

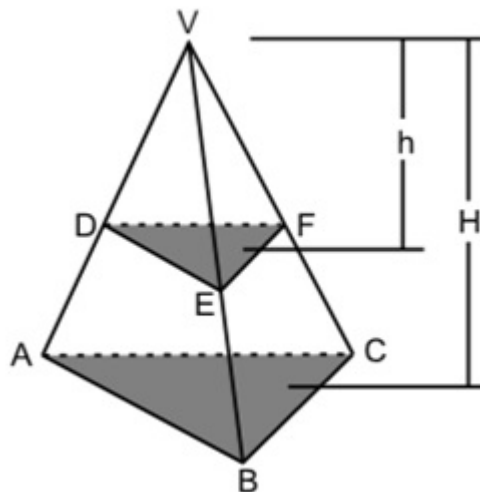
Pirâmide Regular: É uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular.

4.3.3.1 Volume de uma Pirâmide

Para determinar uma fórmula geral para o cálculo do volume de pirâmides, iniciamos com o estudo de algumas propriedades das pirâmides triangulares, que estendem-se às demais pirâmides, uma vez que um polígono convexo de n lados pode ser sempre dividido em $n - 2$ triângulos. Na sequência, vamos encontrar o volume de uma pirâmide triangular, aplicando o Princípio de Cavalieri e, por fim, deduziremos a fórmula geral para uma pirâmide qualquer.

Começamos verificando o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base. Para isso, seja uma pirâmide de base triangular ABC com vértice V e altura H . Seccionamos esta pirâmide por um plano paralelo à base com uma distância h do vértice V conforme figura a seguir.

Figura 4.24: Secção de pirâmide



Fonte: O próprio autor.

Mostraremos que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, com razão de semelhança $\frac{H}{h}$ e, por consequência, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e DEF é $(\frac{H}{h})^2$.

Iniciamos mostrando que os triângulos ABC e DEF são de fato semelhantes com razão k . Analisando os triângulos VAB e VDE temos que AB e DE são paralelos, logo os ângulos internos correspondentes dos dois triângulos são congruentes e, pelo caso AA, ABC e DEF são semelhantes. Portanto,

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VD}} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = k \quad (4.1)$$

De forma análoga, demonstra-se que VBC é semelhante a VEF e VAC é semelhante a VDF , de onde conclui-se que

$$k = \frac{\overline{VB}}{\overline{VE}} = \frac{\overline{VC}}{\overline{VF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \quad (4.2)$$

$$k = \frac{\overline{VC}}{\overline{VF}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \quad (4.3)$$

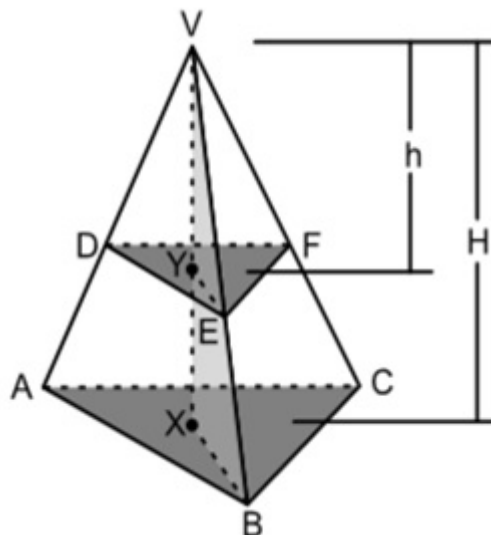
De (4.1), (4.2) e (4.3) conclui-se que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

ou seja, os lados da base e da secção são proporcionais e os triângulos ABC e DEF são semelhantes de razão k . Agora nos resta mostrar que esta constante $k = \frac{H}{h}$.

Para isso, considere os pontos Y , na secção DEF , e X , na base ABC , ambos sobre a perpendicular baixada pelo vértice V .

Figura 4.25: Razão de semelhança



Fonte: O próprio autor.

Observando os triângulos VXB e VYE , como os segmentos XB e YE são paralelos, segue que os triângulos VXB e VYE são semelhantes, assim

$$\frac{\overline{VX}}{\overline{VY}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{YE}} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VE}} = k.$$

Como os triângulos VXB e VYE são retângulos em X e Y , respectivamente, segue que $\overline{VX} = H$ e $\overline{VY} = h$, logo $k = \frac{H}{h}$. Portanto, os triângulos ABC e DEF são semelhantes e sua constante de proporcionalidade é dada por $\frac{H}{h}$.

Com base nesta análise podemos determinar uma relação entre as áreas da base e da secção. Como os triângulos ABC e DEF são semelhantes, temos que todos os segmentos opostos ao mesmo ângulo destes triângulos são proporcionais e a razão da proporção será

dada por $\frac{H}{h}$. Seja h_1 a altura relativa à base BC do triângulo ABC e h_2 a altura relativa à base EF do triângulo DEF . As áreas de ABC e DEF satisfazem

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot h_2} \Rightarrow \frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{\overline{BC} \cdot h_1}{\overline{EF} \cdot h_2}.$$

sabemos que $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{H}{h}$, então

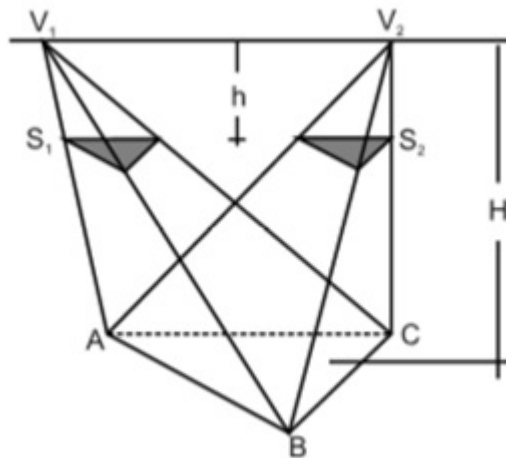
$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{H}{h} \cdot \frac{H}{h} = \left(\frac{H}{h}\right)^2.$$

Vamos utilizar os argumentos acima na demonstração do teorema que segue.

Teorema 3: *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume.*

Considere duas pirâmides P_1 e P_2 de mesma base triangular ABC , mesma altura H e vértices V_1 e V_2 respectivamente. Consideramos a base triangular para uma simplificação no desenho, pois a razão entre áreas de figuras semelhantes é sempre o quadrado da razão de semelhança.

Figura 4.26: Pirâmides de mesma base e altura



Fonte: O próprio autor.

As seções S_1 e S_2 são obtidas quando passamos um plano paralelo à base ABC , em uma altura h dos vértices. Observe que estas seções possuem a mesma área, pois

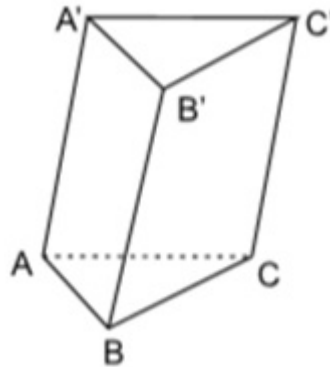
$$\frac{A(ABC)}{S_1} = \frac{A(ABC)}{S_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, podemos concluir que $V(P_1) = V(P_2)$. Logo, podemos perceber que o vértice de uma pirâmide pode deslocar-se sobre um plano paralelo à base e seu volume não será alterado.

Teorema 4: *O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto de sua altura pela área da base.*

Seja um prisma P triangular de base ABC e a altura h . O volume deste prisma é dado por $V(P) = A(ABC) \cdot h$.

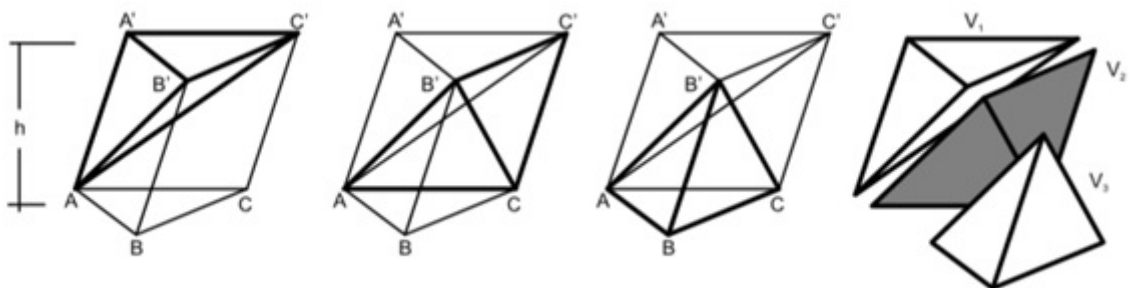
Figura 4.27: Prisma triangular



Fonte: O próprio autor.

O prisma P pode ser decomposto em três pirâmides triangulares: pirâmide de vértice A e base $A'B'C'$ que denotaremos por $A - A'B'C'$, pirâmide de vértice C e base $AB'C'$ que denotaremos por $C - AB'C'$ e pirâmide de vértice B' e base ABC que denotaremos por $B' - ABC$. A figura a seguir ilustra a decomposição do prisma nessas três pirâmides.

Figura 4.28: Decomposição do prisma em pirâmides



Fonte: O próprio autor.

