Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exata

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Cybelle Passos Bezerra Lara

Uma proposta de ensino dos números inteiros baseada na resolução de problemas

Vitória - ES

Outubro de 2021

Cybelle Passos Bezerra Lara

Uma proposta de ensino dos números inteiros baseada na resolução de problemas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro

Vitória - ES
Outubro de 2021

Cybelle Passos Bezerra Lara

Uma proposta de ensino dos números inteiros baseada na resolução de problemas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 13 de outubro de 2021.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro
(UFES - Orientador)

Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Junior
(UFES - Membro interno)

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende
(UFF - Membro externo)

Este trabalho é dedicado a todos os professores que, mesmo diante das inúmeras dificuldades e desafios de lecionar, ainda continuam a empenhar as suas forças em oferecer aos seus alunos um ensino de qualidade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador Prof. Fábio Corrêa de Castro por toda a paciência e dedicação, elas foram essências para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu marido, Rubens, pelo apoio, paciência, compreensão e companheirismo.

Aos meus filhos Gabriel e Graziele pela ajuda na formatação e correção ortográfica, pelo apoio e compreensão da minha ausência nestes últimos anos.

Aos meus pais Maria Neuman e João (in memoriam), por toda dedicação, amor e pelo incentivo aos estudos.

Aos professores, em especial aos professores Moacir Rosado Filho e Etereldes Gonçalves Junior que sempre estavam dispostos a tirar minhas dúvidas.

Aos colegas de mestrado, pela parceria, amizade, pelos momentos de alegria e por partilharem seus conhecimentos, em especial à Sueli Cruz Pereira e ao Vinícius Aguiar Rodrigues pela paciência e por me aturarem nos momentos de desânimo.

A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa ...

(GEORGE POLYA)

Resumo

A observação da defasagem matemática dos alunos motivou a busca de uma metodologia de ensino que aumentasse a eficiência do aprendizado. Por conseguinte, esse trabalho tem por objetivo demonstrar os benefícios e a viabilidade do uso da metodologia de resolução de problemas no ensino dos números inteiros. Com esse intuito, a partir do estudo teórico da metodologia de resolução de problemas, elaborou-se cinco atividades com o propósito de auxiliar o professor da escola básica na utilização dessa metodologia. A primeira atividade tem o objetivo de introduzir os números inteiros como ampliação dos números naturais, trabalhar a ideia de número oposto e evidenciar que o zero ganha um novo significado de referencial com a introdução de números inteiros. Nela, utilizou-se um recurso tecnológico para deixar o ensino mais atrativo. A segunda, terceira, quarta e quinta atividade têm o propósito de trabalhar as quatros operações com os números inteiros. Com esse fim, foram utilizados dois modelos manipulativos: a reta numérica com setas e o modelo de duas cores. Almejando o mesmo propósito, explorou-se o uso do livro didático no contexto do ensino de números inteiros com e sem essa metodologia, bem como o quanto a licenciatura em matemática capacita os professores para o ensino da matemática por meio dessas metodologias. Como resultado, observou-se que a metodologia traz uma gama de vantagens ao ensino da matemática, dentre elas: desenvolver a confiança e o potencial no aluno quanto a sua capacidade de fazer matemática, já que ela é mais prazerosa para o discente e o docente e concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e dá sentido às mesmas, assim, a formalização dos conceitos e teorias matemáticas feita pelo professor passa a fazer mais sentido para os alunos. A análise dos livros didáticos mostrou que esse é um bom instrumento na técnica de ensino Estudo Dirigido, porém precisa de adaptações para serem utilizados na metodologia de resolução de problemas. O livro didático tem seu lugar no modo de ensino de matemática para resolver problemas e na abordagem de ensinar por meio de resoluções de problemas, como fonte de problemas, mas o professor deve fazer algumas adaptações. Além disso, acredita-se que mudanças que aproximem pedagogia de conteúdo matemático durante a formação do professor contribuirão para a melhoria do ensino de matemática no país, uma vez que a sua desassociação leva a um professor menos capaz de entender o processo de aprendizado e, portanto, com dificuldade de estimulá-lo, e também menos instruído quanto ao uso de metodologias, como a de resolução de problemas, e modelos que podem ser usados no ensino. Em suma, a utilização da metodologia de resolução de problemas não só atende ao propósito de melhorar a proficiência em matemática dos alunos na escola básica devido à sua eficiência como também torna o ensino e aprendizado mais prazeroso para docente e discente.

Palavras-chave: Números Inteiros, Resolução de Problemas, Materiais manipuláveis

Abstract

The observation of students' mathematical gaps motivated the search for a teaching methodology that would increase learning efficiency. Therefore, this work aims to demonstrate the benefits and feasibility of using the problem solving methodology in the teaching of integer numbers. With this in mind, from the theoretical study of the problem solving methodology, five activities were elaborated with the purpose of helping the elementary school teacher in the use of this methodology. The first activity has the objective of introducing whole numbers as an expansion of natural numbers, working on the idea of the opposite number, showing that zero gains a new referential meaning with the introduction of whole numbers. In it, a technological resource was used to make teaching more attractive. The second, third, fourth and fifth activities have the purpose of working the four operations with whole numbers. For this purpose, two manipulative models were used: the number line with arrows and the two-color model. Aiming at the same purpose, the use of textbooks in the context of teaching whole numbers with and without this methodology was explored. As well as how much the degree in mathematics enables teachers to teach mathematics through these methodologies. As a result, it was observed that the methodology brings a range of advantages to the teaching of mathematics, including: developing confidence and potential in the student regarding their ability to do mathematics, it is more pleasurable for the student and teacher and concentrates the attention of students to ideas and gives meaning to them, thus, the formalization of mathematical concepts and theories made by the teacher starts to make more sense for students. The analysis of textbooks showed that this is a good instrument in the Directed Study teaching technique, however, it needs adaptations to be used in the problem-solving methodology. The textbook has its place in the way of teaching mathematics to solve problems and the approach to teaching through problem solving as a source of problems, but the teacher must make some adaptations. In addition, it is believed that changes that bring pedagogy closer to mathematical content during teacher education will contribute to the improvement of mathematics teaching in the country, since its disassociation leads to a teacher less able to understand the learning process and, therefore, with difficulty in stimulating him. It is also less educated about the use of methodologies, such as problem solving, and models that can be used in teaching. In short, the use of problem solving methodology not only serves the purpose of improving the mathematics proficiency of students in elementary school due to its efficiency, but also makes teaching and learning less painful for teachers and students.
Keywords: Integers, Troubleshooting, Manipulators.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

TDM - Teoria da Disciplina Mental

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

GTERP - Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas

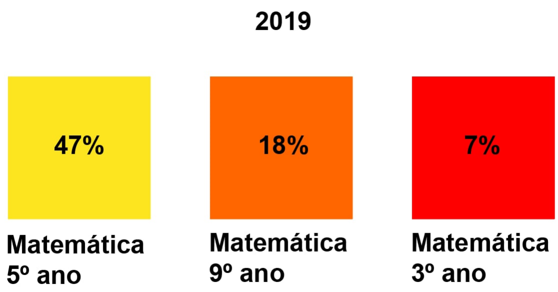
PNLD - Plano Nacional de Livro Didáticos

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como motivação encontrar uma metodologia de ensino que desperte o interesse no aluno, com o intuito de tornar o aprendizado mais eficiente, tendo em vista a defasagem matemática dos alunos observada, tanto na vivência prática em sala de aula quanto estatisticamente, conforme mostra a figura 1.

Figura 1 – Proficiência em Matemática



Fonte: site QEdu [1]

Por sua vez, a escolha dos números inteiros como conteúdo alvo da metodologia se deve à observação como professora do 3º ano do Ensino Médio, nos anos de 2017, 2018 e 2019, sobre a inabilidade dos alunos em fazer cálculos com números inteiros, frações, cálculos mentais envolvendo multiplicação de 10, 100, 1000, área do retângulo e resolver equação do 1º grau.

Utilizar a metodologia de Resolução de Problemas no ensino da matemática auxiliará a melhorar a proficiência matemática dos alunos, uma vez que essa metodologia é mais natural ao processo de aprendizado e, portanto, mais eficiente. São evidências desse caráter inato tanto a sua origem histórica, como forma de aprofundar o conhecimento matemático populacional, devido à demanda social oriunda da transição agrário-industrial, quanto a sua conformidade com a neurociência do aprendizado, segundo a qual o protagonismo do aluno é mais ativo, portanto mais estimulante e capaz de fomentar a solidificação do conhecimento a longo prazo. Além disso, o uso dessa metodologia carrega a vantagem de promover o desenvolvimento de confiança pelo aluno quanto a sua capacidade de fazer matemática, no que essa passa a fazer mais sentido. Outro acréscimo oriundo ao uso dessa metodologia é ser mais prazerosa para discente e docente.

Durante o desenvolvimento da metodologia de Resolução de Problemas se produziu três modos de utilizá-la, são eles: 1) ensinar matemática *para* resolver problemas; 2)

[1] Distribuição dos alunos por nível de proficiência. Disponível em: <https://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia>. Acesso em 04 jul. 2021.

ensinar *como* resolver problemas e 3) ensinar matemática *por meio* da resolução de problemas. Embora todos esses modos tenham o seu lugar no processo de ensino-aprendizagem, ensinar por meio de resolução de problemas terá maior foco neste trabalho, em virtude de ter como benefício o protagonismo do aluno no processo de aprendizado.

Enquanto ferramenta de estudo dirigido, o livro didático é um instrumento proveitoso, mas que demanda adaptações para ser utilizado na metodologia de resolução de problemas. Nessa, o livro tem seu lugar no modo de ensino de matemática para resolver problemas. Porém, a aplicação dessa categoria só acontece posteriormente ao contato dos alunos com problemas, que possibilitaram a construção do conhecimento. Logo, o livro não deve ser trabalhado no início de novos tópicos matemáticos, mas, sim, para consolidar o assunto previamente abordado por meio de resolução de problemas.

Outra função que o livro didático tem na abordagem de ensinar por meio de resoluções de problemas é como fonte de problemas. Tanto no livro didático do professor, onde as obras sugerem algumas atividades apropriadas para esse fim, quanto nos exercícios propostos para o aluno em seu livro, mas o professor normalmente deve fazer algumas alterações nas questões, com o propósito de adaptá-las para o ensino por meio de resolução de problemas.

Nesta dissertação, elaborou-se uma proposta de ensino com cinco atividades com o intuito de auxiliar o professor da escola básica na utilização da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de Números Inteiros.

A primeira atividade tem o objetivo de introduzir os números inteiros como ampliação dos números naturais, trabalhar a ideia de número oposto, evidenciar que o zero ganha um novo significado de referencial com a introdução de números inteiros e módulo do número. Nela, não só se utilizou um recurso tecnológico para deixar o ensino mais atrativo, como também a metodologia de Resolução de Problemas.

A segunda, terceira, quarta e quinta atividades têm o propósito de trabalhar as quatros operações com os números inteiros. Com esse fim, foram utilizados dois modelos: a reta numérica com setas e o modelo de duas cores. Nesse contexto, a manipulação de objetos viabiliza uma representação concreta da abstração de números inteiros, assim como o uso dos modelos permite o entendimento da regra de sinais nas operações, e não a mera memorização. Por exemplo, o papel do entendimento da igualdade $4-5 = 4+(-5)$. Tendo em vista, a perspectiva pedagógica $4 - 5 \neq 4 + (-5)$ de que o primeiro termo da desigualdade é inexistente para os estudantes do sétimo ano, que até a introdução dos números inteiros têm o conhecimento restrito a números racionais não negativos. Logo, acreditam que $4-5$ não existe, pois como poderiam tirar 5 de 4, no conjunto dos números naturais? Com a chegada dos números inteiros, o primeiro termo fica representado dessa forma $(+4) - (+5)$, isto é, fazer a subtração com números positivos. O segundo termo da desigualdade significa $(+4) + (-5)$, ou seja, fazer a adição com números inteiros. Os modelos permitem que os estudantes cheguem à conclusão de que essa desigualdade pode ser entendida como igualdade ao abstrair das situações concretas e trabalhar com situações puramente numéricas.

Além disso, vale ressaltar que mudanças que aproximem pedagogia de conteúdo matemático durante a formação do professor contribuirão para a melhoria do ensino de matemática no país, uma vez que a sua desassociação leva a um professor menos capaz de entender o processo de aprendizado e, portanto, com dificuldade de estimulá-lo. Além de também menos instruído quanto ao uso de metodologias, como a de resolução de problemas, e modelos que podem ser usados no ensino.

Em resumo, a utilização da metodologia de resolução de problemas não só atende ao propósito de melhorar a proficiência em matemática dos alunos na escola básica devido à sua eficiência, como também torna o ensino e aprendizado mais prazeroso para docente e discente.

Assim, essa dissertação tem por objetivo demonstrar os benefícios e a viabilidade do uso da metodologia de resolução de problemas. Com esse intuito, o segundo capítulo desta dissertação descreve o que é e quais são os proveitos de utilizar a metodologia de resolução de problemas. O terceiro, contextualiza a ferramenta livro didático em termos dessa metodologia. O quarto, elabora um uso concreto dessa metodologia para o ensino de números inteiros por intermédio de uma proposta de ensino dos números inteiros. O quinto, abarca a formação do professor capaz de usar essa metodologia e outras.

