UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ester Félix Batista

Atratores Globais Pré-compactos Para Sistemas Dinâmicos Impulsivos

VITÓRIA

2021

Ester Félix Batista

Atratores Globais Pré-compactos Para Sistemas Dinâmicos Impulsivos

Dissertação de mestrado apresentada ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Profª Drª Daniela Paula Demuner

VITÓRIA
2021

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais e minha irmã, por tanto amor e carinho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela saúde, por esta porta que ele abriu na minha vida, por ser a minha força e esperança, por seu inexplicável amor.

Agradeço aos meus pais Edilma e José Ricardo por todo apoio, incentivo, amor, orações, por me ensinarem valores preciosos, por acreditarem em mim, sou muito feliz e grata pelo privilégio de ser sua filha.

Agradeço a minha irmã e melhor amiga Raquel, pela amizade, cumplicidade e confiança.

Agradeço aos professores que conheci, todos contribuíram e influenciaram minha formação, tenho uma enorme admiração e gratidão a todos.

Agradeço a minha orientadora, professora Daniela, por ter aceito me orientar, por tamanha dedicação, paciência, por cada ensinamento e apoio que foram essenciais para este trabalho.

Agradeço a todos os servidores desta universidade, especialmente a Edilane que desde o primeiro dia em que pisei no campus sempre teve um conselho e palavra de incentivo, obrigada por toda ajuda.

Agradeço aos meus colegas do PPGMAT pelo companheirismo e valiosas trocas de aprendizado.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos. Introduzimos inicialmente a teoria básica de semigrupos, que são processos de evolução contínuos, e suas propriedades buscando condições para garantir a existência de atrator global. Apresentamos os sistemas dinâmicos impulsivos que estudam o comportamento de processos de evolução que sofrem variações de estado de curta duração, que podem ser consideradas instantâneas. Exibimos a definição de atrator global pré-compacto para sistemas dinâmicos impulsivos e apresentamos resultados que garantem a semicontinuidade superior e inferior de atratores globais para uma família de sistemas dinâmicos impulsivos.

Palavras-chave: semigrupos, sistemas dinâmicos impulsivos, atratores globais, semicontinuidade superior, semicontinuidade inferior.

Abstract

The present research studies the existence of global attractors for impulsive dynamical systems. It introduces initially the basic theory of semigroups, which are continuous evolutionary processes, and their properties searching for conditions to ensure the global attractor existence. It presents the impulsive dynamical systems that studies the behavior of the evolution process that undergo state variations of short duration, which can be considered instantaneous. It exhibits the definition of precompact global attractor for impulsive dynamical systems and presents results that ensure the upper and lower semicontinuity of global attractors for a family of impulsive dynamical systems.

Key-words: semigroups, impulsive dynamical systems, global attractors, upper semicontinuity, lower semicontinuity.

Sumário

Introdução

Na modelagem matemática a teoria de sistemas dinâmicos é uma ferramenta que compreende a evolução de um fenômeno com o passar do tempo e suas propriedades locais e globais. Mais especificamente, os sistemas dinâmicos são constituídos de um conjunto de variáveis que representa quantidades físicas (como a posição de um objeto no espaço, temperatura, velocidade, etc), e um conjunto de regras que calculam a evolução das variáveis ao longo do tempo. Neste trabalho estaremos interessados em estudar os sistemas dinâmicos cujas regras de evolução não dependem explicitamente dos instantes inicial e final, mas sim do tempo decorrido, tais sistemas são chamados de sistemas dinâmicos autônomos ou semigrupos.

Entretanto, existem problemas do mundo real onde a evolução contínua pode sofrer variações, isto é, uma força externa (impulsos) que altera seu comportamento. Neste cenário, sistemas dinâmicos impulsivos descrevem processos de evolução que sofrem variações de estado. Essas perturbações geralmente ocorrem em um intervalo muito curto, por isso é natural considerarmos que são mudanças instantâneas. Um exemplo desse tipo de problema, apresentado em [8], é a injeção de insulina que muda o estado de nível de glicose nos pacientes, e que através do estudo da dinâmica de concentração de glicose no sangue é possível identificar a melhor estratégia de injeção de insulina para o tratamento do paciente.

Dentre os sistemas dinâmicos contínuos, assim como no caso descontínuo, aparecem aqueles cujos modelos são descritos por soluções de equações diferenciais, detalhes sobre a teoria de equações diferenciais impulsivas podem ser encontrados em [7]. Neste trabalho trataremos de impulsos que ocorrem devido a condições no espaço de fase e não no tempo, ou seja, considerando que exista um conjunto, chamado impulsivo, no espaço de fase e uma função que são responsáveis pelas descontinuidades.

Uma das principais ferramentas para entender melhor o comportamento de um sistema, e portanto o fenômeno físico modelado, é o que chamamos de atrator que são conjuntos, satisfazendo algumas propriedades, para onde as trajetórias se aproximam ao longo do tempo. Como nem sempre é possível conhecer a lei que descreve os fenômenos, analisar se as trajetórias tendem para um certo conjunto (existência de atratores) e conhecer as propriedades desse conjunto são boas maneiras de se compreender seu comportamento assintótico. Apresentaremos a existência de atrator global pré-compacto para sistemas dinâmicos impulsivos, uma vez que é uma abordagem mais eficaz na análise do comportamento assintótico próximo ao conjunto impulsivo.

Ao modelarmos um problema real é natural realizarmos aproximações, daí surgem algumas questões: Nossos modelos ainda se aproximam da realidade? Podemos garantir que as propriedades obtidas para o modelo matemático se aplicam ao problema real? Os atratores globais estão próximos do atrator global do sistema inicial? As respostas para tais questões não são triviais e em geral estão divididas na literatura sob quatro aspectos: semicontinuidade superior, semicontinuidade inferior, estabilidade topológica e estabilidade geométrica. Estudaremos apenas a semicontinuidade superior e inferior dos atratores apresentada em [3]. Veremos que a semicontinuidade superior é obtida com hipóteses simples e a semicontinuidade inferior já não é tão simples, apesar de ter definição muito semelhante à superior.

Nosso objetivo neste trabalho é estabelecer condições para garantir a existência de um atrator global pré-compacto para um sistema dinâmico impulsivo e desenvolver a teoria de semicontinuidade superior e inferior de uma família de atratores globais associados a sistemas dinâmicos impulsivos. Nossas principais referências foram [1] e [3]. Para isso, no Capítulo 1 apresentamos algumas notações e resultados preliminares.

O Capítulo 2 é dedicado a teoria elementar de semigrupos e atratores globais. Nele apresentamos conceito básicos, como conjunto limite e suas propriedades e apresentamos condições que garantem a existência de atrator global para o caso contínuo.

No Capítulo 3, introduzimos o conceito de sistemas dinâmicos impulsivos, definimos a função ϕ que determina o menor tempo positivo para o qual a trajetória impulsiva encontra o conjunto impulsivo e, por fim, um estudo sobre os conjuntos limite impulsivos.

No Capítulo 4 apresentamos condições de existência de atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos. E no capítulo 5 analisamos a semicontinuidadede superior e inferior de uma família de atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos necessários no decorrer do trabalho. Na Seção 1.1 estabelecemos as notações utilizadas ao longo do texto e na Seção 1.2 recordamos alguns resultados que serão úteis posteriormente.

1.1 Notação

Representamos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos. Também consideramos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números naturais, $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Z}_+$ os inteiros não negativos. O espaço euclidiano n-dimensional é denotado por $\mathbb{R}^n$.

Indicaremos por $X = (X, d)$ um espaço métrico X com métrica $d : X \times X \to [0, +\infty)$ para todo o texto, a menos que dito o contrário. Dados $\epsilon > 0$, $x \in X$ e A subconjunto não vazio de X, denotamos

- $\inf A$ representa o ínfimo do conjunto A que é a maior das cotas inferiores de A. Isto equivale às seguintes condições:
  - $\inf A \leq x$ para todo $x \in A$;
  - Se $c \in X$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in A$ então $c \leq \inf A$.
- $\sup A$ representa o supremo do conjunto A que é a menor das cotas superiores de A. Então cumpre as condições:
  - $\sup A \geq x$ para todo $x \in A$;

- Se $c \in X$ é tal que $c \geq x$ para todo $x \in X$ então $c \geq \sup A$.

- $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$;
- $B(x; \epsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$;
- $B(A; \epsilon) = \{y \in X : d(y, A) < \epsilon\}$;
- $\overline{A}$ representa o fecho do conjunto A.

Um subconjunto K de um espaço métrico X chama-se pré-compacto ou relativamente compacto, quando seu fecho $\overline{K}$ é compacto. Isto significa que toda sequência de ponto em K possui uma subsequência convergente em X.

Vamos representar uma sequência em X por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e o limite de uma sequência por $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ ou $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

1.2 Resultados Auxiliares

Apresentamos nessa seção algumas definições e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Mais detalhes são encontrados nas referências [9] e [10].

Proposição 1.1. *Para todo $x \in X$ e $A \subset X$ não vazio, tem-se $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.*

Demonstração. Sabendo que $A \subset \overline{A}$, temos $d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$. Agora, suponha que $d(x, \overline{A}) < d(x, A)$. Seja $m > 0$ tal que $d(x, \overline{A}) < m < d(x, A)$. Uma vez que $d(x, \overline{A}) = \inf\limits_{a\in\overline{A}} d(x, a)$, então existe $\overline{x} \in \overline{A}$ tal que $d(x, \overline{x}) < m$. Como $\overline{x} \in \overline{A}$, segue que $d(\overline{x}, A) = 0 < m - d(x, \overline{x})$. Daí, existe $y \in A$ tal que $d(y, \overline{x}) < m - d(x, \overline{x})$. Assim,

$$d(x, A) \leq d(x, y) \leq d(x, \overline{x}) + d(\overline{x}, y) < d(x, \overline{x}) + m - d(x, \overline{x}) = m,$$

o que é uma contradição. Portanto, $d(x, A) = d(x, \overline{A})$. □

Em certos contextos é conveniente introduzir conceitos que nos permitem analisar o comportamento assintótico de certos objetos a partir de uma perspectiva mais ampla, como é o caso de sequências de números reais. Para tanto, introduzimos o conceito da **reta estendida** que é a reta real usual $\mathbb{R}$ acrescida dos objetos $+\infty$ e $-\infty$ que denotamos por

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

A relação de ordem em $\overline{\mathbb{R}}$ é dada pela ordem usual em $\mathbb{R}$ e $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$, tomamos o conjunto

$$E = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ para alguma subsequência } \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\},$$

isto é, E é o conjunto de todos os valores de aderência da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \inf E \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to+\infty} x_n = \sup E.$$

Desse modo, uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Observe que se quisermos negar que $\liminf_{n\to+\infty} x_n = x$, por exemplo, digamos que $\liminf_{n\to+\infty} x_n < x$, como $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ é o $\inf E$ deve existir $y \in E$ tal que $y < x$. Então significa que existe subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que $x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y < x$.

Ao longo deste trabalho iremos considerar a reta estendida mas, para simplificar, escrevemos apenas $\mathbb{R}$.

Definição 1.2. *Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é* ***semicontínua superiormente em um ponto*** *$a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x, a) < \delta$ então $f(x) < f(a) + \epsilon$. E dizemos que f é* ***semicontínua superiormente*** *em X se o for para ponto $a \in X$. Analogamente, dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é* ***semicontínua inferiormente em um ponto*** *$a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x, a) < \delta$ então $f(x) > f(a) - \epsilon$.*

Em termos de sequências, f é semicontínua superiormente em $a \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ tivermos $\limsup_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(a)$. De forma análoga, f é uma função semicontínua inferiormente em $a \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ tivermos $\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(a)$. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, ela for semicontínua inferiormente e superiormente no ponto a.

Lema 1.3. *Sejam K um subconjunto não vazio e compacto de X e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tais que $d(x_n, K) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em K.*

Demonstração. Consideremos uma subsequência $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $x_{n_m} \in B(K; \frac{1}{m})$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, existe $y_m \in K$ de modo que $d(x_{n_m}, y_m) = d(x_{n_m}, K) < \frac{1}{m}$. Dessa forma, obtemos uma sequência $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ e podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $y_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} y_0$, para algum $y_0 \in K$. Com isso,

$$d(x_{n_m}, y_0) \leq d(x_{n_m}, y_m) + d(y_m, y_0) < \frac{1}{m} + d(y_m, y_0) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então $x_{n_m} \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} y_0$, ou seja, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente com limite em K. $\square$

Capítulo

2

Semigrupos

2.1 Definição de Semigrupo

Neste capítulo apresentamos conceitos básicos da teoria de semigrupo buscando caracterizar semigrupos que têm atrator global. Destacamos algumas definições e resultados que serão importantes para estudar atratores globais para sistemas dinâmicos com impulsos. As referências utilizadas para este capítulo foram [5] e [11].

Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico com métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Definição 2.1. *Um **semigrupo** em X é uma família $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ de aplicações contínuas $\pi(t) : X \to X$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\pi(0)x = x$ *para todo* $x \in X$*, isto é,* $\pi(0)$ *é a Aplicação Identidade do espaço* X*;*

ii) $\pi(t+s) = \pi(t) \circ \pi(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$*;* (propriedade de semigrupo)

iii) *A aplicação* $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto \pi(t)x \in X$ *é uma aplicação contínua.*

Os semigrupos são também chamados de **sistemas dinâmicos autônomos**. Para simplificar a notação, denotaremos a composição $\pi(t) \circ \pi(s)$ apenas por $\pi(t)\pi(s)$. Se $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em que para cada $t \geq 0$ a aplicação $\pi(t) : X \to X$ é um homeomorfismo, então definimos, para cada $t < 0$, $\pi(t) := \pi(-t)^{-1} : X \to X$. Assim obtemos uma nova família de aplicações contínuas $\{\pi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ chamada de **grupo** em X.

Vejamos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 2.2. Seja $X = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : [\,0, +\infty\,) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto (t + x_1, ..., t + x_n)\,, \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Vemos facilmente que a aplicação π é contínua e que $\pi(0)\,x = (0 + x_1, ..., 0 + x_n) = x$. Além disso, para todo $t, s \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned} \pi(t+s)\,x &= ((t+s) + x_1, ..., (t+s) + x_n) \\ &= (t + (s + x_1)\,, ..., t + (s + x_n)) \\ &= \pi(t)\,(s + x_1, ..., s + x_n) \\ &= \pi(t)\,\pi(s)\,x. \end{aligned}$$

Então, a aplicação π define um semigrupo em $\mathbb{R}^n$. Note que se considerarmos $\mathbb{R}$ ao invés de $\mathbb{R}_+$ teremos um grupo em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.3. Considere o problema de valor inicial (PVI) oriundo da equação diferencial autônoma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1. Consideremos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ a Equação (2.1) possui uma única solução $\varphi(t, x)$ em $\mathbb{R}_+$ satisfazendo $\varphi(0, x) = x$. Definindo $\pi(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\pi(t)\,x = \varphi(t, x)$, podemos afirmar que $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, $\pi(0)x = \varphi(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e dados $t, s \in \mathbb{R}_+$ temos

$$\pi(t)\pi(s)x = \varphi(t, \pi(s)x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) \;\text{ e }\; \pi(t+s)x = \varphi(t+s, x).$$

Note que $\varphi_1(t) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ e $\varphi_2(t) = \varphi(t+s, x)$ são soluções do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = \varphi(s, x). \end{cases}$$

Logo, pela unicidade de soluções,

$$\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t+s, x)\,.$$

Isso mostra que $\pi(t)\pi(s)x = \pi(t+s)x$ para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$. Além disso, a aplicação $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto \pi(t)\,x \in X$ é contínua.

Se considerarmos uma equação diferencial não-autônoma e o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\varphi(t,0,x_0)$ é a única solução do PVI (2.2) satisfazendo $\varphi(0,0,x_0) = x_0$, de modo análogo ao exemplo anterior, obtemos um semigrupo em $\mathbb{R}^n$.

Para cada $x \in X$ a aplicação contínua $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto \pi(t)\,x \in X$ induz uma aplicação contínua $\pi_x : \mathbb{R}_+ \to X$ definida por $\pi_x(t) = \pi(t)\,x$. Também, para cada $t \in \mathbb{R}_+$ temos uma aplicação contínua $\pi_t : X \to X$ dada por $\pi_t(x) = \pi(t)\,x$.

Definição 2.4. *Seja $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X. Para cada $x \in X$, dizemos que a aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \pi_x : \mathbb{R}_+ &\to X \\ t &\mapsto \pi(t)x, \end{aligned}$$

*é a **trajetória de $\boldsymbol{\pi}$ através de $\boldsymbol{x}$**.*

Dados $x \in X$, B um subconjunto de X e $\tau \geq 0$, definimos os conjuntos

$$\gamma^+(x) = \{\pi(t)\,x : t \geq 0\} \text{ a } \textbf{semi-órbita positiva de } \boldsymbol{x},$$

$$\gamma^+(B) = \{\pi(t)\,x : t \geq 0 \text{ e } x \in B\} \text{ a } \textbf{semi-órbita positiva de } \boldsymbol{B},$$

$$\gamma^+_\tau(B) = \{\pi(t)\,x : x \in B \text{ e } t \geq \tau\} \text{ a } \textbf{semi-órbita positiva à direita de } \boldsymbol{\tau}.$$

A noção de órbita é um ingrediente necessário para definir o conjunto ω-limite e demonstrar suas propriedades, como veremos na próxima seção.

Adiante denotaremos o semigrupo $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ simplesmente por $\pi(\cdot)$. Exibiremos algumas notações e definições necessários para definir o atrator global de um semigrupo.

Dados $t \geq 0$, $A \subset X$ e $J \subset \mathbb{R}_+$, denotamos

$$\pi(t)A = \{\pi(t)x : x \in A\} \quad \text{e} \quad \pi(J)A = \bigcup_{t \in J} \pi(t)A.$$

Definição 2.5. *Considere $\pi(\cdot)$ um semigrupo em X e seja $A \subset X$ um subconjunto não vazio. Dizemos que A é*

i) ***positivamente π-invariante****, se $\pi(t)A \subset A$ para todo $t \geq 0$;*

ii) ***negativamente π-invariante****, se $\pi(t)A \supset A$ para todo $t \geq 0$;*

iii) ***π-invariante****, quando $\pi(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.*

Eventualmente substituímos a expressão π-invariante por invariante nas definições acima, apenas quando não houver confusão.

Observação 2.6. *Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos invariantes de X pelo semigrupo $\pi(\cdot)$, então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é invariante. De fato, para todo $t \geq 0$ e $\lambda \in L$ temos $\pi(t) A_\lambda = A_\lambda$, logo*

$$\pi(t) A = \bigcup_{\lambda \in L} \pi(t) A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A.$$

Definição 2.7. *Dizemos que uma aplicação $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma* ***solução global*** *para o semigrupo $\pi(\cdot)$, quando para todo $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$,*

$$\pi(t)\xi(\tau) = \xi(t+\tau).$$

Se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global a sua imagem, denotada por $\gamma(\xi) = \{\xi(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}$, é dita **órbita global** de ξ ou a **órbita** de ξ. Quando $\xi(0) = x \in X$, dizemos que ξ é uma **solução global que passa pelo ponto** x ou, simplesmente, **solução global por** x.

Proposição 2.8. *Toda solução global é uma aplicação contínua.*

Demonstração. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ arbitrários, fixemos $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\tau < t_0 - \delta$. Para qualquer $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ podemos escrever

$$d(\xi(t), \xi(t_0)) = d(\pi(t-\tau)\xi(\tau), \pi(t_0 - \tau)\xi(\tau)).$$

A continuidade do semigrupo $\pi(\cdot)$ descrita no item iii) da Definição 2.1 implica na continuidade de ξ. □

Proposição 2.9. *Toda órbita global de um semigrupo é um conjunto invariante.*

Demonstração. Sejam $\xi : \mathbb{R} \to X$ uma solução global e $\gamma(\xi)$ a sua órbita. Dado $x \in \gamma(\xi)$, então $x = \xi(\tau)$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$. Para $t \geq 0$, segue que $\pi(t)x = \pi(t)\xi(\tau) = \xi(t+\tau) \in \gamma(\xi)$, daí $\pi(t)\gamma(\xi) \subset \gamma(\xi)$. Por outro lado, $x = \xi(\tau) = \xi(t + (\tau - t)) = \pi(t)\xi(\tau - t)$ de modo que $\gamma(\xi) \subset \pi(t)\gamma(\xi)$, concluindo a invariância. □

Definição 2.10. *Dizemos que uma solução global ξ é uma* ***solução periódica*** *quando existe $T > 0$ tal que $\xi(\tau + T) = \xi(\tau)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Neste caso $\gamma(\xi)$ é dita* ***órbita periódica****.*

Definição 2.11. *Se uma solução global ξ é constante igual a $x_0 \in X$, dizemos que x_0 é um* ***ponto de equilíbrio****, ou* ***solução estacionária****, ou* ***solução de equilíbrio****.*

O seguinte resultado relaciona os conceitos de solução global e conjunto invariante e sua demonstração utiliza-se de uma construção que vamos recorrer eventualmente.

Teorema 2.12. *Um subconjunto $A \subset X$ é invariante se, e somente se, A é reunião de órbitas globais de $\pi(\cdot)$.*

Demonstração. Suponhamos que A seja um conjunto invariante e tomemos $x_0 \in A$ arbitrário, logo $\pi(t)x_0 \in A$ sempre que $t \geq 0$. Pela definição de invariância, existe $x_{-1} \in A$ de modo que $\pi(1)x_{-1} = x_0$. Novamente pela invariância, existe $x_{-2} \in A$ tal que $\pi(1)x_{-2} = x_{-1}$. Continuando recursivamente obtemos uma sequência $\{x_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ de forma que

$$\pi(1)x_{-n} = x_{-n+1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Note que $\pi(2)x_{-2} = \pi(1)\pi(1)x_{-2} = \pi(1)x_{-1} = x_0$, do mesmo modo $\pi(2)x_{-3} = \pi(1)\pi(1)x_{-3} = \pi(1)x_{-2} = x_{-1}$, prosseguindo analogamente obtemos $\pi(n)x_{-m} = x_{n-m}$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \leq m$. Definimos $\xi : \mathbb{R} \to X$ por

$$\xi(\tau) = \begin{cases} \pi(\tau)x_0, & \text{se } \tau \geq 0 \\ \pi(\tau + n)x_{-n}, & \text{se } \tau \in [-n, 1-n]. \end{cases}$$

Dessa forma, ξ está bem definida em $\mathbb{R}$ e $\xi(\tau) \in A$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, pois A é invariante. Além disso, ξ satisfaz a definição de solução global. De fato, sejam $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Temos alguns casos a considerar: Se $\tau \geq 0$, então $\pi(t)\xi(\tau) = \pi(t)\pi(\tau)x_0 = \pi(t+\tau)x_0 = \xi(t+\tau)$ pois $t+\tau \geq 0$. Por outro lado, se $\tau < 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n, 1-n]$ e temos dois casos a considerar:

Caso 1: $t + \tau \geq 0$.

Neste caso,

$$\pi\,(t)\,\xi\,(\tau) = \pi\,(t)\,\pi\,(\tau + n)\,x_{-n} = \pi\,((t+\tau)+n)\,x_{-n} =$$
$$\pi\,(t+\tau)\,\pi\,(n)\,x_{-n}.$$

Pela construção da sequência $\{x_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, temos $\pi\,(n)\,x_{-n} = x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\pi\,(t)\,\xi\,(\tau) = \pi\,(t+\tau)\,x_0 = \pi(t_\tau)\xi(0) = \xi\,(t+\tau)\,.$$

Caso 2: $t + \tau < 0$.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $t + \tau \in [-m, 1-m]$, então $m \leq n$ e daí

$$\pi\,(t)\,\xi\,(\tau) = \pi\,(t)\,\pi\,(\tau+n)\,x_{-n} = \pi\,(t+\tau+n)\,x_{-n}$$

$$= \pi\,([t+\tau+m]+[n-m])\,x_{-n} = \pi\,(t+\tau+m)\,\pi\,(n-m)\,x_{-n}.$$

Como $\pi\,(n-m)\,x_{-n} = x_{-m}$ segue que

$$\pi\,(t)\,\xi\,(\tau) = \pi\,(t+\tau+m)\,x_{-m} = \xi\,(t+\tau)\,.$$

Concluímos que por todo ponto de A passa uma órbita global inteiramente contida em A, portanto, A é a reunião dessas órbitas. Reciprocamente, suponhamos que A seja a reunião de órbitas globais. Pela Proposição 2.9 as órbitas são conjuntos invariantes então, pela Observação 2.6, A também é invariante. □

Dados A e B subconjuntos não vazios de X, definimos a **Semidistância de Hausdorff de $\boldsymbol{A}$ até $\boldsymbol{B}$**, indicada por d_H, por

$$\boldsymbol{d_H\,(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d\,(a,b) = \sup_{a\in A} d\,(a,B)\,.}$$

Observação 2.13. *$A \subset \overline{B}$ se, e somente se, $d_H\,(A,B) = 0$. De fato, seja $x \in A \subset \overline{B}$, então $0 = d(x,A) \geq d(x,\overline{B})$. Logo, $d(x,B) = 0$ para todo $x \in A$, isto é, $d_H(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B) = 0$. Reciprocamente, tomemos $x \in A$. Se $d_H\,(A,B) = \sup_{a\in A} d\,(a,B) = 0$, então $d\,(x,B) = 0$. Como $d\,(x,B) = \inf_{b\in B} d\,(x,b) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $a_n \in B$ tal que $d\,(x,a_n) < \frac{1}{n}$, logo $a_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Portanto, $x \in \overline{B}$.*

Recordemos que dado $\epsilon > 0$ e A subconjunto de X, a bola de centro A e raio ϵ, indicada por $B\,(A;\epsilon)$, é o conjunto definido por

$$B\,(A;\epsilon) = \bigcup_{a\in A} B\,(a;\epsilon) = \{x \in X : d\,(x,A) < \epsilon\}.$$

Definição 2.14. *Dados $A, B \subset X$. Dizemos que* ***A π-atrai*** *B, ou que B é* ***atraído*** *por A por meio do semigrupo $\pi(\cdot)$ quando*

$$\lim_{t \to +\infty} d_H(\pi(t)B, A) = 0.$$

Ou equivalentemente, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\epsilon, B) \geq 0$ tal que $\pi(t)B \subset B(A; \epsilon)$ para todo $t \geq \tau$.

Definição 2.15. *Dados B e D subconjuntos de X. Dizemos que* ***D absorve B pela ação do semigrupo $\pi(\cdot)$****, ou que* ***D π-absorve B****, se existe $\tau = \tau(B) \geq 0$ tal que $\pi(t)B \subset D$ para todo $t \geq \tau$.*

Note que se D π-absorve um subconjunto B de X, então em particular D π-atrai B. Mas a recíproca não é verdadeira como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.16. Considere $X = \mathbb{R}$ e o semigrupo $\pi(\cdot)$ em $\mathbb{R}$ dado por $\pi(t)x = xe^{-t}$ para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Sejam $A = \{0\}$ e $B = [-1, 1]$. Temos que $\pi(t)B = [-e^{-t}, e^{-t}]$ para cada $t \geq 0$. Assim,

$$d_H(\pi(t)B, A) = e^{-t} \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Porém, para qualquer $t \geq 0$ $\pi(t)B$ não está contido em A. Portanto, A π-atrai B, mas A não π-absorve B.

2.2 Conjuntos Limites

Apresentamos nessa seção o conceito de conjunto limite que é de grande relevância no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo. Em síntese, o conjunto ω-limite de um subconjunto B é onde a semi-órbita positiva de B se acumula.

Definição 2.17. *Dado um subconjunto B de X, seu* ***conjunto ω-limite*** *é o conjunto*

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq t} \pi(s)B} \right) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

De imediato temos que $\omega(B)$ é um conjunto fechado, pois é uma interseção de fechados. Veremos a seguir a caracterização por sequências do conjunto ω-limite que será frequentemente usada na demonstração dos próximos resultados.

Lema 2.18. *Sejam $\pi(\cdot)$ um semigrupo e $B \subset X$,*

$$\begin{aligned}\omega(B) &= \{y \in X : \textit{existem sequências } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ em } \mathbb{R}_+ \textit{ com } t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ &\quad \textit{e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ em } B \textit{ tais que } \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)x_n = y\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $W = \{y \in X :$ existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B tais que $\lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)x_n = y$ $\}$.

Vamos mostrar inicialmente que $\omega(B) \subset W$. Dado $x \in \omega(B)$, por definição para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $x \in \overline{\gamma_n^+(B)}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \gamma_n^+(B)$ tal que $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Agora, como $y_n \in \gamma_n^+(B)$ decorre que existem $t_n \geq n$ e $x_n \in B$ tais que $y_n = \pi(t_n)x_n$. Então, $d(x, y_n) = d(x, \pi(t_n)x_n) < \frac{1}{n}$. Logo, $\lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)x_n = x$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B, isto é, $x \in W$.

Reciprocamente, seja $x \in W$. Então existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B de modo que $\lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)x_n = x$. Como $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, dado $t \geq 0$ arbitrário, podemos escolher $n_t \in \mathbb{N}$ de tal forma que $t_n \geq t$ sempre que $n \geq n_t$. Sendo assim, $\pi(t_n)x_n \subset \gamma_t^+(B)$ quando $n \geq n_t$. Daí, $x \in \overline{\gamma_t^+(B)}$. Assim, pela arbitrariedade de $t \geq 0$ decorre que $x \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)} = \omega(B)$, concluindo a demonstração do lema. □

Corolário 2.19. Sejam $\pi(\cdot)$ um semigrupo e $x \in X$,

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \{y \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tal que} \\ &\quad t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ e } \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)x = y\}.\end{aligned}$$

Usando o lema anterior, apresentamos a seguir algumas propriedades do conjunto ω-limite.

Proposição 2.20. *Sejam B e C subconjuntos de X, então*

a) $\omega(B \cap C) \subset \omega(B) \cap \omega(C)$;

b) $\omega(B \cup C) \subset \omega(B) \cup \omega(C)$;

c) *Se $B \subset C$, então $\omega(B) \subset \omega(C)$;*

d) *Se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global de $\pi(\cdot)$, então $\omega(\xi(t)) = \omega(\xi(s))$ quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $x \in \omega(B \cap C)$. Pelo Lema 2.18 existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $B \cap C$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi(t_n) x_n = x$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ então $x \in \omega(B)$ e, da mesma forma, $x \in \omega(C)$. Então $x \in \omega(B) \cap \omega(C)$, o que prova o item a). De modo análogo provamos os itens b) e c).

