

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Michael França Gusson

**COSMOLOGIA QUÂNTICA COM VÁCUO DINÂMICO EM UM
CENÁRIO DE COMPRIMENTO MÍNIMO**

VITÓRIA
2021

M. F. GUSSON

**COSMOLOGIA QUÂNTICA COM VÁCUO DINÂMICO EM UM
CENÁRIO DE COMPRIMENTO MÍNIMO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física, na área de concentração de Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira

Vitória
2021

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

G982c Gusson, Michael França, 1992-
Cosmologia quântica com vácuo dinâmico em um cenário de comprimento mínimo / Michael França Gusson. - 2021.
78 f. : il.

Orientador: José Alexandre Nogueira.
Coorientador: Raphael Góes Furtado.
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cosmologia quântica. 2. Gravitação quântica. 3. Vácuo dinâmico. 4. Comprimento mínimo. I. Nogueira, José Alexandre. II. Furtado, Raphael Góes. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

“Cosmologia Quântica com Vácuo Dinâmico em um Cenário de Comprimento Mínimo”

Michael França Gusson

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por webconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Nivaldo Agostinho Lemos
(UFF)

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
(Orientador - PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Bernardo Brunoro Dilem
(IFES - Alegre)

Prof. Dr. Raphael Góes Furtado
(Coorientador – UFES/ São Mateus)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Flavio Gimenes Alvarenga
(DFIS/UFES)

Vitória-ES, 16 de março de 2021.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
HERMANO ENDLICH SCHNEIDER VELTEN - SIAPE 99992628
Assessoria de Gestão - AG/CCE
Em 09/07/2021 às 17:33

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/225465?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JOSE ALEXANDRE NOGUEIRA - SIAPE 1172964
Departamento de Física - DF/CCE
Em 14/07/2021 às 14:08

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/228101?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JULIO CESAR FABRIS - SIAPE 297051
Departamento de Física - DF/CCE
Em 14/07/2021 às 14:37

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/228135?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
FLAVIO GIMENES ALVARENGA - SIAPE 8298256
Departamento de Física - DF/CCE
Em 21/07/2021 às 16:14

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/233265?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
RAPHAEL GOES FURTADO - SIAPE 3313863
Departamento de Ciências Naturais - DCN/CEUNES
Em 22/07/2021 às 15:42

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/234213?tipoArquivo=O>

A minha mãe.

Agradecimentos

O autor agradece:

- A toda a minha família e em especial a minha mãe, Elizabeti Zoppi França, por mesmo em meio a todas as dificuldades que passamos nunca deixou de me incentivar a prosseguir nos estudos, sempre acreditando em meu potencial e na minha capacidade.
- A todos os professores que tive ao longo da minha vida acadêmica, pela formação e instrução que me forneceram. Aos membros da banca examinadora pelo tempo e o compromisso dedicados a este trabalho. Agradeço, em especial, ao prof. Dr. José Alexandre Nogueira e ao prof. Dr. Raphael Góes Furtado, pela dedicação e orientação, por terem fornecido todas as condições necessárias para a concretização deste trabalho e do importante passo que ele representa na minha vida acadêmica.
- A todos os meus amigos do PPGFIs, por dividirem comigo as euforias e as aflições que a Física me proporciona.
- Ao fomento fornecido pela CAPES.

“Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante.”
(Antoine de Saint-Exupéry)

Resumo

Teorias que propõem a unificação da Relatividade Geral e da Mecânica Quântica, por exemplo a Teoria de Cordas, apontam para a existência de um valor mínimo de comprimento observável. A existência desse implica em uma generalização do Princípio da Incerteza de Heisenberg, de modo a não admitir mais uma incerteza nula na posição, modificando assim a álgebra da Mecânica Quântica. De acordo com o modelo cosmológico do Big Bang, o Universo está em expansão, o que significa que ele foi muito pequeno no passado, de forma que sua natureza era fundamentalmente quântica. Sendo assim, se faz necessário a construção de uma descrição quântica da evolução do Universo, sob o contexto da álgebra modificada devido à suposta existência de um comprimento mínimo.

Neste trabalho foram considerados os efeitos em um modelo cosmológico de vácuo dinâmico devido à presença de um comprimento mínimo, introduzido por um GUP (princípio de incerteza generalizado) correspondente à relação de comutação $[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i\hbar}{1-\beta\hat{p}^2}$ e obteve-se a função de onda do Universo, que é a solução da equação de Wheeler-DeWitt na representação do espaço de quaseposição, no limite para pequenos valores do fator de escala.

Palavras-chave: Cosmologia Quântica, Gravitação Quântica, Vácuo Dinâmico, Comprimento Mínimo, Princípio da Incerteza Generalizado (GUP).

Abstract

Theories that propose the unification of general relativity and quantum mechanics, for example the String Theory, point to the existence of a minimum value of observable length. The existence of this implies a generalization of the Heisenberg's uncertainty principle, so as to no more admit a null uncertainty in position, thus modifying the algebra of quantum mechanics. According to the cosmological model of the Big Bang, the Universe is expanding, which it means that it was very small in the past, so its nature was fundamentally quantum. Thus, it is necessary to build a quantum description of the evolution of the Universe, under the context of modified algebra due to the existence of a minimum length.

In this work, was considered the effects in a dynamic vacuum cosmological model, due to the presence of a minimum length introduced by a GUP (generalized uncertainty principle) related to the modified commutation relation $[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i\hbar}{1-\beta\hat{p}^2}$. The wave function of the Universe, which is the solution of the Wheeler-DeWitti equation in the representation of the quasiposition space, was found at the limit for small values of the scale factor.

Keywords: Quantum Cosmology, Quantum Gravity, Dynamic Vacuum, Minimal Length, Generalized Uncertainty Principle (GUP).

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo	5
2.1 Introdução à Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo . . .	5
2.2 Princípio da Incerteza Generalizado	7
2.3 Relação de Comutação Generalizada	10
2.4 Espaço de Hilbert	11
2.4.1 Espaço de Hilbert na MQO	11
2.4.2 Espaço de Hilbert em um cenário de comprimento mínimo	14
2.5 Álgebra Modificada	15
2.5.1 Propostav de Kempf, Mangano e Mann (KMM)	15
2.5.2 Proposta do Nouicer	17
2.5.3 Proposta do Vagenas	18
2.5.4 Proposta de Pedram	19
2.6 Comprimento Mínimo: Considerações Finais	27
3 Cosmologia Quântica	28
3.1 Introdução à Cosmologia Quântica	28
3.2 Relatividade Geral	29
3.3 Universo de FRW	30
3.4 Equação de Wheeler-DeWitt	34
3.4.1 Condições de Contorno	36
3.4.2 Cosmogênese Quântica	39
3.5 Formalismo de Schutz	39
3.5.1 Ação Gravitacional	40
3.5.2 Ação de um Fluido	41

3.5.3	Ação Total	43
3.6	Cosmologia Quântica: Considerações Finais	44
4	O Modelo Cosmológico Quântico em um Cenário de Comprimento Mínimo	45
4.1	Considerações Iniciais	45
4.2	A Equação de WDW Modificada	46
4.3	Solução da Equação de WDW Modificada	48
4.3.1	1º Método de Solução	50
4.3.2	2º Método de Solução	51
4.3.3	Regime de Validade	51
4.4	Soluções Fisicamente Aceitáveis	53
5	Conclusão	55
	Referências Bibliográficas	58

Capítulo 1

Introdução

Na primeira metade do século XX a Física foi marcada por duas grandes revoluções que romperam com os pressupostos até então inquestionáveis da mecânica clássica, a qual descrevia satisfatoriamente a maioria das situações físicas consideradas até aquele momento. A aplicação do eletromagnetismo de Maxwell para explicar a radiação de corpo negro levou à catástrofe do ultravioleta, resultado considerado absurdo, induzindo uma reinterpretação das propriedades da matéria e das ondas eletromagnéticas e da forma como elas interagem. Nesta reinterpretação foi reformulado o conceito de medida o que viria a originar a mecânica quântica¹. Com a comprovação empírica da finitude e invariância da velocidade da luz em referenciais inerciais houve um quebra de paradigma com as noções de espaço e tempo absoluto, unificando-os em uma única entidade, o espaço-tempo [1]. Posteriormente, com o advento da teoria da relatividade geral, o espaço-tempo veio a ser interpretado como o campo gravitacional que interage com a matéria nele contido, contrariando a ideia clássica de que o espaço e o tempo eram apenas um pano de fundo para os fenômenos físicos que ali ocorriam [2–5]. Isso tornou a mecânica clássica obsoleta no seu conceito de tempo e de espaço assim como no papel desempenhado pela matéria nele contido.

Ambas as teorias, a relatividade geral e a mecânica quântica, foram estudadas e desenvolvidas independentemente. Na década de 1920. surgiu a teoria quântica de campos, sendo considerada uma unificação da mecânica quântica e da relatividade restrita, esta teoria descreve o comportamento quântico da matéria tendo em vista a invariância da velocidade da luz. Portanto, até o momento a compreensão humana quanto às interações que ocorrem no Universo está ramificada em duas áreas, a princípio incompatíveis, uma que unifica as forças eletrofraca e forte e uma que explica a interação gravitacional. Essa incompatibilidade é evidenciada analisando-se as diferenças entre a relatividade geral e a mecânica quântica, ambas são teorias testadas experimentalmente, porém em escalas diferentes, a atuação da primeira é o Universo macroscópico enquanto a segunda atua em sistemas microscópicos. Essa dicotomia fez com que ambas se tornassem teorias muito bem consagradas em seus respectivos domínios de atuação. Porém, a abstração que surge nos estudos teóricos sugere

¹A teoria quântica que surgiu na primeira metade do século XX será referida neste texto como mecânica quântica ordinária.

a existência de fenômenos em que se deve considerar uma descrição quântica das interações gravitacionais envolvidas, por exemplo, buracos negros [6, 7] e o próprio Universo primordial [8–13].

Nesse contexto, surge o desafio de conciliar os princípios da mecânica quântica com a natureza geométrica da relatividade geral, elaborando uma teoria que descreva o espaço-tempo, e conseqüentemente o campo gravitacional, de forma quântica. Há várias propostas a fornecerem essa tão desejada unificação, como a Teoria de Cordas e a Gravitação Quântica de Laços.

Uma das propostas mais promissora nesse sentido é a Cosmologia Quântica, o seu pressuposto é que o Universo deve ser estudado de acordo com as leis da Mecânica Quântica, principalmente em sua fase primordial, onde os efeitos quânticos são mais expressivos, nesse estudo é possível obter informações importantes sobre a origem do Universo, ou seja, fazer previsões sobre a singularidade inicial, a evolução pós singularidade e a fase inflacionária. Além disso, outros problemas em Cosmologia continuam em aberto. Por exemplo, o problema do Horizonte: fato de haver uma homogeneidade na medição da radiação cósmica de fundo que o modelo padrão não consegue explicar ou o problema da planezia: fato do Universo observado atualmente ser plano, com a densidade crítica próxima da unidade, esses são problemas devido às condições iniciais. A fase inflacionária foi sugerida para explicar essas observações, mas ainda sem fornecer uma justificativa plausível sobre o porquê de ela própria ocorrer.

Um fato interessante a respeito das teorias que se propõem a quantizar a gravidade é que algumas delas apontam para a existência de um *comprimento mínimo*, isto é, uma escala mínima de comprimento possível de se observar e conseqüentemente uma máxima resolução possível das medidas espaciais. O argumento das teorias de quantização da gravitação em favor da existência de um comprimento mínimo é de que as altas energias utilizadas na tentativa de se sondar as pequenas distâncias da escala de Planck, $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$, perturbam significativamente a estrutura do espaço-tempo através de efeitos gravitacionais, sendo assim, existiria um limite máximo de localizabilidade possível de ser observada.

Este comprimento mínimo, que surge em algumas teorias de quantização da gravidade, tem como conseqüência uma modificação da álgebra da Mecânica Quântica. Essa modificação é feita associando-se ao comprimento mínimo uma incerteza mínima não nula Δx_0 , nas medidas de posição, de forma que agora não é mais possível ter nenhuma partícula pontualmente localizada. A existência da incerteza não nula, associada ao comprimento mínimo, por sua vez, exige uma modificação na relação de incerteza de Heisenberg.

Algumas conseqüências surgem ao se modificar a relação de incerteza, uma delas é que apesar de os autoestados do operador posição poderem ser representados matematicamente, eles não fornecem mais informação física, uma vez que estes forneceriam uma incerteza nula na posição, outra é a modificação da relação de comutação entre os operadores posição \hat{x} e momento \hat{p} . É importante notar que na álgebra modificada sempre que o parâmetro do comprimento mínimo tender a zero, ou seja, desprezar-se os efeitos de uma incerteza mínima não nula, os resultados ordinários são reobtidos, o que era de se esperar, visto que a

MQO é uma teoria já consagrada. Sendo assim, pode-se comparar os resultados desta nova formulação com os da mecânica quântica ordinária, basta considerar tal parâmetro nulo, o que corresponde a supor a existência de um comprimento mínimo igual a zero $\Delta x_0 = 0$. Esta ideia seria análogo ao que ocorre na MQO ao se considerar o limite clássico, ou seja, os resultados da mecânica clássica são reobtidos.

A natureza desse comprimento não nulo se manifestaria justamente em eventos de interação gravitacional no nível quântico, sendo assim, é necessário que tais fenômenos sejam reavaliados sob um formalismo da mecânica quântica generalizada, considerando a existência do comprimento mínimo, e sejam verificadas as implicações e consequências dessa generalização sob a teoria. O objetivo principal deste trabalho é determinar as correções à função de onda do Universo devidas ao uso de um GUP (princípio de incerteza generalizado) específico na cosmologia quântica. Desta forma, primeiramente, deve-se determinar a equação de Wheeler-DeWitt modificada. Será considerada uma correção até segunda ordem no parâmetro do comprimento mínimo β e então analisado um modelo cosmológico quântico de vácuo dinâmico em um cenário de comprimento mínimo introduzido pela relação de comutação proposta por P. Pedram [14, 15]

$$[\hat{X}, \hat{P}] := \frac{i\hbar}{1 - \beta \hat{P}^2}. \quad (1.1)$$

Para isso, este trabalho foi organizado da seguinte forma:

- No capítulo 2, o comprimento mínimo é inserido na teoria quântica. Isto é feito através de uma breve motivação qualitativa para a existência do comprimento mínimo, em seguida é abordado como que ele modifica a relação de incerteza e de comutação da mecânica quântica ordinária. São apresentados algumas propostas de GUP's, respectivamente, as defendidas por Kempf [16], Nouicer [17], Vagenas [18] e Pedram [14]. Discute-se também a modificação da álgebra de Heisenberg e a construção do espaço de quaseposição, para se resgatar informações da posição, diante da impossibilidade de se obter informações físicas na representação da posição.
- No capítulo 3, são apresentadas as ideias principais da cosmologia quântica. Em um primeiro momento, discute-se a equação de Einstein, a qual fornece o comportamento do espaço-tempo em função da distribuição da matéria-energia. Depois, chega-se às equações de Friedmann, as quais descrevem a evolução de um Universo homogêneo e isotrópico. Através de um processo de quantização canônica ordinário, obtém-se a equação de Wheeler-DeWitt, que tem como solução a função de onda do Universo. Por último, a dependência temporal é introduzida através do formalismo de Schutz.
- No capítulo 4 é que de fato se concretiza o objetivo deste trabalho: determinar as correções na função de onda do Universo devido ao uso do GUP. Neste capítulo, são utilizados os resultados obtidos com a inserção do comprimento mínimo na álgebra

da mecânica quântica ordinária, a super-hamiltoniana, advinda do método de Schutz, é quantizada, obtendo-se assim a função de onda do Universo em um cenário de comprimento mínimo.

- No capítulo 5, são feitos comentários e apresentada a conclusão. Além disso, é proposto um trabalho futuro em que a discretização seria uma propriedade não só do espaço mas também do tempo.

Capítulo 2

Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo

2.1 Introdução à Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo

A ideia de que uma incerteza mínima na posição seria um fenômeno intrínseco da interação gravitacional foi proposto inicialmente por Mead [8]. Desde então, houvera outras propostas de teorias de natureza gravitacional que levassem à existência de um comprimento mínimo observável, tais como, teoria de cordas [9–12], gravitação quântica de laços [13], espaço tempo não comutativo [19,20] e buracos negros [6,7].

Tais teorias indicam que o princípio de incerteza de Heisenberg deve ser generalizado para incorporar as condições impostas pelo campo gravitacional. Esta generalização é feita modificando-se as relações de comutação entre os operadores momento e posição [16], chegando-se assim a um princípio de incerteza generalizado GUP (generalized uncertainty principle).