2 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 Um pouco da história da metodologia

Até o período de transição da sociedade agrária para a industrial, a Teoria da Disciplina Mental (TDM) era a principal metodologia utilizada no ensino da matemática. Entretanto, essa sociedade demandava um nível de conhecimento matemático que esse modo de ensino não era capaz de desenvolver. Nesse contexto, surge nos Estados Unidos da América a Teoria de Resolução de Problemas, como metodologia de ensino. Essa alteração foi inevitável, pois a TDM baseava-se na ideia de que o cérebro tinha vários tipos de capacidade que deveriam ser desenvolvidas, como, por exemplo: percepção, memória, intuição ou razão, imaginação e compreensão. Logo, o ensino tinha como objetivo principal desenvolver essas faculdades e deixava o conteúdo como segundo plano (STANIC; KILPATRIK[1] apud MORAIS; ONUCHIC, 2014, p.19).

As críticas à TDM e a necessidade de maior compreensão da Matemática pelos cidadãos também motivaram o desenvolvimento da Teoria do Conexionismo por Edward Lee Thorndike. Utilizando-se tal teoria de base, ele escreveu o livro Os Novos Métodos na Aritmética. Nele, além de propor problemas aritméticos mais adequados à vida real, o autor descreveu um procedimento de como resolver problemas (MORAIS; ONUCHIC, 2014).

Tendo em vista o desejo de incentivar os estudantes a resolverem problemas matemáticos, exibia-se para eles problemas mais realistas. O Conexionismo tinha três etapas do processo de ensino e uma delas era a lei do exercício ou repetição. Em função dessa lei, os professores se preocupavam em ensinar as respostas dos exercícios, sem considerar qual era o conhecimento desenvolvido pelos discentes para resolverem os problemas (Idem).

Objetivando-se se opor a essa desconsideração, nasce a Teoria Significativa. Ela tinha como foco o processo educacional, e não o produto, o que a diferenciava da Teoria Conexionista. Nesse contexto, surge, por meio da publicação do livro *A arte de resolver problemas*, de George Polya, a metodologia da Resolução de Problemas.

> Apesar de o livro *A arte de resolver problemas* ter sido lançado ainda no ano 1945, a Resolução de Problemas enquanto pesquisa ganhou força nos Estados Unidos e, mais tarde, em outros países do mundo, a partir do final da década de 1960, com pesquisas importantes como as de Jeremy Kilpatrik que fez, em 1967, uma extensa revisão da pesquisa existente sobre Resolução de Problemas em Matemática (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 24).

---

[1] STANIC, G. M. A.; KILPATRIK, J. Historical Perspectivas on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. L.; SILVER, E. A. (eds.). **The teaching and assesing of Mathematical Problem solving**. Reston, VA: NCTM, 1990, p.1-22.

A partir de então, muitas reuniões, congressos e palestras, que tratavam da teoria de Resolução de Problemas, foram promovidas. Segundo Schroeder e Lester[2] (1989) apud Onuchic e Allevato (2011), desde 1980 foi produzido bastante material para ser trabalhado na sala de aula envolvendo resolução de problemas; no entanto, essa produção não tinha um foco claro. O propósito de compreender melhor o que já tinha sido produzido dividiu o material pesquisado em três categorias:

1. ensinar matemática *para* resolver problemas;
2. ensinar *sobre* resolução de problemas e
3. ensinar matemática *por meio* de resolução de problemas.

Cada uma dessas categorias tem seu valor no ensino da matemática. O enfoque desta dissertação será o ensino da matemática por meio de resolução de problemas, tendo em vista que os professores do Ensino Básico não se apropriaram dela, mesmo que essa seja a cerne do ensino de matemática. Dessa forma, no que segue, será feita uma breve abordagem das categorias e, posteriormente, o texto terá maior ênfase na terceira categoria.

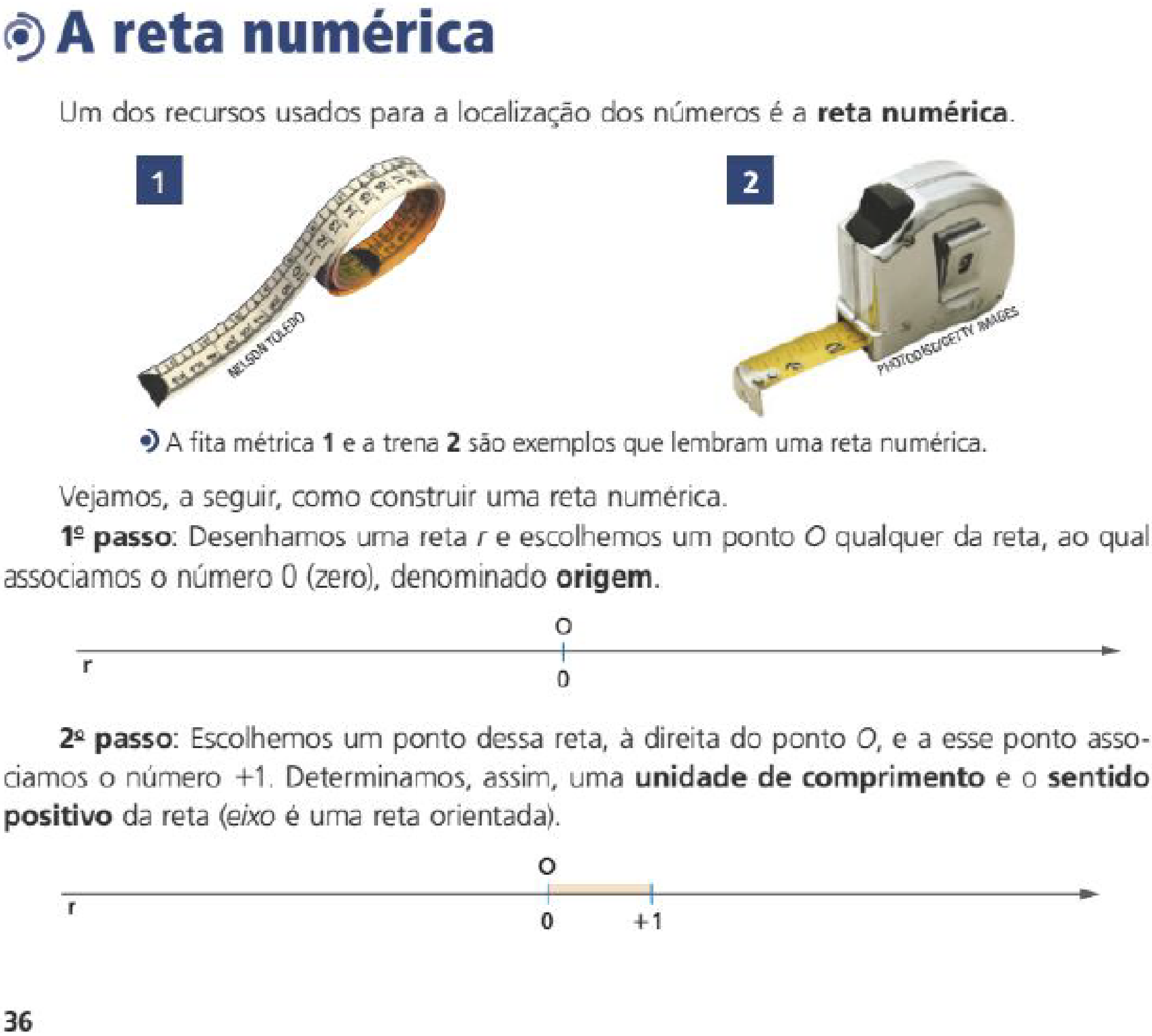
2.1.1 Ensinar matemática para resolver problemas

A finalidade dessa abordagem é utilizar a matemática para resolver problemas, tanto do dia a dia quanto problemas mais complexos. Segundo Morais e Onuchic (2014), embora o objetivo inicial seja o aprendizado do conteúdo matemático, o foco desse modo é mostrar ao aluno como a matemática é útil para resolver problemas. Ou seja, essa visão tem o intuito de dar um significado ao aprendizado do conteúdo matemático.

"Ensinar matemática para resolver problemas" se assemelha com "ensinar conforme a teoria conexionista". O professor ensina o tópico de matemática, trabalha esse conteúdo no ambiente matemático e somente depois da consolidação desse assunto o docente propõe a resolução de problemas do cotidiano, tal como mostra a Figura 2 e 3, que apresenta uma estratégia retirada do livro *A Conquista da Matemática*. Nela, uma vez definida e dada a explicação de como se constrói a reta numérica, o livro procura dar exemplos de problemas em contextos que esse conteúdo pode ser aplicado: "Assim, a Matemática é ensinada separada de suas aplicações e a resolução de problema é utilizada para dotar a teoria de um significado prático" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 38).

[2] SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

Figura 2 – Parte 1 da explicação da reta numérica



A reta numérica

Um dos recursos usados para a localização dos números é a **reta numérica**.

A fita métrica **1** e a trena **2** são exemplos que lembram uma reta numérica.

Vejamos, a seguir, como construir uma reta numérica.

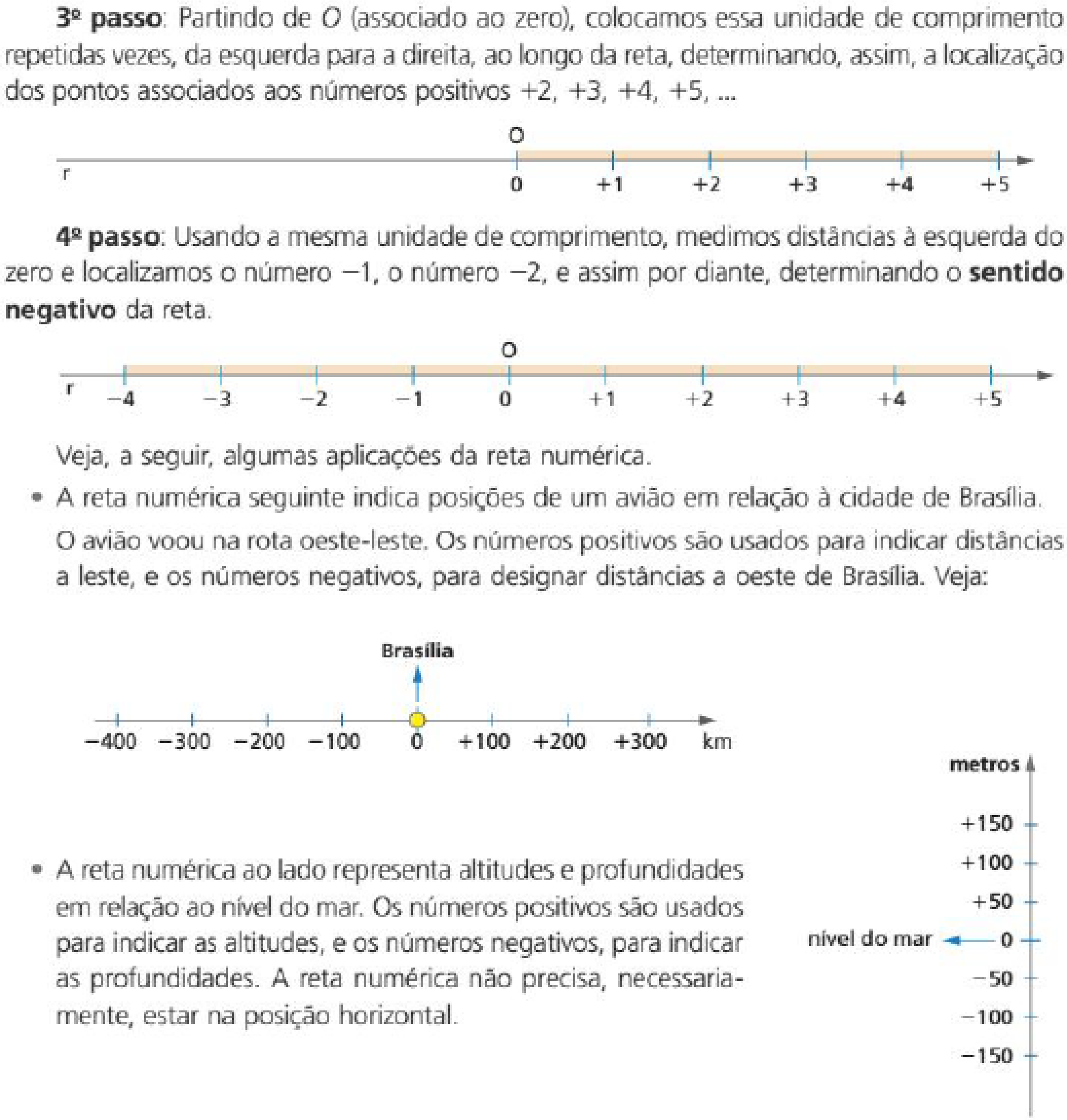
1º passo: Desenhamos uma reta *r* e escolhemos um ponto *O* qualquer da reta, ao qual associamos o número 0 (zero), denominado **origem**.

2º passo: Escolhemos um ponto dessa reta, à direita do ponto *O*, e a esse ponto associamos o número +1. Determinamos, assim, uma **unidade de comprimento** e o **sentido positivo** da reta (*eixo* é uma reta orientada).

36

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 36 e 37).

Figura 3 – Parte 2 da explicação da reta numérica



3º passo: Partindo de *O* (associado ao zero), colocamos essa unidade de comprimento repetidas vezes, da esquerda para a direita, ao longo da reta, determinando, assim, a localização dos pontos associados aos números positivos +2, +3, +4, +5, ...

4º passo: Usando a mesma unidade de comprimento, medimos distâncias à esquerda do zero e localizamos o número −1, o número −2, e assim por diante, determinando o **sentido negativo** da reta.

Veja, a seguir, algumas aplicações da reta numérica.

- A reta numérica seguinte indica posições de um avião em relação à cidade de Brasília. O avião voou na rota oeste-leste. Os números positivos são usados para indicar distâncias a leste, e os números negativos, para designar distâncias a oeste de Brasília. Veja:

- A reta numérica ao lado representa altitudes e profundidades em relação ao nível do mar. Os números positivos são usados para indicar as altitudes, e os números negativos, para indicar as profundidades. A reta numérica não precisa, necessariamente, estar na posição horizontal.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 36 e 37).