Para demonstrar o item d), suponha $t > s$. Então existe $r \in \mathbb{R}_+$ de modo que $t = s+r$. Dado $x \in \omega(\xi(t))$, existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tal que

$$x = \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)\xi(t) = \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)\xi(s+r) = \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)\pi(r)\xi(s)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n + r)\xi(s).$$

Logo, $x \in \omega(\xi(s))$ e, portanto, $\omega(\xi(t)) \subset \omega(\xi(s))$. Reciprocamente, seja $x \in \omega(\xi(s))$. Então existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tal que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(t_n)\xi(s)$. Assim,

$$x = \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n - r + r)\xi(s) = \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n - r)\pi(r)\xi(s)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n - r)\xi(r+s) = \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n - r)\xi(t).$$

Então, $x \in \omega(\xi(t))$, como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 2.21. Considere o sistema em coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} r' = r(1-r), \\ \theta' = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

O retrato de fase do sistema consiste de uma trajetória fechada γ que coincide com o círculo unitário $r = 1$, do ponto $r = 0$ e de trajetórias espirais que se aproximam da curva γ, quando $t \to +\infty$, veja a Figura 2.1. Note que, exceto pelo ponto $r = 0$, o conjunto limite de todas as trajetórias para o Sistema (2.3) é a curva γ. O conjunto limite do ponto $r = 0$ é o próprio ponto $r = 0$.

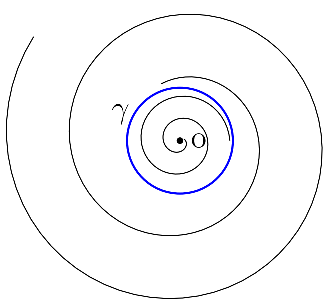

Figura 2.1: Trajetórias do Sistema (2.3).

Definição 2.22. *Dizemos que um semigrupo $\pi(\cdot)$ é* ***assintoticamente compacto*** *quando para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X e toda sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais não negativos com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, a sequência $\{\pi(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente.*

Apresentamos agora as principais propriedades dos conjuntos ω-limites para semigrupos assintoticamente compactos.

Lema 2.23. *Seja $\pi(\cdot)$ um semigrupo assintoticamente compacto em um espaço métrico X. Para todo subconjunto limitado não vazio $B \subset X$, seu conjunto ω-limite satisfaz as seguintes propriedades:*

a) *$\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e π-atrai B pela ação de $\pi(\cdot)$;*

b) *$\omega(B)$ é o menor conjunto fechado de X que π-atrai B;*

c) *Se B é um conjunto conexo ou, mais geralmente, se existe um conexo C que contém B e que é π-atraído por $\omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. a) Para verificar que $\omega(B)$ é não vazio, escolhemos uma sequência arbitrária de números reais não negativos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de B. Pela compacidade assintótica sabemos que a sequência $\{\pi(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para um ponto $x \in X$. Usando o Lema 2.18 temos que $x \in \omega(B)$. Portanto $\omega(B)$ é não vazio.

Agora, vamos provar a compacidade de $\omega(B)$. Tomemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\omega(B)$. O Lema 2.18 nos garante que para cada $n \in \mathbb{N}$ existem sequências $\{t_j^n\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_j^n \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_j^n\}_{j\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $\lim_{j\to+\infty} \pi\left(t_j^n\right) x_j^n = x_n$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um natural j_n de modo que $t_{j_n}^n \geq n$ e

$$d\left(x_n, \pi\left(t_{j_n}^n\right) x_{j_n}^n\right) < \frac{1}{n}. \tag{2.4}$$

Como $t_{j_n}^n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e o semigrupo é assintoticamente compacto, obtemos uma subsequência de $\{\pi(t_{j_n}^n)x_{j_n}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que denotaremos por $\{\pi\left(t_{j_{n_k}}^{n_k}\right) x_{j_{n_k}}^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge digamos para $x \in X$. Pelo Lema 2.18, $x \in \omega(B)$ e, por (2.4), obtemos

$$d\left(x_{n_k}, \pi\left(t_{j_{n_k}}^{n_k}\right) x_{j_{n_k}}^{n_k}\right) < \frac{1}{n_k}.$$

Com isso, após tomar o limite para $k\to+\infty$, resulta que $x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$, o que nos permite concluir que $\omega(B)$ é compacto.

Para provar que $\omega(B)$ é invariante, tomemos $x \in \omega(B)$. Então existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B tais que $\lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)\, x_n = x$. Dado $t \geq 0$, pela continuidade da aplicação $\pi(t) : X \to X$ e pela propriedade de semigrupo, segue que

$$\pi(t)\, x = \pi(t)\left(\lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)\, x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \pi(t+t_n)\, x_n.$$

Como $t + t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência contida em B, isso implica que $\pi(t)\, x \in \omega(B)$, isto é, $\pi(t)\,\omega(B) \subset \omega(B)$. Por outro lado, sejam $x \in \omega(B)$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B, de modo que $\lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)\, x_n = x$. Fixando $t \geq 0$ podemos assumir que $t_n \geq t$ para n suficientemente grande, com isso

$$x = \lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \pi(t + (t_n - t))\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \pi(t)\, \pi(t_n - t)\, x_n. \qquad (2.5)$$

Mas, pela compacidade assintótica, a sequência $\{\pi(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{\pi(t_{n_j} - t)x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto $z \in X$. Pelo Lema 2.18, temos que $z \in \omega(B)$. Agora, pela continuidade de $\pi(t) : X \to X$ em (2.5) e pelo fato de que toda subsequência de uma sequência convergente é também convergente e converge para o mesmo limite, obtemos

$$x = \lim_{j\to+\infty} \pi(t)\, \pi\left(t_{n_j} - t\right) x_{n_j} = \pi(t)\left(\lim_{j\to+\infty} \pi\left(t_{n_j} - t\right) x_{n_j}\right) = \pi(t)\, z \in \pi(t)\omega(B).$$

Então $x \in \pi(t)\,\omega(B)$, ou seja, $\omega(B) \subset \pi(t)\,\omega(B)$, concluindo a invariância de $\omega(B)$.

Provemos agora que $\omega(B)$ π-atrai B, isto é, que $\lim_{t\to+\infty} d_H(\pi(t)\, B, \omega(B)) = 0$. De fato, suponha, por contradição, que exista $\epsilon_0 > 0$ e uma sequência de números reais positivos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que

$$d_H(\pi(t_n)\, B, \omega(B)) \geq \epsilon_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Segue da definição da Semidistância de Hausdorff que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um ponto $x_n \in B$ satisfazendo

$$d(\pi(t_n)\, x_n, \omega(B)) \geq \epsilon_0. \qquad (2.6)$$

Pela compacidade assintótica, obtemos uma subsequência de $\{\pi(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto $x \in X$, que consequentemente pertence a $\omega(B)$. Portanto, considerando a continuidade da função distância de um ponto a um conjunto e (2.6), resulta que

$d(x,\omega(B)) \geq \epsilon_0$, contradizendo $x \in \omega(B)$. Logo $\omega(B)$ π-atrai B, concluindo a prova do item a).

Provemos o item b). Sabemos que $\omega(B)$ é fechado e, pelo item anterior, π-atrai B. Vamos provar que $\omega(B)$ é o menor fechado com essas propriedades. Seja $F \subset X$ um conjunto fechado que π-atrai B. Mostraremos que $\omega(B) \subset F$. Suponhamos, por contradição, que exista $x \in \omega(B)$ tal que $x \notin F$. Como F é fechado, $d(x,F) = \delta > 0$. Além disso, $x = \lim_{t\to+\infty} \pi(t_n) x_n$, onde $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos em $\mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos em B. Também, como F π-atrai B, existe $t_0 > 0$ tal que $d_H(\pi(t)B, F) < \frac{\delta}{2}$ sempre que $t \geq t_0$. Logo, $d(\pi(t)z, F) < \frac{\delta}{2}$ para todo $z \in B$ e todo $t \geq t_0$. No entanto, escolhendo $n_{t_0} \in \mathbb{N}$ de modo que $t_n \geq t_0$ sempre que $n \geq n_{t_0}$, resulta que para todo $n \geq n_{t_0}$ vale

$$d(\pi(t_n)x_n, F) < \frac{\delta}{2}.$$

Daí, pela continuidade da função distância de um ponto a um conjunto, após passar o limite em n, concluímos que $d(x,F) < \frac{\delta}{2}$, o que é uma contradição. Portanto, $\omega(B) \subset F$, como queríamos mostrar.

Finalmente, para provar c), suponha que exista um conjunto conexo $C \supset B$ que é atraído por $\omega(B)$ e que $\omega(B)$ não seja conexo. Logo, podemos escrever $\omega(B)$ como reunião de dois conjuntos F_1 e F_2 não vazios, disjuntos e fechados em $\omega(B)$. Pelo item a), os conjuntos F_1 e F_2 são compactos, logo $d(F_1,F_2) = \delta > 0$, onde

$$d(F_1,F_2) = \inf\{d(a,b) : a \in F_1, b \in F_2\}.$$

Como $\omega(B)$ π-atrai C, existe $t_0 > 0$ tal que $\pi(t)C \subset B\left(\omega(B); \frac{\delta}{2}\right)$ para todo $t \geq t_0$. Desse modo,

$$\gamma^+_{t_0}(C) \subset B\left(\omega(B); \frac{\delta}{2}\right) = B\left(F_1; \frac{\delta}{2}\right) \cup B\left(F_2; \frac{\delta}{2}\right).$$

Porém $\gamma^+_{t_0}(C)$ é a imagem do conjunto conexo $[t_0,\infty)\times C$ pela aplicação contínua $[t_0,\infty)\times C \ni (t,x) \mapsto \pi(t)x \in X$, diante disso $\gamma^+_{t_0}(C)$ é um conjunto conexo. Visto que $B\left(F_1; \frac{\delta}{2}\right)$ e $B\left(F_2; \frac{\delta}{2}\right)$ são abertos e disjuntos, $\gamma^+_{t_0}(C)$ deve estar inteiramente contido em exatamente um dos dois conjuntos. Suponha que $\gamma^+_{t_0} \subset B\left(F_1; \frac{\delta}{2}\right)$. Então,

$$F_2 \subset \omega(B) \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(C)} \subset \overline{B\left(F_1; \frac{\delta}{2}\right)}.$$

Isto é, $d(F_1, F_2) \leq \frac{\delta}{2}$, contradizendo a definição de δ. Portanto, $\omega(B)$ é um conjunto conexo que π-atrai um conexo C contendo B.

O caso em que B é conexo, segue do que acabamos de provar colocando $C = B$ e usando o item a), concluindo a demonstração do lema. $\square$

Proposição 2.24. *Sejam $\pi(\cdot)$ semigrupo em um espaço métrico X e $A \subset X$ um conjunto invariante e fechado. Então $\omega(A) = A$.*

Demonstração. Primeiramente tomemos $x \in A$. A invariância de A nos garante que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $x_n \in A$ tal que $x = \pi(n)x_n$, naturalmente $\lim_{n\to+\infty} \pi(n)x_n = x$. Logo $x \in \omega(A)$, mostrando a inclusão $A \subset \omega(A)$.

Em contrapartida, sejam $x \in \omega(A)$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em A tais que $\lim_{n\to+\infty} \pi(t_n)x_n = x$. Pela invariância de A, sabemos que $\pi(t_n)x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente $x \in \overline{A} = A$, pois A é fechado. Com isso $\omega(A) \subset A$, concluindo a prova. $\square$

Note que se retirarmos a hipótese de que A é fechado, temos somente a inclusão $A \subset \omega(A)$.

2.3 Atrator Global

Nesta seção definimos Atrator Global para um semigrupo e apresentamos alguns resultados de existência e caracterização deste conjunto, quando ele existir.

Definição 2.25. *Dizemos que um conjunto não vazio $\mathcal{A} \subset X$ é um **atrator global para o semigrupo $\pi(\cdot)$** quando é compacto, π-invariante e π-atrai todo subconjunto limitado de X pela ação de $\pi(\cdot)$.*

Este é um objeto dinâmico que além de compacto é para onde todos os pontos evoluem, pela ação do semigrupo, e de onde não saem (que se referem a atração e invariância pela ação de $\pi(\cdot)$). Apenas por essa definição a princípio não fica claro se é permitido um semigrupo $\pi(\cdot)$ possuir mais do que um atrator global, que de fato não ocorre como veremos a seguir.

Proposição 2.26. *Se existe um atrator global para um semigrupo $\pi(\cdot)$, então ele é único.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ atratores globais para $\pi(\cdot)$. Visto que $\mathcal{A}_1$ é invariante, isto é, $\pi(t)\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1$ e limitado, e como $\mathcal{A}_2$ é atrator global, então π-atrai $\mathcal{A}_1$. Logo,

$$0 = \lim_{t \to +\infty} d_H\left(\pi\left(t\right)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\right) = \lim_{t \to +\infty} d_H\left(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\right) = d_H\left(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\right).$$

Então $d_H\left(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\right) = 0$. Agora, pela Observação 2.13, e por $\mathcal{A}_2$ ser fechado, decorre que $\mathcal{A}_1 \subset \overline{\mathcal{A}_2} = \mathcal{A}_2$. Invertendo $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ obtemos, de forma análoga, que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, portanto $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. □

Exemplo 2.27. Seja $\pi\left(\cdot\right)$ o semigrupo sobre $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{aligned} \pi(t) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^{-t}x, e^{-t}y), \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $t \in \mathbb{R}_+$. Então $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ é atrator global para o semigrupo. Com efeito, é fácil ver que $\mathcal{A}$ é não vazio, compacto e invariante, logo basta mostrar que $\mathcal{A}$ π-atrai todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ limitado, então existe $M > 0$ tal que $\|(x, y)\| \leq M$ para todo $(x, y) \in B$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Dado $\epsilon > 0$, tome $\tau > 0$ tal que $e^{-\tau} < \frac{\epsilon}{M}$, logo para todo $t \geq \tau$,

$$\|\pi(t)(x, y)\| = \|(e^{-t}x, e^{-t}y)\| \leq e^{-t}\|(x, y)\| \leq e^{-\tau}M < \epsilon.$$

Portanto, $\pi(t)B \subset B(\mathcal{A}, \epsilon)$ para todo $t \geq \tau$, isto é, $\mathcal{A}$ π-atrai B.

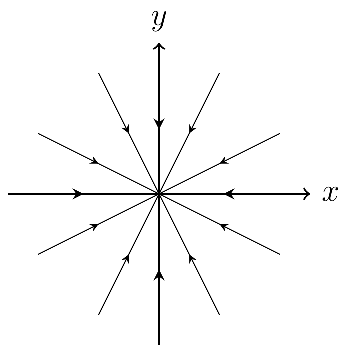

Figura 2.2: Trajetórias do Semigrupo (2.7).

Teorema 2.28. *Se um semigrupo $\pi\left(\cdot\right)$ em um espaço métrico X possui atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ se exprime como a reunião de todos os subconjuntos invariantes limitados de X.*

Demonstração. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ a família de todos os subconjuntos invariantes limitados de X. Como $\mathcal{A}$ é limitado e invariante, então $\mathcal{A} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Por outro lado, pela invariância de A_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$, temos que $\pi\left(t\right)A_\lambda = A_\lambda$ para todo $t \geq 0$. Além disso, cada A_λ é um subconjunto limitado de X, logo $\mathcal{A}$ π-atrai cada A_λ, isto é, $0 = \lim_{t \to +\infty} d_H\left(\pi\left(t\right)A_\lambda, \mathcal{A}\right) =$

$d_H(A_\lambda, \mathcal{A})$. Isto implica que $A_\lambda \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ para todo $\lambda \in \Lambda$, completando a demonstração do teorema. □

O próximo resultado mostra que as soluções globais podem ser usadas para caracterizar um atrator.

Corolário 2.29. Se um semigrupo $\pi(\cdot)$ possui atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é a união de todas as órbitas globais limitadas de $\pi(\cdot)$.

Demonstração. Sendo $\mathcal{A}$ invariante então, pelo Teorema 2.12, $\mathcal{A}$ é uma reunião de órbitas globais que são limitadas pois $\mathcal{A}$ o é. Por outro lado, se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada, também vimos na Proposição 2.9 que sua órbita $\gamma(\xi)$ é um conjunto limitado e invariante. Logo, pelo teorema anterior, $\gamma(\xi) \subset \mathcal{A}$, como queríamos mostrar. □

Definição 2.30. *Dizemos que um semigrupo $\pi(\cdot)$ é*

i) ***limitado****, quando dado qualquer subconjunto limitado B de X a sua semi-órbita positiva $\gamma^+(B)$ é um subconjunto limitado de X;*

ii) ***eventualmente limitado****, quando para todo subconjunto limitado B de X existe $\tau = \tau(B) \geq 0$ de modo que $\gamma_\tau^+(B)$ é um subconjunto limitado de X;*

iii) ***ponto dissipativo****, quando existe um subconjunto limitado D de X que π-absorve cada um dos pontos de X, isto é, para todo ponto $x \in X$ existe $\tau = \tau(x, D) \geq 0$ tal que $\pi(t)x \subset D$ para todo $t \geq \tau$;*

iv) ***limitado dissipativo****, ou simplesmente* ***dissipativo****, se existe um subconjunto limitado D de X que π-absorve todos os subconjuntos limitados de X.*

Proposição 2.31. *Um semigrupo $\pi(\cdot)$ é limitado dissipativo se, e somente se, existe um conjunto limitado $A \subset X$ que π-atrai cada um dos subconjuntos limitados de X.*

Demonstração. Se $\pi(\cdot)$ é limitado dissipativo, então existe um subconjunto limitado A de X que π-absorve todos os subconjuntos limitados de X. Logo, A π-atrai cada um dos subconjuntos limitados de X. Reciprocamente, seja B um subconjunto limitado de X e suponhamos que A π-atrai todo subconjunto limitado de X. Então, por definição, fixado $\varepsilon \geq 0$ existe $\tau \geq 0$ tal que $\pi(t)B \subset B(A;\epsilon)$ para todo $t \geq \tau$. Portanto, $D = B(A;\epsilon)$ π-absorve B, concluindo que $\pi(\cdot)$ é limitado dissipativo. □

Em particular, a Proposição 2.31 nos diz que se um semigrupo $\pi(\cdot)$ possui atrator global $\mathcal{A}$, então o semigrupo é limitado dissipativo.

Definição 2.32. *Dizemos que um semigrupo $\pi(\cdot)$ em X é **eventualmente compacto**, se existe $t_0 > 0$ tal que $\pi(t_0) : X \to X$ é uma aplicação compacta, isto é, quando para cada subconjunto limitado B de X, $\pi(t_0)B$ é um subconjunto relativamente compacto de X.*

Seja $\pi(\cdot)$ um semigrupo eventualmente compacto e seja $t_0 > 0$ tal que $\pi(t_0) : X \to X$ é uma aplicação compacta. Afirmamos que para todo $t \geq t_0$, a aplicação $\pi(t) : X \to X$ é compacta. Com efeito, pela propriedade de semigrupo, para $t \geq t_0$ temos que $\pi(t) = \pi(t-t_0)\pi(t_0)$. Dado B um subconjunto limitado de X, temos

$$\pi(t)B = [\pi(t-t_0)\pi(t_0)]B \subset \pi(t-t_0)\left(\overline{\pi(t_0)B}\right).$$

Usando o fato de que $\pi(t-t_0)$ é contínua e que $\overline{\pi(t_0)B}$ é um conjunto compacto em X, concluímos que $\pi(t-t_0)\left(\overline{\pi(t_0)B}\right)$ é um compacto em X. Portanto, $\overline{\pi(t)B}$ é compacto.

A seguir apresentaremos uma relação entre os semigrupos eventualmente compactos, eventualmente limitados e assintoticamente compactos.

Proposição 2.33. *Se um semigrupo $\pi(\cdot)$ é eventualmente compacto e eventualmente limitado, então $\pi(\cdot)$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Sejam $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não negativos, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de pontos em X. Considere $B_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\pi(\cdot)$ é eventualmente limitado, existe $\tau > 0$ de modo que $\gamma_\tau^+(B_0)$ é um conjunto limitado. Visto que $\pi(\cdot)$ é também eventualmente compacto, existe $t_0 > 0$ tal que a aplicação $\pi(t_0) : X \to X$ é compacta. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_0 + \tau$ para todo $n \geq n_0$. Assim, $t_n - t_0 \geq \tau$ para todo $n \geq n_0$ e definimos o conjunto limitado $B = \{\pi(t_n - t_0)x_n : n \geq n_0\} \subset \gamma_\tau^+(B_0)$. Segue que

$$\begin{aligned}
\pi(t_0)B &= \{\pi(t_0)x : x \in B\} \\
&= \{\pi(t_0)\pi(t_n - t_0)x_n : n \geq n_0\} \\
&= \{\pi(t_n)x_n : n \geq n_0\}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Usando (2.8) e o fato de que $\pi(t_0)B$ é relativamente compacto, concluímos que $\{\pi(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Portanto, o semigrupo é assintoticamente compacto. $\square$

Proposição 2.34. *Se um semigrupo $\pi(\cdot)$ possui atrator global $\mathcal{A}$, então $\pi(\cdot)$ é eventualmente limitado.*

Demonstração. Seja B um subconjunto limitado de X. Sabemos que $\mathcal{A}$ π-atrai B, então

$$\lim_{t\to+\infty} d_H(\pi(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\varepsilon, B) \geq 0$ tal que $\pi(t)B \subset B(A; \epsilon)$ para todo $t \geq \tau$. Isso implica que $\gamma_\tau^+(B) \subset B(A;\epsilon)$, logo $\gamma_\tau^+(B)$ é limitado. Sendo assim, $\pi(\cdot)$ é eventualmente limitado. □

O teorema a seguir garante a existência de atrator global para semigrupos assintoticamente compactos e limitados dissipativos. Além disso, caracteriza o atrator global em termos de conjuntos ω-limites.

Teorema 2.35. *Um semigrupo $\pi(\cdot)$ em um espaço métrico X possui atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se, é assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Além disso, em caso afirmativo, se $\mathcal{B}$ denota a coleção de todos os subconjuntos limitados de X, então o atrator $\mathcal{A}$ é dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B). \tag{2.9}$$

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que o semigrupo $\pi(\cdot)$ possua atrator $\mathcal{A}$. Então, pela Proposição 2.31, $\pi(\cdot)$ é limitado dissipativo. Para verificar que o semigrupo é também assintoticamente compacto, tomemos uma sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contida em X e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não negativos com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Considere o conjunto limitado $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\mathcal{A}$ é atrator global, então π-atrai B, isto é,

$$\lim_{t\to+\infty} d_H(\pi(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Em particular,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{b\in B} d(\pi(t_n)b, \mathcal{A}) = \lim_{n\to+\infty} d_H(\pi(t_n)B, \mathcal{A}) = 0. \tag{2.10}$$

Aplicando a definição de limite de sequências em (2.10), para cada $j \in \mathbb{N}$ encontramos um ponto $z_j \in \mathcal{A}$ satisfazendo

$$d\left(\pi\left(t_{n_j}\right)x_{n_j}, z_j\right) < \frac{1}{j}. \tag{2.11}$$

Pela compacidade de $\mathcal{A}$, a sequência $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência, que manteremos a mesma notação para simplificar, convergente. Seja $x \in \mathcal{A}$ seu limite, então por (2.11)

$$d\left(\pi\left(t_{n_j}\right)x_{n_j}, x\right) \leq d\left(\pi\left(t_{n_j}\right)x_{n_j}, z_j\right) + d\left(z_j, x\right) < \frac{1}{j} + d\left(z_j, x\right) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde $\lim\limits_{j\to+\infty} \pi\left(t_{n_j}\right)x_{n_j} = x$, provando que $\pi(\cdot)$ é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{A}$ seja assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os subconjuntos limitados de X e definimos $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)$. Provaremos que $\mathcal{A}$ é o atrator global de $\pi(\cdot)$. Sabemos, pelo Lema 2.23, que $\omega(B)$ é compacto, invariante e π-atrai B pela ação de $\pi(\cdot)$. Dessa forma, $\mathcal{A}$ é invariante pois é reunião de subconjuntos invariantes, além disso π-atrai cada um dos limitados de X. Nos resta então provar que $\mathcal{A}$ é compacto. Como $\pi(\cdot)$ é limitado dissipativo, existe um subconjunto limitado $D \subset X$ que π-absorve todos os subconjuntos limitados de X. Tomando o fecho de D se necessário, podemos assumir que D é fechado. Temos que D π-atrai cada $B \in \mathcal{B}$ e pelo item b) do Lema 2.23, $\omega(B) \subset D$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Logo $\mathcal{A} \subset D$ e, consequentemente, $\omega(\mathcal{A}) \subset \omega(D)$. Além disso, como $\mathcal{A}$ é invariante $\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A})$. Contudo, obtemos

$$\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A}) \subset \omega(D) \subset \mathcal{A},$$

pois $D \in \mathcal{B}$. Portanto, $\omega(D) = \mathcal{A}$, concluindo a compacidade de $\mathcal{A}$ e a demonstração do teorema. □

Corolário 2.36. Se um semigrupo $\pi(\cdot)$ é eventualmente compacto, eventualmente limitado e ponto dissipativo, então possui atrator global.

Demonstração. Como o semigrupo é eventualmente compacto e eventualmente limitado, pela Proposição 2.33, $\pi(\cdot)$ é assintoticamente compacto. Nos resta mostrar que o semigrupo é também limitado dissipativo. Uma vez que $\pi(\cdot)$ é ponto dissipativo, existe um conjunto limitado $D_0 \subset X$ que π-absorve cada ponto de $x \in X$. Definimos o conjunto $D_1 = B(D_0; 1)$. Como $\pi(\cdot)$ é eventualmente limitado, existe $\tau_* > 0$ de modo que o conjunto $D = \gamma^+_{\tau_*}(D_1)$ é limitado. Vamos provar que D π-absorve todo subconjunto limitado de X. Com efeito, primeiramente seja K um subconjunto compacto de X arbitrário. Sabemos que para cada $x \in K$ existe um número real $\tau_x \geq 0$ tal que

$$\pi(t)x \in D_0 \subset D_1, \text{ para todo } t \geq \tau_x. \tag{2.12}$$

Como D_1 é um subconjunto aberto de X e $\pi(\tau_x) : X \to X$ é contínua, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\pi(\tau_x) B(x; \delta_x) \subset D_1.$$

Agora, pela definição de D,

$$\pi(t) B(x; \delta_x) \subset D, \text{ para todo } t \geq \tau_x + \tau_*. \tag{2.13}$$

Por outro lado, $\{B(x; \delta_x)\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta para o subconjunto K. Como K é compacto, existem $x_1, x_2, ..., x_n$, um número finito de pontos de K, tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j; \delta_{x_j}\right).$$

Tomemos $\tau_K = \max_{1 \leq j \leq n} \tau_{x_j}$. Então, por (2.13), temos que

$$\pi(t) K \subset D, \text{ para todo } t \geq \tau_* + \tau_K. \tag{2.14}$$

Isto é, D π-absorve subconjuntos compactos de X. Por fim, como $\pi(\cdot)$ é eventualmente compacto existe $t_0 > 0$ tal que $\pi(t_0) : X \to X$ é uma aplicação compacta. Dado um subconjunto limitado B de X, temos que $K = \overline{\pi(t_0) B}$ é compacto. Logo, por (2.14),

$$\pi(t) \pi(t_0) B \subset \pi(t) \overline{\pi(t_0) B} = \pi(t) K \subset D, \text{ para todo } t \geq \tau_* + \tau_K.$$

Pondo $\tau = t_0 + \tau_* + \tau_K$, então para todo $t \geq \tau$ temos $t - t_0 \geq \tau_* + \tau_K$, donde

$$\pi(t - t_0) \pi(t_0) B \subset D, \text{ para todo } t - t_0 \geq \tau_* + \tau_K.$$

Isto é,

$$\pi(t) B \subset D, \text{ para todo } t \geq \tau.$$

Logo, o conjunto D π-absorve todo subconjunto limitado B de X, mostrando que $\pi(\cdot)$ é limitado dissipativo. Portanto, pelo Teorema 2.35, resulta que o semigrupo $\pi(\cdot)$ possui um atrator global. $\square$

Capítulo

3

Sistema Dinâmico Impulsivo

Neste capítulo apresentamos a teoria de sistemas dinâmicos impulsivos. Na primeira seção definimos o que é um sistema dinâmico com impulso, na segunda seção mostramos que, sobre certas condições, a função tempo de impacto ϕ é contínua, e por fim na terceira seção apresentamos o conjunto limite impulsivo de um sistema dinâmico e discutimos sua invariância. As principais referências para este capítulo são [1], [4], [6] e [7].

3.1 Definição de Sistema Dinâmico Impulsivo

Nesta seção vamos definir um sistema dinâmico com impulso em um espaço métrico X.

Sejam $\pi(\cdot)$ um semigrupo em X, $x \in X$ e $t \geq 0$. Definimos o seguinte conjunto

$$F(x,t) = \{y \in X : \pi(t)\, y = x\}$$

e para $D \subset X$ e $J \subset \mathbb{R}_+$ definimos

$$F(D,J) = \bigcup_{x \in D} \left(\bigcup_{t \in J} F(x,t) \right).$$

Um ponto $x \in X$ é dito **ponto inicial** se $F(x,t) = \emptyset$ para todo $t \geq 0$.

O próximo exemplo ilustra as definições acima.

Exemplo 3.1. Seja $\pi(\cdot)$ um semigrupo em $\mathbb{R}^2$, onde $\pi(t)(x,y) = (x+t, y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Considere $a = (1,1)$ e $t = 1$, então $F(a,t) = \{(0,1)\}$, pois $(0,1)$

é o único ponto que quando aplicamos $\pi(1)$ é igual a $a = (1,1)$. Tomando $J = [0,1]$ e $a = (1,1)$ temos $F(a,J) = [0,1] \times \{1\}$. Agora, considerando $D = [0,1] \times \{1\}$, obtemos $F(D,J) = [0,1] \times [0,1]$.

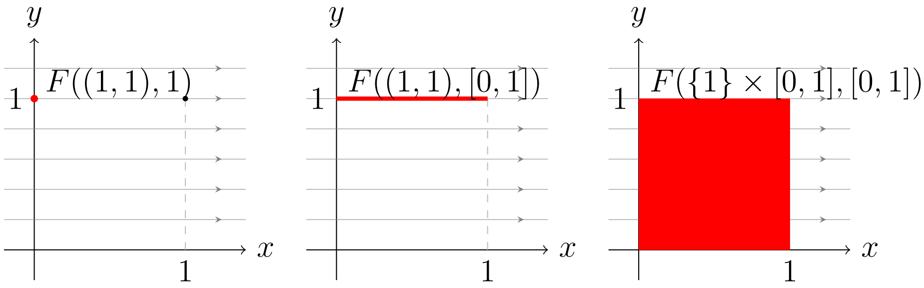

Figura 3.1: Conjuntos $F(a,t)$, $F(a,J)$ e $F(D,J)$.

Definição 3.2. *Um* ***Sistema Dinâmico Impulsivo****, denotado por* $(X, \pi; M, I)$*, consiste de um semigrupo* $\pi(\cdot)$ *em um espaço métrico* (X,d)*, um subconjunto fechado não vazio* $M \subset X$ *e uma aplicação contínua* $I : M \to X$ *satisfazendo as seguintes propriedades: para cada* $x \in M$*, existe* $\epsilon_x > 0$ *tal que*

$$F(x,(0,\epsilon_x)) \cap M = \emptyset \ \text{e} \ \left(\bigcup_{t \in (0,\epsilon_x)} \pi(t)\, x \right) \cap M = \emptyset. \tag{3.1}$$

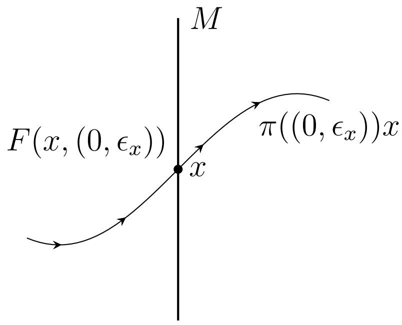

Figura 3.2: Trajetória de π através de x.