A mecânica quântica tem seu formalismo construído com base na álgebra de Heisenberg, ou seja, na não comutatividade dos operadores posição \hat{x} e momento \hat{p} , $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$. Consequentemente, esta não comutatividade impossibilita a determinação simultânea dos valores associados a esses operadores, o que é traduzido na relação de incerteza de Heisenberg. Apesar dessa relação limitar a precisão da medida simultânea da posição e do momento, ela não limita o quão precisa pode ser a medida de um destes dois, desde que para isso, se perca completamente a informação a respeito do outro.

Embora não trivial, associa-se que um comprimento mínimo deve estar relacionado, do ponto de vista quântico, a uma incerteza mínima não nula na posição $\Delta x_0 \neq 0$. Desta forma, um comprimento mínimo, motivado por teorias de quantização da gravidade, deve alterar a relação de incerteza de Heisenberg de modo a não permitir mais uma incerteza na posição arbitrariamente pequena. A generalização do princípio de incerteza de Heisenberg tem como consequência a modificação da relação de comutação, o qual fundamenta o formalismo

teórico da Mecânica Quântica.

A proposta de GUP mais difundida na literatura foi feita por Kempf, Mangano e Mann [21], onde a ideia do comprimento mínimo é introduzida através de uma modificação na relação de incerteza, os autores acrescentaram dois termos na inequação, de forma que não é mais possível ter valores arbitrariamente pequenos de Δx

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta(\Delta p)^2 + \zeta). \quad (2.1)$$

Há outras propostas de generalização do princípio de incerteza, como a feita por Dorsch [22] e por Nouicer [17], em que se corrige a relação de incerteza com um fator exponencial, sendo (2.1) um caso de primeira ordem em relação a esta proposta,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \langle e^{\beta \hat{p}^2} \rangle, \quad (2.2)$$

e também a feita por Vagenas [18],

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} + 4\alpha^2 \right) \Delta p^2 + 4\alpha^2 \langle p \rangle^2 - 2\alpha \sqrt{\langle p^2 \rangle} \right], \quad (2.3)$$

ou a sugerida por Pedram [14], em que a limitação no valor da incerteza do comprimento é proposta na forma de uma razão,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{(1 - \beta P^2)}, \quad (2.4)$$

sendo que há correções de todas as ordens, assim como (2.2), além de limitar o momento a um valor máximo.

Neste capítulo são apresentadas as principais modificações que ocorrem na estrutura da mecânica quântica ordinária quando se admite a hipótese da existência do comprimento mínimo. O ponto de partida, como discutido acima, é uma relação de incerteza generalizada, a qual impossibilita a tomada da incerteza da posição arbitrariamente pequena, por consequência a modificação da relação de comutação.

2.2 Princípio da Incerteza Generalizado

A argumentação em favor do comprimento mínimo, e em consequência da generalização do princípio da incerteza, pode ser pensado da seguinte forma: o princípio da incerteza diz que para se medir a incerteza associada ao operador posição com precisão cada vez menor deve-se ter uma incerteza associada ao operador momento, cada vez maior. Para se sondar pequenas regiões de escala de comprimento são necessárias altas energias, levando em consideração os efeitos relativísticos desses níveis de energia, como deve ser uma teoria que forneça uma descrição quântica de gravitação, estas irão curvar o próprio espaço tempo significativamente. Portanto, incertezas associadas ao momento linear da partícula produzem flutuações quânticas da geometria espaço-temporal, conseqüentemente no campo gravitacional, o que implica uma imprecisão na posição da partícula. Em síntese, ao se tentar determinar a posição de uma partícula com precisão cada vez maior é produzida uma perturbação no campo gravitacional gerando um desconhecimento também cada vez maior sobre a posição desta partícula, causando um efeito contrário ao desejado.

Sendo assim, a relação de incerteza de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.5)$$

deve ser modificada de forma a não permitir mais uma incerteza de Δx arbitrariamente pequena em detrimento da incerteza de Δp .

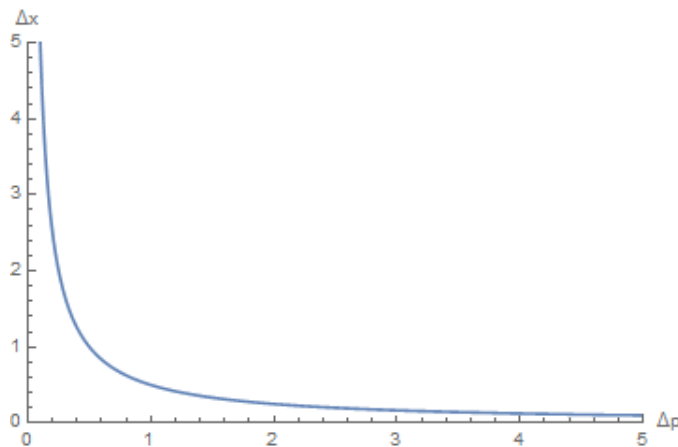


Figura 2.1. Esboço gráfico da relação de incerteza Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ em unidades de \hbar .

É possível observar no gráfico acima o comportamento assintótico, tanto da incerteza associada ao operador posição \hat{x} quanto a incerteza associada ao operador momento \hat{p} . O princípio da incerteza ordinário não limita a posição exata da partícula e nem o seu momento, ou seja, é possível se ter uma incerteza arbitrariamente próxima de zero na posição, ($\Delta x \rightarrow 0$) desde que para isso, a informação a respeito do momento seja perdida ($\Delta p \rightarrow \infty$). Assim como ter uma incerteza arbitrariamente próxima de zero no momento, perdendo toda a

informação a respeito da posição. Portanto, o conhecimento de uma dessas duas grandezas pode ser tão preciso quanto se queira, desde que se abduque de conhecer completamente a outra.

Esse comportamento não é condizente com a hipótese da existência de um comprimento mínimo pois, como dito anteriormente, associa-se a este uma incerteza mínima na posição, não sendo mais possível se ter um Δx arbitrariamente próximo de zero. Uma solução deste problema foi proposto por Kempf, Mangano e Mann (KMM) [21], onde se reformulou a relação de incerteza, em uma única dimensão, da seguinte forma

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta(\Delta p)^2 + \zeta). \quad (2.6)$$

Os parâmetros β e ζ são positivos e independentes de Δp mas ζ depende do valor médio de \hat{p} , i.e., $\zeta = \beta \langle \hat{p} \rangle^2$. Nota-se que o primeiro termo do segundo membro corresponde ao princípio da incerteza ordinário, válido em escalas de energias baixas o suficientes para se desprezar a curvatura do espaço-tempo. Os termos restantes estão associados aos efeitos das distorções do campo gravitacional que surgem ao se tentar medir de forma cada vez mais precisa a posição da partícula, ou seja, quando se tem elevados níveis de energia.

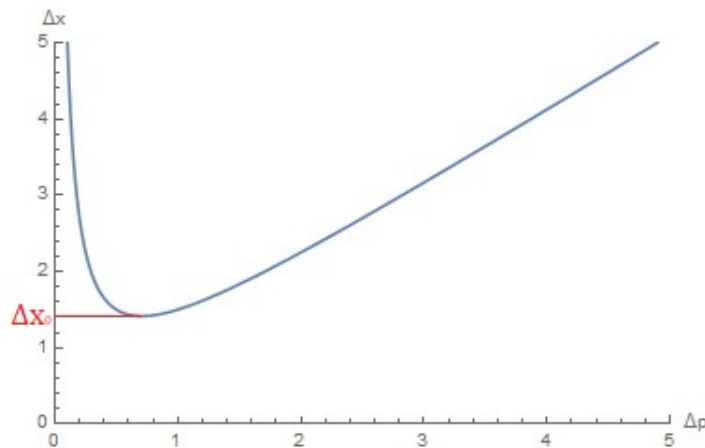


Figura 2.2. Esboço do gráfico da relação de incerteza generalizado $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \zeta]$ em unidades de \hbar .

No gráfico acima, da relação (2.6), é possível observar o limite inferior para o valor de Δx_0 que surge ao se tentar obter uma precisão cada vez maior na posição da partícula.

Comparando a figura 2.1 com a figura 2.2 observa-se que não há mais o comportamento assintótico, $\Delta x \rightarrow 0$, da relação $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ da mecânica quântica ordinária. O termo $\beta(\Delta p)^2$ da relação (2.6) é o responsável pela vértice que se observa na figura 2.2. Diferente do caso ordinário, em que se podia ter a incerteza Δx tendendo a zero com a incerteza em Δp divergindo ($\Delta p \rightarrow \infty$), neste caso, o membro direito da desigualdade depende quadraticamente de Δp , sendo que ao se ter uma incerteza em x diminuindo e a incerteza em p crescendo quadraticamente em certo momento o membro direito da equação (2.6) se torna

maior do que o esquerdo, neste momento as incertezas do momento e da posição deixam de satisfazerem esta inequação. A relação de incerteza proposta restringe os valores de Δx e Δp às regiões acima da curva do gráfico, promovendo um limite inferior na incerteza associada ao operador \hat{x} . Portanto, a generalização impõe um valor mínimo possível para a incerteza Δx do operador posição. Associa-se a este valor mínimo da incerteza um comprimento Δx_0 , não sendo possível medir nada menor do que ele. Este valor de Δx_0 é o *comprimento mínimo*.

A relação (2.5) possui uma simetria quanto às incertezas Δx e Δp . Desta forma, a incerteza de um desses operadores pode ser arbitrariamente pequena desde de que a incerteza no outro seja indefinidamente grande, isto é válido para ambos os operadores. Sendo assim, seria plausível supor que, assim como no caso ordinário, o GUP deveria apresentar uma simetria entre os operadores posição e momento, ou seja, da mesma forma que há uma limitação no valor mínimo possível da incerteza do operador posição, deveria haver um valor mínimo associado ao operador momento. A forma completa da relação de incerteza generalizada teria a seguinte forma

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \alpha(\Delta x)^2 + \beta(\Delta p)^2 \right]. \quad (2.7)$$

O parâmetro α , assim como β , é positivo e independe de Δx e Δp . A relação acima conduz tanto a uma incerteza mínima na posição Δx_0 quanto a uma incerteza mínima no momento Δp_0 .

A incerteza mínima no momento impossibilitaria a construção de uma representação física formada pelos autoestados do operador \hat{p} , assim como Δx_0 impossibilita uma representação da posição. Além disso, não há teorias que indiquem a hipótese um momento mínimo como há para a hipótese da existência de um comprimento mínimo, e nem tão pouco, ele surgiu em teorias de quantização da gravidade, como é o caso para o comprimento mínimo. Desta forma, a modificação da álgebra de Heisenberg que será abordada leva em consideração a existência de um comprimento mínimo, ou seja, será utilizado o GUP da equação (2.6), além das propostas defendidas por outros autores.

É um fato da mecânica quântica que a não comutatividade dos operadores posição \hat{x} e momento \hat{p} implica a impossibilidade de se medir, de formar arbitrariamente precisa e simultaneamente, ambos os operadores, pois ao se medir um desses observáveis a função de onda colapsa em um dos autoestados associado ao operador que se mediu, perdendo automaticamente a informação a respeito do outro. Esta impossibilidade é traduzida na relação de incerteza $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Portanto, ao se modificar a relação de incerteza para que esta seja consistente com a existência do comprimento mínimo, deve-se modificar também a relação de comutação para que ela forneça esta nova relação de incerteza generalizada.

2.3 Relação de Comutação Generalizada

Na Mecânica Quântica Ordinária a relação entre o princípio de incerteza e o comutador dos operadores \hat{x} e \hat{p} é expresso matematicamente por

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|}{2}. \quad (2.8)$$

Com base na desigualdade acima é possível verificar que para que se tenha a relação de incerteza generalizada expressa na equação (2.6), a relação de comutação deve ser da forma [21]

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + \beta \hat{p}^2). \quad (2.9)$$

Fazendo o comutador agir em estados de uma base comum a dois observáveis, \hat{A} e \hat{B} por exemplo, eles fornecerão autovalores, pois a base é representada por autovetores simultâneos, os autovalores são associativos e a diferença deles será nula. A mesma análise não é válida para dois observáveis incompatíveis, pois se a base é exclusiva de um operador a atuação do outro sobre os autoestados do primeiro não fornecerá um autovalor. Sendo assim, dois observáveis que comutam ou são compatíveis, fornecem

$$\langle a, b | [\hat{A}, \hat{B}] | a, b \rangle = (ab - ba) \langle a, b | a, b \rangle = 0, \quad (2.10)$$

portanto eles possuem autovetores em comum, ou seja,

$$\hat{A}|a, b\rangle = a|a, b\rangle \text{ e } \hat{B}|a, b\rangle = b|a, b\rangle. \quad (2.11)$$

Isto é, $|a, b\rangle$ é autovetor simultâneo do observável \hat{A} e do observável \hat{B} . Se dois observáveis possuem autovetores em comum e esses autovetores formam uma base, logo, essa base é uma base comum aos dois observáveis.

Em termos conceituais, a incompatibilidade dos operadores \hat{x} e \hat{p} pode ser visto da seguinte forma. Considere o operador posição \hat{x} e o operador momento \hat{p} atuando em um estado. Como tais operadores não comutam, eles não possuem autoestados simultâneos. Suponha que seja medido o valor do operador \hat{x} , o valor obtido será um dos autovalores de \hat{x} , tal que se saberá com absoluta certeza o valor x da medida, o processo de medida faz com que a função de onda colapse em um dos autoestados associados a \hat{x} . E se simultaneamente tentar-se medir o valor do operador \hat{p} ? Como ao medir x a função de onda colapsou em um dos autoestados associado a \hat{x} , e esse autoestado não é um autoestado simultâneo a \hat{p} , isso implica que \hat{p} deixou de ter seu valor bem definido. Porém, se logo após a medida de \hat{x} medir-se \hat{p} , essa nova medida fará com que a função de onda colapse novamente, só que

desta vez em um dos autoestados associados a \hat{p} , tendo um valor bem definido para \hat{p} e toda a informação a respeito de \hat{x} sendo perdida no exato momento da medida, como anteriormente para \hat{p} . Conclui-se portanto que é impossível saber simultaneamente os valores das medidas associadas aos operadores \hat{x} e \hat{p} . A perda da informação da medida de um operador em detrimento do outro só ocorre devido à não comutatividade de \hat{x} e \hat{p} , pois como discutido acima, dois operadores não compatíveis não possuem uma base comum de autovetores, ou seja, a função de onda não pode fornecer informação simultaneamente sobre os dois operadores.

Essa discussão conceitual é válida tanto para o caso ordinário quanto para o caso com comprimento mínimo. A diferença é que para o caso com comprimento mínimo a relação de comutação modificada apresenta o termo $\beta\hat{p}^2$, que não está presente para o caso ordinário. Sendo assim, as representações dos operadores \hat{x} e \hat{p} também devem ser modificadas de forma a serem condizentes com (2.9). Na próxima seção, será discutido como a inserção do comprimento mínimo modificada a Álgebra de Heisenberg e também como se dá a representação dos operadores \hat{x} e \hat{p} . Antes disso deve ficar claro que se busca vetores de estado que representem estados físicos, ou seja, que sejam normalizáveis e tenham valores médios bem definidos da posição e do momento, assim como as incertezas associadas a essas grandezas estejam bem definidas.

2.4 Espaço de Hilbert

2.4.1 Espaço de Hilbert na MQO

Na mecânica quântica ordinária, as grandezas físicas são descritas por operadores atuando em um espaço vetorial complexo, o espaço de Hilbert [23–25]. O espaço de Hilbert é um espaço munido de um produto interno tal que, a norma dos vetores pertencentes a esse espaço é finita. Sendo assim, este espaço é composto por funções de quadrado integrável:

$$\langle f|f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)f(x)dx < \infty. \quad (2.12)$$

As funções que compõem o espaço de Hilbert se comportam como vetores (na verdade são ditos vetores de estado) pois, são fechados em relação a soma e em relação a multiplicação por um escalar, sendo tais operações associativas e comutativas, havendo uma equivalência entre o vetor nulo $|0\rangle$ e a função nula $f(x) \equiv 0$ [26]. Os vetores que formam a base desse espaço são ortogonais, $\langle f_m|f_n\rangle = \delta_{mn}$, e formam um conjunto completo. Isso significa que qualquer vetor de estado pode ser escrito como uma combinação linear dos demais autovetores,

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|f_n\rangle. \quad (2.13)$$

Os operadores atuam nos vetores pertencentes ao espaço de Hilbert \mathcal{H} , transformando-os em outras funções de onda, também pertencente ao espaço de Hilbert. Quanticamente, esses operadores são restritos à classe dos observáveis, que são auto-adjuntos. Os operadores auto-adjuntos são operadores tais que o seu adjunto resulta nele mesmo, $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$. Os autovalores de um operador hermitiano são números reais, como seria de se esperar, pois como representam observáveis devem fornecer resultados físicos.