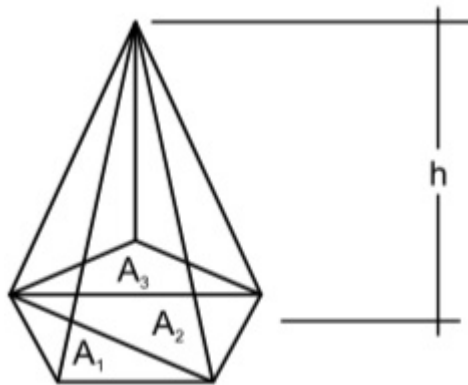
Sabe-se que em um prisma as bases paralelas possuem a mesma área, logo $A(ABC) = A(A'B'C')$. As pirâmides $A - A'B'C'$ e $B' - ABC$ possuem mesma área da base e mesma altura, portanto possuem mesmo volume. Por outro lado, as pirâmides $C - AB'C'$ e $A'(AB'C')$ também possuem mesma área da base e mesma altura, portanto têm mesmo volume. Como $A'(AB'C')$ e $A - A'B'C'$ são a mesma pirâmide, vemos que o prisma foi decomposto em três pirâmides triangulares de mesmo volume, assim

$$V(P) = 3 \cdot V(\text{pirâmide}) = A(ABC) \cdot h \Rightarrow V(\text{pirâmide}) = \frac{1}{3} \cdot A(ABC) \cdot h.$$

Esse mesmo teorema pode ser estendido para o volume de uma pirâmide qualquer.

Observe que qualquer pirâmide pode ser decomposta em pirâmides de bases triangulares. Esta decomposição é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide, como na figura a seguir.

Figura 4.29: Volume da pirâmide



Fonte: O próprio autor.

Seja uma pirâmide P de altura h tal que sua base, de área A , foi dividida em n triângulos de áreas A_1, A_2, \dots, A_n . Logo

$$V(P) = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \dots + \frac{1}{3}A_nh$$

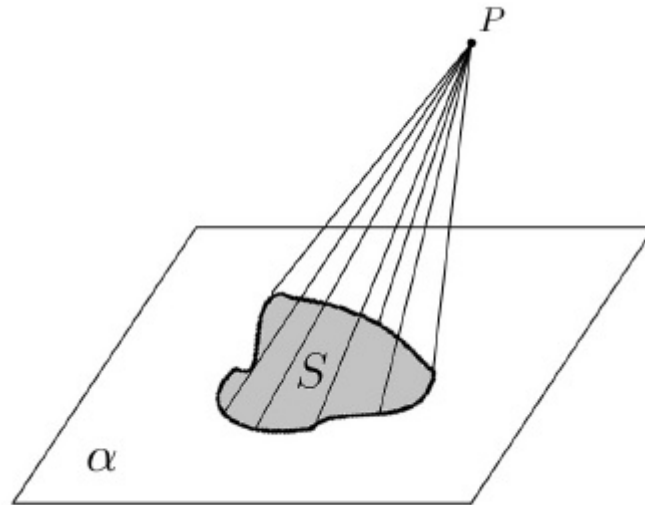
$$V(P) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)h$$

$$V(P) = \frac{1}{3}A \cdot h.$$

4.3.4 Cone

Um cone K , tendo como base uma figura plana F sobre um plano α , e como vértice um ponto P situado fora do plano de F , é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F .

Figura 4.30: Cone



Fonte: O próprio autor.

A *altura* do cone é dada pela distância do vértice P ao plano α da base, ou seja, é o comprimento da perpendicular baixada de P sobre o plano da base.

O cone definido desta forma é conhecido pelo nome de *cone generalizado*. Quando sua base é um círculo, denomina-se *cone circular* ou simplesmente *cone*.

Perceba que de forma similar ao cilindro generalizado, esta definição de cone inclui, como caso particular, a possibilidade da base F ser um polígono. Neste caso, o sólido fica limitado por faces planas triangulares e é chamado de *pirâmide*. Portanto, uma *pirâmide* é, por definição, um cone de base poligonal.

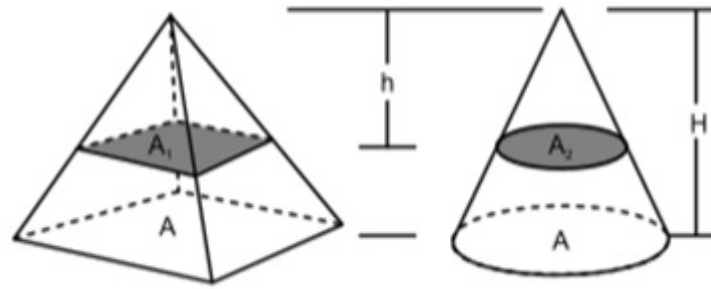
4.3.4.1 Volume de um Cone

Após apresentar a definição de cone, vamos deduzir a fórmula geral para o cálculo de volume deste sólido.

Teorema 5: *O volume de um cone é um terço do produto de sua altura pela área da base.*

Dado um cone K com altura H e área da base A , considere uma pirâmide P qualquer com mesma altura e área da base, cuja base está sobre o mesmo plano horizontal da base do cone. A figura em sequência ilustra esta situação.

Figura 4.31: Volume do cone



Fonte: O próprio autor.

Se um plano paralelo ao que contém as bases intersectar os sólidos a uma altura h de seus vértices, obteremos secções transversais paralelas às bases da pirâmide e do cone de áreas A_1 e A_2 , respectivamente. Segue que a razão entre as áreas das bases do cone maior e do cone menor, bem como a razão entre as bases das pirâmides maior e menor, é igual a razão entre os quadrados das respectivas alturas. Logo

$$\frac{A}{A_1} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{A}{A_2} \Rightarrow A_1 = A_2.$$

Sendo assim, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes dos sólidos são iguais, isto é

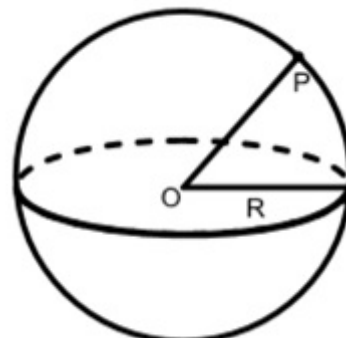
$$V(K) = V(P) = \frac{1}{3}A \cdot H.$$

4.3.5 Esfera

A *esfera* de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R . A esfera é, então, a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento igual a R .

É importante diferenciar a *esfera* da *superfície esférica*. A *superfície esférica* de centro O e raio R é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual a R .

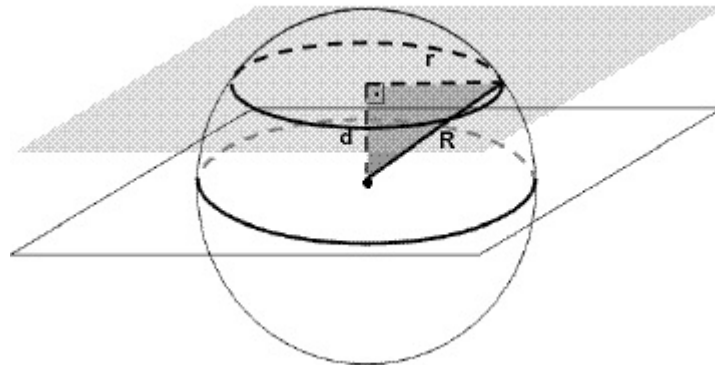
Figura 4.32: Esfera



Fonte: O próprio autor.

Quando uma esfera de centro O e raio R é intersectada por um plano α em mais de um ponto, o conjunto de pontos comuns ao plano e à esfera é um *círculo*. Portanto, toda seção plana de uma esfera é um círculo. A medida do raio desse círculo varia de acordo com a distância do plano α ao centro O . Quanto mais próximo de O o plano estiver, maior será a medida do raio r da seção. Se α passar pelo ponto O , o raio da seção será o raio R da esfera e, nesse caso, a seção será chamada de *círculo máximo da esfera*.

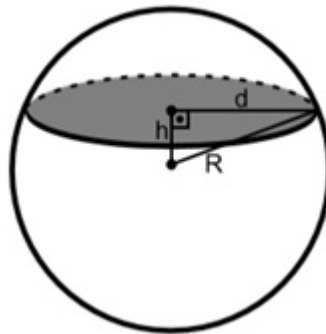
Figura 4.33: Seção de uma esfera



Fonte: Guia do Estudante.⁶

Considere um plano α qualquer que secciona uma esfera de raio R a uma distância h do seu centro.

Figura 4.34: Área da seção



Fonte: O próprio autor.

Para definirmos a área da seção S precisamos conhecer o raio da circunferência que foi formada. Este raio é fácil de ser determinado, pois conhecemos o raio R da esfera e a distância h do centro da esfera ao centro da circunferência. Pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$R^2 = h^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = R^2 - h^2.$$

⁶Disponível em: <<https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/esferas-geometria-espacial/>>. Acesso em: 14 out. 2020.

Como a área de um círculo de raio r é dada por $\pi \cdot r^2$, a área da seção S é

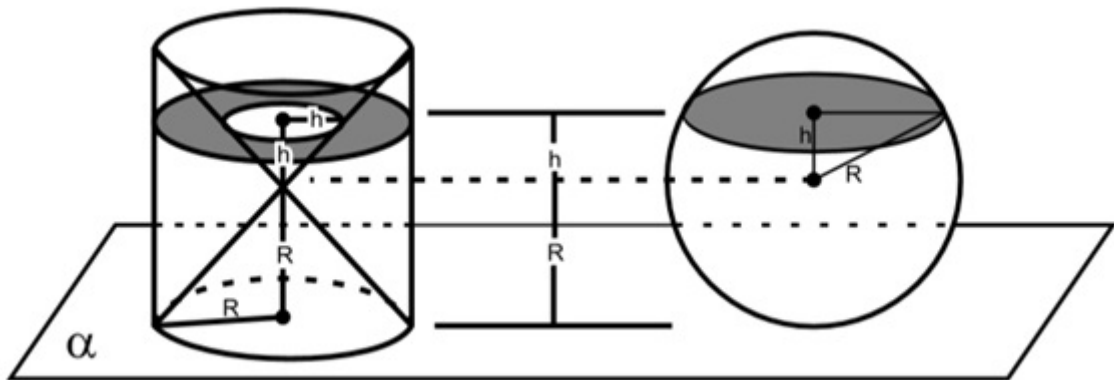
$$A(S) = \pi \cdot (R^2 - h^2).$$

4.3.5.1 Volume de uma Esfera

Vamos deduzir agora a fórmula geral para o cálculo do volume de uma esfera. Antes, precisamos definir *cilindro equilátero*. Cilindro equilátero é todo cilindro circular cuja medida da altura é igual ao dobro da medida do raio da base.