Dizemos que M é o **conjunto impulsivo** e I é a **aplicação de impulso**.

As condições de (3.1) significam que as trajetórias do semigrupo são, em certo sentido, transversais a M em qualquer ponto de M, isto é, se $x \in M$ existe um intervalo $(0, \epsilon_x)$ em que podemos retroceder ou evoluir o sistema que não encontraremos o conjunto M.

Dado $x \in X$, denotamos

$$M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} \pi(t)\, x \right) \cap M.$$

O lema a seguir apresenta condições para obtermos a existência do menor tempo estritamente positivo para o qual a trajetória do semigrupo encontra o conjunto impulsivo M.

Lema 3.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo. Dado $x \in X$, se $M^+(x) \neq \emptyset$, então existe $s > 0$ tal que $\pi(t)x \notin M$ para todo $0 < t < s$ e $\pi(s)x \in M$.*

Demonstração. Tomemos $x \in X$. Suponhamos que $M^+(x) \neq \emptyset$, então existe $t_1 > 0$ tal que $\pi(t_1)x \in M$. Sabemos que $\pi_x : \mathbb{R}_+ \to X$ é contínua e M é fechado, com isso $\pi^{-1}(M) \cap [0, t_1]$ é compacto. Portanto $\pi^{-1}(M) \cap [0, t_1]$ possui um menor elemento, digamos $s > 0$, que satisfaz a propriedade desejada. □

Tendo em vista o lema acima podemos definimos uma função $\phi : X \to (0, +\infty]$ da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \begin{cases} s, & \text{se } \pi(s)x \in M \text{ e } \pi(t)x \notin M \text{ para } 0 < t < s, \\ +\infty, & \text{se } M^+(x) = \emptyset, \end{cases}$$

onde s é o número real positivo determinado pelo Lema 3.3. Se $M^+(x) \neq \emptyset$, o valor $\phi(x)$ representa o menor tempo positivo em que a trajetória de x encontra M. Neste caso, dizemos que $\pi(\phi(x))x$ é o **ponto impulsivo de** x e a função ϕ é dita **função tempo de impacto**.

Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo e $x \in X$. A **trajetória impulsiva de** x é uma aplicação $\tilde{\pi}(\cdot)x$ definida em um intervalo $J_x \subset \mathbb{R}_+$ tomando valores em X, dada indutivamente como veremos a seguir.

Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\phi(x) = +\infty$ e $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$ para todo $t \geq 0$. Porém, se $M^+(x) \neq \emptyset$, então denotamos $x = x_0^+$ e definimos $\tilde{\pi}(\cdot)x$ em $\left[0, \phi\left(x_0^+\right)\right]$ por

$$\tilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t)x_0^+, & 0 \leq t < \phi\left(x_0^+\right), \\ x_1^+, & t = \phi\left(x_0^+\right), \end{cases}$$

onde $x_1^+ = I(x_1)$ com $x_1 = \pi(s_0)x_0^+$ e $s_0 = \phi\left(x_0^+\right)$, note que neste caso o sistema tem um salto. Como $\phi(x_0^+) < +\infty$, o processo continua mas, agora, iniciando em x_1^+.

Se $M^+(x_1^+) = \emptyset$, então $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t - s_0)x_1^+$ para $s_0 \leq t < +\infty$ e $\phi(x_1^+) = +\infty$. Caso $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$, novamente pelo Lema 3.3, existe um menor tempo $s_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(s_1)x_1^+ \in M$ e $\pi(t - s_0)x_1^+ \notin M$ para $s_0 < t < s_0 + s_1$. Assim, definimos $\tilde{\pi}(\cdot)x$ sobre $[s_0, s_0 + s_1]$ por

$$\tilde{\pi}(t)\,x = \begin{cases} \pi\,(t - s_0)\,x_1^+, & s_0 \leq t < s_0 + s_1, \\ x_2^+, & t = s_0 + s_1, \end{cases}$$

onde $x_2^+ = I(x_2)$, com $x_2 = \pi(s_1)x_1^+$ e $s_1 = \phi(x_1^+)$.

Suponha que $\tilde{\pi}(\cdot)x$ esteja definida no intervalo $[t_{n-1}(x), t_n(x)]$ e que $\tilde{\pi}(t_n(x))x = x_n^+$, onde $t_0(x) = 0$ e $t_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i^+)$ para $n \in \mathbb{N}$. Se $M^+(x_n^+) = \emptyset$, então $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t - t_n(x))x_n^+$ para $t_n(x) \leq t < +\infty$ e $\phi(x_n^+) = +\infty$. Agora, se $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$, então

$$\tilde{\pi}(t)\,x = \begin{cases} \pi\,(t - t_n(x))\,x_n^+, & t_n(x) \leq t < t_{n+1}(x), \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}(x), \end{cases}$$

onde $s_n = \phi(x_n^+)$, $x_{n+1} = \pi(s_n)x_n^+$ e $x_{n+1}^+ = I(x_{n+1})$. Assim, $\tilde{\pi}(\cdot)x$ está definida no intervalo $[t_n(x), t_{n+1}(x)]$ e, com isso, no intervalo $[0, t_{n+1}(x)]$. Esse processo é interrompido para um número finito de passos se $M^+(x_n^+) = \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$, ou pode prosseguir indefinidamente se $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e, nesse caso, $\tilde{\pi}(\cdot)x$ está definida no intervalo $[0, T(x))$, onde $T(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} s_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi(x_n^+)$.

A Figura 3.3 representa a trajetória impulsiva de um ponto $x \in X$ em um sistema dinâmico impulsivo.

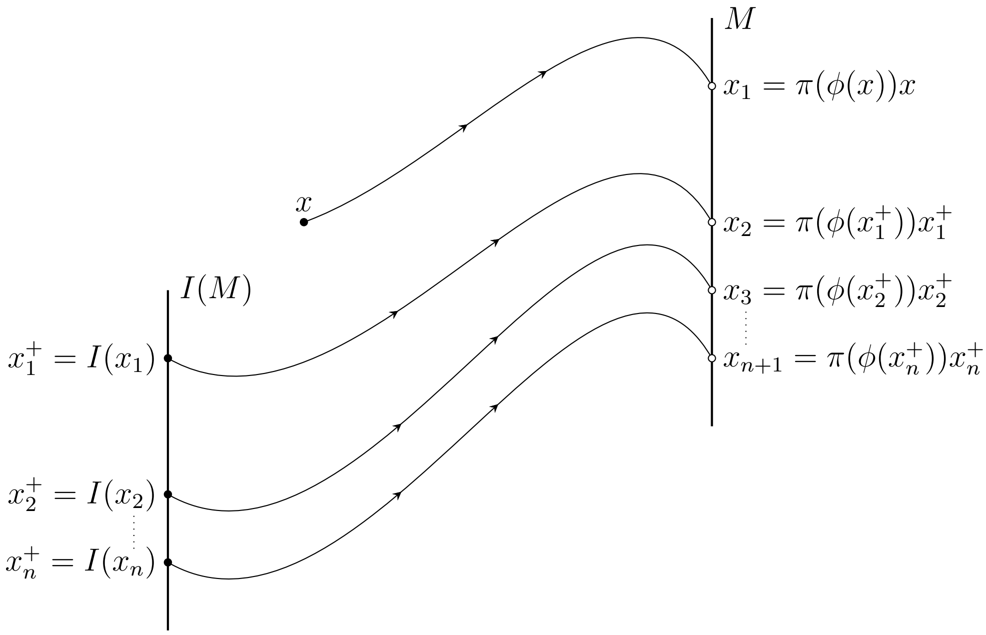

Figura 3.3: Trajetória impulsiva através de x.

Observação 3.4. *Observe que se $I(M) \cap M = \emptyset$, então nenhum ponto de M está em uma trajetória impulsiva, exceto se a trajetória começar em $x \in M$.*

Dado $x \in X$, uma das três condições é satisfeita:

(1) $M^+(x) = \emptyset$;

(2) para algum $n \in \mathbb{N}$, x_k^+ está definido para $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ e $M^+(x_n^+) = \emptyset$;

(3) $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Na primeira condição acima, $\tilde{\pi}(\cdot)x$ é contínua, na segunda $\tilde{\pi}(\cdot)x$ possui um número finito de descontinuidades e na terceira condição $\tilde{\pi}(\cdot)x$ possui infinitas descontinuidades.

Observação 3.5. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo.*

i) *Note que, se $x \in M$ então $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$ para todo $0 \leq t < \phi(x)$, isto é, não há impulso no instante $t = 0$;*

ii) *Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$. Observe que existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $t = t_k(x) + t'$ com $t_0(x) = 0$, $t_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)$ e $0 \leq t' < \phi(x_k^+)$. Assim, podemos escrever $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t')x_k^+$.*

Definição 3.6. *Dados $A \subset X$ e $B \subset \mathbb{R}_+$. Definimos*

$$\tilde{\pi}(t)A = \bigcup_{x \in A} \tilde{\pi}(t)x \quad e \quad \tilde{\pi}(B)A = \bigcup_{x \in A} \{\tilde{\pi}(t)x : t \in B\}.$$

Na sequência apresentamos dois exemplos de sistema dinâmico impulsivo.

Exemplo 3.7. Seja $\pi(\cdot)$ o semigrupo em $\mathbb{R}$ dado por

$$\pi(t)x = t + x, \ x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}_+.$$

Sejam $M = \{1\}$ e $I : M \to \mathbb{R}$ dada por $I(1) = 0$. Assim, $(\mathbb{R}, \pi; M, I)$ é um sistema dinâmico impulsivo. A Figura 5.1 mostra a trajetória de $x = 0$.

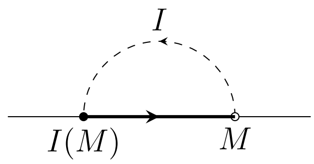

Figura 3.4: Trajetória impulsiva de $x = 0$.

Exemplo 3.8. Seja $\pi(\cdot)$ o semigrupo em $\mathbb{R}^2$ dado no Exemplo 3.1 e considere o sistema dinâmico impulsivo $(\mathbb{R}^2, \pi; M, I)$, onde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$ e a aplicação de impulso $I : M \to \mathbb{R}^2$ é dada por $I(x, y) = (0, \frac{y}{2})$, para todo $(x, y) \in M$. Se $p \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$, então a trajetória impulsiva de p é igual a trajetória contínua $\pi(\cdot)\, p$, pois $M^+(p) = +\infty$. Porém, se $q \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\}$ então $M^+(q_n^+) \neq \emptyset$ para cada $n = 0, 1, 2, ...$, e a trajetória de q sofre infinitos impulsos, veja Figura 3.5. Note que para todo $q \in I(M)$, temos $\phi(q) = 2$.

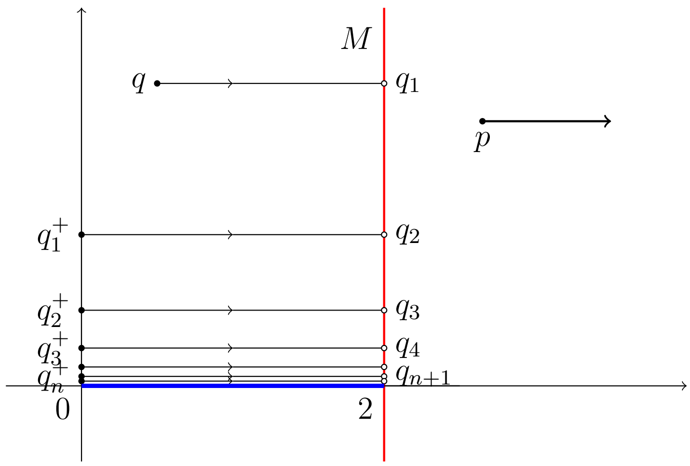

Figura 3.5: Trajetórias impulsivas de p e de q.

Já que estamos interessados no comportamento assintótico de sistemas dinâmicos impulsivos, vamos assumir que todas as trajetórias estão definidas para todo $t \geq 0$, isto é, assumiremos que

$$\boxed{T(x) = +\infty \text{ para todo } x \in X.}$$

A seguinte proposição estabelece uma condição que garante esta propriedade.

Proposição 3.9. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo. Se existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$, então $T(x) = +\infty$ para cada $x \in X$.*

Demonstração. Seja $x \in X$, temos alguns casos a considerar:

- Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\phi(x) = +\infty$ e $T(x) = +\infty$;
- Se para algum $n \in \mathbb{N}$, x_k^+ está definido para $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ e $M^+(x_n^+) = \emptyset$, então $s_n = +\infty$ e $T(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} s_i = +\infty$;

- Suponha que $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Como cada $x_n^+ \in I(M)$ temos que $s_n = \phi(x_n^+) \geq \xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $T(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} s_i = s_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} s_i \geq s_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \xi = +\infty$.

Como queríamos mostrar. $\square$

A condição de que existe um tempo mínimo ξ para o qual as trajetórias partindo de pontos de $I(M)$ encontram novamente o conjunto impulsivo M pode ser garantida, como veremos a seguir.

Proposição 3.10. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo. Se $I(M)$ é compacto e $I(M) \cap M = \emptyset$, então existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ tal que $B(I(M); \epsilon) \cap M = \emptyset$. Dado $z \in I(M)$, temos dois casos a considerar:

- $\pi(s)z \in B(I(M); \epsilon)$ para todo $s \geq 0$. Neste caso a trajetória de z não encontra o conjunto impulsivo M e consideramos $s_z = +\infty$;

- Existe um tempo finito $s_z > 0$ tal que $\pi(s_z)z \in \overline{B(I(M); \epsilon)} \setminus B(I(M); \epsilon)$ e $\pi(t)z \in B(I(M); \epsilon)$ para todo $0 \leq t < s_z$.

Assim, definimos uma aplicação $f : I(M) \to \mathbb{R}_+$ por

$$f(z) = \begin{cases} +\infty, & \pi(s)z \in B(I(M); \epsilon) \text{ para todo } s \geq 0, \\ s_z, & \pi(s_z)z \in \overline{B(I(M); \epsilon)} \setminus B(I(M); \epsilon) \text{ e } \pi(t)z \in B(I(M); \epsilon) \text{ para todo} \\ & 0 \leq t < s_z. \end{cases}$$

Afirmamos que f é semicontínua interiormente. De fato, sejam $a \in I(M)$ arbitrário e uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I(M)$ tal que $x_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Considere primeiramente que $f(a) = +\infty$. Neste caso, suponha que exista uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $\{f(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ convirja para algum $\lambda \geq 0$. Pela continuidade do semigrupo temos

$$\pi(f(x_{n_k}))x_{n_k} \stackrel{k \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(\lambda)a.$$

Como $\pi(f(x_{n_k}))x_{n_k} \in \overline{B(I(M); \epsilon)} \setminus B(I(M); \epsilon)$, que é fechado, então $\pi(\lambda)a \in \overline{B(I(M); \epsilon)} \setminus B(I(M); \epsilon)$, o que é uma contradição pois $\pi(s)a \in B(I(M); \epsilon)$ para todo $s \geq 0$. Portanto, $\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty = f(a)$. Agora, suponha que $f(a) = c \in \mathbb{R}_+$. Seja $l = \liminf_{n \to +\infty} f(x_n)$, se $l < +\infty$ então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ convirja para l. Assim,

$$\pi(f(x_{n_k}))x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(l)a.$$

Como $\pi(f(x_{n_k}))x_{n_k} \in \overline{B(I(M);\epsilon)} \setminus B(I(M);\epsilon)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e M é fechado, segue que $\pi(l)a \in \overline{B(I(M);\epsilon)} \setminus B(I(M);\epsilon)$. Então $f(a) \leq l$, ou seja, $\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(a)$. Portanto, f é semicontínua inferiormente e como $I(M)$ é compacto, então existe um ínfimo $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq f(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$. □

Estabelecida a hipótese $T(x) = +\infty$ para todo $x \in X$, vamos verificar que $\{\tilde{\pi}(t) : t \geq 0\}$ satisfaz as propriedades de semigrupo, veja a proposição a seguir.

Proposição 3.11. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo e $x \in X$, então:*

a) $\tilde{\pi}(0)x = x$*;*

b) $\tilde{\pi}(t+s)x = \tilde{\pi}(t)\tilde{\pi}(s)x$ *para* $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração. Se $\tilde{\pi}$ é contínua não há o que provar, pois não há impulso. Caso contrário, temos:

a) Dado $x \in X$, temos que $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$ para todo $0 \leq t < \phi(x)$, logo $\tilde{\pi}(0)x = \pi(0)x = x$.

b) Sejam $t, s \in \mathbb{R}_+$ e $y = \tilde{\pi}(t)x$. Pela Observação 3.5 podemos escrever $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t')x_k^+$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, onde $t = t_k(x) + t'$ com $t_0(x) = 0$, $t_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)$ e $0 \leq t' < \phi(x_k^+)$. Da mesma forma, podemos escrever $\tilde{\pi}(s)y = \pi(s')y_l^+$ para algum $l \in \mathbb{Z}_+$, com $0 \leq s' < \phi(y_l^+)$, $s = t_l(y) + s'$, $t_0(y) = 0$ e $t_l(y) = \sum_{j=0}^{l-1} \phi(y_j^+)$. Como $y = \tilde{\pi}(t)x = \pi(t')x_k^+$, então

$$\phi(y) = \phi(x_k^+) - t' \quad \text{e} \quad y_j^+ = x_{k+j}^+$$

para $j \in \mathbb{Z}_+$. Assim,

$$\begin{aligned} s &= t_l(y) + s' \\ &= \phi(y_0^+) + \phi(y_1^+) + ... + \phi(y_{l-1}^+) + s' \\ &= \phi(x_k^+) - t' + \phi(x_{k+1}^+) + ... + \phi(x_{k+l-1}^+) + s', \end{aligned}$$

onde $y_0^+ = y$. Somando t e s temos

$$\begin{aligned} t+s &= t_k(x)+t'+\phi(x_k^+)-t'+\phi(x_{k+1}^+)+\ldots+\phi(x_{k+l-1}^+)+s' \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^+)+t'\Big)+\Big(\sum_{i=k}^{k+l-1}\phi(x_i^+)+s'-t'\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{k+l-1}\phi(x_i^+)+s' \\ &= t_{k+l}(x)+s', \end{aligned}$$

com $0 \leq s' < \phi(x_{k+l}^+)$. Logo,

$$\tilde{\pi}(s)\tilde{\pi}(t)x = \tilde{\pi}(s)y = \pi(s')y_l^+ = \pi(s')x_{k+j}^+ = \tilde{\pi}(t_{k+l}(x)+s')x = \tilde{\pi}(t+s)x,$$

finalizando a prova da proposição. $\square$

3.2 Continuidade da Função ϕ

Na seção anterior definimos a função tempo de impacto ϕ que representa o menor tempo positivo para o qual a trajetória de um ponto $x \in X$ encontra o conjunto M. Nesta seção nos dedicamos a estudar a continuidade de tal função. Para isso os pontos de M devem satisfazer certas condições, que chamaremos de condições de tubo, que garantem um bom comportamento do semigrupo $\pi(\cdot)$ próximo ao conjunto impulsivo M.

Definição 3.12. *Sejam $\pi(\cdot)$ um semigrupo em X e $x \in X$. Um conjunto fechado $S \subset X$ contendo x é dito* ***seção*** *(λ-seção) se existem $\lambda > 0$ e um subconjunto fechado L de X tais que:*

i) *$F(L,\lambda) = S$;*

ii) *$F(L,[0,2\lambda])$ contém uma vizinhança de x;*

iii) *$F(L,\nu) \cap F(L,\mu) = \emptyset$, para $0 \leq \nu < \mu \leq 2\lambda$.*

Dizemos que o conjunto $F(L,[0,2\lambda])$ é um ***λ-tudo*** *(ou tubo) e o conjunto L é uma* ***barra*** *(ou λ-barra).*

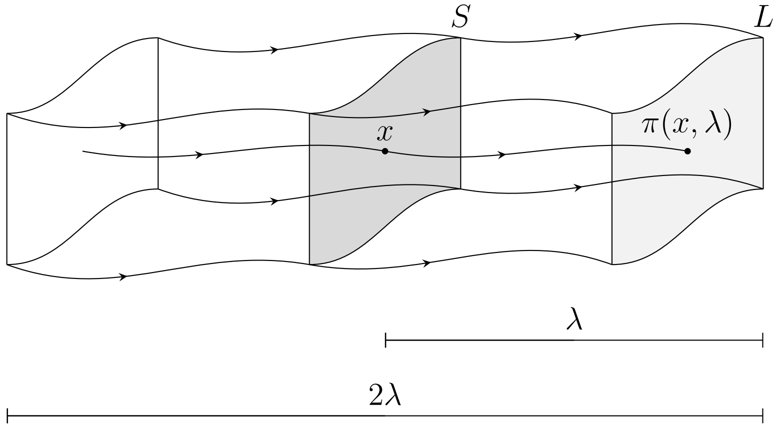

Figura 3.6: λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$.

Eventualmente denotaremos por L_λ o conjunto fechado L de um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$, conforme a Definição 3.12.

Lema 3.13. *Sejam $\pi(\cdot)$ um semigrupo e $x \in X$. Se S é uma λ-seção através de x, $\lambda > 0$, e $0 < \mu \leq \lambda$, então S também é uma μ-seção através de x.*

Demonstração. Se $\mu = \lambda$ não há o que provar. Sejam $0 < \mu < \lambda$ e $L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu)$. Como $\pi(\lambda - \mu)$ é contínua e L_λ é fechado, então L_μ é fechado. Vamos provar que S é uma μ-seção através de x. A condição i) verifica-se por

$$y \in F(L_\mu, \mu) \Leftrightarrow \pi(\mu)y \in L_\mu \Leftrightarrow \pi(\lambda - \mu)\pi(\mu)y \in L_\lambda \Leftrightarrow \pi(\lambda)y \in L_\lambda \Leftrightarrow y \in S.$$

Vamos mostrar que ii) é válido. Como S é uma λ-seção através de x, existe um aberto U_1 contendo x tal que $U_1 \subset F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$. Seja $T = F(L_\lambda, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])$, mostraremos que T é fechado. Tomemos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência contida em T com $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ tal que $\pi(t_n)z_n \in L_\lambda$. Assim, obtemos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ que é um conjunto compacto. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{t} \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$. Pela continuidade de π, temos

$$\pi(t_n)z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(\bar{t})z \in L_\lambda.$$

Logo, $z \in T$ e com isso T é fechado. Agora, note que $S \subset T^c = X \setminus T$ e T^c é aberto, então existe um aberto $U_2 \subset T^c$ contendo x. Assim, $x \in U_1 \cap U_2$ que é um conjunto aberto. Provemos que $U_1 \cap U_2 \subset F(L_\mu, [0, 2\mu])$. Dado $w \in U_1 \cap U_2$, temos que $w \in F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ e $w \in T^c$. Isso implica que $\pi(t)w \in L_\lambda$ para algum $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$. Considere $s = t + \mu - \lambda$. Segue de $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$ que $s = t + \mu - \lambda > 0$ e $0 < t + \mu - \lambda < 2\mu$.

Sabendo que

$$\pi(\lambda-\mu)\pi(t+\mu-\lambda)w=\pi(t)w\in L_\lambda,$$

então

$$\pi(t+\mu-\lambda)w\in L_\mu.$$

Portanto $w\in F(L_\mu,[0,2\mu])$. Por fim, mostraremos que iii) também é válida. Suponha por absurdo que existam $0\leq\alpha<\beta\leq 2\mu$ tais que $F(L_\mu,\alpha)\cap F(L_\mu,\beta)\neq\emptyset$. Seja $y\in F(L_\mu,\alpha)\cap F(L_\mu,\beta)$. Então $\pi(\alpha)y\in L_\mu$ e $\pi(\beta)y\in L_\mu$. Com isso,

$$\pi(\alpha+\lambda-\mu)y=\pi(\lambda-\mu)\pi(\alpha)y\in L_\lambda \text{ e } \pi(\beta+\lambda-\mu)y=\pi(\lambda-\mu)\pi(\beta)y\in L_\lambda.$$

Então,

$$y\in F(L_\lambda,\alpha+\lambda-\mu)\cap F(L_\lambda,\beta+\lambda-\mu),$$

com $0\leq\alpha+\lambda-\mu<\beta+\lambda-\mu\leq 2\lambda$, o que é um absurdo. Portanto, vale o item iii), completando a demonstração do lema. □

Definição 3.14. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo.*

i) *Um λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ dado por uma seção S através de $x\in X$ tal que $S\subset M\cap F(L_\lambda,[0,2\lambda])$ é chamado um **TC-tubo através de x**. Dizemos que um ponto $x\in M$ satisfaz a **Condição de Tubo** (**TC**) se existir um TC-tubo através de* **x***;*

ii) *Um λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ dado por uma seção S através de $x\in X$ tal que $S=M\cap F(L,[0,2\lambda])$ é chamado um **STC-tubo através de x**. Dizemos que um ponto $x\in M$ satisfaz a **Condição Forte de Tubo** (**STC**), se existir um STC-tubo através de x.*

O próximo lema mostra que dado um TC-tubo (STC-tubo) através de x, $F(L,[0,2\lambda])$, com λ-seção S, podemos "diminuir"o tubo $F(L,[0,2\lambda])$ preservando a seção.

Lema 3.15. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo. Suponha que exista um ponto $x\in X$ que satisfaça a condição (TC) $((STC))$ com uma λ-seção S através de x. Para qualquer $0<\eta<\lambda$ o conjunto S também é uma η-seção com um TC-tubo (STC-tubo).*

Demonstração. Seja $0<\eta<\lambda$. Pelo Lema 3.13, S é uma η-seção através de x com o tubo $F(L_\eta,[0,2\eta])$. Logo, por definição, $F(L_\eta,\eta)=S$. Como $S\subset M\cap F(L_\lambda,[0,2\lambda])$, então $S\subset M$. Portanto, $S\subset M\cap F(L_\eta,[0,2\eta])$. □

O próximo exemplo ilustra a diferença entre as condições (TC) e (STC) e mostra que a função ϕ nem sempre é contínua em X.

Exemplo 3.16. Considere o semigrupo em $\mathbb{R}^2$

$$\pi(t)(x,y) = (x+t,y) \tag{3.2}$$

e o conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y, x \geq 0\}$. Note que o ponto $(0,0)$ satisfaz a condição (TC) mas não satisfaz a condição (STC), veja a Figura 3.7. Além disso, para cada ponto $(0,y) \in \mathbb{R}^2$, com $y > 0$, temos que $\phi(0,y) = y$ e $\phi(0,0) = +\infty$. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ dada por $x_n = (0, \frac{1}{n})$ com $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = (0,0)$. Temos $\liminf\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n) = \liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 < +\infty$. Portanto, ϕ não é semicontínua inferiormente no ponto $(0,0)$.

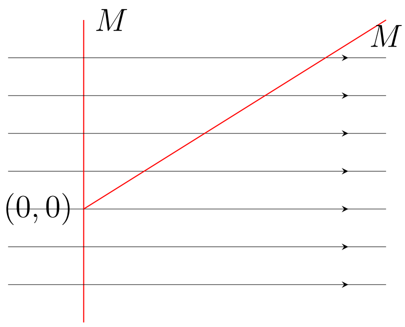

Figura 3.7: Trajetórias do Sistema (3.2).

A seguir apresentamos alguns resultados sobre a semicontinuidade da função ϕ em X.

Teorema 3.17. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo. Então, a função ϕ é semicontínua inferiormente em $X \setminus M$.*

Demonstração. Sejam $a \in X \setminus M$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência arbitrária tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Suponha inicialmente que $\phi(a) = +\infty$. Caso exista uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que a sequência $\{\phi(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ convirja para algum número real $s \geq 0$, então $\pi(\phi(x_{n_k}))x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(s)a$. Como $\pi(\phi(x_{n_k}))x_{n_k} \in M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e M é fechado, segue que $\pi(s)a \in M$. Logo, $\phi(a) \leq s$, o que é uma contradição. Por consequência, $\liminf\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n) = +\infty = \phi(a)$. Agora, vamos supor que $\phi(a) = c$ com $c \in (0, +\infty)$. Seja $l = \liminf\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n)$. Se $l < +\infty$, então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que a sequência $\{\phi(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para l. Assim, $\pi(\phi(x_{n_k}))x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(l)a$. Como $\pi(\phi(x_{n_k}))x_{n_k} \in M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e M é fechado, segue que $\pi(l)a \in M$ e, portanto, $\phi(a) \leq l$, ou seja, $\liminf\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n) \geq \phi(a)$, como queríamos mostrar. $\square$

Teorema 3.18. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo e suponha que $x \in M$ não seja ponto inicial. Então a função ϕ não é semicontínua inferiormente em x.*

Demonstração. Seja $x \in M$ um ponto não inicial, então existem $\epsilon > 0$ e $y \in X$ tais que $\pi(\epsilon)y = x$. Note que podemos escolher $y \notin M$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\pi([0, \epsilon))y \cap M = \emptyset$. Seja $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência crescente tal que $\epsilon_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \epsilon$. Provemos que $\phi(\pi(\epsilon_n)y) = \epsilon - \epsilon_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, inicialmente observamos que $\pi(\epsilon - \epsilon_n)\pi(\epsilon_n)y = \pi(\epsilon)y \in M$. Suponhamos, por absurdo, que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(\pi(\epsilon_{n_0})y) = t_{n_0} < \epsilon - \epsilon_{n_0}$. Assim,

$$\pi(\epsilon_{n_0} + t_{n_0})y = \pi(t_{n_0})\pi(\epsilon_{n_0})y \in M,$$

com $0 < \epsilon_{n_0} < \epsilon_{n_0} + t_{n_0} < \epsilon$, contradizendo o fato de que $\pi([0, \epsilon))y \cap M = \emptyset$. Então definimos $\phi(\pi(\epsilon_n)y) = \epsilon - \epsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, tomando $y_n = \pi(\epsilon_n)y$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $y_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e

$$\phi(y_n) = \phi(\pi(\epsilon_n)y) = \epsilon - \epsilon_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < \phi(x).$$

Portanto, ϕ não é semicontínua inferiormente em $x \in X$. □

O resultado a seguir apresenta condições suficientes para a semicontinuidade superior da função ϕ em X.