Van de Walle (2009) explica que temos duas desvantagens dessa abordagem tradicional em que o docente expõe o conteúdo, os estudantes praticam por meio de alguns exercícios e depois são desafiados a resolverem problemas do dia a dia, o qual envolve o assunto ensinado pelo professor. A primeira é que essa prática considera que todos os estudantes estão aptos a entender aquela forma que foi explicada, ou seja, só existe uma maneira de compreender aquele conteúdo – que é o do professor. No entanto, é muito difícil que, em uma turma, todos os estudantes pensem da mesma forma, pois cada criança vivencia experiências sociais diferentes. A segunda desvantagem é a dificuldade que provavelmente os estudantes irão ter em resolver problemas que tenham pequenas alterações, comparados com os realizados. Isso ocorre porque irão achar que precisam aprender novos conteúdos matemáticos para terem a capacidade de resolver tais problemas.

Além disso, historicamente, a matemática foi desenvolvida por meio de resolução de problemas como contar, medir e posteriormente responder questões da própria matemática e de outras disciplinas. Esse desenvolvimento é verificado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados à investigação interna à própria Matemática (BRASIL, 1997, p. 42).

É mais natural compreender a matemática respeitando a ordem que ela foi desenvolvida. Ou seja, descobrindo-a por meio da resolução de problemas. Dessa forma o ensino fica mais fluido.

2.1.2 Ensinar sobre resolução de problemas

Nesse modo a resolução de problema é vista como uma competência que o aluno precisa desenvolver por meio da Matemática. O professor ensina alguns procedimentos de como resolver problemas.

Uma das primeiras evidências encontrada desse tipo de abordagem foi na passagem da Teoria da Disciplina Mental para a Teoria Conexionismo, no Livro *Os Novos Métodos na Aritmética*, de acordo com Morais e Onuchic (2014). No capítulo 7, são apresentadas estratégias de resolução de problemas, como pode ser verificado no seguinte trecho.

> 1) Se você sabe ao certo como resolver o problema, então siga em frente e resolva; 2) se você não enxerga uma forma de resolver o problema, considere a questão, os dados e a sua utilização e faça as seguintes perguntas a você mesmo: Qual pergunta é feita? O que eu faço para descobri-la? Como devo usar esses dados? O que eu devo fazer com esses números, e com o que eu conheço sobre ele? 3) Planejar o que você irá fazer, e por quê, e organizar seu trabalho de modo que você saiba o que você fez; 4) Cheque as respostas obtidas para ver se valem e se o raciocínio feito está de acordo com o que solicitou [enunciado do] problema. (THORNDIKE[3], (1921, p. 138−9, apud MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 21)

No entanto, foram as publicações do Polya que tiveram mais impacto na comunidade matemática, e um dos seus objetivos era ensinar como resolver problemas, pois ele acreditava que os alunos precisavam se apropriar dessa competência. Para tanto, era necessário que os professores se tornassem bons resolvedores de problemas e se conscientizassem do quanto era importante para os discentes esse conhecimento. Isso ficou constatado no seu

---

[3] THORNDIKE, E. L.**The new methods in Arithmetic**. 1921. Disponível em: <http://archive.org/stream/newmethodsinari00tho-goog♯ page/n136/mode/2up>. Acesso em: 23 out. 2013.

livro que foi traduzido em português com o título *A Arte de Resolver Problemas*, publicado pela Editora Interciência, no ano de 1986. Nessa obra, ele aborda estratégias de como resolver problemas.

De acordo com Redling (2011), para Polya, um problema se caracterizava quando o aluno não sabia a resposta da questão ou não sabia resolver utilizando seus próprios conhecimentos. E a resolução de problemas se baseia em quatro etapas principais, que são:

1. compreender o problema;
2. elaborar um plano de ação fazendo conexões entre as informações fornecidas e o que é solicitado;
3. executar o plano traçado e
4. fazer a verificação, onde pode rever todo o caminho trilhado e averiguar se não houve algum equívoco.

A partir dessas quatro etapas, Polya (1995) descreve várias indagações que devem ser feitas com o objetivo de chegar na resposta, conforme foi tabulado por Vieira (2020).

Tabela 1 – Fases e indagações para resolver problemas.

(continua)

Fases	Indagações
Compreensão do Problema	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual a condicionante? É possível satifazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou é redundante? Ou é contraditória? É possível separar as partes da condicionante?
Estabelecimento de um Plano	Já viu o problema antes? Conhece algum problema correlato? Conhece algum problema que lhe poderia ser útil? Encontrando um problema correlato, é possível utilizá-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Tabela 2.1: Fases e indagações para resolver problemas.

(conclusão)

Fases	Indagações
Execução do Plano	É possível verificar claramente que o passo está correto?
Retrospecto	É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance? É posssível utilizar o resultado ou método, em algum outro problema?

Fonte: Vieira (2020, p. 38)

Verifica-se que Polya procura estabelecer um procedimento de como resolver problemas. Atualmente é bastante aceita a necessidade de o aluno obter o conhecimento de resolver problemas, mas essa abordagem de tratar essa competência como parte de um conteúdo matemático pode não ser tão eficiente.

Além disso, segundo Stanc e Kilpatrick (1989), com essa visão, a comunidade escolar dividia os problemas em dois níveis: os mais simples e os mais complexos. Porém, isso fez com que a maioria dos alunos tivesse acesso a problemas simples porque a apresentação dos problemas mais complexos deveria ser feita a alunos que tivessem um conhecimento matemático mais desenvolvido. A resolução de problemas mais complexos tornou-se uma atividade para estudantes que se destacavam mais do que os outros alunos.

Apesar de Polya estruturar um procedimento para resolver problemas, o seu principal objetivo era tratar a resolução de problemas como a arte da descoberta matemática. Conforme Stanc e Kilpatrick (1989), ele defendia que, para fazer matemática, é necessário utilizar mais raciocínios plausíveis, ao invés de raciocínio demonstrativo. George Polya argumentava que seria mais interessante para o aluno, ao invés de ser apresentada uma matemática pronta com raciocínios dedutivos, trabalhar na sala de aula uma matemática investigativa, com seleção de problemas que proporcionassem a descoberta da teoria matemática. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) corrobora com essa ideia.

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática (BRASIL, 2019, p. 265).

Além disso, Polya acreditava que, ao ensinar matemática de uma forma heurística, o estudante teria mais entusiasmo pela disciplina. Nesse sentido, foi desenvolvida a categoria "ensinar matemática via resolução de problemas".

2.1.3 Ensinar matemática por meio de resolução de problemas

O objetivo dessa abordagem vai ao encontro das ideias de Polya de tratar Resolução de Problemas com o sentido heurístico da matemática. Isto é, possibilitar que o aluno descubra a Matemática por meio de resolução de problemas. Segundo Van de Walle (2009), quando um aluno é exposto a problemas bem escolhidos com o propósito de trabalhar conceitos ou estruturas matemáticas e o discente se concentra nas estratégias utilizadas para resolver tais tarefas, isso resulta na compreensão da matemática envolvida. Ou seja, o ensino da matemática torna-se mais significativo para o aluno porque, ao invés de ficar memorizando regras e fórmulas, ele constrói esse conhecimento por meio da investigação. A abordagem de ensino via resolução de problemas consiste em três partes fundamentais:

- propor aos alunos problemas que partam do conhecimento que eles já têm;
- o problema precisa ser desafiador e
- o foco do problema deve ser o conceito ou o procedimento que se queira ensinar.

Além disso, o aluno precisa justificar a solução encontrada porque, ao refletir sobre o procedimento utilizado, o discente estará fazendo matemática e dando significado àquele conteúdo trabalhado.

Os autores Van de Walle (2009) e Onuchic e Allevato (2011) enumeram várias vantagens no uso dessa metodologia:

- *A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e dá sentido às mesmas*; pois no momento de resolver o problema, os alunos estão refletindo o significado das ideias que envolvem o problema. As concepções novas serão associadas às ideias já adquiridas, tornando-as mais significativas.
- *A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido.* Isso ocorre pois o problema apresentado ao aluno é desafiador e considera o conhecimento que ele já tem, ou seja, que traz novas concepções matemáticas. Isso possibilita que o aluno seja capaz de resolver o problema descobrindo novos conceitos ou procedimentos matemáticos. Assim, aumenta a confiança de fazer matemática e a autoestima do aluno.
- *A resolução de problemas fornece dados contínuos para avaliação.* Nas etapas do debate e da escrita da solução, o professor pode observar qual é o entendimento do aluno referente àquele assunto abordado. Isso possibilita que o docente tome decisões para sanar os equívocos dos mesmos de uma forma mais contínua, o que favorece um aprendizado mais conciso.

- *A resolução de problemas é envolvente não só para os alunos, como também para os professores.* Em função do problema ser desafiador, os alunos se envolvem e acham recompensador encontrar uma solução, ao contrário da forma tradicional, em que o professor expõe e os alunos observam. Na resolução de problema, há uma maior interação entre o discente e o docente; assim, as aulas são mais agradáveis para ambos.

- *A resolução de problemas desenvolve o "potencial matemático".* A história mostra que a matemática foi desenvolvida pela necessidade de resolver problemas do cotidiano ou dela mesma. Além de resolver os problemas, o aluno precisa pensar matematicamente, investigar, argumentar, utilizar diferentes e convenientes estratégias. Isso permite a compressão de novos conceitos e procedimentos matemáticos.

- *A formalização dos conceitos e teorias matemáticas feita pelo professor passa a fazer mais sentido para os alunos.* O aluno utiliza a construção do conceito ou procedimento durante a resolução do problema para resolver a questão. Logo, faz mais sentido ao aprendizado do assunto.

- *Na resolução de problemas, o aluno é o protagonista no processo de ensino-aprendizado.* Ao contrário da metodologia tradicional em que o professor é o personagem principal, ele mostra a forma que se deve pensar e os alunos são meros observadores. Na metodologia de Resolução de Problemas, é o aluno que vai construir a forma de pensar, e o professor deve orientá-lo nesse processo.

Além desses benefícios, a BNCC sugere como umas das metodologias a serem aplicadas no ensino.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2019, p. 266).

Assim, o ensino de matemática por meio de resolução de problemas ganha destaque nos dias de hoje. No Brasil, as pesquisas sobre esse tema têm forte influência do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP), da Universidade Estadual Paulista de Rio Claro. Ele é coordenado pela doutora Lourdes de La Rosa Onuchic. Assim, baseando-se na proposta metodológica exibida por Allevato e Onuchic (2011) e Van de Walle (2009), será detalhada a metodologia Resolução de Problemas.

2.2 A metodologia Resolução de Problemas

O grupo GTERP deu o nome a essa metodologia pós Polya de "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através Resolução de Problemas", na qual o problema é o ponto de partida, isto é, o problema é apresentado antes de ser explicado o assunto e, por meio da solução, os alunos vão adquirir o conhecimento almejado. Para Van de Walle, " A maioria, senão todos, dos conteúdos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas" (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Primordialmente, é necessário determinar o que será considerado como problema. Para Allevato e Onuchic (2011, p. 81), "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado a fazer". Já a definição que Van de Walle trabalha é a de Hiebert[4] (1997):

> O problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte do estudante que haja um método "correto" específico de solução (HIEBERT, apud VAN DE WALLE, 2009).

Logo, os dois pensamentos se corroboram.

Tendo em mente essas definições, Allevato e Onuchic (2014) propõem um roteiro com 10 etapas para a implementação da metodologia. A proposta deste trabalho é se aprofundar nas dez etapas, com base em Van de Walle e Allevato e Onuchic, além de colocar os desafios que o professor do Ensino Básico precisa superar para colocar em prática a metodologia de Resolução de Problemas.

2.2.1 Proposição do Problema

Essa etapa consiste na escolha do problema gerador, que é chamado dessa forma pois visa à construção de um novo conhecimento (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014). Para Polya, o problema precisa envolver coisas familiares ao aluno e que faça sentido resolver. Já para Van de Walle, o problema deve começar onde os alunos estão.

Em outras palavras, o problema precisa despertar o interesse do estudante; o aluno precisa ser capaz de resolvê-lo, mas o problema tem que ser desafiador. Isto é, o discente precisa raciocinar um pouco, ele não pode ter já uma receita pronta para solucioná-lo.

Outra propriedade do problema é: "[...] o aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos devem aprender" (VAN DE WALLE, 2009, p. 58). Na metodologia tradicional, em que o professor explica o conteúdo

[4] HIEBERT, J.,CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., FUSON, K., WEARNE, D., MURRAY, H., OLIVIER, A., HUMAN, P. **Making sense**: Teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemenn.

e depois os alunos resolvem problemas, o cuidado que o docente deve ter ao escolher os problemas é se eles abordam o conteúdo explicado.

Por sua vez, na metodologia de Resolução de Problemas, o processo de escolha do problema é bem mais complexo, pois não só precisa procurar ou elaborar questões que envolvem o assunto, mas também ele precisa ter como foco o conteúdo que deseja ser ensinado. Ou seja, o aluno, ao resolver o problema, precisará estar raciocinando no assunto matemático que se deseja ensinar. O problema pode ser contextualizado, mas isso não pode tirar atenção do aluno do conteúdo matemático.