Considere um cilindro equilátero de raio R com base disposta sobre um plano α . É possível construir dois cones de raios R e alturas também R contidos no cilindro equilátero e com suas bases coincidindo com as bases do cilindro, conforme a figura abaixo. Considere ainda uma esfera de raio R , tangente ao plano α .

Figura 4.35: Volume da esfera



Fonte: Lula (2013, p. 41).

Seja β um plano qualquer paralelo ao plano α que intersecta os dois sólidos em uma altura $R + h$, com $h < R$, de acordo com a figura acima. A interseção entre o plano β e a esfera é um círculo que chamaremos de S e a interseção entre este plano e o outro sólido formado pelo cilindro e os cones é uma *coroa circular*, região limitada por dois círculos concêntricos, que chamaremos de C .

Há uma relação entre a área da seção determinada na esfera e a área da coroa circular determinada entre o cilindro e o cone. A área da seção na esfera, como vimos, é dada por:

$$A(S) = \pi \cdot (R^2 - h^2).$$

Já a área da coroa circular é a diferença entre um círculo de raio R e um círculo de raio h , pois a geratriz dos cones formam um ângulo de 45° com o plano que contém a base, logo a área da coroa é dada por:

$$A(C) = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot h^2 = \pi \cdot (R^2 - h^2).$$

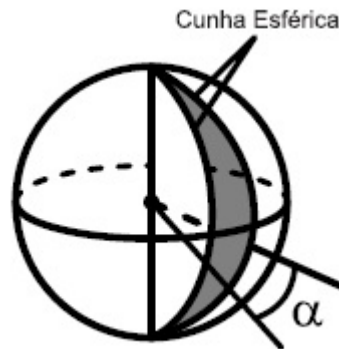
Como o plano β determina secções que possuem a mesma área e as alturas dos sólidos são as mesmas, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes dos sólidos são iguais, logo

$$\begin{aligned} V_{esfera} &= V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone} \\ V_{esfera} &= \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R \\ V_{esfera} &= 2\pi R^3 - \frac{2}{3} \pi R^3 \\ V_{esfera} &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

4.3.6 Cunha Esférica

Cunha Esférica é um sólido gerado pela rotação de um semicírculo que gira em α graus ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$) em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

Figura 4.36: Cunha esférica



Fonte: Lula (2013, p. 39).

4.3.6.1 Volume de uma Cunha Esférica

Vamos determinar um processo para o cálculo do volume de uma cunha esférica. Perceba que o volume da cunha esférica é proporcional ao ângulo θ , ou seja, se θ é dobrado, o volume da cunha esférica é dobrado; se θ é triplicado, o volume da cunha esférica é triplicado; e assim sucessivamente. Se $\theta = 360^\circ$, a cunha esférica se transforma em uma esfera e seu volume é $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. Desta forma, o volume pode ser calculado por uma regra de três simples.

$$\frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\theta}{360^\circ} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{\pi R^3 \theta}{270^\circ}.$$

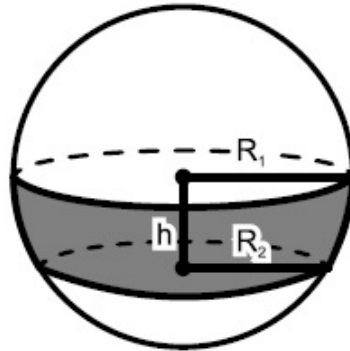
Se θ for dado em radianos:

$$\frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{2R^3 \theta}{3}.$$

4.3.7 Segmento Esférico

Segmento esférico é a região limitada por dois planos paralelos que seccionam uma esfera, gerando um sólido com duas bases circulares de raios R_1 e R_2 .

Figura 4.37: Segmento esférico



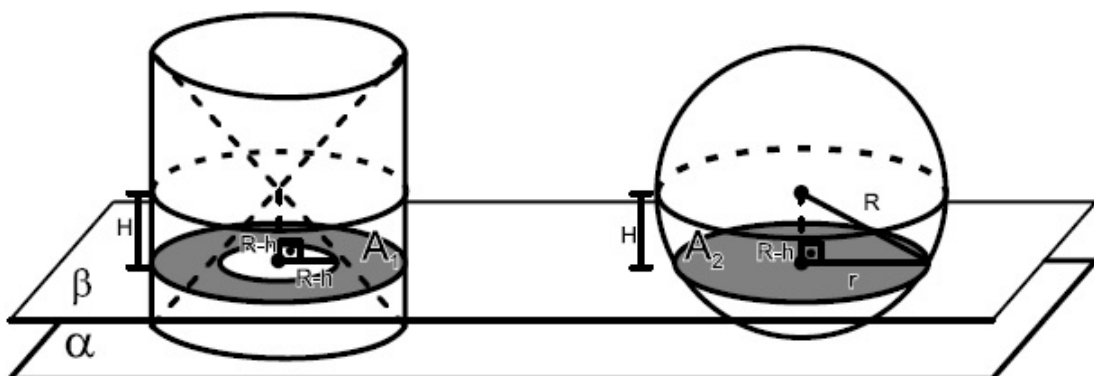
Fonte: Lula (2013, p. 39).

4.3.7.1 Volume de um Segmento Esférico

Vamos determinar uma fórmula geral para o volume de um segmento esférico. Para isso, adotaremos a mesma ideia aplicada para a obtenção do volume da esfera.

Considere um cilindro equilátero de raio R com base disposta sobre um plano α e construa dois cones de raio R e altura também R contidos no cilindro equilátero, com suas bases coincidindo com as bases do cilindro, conforme figura a seguir. Considere ainda uma esfera de raio R , tangente ao plano α .

Figura 4.38: Volume de um segmento esférico



Fonte: Lula (2013, p. 41).

Seja um plano β , paralelo ao α , que intersecta os dois sólidos em uma altura h , com $h < R$. Este plano determina uma secção no sólido formado pelo cilindro e os dois cones no formato de uma coroa circular de área A_1 e na esfera um círculo de área A_2 .

A área A_1 da coroa circular determinada no cilindro é

$$A_1 = \pi R^2 - \pi (R - h)^2 = \pi R^2 - \pi R^2 + 2\pi R h - \pi h^2$$

$$A_1 = \pi h (2R - h).$$

A área A_2 determinada na esfera é πr^2 , com $R^2 = (R - h)^2 + r^2$, logo

$$A_2 = \pi [R^2 - (R - h)^2] = \pi (R^2 - R^2 + 2R h - h^2) = \pi (2R h - h^2)$$

$$A_2 = \pi h (2R - h).$$

Portanto, as áreas das secções são iguais e como os sólidos possuem mesma altura, pelo Princípio de Cavalieri, possuem o mesmo volume. Desta forma, o segmento esférico de altura $H = R - h$, limitado pelos círculos paralelos de raios R e r terá seu volume igual ao do cilindro de raio R e altura H menos o volume do cone de raio H e altura H , logo

$$V_{\text{segmento}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cone}}$$

$$V_{\text{segmento}} = \pi R^2 H - \frac{1}{3} \pi H^2 H$$

mas como $H = R - h$,

$$V_{\text{segmento}} = \pi R^2 (R - h) - \frac{1}{3} \pi (R - h)^2 (R - h)$$

$$V_{\text{segmento}} = \frac{1}{3} \pi (R - h) [3R^2 - (R - h)^2]$$

$$V_{\text{segmento}} = \frac{1}{3} \pi (R - h) [2R^2 + R^2 - (R - h)^2]$$

Como $R^2 = (R - h)^2 + r^2$,

$$V_{\text{segmento}} = \frac{1}{3} \pi H (2R^2 + r^2).$$

Observe que se os planos β e α forem coincidentes, $r = 0$, $H = R$ e o segmento esférico será uma semiesfera. Logo, o volume da semiesfera será

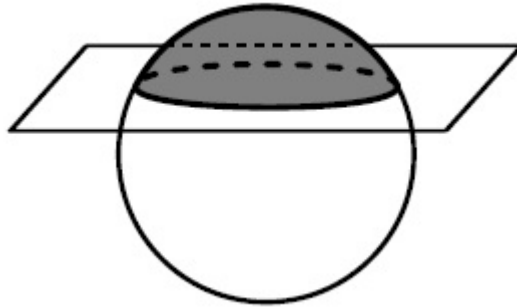
$$V_{se} = \frac{1}{3} \pi R (2R^2 + 0^2) = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

que é exatamente a metade do volume de uma esfera, segundo a fórmula obtida anteriormente para o volume de uma esfera. Assim, temos uma verificação da fórmula obtida para um caso particular.

4.3.8 Calota Esférica

Uma *calota esférica* é a parte de uma esfera cortada por um plano. Se tal plano passa pelo centro da esfera, a altura da calota é igual ao raio da esfera, e a calota esférica será uma semiesfera.