Teorema 3.19. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema dinâmico impulsivo tal que todo $x \in M$ satisfaz a condição (TC), então ϕ é semicontínua superiormente em X.*

Demonstração. Dado $x \in X$, mostremos que ϕ é semicontínua superiormente em x. Se $\phi(x) = +\infty$, então para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, ocorre que

$$\limsup_{n\to+\infty} \phi(x_n) \leq +\infty = \phi(x),$$

isso implica que ϕ é semicontínua superiormente em x. Agora, suponha que $\phi(x) = u \in (0, +\infty)$, então $\pi(u)x = y \in M$ e $\pi((0, u))x \cap M = \emptyset$. Como todo ponto em M satisfaz a condição (TC), pelo Lema 3.15, existem $0 < \epsilon < u$ e um conjunto fechado L tais que $F(L, [0, 2\epsilon])$ é um TC-tubo através de $y \in M$ com uma ϵ-seção $S = F(L, \epsilon)$. Como $F(L, [0, 2\epsilon])$ é uma vizinhança de y e $\pi(u)$ é contínua, existe uma vizinhança V de x tal que $\pi(u)V \subset F(L, [0, 2\epsilon])$, isto é, $\pi(u)z \in F(L, [0, 2\epsilon])$ para qualquer $z \in V$. Além disso, para qualquer $z \in V$, existe $t_z \in [0, 2\epsilon]$ tal que

$$\pi(t_z)\pi(u)z = \pi(t_z + u)z \in L,$$

com $u + t_z - \epsilon > 0$. Então $\pi(\epsilon)\pi(u + t_z - \epsilon)z = \pi(u + t_z)z \in L$. Logo

$$\pi(u + t_z - \epsilon)z \in F(L, \epsilon) = S \subset M.$$

Daí, $\phi(z) \leq u + t_z - \epsilon \leq u + \epsilon = \phi(x) + \epsilon$. Portanto, ϕ é semicontínua superiormente em X. □

O teorema abaixo nos diz quando a função ϕ é contínua em X.

Teorema 3.20. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo. Se todo ponto em M não é ponto inicial e satisfaz a condição (TC), então ϕ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, $x \in X \setminus M$.*

Demonstração. Suponha que ϕ seja contínua em $x \in X$. Se $x \in M$ então, pela Teorema 3.18, ϕ não é semicontínua inferiormente em x, o que contradiz o fato de ϕ ser contínua em X. Logo, $x \in X \setminus M$. Reciprocamente, seja $x \in X \setminus M$. Pelo Teorema 3.17, ϕ é semicontínua inferiormente em x e, pelo Teorema 3.19, ϕ é semicontínua superiormente em x. Portanto, ϕ é contínua em x. □

Como estamos interessados na continuidade da função ϕ em $X \setminus M$, vamos assumir ao longo deste trabalho que

$$\boxed{\text{Não existem pontos iniciais em } M.}$$

Definição 3.21. *Dizemos que um ponto $x \in M$ satisfaz a **Condição Forte de Tubo Especial** (**SSTC**) se satisfaz a condição (STC) com um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ e $F(L, [0, \lambda]) \cap I(M) = \emptyset$.*

Finalizamos esta seção com a seguinte proposição que irá nos auxiliar no estudo da invariância negativa dos conjuntos ω-limites nos dando melhor compreensão sobre o comportamento das trajetórias impulsivas perto do conjunto impulsivo M.

Proposição 3.22. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \emptyset$. Seja $y \in M$ satisfazendo (SSTC) com um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$, então $\tilde{\pi}(t)X \cap F(L, [0, \lambda]) = \emptyset$ para todo $t > \lambda$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que existam $t > \lambda$ e $z = \tilde{\pi}(t)x \in F(L, [0, \lambda])$, para algum $x \in X$. Seja $\mu \in [0, \lambda]$ tal que $\pi(\mu)z \in L$. Se $\mu = \lambda$ então $z \in S \subset M$. Como

$I(M) \cap M = \emptyset$, pela Observação 3.4, nenhum ponto de M pode estar em uma trajetória impulsiva, e como $z \in M$ e está na $\tilde{\pi}$-trajetória de x temos uma contradição. Então, $\mu \in [0, \lambda)$.
Se $t < \phi(x)$ então $z = \tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$. Tomando $w = \pi(t - (\lambda - \mu))x$, temos

$$\pi(\lambda)w = \pi(\lambda)\pi(t - (\lambda - \mu))x = \pi(t + \mu)x = \pi(\mu)\pi(t)x = \pi(\mu)z \in L.$$

Logo $w \in S \subset M$, o que é uma contradição pois $t - (\lambda - \mu) < \phi(x)$. Portanto, $\phi(x) \geq t$. Considere agora o caso $z = \tilde{\pi}(t)x = \pi(t')x^+$, onde $x^+ \in I(M)$ e $t' \in [0, \phi(x^+))$. Se $t' \geq \lambda - \mu$, então tome $w = \pi(t' - (\lambda - \mu))x^+$. Assim,

$$\pi(\lambda)w = \pi(\lambda)\pi(t' - (\lambda - \mu))x^+ = \pi(\mu)\pi(t')x^+ = \pi(\mu)z \in L.$$

Consequentemente $w \in S \subset M$, pois $F(L, \lambda) = S$. Dessa forma, chegamos mais uma vez em uma contradição pois $t' - (\lambda - \mu) < t' < \phi(x^+)$. Por fim, se $t' \in [0, \lambda - \mu)$ então $\pi(t' + \mu)x^+ = \pi(\mu)\pi(t')x^+ = \pi(\mu)z \in L$ e $0 \leq t' + \mu < \lambda$. Daí, $x^+ \in I(M)$ e $x^+ \in F(L, [0, \lambda)$, contradizendo a condição (SSTC), isso demonstra a proposição. □

3.3 Conjunto Limite Impulsivo

Nesta seção apresentamos a definição de conjunto limite impulsivo e algumas de suas principais propriedades, que serão fundamentais no estudo de um atrator global para um sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$. Primeiramente exibimos algumas definições e um lema auxiliar.

Definição 3.23. *Considere $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo e A um subconjunto não vazio de X. Dizemos que A é*

i) ***positivamente $\tilde{\pi}$-invariante***, *se $\tilde{\pi}(t)A \subset A$ para todo $t \geq 0$;*

ii) ***negativamente $\tilde{\pi}$-invariante***, *se $\tilde{\pi}(t)A \supset A$ para todo $t \geq 0$;*

iii) ***$\tilde{\pi}$-invariante***, *quando $\tilde{\pi}(t) A = A$ para todo $t \geq 0$.*

Observação 3.24. *Os conceitos de invariância em semigrupos contínuos e não contínuos (sistemas dinâmicos impulsivos) não são equivalentes, como mostra o Exemplo 3.8. Com efeito, o conjunto $A = [0, 2) \times \mathbb{R}$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, mas não é positivamente π-invariante, pois dados $t = 2$ e $(1, 0) \in A$, temos $\pi(2)(1, 0) = (3, 0) \notin A$.*

Definição 3.25. *Dados $A, B \subset X$. Dizemos que* ***A*** $\boldsymbol{\tilde{\pi}}$***-atrai B****, ou que B é* ***atraído*** *por A por meio da trajetória impulsiva $\tilde{\pi}(\cdot)$ quando*

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\left(\tilde{\pi}(t)\, B, A\right) = 0.$$

Ou equivalentemente, se dado $\epsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\epsilon, B) \geq 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)\, B \subset B(A;\epsilon)$ para todo $t \geq \tau$.

Lema 3.26. *Sejam $A \subset X$ e K um subconjunto não vazio e compacto de X tais que K $\tilde{\pi}$-atrai A. Então para quaisquer sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, a sequência $\{\tilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta.*

Demonstração. Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em A e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Como K $\tilde{\pi}$-atrai A e $d(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \leq d_H(\tilde{\pi}(t_n)A, K)$ temos

$$\lim_{n\to+\infty} d(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) = 0.$$

Logo, pelo Lema 1.3, a sequência $\{\tilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, como queríamos mostrar. □

Nós representamos a **órbita positiva impulsiva** de $x \in X$ a direita de $s \geq 0$ pelo conjunto

$$\tilde{\gamma}_s^+(x) = \{\tilde{\pi}(t)x : t \geq s\},$$

e definimos $\tilde{\gamma}^+(x) = \tilde{\gamma}_0^+(x)$.

Dado um conjunto $B \subset X$ denotamos $\tilde{\gamma}_s^+(B) = \bigcup_{x\in B} \tilde{\gamma}_s^+(x)$.

Para $x \in X$ e $B \subset X$, definimos o conjunto $\boldsymbol{\omega}$**-limite impulsivo** de x e B, respectivamente, por

$$\tilde{\omega}(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\tilde{\gamma}_t^+(x)} \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\tilde{\gamma}_t^+(B)}.$$

Semelhante ao caso de semigrupo, apresentamos a caracterização por sequências dos conjuntos ω-limites impulsivos.

Lema 3.27. *Sejam $\pi(\cdot)$ um sistema dinâmico impulsivo e $B \subset X$, então $\tilde{\omega}(B)$ é fechado e*

$$\tilde{\omega}(B) = \{x \in X : \textit{existem sequências } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \textit{ e } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$$

$$\textit{com } t_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \textit{ tais que } \tilde{\pi}(t_n)x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\}.$$

Demonstração. A demonstração é análoga a do Lema 2.18. □

Definição 3.28. *Dizemos que um conjunto $K \subset X$ é um **pré-atrator** se K é pré-compacto, $K \cap M = \emptyset$ e $\tilde{\pi}$-atrai todo subconjunto limitado de X. Se um sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ tem um pré-atrator, então dizemos que o sistema dinâmico impulsivo é **limitado dissipativo**.*

Proposição 3.29. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema dinâmico limitado dissipativo com um pré-atrator K, então para qualquer subconjunto limitado não vazio B de X o conjunto $\tilde{\omega}(B)$ é não vazio, compacto, $\tilde{\omega}(B) \subset \overline{K}$ e $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}$-atrai B.*

Demonstração. Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária em $\mathbb{R}_+$ tal que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Uma vez que B é não vazio, tomemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em B. Como K $\tilde{\pi}$-atrai subconjuntos limitados de X, temos

$$d(\tilde{\pi}(t_n)x_n, \overline{K}) = d_(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \leq d_H(\tilde{\pi}(t_n)B, K) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\overline{K}$ é compacto, pelo Lema 1.3, a sequência $\{\tilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente com limite em $\tilde{\omega}(B)$. Isso mostra que $\tilde{\omega}(B)$ é não vazio. Agora, dado $x \in \tilde{\omega}(B)$, então $\tilde{\pi}(t_n)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ para alguma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Sabendo que K $\tilde{\pi}$-atrai B, temos

$$d(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \leq d_H(\tilde{\pi}(t_n)B, K) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Consequentemente, $x \in \overline{K}$ e, portanto, $\tilde{\omega}(B) \subset \overline{K}$. Além disso, como $\tilde{\omega}(B)$ é fechado e está contido no compacto $\overline{K}$, concluímos que $\tilde{\omega}(B)$ é compacto.

Agora, vamos mostrar que $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}$-atrai B. Suponhamos, por contradição, que existam sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $\epsilon_0 > 0$ tais que

$$d_H(\tilde{\pi}(t_n)x_n, \tilde{\omega}(B)) \geq \epsilon_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mas $d(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, então alguma subsequência de $\{\tilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $x \in \overline{K}$. Consequentemente $x \in \tilde{\omega}(B)$ e, pela continuidade da função distância, $0 = d(x, \tilde{\omega}(B)) \geq \epsilon_0$, o que é uma contradição. Logo, $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}$-atrai B. □

3.3.1 Invariância do Conjunto ω-limite

Já que estamos em busca de um atrator para sistemas dinâmicos impulsivos os conjuntos ω-limites são bons candidatos. Por isso, nesta subseção estudamos a invariância dos conjuntos ω-limites impulsivos.

O próximo lema diz que a função $\tilde{\pi}$ se comporta como uma função contínua em $X \setminus M$, sob uma pequena correção no tempo. É um resultado auxiliar importante que será usado para demonstrar a invariância positiva e negativa do conjunto $\tilde{\omega}(B) \setminus M$.

Lema 3.30. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \emptyset$ e cada ponto de M satisfaz a condição (STC). Sejam $x \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em X tais que $z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Então, dado $t \geq 0$ existe uma sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $\eta_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}(t+\eta_n)z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t)z$.*

Demonstração. Sejam $t \geq 0$, $x \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Vamos separar em quatro casos distintos.

Caso 1: $\phi(x) = +\infty$.

Como ϕ é contínua em $X \setminus M$, então $\phi(z_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(z_n) > t$ para todo $n \geq n_0$. Com isso, para $n \geq n_0$ vale $\tilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n$. Escolhendo $\eta_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pela continuidade de π, obtemos

$$\tilde{\pi}(t+\eta_n)z_n = \tilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(t)x = \tilde{\pi}(t)x.$$

Para os próximos casos, vamos assumir que $\phi(x) < +\infty$. Como $\phi(z_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, podemos supor que $\phi(z_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso 2: $0 \leq t < \phi(x)$.

Seja $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \phi(x) - t$, isto é, $t < \phi(x) - \epsilon$. Pela continuidade de ϕ em x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(x) - \epsilon < \phi(z_n)$ para todo $n \geq n_0$. Então $t < \phi(z_n)$ e por isso $\tilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n$ para todo $n \geq n_0$. Tomando $\eta_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\tilde{\pi}(t+\eta_n)z_n = \tilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(t)x = \tilde{\pi}(t)x.$$

Case 3: $t = \phi(x)$.

Sejam $x_1 = \pi(t)x$ e $\tilde{\pi}(t)x = \tilde{\pi}(\phi(x))x = I(x_1) = x_1^+ \notin M$, pois $I(M) \cap M = \emptyset$. Note que,

$$(z_n)_1 = \pi(\phi(z_n))z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(\phi(x))x = x_1 \in M.$$

Como I é contínua, temos

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x_1) = x_1^+.$$

Defina $\eta_n = \phi(z_n) - \phi(x) = \phi(z_n) - t$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\phi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$ obtemos uma sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo $\eta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo,

$$\tilde{\pi}(t+\eta_n)z_n = \tilde{\pi}(\phi(z_n))z_n = (z_n)_1^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_1^+ = \tilde{\pi}(t)x.$$

Caso 4: $t > \phi(x)$.

Neste caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = t_m(x) + t'$ com $0 \leq t' < \phi(x_m^+)$ e $t_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_m^+)$. Defina $\{(z_n)_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ indutivamente por

$$(z_n)_1 = \pi(\phi(z_n))z_n \text{ e } (z_n)_{i+1} = \pi(\phi((z_n)_i^+))(z_n)_i^+,\ i \in \mathbb{N}.$$

Como $\phi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, temos

$$(z_n)_1 = \pi(\phi(z_n))z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(\phi(x))x = x_1.$$

Pela continuidade de I,

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x_1) = x_1^+.$$

Agora, como $x_1^+ \notin M$ então $\phi((z_n)_1^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_1^+)$. Daí,

$$(z_n)_2 = \pi(\phi((z_n)_1^+))(z_n)_1^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(\phi(x_1^+))x_1^+ = x_2.$$

Prosseguindo com esse processo, obtemos $(z_n)_i \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Também, pela continuidade de I, $(z_n)_i^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_i^+$, $i \in \mathbb{N}$. Assim,

$$t_m(z_n) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((z_n)_i^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+) = t_m(x) = t - t'.$$

Defina a sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $\eta_n = t_m(z_n) + t' - t$. Note que $\eta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $t + \eta_n = t_m(z_n) + t' > 0$. Como $\phi((z_n)_m^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_m^+) > t'$, $m \in \mathbb{N}$, então para n suficientemente grande podemos assumir que $\phi((z_n)_m^+) > t'$. Portanto,

$$\tilde{\pi}(t+\eta_n)z_n = \pi(t')(z_n)_m^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(t')x_m^+ = \tilde{\pi}(t)x,$$

finalizando a demonstração do lema. $\square$

No Exemplo 3.8, temos que $\tilde{\omega}((x,y)) = [0,2] \times \{0\}$ para todo $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2\}$. Mas, a trajetória impulsiva do ponto $(2,0)$ não está contida em $\tilde{\omega}((2,0))$. Portanto, nem sempre o conjunto ω-limite impulsivo é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, como no caso sem impulso. No entanto, o conjunto $\tilde{\omega}((2,0))\backslash M$ no Exemplo 3.8 é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. Veremos a seguir que este fenômeno pode ser garantido.

Proposição 3.31 (Invariância Positiva). *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \emptyset$ e cada ponto de M satisfaz a condição (STC). Então para qualquer conjunto não vazio $B \subset X$, o conjunto $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante.*

Demonstração. Sejam $x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$ e $t \geq 0$. Então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tais que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Pelo Lema 3.30, existe uma sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\eta_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(t_n + t + \eta_n)x_n = \tilde{\pi}(t+\eta_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t)x.$$

Como $t_n + t + \eta_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ então $\tilde{\pi}(t)x \in \tilde{\omega}(B)$. Além disso, a hipótese $I(M) \cap M = \emptyset$ implica que $\tilde{\pi}(t)x \notin M$. Portanto $\tilde{\pi}(t)x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$, e isso prova a invariância positiva de $\tilde{\omega}(B) \setminus M$. $\square$

Para a $\tilde{\pi}$-invariância negativa dos conjuntos ω-limites impulsivos é necessário estudar o comportamento das trajetórias impulsivas próximo ao conjunto impulsivo M. A seguir apresentamos uma sequência de resultados que serão necessários para obter o resultado desejado.

Lema 3.32. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo tal que cada ponto em M satisfaça a condição (STC), $z \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $X \setminus M$ tal que $z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Então, se $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ é tal que $\alpha_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, temos $\tilde{\pi}(\alpha_n)z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$.*

Demonstração. Como $z \in X \setminus M$, pela continuidade ϕ em $X \setminus M$, temos que $\phi(z_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(z)$. Logo, podemos assumir que $\frac{\phi(z)}{2} < \phi(z_n) < \frac{3\phi(z)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\alpha_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, também podemos considerar que $0 \leq \alpha_n < \phi(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, pela continuidade do semigrupo $\pi(\cdot)$, concluímos que $\tilde{\pi}(\alpha_n)z_n = \pi(\alpha_n)z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(0)z = z$. $\square$

Corolário 3.33. Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M)\cap M = \emptyset$ e cada ponto de M satisfaz a condição (STC). Sejam $z \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Então, dado $t \geq 0$ existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ tal que $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}(t+\epsilon_n)z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t)z$.

Demonstração. Sob essas hipóteses, pelo Lema 3.30, sabemos que existe uma sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\eta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}(t+\eta_n)z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t)z \notin M$. Escolhendo $\epsilon_n = \eta_n + |\eta_n|$, $n \in \mathbb{N}$, temos $\epsilon_n \geq 0$ com $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pelo Lema 3.32, $\tilde{\pi}(t+\epsilon_n)z_n = \tilde{\pi}(t+\eta_n+|\eta_n|)z_n = \tilde{\pi}(|\eta_n|)\tilde{\pi}(t+\eta_n)z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t)z$. □

No próximo lema veremos que dado um ponto em M e uma sequência de pontos na "parte esquerda"do tubo, isto é, em $F(L,(\lambda,2\lambda])$, existe uma subsequência de tal modo que é possível encontrar uma sequência de tempos positivos que "empurram"a subsequência para o conjunto M, veja na Figura 3.8.

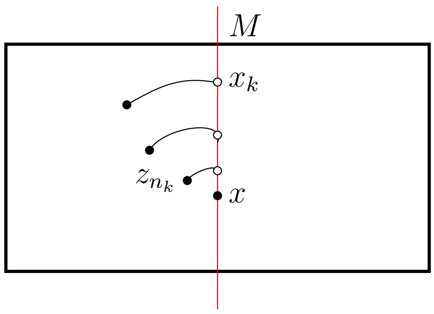

Figura 3.8: Conjunto $F(L,[0,2\lambda])$ do Lema 3.34.

Lema 3.34. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo e $x \in M$ satisfazendo a condição (STC) com λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$. Suponha que exista uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$ e $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Então existem uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\epsilon_k > 0$, $\epsilon_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $x_k = \pi(\epsilon_k)z_{n_k} \in M$, $\phi(z_{n_k}) = \epsilon_k$ e $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$.*

Demonstração. Seja $x \in M$ satisfazendo a condição (STC) com λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ e suponha que exista uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F(L,(\lambda,2\lambda])$ tal que $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Como $z_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$, existe $\lambda_n \in (\lambda,2\lambda]$ tal que $\pi(\lambda_n)z_n \in L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos escolher uma subsequência $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente tal que $\lambda_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda} \in [\lambda,2\lambda]$. Pela continuidade de π e usando o fato de que L é fechado, temos que $\pi(\lambda_{n_k})z_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(\overline{\lambda})x \in L$. Assim, $x \in F(L,\lambda)\cap F(L,\overline{\lambda})$, o que implica que $\overline{\lambda} = \lambda$. Sejam $\epsilon_k = \lambda_{n_k} - \lambda > 0$ e $x_k = \pi(\epsilon_k)z_{n_k}$. Temos

$$\pi(\lambda)x_k = \pi(\lambda)\pi(\epsilon_k)z_{n_k} = \pi(\lambda_{n_k})z_{n_k} \in L.$$

Logo $x_k \in F(L,\lambda) = S \subset M$. Note que $\epsilon_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e, pela continuidade de π,

$$x_k = \pi(\epsilon_k)z_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(0)x = x.$$

Nos resta mostrar que $\phi(z_{n_k}) = \epsilon_k$. Suponha que exista $t_0 \in (0,\epsilon_k)$ tal que $w_{n_k} = \pi(t_0)z_{n_k} \in M$. Assim,

$$\pi(\lambda_{n_k} - t_0)w_{n_k} = \pi(\lambda_{n_k} - t_0)\pi(t_0)z_{n_k} = \pi(\lambda_{n_k})z_{n_k} \in L.$$

Como $0 < \lambda_{n_k} - t_0 < 2\lambda - t_0 < 2\lambda$, então $w_{n_k} \in F(L,[0,2\lambda]) \cap M = S$. Com isso, $w_{n_k} \in F(L,\lambda) \cap F(L,\lambda_{n_k} - t_0)$, o que implica $\lambda = \lambda_{n_k} - t_0$. Consequentemente, $t_0 = \lambda_{n_k} - \lambda = \epsilon_k$, o que é uma contradição. Portanto, $\phi(z_{n_k}) = \epsilon_k$. □

O lema a seguir nos garante que o conjunto ω-limite impulsivo possui pontos não pertencentes ao conjunto M.

Lema 3.35. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo com $I(M) \cap M = \emptyset$. Suponha que cada ponto de M satisfaça a condição (SSTC) e seja $B \subset X$. Se $y \in \tilde{\omega}(B) \cap M$, então $I(y) \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$.*

Demonstração. Sejam $B \subset X$ e $y \in \tilde{\omega}(B) \cap M$. Então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tais que $y_n = \tilde{\pi}(t_n)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Podemos assumir que $y_n \in F(L,[0,2\lambda])$ e $t_n > \lambda$ para algum λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ através de y e n suficientemente grande. Conforme a Proposição 3.22 sabemos que $\tilde{\pi}(t)X \cap F(L,[0,\lambda]) = \emptyset$ para $t \geq \lambda$, então $y_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$. Pelo Lema 3.34, existem uma subsequência $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\epsilon_k > 0$ e $\epsilon_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tais que $\pi(\epsilon_k)y_{n_k} \in M$ e $\pi(\epsilon_k)y_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Pela continuidade de I, obtemos

$$\tilde{\pi}(t_{n_k} + \epsilon_k)x_{n_k} = \tilde{\pi}(\epsilon_k)\tilde{\pi}(t_{n_k})x_{n_k} = \tilde{\pi}(\epsilon_k)y_{n_k} = I(\pi(\epsilon_k)y_{n_k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I(y).$$

Desse modo, $I(y) \in \tilde{\omega}(B)$ e, como $I(M) \cap M = \emptyset$, concluímos que $I(y) \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$. □

Com os resultados obtidos anteriormente podemos provar a $\tilde{\pi}$-invariância negativa para o conjunto ω-limite impulsivo.

Proposição 3.36 (Invariância Negativa)**.** *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \emptyset$ e cada ponto de M satisfaz a condição (SSTC), e seja $B \subset X$. Se $\tilde{\omega}(B)$ é compacto e $\tilde{\pi}$-atrai B, então $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ é negativamente $\tilde{\pi}$-invariante.*

Demonstração. Sejam $x \in \tilde{\omega}(B)\backslash M$ e $t \geq 0$. Então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tais que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Note que $t_n - t \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Como $\tilde{\omega}(B)$ é compacto e $\tilde{\pi}$-atrai B, pelo Lema 3.26, a sequência $\{\tilde{\pi}(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, que manteremos a mesma notação, e $\tilde{\pi}(t_n - t)x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \tilde{\omega}(B)$.

Caso 1: $y \in M$.

Pela Proposição 3.22 podemos assumir que os pontos $y_n = \tilde{\pi}(t_n - t)x_n$ estão em $F(L, (\lambda, 2\lambda])$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $F(L, [0, 2\lambda])$ é um λ-tubo através de y. O Lema 3.34 nos garante a existência de uma sequência $\epsilon_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\epsilon_n > 0$, tal que $z_n = \pi(\epsilon_n)y_n \in M$ e $z_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$, renomeando a sequência se necessário. Usando a continuidade de I obtemos que $z_n^+ = \tilde{\pi}(\epsilon_n)y_n = I(z_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(y) = z$, e $z \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$, pelo Lema 3.35. Agora, pelo Corolário 3.33, existe uma sequência não negativa $\alpha_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que $\tilde{\pi}(t + \alpha_n)z_n^+ \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t)z$. Por outro lado,

$$\tilde{\pi}(t + \alpha_n)z_n^+ = \tilde{\pi}(t + \alpha_n)\tilde{\pi}(\epsilon_n)y_n = \tilde{\pi}(t + \alpha_n + \epsilon_n)\tilde{\pi}(t_n - t)x_n = \tilde{\pi}(\alpha_n + \epsilon_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n$$

e, pelo Lema 3.32, $\tilde{\pi}(\alpha_n + \epsilon_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$. Isso implica que $\tilde{\pi}(t + \alpha_n)z_n^+ \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Logo, $x = \tilde{\pi}(t)z \in \tilde{\pi}(t)(\tilde{\omega}(B) \setminus M)$.

Case 2: $y \notin M$.

Denote $y_n = \tilde{\pi}(t_n - t)x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 3.33, existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\epsilon_n \geq 0$, $\epsilon_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de modo que

$$\tilde{\pi}(t + \epsilon_n)y_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t)y.$$

Mas,

$$\tilde{\pi}(t + \epsilon_n)y_n = \tilde{\pi}(t + \epsilon_n)\tilde{\pi}(t_n - t)x_n = \tilde{\pi}(\epsilon_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x,$$

conforme o Lema 3.32. Portanto, $x = \tilde{\pi}(t)y \in \tilde{\pi}(t)(\tilde{\omega}(B) \setminus M)$. $\square$

3.3.2 Atração do Conjunto ω-limite

Sabemos que se um sistema dinâmico impulsivo é limitado dissipativo e B é um subconjunto não vazio de X, então $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}$-atrai B (Proposição 3.29). Mas $\tilde{\omega}(B)$ pode possuir pontos de M e, como veremos adiante, buscando uma representação do atrator global para sistemas com impulsos por conjuntos limites não queremos pontos de M no atrator global. Por isso, nosso objetivo é mostrar que $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ também $\tilde{\pi}$-atrai B.

Lema 3.37. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo com as seguintes propriedades:*

H1 - *O sistema dinâmico impulsivo é limitado dissipativo com um pré-atrator K;*

H2 - *$I(M) \cap M = \emptyset$ e cada ponto de M satisfaz a condição $(SSTC)$;*

H3 - *Existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$.*

Se B é um subconjunto limitado não vazio de X, então $\tilde{\omega}(B) \cap M \subset \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$.

Demonstração. Seja $x \in \tilde{\omega}(B) \cap M$, então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tais que $z_n = \tilde{\pi}(t_n)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Seja $F(L, [0, 2\lambda])$ um λ-tudo através de x. Como $F(L, [0, 2\lambda])$ contém uma vizinhança de x então contém uma infinidade de pontos $z_n = \tilde{\pi}(t_n)x_n$. Assim, podemos assumir, pela Proposição 3.22, que $z_n = \tilde{\pi}(t_n)x_n \in F(L, (\lambda, 2\lambda])$. Sejam $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como no Lema 3.34 e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $\epsilon_n = \lambda_n - \lambda > 0$, isto é, $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ e $\lambda_n > \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência de $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se necessário, vamos assumir que $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\lambda, 2\lambda]$ e $0 < \epsilon_n = \lambda_n - \lambda < \frac{\xi}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in M$, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $F(x, (0, \epsilon_x)) \cap M = \emptyset$. Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \min\left\{\epsilon_x, \frac{\xi}{2}\right\}$. Para cada $m \geq m_0$ considere a sequência

$$w_n^m = \tilde{\pi}\left(t_n - \frac{1}{m}\right)x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Pela Proposição 3.29, $\tilde{\omega}(B)$ é compacto e $\tilde{\pi}$-atrai B. Então, pelo Lema 3.26, podemos assumir que a sequência $\{w_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, que denotamos da mesma maneira, com $w_n^m \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_m \in \tilde{\omega}(B)$ para cada $m \geq m_0$.

Afirmamos que $\phi(w_n^m) > \frac{1}{m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$. Com efeito, suponhamos que $\phi(w_n^m) \leq \frac{1}{m}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$. Note que $\pi(\phi(w_n^m))w_n^m \in M$ e considere $v_n^m = \tilde{\pi}(\phi(w_n^m))w_n^m \in I(M)$. Temos que

$$\pi\left(\epsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m)\right)v_n^m = \pi(\epsilon_n)\pi\left(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m)\right)v_n^m.$$

Como $\frac{1}{m} - \phi(w_n^m) < \frac{1}{m} < \xi$, então

$$\pi\left(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m)\right)v_n^m = \tilde{\pi}\left(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m)\right)v_n^m = \tilde{\pi}\left(\frac{1}{m}\right)w_n^m$$

$$= \tilde{\pi}\left(\frac{1}{m}\right)\tilde{\pi}\left(t_n - \frac{1}{m}\right)x_n = \tilde{\pi}(t_n)x_n = z_n.$$

Assim, $\pi\left(\epsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m)\right) v_n^m = \pi(\epsilon_n) z_n \in M$, o que é uma contradição pois $0 < \epsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m) < \epsilon_n + \frac{1}{m} < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$ e $v_n^m \in I(M)$. Isso mostra que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$,

$$\pi\left(\frac{1}{m}\right) w_n^m = \tilde{\pi}\left(\frac{1}{m}\right) w_n^m = \tilde{\pi}\left(\frac{1}{m}\right) \tilde{\pi}\left(t_n - \frac{1}{m}\right) x_n = \tilde{\pi}(t_n) x_n.$$

Daí, a continuidade de π resulta que $\pi\left(\frac{1}{m}\right) y_m = x \in M$. Porém $\frac{1}{m} < \epsilon_x$, isto é, $y_m \in F(x, (0, \epsilon_x))$ o que implica que $y_m \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$.