Van de Walle propõe um guia de seleção e avaliação de atividades:

> - Etapa 1: Como a atividade é realizada? Faça, realmente, a atividade. Tente "entrar" na tarefa ou atividade para ver como ela é resolvida e que raciocínios podem emergir dela. Como as crianças fariam a atividade ou resolveriam o problema? (Eles não sabem o que você sabe!) Que materiais são necessários? O que é escrito ou registrado? Que concepções errôneas podem emergir?
>
> - Etapa 2: Qual o objetivo da atividade? Que conceitos matemáticos a atividade desenvolverá? As ideias são conceitos ou habilidades processuais? Haverá conexões com outras ideias relacionadas?
>
> - Etapa 3: A atividade alcançará seu objetivo? O que é desafiador na atividade? O aspecto desafiador (problemático) está relacionado à matemática identificada no objetivo? Sobre o que as crianças têm de refletir ou pensar para completar a atividade? (Não confie em pensamentos tendenciosos). É possível completar a atividade sem muito pensamento reflexivo? Nesse caso, a atividade pode ser modificada de modo que se exija dos alunos pensar sobre a matemática envolvida?
>
> - Etapa 4: O que você, educador, tem de fazer? O que você precisará fazer na fase antes de sua lição? Como você ativará o conhecimento prévio dos alunos? O que se espera que os alunos produzam ou criem? Que dificuldades você pode antecipar que serão observadas na fase durante de sua lição? O que você deseja focar na fase depois de sua lição? (VAN DE WALLE, 2009, p. 72)

Também propõe que "bons problemas têm múltiplos pontos de partidas" (VAN DE WALLE, 2009, p. 70). Um exemplo disso é a atividade em que o professor confecciona várias caixas feitas de cartolina e que nelas caiba uma quantidade exata dos cubos menores do material dourado. É fornecido ao aluno uma caixa e quantidade de cubos suficiente para encher a caixa e sobrar, e em seguida pergunta-se ao aluno quantos cubos cabem na caixa.

Essa atividade permite várias abordagens. O aluno pode preencher a caixa toda e contar os cubos. O aluno pode preencher a base da caixa e depois que for preencher o restante perceber que não é necessário, pois só precisará da coluna da altura para calcular a quantidade de cubos. Por fim, o aluno pode preencher uma linha e uma coluna na base, e a coluna da altura, daí calcular a quantidade de cubos.

Para aqueles alunos que preencheram toda a caixa ou a base da caixa, poderia ser repetida a atividade com caixas de tamanhos diferentes. No entanto, aos estudantes que tinham a ideia da fórmula do prisma, poderia ser fornecido um cilindro para o cálculo do seu volume.

Em resumo, o processo de escolha do problema não é algo trivial. O professor do Ensino Básico precisa considerar as demandas supracitadas, bem como superar desafios estruturais de tempo, do número de turmas, do número de estudantes na sala de aula e a diversidade entre eles, para implementação dessa metodologia.

Primariamente, como selecionar ou elaborar os problemas com o tempo de planejamento que o professor tem? Em geral, na melhor das hipóteses, o professor consegue tempo suficiente para elaborar somente o planejamento de uma única série. Por exemplo, o professor com uma carga horária de 25 horas tem 8 horas e 20 minutos para planejamento. Na melhor das hipóteses, esse tempo fica distribuído da seguinte forma: 1 hora e 40 minutos em duas janelas de 50 minutos, distribuídas entre as aulas, 1 hora e 40 minutos contabilizada no recreio e 5 horas concentradas em um único dia. Além disso, normalmente o professor precisa pegar duas, três e às vezes quatro turmas de séries ou anos diferentes. É necessário não apenas o acúmulo dessas 5 horas, como também a exclusividade para uma única série, para que o planejamento possa ser executável. Dessa forma, o processo de escolha do problema adequado para cada turma tem como um grande obstáculo o tempo de planejamento por série que o professor dispõe.

Um auxílio à limitação do tempo seria dispor de material mais apropriado e de fácil acesso ao professor. Embora se tenha décadas de pesquisa em Resolução de Problemas, do Ensino Básico, ainda não se tem material catalogado por série ou por ano baseado na metodologia de Resolução de Problema, ao estilo do livro *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula, cujo autor é Van de Walle. Isso iria ajudar o professor na escolha do problema. Nessa obra, além do autor propor vários problemas de acordo com o conteúdo que se quer ensinar, ele esmiúça a aplicação de tais problemas exatamente como o professor precisa fazer, observar e falar em sala de aula.

Outro desafio estrutural encontrado pelo professor é a heterogeneidade cultural, social e de habilidades matemáticas dos estudantes. Logo, um problema pode ser desafiador para alguns, pode ser inacessível para outros e ainda conhecido para uma parte dos discentes.

A diversidade cultural e social das turmas é um desafio comum às metodologias tradicionais e da Resolução de Problemas. Esta se adapta melhor a esse contexto do que aquela, porque existe uma variabilidade da exposição da solução e da justificação por parte do aluno, respeitando, assim, a multiplicidade do conhecimento que o aluno traz, proporcionando um significado àquele novo conceito ou estratégia utilizados.

Ainda na esfera da subjetividade, o protagonismo do aluno, no processo de aprendizado, é uma demanda para o ensino de qualidade. Contudo, a atenção individualizada é tolhida pelo número de alunos em sala de aula. Atualmente, no Ensino Médio, as turmas têm em média 40 estudantes; no Ensino Fundamental, 30. Dessa maneira, se faz necessário que as turmas tenham menos discentes para que o professor forneça atenção a todos.

Com relação ao manejo das diferentes compreensões das habilidades matemáticas, Van de Walle propõe ao professor que faça algumas modificações no problema para ter um nível de dificuldade maior ou proponha outras atividades relacionadas ao assunto abordado para os alunos que resolveram o problema rapidamente. Para os estudantes que estão encontrando muita dificuldade no problema, propor problemas semelhantes com resposta mais imediata.

Ainda que num caminho árduo e com desafios, a metodologia de Resolução de Problemas oferece benefícios ao propiciar o protagonismo do estudante e viabilizar a expressão de sua individualidade. Isso possui demandas, como tempo de planejamento, número de estudantes em sala de aula e número de turmas obrigatórias por professor, passíveis de gestão pela comunidade matemática e da educação da escola.

2.2.2 Leitura Individual

Anteriormente à leitura individual, o professor precisa deixar claro como vai ser a atividade. Isto é, se a dinâmica será individual ou em grupo e o que o aluno vai precisar produzir para entregar no final da atividade. Em algumas propostas de problemas é mais eficiente começar com a atividade em grupo. Por exemplo, as que utilizam material manipulativo, pois normalmente não se tem quantidade suficiente para cada aluno. Porém, é importante o começo da atividade ser individualmente. Para isso, elabore um enunciado que aborda o problema e contenha as informações sobre o que o aluno precisa produzir além da resposta.

Após isso, distribuir para cada um dos alunos lerem individualmente o problema. Esse momento é importante para os alunos sentirem quais são suas dúvidas ou dificuldades com o assunto abordado. Solicitar ao estudante que escreva o que entendeu do problema, quais as dúvidas e estratégias que iria usar para resolvê-lo.

Individualmente, o aluno irá acionar todas ideias que ele tem sobre aquele assunto com a finalidade não só de interpretar o problema como também de resolvê-lo. Do ponto de vista da neurologia do aprendizado e memória, nesse momento, o aluno está reforçando as conexões neurais já existentes (acionando o conhecimento prévio) para então formar novas conexões neuronais (um novo conhecimento).

2.2.3 Leitura em conjunto

Nesse momento é solicitado aos alunos para formarem pequenos grupos. Os alunos irão reler o problema e verificar se o seu entendimento é igual aos colegas, tirar suas dúvidas e defender seu ponto vista. Dessa forma, começam a ser trabalhadas duas das competências gerais da BNCC:

> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. [...]
>
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza (BRASIL, 2019, p. 9-10).

Os alunos irão socializar seus conhecimentos prévios, irão trabalhar as suas expressões e partilhar suas informações de forma que faça sentido para o grupo, bem como procurar entender o parceiro, respeitando suas ideias.

Nesse momento, o professor precisa acompanhar as discussões e verificar se no final todos chegaram à compreensão correta do problema e se conseguiram acionar todos os conhecimentos necessários para a resolução do problema.

Essa tarefa não é nada simples, ele deve conduzir o entendimento, mas as ideias devem partir do aluno. Segundo Allevato e Onuchic (2014), o docente deve tirar dúvidas referentes às anotações e a passagem da linguagem materna para a linguagem matemática, além de procurar lembrar ao aluno os pré-requisitos já abordados em outros problemas necessários para resolver a atividade.

Por exemplo, "No restaurante em que Maria trabalha, a temperatura no interior do *freezer* é -9º C e a temperatura fora do *freezer* é 22º C. Qual é a variação entre a temperatura interna e a externa do *freezer*?" (GIOVANNI, CASTRUCCI, 2018, p. 54). Se um grupo não sabe começar a resolver esse problema, o professor pode pedir para fazer um desenho do termômetro e marcar as temperaturas solicitadas. Ou tentar um problema mais simples: supor as temperaturas positivas e descobrir a variação entre elas.

Os desafios encontrados nessa etapa pelo professor do Ensino Básico são as salas cheias e a forma que são organizadas. Normalmente, os estudantes sentam-se em fileiras, isso faz com que a formação de grupos demore mais tempo. A grande quantidade de alunos em sala de aula torna mais difícil o acompanhamento do professor no entendimento de cada aluno.

Seria aconselhável que cada professor tivesse sua sala de aula. Nela, teria os materiais necessários para o ensino da Matemática, além de possibilitar que o professor arrumasse a sala de aula da forma que achasse mais adequada a sua prática de ensino.

2.2.4 Resolução de Problemas

Essa etapa é o momento em que os alunos se concentram nas estratégias de solução do problema e por meio da compreensão delas o estudante irá descobrir o novo conteúdo matemático. O grupo precisará chegar no consenso da forma que será resolvido o problema. Na parte de educação integral, a BNCC coloca a importância do aluno:

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações (BRASIL, 2019, p. 14).

Para que o grupo chegue a uma conclusão, é preciso que os alunos trabalhem essas atribuições colocadas na BNCC.

Na etapa de Resolução de Problema, o foco são os estudantes. Eles terão que chegar na solução do problema, pois o professor só é mediador do processo de aprendizado. Van de Walle sugere que se cole cartazes com as estratégias de resolução de problemas na sala de aula. Por exemplo:

> Desenhar uma figura, simular algo, usar um modelo [...]; Procurar um padrão [...]; Construir uma tabela [...]; Experimentar uma forma mais simples do problema [...]; Experimentar e verificar [...]; Fazer uma lista organizada de possíveis resultados [...]. (VAN DE WALLE, 2009, p. 77-78)

Essa etapa ocorre de forma concomitante à etapa posterior, observar e incentivar.

2.2.5 Observar e incentivar

O professor deve sempre ter em mente que é o aluno que precisa chegar a uma resposta. O estudante, por meio do seu raciocínio, vai aprender o novo conceito ou procedimento. Para isso, o docente deve incentivar a comunicação entre os alunos, isto é, quando um aluno fizer alguma indagação, o professor pergunta a outro estudante se poderia responder.

Nessa fase, o docente precisa demonstrar confiança no discente, isto é, deixar claro que o estudante tem capacidade de resolver o problema e de fazer matemática. Ao verificar um pensamento errado, não deve corrigir imediatamente, pois são nos erros que se tem debates enriquecedores. É um ótimo momento para avaliar os estudantes, escutá-los, verificar o que eles sabem e o que ainda precisa ser melhor trabalhado. Fazer anotações sobre os conhecimentos de cada aluno. Van de Walle sugere algumas indagações: “O que você acha que o problema está perguntando? Que ideias você tentou até agora? Você tem alguma ideia sobre qual deve ser a resposta? Porque você pensa assim?” (VAN DE WALLE, 2009, p. 65).

Dessa maneira, o professor demonstra não só que o raciocínio em matemática é importante e útil como também evidencia interesse e confiança nos estudantes. Muitos alunos têm boas ideias, mas são inseguros de colocá-las, por isso a necessidade de escutar a todos e pedir explicação tanto para as respostas certas como para as erradas. Nesse momento, é importante lembrar ao grupo que soluções sem justificativa não serão aceitas. Porém, se o grupo estiver perdido na resolução do problema, o docente precisa auxiliar, conforme Onuchic e Allevato propõem:

> Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 84).

Em outras palavras, o professor auxilia o aluno orientando-o e permitindo ao estudante pensar e elaborar suas próprias conclusões. Logo o ensino é mais significativo para o discente, o que contribui para um aprendizado mais eficaz.

O desafio que o docente tem nessa etapa é ser o mais neutro possível. Não dar respostas diretas. Precisa controlar até as expressões do rosto, pois os estudantes tentam buscar no professor as indicações se estão no caminho correto ou não.

O conjunto dessas atitudes do professor proporciona que o aluno tenha mais confiança em si mesmo para resolver as questões matemáticas. Isso vai contribuir para a próxima etapa da Resolução de Problemas, que são os registros das resoluções na lousa.

2.2.6 Registro das resoluções na lousa

Pedir para que cada grupo registre a resolução com as justificativas no quadro branco. Não importa se está certa ou errada, pois o objetivo é toda a turma analisar as resoluções, o que demanda que os estudantes desenvolvam a linguagem matemática para melhorar a exposição de suas ideias para toda a turma. Com o continuar desse procedimento, isso vai acontecendo naturalmente. Cada vez que se vai fazer o registro, os discentes vão aprendendo mais dessa linguagem. Desse modo, essa fase é um preparo para a próxima, que é discutir essas resoluções.

O desafio do docente nesta e na próxima fase é criar um hábito, na sala de aula, dos estudantes serem mais ativos, escreverem no quadro, debaterem de forma responsável sem denegrirem o colega. Percebe-se uma desmotivação crescente, proporcional à idade dos estudantes, em relação à participação deles nas aulas de matemática. E aquele que se atreve a participar é julgado pelos seus colegas. O professor deve se apropriar de conhecimentos psicológicos, como mediação de conflitos, para implementar essa nova rotina na sala de aula.