Figura 4.39: Calota esférica

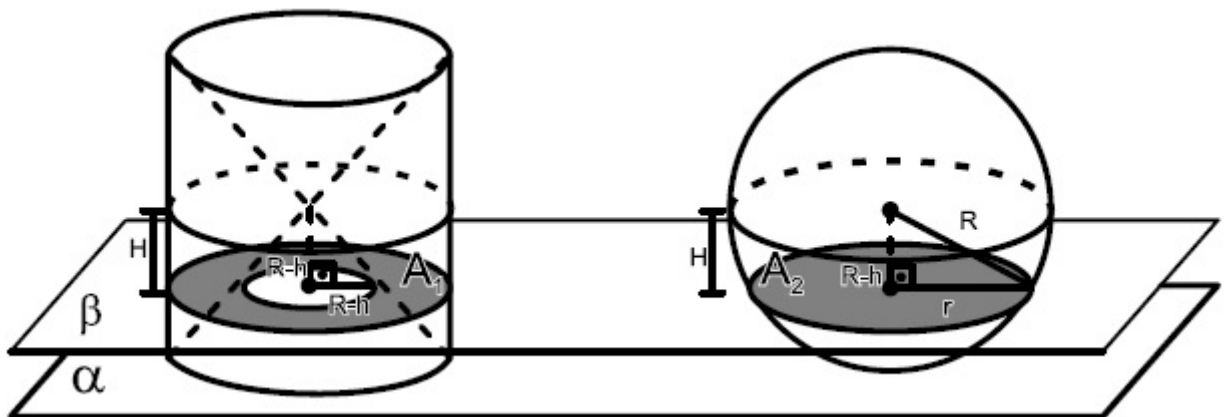


Fonte: Lula (2013, p. 41).

4.3.8.1 Volume de uma Calota Esférica

Vamos determinar uma fórmula geral para o volume de uma calota esférica. Para isso, repetiremos o mesmo processo realizado para o cálculo do volume da esfera e do segmento esférico.

Figura 4.40: Volume de uma calota esférica



Fonte: Lula (2013, p. 45).

Pela construção acima, idêntica a utilizada para o cálculo do volume de uma esfera e de um segmento esférico, o plano β determina as secções de áreas A_1 e A_2 no cilindro e na esfera respectivamente, onde $A_1 = A_2$. Sendo a calota esférica limitada pelo círculo de área A_2 , pelo Princípio de Cavalieri o volume da calota esférica de raio r e altura h é

igual ao volume do cilindro de altura h e raio R menos o volume do tronco de cone de altura h e raios das bases R e $R - h$. Portanto,

$$V_{calota} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} [R^2 + R(R - h) + (R - h)^2]$$

$$V_{calota} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} (3R^2 - 3Rh + h^2)$$

$$V_{calota} = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h).$$

Perceba que esta fórmula para volume depende da altura h da calota e do raio R da esfera, mas é possível obter uma expressão em função do raio da base da calota e de sua altura por meio de manipulações algébricas. Pelo Teorema de Pitágoras

$$R^2 = (R - h)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - (R - h)^2.$$

E pela expressão de volume encontrada

$$V_{calota} = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) = \frac{\pi h^2}{6} (6R - 2h) = \frac{\pi h}{6} (6Rh - 2h^2)$$

$$V_{calota} = \frac{\pi h}{6} (6Rh - 3h^2 + h^2) = \frac{\pi h}{6} [3(2Rh - h^2) + h^2]$$

$$V_{calota} = \frac{\pi h}{6} [3(R^2 - R^2 + 2Rh - h^2) + h^2] = \frac{\pi h}{6} [3(R^2 - (R - h)^2) + h^2].$$

Logo,

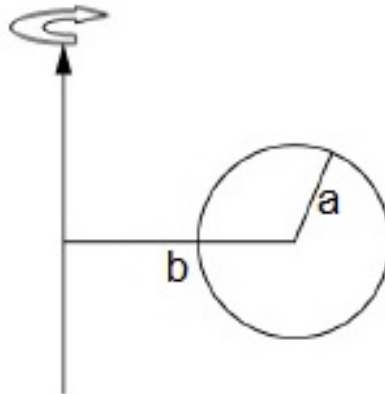
$$V_{calota} = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2).$$

Outra forma de se chegar a este mesmo resultado seria subtraindo do volume da semiesfera de raio R o segmento esférico de altura $H = R - h$ e bases circulares de raios R e r . Também poderíamos ter proposto o caminho inverso, obtendo inicialmente o volume de uma calota esférica e a partir dela chegar no volume de um segmento esférico pela subtração do volume da semiesfera pelo da calota esférica.

4.3.9 Toro

Seja um círculo de raio a e um eixo vertical, situado a uma distância b de seu centro, com $b > a$, ambos em um mesmo plano. Rotacionando o círculo em torno desse eixo, obtemos um sólido chamado *toro*.

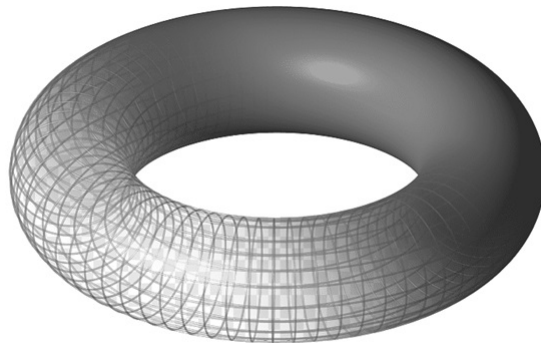
Figura 4.41: Rotação do círculo em torno do eixo vertical



Fonte: O próprio autor.

A figura a seguir apresenta o sólido *toro* obtido por esta rotação.

Figura 4.42: Toro



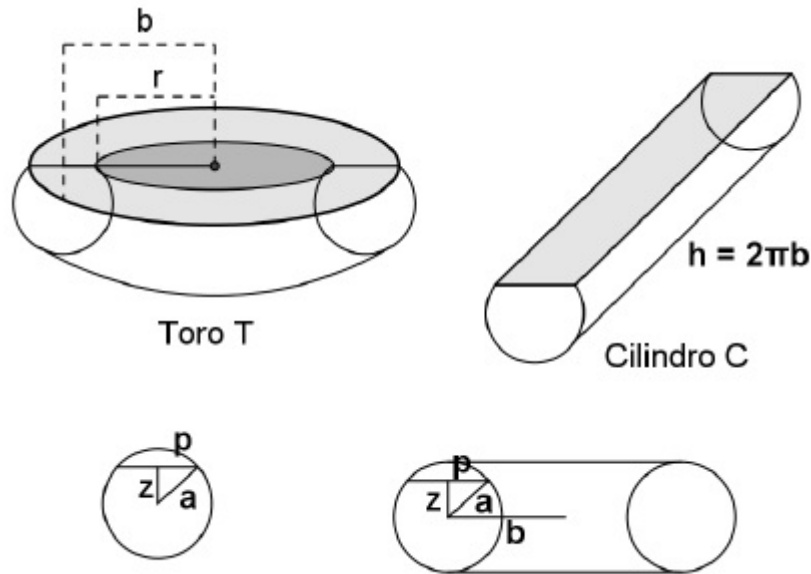
Fonte: PNG Wing.

4.3.9.1 Volume de um Toro

Vamos obter o volume do toro aplicando o Princípio de Cavalieri. Para isso, devemos compará-lo com outro sólido.

Seja um toro T com círculo gerador de raio a e um cilindro C com raio da base a e altura $2\pi b$. Um plano α secciona os sólidos a uma altura z do centro dos círculos que geram o toro e o cilindro, conforme figura a seguir.

Figura 4.43: Toro e cilindro



Fonte: Kurokawa (2015, p. 46).

No toro T a secção obtida terá o formato de uma coroa circular de raio interno r , raio externo R e área A_1 . Sendo $2p = R - r$, aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo de catetos p e z e de hipotenusa a . Logo

$$p = \sqrt{a^2 - z^2}.$$

E como $b = r + p = R - p$,

$$r = b - \sqrt{a^2 - z^2} \quad \text{e} \quad R = b + \sqrt{a^2 - z^2}$$

Sendo assim, a coroa circular terá área

$$A_1 = \pi(R - r)^2 = \pi[(b + \sqrt{a^2 - z^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - z^2})^2]$$

$$A_1 = \pi(b + \sqrt{a^2 - z^2} - b + \sqrt{a^2 - z^2})(b + \sqrt{a^2 - z^2} + b - \sqrt{a^2 - z^2})$$

$$A_1 = 2\pi\sqrt{a^2 - z^2} \cdot 2b$$

$$A_1 = 4\pi b\sqrt{a^2 - z^2}.$$

No cilindro C a secção obtida terá o formato de um retângulo de base $2p$, altura $2\pi b$ e área A_2 . Logo, a área do retângulo será

$$A_2 = 2 \cdot \sqrt{a^2 - z^2} \cdot 2\pi b$$

$$A_2 = 4\pi b\sqrt{a^2 - z^2}.$$

Portanto, verifica-se que as duas seções horizontais têm as mesmas áreas, independente do valor de z . Então, pelo Princípio de Cavalieri, o toro T e o cilindro C possuem o mesmo volume.

O volume do cilindro C é dado por

$$V(C) = \pi a^2 \cdot 2\pi b = 2\pi a^2 b.$$

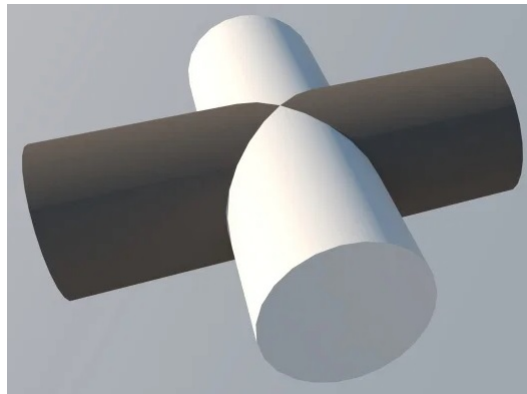
Desta forma, o volume do toro T também será

$$V(T) = 2\pi a^2 b.$$

4.3.10 Interseção de Dois Cilindros de Mesmo Raio

Sejam dois cilindros circulares retos C_1 e C_2 , de mesmo raio r , que se intersectam de tal forma que seus eixos sejam concorrentes e perpendiculares, conforme figura a seguir.