Agora, suponhamos que $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possua uma subsequência $\{y_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto $x_0 \neq x$. Mas, $x = \pi\left(\frac{1}{m_i}\right) y_{m_i} \stackrel{i\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(0)x_0 = x_0$, esta contradição prova que $y_m \stackrel{m\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Portanto, $x \in \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$. □

Proposição 3.38. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo com as seguintes propriedades:*

H1 - *O sistema dinâmico impulsivo é limitado dissipativo com um pré-atrator K;*

H2 - *$I(M) \cap M = \emptyset$ e cada ponto de M satisfaz a condição (SSTC);*

H3 - *Existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$.*

Se B é um subconjunto limitado não vazio de X, então $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ $\tilde{\pi}$-atrai B.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\tilde{\omega}(B) = \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$. Com efeito, como $\tilde{\omega}(B) \setminus M \subset \tilde{\omega}(B)$ segue que $\overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M} \subset \overline{\tilde{\omega}(B)} = \tilde{\omega}(B)$. Por outro lado, dado $x \in \tilde{\omega}(B)$. Se $x \in \tilde{\omega}(B) \cap M$ então, pelo Lema 3.37, $x \in \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$. Agora, se $x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$ então $x \in \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$, verificando a igualdade desejada.

Agora, a Proposição 3.29 nos garante que $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}$-atrai B. Daí,

$$0 = \lim_{t\to+\infty} d_H(\tilde{\pi}(t)B, \tilde{\omega}(B)) = \lim_{t\to+\infty} d_H(\tilde{\pi}(t)B, \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}) = \lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\tilde{\pi}(t)B} d(x, \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}).$$

Mas, $d(x, \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}) = d(x, \tilde{\omega}(B) \setminus M)$. Logo,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\tilde{\pi}(t)B} d(x, \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}) = \lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\tilde{\pi}(t)B} d(x, \tilde{\omega}(B) \setminus M) = \lim_{t\to+\infty} d_H(\tilde{\pi}(t)B, \tilde{\omega}(B) \setminus M) = 0.$$

Então, $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ $\tilde{\pi}$-atrai B, como queríamos provar. □

Capítulo

4

Atratores Globais para Sistemas Dinâmicos Impulsivos

Nosso objetivo neste capítulo é desenvolver uma teoria análoga ao Capítulo 2 para sistemas dinâmicos impulsivos, isto é, buscamos uma noção útil de atrator global para sistema dinâmico com impulso de forma que este objeto descreva o comportamento do sistema ao longo do tempo. Para isso, é necessário encontrar uma definição adequada de atrator global. Utilizamos principalmente as referências [1] e [3] para este capítulo.

No caso contínuo (sem impulso), o atrator global é um conjunto compacto. Em [2] os autores mantêm essa propriedade propondo a seguinte definição de atrator global impulsivo.

Definição [7, Definição 3.3]. *Um subconjunto não vazio $\mathcal{A}$ de X é um atrator global para um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ se satisfaz as seguintes condições:*

i) *$\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{A} \cap M = \emptyset$;*

ii) *$\mathcal{A}$ é $\tilde{\pi}$-invariante;*

iii) *$\mathcal{A}$ $\tilde{\pi}$-atrai todo subconjunto limitado de X.*

Esta definição é consistente com a noção de atrator global para semigrupos, isto é, quando $M = \emptyset$ as definições coincidem e, de fato, essa noção de atrator global é útil para descrever a dinâmica assintótica de $\tilde{\pi}$ em muitos casos. No entanto, como $\mathcal{A}$ é um conjunto compacto, M é um conjunto fechado e $\mathcal{A} \cap M = \emptyset$ existe uma distância positiva entre esses conjuntos, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\mathcal{A}; \epsilon) \cap M = \emptyset$. Sendo assim, dado $x \in X$, como $\mathcal{A}$ $\tilde{\pi}$-atrai $\{x\}$, existe $t_x \geq 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)x \subset B(\mathcal{A}; \epsilon)$ para todo $t \geq t_x$. Portanto,

$\tilde{\pi}(t)x \notin M$ para todo $t \geq t_x$, ou seja, a partir de um certo tempo a trajetória impulsiva de x nunca atinge o conjunto impulsivo M tornando-se uma trajetória contínua. Com isso, essa definição exclui uma classe importante de sistemas dinâmicos impulsivos, uma vez que o comportamento assintótico de $\tilde{\pi}$ não é qualitativamente diferente do comportamento assintótico de π.

Para ilustrar, apresentamos um exemplo, retirado de [1], onde o comportamento assintótico de π e $\tilde{\pi}$ são diferentes.

Exemplo 4.1. Considere a seguinte equação diferencial contínua

$$\dot{x} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x, & x \geq 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

com a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. As soluções de (4.1) são dadas por

$$\pi(t)x_0 = \begin{cases} t + x_0, & x_0 < 0 \text{ e } t \in [0, -x_0), \\ 1 - e^{-t-x_0}, & x_0 < 0 \text{ e } t \in [-x_0, +\infty), \\ (x_0 - 1)e^{-t} + 1, & x_0 \geq 0 \text{ e } t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Note que neste caso existe apenas um conjunto limitado invariante, a saber, o conjunto $\{1\}$, que chamamos de solução de equilíbrio e que é o atrator global para o Sistema (4.1).

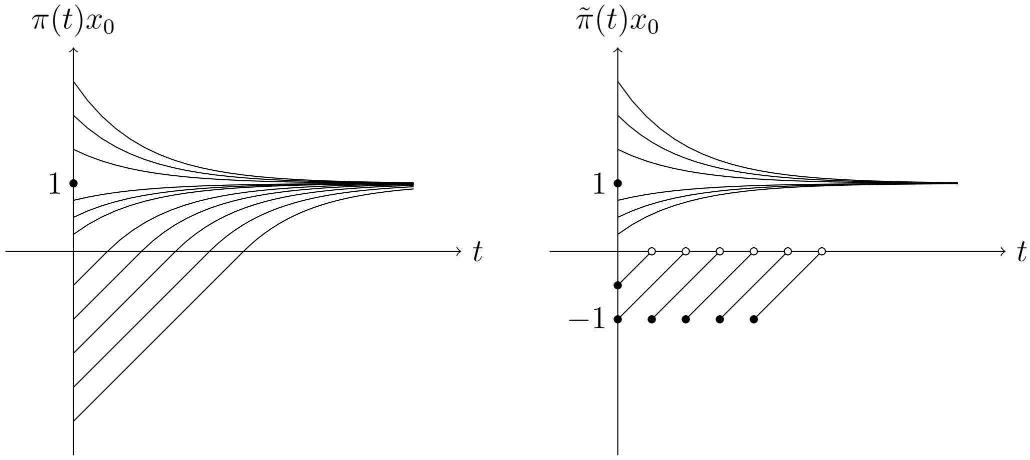

Figura 4.1: Trajetórias $\pi(t)x_0$ e $\tilde{\pi}(t)x_0$.

Agora, consideramos o conjunto impulsivo $M = \{0\}$ e a ação impulsiva $I : M \to \mathbb{R}$ dada por $I(0) = -1$. As soluções do Sistema (4.1) com a ação de I são dadas por

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} t + x_0, & x_0 < 0 \text{ e } t \in [0, -x_0), \\ t + x_0 - n, & x_0 < 0 \text{ e } t \in [-x_0 + n - 1, -x_0 + n), n \in \mathbb{N}, \\ (x_0 - 1)e^{-t} + 1, & x_0 \geq 0 \text{ e } t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Neste caso, a dinâmica é bastante diferente, já que apareceu a órbita periódica impulsiva $[-1, 0)$, veja Figura 4.1.

Observe que, neste exemplo, não existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ que satisfaça a definição apresentada em [2]. Mas destacamos alguns conjuntos interessantes:

- O conjunto $\mathcal{A}_1 = [-1, 0) \cup \{1\}$ é $\tilde{\pi}$-invariante, $\tilde{\pi}$-atrai conjuntos limitados e $\mathcal{A}_1 \cap M = \emptyset$, mas $\mathcal{A}_1$ não é compacto.

- O conjunto $\mathcal{A}_2 = [-1, 0] \cup \{1\}$ $\tilde{\pi}$-atrai conjuntos limitados, é compacto, mas $\mathcal{A}_2 \cap M \neq \emptyset$ e não é $\tilde{\pi}$-invariante.

- O conjunto $\mathcal{A}_3 = [-1, 1]$ $\tilde{\pi}$-atrai conjuntos limitados, é compacto, é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, mas não é negativamente $\tilde{\pi}$-invariante e $\mathcal{A}_3 \cap M \neq \emptyset$.

Vimos na teoria de semigrupos contínuos que o atrator global é caracterizado como a reunião de todas as soluções globais limitadas de $\pi(\cdot)$ (Corolário 2.29), e esta propriedade está intimamente relacionada com a invariância do atrator global. Com isso, dado que os conjuntos $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ não cumprem tal propriedade, conjecturamos que o conjunto $\mathcal{A}_1$ é um candidato natural ao atrator global do sistema impulsivo uma vez que é o único $\tilde{\pi}$-invariante.

Além disso, recordando a definição de trajetórias impulsivas vemos que não existem pontos de M nas trajetórias impulsivas. Sendo assim, se estamos buscando a propriedade de $\tilde{\pi}$-invariância para o atrator global impulsivo, então é razoável supor que nenhum ponto de M deve estar nele. Com isso, a condição $\mathcal{A} \cap M = \emptyset$ precisa ser mantida e isso implica que a hipótese de compacidade precisa ser enfraquecida. Podemos ver que o conjunto $\mathcal{A}_1$ acima não é compacto, mas é pré-compacto e, além disso, $\mathcal{A}_1 = \overline{\mathcal{A}_1} \setminus M$.

Por estes argumentos tirados do exemplo, buscando alcançar uma classe maior de sistemas dinâmicos impulsivos, em [1] os autores apresentam a seguinte definição de atrator global que iremos considerar neste trabalho.

Definição 4.2. *Dizemos que um conjunto não vazio $\mathcal{A} \subset X$ é um **atrator global** para o sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ se*

i) *$\mathcal{A}$ é pré-compacto e $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus M$;*

ii) *$\mathcal{A}$ é $\tilde{\pi}$-invariante;*

iii) *$\mathcal{A}$ $\tilde{\pi}$-atrai todo subconjunto limitado de X.*

Observação 4.3. *Note que um atrator $\mathcal{A}$ para um sistema dinâmico impulsivo cumpre a definição de pré-atrator, isto é, é pré-compacto, $\mathcal{A} \cap M = \emptyset$ e $\tilde{\pi}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X. Portanto, se $(X, \pi; M, I)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$, então o sistema dinâmico impulsivo é limitado dissipativo com pré-atrator $\mathcal{A}$.*

De posse da Definição 4.2, no Exemplo 2.7 o conjunto $\mathcal{A}_1$ é um atrator global para o sistema dinâmico impulsivo.

4.1 Propriedades do Atrator Global Impulsivo

A seguir, apresentamos algumas propriedades do atrator global impulsivo que são análogas às propriedades que vimos para o caso sem impulso.

Proposição 4.4. *Se um sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$, então ele é único.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sejam subconjuntos de X satisfazendo a Definição 4.2 de atrator global. Então, como ambos atraem subconjuntos limitados de X e são $\tilde{\pi}$-invariantes, temos

$$d_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \lim_{t \to +\infty} d_H(\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0 = \lim_{t \to +\infty} d_H(\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = d_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1).$$

Logo, $\mathcal{A}_1 \subset \overline{\mathcal{A}_2} \Rightarrow \overline{\mathcal{A}_1} \subset \overline{\mathcal{A}_2}$ e $\mathcal{A}_2 \subset \overline{\mathcal{A}_1} \Rightarrow \overline{\mathcal{A}_2} \subset \overline{\mathcal{A}_1}$, o que implica que $\overline{\mathcal{A}_1} = \overline{\mathcal{A}_2}$. E, consequentemente, $\mathcal{A}_1 = \overline{\mathcal{A}_1} \setminus M = \overline{\mathcal{A}_2} \setminus M = \mathcal{A}_2$. □

Definição 4.5. *Dizemos que uma função $\psi : \mathbb{R} \to X$ é uma **solução global** de $\tilde{\pi}$ se*

$$\tilde{\pi}(t)\psi(s) = \psi(t+s), \ \text{para todo } t \geq 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

*Se $\psi(0) = x \in X$, dizemos que ψ é uma **solução global de $\tilde{\pi}$ através de x**.*

Observação 4.6. *O conjunto $\psi(\mathbb{R}) = \{\psi(s) : s \in \mathbb{R}\}$ é $\tilde{\pi}$-invariante. De fato, sejam $t \geq 0$ arbitrário e $\psi(s) \in \psi(\mathbb{R})$. Temos, $\tilde{\pi}(t)\psi(s) = \psi(t+s) \in \psi(\mathbb{R})$. Por outro lado, $\psi(s) = \tilde{\pi}(t)\psi(s-t) \in \tilde{\pi}(t)\psi(\mathbb{R})$. Então, $\psi(\mathbb{R}) = \tilde{\pi}(t)\psi(\mathbb{R})$ para todo $t \geq 0$, provando a $\tilde{\pi}$-invariância de $\psi(\mathbb{R})$.*

Proposição 4.7. *Se o sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ possui atrator global $\mathcal{A}$ e $I(M) \cap M = \emptyset$, então*

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \textit{existe uma solução global limitada de } \tilde{\pi} \textit{ através de } x\}.$$

Demonstração. Seja ψ uma solução global limitada de $\tilde{\pi}$. Suponha que $\psi(t) \in M$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Então, $\tilde{\pi}(s)\psi(t-s) = \psi(t) \in M$ para todo $s > 0$, mas isso não pode ocorrer, já que $I(M) \cap M = \emptyset$. Logo, concluímos que $\psi(\mathbb{R}) \cap M = \emptyset$. Agora, como $\psi(\mathbb{R})$ é limitado e $\tilde{\pi}$-invariante, temos

$$0 = \lim_{t \to +\infty} d_H(\tilde{\pi}(t)\psi(\mathbb{R}), \mathcal{A}) = \lim_{t \to +\infty} d_H(\psi(\mathbb{R}), \mathcal{A}) = d_H(\psi(\mathbb{R}), \mathcal{A}).$$

Daí, $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{A}}$ e, consequentemente, $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{A}} \setminus M = \mathcal{A}$.

Por outro lado, tomemos $x \in \mathcal{A}$. Como A é $\tilde{\pi}$-invariante, então $x \in \tilde{\pi}(1)\mathcal{A}$. Desse modo, existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $\tilde{\pi}(1)x_{-1} = x$. Da mesma forma, existe $x_{-2} \in \mathcal{A}$ tal que $\tilde{\pi}(1)x_{-2} = x_{-1}$. Indutivamente, construímos uma sequência $\{x_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $\tilde{\pi}(1)x_{-n} = x_{-n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $x_0 = x$. Definimos uma aplicação $\psi(t) : \mathbb{R} \to X$ por

$$\psi(t) = \begin{cases} \tilde{\pi}(t+n)x_{-n}, & \text{se } t \in [-n, -n+1], n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{\pi}(t)x_0, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Como vimos na demonstração do Teorema 2.12, por meio dessa construção, ψ é uma solução global de $\tilde{\pi}$ através de x, e é limitada pois $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{A}}$, o que finaliza a prova da proposição. □

A seguir vemos uma caracterização de atrator global para sistemas dinâmicos impulsivos por meio dos conjuntos ω-limites impulsivos.

Proposição 4.8. *Se um sistema dinâmico $(X, \pi; M, I)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ e $I(M) \cap M = \emptyset$, então*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} (\tilde{\omega}(B) \setminus M),$$

onde $\mathcal{B}(X)$ denota a coleção de todos os subconjuntos limitados de X.

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{B}(X)$, como $\mathcal{A}$ é também um pré-atrator para o sistema, pela Proposição 3.29, $\tilde{\omega}(B) \subset \overline{\mathcal{A}}$. Assim, $\tilde{\omega}(B) \setminus M \subset \overline{\mathcal{A}} \setminus M = \mathcal{A}$.

Para mostrar a inclusão inversa, seja $x \in \mathcal{A}$. Então $x \notin M$ e, pela Proposição 4.7, existe uma solução global limitada ψ de $\tilde{\pi}$ através de x. Seja $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência arbitrária tal que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Como $\tilde{\pi}(t_n)\psi(-t_n) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $x \in \tilde{\omega}(\psi(\mathbb{R}))$. Logo, $x \in \tilde{\omega}(\psi(\mathbb{R})) \setminus M$. Visto que $\psi(\mathbb{R})$ é um subconjunto limitado de X, concluímos que $x \in \displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} (\tilde{\omega}(B) \setminus M)$. □

A próxima proposição mostra que o atrator global $\mathcal{A}$ de um sistema dinâmico impulsivo é o menor subconjunto de X satisfazendo $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus M$ e $\tilde{\pi}$-atraindo subconjuntos limitados de X.

Proposição 4.9. *Se um sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ possui atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é o menor subconjunto entre todos os subconjuntos K de X tal que $K = \overline{K} \setminus M$ e que $\tilde{\pi}$-atrai todo subconjunto limitado de X.*

Demonstração. Seja $K \subset X$ tal que $K = \overline{K} \setminus M$ e K $\tilde{\pi}$-atrai todo subconjunto limitado de X. Como $\mathcal{A}$ é $\tilde{\pi}$-invariante e K $\tilde{\pi}$-atrai $\mathcal{A}$, temos

$$d_H(\mathcal{A}, K) = d_H(\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}, K) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Consequentemente, $\mathcal{A} \subset \overline{K}$, o que implica que $\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{K}$ e $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus M \subset \overline{K} \setminus M = K$. Portanto, $\mathcal{A} \subset K$. □

Definição 4.10. *Dizemos que um sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é **fortemente limitado dissipativo**, se existe um conjunto não vazio pré-compacto K em X tal que $K \cap M = \emptyset$ e $\tilde{\pi}$-absorve todo subconjunto limitado de X, isto é, para qualquer subconjunto limitado $B \subset X$ existe $t_B \geq 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)B \subset K$ para todo $t \geq t_B$. O conjunto K é chamado **$\tilde{\pi}$-absorvente**.*

Observe que se $(X, \pi; M, I)$ é fortemente limitado dissipativo, então é limitado dissipativo. A seguir, apresentamos um resultado que garante a existência de atrator global para um sistema dinâmico impulsivo.

Teorema 4.11. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema fortemente limitado dissipativo tal que cada ponto de M satisfaz a condição (SSTC), $I(M) \cap M = \emptyset$ e existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$. Então, $(X, \pi; M, I)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Além disso, se K é seu conjunto $\tilde{\pi}$-absorvente, então $\mathcal{A}$ é dado por $\mathcal{A} = \tilde{\omega}(K) \setminus M$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.29, $\tilde{\omega}(K)$ é não vazio, compacto e $\tilde{\pi}$-atrai K. Usando isso e as Proposições 3.31 e 3.36, temos que $\tilde{\omega}(K)\setminus M$ é $\tilde{\pi}$-invariante. Agora, se $\tilde{\omega}(K) \cap M = \emptyset$, então $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ é não vazio. Mas, se $\tilde{\omega}(K) \cap M \neq \emptyset$ então, pelo Lema 3.35, $\tilde{\omega}(K) \setminus M$

é não vazio. Além disso, temos $\overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M} \subset \overline{\tilde{\omega}(K)} = \tilde{\omega}(K)$. Logo, $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ é um subconjunto pré-compacto de X. Agora, dado $x \in \tilde{\omega}(K)$, se $x \in \tilde{\omega}(K) \setminus M$, então $x \in \overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M}$. Mas, se $x \in \tilde{\omega}(K) \cap M$ então, pelo Lema 3.37, $x \in \overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M}$. Portanto, $\tilde{\omega}(K) = \overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M}$, o que implica que

$$\tilde{\omega}(K) \setminus M = \overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M} \setminus M.$$

Nos resta mostrar que $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ $\tilde{\pi}$-atrai todo subconjunto limitado de X. Tomemos arbitrariamente $B \subset X$ limitado. Afirmamos que $\tilde{\omega}(B) \subset \tilde{\omega}(K)$. De fato, seja $x \in \tilde{\omega}(B)$, então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tais que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Como o sistema é fortemente limitado dissipativo, existe $t_B \geq 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)x_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq t_B$. Logo, $\tilde{\pi}(t_n - t_B)\tilde{\pi}(t_B)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Isso mostra que $x \in \tilde{\omega}(K)$, demostrando a afirmação. Agora, como $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ contém $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ para cada $B \subset X$ limitado e, pela Proposição 3.38, $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ $\tilde{\pi}$-atrai B, então dado $\epsilon >$ existe $\tau > 0$ tal que para todo $t \geq \tau$ vale $\tilde{\pi}(t)B \subset B(\tilde{\omega}(B) \setminus M; \epsilon) \subset B(\tilde{\omega}(K) \setminus M; \epsilon)$. Portanto $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ $\tilde{\pi}$-atrai B e concluímos que $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ é atrator global do sistema dinâmico impulsivo. $\square$

A seguir apresentamos dois exemplos para ilustrar a teoria desenvolvida.

Exemplo 4.12. Considere o sistema dinâmico impulsivo em $X = \mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y, \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \\ I : M \to I(M), \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $I(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ e a função I é dada da seguinte forma: para $(x, y) \in M$ considere o segmento de reta $\Gamma_{(x,y)}$ que conecta os pontos (x, y) e $(3, y)$. O ponto $I(x, y)$ é o ponto da interseção $\Gamma_{(x,y)} \cap I(M)$.

Seja $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo em $\mathbb{R}^2$ gerado pelo Sistema (4.2) sem impulso, isto é, $\pi(t)(x_0, y_0) = (x_0e^{-t}, y_0e^{-t})$. Note que $\pi(t)(x, y) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$ e o conjunto $\{(0, 0)\}$ é o atrator global deste semigrupo. Agora, considere o sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$. É claro que $I(M) \cap M = \emptyset$. Vejamos que cada ponto em M satisfaz a condição (SSTC) e que existe $\xi >$ tal que $\phi(x, y) \geq \xi$ para todo $(x, y) \in I(M)$.

Todo ponto de $(x, y) \in M$ satisfaz a condição (SSTC). De fato, fixemos $(x, y) \in M$.

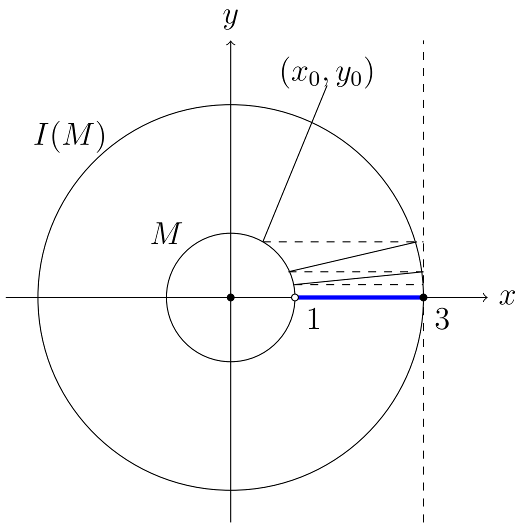

Figura 4.2: Trajetória impulsiva de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Observe que, para cada $t \geq 0$, $\pi(t)$ é bijetiva. Agora, defina

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{se } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y \geq 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

Sejam $0 < \epsilon < \frac{\pi}{4}$ e $g : [\theta - \epsilon, \theta + \epsilon] \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Tomemos $\lambda = \frac{1}{2}$, $S = Im(g)$ (a imagem de g) e $L = \pi(\lambda)S$. Note que S e L são conjuntos fechados e $F(L, \lambda) = S$. Além disso, $S = F(L, [0, 2\lambda]) \cap M$ e $F(L, [0, \lambda]) \cap I(M) = \emptyset$.

Seja $(x, y) \in I(M)$ qualquer, isto é, $x \geq 0$ e $x^2 + y^2 = 9$, e seja $t = \phi(x, y)$. Então $\pi(t)(x, y) \in M$. Logo, $(xe^{-t})^2 + (ye^{-t})^2 = 1$. Assim,

$$e^{-2t}(x^2 + y^2) = 9e^{-2t} = 1 \Leftrightarrow e^{-2t} = 3^{-2} \Leftrightarrow \ln(e^{-2t}) = \ln(3^{-2}) \Leftrightarrow -2t = -2\ln 3.$$

Portanto, $t = \ln 3$ e todos os pontos $(x, y) \in I(M)$ atingem M pela primeira vez no instante $t = \ln 3$. Então, basta tomar $\xi = \ln 3 > 0$ e, assim, obtemos $\phi(x, y) \geq \xi$ para todo $(x, y) \in I(M)$.

Agora, seja $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\} \setminus M$. Vemos que K é um subconjunto pré-compacto de $\mathbb{R}^2$, $K \cap M = \emptyset$ e K $\tilde{\pi}$-absorve todos os subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^2$. Consequentemente, o sistema dinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é fortemente limitado dissipativo e, pelo Teorema 4.11, possui atrator global dado por $\mathcal{A} = \tilde{\omega}(K) \setminus M$.

Podemos ver que $\tilde{\omega}(K) = \{(0,0)\} \cup \{(x, 0) : x \in [1, 3]\}$. Assim, $\mathcal{A} = \{(0,0)\} \cup \{(x, 0) : x \in (1, 3]\}$, veja a Figura 4.2.

O próximo exemplo mostra um sistema dinâmico impulsivo que tem atrator global.

Exemplo 4.13. Considere o sistema dinâmico impulsivo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \\ I : M \to \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto impulsivo e $I : M \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação impulsiva. Suponhamos que todas as soluções do Sistema (4.3) sem impulso estejam definidas em $\mathbb{R}$ e dão origem a um semigrupo $\pi(\cdot)$ em $\mathbb{R}^n$. Consideremos que $I(M) \cap M = \emptyset$, todo ponto em M satisfaz a condição (SSTC), e que existe $\xi > 0$ tal que $\phi(x) \geq \xi$ para todo $x \in I(M)$. Além disso, suponhamos que $T(x) = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e que a condição (3.1) seja válida, isto é, para todo $x \in M$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $F(x, (0, \epsilon_x)) \cap M = \emptyset$ e $\pi(t)x \notin M$ para todo $t \in (0, \epsilon_x)$.

Agora, seja $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq \alpha_1 - \alpha_2 V(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

ii) $V(I(x)) \leq \mu$, para todo $x \in M$;

iii) $V^{-1}((-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}])$ é limitado,

onde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e $\mu > 0$.

Lema 4.14. *Se $z \in I(M)$ então $V(\tilde{\pi}(t)z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ para todo $t \geq 0$, onde $\tilde{\pi}(\cdot)x_0$ é a solução de (4.3).*

Demonstração. Sejam $z \in I(M)$ e $0 \leq t \leq \phi(z)$ (Se $\phi(z) = +\infty$ tomamos $0 \leq t < \phi(z)$). Por *i)* temos

$$\frac{d}{dt}V(\pi(t)z) = \nabla V(\pi(t)z) \cdot \dot{\pi}(t)z = \nabla V(\pi(t)z) \cdot f(\pi(t)z) \leq \alpha_1 - \alpha_2 V(\pi(t)z).$$

Colocando $y(t) = V(\pi(t)z)$, temos $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}V(\pi(t)z)$, logo

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + \alpha_2 y(t) \leq \alpha_1 &\iff e^{\alpha_2 t}[\dot{y}(t) + \alpha_2 y(t)] \leq \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \\ &\iff \frac{d}{dt}(e^{\alpha_2 t} y(t)) \leq \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \\ &\iff e^{\alpha_2 t} y(t) - y(0) \leq \alpha_1 \int_0^t e^{\alpha_2 s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff e^{\alpha_2 t}y(t) - y(0) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(e^{\alpha_2 t} - 1)\\
&\iff y(t) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 t}\left(y(0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 t}y(0).
\end{aligned}$$

Portanto, por *ii*)

$$V(\pi(t)z) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 t}V(z) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + V(z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ para todo } 0 \leq t \leq \phi(z).$$

Com isso, decorre que $V(\tilde{\pi}(t)z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ para todo $0 \leq t < \phi(z)$. Se $\phi(z) = +\infty$ a demonstração acabou. Caso contrário, como $z_1^+ = \tilde{\pi}(\phi(z))z \in I(M)$ podemos repetir o processo feito acima partindo de z_1^+ e indutivamente obtemos o resultado desejado. □

Teorema 4.15. *O sistema dinâmico impulsivo (4.3) é fortemente limitado dissipativo.*

Demonstração. Seja $K = V^{-1}((-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}]) \setminus M$. Por *iii*) sabemos que K é limitado em $\mathbb{R}^n$, logo é pré-compacto, e $K \cap M = \emptyset$. Resta provar que K $\tilde{\pi}$-absorve todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, para isso é suficiente mostrar que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existem $\delta_x > 0$ e $t_x \geq 0$ tais que

$$\tilde{\pi}(t)y \in K, \text{ para todo } y \in B(x; \delta_x) \text{ e } t \geq t_x.$$

Para isso temos alguns casos a considerar.

Caso 1: $x \notin M$ e $\phi(x) = +\infty$.

Seja B uma bola centrada em x. Como $\overline{B}$ é compacto e V é contínua então existe $\beta = \max_{y\in\overline{B}} V(y)$. Dado $k > \max\{0, -\alpha_2^{-1}\ln(\frac{\mu}{|\beta|+1})\}$, pela continuidade de ϕ em x existe $\delta = \delta(x,k) > 0$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B(x;\delta) \subset \overline{B}$. Considere $B(x,\delta) = B_1 \cup B_2$, onde $B_1 = \{y \in B(x;\delta) : \phi(y) = +\infty\}$ e $B_2 = \{y \in B(x;\delta) : k < \phi(y) < +\infty\}$.
Seja $y \in B_1$ arbitrário, usando os mesmos argumentos da prova do Lema 4.14, temos

$$V(\pi(t)y) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 t}V(y) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 t}\beta.$$

Agora, seja $T = \max\{0, -\alpha_2^{-1}\ln(\frac{\mu}{|\beta|+1})\}$. Se $T = 0$, então

$$-\alpha_2^{-1}\ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\mu}{|\beta|+1} \geq 1 \Leftrightarrow \mu \geq |\beta| + 1 > |\beta|.$$

Logo,

$$V(\pi(t)y) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 t}\beta \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 T}|\beta| = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + |\beta| < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \mu$$

para todo $t \geq T$ e $y \in B_1$. Se $T = -\alpha_2^{-1}\ln(\frac{\mu}{|\beta|+1})$, então

$$V(\pi(t)y) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 t}\beta \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + e^{-\alpha_2 T}|\beta| \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\mu|\beta|}{|\beta|+1} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \mu$$

para todo $t \geq T$ e $y \in B_1$. Portanto,

$$V(\tilde{\pi}(t)y) < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \mu \text{ para todo } y \in B_1 \text{ e } t \geq T,$$

pois $\phi(y) = +\infty$ e $\pi(t)y = \tilde{\pi}(t)y$ para todo $t \geq 0$.

Em B_2, vemos que

$$V(\pi(t)y) < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \mu \text{ para todo } y \in B_2 \text{ e } k \leq t \leq \phi(y),$$

e o Lema 4.14 mostra que $V(\tilde{\pi}(t)y) < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \mu$ para todo $t \geq \phi(y)$ e $y \in B(x;\delta)$.