No contexto da mecânica quântica ordinária, as grandezas x e p são representadas por operadores atuando em funções de onda de quadrado integrável da posição $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ ou do momento $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$ onde $|\langle x|\psi\rangle|^2 dx$ e $|\langle p|\psi\rangle|^2 dp$ representam a probabilidade de se encontrar uma partícula no estado $|\psi\rangle$ entre x e $x + dx$ ou entre p e $p + dp$, respectivamente. Os kets $|x\rangle$ e $|p\rangle$ representam autoestados dos operadores posição e momento, tais que

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad (2.14)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (2.15)$$

Ao fazer o operador posição \hat{x} agir no seu autoestado $|x\rangle$ ele fornece a exata posição x da partícula de forma que sua incerteza seja nula ($\Delta x = 0$), analogamente para o operador \hat{p} .

No entanto, ocorre que $|x\rangle$ não pertence ao espaço de hilbert, pois não é normalizável. Pois, por um lado, $\langle x|x'\rangle = 0$ se $x \neq x'$, já que $\langle x|x'\rangle$ é a amplitude de probabilidade de uma partícula localizada exatamente em x ser encontrada em $x \neq x'$, enquanto por outro lado, devido à essa mesma interpretação, tem-se $\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle x|x'\rangle|^2 dx = 1$. Logo, $\langle x|x\rangle \notin \mathbb{R}$, ou seja, a norma de $|x\rangle$ não está bem definida.¹

Para solucionar esse problema, observa-se que os autovetores dos operadores \hat{x} e \hat{p} podem ser aproximados por sequências de estados físicos com incertezas da posição e do momento extremamente próximas de zero (isto só pode ser feito no contexto ordinário pois pode-se tomar Δx arbitrariamente pequeno, diferente do contexto com comprimento mínimo). Para o operador \hat{x} os autovetores $|x\rangle$ podem ser considerados uma sequência de estados $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$ para os quais o valor esperado do operador \hat{x} é x de forma que sua incerteza $\Delta x \rightarrow 0$. Portanto, pode-se definir a função de onda no espaço da posição de uma partícula como

$$\psi(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle, \quad (2.16)$$

sendo que, primeiro se projeta a função de onda $|\psi\rangle$ sobre os autoestados, e depois toma-se o limite. Dessa forma, o problema é contornado definindo-se uma sequência de estados aproximadamente localizados em x e fazendo o limite em que essa aproximação é cada vez mais precisa. Como $\langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle$ representa a amplitude de probabilidade do sistema descrito

¹ Sendo \mathcal{H} um espaço de Hilbert, o produto interno entre os seus vetores deve estar bem definido, o que não é o caso pois, $|\langle x|x'\rangle|^2 = \delta(x - x')$ para que o integrando seja normalizável.

pela função de onda $|\psi\rangle$ estar localizado em torno do ponto x , com uma incerteza Δx , ao se tomar o valor de $\Delta x \rightarrow 0$, $|\langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle|^2$ passa então a representar a probabilidade de se achar a partícula em um intervalo dx . Portanto, $\langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle$ é equivalente a função de onda que descreve o comportamento da partícula.

Para $\Delta x \rightarrow 0$ tem-se $\langle \xi_x^{\Delta x} | \xi_{x'}^{\Delta x} \rangle \approx 0$, com $x \neq x'$, o que implica que eles são ortogonais e

$$\int dx |\xi_x^{\Delta x} \rangle \langle \xi_x^{\Delta x}| \approx 1, \quad (2.17)$$

que os tornam normalizáveis. Sendo assim, os autoestados $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$ são ortonormais e consequentemente formam uma base. A relação de completeza acima, para os estados aproximados, pode ser usada para definir o produto interno de funções no espaço de Hilbert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int \langle \phi | \xi_x^{\Delta x} \rangle \langle \xi_x^{\Delta x} | \phi \rangle dx = \int \phi^*(x) \psi(x) dx = \langle \phi | \psi \rangle, \quad (2.18)$$

que é o mesmo resultado que seria obtido se não houvesse o problema da não normalização dos estados $|x\rangle$. Portanto, para fins de simplicidade será adotada a seguinte notação

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle = \langle x | \psi \rangle, \quad (2.19)$$

ou seja, embora saiba-se que os estados $|x\rangle$ não são normalizáveis, toma-se a aproximação discutida acima, de forma que as propriedades que os estados aproximados $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$ possuem são equivalente àquelas que os estados $|x\rangle$ teriam se fossem normalizáveis. Toda a discussão feita acima, para a aproximação dos autoestados não normalizáveis do operador \hat{x} , também é válida para o operador \hat{p} .

Levando-se em conta a base formada pelos autoestados dos operadores posição e momento, pode-se escrever os operadores atuando em funções de onda em ambas as representações, a do espaço das posições e dos momentos. No caso da representação do espaço das posições se escreve

$$\langle x | \hat{x} | \psi \rangle := \hat{x} \cdot \psi(x) = x\psi(x) \quad (2.20)$$

para o operador posição e

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle := \hat{p} \cdot \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \quad (2.21)$$

para o operador momento. Quanto à representação no espaço dos momentos

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle := \hat{x}.\psi(p) = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi(p) \quad (2.22)$$

para o operador posição e

$$\langle p|\hat{p}|\psi\rangle := \hat{p}.\psi(p) = p\psi(p) \quad (2.23)$$

para o operador momento.

As equações (2.20) e (2.21) são consistentes com a relação de comutação ordinária, assim como (2.22) e (2.23). Em um cenário que envolva a existência de um comprimento mínimo, a representação no espaço das posições se torna inviável por não se poder tomar a sequência de aproximações descrita anteriormente.

2.4.2 Espaço de Hilbert em um cenário de comprimento mínimo

Em um contexto ordinário, foi discutido que no Espaço de Hilbert os operadores \hat{x} e \hat{p} atuam em funções de onda de quadrado integrável no espaço das posições $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ e do momento $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$, onde $|x\rangle$ e $|p\rangle$ são autoestados do operador posição e momento, respectivamente. Foi visto que o estado $|x\rangle$ representa uma partícula exatamente localizada no ponto x e conseqüentemente com incerteza nula. Analogamente, para os estados $|p\rangle$. Tais estados não são estados físicos, pois não são normalizáveis, não pertencendo assim ao espaço de Hilbert. Para contornar este problema foi feito uma série de aproximações de autoestados que possuem incertezas arbitrariamente próximas de zero. Essa abordagem não é válida em um cenário de comprimento mínimo! Pelo menos para o operador posição. Em um cenário de comprimento mínimo para um vetor de estado $|\psi\rangle$, descrevendo um sistema físico, deve-se ter

$$\Delta x_{|\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|(\hat{x} - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle)^2|\psi\rangle} \geq \Delta x_0, \quad (2.24)$$

o que impossibilita a tomada do limite com estados de posição arbitrariamente decrescente.

Logo, não é mais possível uma representação da posição, já que não pode haver autoestados físicos do operador posição, pois isto implicaria uma incerteza nula. Como não existem mais autoestados físicos $|x\rangle$ do operador posição \hat{x} , não será possível se obter uma função de onda $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, a qual descreve a amplitude de probabilidade de uma partícula descrita pelo estado $|\psi\rangle$ estar exatamente localizada no ponto x , pois a própria noção de uma partícula pontualmente localizada não é mais válida. Mais adiante, será visto como se recuperar a informação a respeito da posição de uma partícula, como se deve ter em uma teoria quântica satisfatória.

Como não está sendo considerada a incerteza mínima no momento esse problema da

representação não ocorre para o espaço dos momentos, ou seja, os autoestados do operador momento não apresentam qualquer problema ao fornecerem uma incerteza nula ao se trabalhar nesta representação. Portanto, diante da impossibilidade de se trabalhar na representação da posição, em um cenário de comprimento mínimo, a alternativa mais viável é a construção do espaço de Hilbert utilizando a representação dos momentos.

2.5 Álgebra Modificada

A atuação dos operadores posição e momento em funções de onda têm que ser consistentes com a relação de comutação, independente da representação. Portanto, ao se modificar a maneira como estes operadores comutam, deve-se também modificar a atuação deles nas funções de onda para torná-los consistentes com a nova relação de comutação. No início do capítulo, foram apresentadas algumas propostas de GUP's, sugeridas por diferentes autores. Cada uma dessas propostas tem uma construção própria do espaço de Hilbert e conseqüentemente da representação dos operadores. Serão apresentados agora as representações relacionadas com os GUP's discutidos no início deste capítulo, começando pelo mais comum na literatura, e posteriormente será aprofundado a álgebra da proposta que será utilizada neste trabalho.

2.5.1 Propostas de Kempf, Mangano e Mann (KMM)

Como dito anteriormente, dentre as várias propostas diferentes de GUP's, provavelmente a mais difundida seja a apresentada por Achim Kempf, Gianpiero Mangano e Robert B. Mann em 1994, que basicamente é a equação (2.6) [20, 27–29]. Por ser a mais comum na literatura ela foi utilizada nas discussões conceituais iniciais. Sendo assim, a representação dos operadores \hat{p} e \hat{x} no espaço dos momentos, em um cenário de comprimento mínimo, para que resultem na relação de comutação (2.9), devem ser da forma

$$\langle p|\hat{p}|\psi\rangle = p\psi(p), \quad (2.25)$$

para o operador momento, como era de se esperar. Porém, para o operador posição

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi(p). \quad (2.26)$$

sendo fácil verificar que as representações (2.25) e (2.26) satisfazem na relação de comutação (2.9).

O produto escalar generalizado deve ser dado agora pela seguinte relação

$$\langle \psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p)\varphi(p), \quad (2.27)$$

pois, os operadores \hat{x} e \hat{p} , assim como na mecânica quântica ordinária, devem ser simétricos quando aplicados sucessivamente em dois estados $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ quaisquer, ou seja,

$$(\langle\psi|\hat{p})|\varphi\rangle = \langle\psi|(\hat{p}|\varphi\rangle) \quad (2.28)$$

e

$$(\langle\psi|\hat{x})|\varphi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\varphi\rangle). \quad (2.29)$$

Para se verificar as simetrias acima, basta aplicar as relações (2.25) e (2.26) na redefinição de produto escalar. O caso para o operador \hat{p} é trivial, para o operador \hat{x} tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \varphi(p) = \quad (2.30)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \left[i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p) \right]^* \varphi(p), \quad (2.31)$$

no lado primeiro membro da equação foi realizado uma integração por partes; também foi considerado que a função de onda se anula no infinito.

Uma vez que os autoestados $|p\rangle$ formam uma base do espaço, a relação de completeza toma a forma

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle\langle p|. \quad (2.32)$$

Conseqüentemente, o produto interno de dois autoestados do operador momento fica

$$\langle p|p'\rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (2.33)$$

Para se obter o valor mínimo da incerteza, e portanto o comprimento mínimo, basta considerar o caso limite da equação (2.6), ou seja, a igualdade. Isolando Δp da igualdade

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 - \beta(1 + \beta\langle\hat{p}\rangle^2)}. \quad (2.34)$$

Ao se observar o comportamento da figura (2.2) pode-se ver que o valor de Δx_0 (vértice da figura) ocorre quando o argumento da raiz é zero, conseqüentemente

$$\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 = \beta(1 + \beta\langle\hat{p}\rangle^2) \implies \Delta x_0(\langle\hat{p}\rangle) = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1 + \beta\langle\hat{p}\rangle^2}. \quad (2.35)$$

De forma que o mínimo absoluto para $\Delta x_0(\langle\hat{p}\rangle)$ ocorre para $\langle\hat{p}\rangle = 0$. Esta álgebra conduz a um comprimento mínimo observável de

$$\boxed{(\Delta x)_{min}^{KMM} = \hbar\sqrt{\beta}.} \quad (2.36)$$

2.5.2 Proposta do Nouicer

Já em 2007, Khireddine Nouicer pesquisando a termodinâmica dos buracos negros propôs um GUP na forma de exponencial [17]

$$\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}\langle\exp(\beta\hat{p}^2)\rangle. \quad (2.37)$$

O GUP proposto por Nouicer é uma generalização para todas as ordens do parâmetro do comprimento mínimo em relação à proposta do Kempf, pois ao se expandir (2.37), obtém-se (2.6), considerando somente termos em primeira ordem de β . Da mesma forma que feito para a proposta KMM, será discutido, brevemente, como se dá a construção do espaço de Hilbert para este GUP. Como dito anteriormente, a relação entre o princípio de incerteza e o comutador é dado, ordinariamente, por (2.8) a relação de comutação modificada consistente com (2.37) é dado por [30–32]

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\frac{\hbar}{2}\exp(\beta p^2). \quad (2.38)$$

A representação dos operadores que fornecem a relação de comutação acima é

$$\langle p|\hat{p}|\psi\rangle = p\psi(p), \quad (2.39)$$

para o operador momento e

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar\exp(\beta p^2)\partial_p\psi(p) \quad (2.40)$$

para o operador posição. Consequentemente, a simetria dos operadores é assegurada pelo produto escalar

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp(\beta p^2) \psi^*(p) \varphi(p). \quad (2.41)$$

Já quanto à relação de completeza:

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\beta p^2) |p\rangle \langle p|. \quad (2.42)$$

A partir da equação (2.37) e usando-se a técnica da função W de Lambert [33], chega-se ao seguinte valor de comprimento mínimo para o GUP proposto por Nouicer

$$\boxed{(\Delta x)_{min}^{Nouicer} = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \hbar \sqrt{\beta}.} \quad (2.43)$$

2.5.3 Proposta do Vagenas

Elias C. Vagenas, Ahmed Farag Ali e Saurya Das propuseram em 2009 outro GUP [18], em que está presente uma incerteza máxima no momento. A relação de comutação proposta por Vagenas, válida para mais de uma dimensão, assegura $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$ (via identidade de Jacobi) tem a seguinte forma [34, 35]

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \left[\delta_{ij} - \alpha \left(\hat{p} \delta_{ij} + \frac{\hat{p}_i \hat{p}_j}{p} \right) + \alpha^2 (\hat{p}^2 \delta_{ij} + 3\hat{p}_i \hat{p}_j) \right], \quad (2.44)$$

onde $\hat{p}^2 = \sum_{j=1}^3 \hat{p}_i \hat{p}_j$, $\alpha = \alpha_0 / M_{pl} c = \alpha_0 l_{pl} / \hbar$ é o parâmetro do comprimento mínimo, sendo $l_{pl} = 10^{-35} m$ o comprimento de Planck, M_{pl} a massa de Planck e $M_{pl} c^2 \simeq 10^{29} GeV$ a energia de Planck. Esta relação de comutação, em uma única dimensão e considerando somente termos até segunda ordem do parâmetro do comprimento mínimo α , fornece o seguinte GUP

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} + 4\alpha^2 \right) \Delta p^2 + 4\alpha^2 \langle p \rangle^2 - 2\alpha \sqrt{\langle p^2 \rangle} \right]. \quad (2.45)$$

A relação de incerteza (2.44) implica não somente uma incerteza mínima na posição, como também uma incerteza máxima no momento, [18]

$$\boxed{(\Delta x)_{min}^{Vagenas} \simeq \alpha_0 l_{pl} = \hbar \alpha} \quad (2.46)$$

e

$$(\Delta P)_{max}^{Vagenas} \simeq \frac{M_{Pl}c}{\alpha_0}. \quad (2.47)$$

A relação de comutação (2.44) é aproximadamente satisfeita pela seguinte representações dos operadores

$$\langle x | \hat{P}_i | \psi \rangle = p_{0i} (1 - \alpha p_0 + 2\alpha^2 p_0^2) \psi(x) \quad (2.48)$$

e

$$\langle x | \hat{X}_i | \psi \rangle = x_{0i} \psi(x), \quad (2.49)$$

onde p_{0i} e x_{0i} satisfazem a relação de comutação ordinária, $[\hat{p}_{0i}, \hat{x}_{0i}] = i\hbar\delta_{ij}$. Sendo assim, p_{0i} pode ser interpretado como o momento em baixas energias, com sua representação padrão ordinária no espaço das posições $p_{0i} = -i\hbar\partial/\partial x$. Portanto, P_i é o momento para altas energias (em que a natureza do comprimento mínimo se manifesta). O parâmetro adimensional α_0 é tomado como da ordem da unidade. Neste caso, os termos com dependência de α somente se tornam consideráveis quando o momento é comparável à energia de Planck e os comprimentos comparáveis ao comprimento de Planck.

2.5.4 Proposta de Pedram

As propostas acima apresentam alguns problemas:

- As equações (2.6) e (2.45) são perturbativas, isto é, somente são válidas para pequenos valores do parâmetro do comprimento mínimo.
- Elas não implicam um valor máximo de momento observado. Apesar de a proposta de Vagenas ter como consequência um valor máximo na incerteza do momento, equação (2.47), este difere da ideia de momento máximo proposta em teorias DSR (Doubly Special Relativity), pois a equação (2.44) impõe um limite superior na incerteza do momento medido, mas não no valor do momento observado.