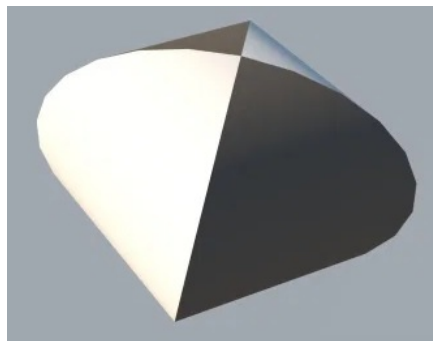
Figura 4.44: Interseção de dois cilindros circulares



Fonte: Puxe o Gatilho.⁷

A região do espaço comum aos dois cilindros forma um sólido que apresentamos na figura a seguir e chamaremos de I .

Figura 4.45: Sólido gerado pela interseção de dois cilindros circulares



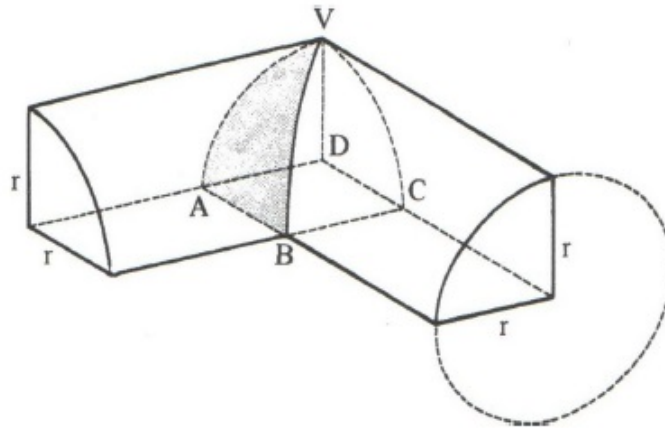
Fonte: Puxe o Gatilho.

⁷Disponível em: <<https://puxeogatilho.wordpress.com/2015/06/15/intersecao-de-cilindros-perpendiculares/>>. Acesso em: 15 out. 2020.

4.3.10.1 Volume da Interseção de Dois Cilindros de Mesmo Raio

Vamos calcular o volume deste sólido aplicando o Princípio de Cavalieri. Para isso, dividimos o sólido I em 8 partes iguais e analisaremos a região do espaço cujo volume corresponde a $\frac{1}{8}$ do volume do sólido que queremos calcular. Chamaremos esta região de S e a representamos na figura a seguir.

Figura 4.46: Interseção parcial dos cilindros



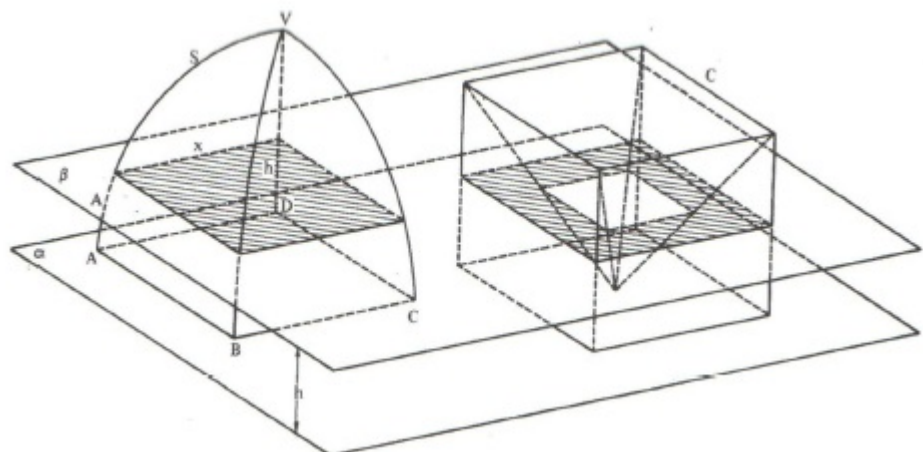
Fonte: Oliveira (2016, p. 46).

Perceba que o sólido S possui base quadrada $ABCD$, duas faces laterais que são setores de círculo e duas faces que são parte de superfícies cilíndricas.

Considere um cubo C de aresta r apoiado sobre o plano α da base de S . Deste cubo retira-se uma pirâmide P cuja base é a face superior do cubo e seu vértice está no plano α , ou seja, está na base inferior do cubo.

Um plano β paralelo ao α intersecta os sólidos a uma distância h de α . Vamos comparar as áreas das secções feitas por este plano nos dois sólidos.

Figura 4.47: Secções nos sólidos S e C



Fonte: Oliveira (2016, p. 46).

No sólido S , a secção é um quadrado de lado x de área A_1 . Como VA e VC são arcos da circunferência de raio r , pelo Teorema de Pitágoras,

$$x^2 = r^2 - h^2.$$

Portanto, a área da secção em S será

$$A_1 = x^2 = r^2 - h^2.$$

No cubo C , a secção é um quadrado de lado r de área $A_2 = r^2$. À ela, devemos subtrair a secção feita na pirâmide P , cuja área A_3 é tal que $\frac{A_3}{r^2} = \left(\frac{h}{r}\right)^2$, ou seja, $A_3 = h^2$. Logo, a área da secção feita por β no sólido formado pelo cubo suprimindo a pirâmide é

$$A_2 - A_3 = r^2 - h^2.$$

Percebe-se então que as áreas das secções nos dois sólidos são iguais independente da altura h , logo, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos possuem o mesmo volume. Portanto, o volume do sólido S será o volume do cubo subtraído do volume da pirâmide, assim

$$V(S) = V_{cubo} - V_{piramide} = r^3 - \frac{1}{3}(r^2 \cdot r) = \frac{2r^3}{3}.$$

Como S representa $\frac{1}{8}$ do volume da região formada pela interseção dos dois cilindros, o volume desta região será $8 \cdot V(S) = 8 \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{16r^3}{3}$.

4.4 Resolução de Problemas

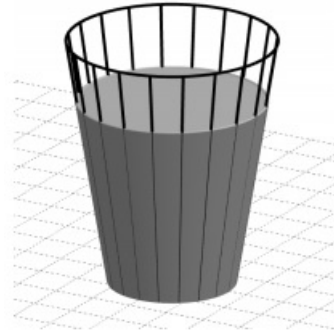
Nesta seção, resolveremos problemas sobre cálculo de volumes com aplicações das fórmulas obtidas neste estudo e outros que envolvem aplicações do Princípio de Cavalieri.

4.4.1 Problemas Sobre Volumes

Resolveremos a seguir problemas sobre volumes com aplicações das fórmulas obtidas ao longo desta dissertação.

Problema 1: (ENQ - Profmat - 2019) O copo em forma de tronco de cone circular reto representado na figura está apoiado em uma superfície perfeitamente horizontal e tem as seguintes medidas: raio da base superior igual a 5 cm, raio da base inferior igual a 3 cm e altura igual a 12 cm. Se esse copo está preenchido com água até a altura de 9 cm, pergunta-se: é possível transferir toda a água contida em um outro copo de 200 ml, completamente cheio, para o copo que aparece na figura sem que este transborde?

Figura 4.48: Problema 1 sobre volumes

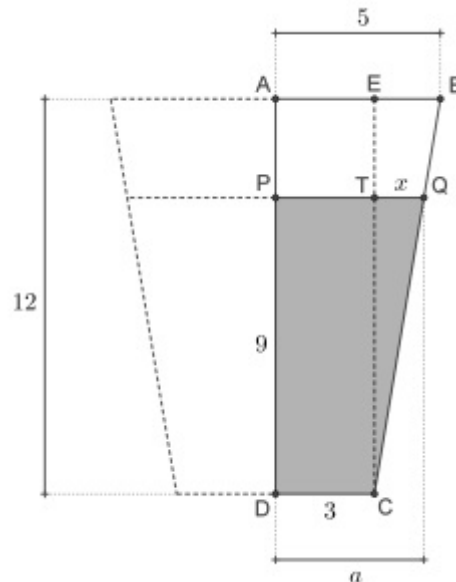


Fonte: PROFMAT (2019).

Informação: O volume V de um tronco de cone cujos raios das bases são R e r e cuja altura é h é dado por $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

Solução: Por meio de um corte transversal passando pelos centros A e D dos círculos da borda e da base do copo respectivamente, obtém-se a figura a seguir que representa o trapézio $ABCD$, de bases AB e CD , medindo 5 cm e 3 cm respectivamente, com altura igual a 12 cm e o trapézio $PQCD$ cuja base PQ mede a e com altura 9 cm .

Figura 4.49: Problema 1 sobre volumes - solução



Fonte: PROFMAT (2019).

Traçando uma paralela ao segmento AD passando por C , obtemos os pontos E e T de interseção desta paralela com os segmentos AB e PQ . Seja x a medida do segmento TQ . Perceba que $a = 3 + x$.

Para sabermos se é possível transferir 200 ml de água para o copo sem transbordar, é preciso calcular o volume da parte vazia do copo, ou seja, do tronco de cone de altura $AP = 3 \text{ cm}$ e raios das bases $a \text{ cm}$ e 5 cm . Para isso, devemos determinar o valor de a , descobrindo primeiramente o valor de x através da semelhança entre os triângulos BCE e QCT . Logo,

$$\frac{x}{2} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = 1,5.$$

Portanto, $a = 4,5 \text{ cm}$. Aplicando a fórmula dada para o cálculo do volume do tronco de cone, que é deduzida a partir da fórmula verificada nesta dissertação para o volume de um cone, temos

$$V = \frac{3\pi}{3}[5^2 + 5 \cdot 4,5 + (4,5)^2]$$

$$V = \pi(25 + 22,5 + 20,25)$$

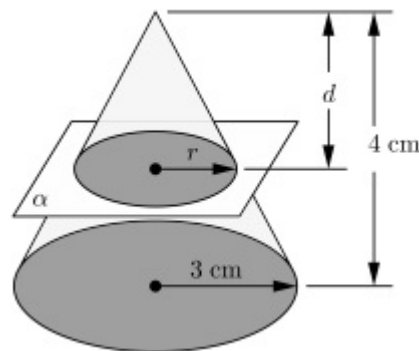
$$V \approx 3,14 \cdot 67,75$$

$$V \approx 212,735 \text{ cm}^3.$$

Assim, concluímos que é possível acrescentar mais 200 ml de água no copo sem que este transborde.