Caso 2: $x \notin M$ e $\phi(x) < +\infty$.

Como ϕ é contínua em x, existe $\delta > 0$ tal que $|\phi(y) - \phi(x)| < 1$ se $y \in B(x;\delta)$. Daí, $\phi(y) < \phi(x) + 1$, $y \in B(x;\delta)$. Seja $T = \sup\{\phi(y) : y \in B(y;\delta)\}$, então para todo $t \geq T$ e $y \in B(x;\delta)$ existem $z \in I(M)$ e $s \geq 0$ tais que $\tilde{\pi}(t)y = \tilde{\pi}(s)z$. Logo, pelo Lema 4.14,

$$V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ para todo } t \geq T.$$

Caso 3: $x \in M$ e $\phi(x) = +\infty$.

O ponto $x \in M$ satisfaz (SSTC) com um λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ e seção S através de x. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x;\epsilon) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Considere os conjuntos

$$H_1 = F(L,(\lambda,2\lambda]) \cap B(x;\epsilon) \;\text{ e }\; H_2 = F(L,[0,\lambda]) \cap B(x;\epsilon).$$

Afirmamos que $\phi(y) \leq \lambda$ para todo $y \in H_1$. De fato, tomemos $y \in H_1$ arbitrário, então existe $\mu \in (\lambda,2\lambda]$ tal que $\pi(\mu)y \in L$. Assim, $\pi(\mu-\lambda)y \in F(L,\lambda) = S \subset M$. Consequentemente, como $\mu \leq 2\lambda$, temos $\phi(y) \leq \mu - \lambda \leq \lambda$. Deste modo, se $y \in H_1$ e $t \geq \lambda$ existem $s \geq 0$ e $z \in I(M)$ tais que $\tilde{\pi}(t)y = \tilde{\pi}(s)z$ e, pelo Lema 4.14, temos

$$V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ para todo } y \in H_1 \text{ e } t \geq \lambda.$$

Por outro lado, como $\phi(x) = +\infty$ afirmamos que para qualquer $k > 0$ existe $0 < \delta = \delta(x,\epsilon,k) < \epsilon$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B(x;\delta) \cap H_2$. De fato, suponhamos, por contradição, que existam $k_0 > 0$ e uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\phi(x_n) \leq k_0$. Como $x_n \in H_2$ existe $\lambda_n \in [0,\lambda]$ tal que $\pi(\lambda_n)x_n \in L$. Escolhendo uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ e $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Com efeito, tomando uma subsequência se necessário, temos $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nu \in [0,\lambda]$. Pela continuidade de π e como a sequência $\{\pi(\lambda_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contida no conjunto fechado L, temos $\pi(\lambda_n)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(\nu)x \in L$. Logo $x \in F(L,\nu)$ e como $x \in S = F(L,\lambda)$ implica que $\nu = \lambda$. Analogamente, como $\{\phi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,k_0]$ existe uma subsequência, que manteremos a notação, tal que $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in [0,k_0]$. Suponhamos que $a \neq 0$, isto é, que $a > 0$. Como $\{\pi(\phi(x_n))x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ que é fechado, temos $\pi(\phi(x_n))x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(a)x \in M$. Logo $\phi(x) \leq a$, o que é uma contradição pois $\phi(x) = +\infty$. Logo $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Portanto, para n suficientemente grande,

$$\phi(x_n) < \lambda \text{ e } \pi(\phi(x_n))x_n \in F(L,[0,2\lambda]) \cap M = S = F(L,\lambda).$$

Como $\pi(\phi(x_n))x_n \in F(L,\lambda)$ temos que $\pi(\lambda)\pi(\phi(x_n))x_n = \pi(\phi(x_n)+\lambda)x_n \in L$, isto é, $x_n \in F(L,\lambda+\phi(x_n))$. Além disso, $x_n \in F(L,\lambda_n)$, então $\lambda_n = \phi(x_n)+\lambda$ que é uma contradição pois $\lambda_n \in [0,\lambda]$. Esta contradição mostra que para qualquer $k > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B(x;\delta) \cap H_2$. Agora, como no Caso 1, podemos escolher $\delta > 0$ e $T > 0$ tais que

$$V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

para todo $y \in B(x;\delta) \cap H_2$ e $t \geq T$. Assim, temos

$$V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

para todo $y \in B(x;\delta)$ e $t \geq \max\{\lambda, T\}$.

<u>Caso 4:</u> $x \in M$ e $\phi(x) < +\infty$.

Neste caso a prova segue a mesma ideia da prova do Caso 3, a única diferença é que usamos a semicontinuidade superior de ϕ em $x \in M$ e a prova do Caso 2 para mostrar que

$$V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

para todo $y \in B(x;\delta) \cap H_2$ e $t \geq T$. E para $y \in H_1$ a prova é análoga ao que foi apresentado para o Caso 3.

Com isso concluímos para todos os possíveis casos que o Sistema (4.3) é fortemente limitado dissipativo. $\square$

Em virtude do Teorema 4.11 obtemos a seguinte consequência direta.

Corolário 4.16. O Sistema (4.3) possui atrator global.

Capítulo

5

Semicontinuidade de Atratores

Agora que estamos familiarizados com a teoria de sistemas dinâmicos impulsivos e seu atrator global podemos apresentar um estudo sobre a continuidade sob perturbações de sistemas com impulsos, bem como seus atratores globais.

Ao modelarmos matematicamente um problema real obtemos uma aproximação (ou perturbação) do problema original. Por isso, para nosso caso específico, precisamos garantir que ao perturbar um sistema dinâmico impulsivo, o atrator global encontrado esteja "perto" do atrator global para o sistema original. Sendo assim, considerando uma família de sistemas dinâmicos impulsivos $\{X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, apresentamos neste capítulo resultados que estabelecem condições para garantir a semicontinuidade superior de uma família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de atratores globais e a semicontinuidade inferior para o caso em que temos um número finito de elementos críticos dos semigrupos contínuos. Utilizamos [3] como a principal referência.

Começamos com a definição destes conceitos.

Definição 5.1. *Dizemos que uma família $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de subconjuntos não vazios em um espaço métrico X é:*

i) ***semicontínua superiormente em $\boldsymbol{\eta = 0}$***, *se* $\lim\limits_{\eta\to 0} d_H(A_\eta, A_0) = 0$;

ii) ***semicontínua inferiormente em $\boldsymbol{\eta = 0}$***, *se* $\lim\limits_{\eta\to 0} d_H(A_0, A_\eta) = 0$;

iii) ***contínua em $\boldsymbol{\eta = 0}$***, *se é semicontínua superiormente e inferiormente em $\eta = 0$, isto é, se* $d_H(A_\eta, A_0) + d_H(A_0, A_\eta) \xrightarrow{\eta\to 0} 0$.

Antes de estudarmos a semicontinuidade de uma família de atratores, apresentamos dois resultados, que serão utilizados adiante, e que caracterizam a semicontinuidade superior e inferior de uma família de subconjuntos de X.

Lema 5.2. *Seja $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos não vazios e compactos de X. A família $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$ se, e somente se, dadas sequências $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$, com $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, com $x_k \in A_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente com limite em A_0.*

Demonstração. Suponhamos que $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ seja semicontínua superiormente em $\eta = 0$ e consideremos uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_k \in A_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$d(x_k, A_0) \leq d_H(A_{\eta_k}, A_0) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, $d(x_k, A_0) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Como A_0 é compacto, pelo Lema 1.3, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente com limite em A_0. Reciprocamente, suponhamos por contradição que $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ não seja semicontínua superiormente em $\eta = 0$. Então, existem $\epsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tais que $d_H(A_{\eta_k}, A_0) \geq \epsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in A_{\eta_k}$ de modo que $d(x_k, A_0) \geq \epsilon_0$. Mas, por hipótese, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para um ponto de A_0, o que é uma contradição e conclui a demonstração do lema. $\square$

Lema 5.3. *Seja $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos não vazios e fechados de X. Então $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$ se, e somente se, para cada $x \in A_0$ e cada sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$, com $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, existem uma subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$, com $x_j \in A_{\eta_{k_j}}$, tais que $x_j \stackrel{j\to+\infty}{\longrightarrow} x$.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ seja semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. Dados $x \in A_0$ e uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, temos

$$d_H(A_0, A_{\eta_k}) = \sup_{y\in A_0} d(y, A_{\eta_k}) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então, $d(y, A_{\eta_k}) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $y \in A_0$. Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe η_{k_j} tal que $d(x, A_{\eta_{k_j}}) < \frac{1}{j}$, pois $x \in A_0$. Como cada $A_{\eta_{k_j}}$ é fechado, existe $x_j \in A_{\eta_{k_j}}$ tal que

$$d(x, x_j) = d(x, A_{\eta_{k_j}}) < \frac{1}{j}.$$

Portanto, $x_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Reciprocamente, suponhamos por absurdo que $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ não seja semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. Então existem $\epsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tais que $d_H(A_0, A_{\eta_k}) > 2\epsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso significa que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $z_k \in A_0$ tal que $d(z_k, A_{\eta_k}) > 2\epsilon_0$. Como A_0 é fechado podemos assumir, tomando uma subsequência se necessário, que $z_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z \in A_0$. Assim,

$$\begin{aligned} 2\epsilon_0 < d(z_k, A_{\eta_k}) &\leq d(z_k, x), \text{ para todo } x \in A_{\eta_k}, \\ &\leq d(z_k, z) + d(z, x) < \epsilon_0 + d(z, x), \end{aligned}$$

para k suficientemente grande e $x \in A_{\eta_k}$. O que implica que $d(z, x) > \epsilon_0$ para todo $x \in A_{\eta_k}$. Desse modo, $d(z, A_{\eta_k}) > \epsilon_0$. Além disso, por hipótese existem subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$, com $x_j \in A_{\eta_{k_j}}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, tais que $x_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Então $\epsilon_0 < d(z, A_{\eta_{k_j}}) \leq d(z, x_j)$, o que é um absurdo, completando a demonstração do lema. $\square$

5.1 Condição de Tubo Coletiva

Como vimos anteriormente, a condição de tubo é um conceito importante para o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos impulsivos. Por isso, nesta seção apresentamos condições coletivas de tubo para uma família de sistemas dinâmicos impulsivos $\{X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$.

Para darmos início a esse estudo precisamos garantir que as trajetórias contínuas, bem como as trajetórias impulsivas, tenham um comportamento contínuo sob perturbações. Sendo assim, a partir de agora, vamos assumir como hipótese que em geral valem as seguintes condições:

C1 - ***A família de semigrupos π_η é contínua em $\eta = 0$.***

Isto é, $\pi_\eta(t)x \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} \pi_0(t)x$ uniformemente para (t, x) em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+ \times X$.

Consequentemente, dadas sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $t_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} t$ e, também, $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Tomando os conjuntos $K = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ e $J = \{t_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{t\}$, temos que $J \times K$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}_+ \times X$ e, por **C1**, obtemos:

$$\boldsymbol{\pi_{\eta_k}(t_k)x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(t)x.}$$

C2 - ***Continuidade dos conjuntos impulsivos M_η.***

$$d_H(M_\eta, M_0) + d_H(M_0, M_\eta) \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Note que isso implica que $d_H(M_\eta, M_0) \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ e $d_H(M_0, M_\eta) \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

C3 - ***Continuidade coletiva das funções impulsivas I_η.***

Dados $\epsilon > 0$ e $w_0 \in M_0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\eta \in [0, \delta)$, $w \in M_\eta$ e $d(w, w_0) < \delta$, então $d(I_\eta(w), I_0(w_0)) < \epsilon$.

C4 - $\boldsymbol{I_\eta(M_\eta) \cap M_\eta = \emptyset}$**.**

Mais especificamente, existe $\overline{\eta} \in (0, 1]$ tal que $I_\eta(M_\eta) \cap M_\eta = \emptyset$ para todo $\eta \in [0, \overline{\eta})$.

Observação 5.4. *Se M_0 é compacto então podemos substituir a Condição **C4** pela seguinte condição:*

C4' **-** $\boldsymbol{I_0(M_0) \cap M_0 = \emptyset}$.

Afirmamos que **C4'** implica **C4**. De fato, suponhamos, por contradição, que existam uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$, $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e $w_k \in I_{\eta_k}(M_{\eta_k}) \cap M_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, $w_k = I_{\eta_k}(z_k)$ para algum $z_k \in M_{\eta_k}$. Pela Condição **C2**, temos

$$d(w_k, M_0) \leq d_H(M_{\eta_k}, M_0) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, $d(w_k, M_0) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Como M_0 é compacto, pelo Lema 1.3, $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente com limite $w_0 \in M_0$. Com argumento análogo, asseguramos que $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência com limite $z_0 \in M_0$. Consequentemente, pela continuidade coletiva das funções impulsivas I_{η_k} estabelecida na Condição **C3** temos que $I_0(z_0) = w_0 \in I_0(M_0) \cap M_0$, contradizendo **C4'**. Concluímos que **C4'** implica **C4**.

A Condição **C2** nos fornece um resultado simples e útil.

Lema 5.5. *Sejam $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ e $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ sequências tais que $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $w_k \in M_{\eta_k}$ para $k \in \mathbb{N}$ e $w_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$, então $w_0 \in M_0$.*

Demonstração. Inicialmente, temos

$$\begin{aligned} d_H(w_0, M_0) = \inf_{z\in M_0} d(w_0, z) &\leq \inf_{z\in M_0} (d(w_0, w_k) + d(w_k, z)) \\ &= d(w_0, w_k) + \inf_{z\in M_0} d(w_k, z). \end{aligned}$$

Mas, $\inf_{z\in M_0} d(w_k,z) = d(w_k,M_0) \leq \sup_{w_k\in M_{\eta_k}} d(w_k,M_0) = d_H(M_{\eta_k},M_0)$. Logo, por **C2**,

$$d_H(w_0,M_0) \leq d(w_0,w_k) + d_H(M_{\eta_k},M_0) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como M_0 é fechado, existe $m \in M_0$ tal que $d(w_0,m) = d(w_0,M_0) = 0$, o que implica que $w_0 \in M_0$. □

Na sequência, apresentamos a condição coletiva de tubo que assegura que os semigrupos da família $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ têm um bom comportamento perto do seus respectivos conjuntos impulsivos associados M_η quando $\eta\to 0$.

Definição 5.6. *Seja $\{(X,\pi_\eta;M_\eta,I_\eta)\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de sistemas dinâmicos impulsivos. Dizemos que um ponto $w_0 \in M_0$ satisfaz a* ***condição coletiva forte de tubo*** *(**C-STC**) se dadas sequências*

- *$\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;*
- *$\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que $w_k \in M_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e $w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$,*

existe $\lambda_0 > 0$ tal que para cada $0 < \lambda \leq \lambda_0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\lambda) > 0$ de modo que

$$F_0(L_0,[0,2\lambda]) \text{ é um } \lambda\text{-tubo através de } w_0 \text{ com seção } S_0 = F_0(L_0,[0,2\lambda]) \cap M_0$$

*tal que $B(w_0;\delta) \subset F_0(L_0,[0,2\lambda])$ e existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\eta_k < \overline{\eta}$ para $k \geq k_0$ ($\overline{\eta}$ vem da Condição **C4**) e*

$$F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]) \text{ é um } \lambda\text{-tubo através de } w_k \text{ com seção } S_k = F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]) \cap M_{\eta_k}$$

tal que $B(w_k;\delta) \subset F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda])$ para $k \geq k_0$.

Se além disso, $F_0(L_0,[0,\lambda]) \cap I_0(M_0) = \emptyset$ e $F_{\eta_k}(L_k,[0,\lambda]) \cap I_{\eta_k}(M_{\eta_k}) = \emptyset$, para todo $k \geq k_0$, dizemos que $w_0 \in M_0$ satisfaz a ***condição coletiva forte de tubo especial*** *(**C-SSTC**).*

Para ilustrar, apresentamos um exemplo a seguir.

Exemplo 5.7. Considere a família de equações diferenciais impulsivas

$$\begin{cases} \dot{x} = -(1+\eta)x, \quad \eta \in [0,1], \\ I_\eta : M_\eta \to \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $M_\eta = \{x+\eta : x \in \mathbb{N}\}$ e $I_\eta(z) = z + \eta - \frac{1}{2}$ para todo $z \in M_\eta$ e $\eta \in [0,1]$. Note que $\pi_\eta(t)x = xe^{-(1+\eta)t}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ é a solução da equação $\dot{x} = -(1+\eta)x$ para cada $\eta \in [0,1]$. As condições **C1-C4** são satisfeitas. De fato, temos

C1- $\pi_\eta(t)x = xe^{-(1+\eta)t} \overset{\eta \to 0}{\longrightarrow} xe^{-t} = \pi_0(t)x$.

C2- $d_H(M_\eta, M_0) = \sup\limits_{x\in\mathbb{N}} \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} d(x+\eta, m) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0 = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \inf\limits_{x\in\mathbb{N}} d(m, x+\eta) = d_H(M_0, M_\eta)$.

C3- Dados $\epsilon > 0$ e $w_0 \in M_0 = \mathbb{N}$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Se $\eta \in [0,\delta)$, $w \in M_\eta$ e $d(w, w_0) < \delta$, então

$$d(I_\eta(w), I_0(w_0)) = d(w+\eta-\frac{1}{2}, w_0 - \frac{1}{2}) = |w+\eta-w_0| \leq |w-w_0| + |\eta|$$

$$= d(w,w_0) + |\eta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

C4- Dado $\overline{\eta} = \frac{1}{2}$, para todo $\eta \in [0, \overline{\eta})$ temos que $I_\eta(M_\eta) \cap M_\eta = \emptyset$.

Além disso, cada ponto $w_0 \in M_0$ satisfaz a condição (C-SSTC), como veremos a seguir. Sejam $w_0 \in M_0$, $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $w_k \in M_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tais que $w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$ e considere $\eta_0 = 0$. Observemos que $I(w_0) = w_0 - \frac{1}{2}$ e

$$\pi_0(t)w_0 = w_0 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow w_0 e^{-t} = w_0 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{2w_0 - 1}{2w_0} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{2w_0}{2w_0 - 1}\right).$$

Desse modo, tomemos $0 < \lambda_0 < \ln\left(\frac{2w_0}{2w_0-1}\right)$ e $0 < \lambda \leq \lambda_0$. Dado $L_0 = \{w_0 e^{-\lambda}\}$, temos que $F_0(L_0, [0, 2\lambda]) = [w_0 e^{-\lambda}, w_0 e^{\lambda}]$ é um λ-tubo através de w_0 com seção $S_0 = \{w_0\} = F_0(L_0, [0,2\lambda]) \cap M_0$. Além disso,

$$I(w_0) = w_0 - \frac{1}{2} \notin F_0(L_0, [0,\lambda]) \text{ e } I_0(w_0+1) = w_0 + 1 - \frac{1}{2} = w_0 + \frac{1}{2} \notin F_0(L_0, [0,\lambda]).$$

Então $F_0(L_0, [0,\lambda]) \cap I_0(M_0) = \emptyset$. Agora, como $w_k = \eta_k + z_k$ para algum $z_k \in \mathbb{N}$, $w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$ e $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ concluímos que $w_k = w_0 + \eta_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\eta_k < \frac{1}{2}$ para todo $k \geq k_0$. Considere $L_k = \{w_k e^{-(1+\eta_k)\lambda}\}$ e o λ-tubo $F_{\eta_k}(L_k, [0,2\lambda]) = [w_k e^{-(1+\eta_k)\lambda}, w_k e^{(1+\eta_k)\lambda}]$ através de w_k com seção $S_k = \{w_k\} = F_{\eta_k}(L_k, [0,2\lambda]) \cap M_{\eta_k}$ para todo $k \geq k_0$. Temos que

$$I_{\eta_k}(w_k) = w_k + \eta_k - \tfrac{1}{2} \text{ e } F_{\eta_k}(L_k, [0,\lambda]) = [w_k e^{-(1+\eta_k)\lambda}, w_k].$$

Pela Condição **C1**, $\pi_{\eta_k}(\lambda)w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\lambda)w_0$ e, pela Condição **C3**, dado $\epsilon > 0$ temos que $d(I_{\eta_k}(w_k), I_0(w_0)) < \epsilon$ para k suficientemente grande. Daí, como $I_0(w_0) = w_0 - \frac{1}{2} <$

$\pi_0(\lambda)w_0$ podemos assumir que

$$I_{\eta_k}(w_k) < \pi_{\eta_k}(\lambda)w_k = w_k e^{-(1+\eta_k)\lambda} \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Então $I_{\eta_k}(w_k) \notin F_{\eta_k}(L_k, [0, \lambda])$. Além disso, para $w_k + 1 = w_0 + \eta_k + 1 \in M_{\eta_k}$ temos

$$I_{\eta_k}(w_k + 1) = w_0 + \eta_k + 1 + \eta_k - \frac{1}{2} = w_0 + 2\eta_k + \frac{1}{2} > w_0 + \eta_k = w_k.$$

Com isso, $I_{\eta_k}(w_k + 1) \notin F_{\eta_k}(L_k, [0, \lambda])$. Também, para $w_k - 1 = w_0 + \eta_k - 1 \in M_{\eta_k}$, como $\eta_k < \frac{1}{2}$ para todo $k \geq k_0$, segue que

$$I_{\eta_k}(w_k - 1) = w_0 + \eta_k - 1 + \eta_k - \frac{1}{2} = w_0 + 2\eta_k - \frac{3}{2} < w_0 + 1 - \frac{3}{2} = w_0 - \frac{1}{2}.$$

Consequentemente $I_{\eta_k}(w_k - 1) \notin F_{\eta_k}(L_k, [0, \lambda])$. Então $F_{\eta_k}(L_k, [0, \lambda]) \cap I_{\eta_k}(M_{\eta_k}) = \emptyset$ para todo $k \geq k_0$.

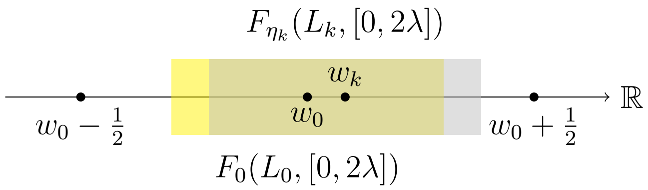

Figura 5.1: λ-tubo através de w_0 e w_k.

Note que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$e^{\lambda} + e^{-\lambda} \geq 2 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Assim, dado $0 < \delta < w_0(1 - e^{-\lambda})$ tomemos $y \in B(w_0; \delta)$. Daí,

$$y > w_0 - \delta > w_0 - w_0(1 - e^{-\lambda}) = w_0 e^{-\lambda}.$$

Por outro lado, por (5.1), temos que $2w_0 \leq w_0(e^{\lambda} + e^{-\lambda})$. Com isso, temos

$$y < w_0 + \delta < 2w_0 - w_0 e^{-\lambda} < w_0(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) - w_0 e^{-\lambda} = w_0 e^{\lambda}.$$

Portanto, $B(w_0; \delta) \subset [w_0 e^{-\lambda}, w_0 e^{\lambda}] = F_0(L_0, [0, 2\lambda])$. Também, dado $w_k \in M_{\eta_k}$ então $B(w_k; \delta) \subset F_{\eta_k}(L_k, [0, 2\lambda])$ para todo $k \geq k_0$. De fato, primeiramente como $e^{\lambda\eta_k} \geq 1$, por (5.1), segue que

$$e^{\lambda\eta_k}e^{\lambda} + e^{-\lambda} \geq 2 \Rightarrow w_0(e^{\lambda\eta_k+\lambda} + e^{-\lambda}) \geq 2w_0. \tag{5.2}$$

Como $\eta_k \leq \eta_k e^{\lambda+\lambda\eta_k}$, por (5.2), temos que

$$\begin{aligned} 2w_0 + \eta_k &\leq w_0(e^{\lambda+\lambda\eta_k} + e^{-\lambda}) + \eta_k e^{\lambda+\lambda\eta_k} \\ 2w_0 + \eta_k - w_0 e^{-\lambda} &\leq (w_0 + \eta_k)e^{\lambda+\lambda\eta_k} \\ w_k + w_0 - w_0 e^{-\lambda} &\leq w_k e^{\lambda+\lambda\eta_k} \\ w_k + w_0(1 - e^{-\lambda}) &\leq w_k e^{\lambda(1+\eta_k)}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Além disso, uma vez que $\eta_k e^{-\lambda(1+\eta_k)} \leq \eta_k$ e $w_0 e^{-\lambda(1+\eta_k)} \leq w_0 e^{-\lambda}$ obtemos

$$(w_0 + \eta_k)e^{-\lambda(1+\eta_k)} \leq \eta_k + w_0 e^{-\lambda} = \eta_k + w_0 - w_0 + w_0 e^{-\lambda} = w_k - w_0(1 - e^{-\lambda}). \tag{5.4}$$

Agora, dado $z \in B(w_k; \delta)$ então $w_k - \delta < z < w_k + \delta$. Por (5.3) segue que

$$z < w_k + \delta < w_k + w_0(1 - e^{-\lambda}) \leq w_k e^{\lambda(1+\eta_k)}.$$

E, por (5.4),

$$z > w_k - \delta > w_k - w_0(1 - e^{-\lambda}) \geq (w_0 + \eta_k)e^{-\lambda(1+\eta_k)} = w_k e^{-\lambda(1+\eta_k)}.$$

Daí, $z \in [w_k e^{-\lambda(1+\eta_k)}, w_k e^{\lambda(1+\eta_k)}] = F_{\eta_k}(L_k, [0, 2\lambda])$. Portanto, concluímos que w_0 satisfaz a condição (C-SSTC).

Pela Definição 5.6 temos o seguinte resultado.

Lema 5.8. *Seja $w_0 \in M_0$ satisfazendo a condição (C-STC). Se $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ é tal que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $w_k \in M_{\eta_k}$, $k \in \mathbb{N}$, é uma sequência com $w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$, dados $\delta > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ conforme a Definição 5.6, então existe $k_1 \geq k_0$, $k_1 \in \mathbb{N}$, tal que $B(w_0; \frac{\delta}{2}) \subset B(w_k; \delta) \subset F_{\eta_k}(L_k, [0, 2\lambda])$ para todo $k \geq k_1$.*

Demonstração. Como $w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \geq k_0$, tal que $w_k \in B(w_0; \frac{\delta}{2})$ para todo $k \geq k_1$, isto é, $d(w_k, w_0) < \frac{\delta}{2}$. Assim, se $x \in B(w_0; \frac{\delta}{2})$ temos

$$d(x, w_k) \leq d(x, w_0) + d(w_0, w_k) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Portanto, $B(w_0; \frac{\delta}{2}) \subset B(w_k; \delta) \subset F_{\eta_k}(L_k, [0, 2\lambda])$ para todo $k \geq k_1$. $\square$

Veremos no resultado a seguir que se um ponto $w \in M$ satisfaz a condição (STC) com um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$, é possível obter uma barra compacta $\mathcal{L}$ e uma seção compacta $\mathcal{S}$ tais que $F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$ é compacto e é um STC-tubo através de w.

Lema 5.9. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo tal que X é localmente compacto e $\{\pi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo. Suponha que $w \in M$ satisfaça a condição (STC) com um λ-tubo, então w também satisfaz a condição (STC) com um λ-tubo compacto.*

Demonstração. Como w satisfaz a condição (STC) existem um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de w com seção $S = F(L, [0, 2\lambda]) \cap M$ e $\delta > 0$ tais que $B(w; \delta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Pela compacidade local de X podemos obter $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B(w; \epsilon)}$ é compacto. Agora, definimos

$$\mathcal{S} = S \cap \overline{B(w; \epsilon)} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \pi(\lambda)\mathcal{S}.$$

Note que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{L}$ são conjuntos compactos e $F(\mathcal{L}, \lambda) = \mathcal{S}$.

Afirmamos que existe $\gamma > 0$ tal que $B(w; \gamma) \subset F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$. Suponhamos, por contradição, que exista uma sequência $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $z_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} w$ e $z_k \notin F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $z_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} w$, existe $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tal que $z_k \in B(w; \delta)$ para todo $k \geq \overline{k}$. Mas, $B(w; \delta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$, o que implica que existem $v_k \in S$ e $s_k \in [-\lambda, \lambda]$ tais que

$$\pi(s_k)v_k = z_k, \quad \text{para todo} \quad k \geq \overline{k}.$$

Podemos assumir que $s_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} s_0 \in [-\lambda, \lambda]$. Então

$$v_k = \pi(-s_k)\pi(s_k)v_k = \pi(-s_k)z_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(-s_0)w,$$

e, como S é fechado, $\pi(-s_0)w \in S$. Mas, pela propriedade de tudo, $\pi([-\lambda, \lambda])w \cap M = \{w\}$, o que implica $s_0 = 0$. Consequentemente, $v_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} w$. Assim, existe $\overline{k_1} > \overline{k}$ tal que $v_k \in S \cap \overline{B(w; \epsilon)} = \mathcal{S}$ para todo $k \geq \overline{k_1}$. Como $\mathcal{L} = \pi(\lambda)\mathcal{S}$, temos $\pi(\lambda)v_k \in \mathcal{L}$. Mas,

$$\pi(\lambda)v_k = \pi(\lambda)\pi(-s_k)z_k = \pi(\lambda - s_k)z_k \in \mathcal{L},$$

com $\lambda - s_k \in [0, 2\lambda]$. Portanto, $z_k \in F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$ para todo $k \geq \overline{k_1}$, o que é uma contradição, provando a nossa afirmação.

Mostraremos agora que $F(\mathcal{L}, \mu) \cap F(\mathcal{L}, \nu) = \emptyset$ para $0 \leq \mu < \nu \leq 2\lambda$. De fato, suponhamos que exista $x \in F(\mathcal{L}, \mu) \cap F(\mathcal{L}, \nu)$. Daí, $\pi(\mu)x \in \mathcal{L} = \pi(\lambda)\mathcal{S}$. Logo, existe $a \in \mathcal{S}$ tal que $\pi(\mu)x = \pi(\lambda)a$. Como $\mathcal{S} = S \cap \overline{B(w; \epsilon)}$, então $a \in S = F(L, \lambda)$, isto é,

$$\pi(\lambda)a \in L \Rightarrow \pi(\mu)x \in L \Rightarrow x \in F(L, \mu).$$

Analogamente, como $x \in F(\mathcal{L}, \nu)$ temos que $x \in F(L, \nu)$. Desse modo, $x \in F(L, \mu) \cap F(L, \nu)$, o que é um absurdo. Assim, provamos que $F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$ é um λ-tubo através de w.

A seguir, vejamos que $\mathcal{S} = F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda]) \cap M$. Seja $x \in \mathcal{S}$, como $\mathcal{S} = F(\mathcal{L}, \lambda)$ então $x \in F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$. Por outro lado, $\mathcal{S} = S \cap \overline{B(w; \epsilon)}$ então $x \in M$. Reciprocamente, se $x \in F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda]) \cap M$ existe $t \in [0, 2\lambda]$ tal que $\pi(t)x \in \mathcal{L} = \pi(\lambda)\mathcal{S}$, com isso $\pi(t - \lambda)x \in \mathcal{S}$. Note que $t - \lambda \in [-\lambda, \lambda]$ e, como $x \in M$, pela propriedade do tubo, ocorre que $\pi([-\lambda, \lambda])x \cap M = \{x\}$, o que implica que $t - \lambda = 0$. Logo, $x = \pi(t - \lambda)x \in \mathcal{S}$.