2.2.7 Plenária

Na plenária, todos os estudantes precisam participar da discussão das resoluções expostas no quadro. Ou seja, justificar, comparar com as outras soluções e tirar dúvidas dos colegas. Processo que faz parte das competências específicas de matemática para o ensino fundamental da BNCC.

> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente, no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BNCC, 2019, p. 267).

Logo, a função do professor é incentivar a participação de todos. Pode ser fazendo perguntas aos mais tímidos, como: "Você poderia me explicar isso, pois não entendi muito bem?"; ou garantindo que todos estão acompanhando o debate; ou, ainda, indagando a turma se alguém quer fazer pergunta a um determinado colega.

Por meio desse debate, os estudantes vão confrontar suas ideias, buscando pontos em comum com as outras resoluções, isso produz um grande aprendizado. A síntese é parte da organização das ideias, logo o resumo corresponde à próxima fase.

2.2.8 Busca de consenso

Posteriormente ao debate, o docente precisa chegar a um consenso com a turma e anotar as principais conclusões, porém não é o momento da formalização. Nessa fase, a anotação deve ser usada com as palavras dos alunos. Deve-se verificar se todos concordam com as conclusões e se existe alguma dúvida a ser esclarecida. Com a convicção de que todos entenderam e concordaram com os resultados do debate, o docente deve seguir para a próxima fase da formalização.

2.2.9 Formalização do conteúdo

O docente, seguro de que todos compreenderam o resultado, deve formalizar o conceito ou procedimento a que os estudantes chegaram, ou seja, passar para a linguagem matemática de uma forma organizada e estruturada e, se for necessário, demonstrar os resultados matemáticos.

O aprendizado é um processo longo e contínuo, assim, a resolução de um só problema não garante a compreensão do assunto totalmente. Com esse intuito, devem ser propostos novos problemas que envolvem o mesmo conteúdo.

2.2.10 Proposição e resolução de novos problemas

Com propósito de não só consolidar o conhecimento como também de avaliar o quanto foi aprendido, devem ser colocados novos problemas para a turma, pois eles vão provocar um aprofundamento na matéria.

Nesse sentido, Oakley (2015, p. 77) descreve que, para criar "padrões neurais sólidos com profunda riqueza contextual", é preciso praticar problemas que envolvem o conceito matemático em diversas situações. Portanto, para que o estudante se aproprie de fato do assunto estudado é necessário que se coloque mais problemas em contextos diversos.

A seguinte competência da BNCC condiz com essa atitude:

> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2019, p. 267).

Observa-se que na Resolução de Problemas o aluno desenvolve todas essas características.

Ao expor novos problemas com contextos variados, aumenta-se a chance de o estudante estar numa perspectiva de aprender matemática para resolver problemas. O que não é uma oposição ao ensino da matemática por meio da resolução de problemas, mas sim uma evidência de que as formas de ensinar matemática – para, sobre e por meio da resolução de problemas – conversam entre si.

Um adendo útil é misturar questões que exigem, além do assunto trabalhado, outras habilidades previamente adquiridas pela turma. Isso melhora o aprendizado, pois os estudantes precisam identificar não só como, mas também quando aplicar o conceito. Mas cuidado: se as questões começarem a exigir apenas repetição de um conceito ou procedimento nos quais os alunos têm o domínio, é hora de seguir adiante com a ementa.

Em suma, a metodologia de Resolução de Problema é parte da solução do problema de despertar o interesse dos estudantes pela matemática, ao demonstrar como pode ser prazeroso estudá-la. Mesmo com todos os desafios que o professor do Ensino Básico terá que enfrentar, principalmente, a falta de tempo de planejamento das aulas e o elevado número de estudantes em salas, o esforço para colocar em prática essa metodologia é válido, uma vez que é muito mais gratificante ver a participação e progressão discente nas aulas.

É crucial não se deixar abater pela resistência inicial dos alunos, o que ocorre em virtude de estarem habituados a acompanhar a aula passivamente e perdendo o foco. Com o passar do tempo, eles vão se acostumando ao novo processo e, muitas vezes, o problema é tão instigante que desperta o interesse daqueles que se recusaram a participar da aula.

3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Com o intuito de verificar como o assunto Números Inteiros é trabalhado atualmente, numa perspectiva de Resolução de Problema, nas escolas do Ensino Básico, foi feita uma pesquisa nos livros do Plano Nacional de Livro Didáticos (PNLD) 2020. As coleções aprovadas no PNLD 2020 foram:

1. A CONQUISTA DA MATEMÁTICA, Editora FTD S.A.;
2. APOEMA – MATEMÁTICA, Editora do Brasil S.A.;
3. ARARIBÁ MAIS – MATEMÁTICA, Editora Moderna LTDA;
4. CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA, editora Edições SM LTDA;
5. GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA, editora Edições SM LTDA;
6. MATEMÁTICA – BIANCHINI, Editora Moderna LTDA;
7. MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA, Editora Moderna LTDA;
8. MATEMÁTICA ESSENCIAL, Editora Scipione S.A.;
9. MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA, Editora FTD S.A.;
10. TELÁRIS MATEMÁTICA, Editora Ática S.A. e
11. TRILHAS DA MATEMÁTICA, Editora Saraiva Educação S.A.

(GUIA PNLD 2020)[1]

Dessas coleções, foi verificado que a maioria das escolas administradas pelo Estado do Espírito Santo e as das prefeituras de Serra e de Aracruz adotam o livro didático *A Conquista da Matemática*. Já as unidades de ensino da Prefeitura de Vitória e algumas escolas da rede estadual adotaram o título *Teláris - Matemática*. Desse modo, a seguir, se analisará a forma com que o conteúdo é abordado nestas obras.

Figura 4 – Livros analisados.

Fonte: compilação do autor[2]

[1] Brasil. Ministério da Educação. **PNLD 2020**: matemática – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019. Disponível em:

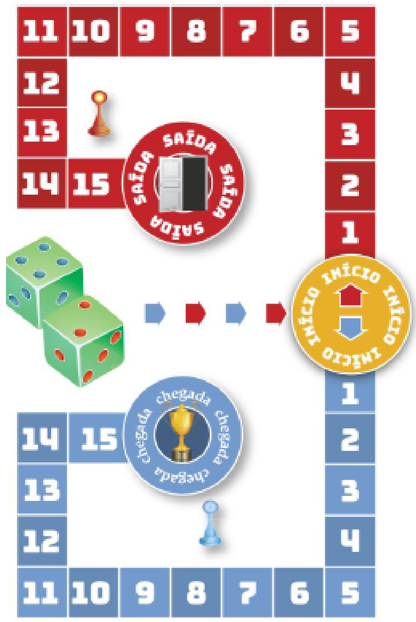
[2] Montagem a partir das capas dos livros (GIOVANNI, CASTRUCCI, 2018) e (DANTE, 2018).

3.1 A Conquista da Matemática, 7º ano.

Autores: José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci. Editora FTD; PNLD 2020, 2021, 2022 e 2023.

A Unidade 2, *Conjunto dos Números Inteiros*, se inicia com um jogo de tabuleiro (Figura 4) que tem o intuito de despertar o uso de números negativos e a operação de adição com números inteiros.

Figura 5 – Jogo de tabuleiro.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 31)

Observa-se que o jogo está no início da unidade dos números inteiros, desta forma, não foi falado nada sobre adição. Logo, o aluno, por meio da interação com o jogo, deve chegar à conclusão de que está adicionando números inteiros. Esse modo de abordagem está de acordo com a metodologia de Resolução de Problemas.

Ao iniciar o Capítulo 1, *A Ideia de Números Inteiros*, o livro trabalha com uma tabela pronta do Campeonato Brasileiro envolvendo saldos de gols (Figura 6), além de usar a leitura de termômetro, calendário cristão e altitude X profundidade. Com a leitura dessas situações reais, pretende-se que o aluno reconheça a existência de números positivos e negativos. Depois, propõe cinco atividades que envolvem essas situações.

Figura 6 – Campeonato Brasileiro de Futebol - 2018.

Campeonato Brasileiro de Futebol (24ª rodada/2018)

Classificação	Time	Pontos	Gols marcados	Gols sofridos	Saldo de gols
1º	Internacional	49	31	13	+18
9º	Fluminense	31	23	27	−4
10º	Corinthians	30	25	21	+4
11º	América-MG	30	24	28	−4
13º	Bahia	28	24	29	−5
18º	Ceará	24	15	25	−10

S.C.INTERNACIONAL-PORTO ALEGRE RS, FLUMINENSE-RIO DE JANEIRO RJ, CORINTHIANS-SÃO PAULO SP, AMÉRICA-BELO HORIZONTE MG, ESPORTE CLUBE-BAHIA SALVADOR BA, CEARÁ-CE

Fonte: CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL. **Campeonato Brasileiro de Futebol**. Disponível em: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2018>. Acesso em: 17 set. 2018.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 32)

Percebe-se que são situações boas para introduzir os números inteiros, principalmente a altitude X profundidade, pois faz parte do dia a dia do aluno. Mesmo o futebol sendo bastante popular no Brasil, muitos alunos não conhecem os saldos de gols. No entanto, isso não é um impedimento para abordar tal assunto porque é bastante discutido na mídia e por pessoas que gostam desse esporte. Isso desperta um certo interesse do estudante de querer entender o contexto.

Como pode ser verificado na Figura 6, a tabela do Campeonato Brasileiro está toda preenchida, a atividade se tornou de interpretação de tabela que utiliza números inteiros. Outra forma mais interessante de abordar esse assunto, seria colocar a tabela do Campeonato Brasileiro com a coluna do saldo de gols sem preencher, conforme Figura 7. Assim, quando o estudante for preencher essa coluna, terá necessidade de fazer uma notação que diferencie o saldo de gols positivos dos negativos. Dessa forma, o docente poderá introduzir a notação dos números negativos.

Figura 7 – Campeonato Brasileiro de Futebol 2020-21

Campeonato Brasileiro de Futebol 2020-21 (29º rodada)

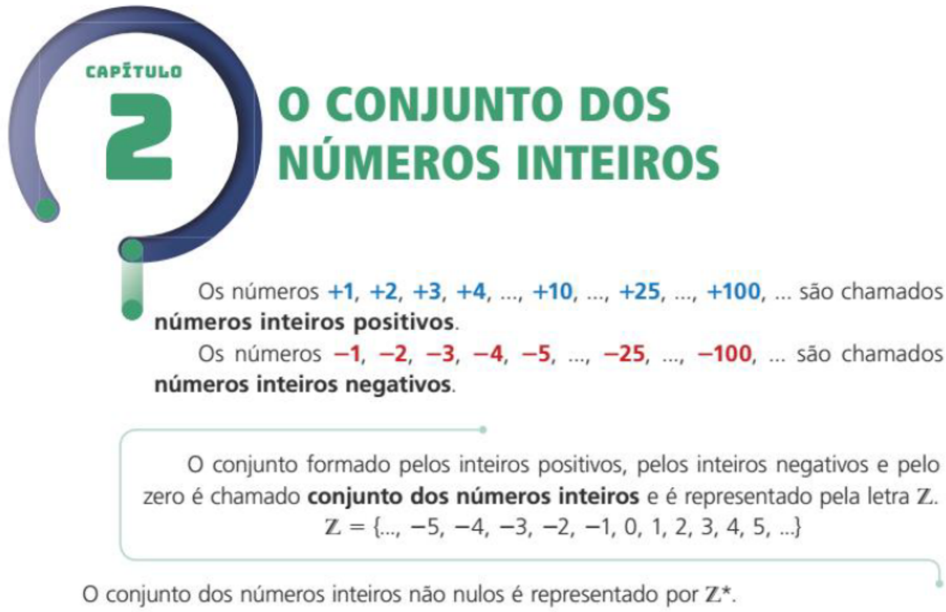
Classificação	Clube	Pontos	GP	GC	Saldo de gols.
1º	São Paulo	56	49	27	
2º	Internacional	53	44	26	
4º	Flamengo	49	47	39	
15º	Vasco da Gama	32	29	39	
19º	Botafogo	23	25	44	

Fonte: Confederação Brasileira de Futebol[3]

[3] **Confederação Brasileira de Futebol**. Campeonato Brasileiro de Futebol - Série A - 2020 Dis-

No Capítulo 2, O Conjunto dos Números Inteiros, é exemplificado números inteiros positivos, números inteiros negativos, como é formado o conjunto dos inteiros e sua representação, pode-se ver isso na Figura 8.

Figura 8 – Conjunto de Números Inteiros



CAPÍTULO 2

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Os números +1, +2, +3, +4, ..., +10, ..., +25, ..., +100, ... são chamados **números inteiros positivos**.

Os números −1, −2, −3, −4, −5, ..., −25, ..., −100, ... são chamados **números inteiros negativos**.