Problema 2: (ENQ - Profmat - 2016) O cone da figura seguinte tem 3 cm de raio da base e 4 cm de altura, sendo d a distância do vértice a um plano α , paralelo à base. Determine d de modo que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais.

Figura 4.50: Problema 2 sobre volumes



Fonte: PROFMAT (2016).

Solução: Sejam v o volume do cone pequeno, V o volume do cone grande e V_t o volume do tronco de cone. Temos então

$$V = v + V_t.$$

Como queremos ter $v = V_t$,

$$V = 2v \Rightarrow \frac{V}{v} = 2.$$

Provamos anteriormente que sendo a área da base do cone maior A_B e a área do cone menor A_b , temos

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{4}{d}\right)^2.$$

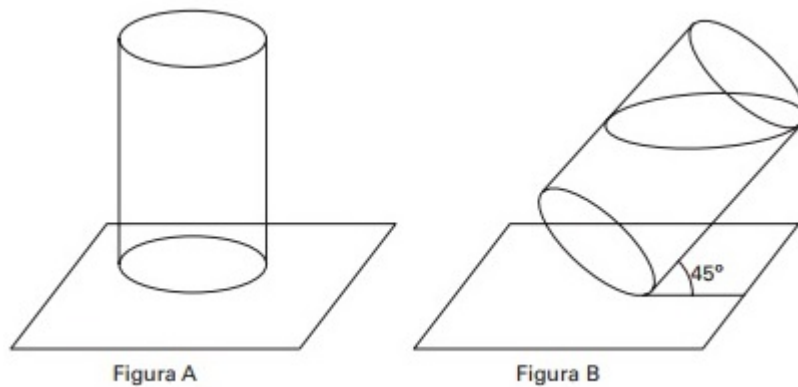
$$\frac{V}{v} = \frac{A_B \cdot 4}{A_b \cdot d} \Rightarrow \frac{V}{v} = \left(\frac{4}{d}\right)^3.$$

Sabendo que $\frac{V}{v} = 2$, concluímos que

$$d = 2\sqrt[3]{4} \text{ cm}.$$

Problema 3: A figura A mostra um copo cilíndrico reto com diâmetro da base de 10 cm e altura de 20 cm, apoiado sobre uma mesa plana e horizontal, completamente cheio de água. O copo foi inclinado lentamente até sua geratriz formar um ângulo de 45° com o plano da mesa, como mostra a figura B. Determine o volume de água derramada, em cm^3 .

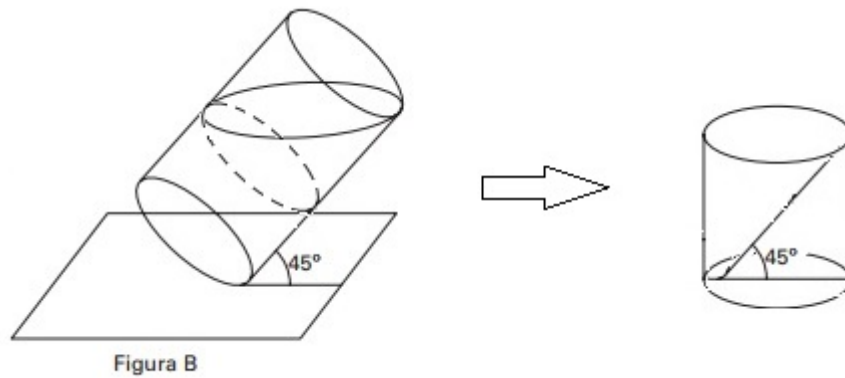
Figura 4.51: Problema 3 sobre volumes



Fonte: O próprio autor.

Solução: Perceba que o nível da água na Figura B é um círculo paralelo ao plano horizontal, logo o líquido no copo inclinado forma um ângulo de 45° com o plano da base do copo cilíndrico. Sendo assim, na parte superior do copo da Figura B tem-se um cilindro cujo volume está preenchido na metade, conforme figura a seguir.

Figura 4.52: Problema 3 sobre volumes - solução



Fonte: O próprio autor.

Seja h a altura do cilindro formado, temos

$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{h}{10} = 1 \Rightarrow h = 10 \text{ cm.}$$

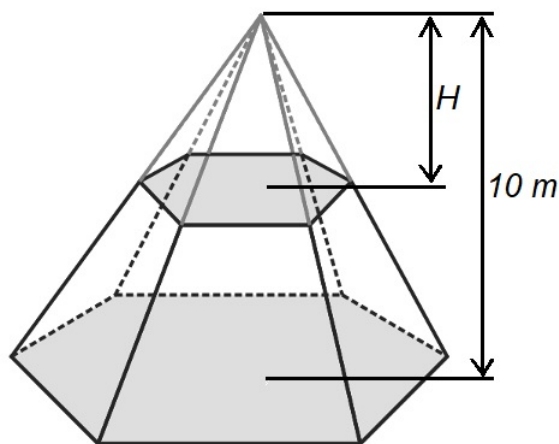
Desta forma, o volume V de água derramada será

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = \frac{\pi \cdot 250}{2} = 125\pi \text{ cm}^3.$$

Problema 4: Seja uma pirâmide de base hexagonal e altura 10 m . A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo a base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

Solução: Para resolver esta questão, vamos ilustrá-la com a figura a seguir.

Figura 4.53: Problema 4 sobre volumes - solução



Fonte: O próprio autor.

O plano determina uma nova pirâmide hexagonal de mesmo vértice e altura H . Tem-se que a razão entre os volumes das duas pirâmides equivale ao cubo da razão entre

suas alturas. Sendo V o volume da pirâmide original, como deseja-se que o volume da nova pirâmide seja $\frac{V}{8}$, temos

$$\frac{V}{8} = \left(\frac{10}{H}\right)^3$$

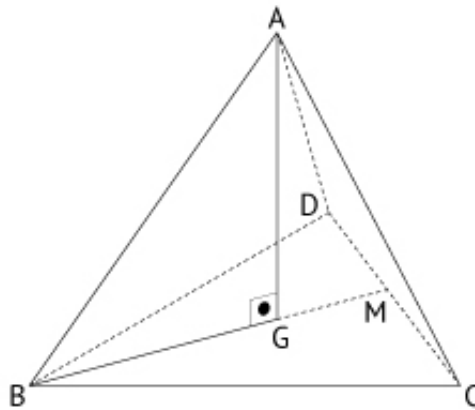
$$\frac{1000}{H^3} = 8$$

$$H = 5 \text{ cm.}$$

Para resolução do problema a seguir, demonstraremos um corolário.

Corolário 1: A altura de um tetraedro regular de aresta a é dada por $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Figura 4.54: Altura do tetraedro regular



Fonte: O próprio autor.

Demonstração: Seja um tetraedro regular de vértices $ABCD$ e aresta medindo a , onde A é o vértice oposto à face BCD . O ponto G é o pé da altura do tetraedro baixada do vértice A sobre a face BCD . Seja ainda M o ponto médio da aresta CD .

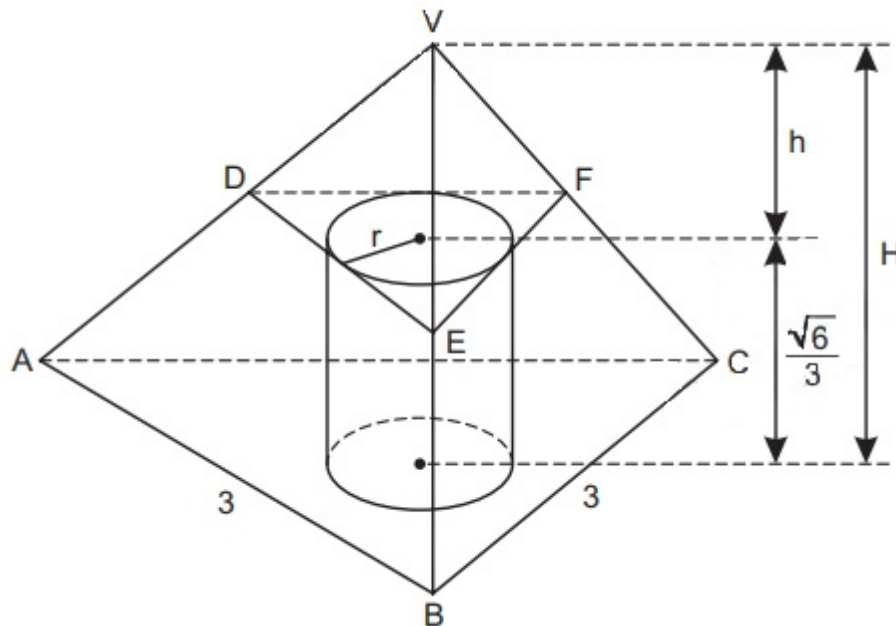
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ADM , temos que $\overline{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Como G é o baricentro do triângulo BCD , tem-se que $\overline{GM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Para determinar a altura AG do tetraedro, aplica-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo AGM , de onde conclui-se que $\overline{AG} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Problema 5: Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$ está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm , determine o volume do cilindro.

Solução: Observe a figura a seguir.

Figura 4.55: Problema 5 sobre volumes - solução



Fonte: O próprio autor.