Verificamos que $w \in M$ satisfaz a condição (STC) com o λ-tubo $F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$ através de w e com $\mathcal{L}$ e $\mathcal{S}$ conjuntos compactos. A seguir, provaremos a compacidade do λ-tubo. Seja $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos no tubo $F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $a_k \in [-\lambda, \lambda]$ e $b_k \in \mathcal{S}$ tais que $w_k = \pi(a_k)b_k$. Podemos assumir que $a_k \stackrel{k \to +\infty}{\longrightarrow} a_0 \in [-\lambda, \lambda]$ e $b_k \stackrel{k \to +\infty}{\longrightarrow} b_0 \in \mathcal{S}$. Sendo assim,

$$w_k = \pi(a_k)b_k \stackrel{k \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(a_0)b_0 \in F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda]).$$

Portanto, $F(\mathcal{L}, [0, 2\lambda])$ é um STC-tubo através de w compacto e o lema está provado. $\square$

O próximo resultado apresenta condições suficientes para garantir a condição coletiva forte de tubo (C-STC) em um espaço localmente compacto.

Teorema 5.10. *Seja $\{X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de sistemas dinâmicos impulsivos tal que $\{\pi_\eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo para cada $\eta \in [0, 1]$ e X é localmente compacto. Assuma que a Condição* **C1** *é satisfeita em subconjuntos compactos de $\mathbb{R} \times X$ e que são válidas as seguintes hipóteses:*

a) *$w_0 \in M_0$ satisfaz a condição (STC) com respeito ao grupo π_0;*

b) *Existem $\beta > 0$, $\delta_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que para $0 \leq \eta \leq \eta_0$, temos*

$$B_\eta = B(w_0; \delta_0) \cap M_\eta \neq \emptyset,$$

$$\pi_\eta((-\beta, 0) \cup (0, \beta))B_\eta \cap M_\eta = \emptyset$$

e

$$\pi_\eta([-\beta, \beta])z \cap M_\eta \neq \emptyset \ \ \textit{para todo} \ \ z \in B(w_0; \delta_0).$$

Então, w_0 satisfaz a condição (C-STC).

Demonstração. Sejam $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ com $w_k \in M_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e $w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$. Por hipótese, existe um λ_0-tubo através de w_0 com $0 < \lambda_0 < \beta$. Seja $0 < \lambda \leq \lambda_0$. Pelo Lema 3.15, $F_0(L_0,[0,2\lambda])$ é um λ-tubo através de w_0 com seção $S_0 = F_0(L_0,[0,2\lambda]) \cap M_0$ e, pelo Lema 5.9, podemos assumir que $F_0(L_0,[0,2\lambda])$ é compacto. Além disso, existe $\delta_1 \in (0,\delta_0)$ tal que $B(w_0;\delta_1) \subset F_0(L_0,[0,2\lambda])$, onde δ_0 vem de b). Seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $w_k \in B(w_0;\delta_1)$ para todo $k \geq k_1$. Defina

$$S_k = M_{\eta_k} \cap \overline{B(w_0;\delta_1)}, \text{ para todo } k \geq k_1.$$

Observemos que se $x \in S_k$, então $x \in M_{\eta_k}$ para todo $k \geq k_1$ e $d(x,w_0) \leq \delta_1 < \delta_0$, isto é, $x \in B(w_0;\delta_0)$. Logo, $S_k \subset M_{\eta_k} \cap B(w_0;\delta_0) = B_{\eta_k}$. Note que S_k é compacto e $w_k \in S_k$ para todo $k \geq k_1$. Pelo Lema 5.5 e pela compacidade de $F_0(L_0,[0,2\lambda])$, obtemos que $w_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} w_0 \in S_0$. Logo,

$$\lim_{k\to+\infty} d_H(S_k,S_0) = 0. \tag{5.5}$$

Definimos também $L_k = \pi_{\eta_k}(\lambda)S_k$ para todo $k \geq k_1$. Mostraremos agora que $F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda])$ é um λ-tubo através de w_k para k suficientemente grande. Note que L_k é compacto e

$$F_{\eta_k}(L_k,\lambda) = \pi_{\eta_k}(-\lambda)L_k = S_k, \text{ para todo } k \geq k_1.$$

<u>Afirmação 1:</u> $F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]) \cap M_{\eta_k} = S_k$ para todo $k \geq k_1$.

De fato, fixamos $k \geq k_1$ e tomemos $z \in S_k$, então $z \in M_{\eta_k}$ e $\pi_{\eta_k}(\lambda)z \in L_k$. Logo, $z \in F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]) \cap M_{\eta_k}$. Por outro lado, se $z \in F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]) \cap M_{\eta_k}$ então existe $s_k \in [0,2\lambda]$ tal que $\pi_{\eta_k}(s_k)z \in L_k = \pi_{\eta_k}(\lambda)S_k$, isto é, $\pi_{\eta_k}(s_k-\lambda)z \in S_k$. Suponhamos que $s_k \neq \lambda$. Como $S_k \subset B_{\eta_k}$ temos $\pi_{\eta_k}(s_k-\lambda)z \in B_{\eta_k}$ e $\pi_{\eta_k}(\lambda-s_k)\pi_{\eta_k}(s_k-\lambda)z = z \in M_{\eta_k}$. Assim, pelo item b), segue que

$$|\lambda - s_k| \geq \beta,$$

o que é uma contradição pois $\lambda < \beta$ e $s_k \in [0,2\lambda]$. Então, de fato $s_k = \lambda$ e $z \in S_k$, como queríamos mostrar.

<u>Afirmação 2:</u> Existem $\delta \in (0,\delta_1)$ e $k_2 \geq k_1$ tais que $B(w_k;\delta) \subset F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda])$ para todo $k \geq k_2$.

Suponhamos, por contradição, que existam sequências $k_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\{\delta_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,\delta_1)$ com $\delta_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de modo que $z_m \in B(w_{k_m};\delta_m)$ e $z_m \notin F_{\eta_{k_m}}(L_{k_m},[0,2\lambda])$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Podemos considerar que $k_m \geq k_1$ e $\delta_m \in (0, \delta_1)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $w_{k_m} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} w_0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(w_{k_m}, w_0) < \frac{\delta_1}{2}$ para todo $m \geq m_0$. Também, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \delta_m < \frac{\delta_1}{2}$, para $m \geq m_1$, pois $\delta_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. E ainda, já que $z_m \in B(w_{k_m}; \delta_m)$, temos $d(z_m, w_{k_m}) < \delta_m$. Tomando $\overline{m} = \max\{m_0, m_1\}$, para todo $m \geq \overline{m}$ segue que

$$d(z_m, w_0) \leq d(z_m, w_{k_m}) + d(w_{k_m}, w_0) < \delta_m + \frac{\delta_1}{2} < \delta_1.$$

Então, $z_m \in B(w_0; \delta_1)$ para todo $m \geq \overline{m}$, isto é, $z_m \in B(w_0, \delta_0)$ para $m \geq \overline{m}$. Com isso, pelo item b), existe $\alpha_m \in [-\beta, \beta]$ tal que

$$\pi_{\eta_{k_m}}(\alpha_m)z_m \in M_{\eta_{k_m}}, \text{ para todo } m \geq \overline{m}.$$

Podemos assumir que $\alpha_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \in [-\beta, \beta]$. Pela Condição **C1** e a continuidade dos grupos $\pi_{\eta_{k_m}}$, temos $\pi_{\eta_{k_m}}(\alpha_m)z_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\alpha)w_0$ e, pelo Lema 5.5, $\pi_0(\alpha)w_0 \in M_0$. Logo, $\alpha = 0$, visto que $\pi_0((0, \lambda])w_0 \cap M_0 = \emptyset$ e $F_0(w_0, (0, \lambda]) \cap M_0 = \emptyset$. Sendo assim, $\alpha_m \in [-\lambda, \lambda]$ para m suficientemente grande. Consequentemente, $\alpha_m + \lambda \in [0, 2\lambda]$ e $\pi_{\eta_{k_m}}(\alpha_m)z_m \in S_{k_m}$ para m suficientemente grande. Então,

$$\pi_{\eta_{k_m}}(\lambda + \alpha_m)z_m \in L_{k_m}.$$

Assim, $z_m \in F_{\eta_{k_m}}(L_{k_m}, [0, 2\lambda])$ para k suficientemente grande, o que é uma contradição e prova a afirmação.

<u>Afirmação 3:</u> Existe $k_0 \geq k_2$ tal que $F_{\eta_k}(L_k, \nu) \cap F_{\eta_k}(L_k, \mu) = \emptyset$ para todo $0 \leq \nu < \mu \leq 2\lambda$ e $k \geq k_0$.

Suponhamos, por absurdo, que existam uma sequência $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $k_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $0 \leq \nu_m < \mu_m \leq 2\lambda$ e $z_m \in F_{\eta_{k_m}}(L_{k_m}, \nu_m) \cap F_{\eta_{k_m}}(L_{k_m}, \mu_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, temos

$$\pi_{\eta_{k_m}}(\nu_m)z_m \in L_{k_m} \text{ e } \pi_{\eta_{k_m}}(\mu_m)z_m \in L_{k_m} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Como $L_{k_m} = \pi_{\eta_{k_m}}(\lambda)S_{k_m}$,

$$\pi_{\eta_{k_m}}(\nu_m - \lambda)z_m \in S_{k_m} \text{ e } \pi_{\eta_{k_m}}(\mu_m - \lambda)z_m \in S_{k_m}.$$

Visto que $S_{k_m} \subset B_{\eta_{k_m}}$, temos $\pi_{\eta_{k_m}}(\nu_m - \lambda)z_m \in B_{\eta_{k_m}}$ e $\pi_{\eta_{k_m}}(\mu_m - \nu_m)\pi_{\eta_{k_m}}(\nu_m - \lambda)z_m = \pi_{\eta_{k_m}}(\mu_m - \lambda)z_m \in M_{\eta_{k_m}}$. Assim, pelo item b), segue que

$$|\mu_m - \nu_m| \geq \beta, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Por (5.5), podemos assumir que $\pi_{\eta_{k_m}}(\nu_m - \lambda)z_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} a \in S_0$ e $\pi_{\eta_{k_m}}(\mu_m - \lambda)z_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} b \in S_0$. Além disso, por (5.6), podemos considerar que $\nu_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \nu \in [0, 2\lambda]$ e $\mu_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \mu \in [0, 2\lambda]$ com $\mu \neq \nu$. Contudo, temos

$$\lim_{m\to+\infty} z_m = \lim_{m\to+\infty} \pi_{\eta_{k_m}}(\lambda - \nu_m)\pi_{\eta_{k_m}}(\nu_m - \lambda)z_m = \pi_0(\lambda - \nu)a,$$

e também,

$$\lim_{m\to+\infty} z_m = \lim_{m\to+\infty} \pi_{\eta_{k_m}}(\lambda - \mu_m)\pi_{\eta_{k_m}}(\mu_m - \lambda)z_m = \pi_0(\lambda - \mu)b.$$

Então, $\pi_0(\lambda-\nu)a = \pi_0(\lambda-\mu)b \in F_0(L_0, \nu) \cap F_0(L_0, \mu)$, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que w_0 satisfaz a condição (C-STC). □

Corolário 5.11. Sob as hipóteses do teorema anterior, se assumirmos adicionalmente que $I_0(M_0)$ é fechado, $d_H(I_\eta(M_\eta), I_0(M_0)) \overset{\eta\to0}{\longrightarrow} 0$ e $w_0 \in M_0$ satisfaz a condição (SSTC), então w_0 satisfaz a condição (C-SSTC).

Demonstração. Como $w_0 \in M_0$ satisfaz a condição (STC), pelo Teorema 5.10, w_0 satisfaz a condição (C-STC). Além disso, temos por hipótese que w_0 satisfaz SSTC. Logo, assim como fizemos na demonstração do Teorema 5.10, pelos Lemas 3.15 e 5.9, podemos considerar um λ-tubo $F_0(L_0, [0, 2\lambda])$ compacto com $F_0(L_0, [0, \lambda]) \cap I_0(M_0) = \emptyset$. Seguindo a prova do Teorema 5.10, vamos mostrar que existe $\overline{k_0} \geq k_0$ tal que

$$F_{\eta_k}(L_k, [0, \lambda]) \cap I(M_{\eta_k}) = \emptyset, \quad \text{para } k \geq \overline{k_0}.$$

Suponhamos, por contradição, que exista $z_n \in F_{\eta_{k_n}}(L_{k_n}, [0, \lambda]) \cap I_{\eta_{k_n}}(M_{\eta_{k_n}})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, existe $s_n \in [0, \lambda]$ tal que $\pi_{\eta_{k_n}}(s_n)z_n \in L_{k_n}$, o que implica que $\pi_{\eta_{k_n}}(s_n - \lambda)z_n \in F_{\eta_{k_n}}(L_{k_n}, \lambda) = S_{k_n}$. Podemos admitir que $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s_0 \in [0, \lambda]$. Por (5.5), e usando a compacidade de S_0, tomando subsequência se necessário, assumimos que

$$\pi_{\eta_{k_n}}(s_n - \lambda)z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_0 \in S_0.$$

Também, considerando a Condição **C1**, temos

$$z_n = \pi_{\eta_{k_n}}(\lambda - s_n)\pi_{\eta_{k_n}}(s_n - \lambda)z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\lambda - s_0)y_0 = z_0.$$

Com isso, obtemos que $z_0 \in F_0(L_0, [0, \lambda])$, pois $\pi_0(s_0)z_0 = \pi_0(\lambda)y_0 \in L_0$ e $s_0 \in [0, \lambda]$, então, pela condição (SSTC), $z_0 \notin I_0(M_0)$. Por outro lado, $z_n \in I_{\eta_{k_n}}(M_{\eta_{k_n}})$, $n \in \mathbb{N}$, e como $d_H(I_\eta(M_\eta), I_0(M_0)) \stackrel{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0$, podemos encontrar uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $I_0(M_0)$ que converge para z_0. Mas, como $I_0(M_0)$ é fechado, temos que $z_0 \in I_0(M_0)$, o que é uma contradição. □

5.2 Continuidade Coletiva das Aplicações Tempo de Impacto

Como foi definido no Capítulo 2, consideramos para cada $\eta \in [0, 1]$ a aplicação tempo de impacto $\phi_\eta : (0, +\infty] \to X$ dada por

$$\phi_\eta(x) = \begin{cases} s, & \text{se } \pi_\eta(s)x \in M_\eta \text{ e } \pi_\eta(t)x \notin M \text{ para } 0 < t < s, \\ +\infty, & \text{se } M_\eta^+(x) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $M_\eta^+ = \left(\bigcup_{t>0} \pi_\eta(t)x\right) \cap M_\eta$.

Nesta seção vamos discutir a continuidade da família de aplicações $\{\phi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$.

Lema 5.12. *Sejam $x_0 \in X \setminus M_0$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência tais que $x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$. Seja $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ uma sequência com $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\liminf_{k\to+\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) \geq \phi_0(x_0)$.*

Demonstração. Suponhamos que $\liminf_{k\to+\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) < \phi_0(x_0)$, isto é, que existam subsequências $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, respectivamente, tais que $\phi_{\eta_{k_j}}(x_{k_j}) \stackrel{j\to+\infty}{\longrightarrow} t < \phi_0(x_0)$. Como $\pi_{\eta_{k_j}}(\phi_{\eta_{k_j}}(x_{k_j}))x_{k_j} \in M_{\eta_{k_j}}$, $j \in \mathbb{N}$, pela Condição **C1** e o Lema 5.5, temos

$$\pi_{\eta_{k_j}}(\phi_{\eta_{k_j}}(x_{k_j}))x_{k_j} \stackrel{j\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(t)x_0 \in M_0.$$

Portanto, $\phi_0(x_0) \leq t$, o que é uma contradição. □

Lema 5.13. *Sejam $x_0 \in X$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tais que $x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$. Assuma que cada ponto de M_0 satisfaça a condição (C-STC). Seja $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ uma sequência com $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\limsup_{n\to+\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) \leq \phi_0(x_0)$.*

Demonstração. É suficiente considerar $\phi_0(x_0) < +\infty$. Sabemos que $\pi_0(\phi_0(x_0))x_0 \in M_0$ e, pela Condição **C2**, $d_H(M_0, M_{\eta_k}) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Então, conforme o Lema 5.3, existe uma subsequência de $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que manteremos a mesma notação para simplificar, e uma sequência

$\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $w_k \in M_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tais que $w_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0(x_0))x_0$. Pela condição (C-STC), existem $\lambda < \phi_0(x_0)$, $\delta > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$B(\pi_0(\phi_0(x_0))x_0;\delta) \subset F_0(L_0,[0,2\lambda]) \text{ e } B(w_k;\delta) \subset F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]),\ k \geq k_0,$$

onde $F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda])$ é um λ-tubo através de w_k com seção $S_k = F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]) \cap M_{\eta_k}$ e $F_0(L_0,[0,2\lambda])$ é um λ-tubo através de $\pi_0(\phi_0(x_0))x_0$ com seção $S_0 = F_0(L_0,[0,2\lambda]) \cap M_0$. Pelo Lema 5.8, existe $k_1 \geq k_0$ tal que

$$B\left(\pi_0(\phi_0(x_0))x_0;\frac{\delta}{2}\right) \subset B(w_k;\delta) \subset F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]),\ k \geq k_1,$$

e, pela Condição **C1**,

$$\pi_{\eta_k}(\phi_0(x_0))x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0(x_0))x_0.$$

Consequentemente, existe $k_2 \geq k_1$ de modo que

$$\pi_{\eta_k}(\phi_0(x_0))x_k \subset B\left(\pi_0(\phi_0(x_0))x_0;\frac{\delta}{2}\right) \subset F_{\eta_k}(L_k,[0,2\lambda]), \quad \text{para todo } k \geq k_2.$$

Sem perda de generalidade, podemos separar em dois casos:

<u>Caso 1:</u> $\pi_{\eta_k}(\phi_0(x_0))x_k \in F_{\eta_k}(L_k,(\lambda,2\lambda])$ para todo $k \geq k_2$.

Neste caso, existe $\alpha_k \in (\lambda, 2\lambda]$ tal que

$$\pi_{\eta_k}(\alpha_k)\pi_{\eta_k}(\phi_0(x_0))x_k = \pi_{\eta_k}(\alpha_k + \phi_0(x_0))x_k \in L_k.$$

Logo,

$$\pi_{\eta_k}(\alpha_k + \phi_0(x_0) - \lambda)x_k \in F_{\eta_k}(L_k,\lambda) = S_k \subset M_{\eta_k},\ k \geq k_2. \tag{5.7}$$

Com isso, $\phi_{\eta_k}(x_k) \leq \alpha_k + \phi_0(x_0) - \lambda$, para todo $k \geq k_2$. Podemos assumir que $\alpha_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_0 \in [\lambda, 2\lambda]$. Assim, por **C1**, temos

$$\pi_{\eta_k}(\alpha_k + \phi_0(x_0) - \lambda)x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\alpha_0 + \phi_0(x_0) - \lambda)x_0 = \pi_0(\alpha_0 - \lambda)\pi_0(\phi_0(x_0))x_0.$$

Por (5.7) e pelo Lema 5.5, temos $\pi_0(\alpha_0-\lambda)\pi_0(\phi_0(x_0))x_0 \in M_0$. Uma vez que $\alpha_0-\lambda \in [0,\lambda]$ e, pela propriedade do tubo, $\pi_0((0,\lambda])\pi_0(\phi_0(x_0))x_0 \cap M_0 = \emptyset$, então $\alpha_0 - \lambda = 0$. Com isso, concluímos que

$$\limsup_{k\to+\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) \leq \limsup_{k\to+\infty}(\alpha_k + \phi_0(x_0) - \lambda) = \phi_0(x_0).$$

Caso 2: $\pi_{\eta_k}(\phi_0(x_0))x_k \in F_{\eta_k}(L_k, [0, \lambda])$, para todo $k \geq k_2$.

Neste caso, existe $\beta_k \in [0, \lambda]$ tal que

$$\pi_{\eta_k}(\beta_k)\pi_{\eta_k}(\phi_0(x_0))x_k \in L_k, \text{ para todo } k \geq k_2.$$

Assim, como $\phi_0(x_0) > \lambda$ temos

$$\pi_{\eta_k}(\beta_k + \phi_0(x_0) - \lambda)x_k \in F_{\eta_k}(L_k, \lambda) = S_k \subset M_{\eta_k}, \quad k \geq k_2.$$

Então, $\phi_{\eta_k}(x_k) \leq \beta_k + \phi_0(x_0) - \lambda$, para todo $k \geq k_2$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\beta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \beta_0 \in [0, \lambda]$. Pela Condição **C1** e o Lema 5.5, segue que

$$\pi_{\eta_k}(\beta_k + \phi_0(x_0) - \lambda)x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\beta_0 + \phi_0(x_0) - \lambda)x_0 \in M_0.$$

Logo, $\phi_0(x_0) \leq \beta_0 + \phi_0(x_0) - \lambda$, o que implica que $\beta_0 - \lambda \geq 0$. Então $\beta_0 = \lambda$ e

$$\limsup_{k\to+\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) \leq \limsup_{k\to+\infty}(\phi_0(x_0) + \beta_k - \lambda) = \phi_0(x_0),$$

como queríamos mostrar. □

Os dois últimos lemas apresentados resultam no seguinte teorema.

Teorema 5.14. *Assuma que cada ponto de M_0 satisfaça a condição (C-STC). Sejam $x_0 \in X \setminus M_0$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência tais que $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$. Se $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ é uma sequência com $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\lim\limits_{k\to+\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) = \phi_0(x_0)$.*

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas 5.12 e 5.13. □

Na prova do Lema 5.13 usamos a continuidade inferior em $\eta = 0$ da família dos conjuntos impulsivos $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, garantida pela Condição **C2**. O exemplo a seguir mostra que sem esta hipótese a conclusão do lema não é verdadeira.

Exemplo 5.15. Considere os semigrupos

$$\pi_\eta(t)x = -t + x, \ t \geq 0, \ x \in X = \mathbb{R}, \ \eta \in [0, 1],$$

os conjuntos impulsivos

$$M_0 = \{0, 2\}, \ M_\eta = \{\eta\}, \ \eta \in (0, 1],$$

e as funções de impacto $I_\eta(z) = -1$ para $z \in M_\eta$, $\eta \in [0,1]$.

As condições **C1**, **C3** e **C4** são satisfeitas. Além disso, cada ponto em M_0 satisfaz a condição (C-STC). Note que

$$d_H(M_\eta, M_0) = \eta \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0 \ \text{ e } \ d_H(M_0, M_\eta) = 2 - \eta \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 2.$$

Isto é, $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente mas não é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. Seja $x_k = x_0 = 3$, $k \in \mathbb{N}$. Para qualquer sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ com $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, temos

$$\limsup_{k\to+\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) = 3 > 1 = \phi_0(x_0).$$

Então ϕ_{η_k} não é semicontínua superiormente em $x_0 = 3$.

5.3 Continuidade das Trajetórias Impulsivas

Nesta seção, com o auxílio do Teorema 5.14, provamos alguns resultados sobre a continuidade das trajetórias impulsivas $\tilde{\pi}_\eta$. São resultados semelhantes aos que fizemos na Seção 2 do Capítulo 3, mas agora consideramos uma família de trajetórias impulsivas associadas a família de sistemas dinâmicos impulsivos $\{X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$.

Proposição 5.16. *Sejam $x_0 \in X \setminus M_0$, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ sequências tais que $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ e $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Assuma que cada ponto de M_0 satisfaça a condição (C-STC). Então, dado $t \geq 0$ existe uma sequência $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\epsilon_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(t)x_0$.*

Demonstração. Seja $t \geq 0$. Se $\phi_0(x_0) = +\infty$, pelo Teorema 5.14, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_{\eta_k}(x_k) > t$ para todo $k \geq k_0$. Consequentemente, $\tilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k = \pi_{\eta_k}(t)x_k$ para todo $k \geq k_0$. Escolhendo $\epsilon_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pela Condição **C1**, segue que

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k = \tilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k = \pi_{\eta_k}(t)x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(t)x_0 = \tilde{\pi}_0(t)x_0. \tag{5.8}$$

Agora, vamos assumir que $\phi_0(x_0) < +\infty$. Pelo Teorema 5.14, podemos considerar que $\phi_{\eta_k}(x_k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Vamos analisar alguns casos.

Caso 1: $0 \leq t < \phi_0(x_0)$.

Conforme o Teorema 5.14, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t < \phi_{\eta_k}(x_k)$ para todo $k \geq k_1$. Isso implica que $\tilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k = \pi_{\eta_k}(t)x_k$ para todo $k \geq k_1$. Tomando $\epsilon_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e considerando a Condição **C1**, assim como em (5.8), o resultado segue.

Caso 2: $t = \phi_0(x_0)$.

Neste caso, $\tilde{\pi}_0(t)x_0 = \tilde{\pi}_0(\phi_0(x_0))x_0 = (x_0)_1^+$. Pela Condição **C1**, temos

$$(x_k)_1 = \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0(x_0))x_0 = (x_0)_1.$$

Agora, pela Condição **C3**, temos

$$(x_k)_1^+ = I_{\eta_k}((x_k)_1) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_0((x_0)_1) = (x_0)_1^+.$$

Definindo $\epsilon_k = \phi_{\eta_k}(x_k) - \phi_0(x_0) = \phi_{\eta_k}(x_k) - t$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ satisfazendo $\epsilon_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))x_k = (x_k)_1^+ \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x_0)_1^+ = \tilde{\pi}_0(t)x_0.$$

Caso 3: $t > \phi_0(x_0)$.

Pela Observação 3.5, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+) + t'$, onde $0 \leq t' < \phi_0((x_0)_m^+)$, de modo que $\tilde{\pi}_0(t)x_0 = \pi_0(t')(x_0)_m^+$. Como $\phi_{\eta_k}(x_k) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_0(x_0)$, novamente por **C1**, obtemos

$$(x_k)_1 = \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0(x_0))x_0 = (x_0)_1.$$

Considerando a Condição **C3**, temos

$$(x_k)_1^+ = I_{\eta_k}((x_k)_1) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_0((x_0)_1) = (x_0)_1^+,$$

e, pela Condição **C4**, $(x_0)_1^+ \notin M_0$. Sabemos, pelo Teorema 5.14, que $\phi_{\eta_k}((x_k)_1^+) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_0((x_0)_1^+)$ e mais uma vez por **C1**, segue que

$$(x_k)_2 = \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)_1^+))(x_k)_1^+ \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0((x_0)_1^+))(x_0)_1^+ = (x_0)_2.$$

Continuando com esse procedimento, obtemos

$$(x_k)_i = \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)_{i-1}^+))(x_k)_{i-1}^+ \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0((x_0)_{i-1}^+))(x_0)_{i-1}^+ = (x_0)_i \ \text{ e}$$

$$(x_k)_i^+ = I_{\eta_k}((x_k)_i) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_0((x_0)_i) = (x_0)_i^+, \ i = 1, ..., m.$$

Assim, temos

$$\sum_{i=0}^{m-1} \phi_{\eta_k}((x_k)_i^+) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+) = t - t'.$$

Seja $t_k = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_{\eta_k}((x_k)_i^+)$. Definimos uma sequência de números reais $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, dada por $\epsilon_k = t_k + t' - t$, temos que $\epsilon_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\epsilon_k + t = t' + t_k \geq 0$. Observe que $\phi_{\eta_k}((x_k)_m^+) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_0((x_0)_m^+) > t'$. Sendo assim, $\phi_{\eta_k}((x_k)_m^+) > t'$, para k suficientemente grande. Pela Condição **C1**, segue

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k = \tilde{\pi}_{\eta_k}(t'+t_k)x_k = \pi_{\eta_k}(t')(x_k)_m^+ \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(t')(x_0)_m^+ = \tilde{\pi}_0(t)x_0,$$

finalizando a prova. □

Proposição 5.17. *Sejam $x_0 \in X \setminus M_0$, $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{\eta_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ sequências tais que $x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ e $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Considerando que cada ponto de M_0 satisfaça a condição (C-STC), dada uma sequência $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\tilde{\pi}_{\eta_k}(\alpha_k)x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$.*

Demonstração. Como $x_0 \notin M_0$, pelo Teorema 5.14, $\phi_{\eta_k}(x_k) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_0(x_0) > 0$. Já que $\alpha_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, existe $\overline{k} \in \mathbb{N}$ de modo que $\alpha_k < \phi_{\eta_k}(x_k)$ para todo $k \geq \overline{k}$. Pela Condição **C1'**, temos

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(\alpha_k)x_k = \pi_{\eta_k}(\alpha_k)x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(0)x_0 = x_0,$$

o que conclui a demonstração da proposição. □

Corolário 5.18. Seja $x_0 \in X \setminus M_0$, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ sequências tais que $x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ e $\eta_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Assuma que cada ponto de M_0 satisfaça a condição (C-STC). Então, dado $t \geq 0$ existe uma sequência $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(t)x_0$.

Demonstração. Sob essas hipóteses, a Proposição 5.16 nos garante que existe uma sequência $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\lambda_k)x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(t)x_0 \notin M_0$. Tomando $\epsilon_k = \lambda_k + |\lambda_k| \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $\epsilon_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pela Proposição 5.17, segue que

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k = \tilde{\pi}_{\eta_k}(|\lambda_k|)\tilde{\pi}_{\eta_k}(t+\lambda_k)x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(t)x_0,$$

o que queríamos provar. □

5.4 Semicontinuidade Superior dos Atratores Globais

Nosso objetivo nesta seção é apresentar um resultado que garanta a semicontinuidade superior em $\eta = 0$ da família de atratores globais impulsivos $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ dos sistemas dinâmicos impulsivos $\{X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$. Para isso, apresentamos a seguir um resultado que será necessário.

Lema 5.19. *Seja $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos não vazios de X tal que $\mathcal{A}_0$ é pré-compacto. A família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$ se, e somente se, dadas uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, onde $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência convergente de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com limite em $\overline{\mathcal{A}_0}$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ não seja semicontínua superiormente em $\eta = 0$. Então existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tais que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$d(x_k, \mathcal{A}_0) \geq \epsilon_0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Isso mostra que não existe subsequência convergente de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com limite em $\overline{\mathcal{A}_0}$, o que é uma contradição. Reciprocamente, suponhamos que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ seja semicontínua superiormente em $\eta = 0$ e tomemos sequências $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tais que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$d(x_k, \overline{\mathcal{A}_0}) = d(x_k, \mathcal{A}_0) \leq d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\overline{\mathcal{A}_0}$ é compacto, pelo Lema 1.3, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente com limite em $\overline{\mathcal{A}_0}$, o que queríamos demonstrar. □

Agora, apresentamos um dos principais resultados deste capítulo.