O conjunto formado pelos inteiros positivos, pelos inteiros negativos e pelo zero é chamado **conjunto dos números inteiros** e é representado pela letra $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

O conjunto dos números inteiros não nulos é representado por $\mathbb{Z}^*$.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 36)

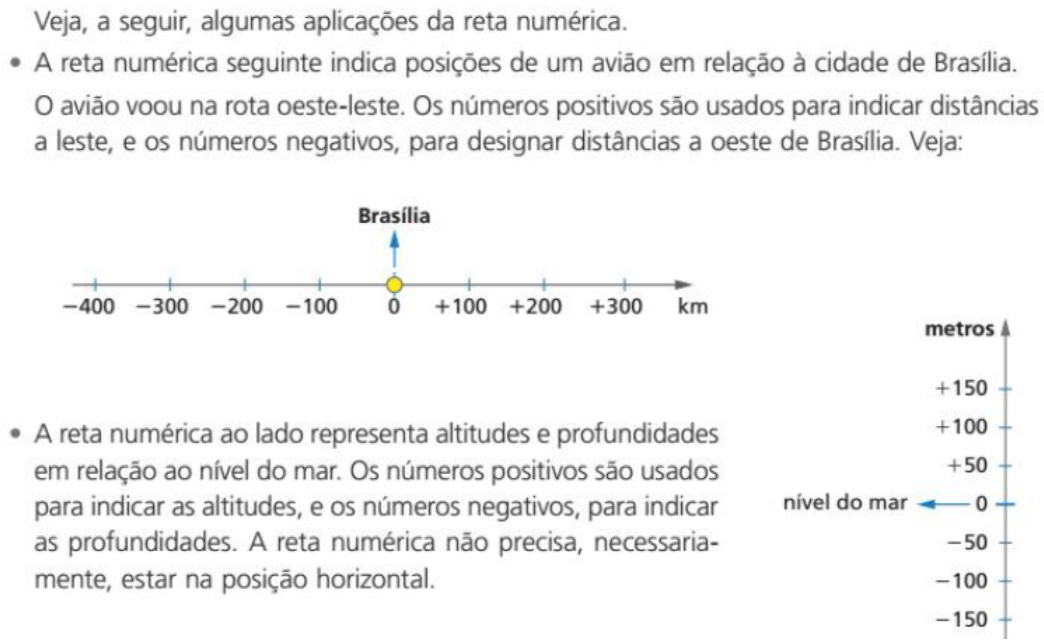
Logo em seguida, determina o procedimento de como se constrói a reta numérica. Relata algumas situações em que se utiliza a reta numérica e explica os termos: imagem geométrica e abscissa do número inteiro, além de propor oito questões para explorar e consolidar os conceitos de números inteiros e a localização na reta numérica.

Percebe-se que não foi construído o conjunto dos números inteiros como extensão dos naturais. Em nenhum momento o livro menciona o conjunto dos naturais, nem na construção do conjunto e nem na localização na reta numérica. Segundo Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), na escola, os números inteiros devem ser abordados como uma extensão dos números naturais com a inclusão dos números negativos. Essa inclusão exige vários ressignificados, por exemplo, o zero que representa a ausência passa a ter outra função de referencial na reta numérica.

O docente deve reforçar o significado do zero não ser mais só ausência de quantidades, ele ganha um outro significado "[...] como um **referencial**, que distingue, por oposição, as quantidades negativas das positivas" (RIPOLL, RANGEL e GIRALDO, 2016, p. 65, grifo dos autores). Nos exemplos em que o livro dá de utilização da reta numérica, conforme a Figura 9, o docente pode reforçar.

ponível em: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2020>. Acesso em: 13 jan. 2021.

Figura 9 – Aplicações da reta numérica


Veja, a seguir, algumas aplicações da reta numérica.

- A reta numérica seguinte indica posições de um avião em relação à cidade de Brasília. O avião voou na rota oeste-leste. Os números positivos são usados para indicar distâncias a leste, e os números negativos, para designar distâncias a oeste de Brasília. Veja:

- A reta numérica ao lado representa altitudes e profundidades em relação ao nível do mar. Os números positivos são usados para indicar as altitudes, e os números negativos, para indicar as profundidades. A reta numérica não precisa, necessariamente, estar na posição horizontal.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 37)

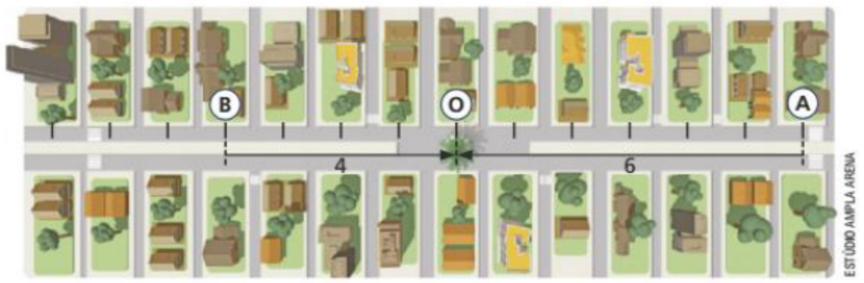
No livro do professor, esta obra coloca nas bordas das páginas o boxe intitulado Orientações Didáticas. Nesse capítulo, o boxe contém a proposta de se amarrar um barbante para os alunos pendurarem cartões com números positivos, negativos e o zero. Numa perspectiva de Resolução de Problema, o professor deve colocar esta atividade primeiro, uma vez que, nela, o aluno vai vivenciar a construção da reta numérica por meio dos questionamentos que irão surgir naturalmente. O estudante chegará no procedimento de não só construir uma reta numérica, como também de como se localiza o número nela. O docente deve pedir para os grupos justificarem a forma que ficou o varal. Depois dessa justificativa, é necessária a formalização do conteúdo. Nesta atividade o professor não só deve discutir as ideias de número oposto e módulo do número inteiro, como também formalizá-las. Em seguida, pode ser proposto fazer as oito questões desse capítulo.

O Capítulo 3, *Módulo de um Número Inteiro*, determina o módulo como a distância do número até o zero pela exploração da reta numérica que representa quarteirões de uma rua (Figura 10). Além de definir números opostos como números que têm a mesma distância do zero.

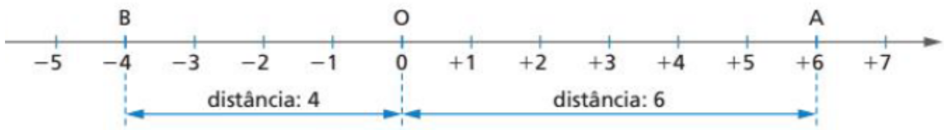
Figura 10 – Módulo de um número inteiro como distância

Clodoaldo e João são amigos e moram na mesma avenida. Todos os dias eles se encontram no Clube do Bairro para praticar atividade física.

No esquema a seguir, as marcações destacadas em preto foram feitas à mesma distância uma da outra. O ponto *O* indica a localização do Clube do Bairro, o ponto *A*, a localização da casa de Clodoaldo e o ponto *B*, a da casa de João.



Considere a menor distância entre duas marcas como unidade e o Clube do Bairro como o ponto de origem. Podemos associar os números positivos às marcas à direita de *O* e os números negativos às marcas à esquerda de *O*.

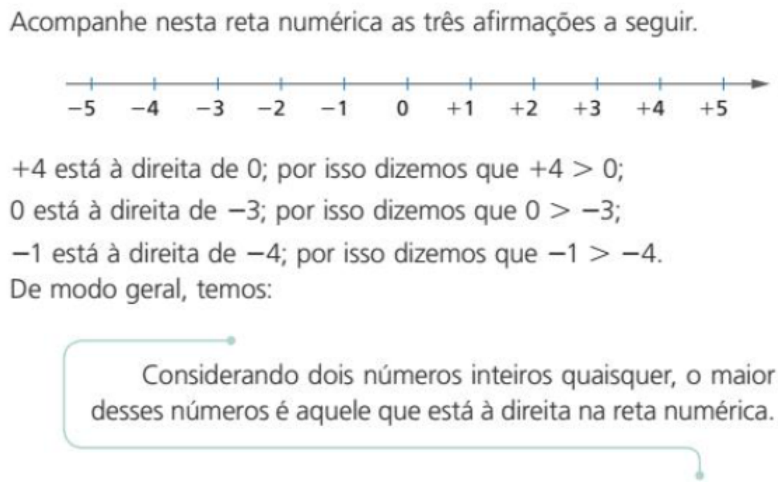


Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 39)

Por mais que os autores do livro coloquem essas definições depois da construção da reta numérica, fica difícil do estudante perceber a necessidade delas. Dessa forma, o aluno só procura decorá-las para fazer a prova, e os exercícios são feitos de forma mecânica, sem significado. É necessário que o docente tenha despertado o uso dessas definições na construção da reta numérica. Outro momento em que se trabalha o módulo são nas operações.

O Capítulo 4, *Comparação de Números Inteiros*, exibe uma reta numérica e exemplifica algumas comparações de números, então conclui que o maior de dois números inteiros é aquele que está à direita na reta numérica (Figura 11).

Figura 11 – Comparação de números inteiros


Acompanhe nesta reta numérica as três afirmações a seguir.

- +4 está à direita de 0; por isso dizemos que +4 > 0;
- 0 está à direita de −3; por isso dizemos que 0 > −3;
- −1 está à direita de −4; por isso dizemos que −1 > −4.

De modo geral, temos:

Considerando dois números inteiros quaisquer, o maior desses números é aquele que está à direita na reta numérica.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 39)

A obra considera a reta numérica só na posição horizontal e que ela cresce da esquerda para a direita. O livro não explora as várias possibilidades de construção da reta e nem chama a atenção para o sentido que cresce. Segundo Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), é muito importante explorar os vários sentidos da reta numérica (Figura 12). Bem como o zero como referencial, o sentido positivo é o crescente, isto é, cresce no sentido do 0 a 1, e o negativo como sentido decrescente, ou seja, sentido oposto do positivo.

Figura 12 – Várias posições da reta numérica

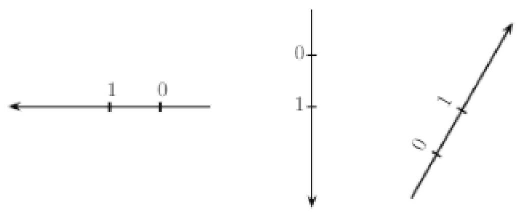


Figura 3.12: A reta numerada.

Fonte: Ripoll, Rangel e Giraldo (2016, p.82)

Propõe também uma questão de temperatura para indicar qual das temperaturas é a mais alta. O livro continua dando exemplos de comparações de temperaturas para comparar dois números inteiros utilizando os sinais de <, > e =. Nesses exemplos, ele trabalha com a reta numérica na posição vertical. Posteriormente, propõe nove questões envolvendo comparação de números inteiros. A maior parte das questões são exercícios para aplicar a conclusão que se chegou no início do capítulo.

Por fim, a obra coloca um texto que mostra as diversas temperaturas no país para evidenciar os contrastes existentes no Brasil (Figura 13). Depois, coloca duas questões que não exploram o texto de forma significativa. A primeira delas solicita para colocar em ordem crescente as temperaturas que aparecem no texto. A segunda, coloca um pequeno texto e solicita, da mesma forma da primeira, colocar os números inteiros em ordem crescente. A exploração do texto precisa envolver um problema real do cotidiano. Um questionamento natural seria a variação da temperatura nessas localidades.

Figura 13 – Temperatura pelo Brasil

Temperaturas pelo Brasil

Muito já se falou sobre o Brasil ser uma terra de contrastes. Um exemplo disso é a temperatura: no inverno, é possível encontrar temperaturas negativas nos pontos mais altos dos estados do Rio Grande do Sul e Santa Catarina; enquanto no Nordeste, mesmo no inverno, a temperatura pode ultrapassar os 25 °C.

Situada a 1 360 m de altitude, São Joaquim (SC) é uma das cidades mais frias do Brasil. Nessa cidade, o clima é temperado, com baixas temperaturas no inverno, quando os termômetros marcam temperaturas negativas, e altas temperaturas no verão. Em 24 de maio de 2018, atingiu temperatura próxima a −3 °C, contrastando com os 30 °C já alcançados em 6 de fevereiro de 2014. Foto de 2018.

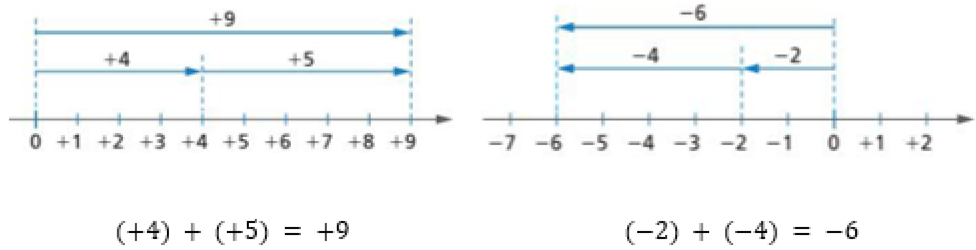
Em 24 de maio de 2018, de acordo com a Central NSC de Meteorologia, a cidade de Urupema (SC), localizada na serra catarinense, atingiu temperatura mínima de cerca de 6,6 °C negativos, superando pela segunda vez no ano a menor temperatura registrada no país até aquele momento. No inverno, as pequenas cachoeiras e vegetação rasteira transformam-se em cristais de gelo. Foto de 2018.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 44)

Outra possibilidade, é trabalhar a comparação dos números inteiros por meio de temperatura média do país, já que é uma boa estratégia para compreender a utilidade desse assunto, além de tornar mais acessível a comparação de números inteiros.

O Capítulo 5, *Adição de Números Inteiros*, utiliza dois problemas envolvendo pontos obtidos no campeonato de handebol. O livro utiliza o modelo da reta numérica para fazer a adição dos números inteiros com o mesmo sinal representada da seguinte forma $(+4)+(+5) = +9$ e $(-2)+(-4) = -6$ (Figura 14). Assim, ele afirma que " Quando adicionamos números inteiros com mesmo sinal, a soma é obtida adicionando seus módulos e mantendo o sinal" (GIOVANNI, CASTRUCCI, 2018, p. 46).

Figura 14 – Adição de números inteiros com sinais iguais



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 45)

Utilizar a reta numérica como modelo para adição de números inteiros é uma excelente estratégia, pois a representação do número graficamente ajuda o aluno a compreender melhor as propriedades da adição. No entanto, a dificuldade que esse recurso didático (o livro) tem é que precisa definir os assuntos, isto é, expressa a propriedade logo após o exemplo. Com isso, não dá para esperar o discente chegar às suas próprias conclusões, ou seja, o conteúdo é tratado de forma explicativa.