Sejam H e h as medidas, em centímetros, das alturas dos tetraedros regulares $VABC$ e $VDEF$. Logo,

$$H = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}.$$

Assim,

$$h = H - \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Seja l a medida da aresta do tetraedro $VDEF$, temos

$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{l\sqrt{6}}{3} \Rightarrow l = 2.$$

Sabe-se que a medida r , em centímetros, do raio da base do cilindro é $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo equilátero DEF , pois como a circunferência da base do cilindro está inscrita no triângulo equilátero DEF , o centro da circunferência é o baricentro do triângulo. Logo,

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Então, o volume V do cilindro, em centímetros cúbicos, é

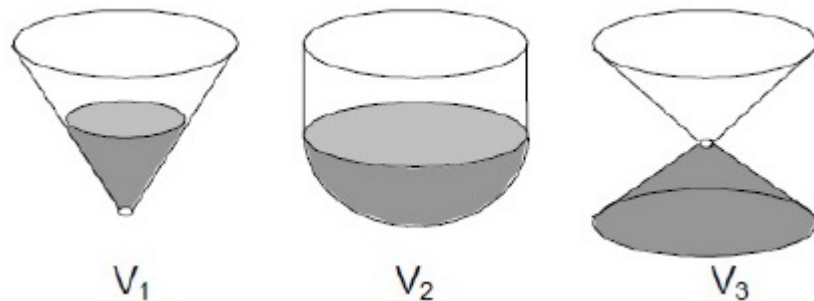
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9} \text{ cm}^3.$$

4.4.2 Problemas com Aplicação do Princípio de Cavalieri

Nesta seção iremos resolver alguns problemas sobre volumes aplicando o Princípio de Cavalieri.

Problema 1: (ENEM, 2005) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por V_1 , V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:

Figura 4.56: Questão 61 - ENEM 2015

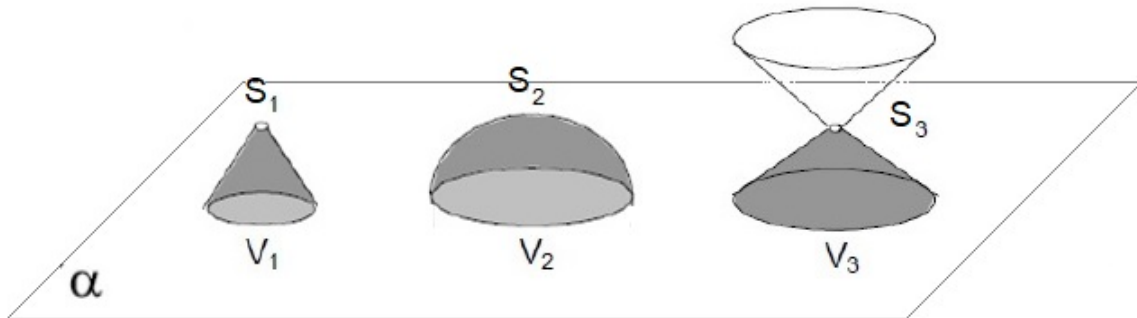


Fonte: ENEM (2015).

- a) $V_1 = V_2 = V_3$
- b) $V_1 < V_3 < V_2$
- c) $V_1 = V_3 < V_2$
- d) $V_3 < V_1 < V_2$
- e) $V_1 < V_2 = V_3$

Solução: Para resolver a questão, destacaremos as partes dos recipientes que contêm o líquido, formando três sólidos S_1 , S_2 e S_3 de volumes V_1 , V_2 e V_3 respectivamente, apoiados sobre um plano horizontal α conforme figura a seguir.

Figura 4.57: Questão 61 - ENEM 2015 - Solução



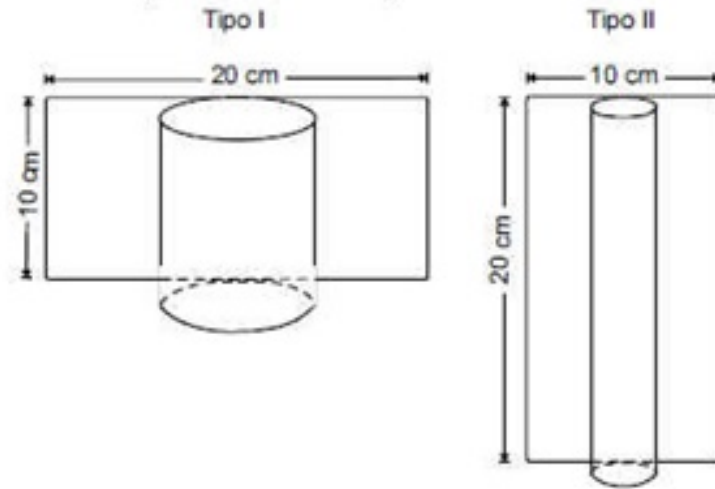
Fonte: O próprio autor.

Sabe-se que as alturas dos três sólidos são iguais e o Princípio de Cavalieri afirma que se qualquer plano horizontal secciona os sólidos segundo figuras planas com áreas iguais, então os volumes dos sólidos são iguais. Logo, se queremos comparar os volumes de sólidos de mesmas alturas, basta analisar as áreas das secções planas formadas por planos paralelos ao α nestes sólidos.

Comparando os sólidos S_1 e S_3 , ambos são cones de mesma altura, porém os círculos das suas bases possuem diâmetros diferentes, sendo o de S_1 menor que o de S_3 . Portanto, temos $V_1 < V_3$. Por outro lado, comparando os sólidos S_2 e S_3 , não é possível distinguir a diferença entre as medidas dos raios de suas bases, mas seccionando-os por planos paralelos ao α , percebe-se que à medida que este plano se distancia de α , as secções circulares feitas nos sólidos possuem raios distintos, sendo a área da secção feita em S_2 maior do que a área da secção feita em S_3 . Assim, temos $V_3 < V_2$. Então, o Princípio de Cavalieri nos garante que $V_1 < V_3 < V_2$ e a resposta correta é o item b).

Problema 2: (ENEM, 2006) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de $20\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

Figura 4.58: Questão 59 - ENEM 2016



Fonte: ENEM (2016).

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

- a) o triplo
- b) o dobro
- c) igual
- d) a metade
- e) a terça parte

Solução: Para resolver esta questão é preciso lembrar que segundo o Princípio de Cavalieri, dados dois sólidos que quando seccionados por um plano horizontal formam figuras planas com áreas de razões constantes, então a razão entre os seus volumes é essa mesma constante. Além disso, as velas possuem formato de cilindros retos e, por isso, seções paralelas feitas por planos horizontais possuem formato de círculos congruentes aos de suas bases.

No sólido Tipo I, o comprimento da circunferência é 20 cm , logo o raio de sua base é $r_1 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$. Sendo assim, a área do círculo da base é

$$A_1 = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 = \frac{100}{\pi}$$

No sólido Tipo II, o comprimento da circunferência é 10 cm , logo o raio de sua base é $r_2 = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$. Sendo assim, a área do círculo da base é

$$A_2 = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 = \frac{25}{\pi}$$

Considere um sólido Tipo III com base congruente à do Tipo II, porém com mesma altura do sólido Tipo I. Sendo V_1 , V_2 e V_3 os volumes dos sólidos Tipo I, II e III, respectivamente, Pelo Princípio de Cavalieri

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{\frac{100}{\pi}}{\frac{25}{\pi}} = 4 \Rightarrow V_1 = 4 \cdot V_3.$$

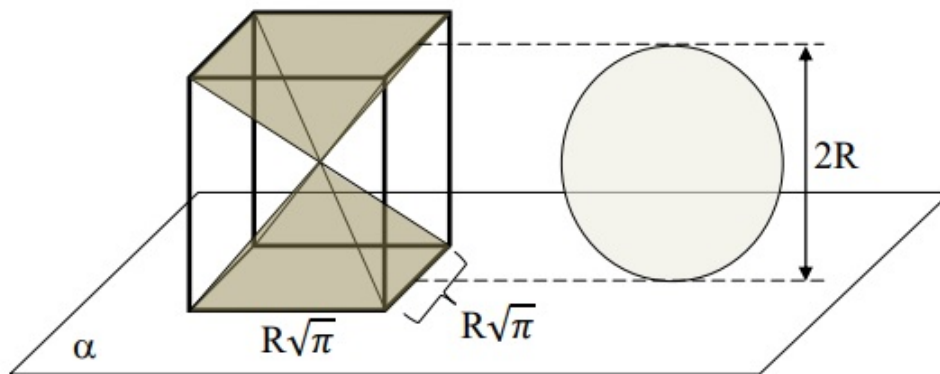
Por outro lado, $V_2 = 2 \cdot V_3$ logo

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Portanto, o volume do sólido Tipo I é o dobro do volume do sólido Tipo II e o mesmo ocorre com os custos para suas fabricações. Logo, a resposta correta é o item b).

Problema 3: (IMPA - Adaptada) Considere um bloco cuja base é um quadrado de aresta $R\sqrt{\pi}$, e cuja altura é $2R$. Nesse bloco estão destacadas duas pirâmides definidas por suas diagonais (figura abaixo). Considere, também, uma esfera de raio R e que o bloco e a esfera estão apoiados em um plano α .