Teorema 5.20. *Seja $\{X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de sistemas dinâmicos impulsivos com atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$. Se cada ponto de M_0 satisfaz a condição (C-SSTC) e a reunião $\bigcup\limits_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é pré-compacta em X, então a família dos atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.*

Demonstração. Sejam $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ sequências tais que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\bigcup\limits_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é pré-compacta em X, existem $x_0 \in X$ e uma subsequência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que manteremos a mesma notação, tais que $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$. Seja $\overline{\eta} \in (0,1]$ da Condição **C4**. Podemos assumir que $\eta_k < \overline{\eta}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, com isso, $I_{\eta_k}(M_{\eta_k}) \cap M_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nosso objetivo é mostrar que $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$. Seja $\psi_k : \mathbb{R} \to X$, $k \in \mathbb{N}$, a solução global limitada através de $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ dada por

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \tilde{\pi}_{\eta_k}(t+m)(x_k)_{-m}, & \text{se } t \in [-m, -m+1],\ m \in \mathbb{N}, \\ \tilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k, & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

onde $\{(x_k)_-m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\eta_k}$ é uma sequência que cumpre as seguintes propriedades:

- $\tilde{\pi}_{\eta_k}(m)(x_k)_{-m} = (x_k)_0 = x_k$, para todo $m \in \mathbb{N}$;
- $\tilde{\pi}_{\eta_k}(1)(x_k)_{-m} = (x_k)_{-m+1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$;
- $\tilde{\pi}_{\eta_k}(n)(x_k)_{-m} = (x_k)_{n-m}$ sempre que $m \geq n$.

Ressaltamos que tais propriedades provêm da construção da sequência $\{(x_k)_{-m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ que é feita de forma inteiramente análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 2.12. Como $\{(x_k)_{-m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ que é compacto, podemos assumir que para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ existe $(x_0)_{-m} \in \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ tal que

$$(x_k)_{-m} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x_0)_{-m},\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

onde $(x_k)_{-0} = x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $(x_0)_{-0} = x_0$. Além disso, como $I_0\left(M_0 \cap \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}\right)$ é compacto, pela Proposição 3.10, existe $\xi > 0$ tal que $\phi_0(z) \geq \xi$ para todo $z \in I_0\left(M_0 \cap \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}\right)$. Agora, prosseguiremos dividindo em casos.

<u>Caso 1:</u> $x_0 \notin M_0$.

Neste caso temos dois subcasos a considerar: se a sequência $\{(x_0)_{-m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que não está contida em M_0, e o caso em que $(x_0)_{-m} \in M_0$ para m suficientemente grande.

<u>Subcaso 1.1</u> Suponha que exista uma subsequência $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}_+$ tal que $m_{j+1} > m_j$ e $(x_0)_{-m_j} \notin M_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, onde $m_1 = 0$. Pelo Corolário 5.18, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{\epsilon_k^j\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_k^j \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_k^j)(x_k)_{-m_{j+1}} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(m_{j+1} - m_j)(x_0)_{-m_{j+1}}. \tag{5.9}$$

Como $0 < m_{j+1} - m_j < m_{j+1}$, pelas propriedades da sequência $\{(x_k)_{-m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ temos

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j)(x_k)_{-m_{j+1}} = (x_k)_{m_{j+1}-m_j-m_{j+1}} = (x_k)_{-m_j}, \text{ para } j \in \mathbb{N}.$$

Daí, pela Proposição 5.17, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_k^j)(x_k)_{-m_{j+1}} &= \tilde{\pi}_{\eta_k}(\epsilon_k^j)\tilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j)(x_k)_{-m_{j+1}} \\ &= \tilde{\pi}_{\eta_k}(\epsilon_k^j)(x_k)_{-m_j} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x_0)_{-m_j}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Assim, por (5.9) e (5.10), para cada $j \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\tilde{\pi}_0(m_{j+1} - m_j)(x_0)_{-m_{j+1}} = (x_0)_{-m_j}.$$

Definimos

$$\psi_0(t) = \begin{cases} \tilde{\pi}_0(t + m_{j+1})(x_0)_{-m_{j+1}}, & \text{se } t \in [-m_{j+1}, -m_j],\ j \in \mathbb{N}, \\ \tilde{\pi}_0(t)x_0, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Note que ψ_0 é uma solução global de $\tilde{\pi}_0$ através de x_0. Mostraremos agora que $\psi_0(\mathbb{R}) \subset \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$. De fato, dado $s \in \mathbb{R}$. Se $s \geq 0$, então $\tilde{\pi}_0(s)x_0 = \psi_0(s)$. Pelo Corolário 5.18, existe uma sequência $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\gamma_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(s + \gamma_k)x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(s)x_0 = \psi_0(s).$$

Como $\mathcal{A}_{\eta_k}$ é $\tilde{\pi}$-invariante, então $\tilde{\pi}_{\eta_k}(s + \gamma_k)x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\psi_0(s) \in \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$. Agora, se $s < 0$, suponhamos que $s \in [-m_{j+1}, -m_j]$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Então, $\psi_0(s) = \tilde{\pi}_0(s + m_{j+1})(x_0)_{-m_{j+1}}$. Pelo Corolário 5.18, existe uma sequência $\{\lambda_k^j\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_k^j \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}_{\eta_k}(s + m_{j+1} + \lambda_k^j)(x_k)_{-m_{j+1}} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(s + m_{j+1})(x_0)_{-m_{j+1}} = \psi_0(s),$$

o que implica, pela invariância de $\mathcal{A}_\eta$, que $\psi_0(s) \in \overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$, isto é, $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$. Com isso concluímos que ψ_0 é uma solução global limitada de $\tilde{\pi}_0$ através de x_0. Pela Proposição 4.7, $x_0 \in \mathcal{A}_0 = \overline{\mathcal{A}_0} \setminus M_0$. Logo $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$, o que queríamos provar.

Subcaso 1.2 Suponha que exista $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_0)_{-m} \in M_0$ para todo $m \geq m_0$. Como $(x_k)_{-m} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x_0)_{-m} \in M_0$, tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ para todo } m \geq m_0. \tag{5.11}$$

De fato, fixemos $m \geq m_0$. Por **C2**, sabemos que $d_H(M_0, M_\eta) \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$. Conforme o Lema 5.3, existem uma subsequência de $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que usaremos a mesma notação, e uma sequência $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, com $w_k \in M_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tais que $w_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x_0)_{-m}$. Pela condição (C-SSTC) e o Lema 5.8, existem $\lambda, \delta > 0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$B\left((x_0)_{-m}; \frac{\delta}{2}\right) \subset B(w_k; \delta) \subset F_{\eta_k}(L_k, [0, 2\lambda]), \text{ para todo } k \geq k_1,$$

onde $F_{\eta_k}(L_k, [0, 2\lambda])$ é um λ-tubo através de w_k com seção $S_k = F_{\eta_k}(L_k, [0, 2\lambda]) \cap M_{\eta_k}$ e $F_0(L_0, [0, 2\lambda])$ é um λ-tubo através de $(x_0)_{-m}$ com seção $S_0 = F_0(L_0, [0, 2\lambda]) \cap M_0$. Além disso, temos

$$F_{\eta_k}(L_k, [0, \lambda]) \cap I_{\eta_k}(M_{\eta_k}) = \emptyset \text{ e } B\left((x_0)_{-m}; \frac{\delta}{2}\right) \subset F_0(L_0, [0, 2\lambda]).$$

Logo,

$$B\left((x_0)_{-m}; \frac{\delta}{2}\right) \subset F_0(L_0, [0, 2\lambda]) \cap B(w_k; \delta), \ k \geq k_1.$$

Consequentemente, existe $k_2 \geq k_1$ tal que $(x_k)_{-m} \in B(w_k; \delta)$, para todo $k \geq k_2$. Como $(x_k)_{-m} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$, existe uma solução global limitada de $\tilde{\pi}_{\eta_k}$ através de $(x_k)_{-m}$ e, pela Proposição 3.22, $(x_k)_{-m} \in F_{\eta_k}(L_k, (\lambda, 2\lambda])$ para $k \geq k_2$. Então, para cada $k \geq k_2$, existe $\alpha_k \in (\lambda, 2\lambda]$ tal que $\pi_{\eta_k}(\alpha_k)(x_k)_{-m} \in L_k$. Com isso,

$$\pi_{\eta_k}(\alpha_k - \lambda)(x_k)_{-m} \in F_{\eta_k}(L_k, \lambda) = S_k \subset M_{\eta_k}, \quad \text{para todo } k \geq k_2.$$

Podemos considerar que $\alpha_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_0 \in [\lambda, 2\lambda]$ e, pela Condição **C1** e pelo Lema 5.5, obtemos

$$\pi_{\eta_k}(\alpha_k - \lambda)(x_k)_{-m} \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\alpha_0 - \lambda)(x_0)_{-m} \in M_0.$$

Sabemos que $\pi_0((0, \lambda])(x_0)_{-m} \cap M_0 = \emptyset$, como $\alpha_0 - \lambda \in [0, \lambda]$, implica que $\alpha_0 = \lambda$. Além disso, como $\pi_{\eta_k}(\alpha_k - \lambda)(x_k)_{-m} \in M_{\eta_k}$, temos que $0 < \phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}) \leq \alpha_k - \lambda$ para todo $k \geq k_2$. Então, $\phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, como afirmamos.

Agora, seja $0 < \beta < \min\{\xi, 1\}$. Definimos $(y_k)_{-m} = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)(x_k)_{-m} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$. Fixando $m \geq m_0$, por **C1**, temos

$$w_k = \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}))(x_k)_{-m} \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(0)(x_0)_{-m} = (x_0)_{-m} = w_0 \in M_0 \cap \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_{\eta_k}}.$$

Como $w_k \in M_{\eta_k}$, $k \in \mathbb{N}$, pela Condição **C3**, segue que

$$I_{\eta_k}(w_k) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_0(w_0) \notin M_0.$$

Então, pelo Teorema 5.14,

$$\phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_k)) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_0(I_0(w_0)).$$

Dado que $\phi_0(I_0(w_0)) \geq \xi > \beta$, segue que $\phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_k)) > \beta$ para k suficientemente grande. Assim, para k suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}(y_k)_{-m} &= \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)(x_k)_{-m} = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta - \phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}))\tilde{\pi}_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}))(x_k)_{-m} \\ &= \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta - \phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}))I_{\eta_k}(w_k) = \pi_{\eta_k}(\beta - \phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}))I_{\eta_k}(w_k).\end{aligned}$$

Logo, pela Condição **C1**,

$$(y_k)_{-m} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\beta)I_0((x_0)_{-m}) = (y_0)_{-m} \notin M_0.$$

Note que $(y_k)_{-m} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ e $\tilde{\pi}_{\eta_k}(1)(y_k)_{-m} = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)\tilde{\pi}_{\eta_k}(1)(x_k)_{-m} = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)(x_k)_{-m+1} = (y_k)_{-m+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0 + 1$. Sabemos que os pontos $(y_k)_{-m}$ pertencem a uma solução global limitada ψ_k de $\tilde{\pi}_{\eta_k}$ através de $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ e, para todo $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned}\psi_k(-m+\beta) &= \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)\psi_k(-m) \\ &= \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)\tilde{\pi}_{\eta_k}(-m+m)(x_k)_{-m} \\ &= \tilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)(x_k)_{-m} \\ &= (y_k)_{-m}.\end{aligned}$$

Agora, podemos repetir a mesma construção feita no Subcaso 1.1 usando a sequência $\{(y_0)_{-m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $m_1 = 0$ e $m_j = m_0 + j - 2$, onde $(y_0)_0 = x_0$ e $(y_0)_0 = x_0$ e com isso obtemos uma solução global limitada de $\tilde{\pi}_0$ através de x_0. Consequentemente, resulta que $x_0 \in \mathcal{A}_0$.

<u>Caso 2:</u> $x_0 \in M_0$.

Sabendo que $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \in M_0$, repetindo o argumento do Subcaso 1.2 podemos considerar que $\phi_{\eta_k}(x_k) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Sendo assim, podemos assumir que $0 < \phi_{\eta_k}(x_k) < \frac{\xi}{4}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $x_0 \in M_0$, existe $\epsilon_{x_0} > 0$ tal que $F_0(x_0, (0, \epsilon_{x_0})) \cap M_0 = \emptyset$. Seja $\overline{m} \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\overline{m}} < \min\{\epsilon_{x_0}, \frac{1}{\overline{m}}\}$. Fixamos $m \geq \overline{m}$ e, para simplificar a notação, denotamos $w_k = \psi_k(-\frac{1}{m}) \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando uma subsequência se necessário, seja $y_m \in \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_{\eta_k}}$ o limite da sequência $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Na sequência, mostraremos que existe

$k_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_{\eta_k}(w_k) > \frac{1}{m}$ para todo $k \geq k_3$. De fato, suponhamos, por contradição, que podemos escolher uma subsequência de $\{\phi_{\eta_k}(w_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, que também mantemos a mesma notação, tal que $\phi_{\eta_k}(w_k) \leq \frac{1}{m}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\{\phi_{\eta_k}(w_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, e como $w_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} y_m$, pela Condição **C1**, segue que

$$z_k = \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(w_k))w_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0(y_m))y_m = z.$$

Dado que $z_k \in M_{\eta_k}$, pelo Lema 5.5, $z \in M_0$. Então, por **C3** temos

$$v_k = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(w_k))w_k = I_{\eta_k}(z_k) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_0(z) \in \left(M_0 \cap \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_{\eta_k}} \right).$$

Sabendo que $\phi_0(I_0(z)) \geq \xi$, como $\phi_{\eta_k}(v_k) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_0(I_0(z))$, então $\phi_{\eta_k}(v_k) > \frac{\xi}{2} > \frac{1}{m}$ para k suficientemente grande. Logo, para k suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
\pi_{\eta_k}\left(\phi_{\eta_k}(x_k) + \frac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_k)\right) v_k &= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\pi_{\eta_k}\left(\frac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_k)\right) v_k \\
&= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\tilde{\pi}_{\eta_k}\left(\frac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_k)\right) \tilde{\pi}_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(w_k))w_k \\
&= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\tilde{\pi}_{\eta_k}\left(\frac{1}{m}\right) w_k \\
&= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\tilde{\pi}_{\eta_k}\left(\frac{1}{m}\right) \psi_k\left(-\frac{1}{m}\right) \\
&= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\psi_k(0) \\
&= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))x_k \in M_{\eta_k},
\end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois

$$\phi_{\eta_k}(x_k) + \frac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_k) < \phi_{\eta_k}(x_k) + \frac{1}{m} < \frac{\xi}{4} + \frac{1}{\overline{m}} < \frac{\xi}{4} + \frac{\xi}{4} = \frac{\xi}{2}.$$

Portanto, $\phi_{\eta_k}(w_k) > \frac{1}{m}$ para todo $k \geq k_3$ e por isso,

$$\pi_{\eta_k}\left(\frac{1}{m}\right) w_k = \tilde{\pi}_{\eta_k}\left(\frac{1}{m}\right) w_k = \tilde{\pi}_{\eta_k}\left(\frac{1}{m}\right) \psi_k\left(-\frac{1}{m}\right) = \psi_k(0) = x_k \notin M_{\eta_k},\ k \geq k_3.$$

Pela Condição **C1**, temos $\pi_{\eta_k}\left(\frac{1}{m}\right) w_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_0\left(\frac{1}{m}\right) y_m$ e como $x_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, então

$$\pi_0\left(\frac{1}{m}\right) y_m = x_0 \in M_0,\ m \geq \overline{m}. \tag{5.12}$$

Já que $\frac{1}{m} < \epsilon_{x_0}$ e $F_0(x_0, (0, \epsilon_{x_0})) \cap M_0 = \emptyset$, então $y_m \notin M_0$. Observe que $w_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ e $w_k \stackrel{k \to +\infty}{\longrightarrow} y_m \notin M_0$. Portanto, pela prova do Caso 1, podemos construir uma solução limitada de $\tilde{\pi}_0$ através de y_m, em seguida obtemos que $y_m \in \mathcal{A}_0$ para $m \geq \overline{m}$. Assim, $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente que, por (5.12), converge para x_0. Consequentemente, $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$, como queríamos mostrar. E, pelo Lema 5.19, a família de atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. $\square$

5.5 Semicontinuidade Inferior dos Atratores Globais

Nesta seção apresentamos a semicontinuidade inferior dos atratores globais para um caso particular. Inicialmente, estabelecemos algumas definições necessárias. Para isso, considere $(X, \pi; M, I)$ um sistema dinâmico impulsivo.

Definição 5.21. *Dizemos que uma função $\psi^- : (-\infty, 0] \to X$ é uma $\tilde{\pi}$-**solução global para trás** se*

$$\tilde{\pi}(t)\psi^-(s) = \psi^-(t+s), \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } s \leq 0 \text{ tais que } t+s \leq 0.$$

*Se $\psi^-(0) = x \in X$, dizemos que ψ^- é uma $\tilde{\pi}$-**solução global para trás através de** $\mathbf{x}$.*

Observação 5.22. *Os conceitos de solução global e solução global para trás se relacionam da seguinte maneira:*

i) *Se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global de $\tilde{\pi}$, então $\xi(t+s) = \tilde{\pi}(t)\xi(s)$ para todo $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Em particular, $\xi(t+s) = \tilde{\pi}(t)\xi(s)$ para todo $t \geq 0$ e $s \leq 0$ tais que $t+s \leq 0$. Então a restrição de ξ ao intervalo $(-\infty, 0]$ é uma $\tilde{\pi}$-solução global para trás.*

ii) *Se $\psi^- : (-\infty, 0] \to X$ é uma $\tilde{\pi}$-solução global para trás, então a função $\xi : \mathbb{R} \to X$ dada por*

$$\xi(t) = \begin{cases} \psi^-(t), & t \leq 0, \\ \tilde{\pi}(t)\psi^-(0), & t > 0, \end{cases}$$

é uma $\tilde{\pi}$-solução global. Com efeito, dados $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Se $s \leq 0$ e $t+s > 0$, então $\xi(t+s) = \tilde{\pi}(t+s)\psi^-(0) = \psi^-(t+s) = \tilde{\pi}(t)\psi^-(s) = \tilde{\pi}(t)\xi(s)$. Se $s \leq 0$ e $t+s \leq 0$, temos $\xi(t+s) = \psi^-(t+s) = \tilde{\pi}(t)\psi^-(s) = \tilde{\pi}(t)\xi(s)$. Agora, caso $s > 0$, então $\xi(t+s) = \tilde{\pi}(t+s)\psi^-(0) = \tilde{\pi}(t)\tilde{\pi}(s)\psi^-(0) = \tilde{\pi}(t)\xi(s)$, como queríamos mostrar.

Definição 5.23. *Dizemos que um ponto* $y^* \in X$ *é um* ***ponto de equilíbrio*** *de* $\tilde{\pi}$ *se* $\tilde{\pi}(t)y^* = y^*$ *para todo* $t \geq 0$.

Note que se y^* é um ponto de equilíbrio de $\tilde{\pi}$, podemos construir uma solução global limitada ψ^* de $\tilde{\pi}$ através de y^*, definindo

$$\psi^*(t) = y^*, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Observação 5.24. *Se* $y^* \in X$ *é um ponto de equilíbrio de* $\tilde{\pi}$, *então* $y^* \notin M$. *Logo,* $\tilde{\pi}(t)y^* = \pi(t)y^*$ *para todo* $t \geq 0$. *Portanto* y^* *é também um ponto de equilíbrio do semigrupo contínuo* $\pi(\cdot)$.

Definição 5.25. *Dado* E *um subconjunto* $\tilde{\pi}$*-invariante de* X, *definimos o* ***conjunto instável de*** E *por*

$$W^u(E) = \{y \in X : \textit{ existe uma } \tilde{\pi}\textit{-solução global para trás } \psi^- \textit{ através de } y$$

$$\textit{tal que } d_H(\psi^-(t), E) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Dado $\delta > 0$ *suficientemente pequeno, definimos também o* ***conjunto*** δ***-instável de*** E *por*

$$W^u_\delta(E) = \{y \in B(E;\delta) : \textit{ existe uma } \tilde{\pi}\textit{-solução global para trás } \psi^- \textit{ através de } y$$

$$\textit{tal que } \psi^-(t) \in B(E;\delta) \textit{ para todo } t \leq 0 \textit{ e } d_H(\psi^-(t), E) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Para um ponto de equilíbrio y^* de $\tilde{\pi}$, o conjunto $\{y^*\}$ é $\tilde{\pi}$-invariante e

$$W^u_\delta(y^*) = \{y \in B(E;\delta) : \text{ existe uma } \tilde{\pi}\text{-solução global para trás } \psi^- \text{ através de } y$$

$$\text{tal que } \psi^-(t) \in B(E;\delta) \text{ para todo } t \leq 0 \text{ e } \psi^-(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} y^*\}.$$

Observação 5.26. *Dado um sistema dinâmico impulsivo* $(X, \pi; M, I)$ *com atrator global* $\mathcal{A}$. *Se* y^* *é um ponto de equilíbrio de* $\tilde{\pi}$, *então* $W^u_\delta(y^*) \subset \mathcal{A}$. *Com efeito, seja* $x \in W^u_\delta(y^*)$. *Então existe uma* $\tilde{\pi}$*-solução global para trás* ψ^- *através de* x *tal que* $\psi^-(t) \in B(x;\delta)$ *para todo* $t \leq 0$ *e* $\psi^-(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} x$. *Seja* $\xi : \mathbb{R} \to X$ *a* $\tilde{\pi}$*-solução global através de* x, *construída na Observação 5.22. Assim,* $\xi(t) = \psi^-(t) \in B(x;\delta)$ *para todo* $t \leq 0$, *isto é,* $\xi((-\infty, 0])$ *é limitado. Por outro lado,* $\mathcal{A}$ $\tilde{\pi}$*-atrai* $\{x\}$. *Então, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $t_0 \geq 0$ *tal que* $\xi(t) = \tilde{\pi}(t)\psi^-(0) = \tilde{\pi}(t)x \in B(\mathcal{A};\epsilon)$ *para todo* $t \geq t_0$. *Logo,* $\xi([t_0, +\infty))$ *é limitado.*

Além disso, como ξ é contínua, $\xi([0,t_0])$ é compacto. Portanto, $\xi(\mathbb{R})$ é limitado e ξ é uma $\tilde{\pi}$-solução global limitada através de x e, pela Proposição 4.7, $x \in \mathcal{A}$, concluindo que $W^u_\delta(y^*) \subset \mathcal{A}$.

Note que $\overline{W^u_\delta(y^*)} \subset \overline{\mathcal{A}}$ que é compacto. Então $W^u_\delta(y^*)$ é pré-compacto.

O lema a seguir nos fornece uma equivalência, em termos de sequências, para a semicontinuidade inferior em $\eta = 0$ de uma família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de subconjuntos de X.

Lema 5.27. *Seja $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos não vazios de X tal que $\mathcal{A}_0$ é pré-compacto. A família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$ se, e somente se, dados $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$ e $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, existem uma subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com $x_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tais que $x_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$.*

Demonstração. Suponhamos que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ não seja semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. Então existem $\epsilon_0 > 0$, uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e uma sequência $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$d(z_k, \mathcal{A}_{\eta_k}) \geq \epsilon_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{A}_0$ é pré-compacto, podemos assumir que $z_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$. Logo não existe subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com $x_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, de modo que $x_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} z_0$, o que é uma contradição. Reciprocamente, suponhamos que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ seja semicontínua inferiormente em $\eta = 0$, isto é, $d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \overset{\eta\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dados $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$ e $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Então existe uma subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}) < \frac{1}{j}.$$

Mas, $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$, seja $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{A}_0$ tal que $y_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$. Para cada $y_j \in \mathcal{A}_0$, temos

$$d(y_j, \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}) \leq d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}) < \frac{1}{j}.$$

Como $d(y_j, \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}) = \inf\limits_{x\in\mathcal{A}_{\eta_{k_j}}} d(y_j, x) < \dfrac{1}{j}$, então para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ tal que $d(y_j, x_j) < \frac{1}{j}$. Com isso,

$$d(x_j, x_0) \leq d(x_j, y_j) + d(y_j, x_0) < \frac{1}{j} + d(y_j, x_0) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $x_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, como queríamos mostrar. □

Seja $\{X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de sistemas dinâmicos impulsivos. Para cada $\eta \in [0,1]$ escrevemos ϵ_η o conjunto de todos os pontos de equilíbrio de $\{\pi_\eta : t \geq 0\}$, que coincide com o conjunto de pontos de equilíbrio de $\tilde{\pi}$ (como vimos na Observação 5.24). O próximo teorema apresenta condições suficientes para a semicontinuidade inferior da família de atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$.

Teorema 5.28. *Seja $\{(X, \pi_\eta, M_\eta, I_\eta)\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de sistemas dinâmicos impulsivos tal que para cada $\eta \in [0,1]$ o sistema $(X, \pi_\eta; M_\eta, I_\eta)$ possui atrator global $\mathcal{A}_\eta$. Assuma que cada ponto M_0 satisfaça a condição (C-STC) e considere as seguintes hipóteses:*

a) *Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\{y_1^{*\eta}, ..., y_p^{*\eta}\} \subset \epsilon_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$;*

b) *Existe $\delta > 0$ tal que a família $\{W_\delta^u(y_j^{*\eta})\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$, para todo $j \in \{1, ..., p\}$;*

c) $\mathcal{A}_0 = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{p} W^u(y_j^{*0})$.

Então a família de atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Sejam $u_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$ e $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ uma sequência tal que $\eta_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Primeiramente, suponha que $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Então, $u_0 \in W^u(y_r^{*0})$ para algum $r \in \{1, ..., p\}$, isto é, existe uma $\tilde{\pi}_0$-solução global para trás $\psi_{u_0}^-$ através de u_0 tal que $\psi_{u_0}^-(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_r^{*0}$. Logo, dado $\delta > 0$ existe $\tau \geq 0$ de modo que $\psi_{u_0}^-(t) \in B(y_r^{*0}; \delta)$ sempre que $t \leq -\tau$. Defina $\varphi : (-\infty, 0] \to X$ por $\varphi(t) = \psi_{u_0}^-(t - \tau)$. Afirmamos que φ é uma solução global para trás de $\tilde{\pi}_0$ através de $\psi_{u_0}^-(-\tau)$. De fato, $\varphi(0) = \psi_{u_0}^-(-\tau)$ e dado $t \leq 0$ e $s \geq 0$ tais que $t + s \leq 0$, temos

$$\varphi(t+s) = \psi_{u_0}^-(t+s-\tau) = \tilde{\pi}_0(s)\psi_{u_0}^-(t-\tau) = \tilde{\pi}_0(s)\varphi(t).$$

Note que $\psi_{u_0}^-(-\tau) \in B(y_r^{*0}; \delta)$. Além disso, dado $t \leq 0$. Como $t - \tau \leq -\tau$ temos

$$d(\varphi(t), y_r^{*0}) = d(\psi_{u_0}^-(t-\tau), y_r^{*0}) < \delta.$$

Isto é, $\varphi(t) \in B(y_r^{*0}; \delta)$ para todo $t \leq 0$. Também, $d_H(\varphi(t), y_r^{*0}) = d_H(\psi_{u_0}^-(t-\tau), y_r^{*0}) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Assim, $\psi_{u_0}^-(-\tau) \in W_\delta^u(y_r^{*0}) \subset \mathcal{A}_0 = \overline{\mathcal{A}_0}\backslash\mathcal{A}_0$. Logo, $\psi_{u_0}^-(-\tau) \notin M_0$ e $\psi_{u_0}^-(-\tau) \in \overline{W_\delta^u(y_r^{*0})}$ que é pré-compacto.

Pela hipótese b), $d_H(W_\delta^u(y_r^{*0}), W_\delta^u(y_r^{*\eta_k})) \overset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$. Então, pelo Lema 5.27, existem uma subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $u_j \in W_\delta^u(y_r^{*\eta_{k_j}}) \subset \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ para cada

$j \in \mathbb{N}$, tal que $u_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \psi_{u_0}^-(-\tau)$. Sendo assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma $\tilde{\pi}$-solução global para trás ψ_j^- através de u_j de forma que

$$\psi_j^-(0) = u_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \psi_{u_0}^-(-\tau).$$

Como $\psi_{u_0}^-(-\tau) \notin M_0$, pelo Corolário 5.18, existe uma sequência $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}_{\eta_{k_j}}(\tau+\epsilon_j)\psi_j^-(0) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}_0(\tau)\psi_{u_0}^-(-\tau) = \psi_{u_0}^-(0) = u_0,$$

com $\tilde{\pi}_{\eta_{k_j}}(\tau+\epsilon_j)\psi_j^-(0) = \tilde{\pi}_{\eta_{k_j}}(\tau+\epsilon_j)u_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, pelo Lema 5.27, o resultado segue.

Para o caso em que $u_0 \in \overline{\mathcal{A}_0} \setminus \mathcal{A}_0$, tomamos $\epsilon > 0$ e $u' \in \mathcal{A}_0$ tais que $d(u', u_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $u' \in \mathcal{A}_0$, assim como feito anteriormente, obtemos uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, com $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, de modo que $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u'$. Sendo assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(u', x_k) < \frac{\epsilon}{2}$ para $k \geq k_0$. Daí,

$$d(x_k, u_0) \leq d(x_k, u') + d(u', u_0) < \epsilon, \quad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Isto é, $x_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$. Portanto, pelo Lema 5.27, a família de atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. □

Referências Bibliográficas

[1] Bonotto, E. M.; Bortolan, M. C.; Carvalho, A. N.; Czaja, R. **Global Attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach**. J. Diff. Equations, 259 (2015), 2602-2625.

[2] Bonotto, E. M.; Demuner, D. P. **Attractors for impulsive dissipative semidynamical systemss**. Bull. Sci. Math., 137 (2013) 617-642.

[3] Bonotto, E. M.; Bortolan, M. C.; Collegari, R.; Czaja, R. **Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems**. J. Diff. Equations, 261 (2016) 4338-4367.

[4] Ciesielski, K. **On semicontinuity in impulsive dynamical systems**, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 52, (2004), 71-80.

[5] Costa, E. R. A. **Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação**. Tese de Doutorado. Pós-Graduação em Matemática-ICMC-USP, São Carlos - São Paulo, 2012.

[6] Coswosck, V. C.; **Movimentos recorrentes e quase periódicos em sistemas semidinâmicos impulsivos**. Dissertação de Mestrado. UFES, 2017.

[7] Ferreira, J. C. **Sistemas semidinâmicos dissipativos com impulsos**. Tese de Doutorado. Pós-Graduação em Matemática-ICMC-USP, São Carlos - São Paulo, 2016.

[8] Huang, M.; Song, X. **Modeling and qualitative analysis of diabetes therapies with state feedback control**. Int. J. Biomathematics, Vol. 7, No. 4 (2014).

[9] Lima, E.L. **Curso de Análise**. v.1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. (Projeto Euclides)

[10] Lima, E.L. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Projeto Euclides)

[11] Silva, A. P. **Um Estudo da Teoria das Dimensões Aplicado a Sistemas Dinâmicos.** Dissertação de Mestrado. Pós-Graduação em Matemática-ICMC-USP, São Carlos - São Paulo, 2015.