Ao utilizar problemas envolvendo o jogo de handebol, os autores tinham como objetivo contextualizar as questões para mostrar sua utilização. Porém, no segundo problema, eles colocam que a equipe perdeu pontos. Acredita-se que no jogo de handebol não se perde ponto. Assim, não faz sentido essa contextualização.

Posteriormente, com o pequeno texto e a ilustração da figura de uma Planisfério, a obra trabalha com questões de variação de temperatura em vários países (Figura 15).

Figura 15 – Planisfério

Cada vez mais o ser humano se preocupa com as mudanças climáticas que vêm ocorrendo em nosso planeta. Um meio de monitorar essas mudanças é o estudo permanente da temperatura nos diversos pontos da Terra.

As situações seguintes estão relacionadas às temperaturas de algumas cidades, medidas em um mesmo dia.

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016. p. 32.

Responda às questões no caderno.

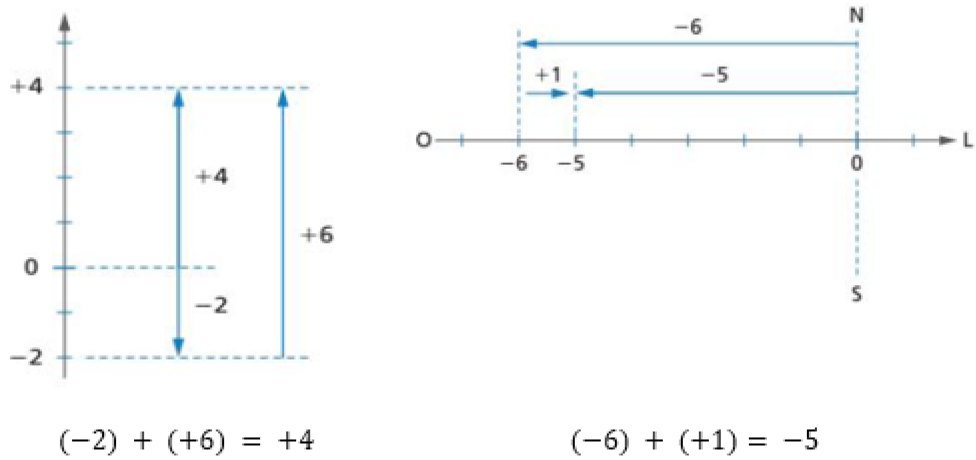
1. Em Brasília, capital do Brasil, a temperatura mínima foi de 20 °C. Como a temperatura nesse dia subiu 8 °C, qual foi a temperatura máxima registrada em Brasília nesse dia? 28 °C

2. Em Toronto, no Canadá, às 6 horas da manhã, os termômetros registravam −1 °C. Ao meio-dia, a temperatura tinha aumentado 6 °C. Qual foi a temperatura ao meio-dia? 5 °C

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 46)

Dessa forma, o estudante, ao resolver esses problemas, poderá observar algumas propriedades da adição de números inteiros com sinais diferentes. Em seguida, com uma questão que envolve elevador e outra que envolve localização utilizando coordenada leste e oeste, o livro aborda adição com números inteiros de sinais diferentes, $(-2)+(+6) = +4$ e $(-6) + (+1) = (-5)$. Ele utiliza o modelo da reta numérica; no primeiro problema em pé e no segundo deitado (Figura 16). Então, a obra afirma: “Quando adicionamos dois números inteiros de sinais diferentes, a soma é obtida efetuando-se a diferença entre seus módulos e mantendo o sinal do número que está mais distante da origem” (GIOVANNI, CASTRUCCI, 2018, p. 48).

Figura 16 – Adição de números inteiros com sinais diferentes



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 47)

O livro exibe mais dois exemplos de conta $(-16)+(+20) = +4$ e $(-100)+(+42) = -58$. Depois, relata as propriedades da adição, fechamento, comutatividade, associativa, elemento neutro e elemento oposto, com alguns exemplos. Em seguida, se explica a notação simplificada com alguns exemplos e propõe 17 questões que têm o propósito de provocar o aluno a utilizar adição, as suas propriedades e a notação simplificada, dos números inteiros.

Devido o livro ter o intuito de servir como estudo orientado, ou seja, do aluno ser capaz de aprender lendo o livro e fazendo suas atividades, fica difícil abordar o assunto utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. Cabe ao professor adequar o uso do livro didático a essa metodologia.

Sua utilização não deve ter como propósito o entendimento completo pelo aluno, haja vista que a tendência dessa utilização é que o assunto seja entendido pelo estudante como um conjunto de regras a serem decoradas. Por exemplo, o professor deve orientar o aluno como seria a soma de números naturais utilizando a reta a fim de expandir esse entendimento para os números inteiros. E, a partir das observações dos resultados das operações, os alunos devem levantar hipóteses e estratégias sobre a operação da adição. Depois do aluno estar bem familiarizado com o método da adição na reta numérica, o professor deve utilizar o livro para consolidar tal conhecimento.

Observa-se que o livro não utilizou nos seus exemplos a adição começando com um número positivo e somando um número negativo. Isso dificultou a compreensão da propriedade comutativa.

No Capítulo 6, *Subtração de Números Inteiros*, o objetivo é mostrar que sempre é possível fazer a diferença de dois números inteiros, que o resultado é um número inteiro e que a subtração de dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Para isso, o livro determina que a variação de temperatura é calculada “(temperatura máxima) menos (temperatura mínima)” (GIOVANNI, CASTRUCCI, 2018, p. 52). Exibe uma tabela com três cidades e suas respectivas temperaturas máxima e mínima (Figura 17) e, por meio do cálculo dessas variações, mostra que a diferença é o mesmo que somar com seu oposto (Figura 18).

Figura 17 – Subtração de números inteiros

Para determinar a variação de temperatura em um local, em um determinado período de tempo, vamos fazer:

(temperatura máxima) menos (temperatura mínima)

Observe o quadro com a temperatura máxima e a temperatura mínima de três cidades (*A*, *B* e *C*) em um mesmo dia:

Cidade	Temperatura mínima	Temperatura máxima
A	−5	+1
B	+2	+7
C	−6	−2

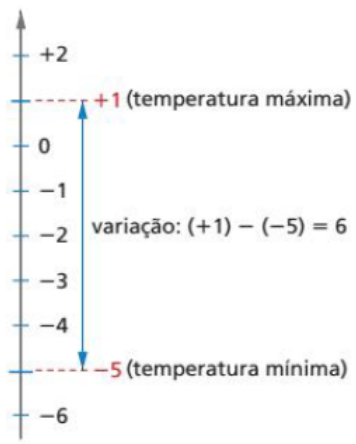
A partir do quadro, vamos descobrir a variação de temperatura em cada cidade.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 52)

Figura 18 – Cálculo das variações

- Para a cidade *A*, temos:

Mínima: −5 Máxima: +1



Considerando que $(+1) - (-5) = 6$ e $(+1) + (+5) = 6$, podemos escrever que:

$$(+1) - (-5) = (+1) + (+5) = 6$$

oposto de −5

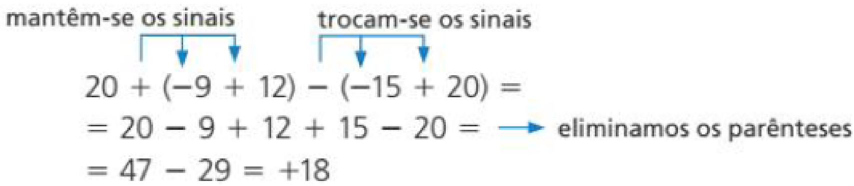
Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 52)

Acredita-se que o livro tinha o intuito que o aluno entendesse estas igualdades: $(+1) - (-5) = 6$ e $(+1) + (+5) = 6$, assim, $(+1) - (-5) = 6 = (+1) + (+5)$, logo, $-(-5) = +(+5)$. No entanto, da forma que foi apresentada, ficou difícil a interpretação. Seguidamente, o autor indica oito questões para o aluno trabalhar a subtração de dois números inteiros substituindo por uma adição com o oposto.

Na soma com números inteiros, o livro utilizou a reta numérica. Porém, na subtração, a obra utiliza problemas de variação de temperaturas para mostrar que a subtração pode ser transformada em uma soma com o oposto, e isso torna o entendimento mais complicado. O ideal é ter um modelo que sirva para as quatros operações.

O Capítulo 7, *Adição Algébrica*, tem como objetivo mostrar que tanto as operações de adição como de subtração dos números inteiros podem ser consideradas como adição algébrica. Para tanto, coloca as regras de como eliminar os parênteses e vários exemplos, como na Figura 19.

Figura 19 – Adição algébrica



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 56)

Por fim, sugere onze questões que têm o propósito de trabalhar a correta eliminação de parênteses, colchetes e chaves. Novamente, com mais regras para o aluno decorar e aplicar de forma mecânica em algumas questões. Porém, nas listas de exercícios, o livro tem alguns problemas interessantes e bem elaborados, que podem ser utilizados pelo docente na metodologia de Resolução de Problemas.

O Capítulo 8, *Multiplicação de Números Inteiros*, começa com um pouco da história dos números inteiros, como pode ser visto na Figura 20, e isso é muito bom, pois não só dá vida ao assunto, como também dá um significado, e os estudantes compreendem melhor o conteúdo. Nesse caso específico, observa-se que na história houve dificuldade de aceitar a multiplicação. Fica claro que não é algo simples de entender, isto é, vai de encontro a nossa ideia de multiplicação com números naturais, porque, ao multiplicar por um número inteiro, essa multiplicação pode aumentar ou diminuir o valor do número multiplicado. Isto é, ao multiplicar $(+6)$ por $(+2)$, obtém-se $(+12)$, ou seja, $+12 > +6$, porém, se multiplicar o $(+6)$ por (-2), obtém-se (-12), isto é, $-12 < +6$.

Figura 20 – História dos números inteiros

CAPÍTULO 8

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Apesar de a ideia de número negativo ser largamente utilizada desde o século XVII, ela só foi plenamente aceita a partir do século XIX.

A multiplicação com números negativos foi mais difícil de ser aceita e compreendida naquela época. Passou-se um longo tempo para que os matemáticos pudessem dar um resultado para a multiplicação de dois números negativos.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 59)

Em seguida, separam a multiplicação em três casos. O primeiro caso é a multiplicação com dois números positivos. Nesse caso pode-se considerar os números inteiros como números naturais e fazer a multiplicação. O resultado é um número natural, logo é um número inteiro positivo (Figura 21).

Figura 21 – 1º caso da multiplicação

Apesar de a ideia de número negativo ser largamente utilizada desde o século XVII, ela só foi plenamente aceita a partir do século XIX.

A multiplicação com números negativos foi mais difícil de ser aceita e compreendida naquela época. Passou-se um longo tempo para que os matemáticos pudessem dar um resultado para a multiplicação de dois números negativos.

Para multiplicar números inteiros, acompanhe os casos a seguir.

1º caso: Os dois fatores são números inteiros positivos.

Considerando a multiplicação dos números naturais, temos:

- $(+6) \cdot (+4) = 6 \cdot 4 = 24$
  - $+4 = 4$
  - $+6 = 6$
- $(+8) \cdot (+15) = 8 \cdot 15 = 120$
  - $+15 = 15$
  - $+8 = 8$

A multiplicação de dois números inteiros positivos dá um número inteiro positivo.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 59)

No segundo caso, trata a multiplicação de dois números, um negativo e o outro positivo. Ele se divide em dois processos, como pode ser visto na Figura 22.

Figura 22 – 2º caso da multiplicação

2º caso: Um fator é número inteiro positivo e o outro é número inteiro negativo.

- $(+6) \cdot (-4) = 6 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -24$

  Consideremos, agora, a multiplicação:

- $(-6) \cdot (+4) = -(+6) \cdot (+4) = -(+24) = -24$

Então: $(+6) \cdot (-4) = -24$ e $(-6) \cdot (+4) = -24$

A multiplicação de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo, em qualquer ordem, resulta em um número inteiro negativo.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 59)

Quando a multiplicação começa com um número positivo, o aluno deve considerar o número positivo como natural e fazer a multiplicação utilizando a ideia de soma repetida do segundo fator com número negativo. Se a multiplicação começa com um fator negativo, o estudante substitui o oposto do número e torna a multiplicação com dois números naturais, porém, com o menos em evidência, logo o resultado é negativo.

Observa-se que esta igualdade $(-6) = -(+6)$ ainda não está tão natural para o discente. A forma como foi trabalhado $-\ (+6) \Rightarrow (-6)$ torna o processo multiplicativo para o estudante como uma porção de regras que precisam ser decoradas.

No terceiro caso, que trata de multiplicação com dois números negativos, o livro coloca uma tabela com o objetivo de o aluno ver um padrão e assim concluir que o resultado dessa multiplicação é positivo (Figura 23).

Figura 23 – 3º caso da multiplicação

Observando a linha dos resultados, notamos que cada resultado à sua esquerda tem 6 unidades a mais que o resultado anterior. Mantendo esse padrão, preenchemos o restante do quadro:

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2
−6	+24	+18	+12	+6	0	−6	−12

+6 +6 +6 +6

A multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 59)

Além do livro abordar utilizando a mesma ideia observada no segundo caso, em que, coloca em evidência o sinal negativo do primeiro número, faz a multiplicação utilizando a ideia de soma repetida, e, por fim, troca o sinal do resultado (Figura 24).

Figura 24 – 3º caso da multiplicação com operação do número oposto

- $(-6) \cdot (-2) = -(+6) \cdot (-2) = -(-12) = +12$

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 60)

Possivelmente, a obra tem a intenção de exibir várias formas de se pensar a multiplicação para justificar os resultados obtidos. No entanto, devido ao estudante estar tendo contato com as operações de números inteiros pela primeira vez, isso provoca no estudante uma sensação de que precisa decorar todas essas formas para realizar a multiplicação. Para facilitar o entendimento da multiplicação, é preciso colocá-la como ampliação da operação de adição.