O GUP que será utilizada nesse trabalho é o proposto por Pouria Pedram em 2012 [14, 15], apresentado inicialmente na equação (2.4), tem a seguinte relação de comutação

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \frac{i\hbar}{1 - \beta\hat{P}^2}, \quad (2.50)$$

que implica não somente uma incerteza mínima na posição, mas também um momento máximo observável: devido ao ponto de singularidade $p^2 = 1/\beta$, o momento não pode exceder $1/\sqrt{\beta}$, sendo consistente com teorias DSR.

2.5.4.1 Representação dos Operadores

As representações dos operadores posição e momento que satisfazem a relação de comutação (2.50) são

$$\hat{P}\psi(p) = p\psi(p), \quad (2.51)$$

e

$$\hat{X}\psi(p) = \frac{i\hbar}{1 - \beta p^2} \partial_p \psi(p), \quad (2.52)$$

Considerando que o operador de posição deva ser simétrico o produto escalar modificado, assim como, a relação de ortogonalidade modificada podem ser escritos, respectivamente, como

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp (1 - \beta p^2) \psi^*(p) \phi(p), \quad (2.53)$$

$$\langle p | p' \rangle = \frac{\delta(p - p')}{1 - \beta p^2}. \quad (2.54)$$

Uma vez que a relação entre as incertezas e o comutador é dado por

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right|, \quad (2.55)$$

a relação de incerteza consistente com (2.50) é

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \left\langle \frac{\hbar/2}{1 - \beta \langle P^2 \rangle} \right\rangle. \quad (2.56)$$

Usando a propriedade $\langle P^{2n} \rangle \geq \langle P^2 \rangle^n$, pode-se reescrever a inequação acima como

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar/2}{1 - \beta[(\Delta P)^2 + \langle \hat{P} \rangle^2]}. \quad (2.57)$$

Para se determinar a incerteza mínima do comprimento relacionada com esta álgebra modificada, consideram-se estados físicos que tenham o valor esperado do momento nulo $\langle P \rangle = 0$:

$$(\Delta X)(\Delta P) = \frac{\hbar/2}{1 - \beta(\Delta P)^2}. \quad (2.58)$$

A equação acima é uma equação quadrática em ΔP , sendo que o valor mínimo de ΔX é dado pelo seu vértice $\Delta P = 1/\sqrt{3\beta}$. Portanto, o valor mínimo da incerteza na posição é dada por

$$\boxed{(\Delta X)_{min}^{Pedram} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\hbar\sqrt{\beta}}, \quad (2.59)$$

Comparando as equações (2.36), (2.43) e (2.59) pode-se observar que $(\Delta X)_{min}^{Pedram} > (\Delta x)_{min}^{Nouicer} > (\Delta x)_{min}^{KMM}$.

2.5.4.2 Análise do Operador Posição

Diante da equação (2.52), o problema do operador posição, ou seja, a determinação dos autovalores e autovetores do operador posição no espaço dos momentos, é dado por

$$\frac{i\hbar}{1 - \beta p^2} \partial_p \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p), \quad (2.60)$$

cuja solução para as autofunções é

$$\psi_\lambda(p) = c \exp \left[\frac{-i\lambda p}{\hbar} \left(1 - \frac{\beta}{3} p^2 \right) \right], \quad (2.61)$$

que representam os autoestados do operador posição. Como as autofunções devem ser normalizadas, deve-se ter

$$1 = cc^* \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp (1 - \beta p^2) = \frac{4cc^*}{3\sqrt{\beta}}. \quad (2.62)$$

Portanto, as autofunções normalizadas são

$$\psi_\lambda(p) = \frac{\sqrt{3\sqrt{\beta}}}{2} \exp \left[\frac{-i\lambda p}{\hbar} \left(1 - \frac{\beta}{3} p^2 \right) \right]. \quad (2.63)$$

Calculando o produto escalar dos autoestados, obtém-se

$$\langle \psi_\lambda | \psi_{\lambda'} \rangle = \frac{3\sqrt{\beta}}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[\frac{i(\lambda - \lambda')p}{\hbar} \left(1 - \frac{\beta}{3} p^2 \right) \right] \quad (2.64)$$

$$= \frac{3\hbar\sqrt{\beta}}{2(\lambda - \lambda')} \sin \left(\frac{2(\lambda - \lambda')}{3\hbar\sqrt{\beta}} \right) \quad (2.65)$$

mostrando que, diferentemente da mecânica quântica ordinária, os autoestados do operador posição não são mais ortogonais, sendo que agora o produto interno possui um formato oscilatório.

2.5.4.3 Estados de Máxima Localização

Na seção 2.4.1 foi discutido que para se obter a representação ordinária da posição os autoestados são aproximados por uma sequência de estados com incertezas cada vez menores, tornando-as arbitrariamente próximas de zero. Em um cenário com comprimento mínimo esta aproximação não é mais possível, logo, os autoestados do operador posição não são mais estados físicos, pois fornecem incerteza nula. Sendo assim, os autoestados $|x\rangle$ não formam mais uma base do espaço de Hilbert e conseqüentemente, o operador \hat{x} deixa de ser um observável. Porém, matematicamente, pode-se escrever os operadores na representação da posição como

$$\langle x | \hat{X} | \psi \rangle = \hat{x} \cdot \psi(x) \quad (2.66)$$

e

$$\langle x | \hat{P} | \psi \rangle = \left(\hat{p} + \frac{\beta}{3} \hat{p}^3 + \frac{\beta^2}{3} \hat{p}^5 + \frac{4\beta^3}{9} \hat{p}^7 + \dots \right) \cdot \psi(x), \quad (2.67)$$

onde \hat{x} e \hat{p} são os operadores ordinários de posição e momento que satisfazem as relações de comutação canônica $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Embora (2.50) não seja uma representação exata da álgebra, ela preserva a forma ordinária do operador posição (2.66). Então, nesta representação da "posição" tem-se que

$$\langle x | \hat{X} | \psi \rangle = x \cdot \psi(x) \quad (2.68)$$

e

$$\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{3}i\hbar^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\beta^2}{3}i\hbar^5\frac{\partial^5}{\partial x^5} + \dots\right).\psi(x) \quad (2.69)$$

onde $|x\rangle$ são autoestados do operador posição.

Essa representação de posição é apenas formal, visto que os autoestados do operador posição \hat{x} e momento \hat{p} não são estados físicos e, portanto, não pertencem ao espaço de Hilbert. Isso porque a incerteza do operador posição calculado em qualquer um dos seus autoestados é nulo, o que fisicamente é impossível, pois $\Delta x \geq \Delta x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\hbar\sqrt{\beta}$, para qualquer estado fisicamente aceitável.

Para se recuperar as informações a respeito da posição, em um cenário de comprimento mínimo, é necessário introduzir uma nova representação. Essa representação é baseada no conceito de estados de máxima localização. Os estados de máxima localização $|\psi_\xi^{ML}\rangle$, são definidos de forma que a incerteza na posição destes estados $\Delta X_{|\psi_\xi^{ML}\rangle}$, seja o próprio comprimento mínimo

$$\Delta X_{|\psi_\xi^{ML}\rangle} = (\Delta X)_{min} = \Delta x_0 \quad (2.70)$$

e

$$\langle \psi_\xi^{ML}|\hat{X}|\psi_\xi^{ML}\rangle = \xi \quad (2.71)$$

ou seja, um estado de máxima localização representa uma partícula localizada em torno de um ponto ξ com incerteza mínima possível, o próprio comprimento mínimo. Desta forma, a localização dela é a máxima possível, justificando assim o nome destes estados. A condição de positividade da norma implica que estes estados devem satisfazer

$$\left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2}(\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle)\right)|\psi\rangle = 0. \quad (2.72)$$

Para se obter a função de onda é necessário expressar $\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle$ em termos de ΔP e $\langle \hat{P} \rangle$. De qualquer forma, uma vez que $\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle$ também depende de $\langle \hat{P}^4 \rangle$, $\langle \hat{P}^6 \rangle$, etc., e essas quantidades não podem ser calculadas antes de especificar $|\psi\rangle$, para uma primeira ordem do GUP pode-se aproximar a relação $\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \simeq i\hbar(1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle P \rangle^2)$, que, como dito anteriormente, é o caso de (2.1) quando se considera (2.4) apenas na primeira ordem. Usando este fato e as representações (2.51) e (2.52), a equação (2.72) no espaço dos momentos assume a forma

$$\left(\frac{i\hbar}{1 - \beta p^2}\frac{\partial}{\partial p} - \langle X \rangle + i\hbar\frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle P \rangle^2}{2(\Delta P)^2}(p - \langle P \rangle)\right)\psi(p) \simeq 0, \quad (2.73)$$

cuja solução é

$$\psi(p) \simeq \mathcal{N} \times \exp \left[\left(-\frac{i}{\hbar} \langle X \rangle + \frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2}{2(\Delta P)^2} \langle P \rangle \right) \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2}{4(\Delta P)^2} \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^4 \right) \right]. \quad (2.74)$$

Para se obter o estado de máxima localização é preciso tomar o valor da incerteza do momento $\Delta P = 1/\sqrt{3\beta}$, que é o valor que minimiza (2.58), e também tomar o valor esperado do \hat{P} como nulo, $\langle \hat{P} \rangle = 0$, resultando no estado de máxima localização

$$\psi_{\xi}^{ML}(p) \simeq \mathcal{N} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \xi \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^4 \right) \right]. \quad (2.75)$$

A principal característica dos estados de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ é que eles são os que mais se aproximam, em um cenário de comprimento mínimo, dos autoestados $|x\rangle$ da mecânica quântica ordinária. O fator de normalização é dado por

$$1 = \mathcal{N} \mathcal{N}^* \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp (1 - \beta p^2) \exp(2\beta p^2 - \beta^2 p^4) = 1,0123 \frac{\mathcal{N}^2}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.76)$$

Os estados de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ satisfazem a equação do valor esperado do operador posição, equação (2.71), como seria de se esperar. Porém, a equação da incerteza mínima, equação (2.70), não é exatamente satisfeita, devido à aproximação que foi feita para se chegar a (2.75). De qualquer forma, a diferença do valor da incerteza é menor do que dez por cento:

$$\Delta X_{|\psi_{\xi}^{ML}\rangle} = 1,0998(\Delta X)_{min}. \quad (2.77)$$

A representação no espaço de quase posição é obtida por projetando-se os vetores de estado sobre os estados de máxima localização,

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi \rangle = \psi_{qp}(\xi). \quad (2.78)$$

A ação dos operadores posição e momento no espaço de quaseposição são dados por:

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi \rangle = \left[\xi + ib \sqrt{\beta} t g \left(-ib \sqrt{\beta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right] \psi_{qp}(\xi) \quad (2.79)$$

e

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{P} | \psi \rangle = \langle \psi_{\xi}^{ML} | \left(\hat{p} + \frac{\beta}{3} \hat{p}^3 + \frac{\beta^2}{3} \hat{p}^5 + \dots \right) | \psi \rangle, \quad (2.80)$$

com

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial \psi_{qp}(\xi)}{\partial \xi} \quad (2.81)$$

e

$$b := \frac{3\pi}{4} \hbar. \quad (2.82)$$

Então, até $O(\beta^2)$ tem-se

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi \rangle = \left(\xi + \beta b^2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \beta^2 \frac{b^4}{3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) \psi_{qp}(\xi) \quad (2.83)$$

e

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{P} | \psi \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi} + i\hbar^3 \frac{\beta}{3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - i\hbar^5 \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^5}{\partial \xi^5} \right) \psi_{qp}(\xi) \quad (2.84)$$

Pode-se mostrar que a função de onda no espaço de quase posição é uma superposição das funções de onda no espaço de "posição", dada por:

$$\psi_{qp}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi(\xi + b\sqrt{\beta}) + \psi(\xi - b\sqrt{\beta}) \right]. \quad (2.85)$$

Quanto à generalização da transformada de Fourier, que leva à função de onda na representação dos momentos em sua equivalente na representação da máxima localização, é dada por [14]

$$\psi_{qp}(\xi) = \mathcal{N} \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \xi \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^4 \right) \right] \psi(p). \quad (2.86)$$

Isto mostra que, assim como na mecânica quântica ordinária, um autoestado do momento na representação da máxima localização $\psi_{\tilde{p}}(\tilde{p}) = \delta(p - \tilde{p})$ e com energia $E = \tilde{p}^2/2m$, seria equivalente à representação da posição no contexto ordinário, continua sendo uma onda plana. Porém, o comprimento de onda agora fornece uma relação de dispersão modificada

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}\left(1 - \frac{2}{3}\beta mE\right)} = \frac{\lambda_{ord}(E)}{1 - \frac{2}{3}\beta mE}, \quad (2.87)$$

onde $\lambda_{ord} = 2\pi\hbar/\sqrt{2mE}$ é o comprimento de onda ordinário. Para valores de $mE \rightarrow 0$, (2.87) se aproxima da relação de dispersão ordinária. Para valores de $mE \rightarrow 3/2\beta$, (2.87) diverge, implicando assim um valor máximo de energia permitido para os autoestados do momento $E_{max} = 3/2m\beta$. O caso de limite inferior para (2.87), ou seja, o menor comprimento de onda admitido, será $\lambda_0 = 3\pi\hbar\sqrt{\beta}$, que é não nulo.

A transformação (2.86) mapeia uma função de onda no espaço dos momentos $\psi(p)$ em sua função de onda equivalente no espaço de máxima localização $\psi_{qp}(\xi)$. Ela é uma generalização da transformada de Fourier da mecânica quântica ordinária, sendo assim, ela admite uma inversa. A transformação da função de onda de máxima localização para o espaço dos momentos é dada por

$$\psi(p) = \frac{\mathcal{N}^{-1}}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\left[\beta\left(p^2 - \frac{\beta}{2}p^4\right) - \frac{i}{\hbar}\xi\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \psi_{qp}(\xi). \quad (2.88)$$

Por fim, o produto escalar em termos da função de onda da máxima localização é dado por

$$\begin{aligned} \langle\phi|\psi\rangle &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp (1 - \beta p^2) \phi^*(p) \psi(\xi) \\ &= \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}}{2\pi\hbar}\right)^2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp d\xi d\xi' (1 - \beta p^2) \\ &\times \exp\left[2\beta\left(p^2 - \frac{\beta}{2}p^4\right) - \frac{i}{\hbar}(\xi - \xi')\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \phi^*(p) \psi(\xi). \end{aligned} \quad (2.89)$$

2.6 Comprimento Mínimo: Considerações Finais

Um fato interessante a respeito de algumas teorias que se propõem a quantizar a gravidade é que elas apontam para a possibilidade de existência de um comprimento mínimo, isto é, uma escala mínima de comprimento possível de se observar e conseqüentemente uma máxima resolução possível das medidas espaciais. O argumento das teorias de quantização da gravitação em favor da existência de um comprimento mínimo é de que as altas energias utilizadas na tentativa de se sondar as pequenas regiões próximas à escala do comprimento de Planck, $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$, perturbam significativamente a estrutura do espaço-tempo através de efeitos gravitacionais. Sendo assim, existiria um limite máximo de localizabilidade possível de ser observado. Sob o ponto de vista da QED (eletrodinâmica quântica), ao se emitir fótons em direção a um objeto para medir sua posição com uma resolução cada vez maior, deve-se ter fótons com comprimentos de onda cada vez menores. Porém, abaixo de um certo comprimento de onda o fóton passa a ter energia suficiente para criar um par elétron-pósitron, ao invés de ser espalhado e fornecer alguma informação sobre o objeto a ser observado [36]. Portanto, ao se tentar medir com um fóton um comprimento indefinidamente pequeno, tem-se como resultado não fazer medição alguma. Em síntese, ao se tentar determinar a posição de uma partícula com precisão cada vez maior é produzida uma perturbação cada vez maior no campo gravitacional gerando um desconhecimento, também cada vez maior, sobre a posição desta partícula, resultando em um efeito contrário ao desejado. Esse comprimento mínimo, aparentemente inerente a teorias de gravitação quântica, tem como consequência uma modificação da álgebra da mecânica quântica.

A modificação da álgebra foi feita associando-se ao comprimento mínimo uma incerteza mínima não nula nas medidas de posição, sendo que agora não é mais possível se ter uma partícula com incerteza na posição arbitrariamente próxima de zero. A inexistência da incerteza nula associada ao comprimento mínimo por sua vez, exigiu uma modificação na relação de incerteza de Heisenberg. Como a relação de incerteza é baseada na não comutatividade dos operadores posição e momento, ao se generalizar a relação de incerteza teve-se que generalizar a relação de comutação e conseqüentemente a atuação dos operadores e suas representações. Essas representações, consistentes com o comprimento mínimo, serão utilizadas posteriormente na construção de uma descrição quântica do Universo, em um cenário de comprimento mínimo.