Figura 4.59: Bloco e esfera

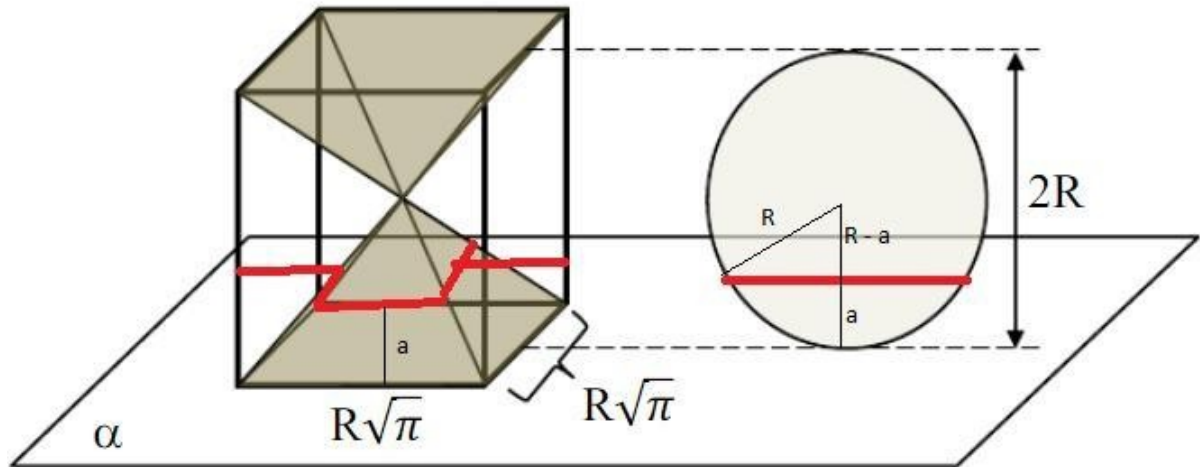


Fonte: IMPA.

Sendo S_1 o sólido formado pela parte do bloco que não é ocupada pelas pirâmides e S_2 a esfera, verifique que os volumes dos dois sólidos são iguais.

Solução: Para resolver este problema, aplicaremos o Princípio de Cavalieri, mostrando que qualquer plano paralelo ao α determina seções de áreas iguais nos dois sólidos.

Figura 4.60: Bloco e esfera - solução



Fonte: O próprio autor.

Um plano β secciona os sólidos em uma altura a de α , formando uma seção no sólido S_1 composta pelo quadrado congruente ao da base do bloco menos a base da pirâmide menor que se encontra acima do plano de corte. Pelo Teorema de Tales, o lado l da base da pirâmide acima do corte é proporcional ao lado da base da pirâmide original, logo

$$\frac{l}{R\sqrt{\pi}} = \frac{R-a}{R} \Rightarrow l = (R-a)\sqrt{\pi}.$$

A área A_1 da seção feita pelo plano β no sólido S_1 é

$$A_1 = \pi R^2 - \pi(R-a)^2.$$

A seção feita por β na esfera, é um círculo de raio r , onde

$$r^2 = R^2 - (R-a)^2.$$

Logo, a área A_2 do círculo é

$$A_2 = \pi r^2 = \pi R^2 - \pi(R-a)^2.$$

Temos que $A_1 = A_2$ independente da altura a e como a altura dos sólidos é a mesma, pelo Princípio de Cavalieri, $V(S_1) = V(S_2)$.

Poderíamos ter calculado diretamente o volume de ambos os sólidos, uma vez que já definimos as fórmulas de volume para esferas, blocos retangulares e pirâmides, mas optamos por esta construção para evidenciar o Princípio de Cavalieri como uma boa ferramenta para o cálculo de volumes.

Capítulo 5

Considerações Finais

A Matemática no Ensino Médio contribui para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos, aprimora habilidades como a “linguagem matemática”, seus símbolos, códigos, lógica e proporciona diferentes oportunidades de aplicação em situações cotidianas (BRASIL, 2018, p. 463). Sendo assim, neste nível escolar, os alunos são capazes de compreender alguns processos dedutivos, explorando um raciocínio mais profundo sobre conceitos matemáticos que até então desconheciam.

A grandeza volume, por exemplo, no Ensino Fundamental, era tratada como mera aplicação de fórmulas prontas cuja origem os alunos não compreendiam. No Ensino Médio, os alunos atingiram um nível de conhecimento matemático que os permite compreender e acompanhar o raciocínio dedutivo por trás das fórmulas e os professores podem aproveitar e estimular esse raciocínio a fim de aproximar a Matemática aos estudantes.

O objetivo desta dissertação foi oferecer aos docentes e discentes do Ensino Médio uma proposta teórica e ao mesmo tempo prática para que os alunos compreendam processos de deduções das fórmulas para cálculo de volumes dos sólidos comumente trabalhados nesta fase escolar e também de sólidos possivelmente desconhecidos por eles. Seguimos, para isso, as orientações da OCN que destaca o Princípio de Cavalieri como ponto de partida aos estudos de volumes com o objetivo de proporcionar uma melhor compreensão do significado das fórmulas (BRASIL, 2006, p. 76).

Para destacar a relevância do tema e a importância do Princípio de Cavalieri no estudo de volumes, buscou-se contextualizar historicamente a grandeza volume, destacando os estudos de Cavalieri como ponto forte para o desenvolvimento deste conceito e sua influência em estudos importantes da matemática como no Cálculo Integral.

A apresentação das grandezas *área* e *volume* foi conduzida por uma sequência didática, baseada nos estudos de Elon Lages Lima (2006), buscando um processo de dedução para fórmulas de cálculo destas grandezas. Adicionou-se a este processo o Princípio de Cavalieri que permitiu, de forma acessível aos estudantes, a construção de

fórmulas para diferentes figuras e sólidos.

Para proporcionar um estudo mais abrangente de geometria espacial, que não se restringisse exclusivamente ao estudo sobre volumes, definimos cada sólido trabalhado, apresentando seus elementos, suas nomenclaturas, classificações, casos particulares e, por fim, a dedução da fórmula para cálculo de seus volumes.

A fim de proporcionar aos estudantes um estudo que fosse além do que usualmente é realizado em sala de aula, expandimos o raciocínio dedutivo à sólidos diferentes dos trabalhados na escola como os elementos da esfera (calota esférica, segmento esférico), toro e interseção de dois cilindros.

Apresentamos também uma sequência de exercícios com aplicações das fórmulas de volume abordadas na dissertação e também com aplicações do Princípio de Cavalieri na resolução de problemas do ENEM e do IMPA.

Por fim, acreditamos que esta dissertação atingiu seu objetivo e conseguiu mostrar a relevância do Princípio de Cavalieri no estudo de volumes e também serve de estímulo para docentes e discentes do Ensino Médio avançarem nos estudos de Matemática, mostrando que pode ser interessante do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio, mas também prática quando permite solucionar problemas da vida.

Como proposta de continuidade deste trabalho sugerimos aliar as sequências dedutivas apresentadas à ferramentas tecnológicas como, por exemplo, o software *Geogebra*. Com esta ferramenta, é possível realizar a construção dos sólidos, explorar seus volumes e decompor os sólidos para facilitar a visualização de alguns processos realizados. O estudo se tornará mais rico e visual, envolvendo ainda mais os estudantes.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. 3. ed. Tradução de Elza F. Gomide. 496 p. São Paulo, SP: Blucher, 2010.
- [2] BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018
- [3] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Orientações curriculares para o ensino médio*. Brasília: Secretaria de Educação Básica-MEC, v. 2, p. 69 – 98, 2006.
- [4] BRASIL, Secretaria de Educação Básica. *Matemática não é problema*. Brasília: MEC, 2005.
- [5] BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática*. Brasília: SEF/MEC, 2000.
- [6] BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais + para o Ensino Médio: Matemática*. Brasília: SEF/MEC, 2002.
- [7] COSTA, Franklin Berg Almeida. *Geometria Espacial no Ensino Médio: um Questionamento Didático ao Princípio de Cavalieri*. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2017.
- [8] EVES, Howard. *Introdução da história da matemática*. 5a ed. Tradução de Hygino H. Domingues. 843p. Campinas: Unicamp, 2011.
- [9] DE GANDT, François. *e Metamorfose de uma Teoria Matemática: A Geometria dos Indivisíveis na Itália (Galileo, Cavalieri, Torricelli)*. Cadernos de História e Filosofia da Ciência, 1986.
- [10] IEZZI, Gelson. et al. *Matemática: ciência e aplicações – ensino médio*. v. 2, 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

- [11] KUROKAWA, Cecilia Yumi. *Áreas e volumes: de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o cálculo diferencial e integral*. 2015. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2015.
- [12] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [13] LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. *Grandezas e medidas*. In: CARVALHO, J. B. P. (Coord.) *Matemática Ensino Fundamental*. Coleção Explorando o Ensino. Brasília: Secretaria da Educação Básica-MEC, v. 17, p.167- 200, 2010.
- [14] LIMA, Wecley Fernandes. *O Princípio de Cavalieri como Método de Demonstração e Fundamentação para o Cálculo de Áreas e Volumes*. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.
- [15] LULA, Kariton Pereira. *Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas*. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.
- [16] MORAIS, Leonardo Bernardo de. *Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do ensino médio*. Recife, 2013. 132f. Dissertação (mestrado) -UFPE, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife, 2013.
- [17] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [18] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [19] O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF. Bonaventura Francesco Cavalieri. *Maths History*, 2014. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri/>. Acesso em: 25 set. 2020.
- [20] OLIVEIRA, Josemar Lopes de. *Uso do Princípio de Cavalieri no Cálculo de Áreas e de Volumes*. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016.
- [21] Paterlini, Roberto Ribeiro. *Os “Teoremas” de Cavalieri*. Rio de Janeiro, Revista do Professor de Matemática - volume 72 p. 43-47 SBM, 2010.
- [22] PINTO, Aníbal. *A teoria dos indivisíveis: uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri*. 2008. 103 f. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

- [23] PONTES, Nicomedes Albuquerque. *O Princípio de Cavalieri e suas Aplicações para o Cálculo de Volumes*. 2014. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.
- [24] THOMAZ, T.C. *Não gostar de Matemática: que fenômeno é este?* Cadernos de Educação/UFPel, Pelotas, n. 12, 1999.