O fato de o Universo primordial ser fundamentalmente quântico, pois, o modelo cosmológico do Big Bang propõe um Universo em expansão, o que implica que ele foi muito pequeno no passado. Na época de Planck, cerca de 10^{-44} s após a explosão inicial, o Universo observável, cujo tamanho hoje é da ordem de 10^{28} cm, não era maior do que cerca de 10^{-53} cm. Portanto, existiu um breve, mas extraordinariamente importante, período na evolução do Universo, no qual os efeitos quânticos dominavam. Sendo assim, se faz necessária a construção de uma descrição quântica da evolução do Universo. Esta construção será feita no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Cosmologia Quântica

3.1 Introdução à Cosmologia Quântica

No capítulo anterior, viu-se como a existência de um comprimento mínimo, motivado por teorias de quantização da gravidade, modifica a álgebra da mecânica quântica. Sendo assim, é válida a análise do inverso, como um formalismo com comprimento mínimo modifica a Cosmologia Quântica. Antes disso, serão apresentados os principais conceitos cosmológicos em um contexto quântico ordinário, ou seja, sem o comprimento mínimo.

A cosmologia quântica é uma formulação quântica na descrição do Universo como um todo. Tal formulação se faz necessária tendo em vista o modelo do Big Bang, pois houve um período, breve porém importante, na formação do Universo no qual os efeitos quânticos dominavam, o que restringe a aplicação dos modelos clássicos.

Além disso, a cosmologia quântica pode ser tomada como laboratório teórico para a análise da gravitação quântica, pois modelos cosmológicos quânticos que descrevem o Universo primordial, ou seja, logo após o Big Bang, são exemplos de aplicação das ideias da gravitação quântica.

Ao se adotar um modelo de Universo em expansão e retroceder-se no tempo, chega-se à singularidade inicial, um estado de dimensões iguais a zero e densidade de energia infinita, estado em que as leis da Física não podem ser utilizadas. Porém, um modelo cosmológico que implicaria uma cosmogênese quântica do Universo via tunelamento evitaria esse problema.

O objetivo da cosmologia quântica é determinar a função de onda do Universo, da qual pode-se obter algumas informações acerca do Universo observado. Para a obtenção da função de onda é necessária uma teoria quântica que descreva a dinâmica do Universo, assim como a relatividade geral o descreve classicamente. Desta teoria, deduz-se uma equação análoga à equação de Schrödinger, denominada equação de Wheeler-DeWitt, cuja solução é a função de onda do Universo buscada. A equação de Wheeler-DeWitt admite várias soluções. Sendo assim, é necessário impor determinadas condições de contorno para se obter a função de onda esperada. E, por último, deve-se adotar um esquema de interpretação para a função de onda do Universo, e assim obter previsões bem definidas da teoria. Diante disto, a

cosmologia quântica é baseada em três elementos: a dinâmica, as condições iniciais ou de contorno e a interpretação quântica.

A cosmologia quântica será introduzida neste capítulo a partir das equações de Einstein, que quando se considera um Universo homogêneo e isotrópico tem sua dinâmica descrita pelas equações de Friedmann. Finalmente, através de um processo de quantização canônica se é conduzido à equação de Wheeler-DeWitt, cuja solução é a função de onda que descreve a evolução do Universo. E, por último, a dependência temporal é introduzida através do formalismo de Schutz.

3.2 Relatividade Geral

Em 1905, Albert Einstein publicou seu primeiro trabalho sobre relatividade especial [1]. Baseando-se nas ideias de Maxwell de que os campos elétricos e magnéticos são uma só entidade: o campo eletromagnético e postulando a constância da velocidade da luz, Einstein concluiu que o tempo e o espaço não são absolutos, e sim relativos, dependendo portanto do referencial adotado. Na construção da R.E., Einstein postulou a invariância da leis físicas para os referenciais inerciais, quando se considera a interação gravitacional este conceito se torna um pouco mais sutil.

Posteriormente, em 1915, baseando-se nas ideias de espaço e tempo relativos da teoria da relatividade especial e na gravitação universal newtoniana, Einstein descreveu geometricamente como a presença de massa e de energia alteram o espaço e o tempo [2], esta descrição é conhecida como teoria da relatividade geral. Tanto a mecânica clássica quanto a relatividade especial são construídas com base no conceito de referenciais inerciais, apesar de se poder trabalhar classicamente em referenciais não inerciais utilizando o conceito de forças fictícias. Porém, diferentemente das outras interações, todos os objetos experimentam a atuação da força gravitacional. Einstein então notou que a atuação da gravidade poderia ser equivalente ao comportamento dos objetos quando sujeitos a referenciais não inerciais. As interações que os corpos estão sujeitos não seria mais devido ao fato de haver outro objeto próximo, mas sim uma propriedade da própria geometria do espaço-tempo.

A relatividade geral foi considerada uma proposta inovadora pois foi uma interpretação geométrica dada para a atração entre corpos, em oposição ao conceito de "força", uma entidade de natureza desconhecida, introduzida por Newton. O Universo é descrito por um espaço quadrimensional, chamado de espaço-tempo, que se deforma de acordo com a presença de matéria e energia. Esta deformação, representada na geometria diferencial pela curvatura, é o que se chama tradicionalmente de gravidade. Sendo assim, toda a matéria e energia presente no Universo interage de forma gravitacional. A relatividade geral é a teoria que descreve essa interação, sendo um modelo que fornece a dinâmica do espaço-tempo.

A curvatura do espaço-tempo está relacionada com a energia e o momento de qualquer matéria e radiação presente. A relação é especificada pelas equações de campo de Einstein [3–5]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

com $\kappa = 8\pi G/c^4$, onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, R é o escalar de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Essencialmente, esta equação diz como a geometria, primeiro membro, irá se comportar de acordo com a distribuição de matéria e energia, segundo membro.

É possível obter as equações de campo de Einstein do princípio variacional a partir da ação de Einstein–Hilbert, acrescida de um termo de matéria

$$S = \int \left[\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L}_M \right] d^4x \sqrt{-g} \quad (3.2)$$

onde g é o determinante do tensor métrico e \mathcal{L}_M é a lagrangiana que descreve qualquer campo de matéria que apareça. Portanto, as equações de campo de Einstein são as equações de campo decorrentes da ação de Einstein–Hilbert com a lagrangiana de matéria. Mais à frente, quando se introduzir um parâmetro temporal através do método de Schutz, além do termo gravitacional da ação acima será considerado também um termo devido à presença de um fluido perfeito.

3.3 Universo de FRW

A cosmologia é construída com base em um pressuposto básico, o princípio cosmológico [37,38], segundo o qual o Universo é homogêneo e isotrópico, ou seja, qualquer seção de Universo possui as mesmas propriedades físicas e todas as direções são equivalentes. Portanto, as leis físicas são invariantes sob translações e rotações, de modo que, não há direção nem lugar especial no Universo [39]. Essas propriedades de homogeneidade e isotropia só se manifestam em uma escala relativamente grande, a escala cosmológica, que vale aproximadamente 100 *Mpc*. Nesta escala o tensor energia momento, que representa o conteúdo material do Universo, pode ser visto como o de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde u_μ é a quadri-velocidade para um observador comóvel ao fluido, ρ e p são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão do fluido. Nesse referencial o tensor energia momento é dado na forma diagonal $T = (\rho, p, p, p)$,¹ sendo seu traço

¹A métrica adotada é $(-, +, +, +)$.

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\rho - 3p, \quad (3.4)$$

Em 1922, Alexander Friedman, a partir das equações de campo de Einstein, chegou a um conjunto de equações que governam a expansão métrica do espaço [40]. Partindo do princípio cosmológico, Friedman percebeu que para uma métrica satisfazer um Universo homogêneo e isotrópico deve ser do tipo

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (3.5)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala associado ao tamanho do Universo em um determinado instante de tempo t , o qual será justamente a variável a ser determinada nas equações que descrevem a expansão do espaço. Quanto a $N(t)$, é um outro parâmetro de escala, associado à coordenada tempo, chamado de função lapso. O parâmetro de curvatura k determina a curvatura do espaço e assume os valores -1, 0 ou 1, respectivamente, para um espaço hiperbólico, plano ou esférico.

A relação entre a métrica e o os símbolos de Christoffel é

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}), \quad (3.6)$$

de forma que seus termos não nulos são

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}; \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2; \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta; \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}; \quad \Gamma_{22}^1 = -r^2(1-kr^2); \quad \Gamma_{33}^1 = -r^2 \sin^2 \theta(1-kr^2); \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta; \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}; \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.10)$$

Utilizando esses termos para calcular as componentes do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}, \quad (3.11)$$

tem-se

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (3.12)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2a^2 + 2k}{1 - kr^2}; \quad (3.13)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2a^2 + 2k); \quad (3.14)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2a^2 + 2k), \quad (3.15)$$

e o escalar de Ricci fica

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (3.16)$$

Para se obter as equações de Friedman devem-se usar estes resultados nas equações (3.1). Devido à diagonalidade da métrica surgem quatro equações, porém somente duas são independentes: as três equações que surgem das componentes espaciais $\mu\nu = ii$ são equivalentes, o que era de se esperar devido à isotropia da métrica. Para a componente temporal, $\mu\nu = 00$, tem-se

$$R_{00} = -\kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right), \quad (3.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} (\rho + 3p). \quad (3.18)$$

Já para a parte espacial, pode-se tomar $\mu\nu = 11$, por exemplo, obtendo

$$R_{11} = \kappa \left(T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T \right), \quad (3.19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{2} (\rho - p). \quad (3.20)$$

Substituindo (3.18) em (3.20) obtém-se

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{3} \rho}. \quad (3.21)$$

As equações (3.18) e (3.21) são as equações de Friedmann. Elas descrevem a expansão métrica do espaço, ou seja, são elas que fornecem a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico [41]. Além destas equações, há também a expressão da conservação da energia,

obtida da divergência do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.22)$$

A relação entre a pressão p e a densidade de energia ρ é dada pela equação de estado $p = p(\rho)$. Duas configurações particularmente importantes são: a matéria não-relativística, dita poeira, e o gás de fótons, chamado radiação. Evidências observacionais dizem que o Universo está em expansão acelerada, isto é, $\ddot{a} > 0$. Para que isso ocorra, de acordo com (3.18), deve-se ter $\rho + 3p < 0$. Porém, os tipos de matéria que se conhece satisfazem $\rho + 3p > 0$ (condição de energia forte). Desta forma, o modelo precisa de uma modificação, o que é feito com adição de um conteúdo exótico, a constante cosmológica, para estar de acordo com as observações astronômicas.

As equações de estado para radiação, poeira e constante cosmológica são

$$p(\rho) = \frac{\gamma}{3}\rho, \quad \gamma = \begin{cases} 1 & \text{radiação,} \\ 0 & \text{poeira,} \\ -3 & \text{constante cosmológica.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Aplicando a equação de estado na equação de continuidade (3.22), obtém-se o comportamento da densidade de energia em função do fator de escala

$$\rho(a) = \rho(a_i) \left(\frac{a_i}{a}\right)^{\gamma+3}, \quad (3.24)$$

onde a_i é o fator de escala em algum momento de referência. Considerando um Universo contendo radiação, poeira e constante cosmológica a equação (3.21) se torna

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda), \quad (3.25)$$

que descreve o comportamento do fator de escala de acordo com a composição do Universo. Em termos do parâmetro de Hubble e das densidades relativas, a equação (3.25) pode ser escrita como

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_k}{a^2} \right], \quad (3.26)$$

sendo

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho \rightarrow \rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{\kappa} \quad (3.27)$$

onde ρ_{cr} é a densidade de energia crítica para um universo plano ($k = 0$), e $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}}$ é o parâmetro de densidade relativa.

3.4 Equação de Wheeler-DeWitt

A título de exemplificação, será abordado um processo de quantização canônico ordinário da equação de Friedmann, (3.25). A ideia é transformar o fator de escala e o seu momento canônico conjugado em operadores e utilizar as suas respectivas representações.

Objetivando analisar o modelo mais simples de cosmogênese quântica, o surgimento do nada de um Universo vazio e fechado, como discutido por Atkatz e Pagels [42], somente um Universo fechado pode surgir via tunelamento quântico. Portanto, toma-se $k = 1$ e como única contribuição para a densidade de energia do Universo, tem-se a densidade de energia de vácuo, que está associada à constante cosmológica por $\Lambda = \kappa\rho_{vac}$. Dessa forma, (3.25) se torna

$$\dot{a}^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}a^2\right) = 0, \quad (3.28)$$

considerando que $\rho(a)$ é praticamente constante ou que varia muito pouco enquanto o Universo se expande exponencialmente. A equação (3.28) possui solução

$$a(t) = a_0 \cosh(a_0^{-1}t), \quad (3.29)$$

com $a_0 \equiv \sqrt{3/\Lambda}$, que descreve a fase inflacionária de Guth [43], um período relativamente breve de evolução do Universo, porém com uma expansão extremamente rápida.

O processo de quantização deste modelo é feito analogamente ao processo de quantização canônica - onde se associa ao momento conjugado e à coordenada os seus correspondentes operadores² $p \rightarrow \hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}$ e $x \rightarrow \hat{x} = x$, respectivamente - no caso em questão, como o único grau de liberdade é o fator de escala:

$$p_a \rightarrow \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial a} \quad (3.30)$$

e

²Considerando o sistema de unidades tal que $\hbar = 1$

$$a \rightarrow \hat{a} = a. \quad (3.31)$$

Como dito na seção 3.2, as equações de campo de Einstein (3.1) são as equações de movimento da ação de Einstein-Hilbert (3.2). No caso de um Universo fechado e composto exclusivamente com densidade de energia de vácuo, a equação de movimento correspondente à equação de campo de Einstein é (3.28), com a seguinte ação de Einstein-Hilbert

$$S_g = \int dt L_g = \frac{3\pi}{4G} \int dt \left[-\dot{a}^2 a + a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right]. \quad (3.32)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_g}{\partial \dot{a}} = \frac{3\pi}{4G} \left[-2(\dot{a}^2 + \ddot{a}a) \right] \quad (3.33)$$

e

$$\frac{\partial L_g}{\partial a} = \frac{3\pi}{4G} \left[1 - 3\frac{a^2}{a_0^2} - a^2 \right]. \quad (3.34)$$

Então a equação de movimento proveniente de (3.32) fica

$$\frac{3\pi}{4G} \left[-2\dot{a}^2 - 2\ddot{a}a + a^2 - 1 + 3\frac{a^2}{a_0^2} \right] = 0. \quad (3.35)$$

Aplicando a equação de estado $p = -\rho_{vac}$ e $\Lambda = \kappa\rho_{vac}$ em (3.18) se obtém que

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda}{3}a, \quad (3.36)$$

o que permite reescrever as equações de movimento como

$$\dot{a} + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}a^2 \right) = 0, \quad (3.37)$$

mostrando assim que

$$L_g = \frac{3\pi}{4G} \left[-\dot{a}^2 a + a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right], \quad (3.38)$$

é a lagrangiana de um Universo fechado, homogêneo, isotrópico e exclusivamente com densidade de energia de vácuo. Portanto, o momento canônico p_a é

$$p_a \equiv \frac{\partial L_g}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G} \dot{a}a, \quad (3.39)$$

o que permite reescrever a equação de movimento (3.28) como

$$p_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0, \quad (3.40)$$

sob quantização,

$$\langle \psi | \left[\hat{p}_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 \hat{a}^2 \left(1 - \frac{\hat{a}^2}{a_0^2}\right) \right] | a \rangle = 0. \quad (3.41)$$

Utilizando as representações (3.30) e (3.31) obtém-se

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) \right] \psi(a) = 0. \quad (3.42)$$

Esta é a equação de Wheeler-DeWitt [44], cuja solução $\psi(a)$ representa a "função de onda do Universo" [45]. Na dedução da equação de Wheeler-DeWitt restringiu-se ao caso do Universo fechado de FRW, ou seja, $k = 1$ que representa uma geometria esférica. Neste caso especificamente, o único grau de liberdade é o fator de escala a que é exatamente o raio do Universo. A função $\psi(a)$ está definida sobre um minisuperespaço unidimensional, o semi-eixo $0 < a < \infty$. No processo de quantização canônica do Universo de FRW utilizaram-se as representações (3.30) e (3.31), que satisfazem $[\hat{p}_a, \hat{a}] = -i$, o que leva a uma relação de incerteza

$$\Delta p_a \Delta a \geq \frac{1}{2}, \quad (3.43)$$

desta forma, é impossível se determinar simultaneamente, com absoluta certeza, o fator de escala a e sua taxa de aumento, uma vez que $p_a \propto \dot{a}a$, por (3.39).

3.4.1 Condições de Contorno

A equação de Wheeler-DeWitt (3.42) possui o mesmo formato que a equação de Schrödinger unidimensional, independente do tempo, para uma partícula de meia unidade de massa, energia zero e sujeita ao potencial

$$V(a) \equiv \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) \quad (3.44)$$

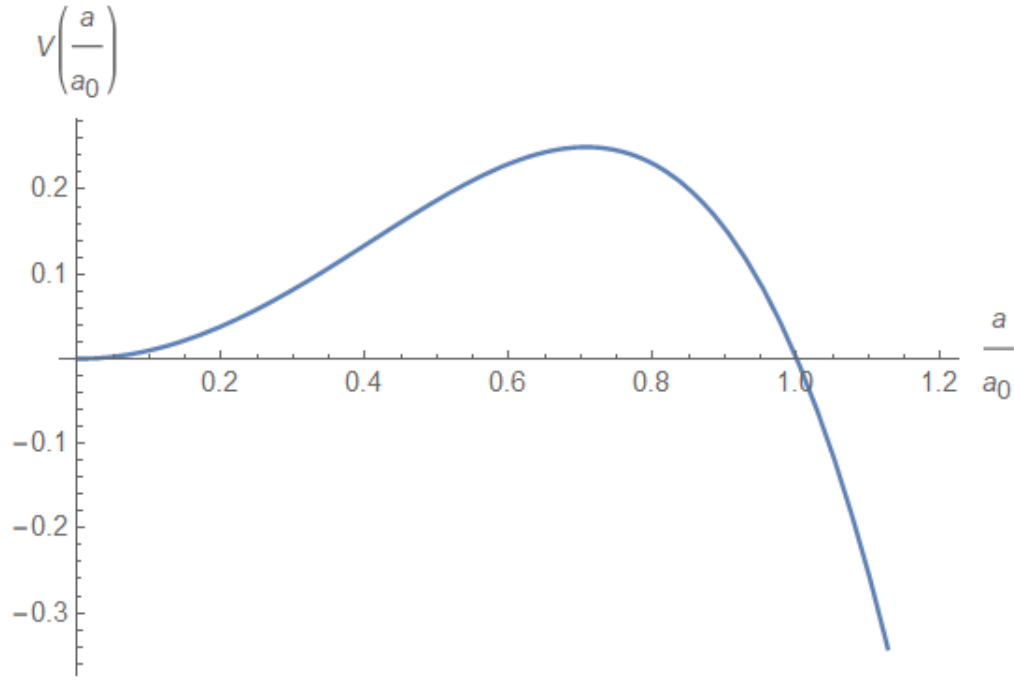


Figura 3.1. Potencial de Wheeler-DeWitt $V(a/a_0)$, tomando-se $a_0^2 = G$.

Desta forma, o Universo fechado de FRW quantizado possui uma descrição matemática equivalente a um problema da mecânica quântica não relativística, uma partícula que atravessa uma barreira de potencial unidimensional. A partícula na posição a representa um Universo com este valor do fator de escala. A região $0 < a < a_0$ é classicamente proibida para uma partícula de energia zero, porém acessível na teoria quântica através de um efeito de tunelamento. A região $a \geq a_0$ é acessível tanto classicamente quanto quanticamente.

Para se determinar uma solução particular da equação de Wheeler-DeWitt, deve-se especificar as condições de contorno. Deseja-se considerar o nascimento de um Universo em expansão via tunelamento quântico, desta forma, deve-se impor que na região classicamente permitida a solução descreva uma onda emergente [46]. As funções de onda aproximadas, pelo método WKB, para a região classicamente proibida e para a região permitida respectivamente, são

$$\psi_T(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{V'(a)}} \left\{ \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] + i \exp \left[\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \quad (3.45)$$

e

$$\psi_T(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{V''(a)}} \exp \left[-i \frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (3.46)$$

com

$$V'(a) = \frac{3\pi}{2G} a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

e

$$V''(a) = \frac{3\pi}{2G} a \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

Esta é a chamada função de onda de tunelamento ψ_T . Como era de se esperar, a função de onda na região classicamente permitida é oscilatória, já a parte real da solução na região classicamente proibida, sob a barreira, é exponencial.

Impondo a condição de contorno de que a função de onda saindo da região classicamente proibida deve ser igual à função de onda entrando na região classicamente permitida $\psi_T(a > a_0) = \psi_T(a < a_0)$ para $a = a_0$ obtém-se a função de onda de Hartle e Hawking ψ_{HH} [45].

$$\psi_{HH}(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{V'(a)}} \exp \left[-\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.49)$$

e

$$\psi_{HH}(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{V''(a)}} \cos \left[\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (3.50)$$

3.4.2 Cosmogênese Quântica

Usando a função de onda de tunelamento, ψ_T , pode-se calcular a probabilidade da cosmogênese quântica de um Universo de FRW vazio surgir do nada via tunelamento quântico. O universo quântico de FRW de tamanho zero, o chamado nada cosmológico, representado pela partícula em $a = 0$, pode tunelar, segundo a mecânica quântica, através da barreira de potencial e surgir em $a = a_0$. Este evento de tunelamento descreve um Universo que saltou quanticamente para sua existência, com fator de escala a_0 , ou seja, um Universo que foi criado espontaneamente e de modo não singular, pois $a_0 > 0$.

Na situação ordinária de uma partícula atravessando uma barreira de potencial unidimensional, pode-se calcular a probabilidade de a partícula atravessar utilizando os coeficientes de transmissão e reflexão. No caso de um potencial $V \geq E$, a probabilidade de tunelamento é aproximadamente

$$P \simeq \exp \left\{ -2 \int_a^b dx \sqrt{2m[V(x) - E]} \right\}, \quad (3.51)$$

onde $(b - a)$ é a largura da barreira.

Chamando de $\langle FRW(a_0)|nada \rangle$ a amplitude de probabilidade do surgimento de um Universo de FRW do nada, então a probabilidade de um Universo tunelar através de um potencial do tipo (3.44) e surgir com tamanho inicial a_0 é

$$|\langle FRW(a_0)|nada \rangle|^2 \equiv P \simeq \exp \left\{ -\frac{3\pi}{G} \int_0^{a_0} da a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \exp \left(-\frac{3}{8G^2 \rho_{vac}} \right), \quad (3.52)$$

lembrando que $a_0 \equiv \sqrt{3/\Lambda} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_{vac}}}$.

3.5 Formalismo de Schutz

A incompatibilidade entre a interpretação do tempo na mecânica quântica e na relatividade geral é um dos grandes motivos pelo qual ainda não se tem uma teoria de unificação definitiva. Uma forma de se introduzir o tempo na teoria é utilizar o conteúdo material do Universo para gerar a evolução temporal. Baseando-se na termodinâmica, considera-se que a entropia dá sentido à seta do tempo. Outra proposta é a introdução do tempo como parâmetro externo via campo escalar [47]. Neste trabalho será considerado o primeiro caso.

Para se introduzir um parâmetro temporal com interpretação quântica em cosmologia será considerada a densidade de energia de vácuo como um fator dinâmico no modelo de de Sitter [48, 49]. O modelo cosmológico de de Sitter descreve a fase de expansão rápida do Universo, durante a qual a energia de vácuo domina a densidade de energia, sendo assim de fundamental importância para a cosmologia inflacionária. A densidade de energia do vácuo

é a responsável por criar o termo correspondente à constante cosmológica no tensor energia momento. Desta forma, o estudo dos aspectos quânticos do modelo cosmológico de de Sitter mediante o tratamento do vácuo como uma entidade dinâmica torna-se de interesse. Neste tratamento, a constante cosmológica surge devido aos graus de liberdade do vácuo. Isto é feito tratando o vácuo como um fluido perfeito com equação de estado $p = -\rho$ que através de uma abordagem termodinâmica permite a introdução de uma variável do tipo tempo.

Este método de tratar o vácuo como entidade dinâmica, dotado de graus de liberdade, pode ser implementado através do formalismo canônico de Schutz [50–52], o qual descreve um fluido relativístico interagindo com o campo gravitacional.

3.5.1 Ação Gravitacional

Será considerado o modelo cosmológico de De Sitter, o qual descreve a fase de expansão rápida do Universo, durante a qual a energia de vácuo domina a densidade de energia e origina o termo correspondente à constante cosmológica.

A ação gravitacional mais geral é dada por³

$$S_g = \int_M d^4x \sqrt{-g}(R - \Lambda) + 2 \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h}K, \quad (3.53)$$

onde R é o escalar de curvatura de Ricci, K é o traço da curvatura extrínseca K_{ij} , g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$, h é o determinante da métrica induzida sobre a hipersuperfície espacial tridimensional e ∂M é o contorno da variedade quadridimensional M . Em comparação com (3.2), acrescentou-se a constante cosmológica Λ devido à densidade de energia do vácuo, além do termo dado pela integral da superfície ∂M .

Como discutido anteriormente, de acordo com o princípio cosmológico, para um Universo homogêneo e isotrópico a métrica é do tipo FLRW:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right). \quad (3.54)$$

Usando a métrica (3.54) na ação (3.53), obtém-se a ação gravitacional na forma

$$S_g = \int dt \left(-\frac{6\dot{a}^2 a}{N} + kNa - 2Na^3 \Lambda \right). \quad (3.55)$$

Uma vez que $S_g = \int dt L_g$, temos que a lagrangiana gravitacional é dada por

$$L_g = -\frac{6\dot{a}^2 a}{N} + kNa - 2Na^3 \Lambda. \quad (3.56)$$

³Em unidades tais que $\frac{16\pi G}{c^4} = 1$

Passando para o formalismo hamiltoniano [53], onde

$$p_a = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{a}} = -\frac{12\dot{a}a}{N}, \quad (3.57)$$

a hamiltoniana gravitacional $NH_g = \dot{a}p_a - L_g$ fica dada por

$$H_g = -\frac{p_a^2}{24a} - ka + 2\Lambda a^3. \quad (3.58)$$

3.5.2 Ação de um Fluido

Em 1970, Bernard Schutz desenvolveu um formalismo para descrever a quadrivelocidade de um fluido bariônico perfeito através de seis potenciais $\mu, \phi, \epsilon, \eta, \theta$ e S [54], neste formalismo a quadrivelocidade é definida por

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\nu} + \epsilon\eta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}), \quad (3.59)$$

onde μ é a entalpia específica. Os potenciais ϵ e η estão associados à rotação do fluido, portanto, em modelos de FRW eles são nulos devido à isotropia do espaço. O potencial S é a entropia específica. Quanto aos potenciais θ e ϕ eles não possuem uma interpretação física óbvia. Neste modelo, o Universo é totalmente preenchido por um fluido perfeito. O formalismo de Schutz pode ser usado para descrever a dinâmica do fluido em interação com o campo gravitacional.

A quadrivelocidade deve obedecer à condição de normalização

$$U^\nu U_\nu = -1, \quad (3.60)$$

que fornece

$$\mu = \frac{1}{N} (\dot{\phi} + \theta \dot{S}). \quad (3.61)$$

A ação de um fluido perfeito é dada por

$$S_f = \int_M d^4x \sqrt{-g} p, \quad (3.62)$$

onde p é a pressão do fluido.

Para um fluido cuja equação de estado é dada por

$$p = \alpha\rho, \quad (3.63)$$

onde ρ é a densidade de energia e α depende do tipo de fluido, a pressão é

$$p = \alpha \left(\frac{\mu}{\alpha + 1} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}. \quad (3.64)$$

Usando (3.61) em (3.64) e sendo o modelo homogêneo e isotrópico, tem-se que

$$S_f = \int_M d^4x \sqrt{-g} p = \int dt N a^3 \alpha \left[\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{N(\alpha + 1)} \right]^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}. \quad (3.65)$$

Assim, a Lagrangiana do fluido é

$$L_f = \frac{\alpha a^3}{N^{1/\alpha}(1 + \alpha)^{1+1/\alpha}} (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+1/\alpha} e^{-\frac{S}{\alpha}}. \quad (3.66)$$

Os momentos canonicamente conjugados a ϕ e θ são

$$p_\phi = \frac{\partial L_f}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^3 (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1/\alpha}}{N^{1/\alpha}(1 + \alpha)^{1/\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}} \quad (3.67)$$

e

$$p_S = \frac{\partial L_f}{\partial \dot{S}} = \theta p_\phi. \quad (3.68)$$

Passando para o formalismo hamiltoniano [53],

$$NH_f = \dot{\phi} p_\phi + \dot{S} p_S - L_f, \quad (3.69)$$

fica dada por

$$H_f = \frac{p^{\alpha+1} e^S}{a^{3\alpha}}. \quad (3.70)$$

3.5.3 Ação Total

A hamiltoniana que descreve o Universo preenchido exclusivamente com um vácuo dinâmico é dada pela soma da hamiltoniana associada ao campo gravitacional livre com a hamiltoniana devido ao fluido perfeito. Das equações (3.58) e (3.70), a hamiltoniana total $H = H_g + H_f$ fica

$$H_{total} = -\frac{p_a^2}{24a} - ka + 2\Lambda a^3 + \frac{p^{\alpha+1}e^S}{a^{3\alpha}}. \quad (3.71)$$

Realizando a transformação canônica (reparametrização)

$$T := p_S e^{-S} p_\phi^{-(\alpha+1)} \quad (3.72)$$

e

$$p_T := p_\phi^{\alpha+1} e^S, \quad (3.73)$$

a hamiltoniana total se torna

$$\boxed{H_{total} = -\frac{p_a^2}{24a} - ka + 2\Lambda a^3 + \frac{p_T}{a^{3\alpha}}}. \quad (3.74)$$

Note que p_T ocorre linearmente em (3.74). Quando da quantização, este fato nos permitirá tratar a variável $t = -T$ como exercendo o papel de tempo e obter uma equação do tipo Schroendiger. A hamiltoniana acima será quantizada usando as representações dos operadores modificadas para se obter uma descrição quântica do Universo em um cenário de comprimento mínimo.

3.6 Cosmologia Quântica: Considerações Finais

A relatividade geral é uma teoria gravitacional consagrada. Várias observações corroboram as suas previsões, desde o desvio dos raios de luz medidos durante o eclipse de Sobral - CE em 1919, até mais recentemente a detecção das ondas gravitacionais pelo LIGO em 2016 [55]. Quando aplicadas à métrica de FRW, as equações da relatividade geral fornecem as equações de Friedmann que descrevem a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico. Dependendo da composição, o Universo apresenta diferentes formas de evolução, mas sempre partindo de uma fase primordial em que as dimensões são extremamente pequenas e a energia altíssima, obrigando assim a análise da cosmologia sob uma perspectiva quântica [56].

O processo de quantização apresentado aqui, a título de ilustração, foi o de quantização canônico, em que associou-se aos operadores suas respectivas representações ordinárias $p \rightarrow \hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}$ e $x \rightarrow \hat{x} = x$, ou seja, sem levar em consideração o comprimento mínimo, obtendo-se assim a equação de WDW, cuja solução é a função de onda do Universo. A proposta deste trabalho é fazer algo análogo, porém sob a perspectiva da álgebra da mecânica quântica modificada, considerando, assim, os efeitos que a existência de um comprimento mínimo causam em um Universo primordial. No entanto, o processo de quantização, que será feito no capítulo seguinte, parte da super hamiltoniana (3.74) que surgiu ao tratar o vácuo como um fluido dinâmico e que originou uma variável que pode ser interpretada como o tempo. Há outras formas de se introduzir um cenário de comprimento mínimo na cosmologia quântica, por exemplo, na ação inflacionária [57–60].

Capítulo 4

O Modelo Cosmológico Quântico em um Cenário de Comprimento Mínimo

4.1 Considerações Iniciais

Como discutido anteriormente, de acordo com o modelo cosmológico do Big Bang o Universo possuía dimensões desprezíveis no momento do seu surgimento, ou seja, era uma singularidade, então sofreu uma expansão extremamente rápida, a fase inflacionária. Isto implica que o Universo possui uma natureza essencialmente quântica, ao menos nas suas fases iniciais. Portanto, faz-se necessário um tratamento quântico do Universo primordial para descrever os efeitos gravitacionais.

Dentre as várias propostas de quantização da gravitação um fenômeno surge naturalmente: uma precisão mínima em que se pode obter as medidas espaciais. Sendo assim, uma teoria quântica do Universo deve levar em consideração essa máxima resolução espacial para que seja realmente satisfatória [61]. Além disso, a introdução de um comprimento mínimo na teoria permite resolver o problema da singularidade inicial.

O modelo cosmológico de De Sitter descreve a fase de expansão rápida do Universo, durante a qual a energia do vácuo domina. Seu tratamento tradicional considera um sistema sem conteúdo físico, uma vez que existe apenas um único grau de liberdade [62]. O formalismo de Schutz, que descreve uma teoria relativística para um fluido interagindo com um campo gravitacional, pode ser usado para considerar o vácuo como uma entidade dinâmica com diferentes graus de liberdade. Isto permite introduzir uma variável que desempenha o papel do tempo. Portanto, o modelo de vácuo dinâmico é um modelo de Universo homogêneo e isotrópico preenchido com um fluido de vácuo.

Sendo assim, neste capítulo serão discutidos os efeitos do vácuo dinâmico na cosmologia quântica devidos à presença do comprimento mínimo. Considerando pequenos valores do fator de escala, obtém-se a solução da equação de WDW modificada na representação da quase posição.

4.2 A Equação de WDW Modificada

Como dito anteriormente, o ponto de partida será a super-hamiltoniana (3.74), proveniente do método de Schutz ao tratar o vácuo como um fluido perfeito interagindo com o campo gravitacional. O processo de quantização que será utilizado é o mesmo que o da obtenção da equação de WDW, ou seja, o processo de quantização canônico, porém com a diferença de que a representação dos operadores será (2.68) e (2.69), obtidas em um cenário de comprimento mínimo. A quantização será realizada na abordagem do minisuperespaço, o que implica que as variáveis a serem quantizadas são somente o fator de escala e a variável "tempo", assim como os momentos canônicos associados a elas. Portanto,

$$p_a \rightarrow \hat{P}_a \quad (4.1)$$

e

$$p_T \rightarrow \hat{p}_T \equiv -i \frac{\partial}{\partial T}, \quad (4.2)$$

de forma que $H \rightarrow \hat{H}$ e, assim, a equação de WDW se escreve:

$$\hat{H}|\Psi\rangle = 0. \quad (4.3)$$

Para se ter um cenário de comprimento mínimo, se impõe que

$$[\hat{a}, \hat{P}_a] = \frac{i\hbar}{(1 - \beta \hat{P}_a^2)}, \quad (4.4)$$

com as seguintes representações para os operadores:

$$\hat{a} \equiv \hat{x} \quad (4.5)$$

e

$$\hat{P}_a \equiv \hat{p} + \frac{1}{3}\beta\hat{p}^3 + \frac{\beta^2}{3}\hat{p}^5 + \mathcal{O}(\beta^3), \quad (4.6)$$

onde os operadores \hat{x} e \hat{p} satisfazem a relação de comutação ordinária

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i. \quad (4.7)$$

Usando as representações (4.5) e (4.6) a hamiltoniana (3.74) fornece

$$\left[-\frac{\hat{x}^{(3\alpha-1)}}{24} \left[\hat{p}^2 + \frac{2}{3}\beta\hat{p}^4 + \frac{7}{9}\beta^2\hat{p}^6 + O(\beta^3) \right] - k\hat{x}^{(1+3\alpha)} + 2\hat{x}^{3(1+\alpha)}\Lambda \right] |\Psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle, \quad (4.8)$$

onde foi feita a mudança de variável $T = -t$. Agora, projetando a equação (4.8) sobre a representação formal do espaço de "posição", $|x\rangle$, tem-se que

$$\langle x|\hat{H}|\Psi\rangle = 0, \quad (4.9)$$

$$\left[-\frac{\hat{x}^{(3\alpha-1)}}{24} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\beta\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{7}{9}\beta^2\frac{\partial^6}{\partial x^6} + O(\beta^3) \right] - k\hat{x}^{(1+3\alpha)} + 2\hat{x}^{3(1+\alpha)}\Lambda \right] |\Psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(x, t)\rangle \quad (4.10)$$

onde foram usados as representações ordinárias dos operadores

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \Psi(x, t), \quad (4.11)$$

$$\langle x|\hat{x}|\Psi(t)\rangle = x\Psi(x, t) \quad (4.12)$$

e

$$\langle x|\hat{p}|\Psi(t)\rangle = -i\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.13)$$

Supondo que as soluções podem ser escritas como $\Psi(x, t) = \phi(x)\tau(t)$, encontra-se as soluções estacionárias,

$$\Psi_\omega(x, t) = e^{-i\omega t}\phi_\omega(x), \quad (4.14)$$

onde ω desempenha um papel análogo à constante cosmológica [48, 63]. A equação independente do "tempo" fica

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{3}\beta\frac{d^4}{dx^4} + \frac{7}{9}\beta^2\frac{d^6}{dx^6} + O(\beta^3) \right] \phi_\omega(x) + \left[24x^{(1-3\alpha)}\omega - 24kx^{2(1-3\alpha)} + 48\Lambda x^{4(1-\alpha)} \right] \phi_\omega = 0. \quad (4.15)$$

Por fim, considerando um Universo plano ($k = 0$), sem conteúdo de matéria e preenchido completamente por um vácuo dinâmico com equação de estado

$$p = -\rho, \quad (4.16)$$

e com $\Lambda = 0$, a equação (4.15), até a ordem β^2 , se torna ¹

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{2}{3}\beta\frac{d^4\phi}{dx^4} + \frac{7}{9}\beta^2\frac{d^6\phi}{dx^6} + 24\omega x^4\phi = 0, \quad (4.17)$$

que é a equação de WDW modificada.

4.3 Solução da Equação de WDW Modificada

Não é possível resolver a equação (4.17) analiticamente, pois não se conhecem todas as condições iniciais ou de contorno necessárias, $\phi_{x_0}^{(N)}$ para $N = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 , sendo N a ordem de derivação da função de onda que é solução da Equação de WDW modificada. Em [64] o autor resolve a Equação de WDW de quarta ordem usando o método polinomial de Sommerfeld, no entanto, a solução depende de quatro parâmetros que devem ser determinados pelas condições iniciais, as quais não são conhecidas. Como o objetivo é descrever o Universo somente nos momentos iniciais não há a necessidade de se obter uma solução analítica para uma valor qualquer do fator de escala, sendo assim, a solução proposta nesse trabalho será válida somente para pequenos valores das dimensões do Universo.

Portanto, uma forma de se contornar esse problema é considerar x pequeno, o que é bem razoável, visto que se está interessado nas soluções que descrevem o Universo em seu regime quântico e sabe-se que os efeitos quânticos se manifestam para pequenos valores do fator de escala e nas fases iniciais do Universo o fator de escala é muito pequeno.

Inicialmente, considera-se a equação (4.17) no limite $\beta = 0$, a qual é chamada de equação ordinária,

$$\frac{d^2\phi_0}{dx^2} + 24\omega x^4\phi_0 = 0. \quad (4.18)$$

Fazendo $\phi_0 = \sqrt{x}y(x)$ e a mudança de variável $\rho := \sqrt{\frac{8\omega}{3}}x^3$, a equação (4.18) se torna a equação de Bessel,

$$\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho} + \left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right]y = 0. \quad (4.19)$$

Sendo assim, a solução da equação (4.18) é dada por

¹Por uma questão de conveniência o ω será omitido na notação ϕ_ω

$$\phi_0(x) = A \sqrt{x} J_{\frac{1}{6}}(K_0 x^3) + B \sqrt{x} N_{\frac{1}{6}}(K_0 x^3) \quad (4.20)$$

onde $J_{\frac{1}{6}}$ e $N_{\frac{1}{6}}$ são as funções de Bessel e Neumann, respectivamente, de ordem $1/6$, $K_0 := \sqrt{\frac{8\omega}{3}}$ e A e B são constantes. Lembrando que

$$J_\nu(x) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N! \Gamma(N + \nu + 1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2N+\nu}, \quad (4.21)$$

é fácil ver que no limite de pequenos valores de x

$$J_{\frac{1}{6}}(K_0 x^3) \sim \sqrt{x} \quad (4.22)$$

e

$$N_{\frac{1}{6}}(K_0 x^3) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (4.23)$$

Além disso, impondo a condição que $\phi_0(0) = 0$, tem-se que $B = 0$, e a solução fica

$$\phi_0 = A \sqrt{x} J_{\frac{1}{6}}(K_0 x^3), \quad (4.24)$$

considerando somente os três primeiros termos significativos de $\phi_0(x)$ tem-se que

$$\phi_0 = C_1 x + C_2 x^7 + C_3 x^{13}. \quad (4.25)$$

É conveniente reescrever a equação acima absorvendo C_1 em uma constante de normalização, a qual será omitida pois não afeta os resultados,

$$\phi_0 = x - \frac{4}{7} \omega x^7 + \frac{8}{91} \omega^2 x^{13}. \quad (4.26)$$

Pode-se obter uma solução aproximada para (4.17), na região de x pequeno, usando $\phi_0(x)$ nos termos de $\mathcal{O}(\beta)$ e $\mathcal{O}(\beta^2)$ [65]. Assim,

$$\frac{d^4 \phi_0}{dx^4} = -480 \omega x^3 + \frac{10560}{7} \omega^2 x^9, \quad (4.27)$$

$$\frac{d^6\phi_0}{dx^6} = -2880\omega x + \frac{760320}{7}\omega^2 x^7. \quad (4.28)$$

Fazendo a seguinte aproximação $\phi \approx x$ nas equações (4.27) e (4.28) a equação (4.17) se torna [66]

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 24\omega x^4\phi + \beta \left(320\omega x^2\phi - \frac{7040}{7}\omega^2 x^8\phi \right) + \beta^2 \left(-2240\omega\phi + 591360\omega^2 x^6\phi \right) = 0 \quad (4.29)$$

Esta é uma equação perturbativa que descreve o Universo primordial em um cenário de comprimento mínimo, ou seja, válida somente para pequenos valores do fator de escala. A seguir são discutidos dois métodos de solução em que o fato de $x \rightarrow 0$ é novamente explorado.

4.3.1 1º Método de Solução

O primeiro método é baseado na série de potências. Uma vez que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário da equação (4.29) é possível encontrar uma solução em séries de potências de x do tipo

$$\phi(x) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N. \quad (4.30)$$

Substituindo (4.30) na equação (4.29) e mantendo somente os termos significativos obtém-se

$$\phi(x) = \left(x - \frac{4}{7}\omega x^7 + \frac{8}{91}\omega^2 x^{13} \right) + \beta \left(-16A\omega x^5 + \frac{5504}{385}B\omega^2 x^{11} \right) + \beta^2 \frac{1120}{3}C\omega x^3 \quad (4.31)$$

Os parâmetros A , B e C são determinados por obrigando-se (4.31) a satisfazer a equação (4.29) até a ordem desejada. Então, substituindo (4.31) em (4.29), tem-se que $A = 1$, $B = \frac{38}{43}$ e $C = \frac{3}{7}$. Assim,

$$\phi(x) = \left(x - \frac{4}{7}\omega x^7 + \frac{8}{91}\omega^2 x^{13} \right) + \beta \left(-16\omega x^5 + \frac{4864}{385}\omega^2 x^{11} \right) + \beta^2 160\omega x^3 \quad (4.32)$$

4.3.2 2º Método de Solução

O segundo método de solução, que fornece o mesmo resultado anterior, é obtido por integração. Considerando a seguinte aproximação para a equação (4.29)

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -24\omega x^4\phi_0 + \frac{2}{3}\beta\frac{d^4\phi_0}{dx^4} - \frac{7}{9}\beta^2\frac{d^6\phi_0}{dx^6}, \quad (4.33)$$

que nada mais é do que a equação (4.17). Integrando duas vezes a equação (4.33), tem-se que

$$\phi(x) = -24\omega \int dx \int dx x^4\phi_0 + \frac{2}{3}\beta\frac{d^2\phi_0}{dx^2} - \frac{7}{9}\beta^2\frac{d^4\phi_0}{dx^4} + \alpha_1 x + \alpha_2. \quad (4.34)$$

substituindo (4.26) em (4.34) obtém-se

$$\phi(x) = \alpha_2 + \alpha_1 x - \frac{4}{7}\omega x^7 + \frac{8}{91}\omega^2 x^{13} + \beta \left(-16A'\omega x^5 + \frac{64}{7}B'\omega^2 x^{11} \right) + \beta^2 \frac{1120}{3}C'\omega x^3 \quad (4.35)$$

As constantes α_1 e α_2 podem ser determinadas supondo que $\phi(x) \rightarrow \phi_0(x)$ quando $\beta \rightarrow 0$. Da mesma forma que anteriormente, os parâmetros A' , B' e C' são determinados impondo que (4.35) satisfaça a equação (4.29). Assim, novamente se obtém

$$\phi(x) = \left(x - \frac{4}{7}\omega x^7 + \frac{8}{91}\omega^2 x^{13} \right) + \beta \left(-16\omega x^5 + \frac{4864}{385}\omega^2 x^{11} \right) + \beta^2 160\omega x^3. \quad (4.36)$$

O primeiro termo entre parênteses é a solução ordinária, este termo nada mais é que a expansão da função de Bessel como pode-se constatar de (4.25). Já o segundo termo entre parênteses é a correção de primeira ordem do parâmetro do comprimento mínimo, assim como o termo restante é a correção de segunda ordem.

4.3.3 Regime de Validade

Para que a solução (4.36) seja válida, o primeiro termo desprezado de $\phi_0(x)$ deve ser bem menor que os últimos termos considerados de $O(\beta)$ e $O(\beta^2)$. De acordo com a equação (4.21) o próximo termo da equação (4.25) seria $\omega^3 x^{19}$, sendo assim, o menor termo da correção da primeira ordem do parâmetro do comprimento mínimo $\beta\omega^2 x^{11}$ deve ser muito mais significativo do que ele, ou seja,

$$\omega^3 x^{19} \ll \beta\omega^2 x^{11} \rightarrow x \ll \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^{\frac{1}{8}}. \quad (4.37)$$

Analogamente para os termos de segunda ordem do parâmetro do comprimento mínimo $\beta^2\omega x^3$:

$$\omega^3 x^{19} \ll \beta^2 \omega x^3 \rightarrow x \ll \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{8}}. \quad (4.38)$$

Uma vez que β é muito pequeno, isso reduz a região de validade da solução. Isso pode ser melhorado se termos de potência maiores em x forem considerados na solução em $O(\beta^0)$. Note que a adição de mais termos na parte em $O(\beta^0)$ não modifica a validade da solução. Então, pode-se considerar $\sqrt{x} J_{\frac{1}{6}}(k_0 x^3)$ como a parte de $O(\beta^0)$ da solução. É claro que os termos de ordem

$$\beta \omega^2 x^{11} \rightarrow x^{6N-10} < \beta \omega^{2-N}, \quad (4.39)$$

$$\omega^N x^{6N+1} < \beta^2 \omega x^3 \rightarrow x^{6N-2} < \beta^2 \omega^{1-N} \quad (4.40)$$

estão fora da região de validade e suas correções devem ser desprezadas. O mesmo raciocínio é válido para os termos de $O(\beta)$ e $O(\beta^2)$. Então, a fim de aumentar-se a região de validade da solução, consideram-se os dois primeiros termos significativos de $O(\beta)$. Assim, a região de validade fica

$$\omega^3 x^{19} \ll \beta \omega^3 x^{17} \ll \beta^2 \omega x^3 \rightarrow x \ll \left(\frac{\beta}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{14}}, \quad (4.41)$$

que é menos restritiva que (4.38) para β muito pequeno.

Por fim, diante do exposto anteriormente, a solução de maior região de validade para x é dada por ²

$$\phi(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{6}}(k_0 x^3) + \beta \left(-160 \omega x^5 + \frac{4864}{385} \omega^2 x^{11} \right) + \beta^2 16 \omega x^3. \quad (4.42)$$

Note que $\phi_\omega(x)$ são autofunções cujos autovalores associados são valores de constante cosmológica.

²A solução não está normalizada.

4.4 Soluções Fisicamente Aceitáveis

Não se pode obter diretamente de $\phi(x)$ resultados físicos, pois os autoestados do operador posição \hat{x} não pertencem ao espaço de Hilbert, em um cenário de comprimento mínimo. No entanto, as projeções do vetor de estado $|\phi\rangle$ sobre os vetores de estado de máxima localização, isto é, as funções de onda na representação do espaço de quase posição o são. As funções de onda na representação de quase posição podem ser facilmente obtidas de (4.42) lembrando que

$$\phi_{qp}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\phi \left(\xi + \frac{3\pi}{4} \sqrt{\beta} \right) + \phi \left(\xi - \frac{3\pi}{4} \sqrt{\beta} \right) \right]. \quad (4.43)$$

Assim, substituindo (4.42) em (4.43) ou usando que

$$\phi_{qp}(\xi) = \phi_0(\xi) + \beta \left(\phi_1 + \frac{\phi_0''}{2} b^2 \right) + \beta^2 \left(\phi_2 + \frac{b^2}{2} \phi_1'' + \frac{b^4}{4!} \phi_0'''' \right), \quad (4.44)$$

onde

$$\phi_1 = -16\omega x^5 + \frac{4864}{385} \omega^2 x^{11}, \quad (4.45)$$

$$\phi_2 = 16\omega x^3 \quad (4.46)$$

e

$$b = \frac{3\pi}{4}, \quad (4.47)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \phi_{qp}(\xi) = & \sqrt{\xi} J_{\frac{1}{6}}(K_0 \xi^3) + \beta \left[-(16 + 12b^2)\omega \xi^5 + \left(\frac{4864}{385} + \frac{48}{7} b^2 \right) \omega^2 \xi^{11} \right] + \\ & + \beta^2 (160 - 160b^2 - 20b^4) \omega \xi^3. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Pode-se questionar se o correto não seria determinar a solução da equação de WDW modificada no espaço de quaseposição,

$$\langle \Psi_{\xi}^{ML} | (-\hat{p}_a^2 + 24\omega \hat{a}^4) | \phi \rangle = 0. \quad (4.49)$$

Usando (2.83) e (2.84) na equação acima, se obtém:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\phi_{qp}}{d\xi^2} + 24\omega\xi^4\phi_{qp} + \beta b^2 \left[-\frac{2}{3b^2} \frac{d^4\phi_{qp}}{d\xi^4} + 144\omega\xi^2\phi_{qp} + 96\omega\xi^3 \frac{d\phi_{qp}}{d\xi} \right] + \\ & + \beta^2 b^4 \left[\frac{7}{9b^4} \frac{d^6\phi_{qp}}{d\xi^6} + 24\omega\phi_{qp} + 96\omega\xi \frac{d\phi_{qp}}{d\xi} - 24\omega\xi^2 \frac{d^2\phi_{qp}}{d\xi^2} - 40\omega\xi^3 \frac{d^3\phi_{qp}}{d\xi^3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Como pode ser facilmente verificado, a solução (4.48) realmente satisfaz a equação (4.50) até a ordem de validade considerada. A função de onda (4.48) descreve um modelo cosmológico de De Sitter preenchido por um fluido perfeito que desempenha o papel do vácuo. Esta função de onda que fornecerá informações físicas como a probabilidade de se ter o Universo em determinado estado. Além disso, pode-se questionar qual seria o significado físico de uma incerteza Δx calculada nestes estados.

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi determinar as correções na função de onda do Universo devido à presença de um comprimento mínimo não nulo $\Delta x_0 > 0$ usando um GUP específico no modelo cosmológico de vácuo dinâmico. Para isso, foi necessário reformular alguns conceitos da mecânica quântica ordinária, para que ela fosse consistente com essa proposta.

A reformulação da mecânica quântica em um contexto de comprimento mínimo é feito a partir da relação de incerteza. No Capítulo 2, foram introduzidos os principais conceitos e resultados da já consagrada mecânica quântica ordinária, como por exemplo, o limite na precisão dos valores medidos associados a dois operadores não compatíveis. Esta impossibilidade foi traduzida no princípio de Heisenberg, o qual, apesar de limitar o conhecimento simultâneo de dois operadores não limita o quão preciso se pode ter a medida de um em detrimento do outro. Foram apresentadas diferentes propostas de GUPs, que modificam o princípio de incerteza, de forma a tornar a mecânica quântica ordinária consistente com o comprimento mínimo. Dentre essas, a utilizada neste trabalho foi do seguinte tipo: $[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i\hbar}{1+\beta\hat{p}^2}$, defendida por Pedram, pois diferentemente de outras propostas ela não é perturbativa, além de implicar um valor máximo do momento observado. A partir daí, desenvolveu-se a álgebra modificada, de acordo com esta proposta, chegando-se à representação dos operadores, assim como à função de onda que descreve os estados de máxima localização.

Alguns trabalhos têm utilizado a álgebra modificada da mecânica quântica para rever resultados ordinários e analisado quais as consequências deles em um contexto de comprimento mínimo, por exemplo [67] e [68], que antecederam este trabalho. Nessas referências estudam-se as consequências da existência de um comprimento mínimo em um potencial delta de Dirac e um potencial infinito, respectivamente.

No entanto, o objetivo aqui sendo a descrição quântica de um Universo primordial, no Capítulo 3 foi feita uma breve revisão dos conceitos de cosmologia quântica ordinária. Partindo da relatividade geral mostrou-se que, quando se considera um universo homogêneo e isotrópico, ela fornece as equações de Friedmann que descrevem a evolução desse modelo

de universo. Ao aplicar o processo de quantização canônico às equações de Friedmann, em que associou-se o único grau de liberdade - o fator de escala - aos seus operadores $p_a \rightarrow \hat{p}_a \equiv -i\frac{\partial}{\partial a}$ e $a \rightarrow \hat{a} \equiv a$ obteve-se a equação de WDW, cuja solução é a função de onda do Universo. O modelo cosmológico de De Sitter descreve a fase de expansão rápida do Universo, durante a qual a energia de vácuo domina. Em seu tratamento tradicional considera-se um sistema sem conteúdo físico, uma vez que há um único grau de liberdade e uma restrição. O formalismo de Schutz, que descreve um fluido relativístico interagindo com um campo gravitacional, foi usado para tratar o vácuo como uma entidade dinâmica, dotada de diferentes graus de liberdade. Além disso, este processo permitiu a introdução de uma variável que desempenha o papel do tempo.

O modelo de vácuo dinâmico é um modelo de Universo homogêneo e isotrópico, preenchido com fluido de vácuo cuja equação de estado é $p = -\rho$, classicamente tratado de acordo com o formalismo canônico de Schutz. Este processo produz uma Hamiltoniana linear em relação ao momento conjugado de uma variável que desempenhou o papel do tempo. Em geral, evitando os problemas causados pela equação de WDW, que é definida em todo o superespaço, o processo de quantização ocorreu no mini-superespaço, onde infinitos graus de liberdade do campo gravitacional são congelados e os graus de liberdade restantes aos quais são associados operadores. Como o GUP corresponde a uma relação de comutação modificada, a equação de WDW em um cenário de comprimento mínimo pôde ser obtida impondo que alguns ou todos esses operadores (que surgem da quantização dos graus de liberdade restantes na abordagem do mini-superespaço) e os seus operadores dos momentos conjugados satisfaçam a relação de comutação.

E finalmente, no Capítulo 4, aplicou-se o método de quantização canônica modificado na hamiltoniana do método de Schutz para se obter uma equação cuja solução descreve um Universo em um cenário de comprimento mínimo. Chegou-se a uma equação diferencial de sexta ordem. Como não se conheciam todas as condições de contorno, não foi possível obter uma solução analítica. No entanto, como o interesse na solução é somente para o Universo primordial, ou seja, para pequenos valores do fator de escala, pois supõe-se que seja nessa escala que o comprimento mínimo se manifestaria, foi utilizado um método aproximativo para se obter a função de onda a partir da solução da equação de WDW ordinária.

Achou-se então a função de onda do Universo para pequenos valores do fator de escala, na representação formal da posição, ou melhor, do "fator de escala". Não é possível obter qualquer informação física da função de onda uma vez que os auto estados do operador posição não são estados físicos. Esse problema foi solucionado obtendo-se a função de onda na representação da quase posição como uma superposição das funções de onda na representação da posição. Ciente de que esta abordagem poderia gerar questionamento, achou-se a equação de WDW na representação da quase posição e mostrou-se que a função de onda no espaço de quase posição obtida anteriormente é solução da equação, como era de se esperar. Deve-se mencionar que o processo de quantização ocorre no mini-superespaço no qual o fator de escala é o único grau de liberdade

Como proposta de trabalho futuro, pretende-se realizar a aplicação da função de

onda em um cenário de comprimento mínimo encontrada e compará-la com os resultados ordinários, observando se os termos de correção se manifestam de forma significativa e até mesmo se é possível verificar essa manifestação em dados observacionais. Outra proposta, seria fazer um processo de quantização ainda mais geral: se o GUP é um aspecto fundamental da natureza, não somente os operadores posição e momento devem satisfazê-lo mas qualquer outra variável que seja quantizada. Sendo assim, outra proposta de trabalho seria considerar uma discretização não só do espaço, mas também do tempo, como defendido por alguns autores [69,70].

Referências Bibliográficas

- [1] Einstein, A. *et al.* On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik* **17**, 891–921 (1905).
- [2] Einstein, A. Erklärung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., vol. 47, No. 2, pp. 831-839, 1915* **47**, 831–839 (1915).
- [3] d’Inverno, R. A. *Introducing Einstein’s relativity* (Clarendon Press, 1992).
- [4] Carrol, S. An introduction to general relativity. *Spacetime and Geometry (Pearson-Benjamin Cummings, San Francisco)* (2003).
- [5] Wald, R. M. *General relativity* (University of Chicago press, 2010).
- [6] Maggiore, M. A generalized uncertainty principle in quantum gravity. *Physics Letters B* **304**, 65–69 (1993).
- [7] Scardigli, F. Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment. *Physics Letters B* **452**, 39–44 (1999).
- [8] Mead, C. A. Possible connection between gravitation and fundamental length. *Physical Review* **135**, B849 (1964).
- [9] Veneziano, G. A stringy nature needs just two constants. *EPL (Europhysics Letters)* **2**, 199 (1986).
- [10] Hořava, P. & Witten, E. Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions. *Nuclear Physics B* **460**, 506–524 (1996).
- [11] Amati, D., Ciafaloni, M. & Veneziano, G. Can spacetime be probed below the string size? *Physics Letters B* **216**, 41–47 (1989).
- [12] Konishi, K., Paffuti, G. & Provero, P. Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory. *Physics Letters B* **234**, 276–284 (1990).
- [13] Garay, L. J. Quantum gravity and minimum length. *International Journal of Modern Physics A* **10**, 145–165 (1995).

- [14] Pedram, P. A higher order gup with minimal length uncertainty and maximal momentum. *Physics Letters B* **714**, 317–323 (2012).
- [15] Pedram, P. A higher order gup with minimal length uncertainty and maximal momentum: Applications. *Physics Letters B* **718**, 638–645 (2012).
- [16] Hinrichsen, H. & Kempf, A. Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta. *Journal of Mathematical Physics* **37**, 2121–2137 (1996).
- [17] Nouicer, K. Quantum-corrected black hole thermodynamics to all orders in the planck length. *Physics Letters B* **646**, 63–71 (2007).
- [18] Ali, A. F., Das, S. & Vagenas, E. C. Discreteness of space from the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B* **678**, 497–499 (2009).
- [19] Nozari, K. & Etemadi, A. Minimal length, maximal momentum, and hilbert space representation of quantum mechanics. *Physical Review D* **85**, 104029 (2012).
- [20] Kempf, A. Non-pointlike particles in harmonic oscillators. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **30**, 2093 (1997).
- [21] Kempf, A., Mangano, G. & Mann, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D* **52**, 1108 (1995).
- [22] Dorsch, G. C. & Nogueira, J. A. Maximally localized states in quantum mechanics with a modified commutation relation to all orders. *International Journal of Modern Physics A* **27**, 1250113 (2012).
- [23] Sakurai, J. J., Napolitano, J. *et al.* *Modern quantum mechanics*, vol. 185 (Pearson Harlow, 2014).
- [24] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F. *Quantum mechanics* (John Wiley & Sons, 1977).
- [25] Dirac, P. A. M. *The principles of quantum mechanics* (Oxford university press, 1981).
- [26] Zettili, N. *Quantum mechanics: concepts and applications* (American Association of Physics Teachers, 2003).
- [27] Kempf, A. & Mangano, G. Minimal length uncertainty relation and ultraviolet regularization. *Physical Review D* **55**, 7909 (1997).
- [28] Kempf, A. Quantum groups and quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta. *Czechoslovak Journal of Physics* **44**, 1041–1048 (1994).
- [29] Kempf, A. Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. *Journal of Mathematical Physics* **35**, 4483–4496 (1994).

- [30] Nouicer, K. An exact solution of the one-dimensional dirac oscillator in the presence of minimal lengths. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39**, 5125 (2006).
- [31] Haouat, S. & Nouicer, K. Influence of a minimal length on the creation of scalar particles. *Physical Review D* **89**, 105030 (2014).
- [32] Nouicer, K. & Debbabi, M. Canonical quantization of non-anticommutative scalar field theory. *Physics Letters A* **361**, 305–315 (2007).
- [33] Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E., Jeffrey, D. J. & Knuth, D. E. On the Lambert function. *Advances in Computational mathematics* **5**, 329–359 (1996).
- [34] Das, S., Vagenas, E. C. & Ali, A. F. Discreteness of space from gup: relativistic wave equations. *Physics Letters B* **690**, 407–412 (2010).
- [35] Ali, A. F., Das, S. & Vagenas, E. C. Proposal for testing quantum gravity in the lab. *Physical Review D* **84**, 044013 (2011).
- [36] Berestetskii, V. B., Lifshitz, E. M. & Pitaevskii, L. P. *Quantum electrodynamics*, vol. 4 (Butterworth-Heinemann, 1982).
- [37] Dodelson, S. & Schmidt, F. *Modern cosmology* (Academic press, 2020).
- [38] Weinberg, S. *et al. Cosmology* (Oxford university press, 2008).
- [39] Atkatz, D. Quantum cosmology for pedestrians. *American Journal of Physics* **62**, 619–627 (1994).
- [40] Friedman, A. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik* **10**, 377–386 (1922).
- [41] Mukhanov, V. *Physical foundations of cosmology* (Cambridge university press, 2005).
- [42] Atkatz, D. & Pagels, H. Origin of the universe as a quantum tunneling event. *Physical Review D* **25**, 2065 (1982).
- [43] Guth, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D* **23**, 347 (1981).
- [44] DeWitt, B. S. Quantum theory of gravity the canonical theory. *Physical Review* **160**, 1113 (1967).
- [45] Hartle, J. B. & Hawking, S. W. Wave function of the universe. *Physical Review D* **28**, 2960 (1983).
- [46] Vilenkin, A. Boundary conditions in quantum cosmology. *Physical Review D* **33**, 3560 (1986).
- [47] Vakili, B. Scalar field quantum cosmology: Schrödinger picture. *Physics Letters B* **718**, 34–42 (2012).

- [48] Alvarenga, F. G. & Lemos, N. A. Dynamical vacuum in quantum cosmology. *General Relativity and Gravitation* **30**, 681–694 (1998).
- [49] Alvarenga, F., Fracalossi, R., Furtado, R. & Gonçalves, S. Dynamics of a perfect fluid through velocity potentials with application in quantum cosmology. *Brazilian Journal of Physics* **47**, 96–105 (2017).
- [50] Alvarenga, F. G., Fabris, J. C., Lemos, N. & Monerat, G. Quantum cosmological perfect fluid models. *General Relativity and Gravitation* **34**, 651–663 (2002).
- [51] Schutz Jr, B. F. Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid. *Physical Review D* **4**, 3559 (1971).
- [52] Pedram, P., Jalalzadeh, S. & Gousheh, S. Stephani-Schutz quantum cosmology. *Physics Letters B* **655**, 91–96 (2007).
- [53] Lemos, N. A. *Mecânica analítica* (Editora Livraria da Física, 2007).
- [54] Schutz Jr, B. F. Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle. *Physical Review D* **2**, 2762 (1970).
- [55] Abbott, B. P. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters* **116**, 061102 (2016).
- [56] Neto, N. P. *Teorias e interpretações da mecânica quântica* (Editora Livraria da Física, 2010).
- [57] Ashoorioon, A., Kempf, A. & Mann, R. B. Minimum length cutoff in inflation and uniqueness of the action. *Physical Review D* **71**, 023503 (2005).
- [58] Tawfik, A. N. & Diab, A. M. Generalized uncertainty principle and recent cosmic inflation observations. *arXiv preprint arXiv:1410.7966* (2014).
- [59] Pedram, P. Squeezed wave packets in quantum cosmology. *International Journal of Theoretical Physics* **49**, 2910–2917 (2010).
- [60] Ghosh, S., Gangopadhyay, S. & Panigrahi, P. K. Scalar-metric quantum cosmology with chaplygin gas and perfect fluid. *The European Physical Journal C* **78**, 41 (2018).
- [61] Hossenfelder, S. Comments, replies and notes: A note on theories with a minimal length. *Classical and Quantum Gravity* **23**, 1815–1821 (2006).
- [62] Vilenkin, A. Approaches to quantum cosmology. *Physical Review D* **50**, 2581 (1994).
- [63] Fil’Chenkov, M. The pre-de-sitter universe in terms of quantum mechanics. *Physics Letters B* **354**, 208–212 (1995).
- [64] Kober, M. Generalized quantization principle in canonical quantum gravity and application to quantum cosmology. *International Journal of Modern Physics A* **27**, 1250106 (2012).

- [65] Majumder, B. Effects of GUP in quantum cosmological perfect fluid models. *Physics Letters B* **699**, 315–319 (2011).
- [66] Vakili, B. Cosmology with minimal length uncertainty relations. *International Journal of Modern Physics D* **18**, 1059–1071 (2009).
- [67] Gusson, M. *et al.* Dirac delta-function potential in quasiposition representation of a minimal-length scenario. *The European Physical Journal C* **78**, 1–7 (2018).
- [68] Gonçalves, A. O. O. *et al.* An infinite square-well potential as a limiting case of a square-well potential in a minimal-length scenario. *International Journal of Modern Physics A* 2050069 (2020).
- [69] Yang, C. N. On quantized space-time. *Physical Review* **72**, 874 (1947).
- [70] Farias, R. H. & Recami, E. Introduction of a quantum of time (“chronon”), and its consequences for the electron in quantum and classical physics. In *Advances in Imaging and Electron Physics*, vol. 163, 33–115 (Elsevier, 2010).