O livro, por meio de exibição de exemplos, coloca as propriedades da multiplicação, fechamento, comutativa, associativa, elemento neutro e distributiva. Na propriedade distributiva, faltou o outro lado da igualdade, como pode ser visto na Figura 25.

Figura 25 – Propriedade distributiva

5ª propriedade: Para multiplicar um número inteiro por uma soma algébrica, podemos multiplicar cada parcela pelo número e adicionar, a seguir, os resultados obtidos.

- $(+6) \cdot [(+3) + (-5)] = (+6) \cdot (+3) + (+6) \cdot (-5) = (+18) + (-30) = 18 - 30 = -12$

- $(-9) \cdot (-3 + 7) = (-9) \cdot (-3) + (-9) \cdot (+7) = (+27) + (-63) = +27 - 63 = -36$

Essa é a propriedade **distributiva** em relação à adição algébrica.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 60)

Isto é, faltou colocar $(+6) \cdot [(+3) + (-5)] = (+6) \cdot [-2] = -12$. Em seguida, a obra propõe o jogo dos produtos, no qual os alunos devem escolher um dos três tabuleiros a seguir.

Figura 26 – Jogo dos produtos

Tabuleiro I

×	+1	+2	+3	+4	+5	+6
+1	+1	+2	+3	+4	+5	+6
+2	+2	+4	+6	+8	+10	+12
+3	+3	+6	+9	+12	+15	+18
+4	+4	+8	+12	+16	+20	+24
+5	+5	+10	+15	+20	+25	+30
+6	+6	+12	+18	+24	+30	+36

Tabuleiro II

×	−1	−2	−3	−4	−5	−6
+1	−1	−2	−3	−4	−5	−6
+2	−2	−4	−6	−8	−10	−12
+3	−3	−6	−9	−12	−15	−18
+4	−4	−8	−12	−16	−20	−24
+5	−5	−10	−15	−20	−25	−30
+6	−6	−12	−18	−24	−30	−36

Tabuleiro III

×	−1	−2	−3	−4	−5	−6
−1	+1	+2	+3	+4	+5	+6
−2	+2	+4	+6	+8	+10	+12
−3	+3	+6	+9	+12	+15	+18
−4	+4	+8	+12	+16	+20	+24
−5	+5	+10	+15	+20	+25	+30
−6	+6	+12	+18	+24	+30	+36

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 60)

Os alunos que escolheram o tabuleiro I devem pegar dois dados de números positivos; os que estão com tabuleiro II devem utilizar um dado com números positivos e outro com número negativo; e quem escolheu o tabuleiro 3 deve ficar com dois dados de números negativos. O estudante joga os dois dados e marca o resultado dele na tabela. Ganha o jogo quem conseguir pintar primeiro uma linha, uma coluna ou uma diagonal.

A desvantagem desse jogo é que, se o aluno perceber que não precisa fazer conta, que é só olhar na primeira linha e na primeira coluna os números que saíram nos dados, o jogo só irá proporcionar a visualização dos resultados da multiplicação. Melhor seria se o estudante tivesse que realizar a conta para marcar o resultado. Assim, ele iria praticar a tabuada da multiplicação com números inteiros de -6 a $+6$, tirando o zero.

Portanto, é só retirar do tabuleiro a primeira linha e a primeira coluna. Dessa forma, o estudante dificilmente iria imaginar a linha e a coluna retiradas. Mas, se o estudante percebesse as retiradas por meio da forma que estariam colocados os números, provavelmente ele teria um conhecimento já consolidado das multiplicações de números inteiros. Portanto, não teria problema.

Posteriormente, a coleção coloca oito questões que trabalham a multiplicação com os números inteiros.

No Capítulo 9, *Divisão Exata de Números Inteiros*, o livro utiliza a ideia de que a divisão é o inverso da multiplicação e, como na multiplicação o estudo de sinais foram discutidos, logo o da divisão também está concluído, como pode ser verificado na figura 27.

Figura 27 – Divisão de números inteiros

Na divisão exata de números naturais:

- $40 : 5 = 8$, logo $8 \cdot 5 = 40$
- $36 : 9 = 4$, logo $4 \cdot 9 = 36$

Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros, ou seja, aquela em que o quociente também é um número inteiro.

- $(+20) : (-5) = q$, de modo que $q \cdot (-5) = +20$
  Assim: $q = -4$, pois $(-4) \cdot (-5) = +20$
  Logo: $(+20) : (-5) = -4$
- $(-20) : (+5) = q$, de modo que $q \cdot (+5) = -20$
  Assim: $q = -4$, pois $(-4) \cdot (+5) = -20$
  Logo: $(-20) : (+5) = -4$
- $(-20) : (-5) = q$, de modo que $q \cdot (-5) = -20$
  Assim: $q = +4$, pois $(+4) \cdot (-5) = -20$
  Logo: $(-20) : (-5) = +4$

De modo geral:

Quando efetuamos uma divisão exata entre dois números inteiros não nulos, o quociente será um número inteiro positivo se o dividendo e o divisor tiverem mesmo sinal; caso contrário, o quociente será um número inteiro negativo.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 62)

Além de fazerem as observações de que nem sempre é possível ter a divisão exata entre dois números inteiros e que não existe a divisão por zero nos inteiros, logo em seguida colocam nove exercícios que envolvem divisão.

Em resumo, o livro é bom porque tem o cuidado de procurar a aplicação da matemática em questões do cotidiano. Nos boxes da Orientação Didática, coloca atividades que podem ser aplicadas utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. Também procura justificar as propriedades apresentadas de forma intuitiva para que os alunos compreendam.

No entanto, o professor deve usar o livro com cautela para que o ensino dos números inteiros não se torne uma porção de regras que o aluno precisa decorar. O docente precisa ter a certeza de que o estudante compreendeu cada propriedade, e só depois disso utilizar o livro como revisão e para praticar as operações com o objetivo de consolidar o conhecimento.

3.2 Teláris Matemática, 7º ano.

Autor: Luiz Roberto Dante. Editora Ática; PNLD 2020, 2021, 2022 e 2023.

O foco dessa pesquisa nesse livro será o Capítulo 1, *Números Inteiros e Sequências*. A obra começa com uma imagem que lembra uma folha de jornal com duas manchetes do ano de 2017. A primeira manchete trata da temperatura mínima em São Joaquim (SC) e a segunda do saldo de gols da Associação Esportiva de Altos (PI), conforme Figura 28. Assim, a obra tem o intuito de mostrar ao aluno a utilização dos números negativos na sociedade por meio da leitura dessas manchetes e indagações que o autor sugere no livro do professor nas bordas das páginas.

Figura 28 – Jornal

RETROSPECTIVA

FUNDADO EM 1875

DOMINGO

31 de dezembro de 2017

TEMPO

No dia 18 de julho de 2017, a cidade de São Joaquim (SC) registrou medida de temperatura mínima de -5 °C. Devido aos ventos, a sensação térmica na região chegou a -17 °C.

Cidade de São Joaquim (SC). Foto de 2017.

ESPORTE

Na fase de grupos da Copa do Nordeste de futebol de 2017, a Associação Esportiva de Altos (PI) marcou 7 gols e sofreu 9, obtendo saldo de gols igual a -2.

COPA DO NORDESTE

Equipe de futebol da Associação Esportiva de Altos (PI). Foto de 2017.

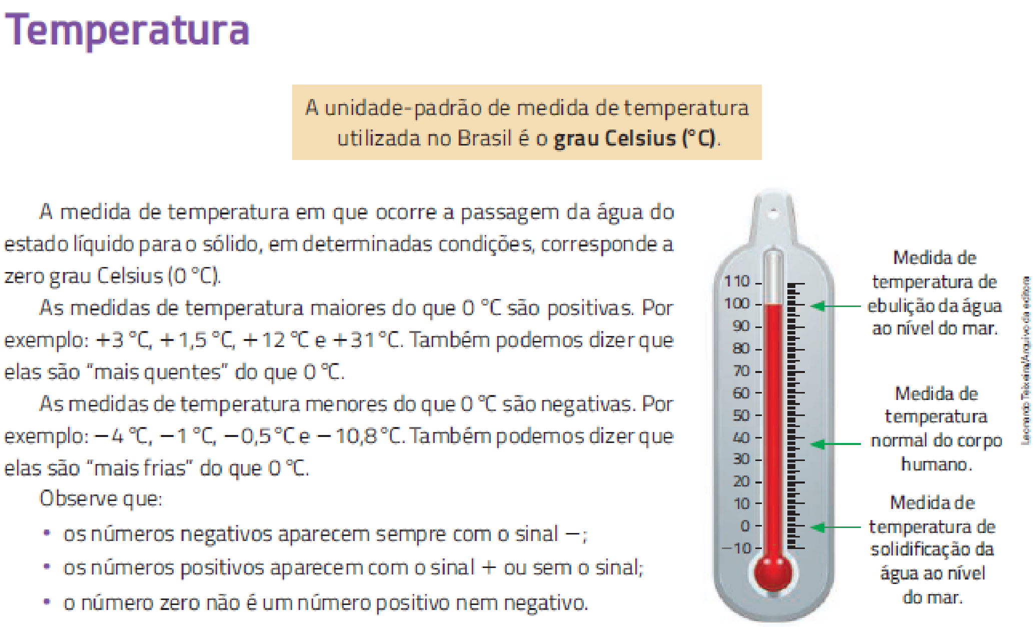
Fonte: Dante (2018, p.10)

Em seguida, a obra, por meio da exibição de um calendário, um folheto de promoção de uma camisa e a informação de que a Terra tem $\frac{3}{4}$ da superfície coberta de água, questiona que tipos de números são esses e informa que eles podem vir acompanhados com sinais positivos e negativos.

Portanto, o livro procura evidenciar a utilização dos números negativos de uma forma expositiva e dialógica. Nesse tipo de estratégia, o aluno é mais passivo do que ativo no processo do conhecimento. Pesquisas neurocientíficas evidenciam que é mais eficiente o aprendizado conceitual em processos de ensino ativo do que o tradicional, em que o aluno é passivo.

No item 1, “Explorando a ideia de número positivo e de número negativo”, o autor traz pequenos textos que tratam sobre o funcionamento do termômetro, altitude, fuso horário civil e valor monetário, bem como coloca 13 questões que envolvem esses temas. Assim, o propósito é identificar, representar e compreender os números inteiros em situações cotidianas, como pode ser verificado nas Figuras 29 e 30. Mostrar aos estudantes a utilização dos números negativos em situações reais evidencia a importância desse assunto, e isso estimula o aprendizado.

Figura 29 – Temperatura


Temperatura

A unidade-padrão de medida de temperatura utilizada no Brasil é o **grau Celsius (°C)**.

A medida de temperatura em que ocorre a passagem da água do estado líquido para o sólido, em determinadas condições, corresponde a zero grau Celsius (0 °C).

As medidas de temperatura maiores do que 0 °C são positivas. Por exemplo: +3 °C, +1,5 °C, +12 °C e +31 °C. Também podemos dizer que elas são "mais quentes" do que 0 °C.

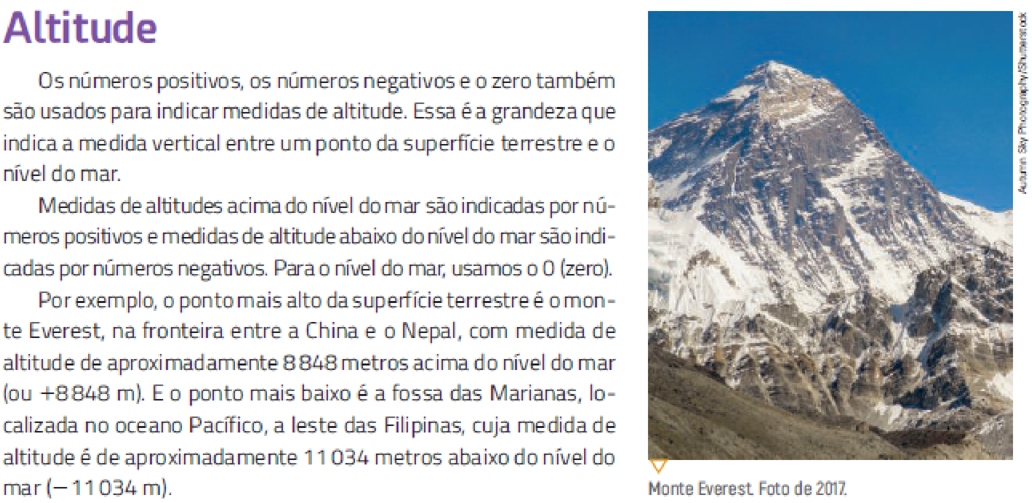
As medidas de temperatura menores do que 0 °C são negativas. Por exemplo: −4 °C, −1 °C, −0,5 °C e −10,8 °C. Também podemos dizer que elas são "mais frias" do que 0 °C.

Observe que:

- os números negativos aparecem sempre com o sinal −;
- os números positivos aparecem com o sinal + ou sem o sinal;
- o número zero não é um número positivo nem negativo.

Fonte: Dante (2018, p.12)

Figura 30 – Altitude


Altitude

Os números positivos, os números negativos e o zero também são usados para indicar medidas de altitude. Essa é a grandeza que indica a medida vertical entre um ponto da superfície terrestre e o nível do mar.

Medidas de altitudes acima do nível do mar são indicadas por números positivos e medidas de altitude abaixo do nível do mar são indicadas por números negativos. Para o nível do mar, usamos o 0 (zero).

Por exemplo, o ponto mais alto da superfície terrestre é o monte Everest, na fronteira entre a China e o Nepal, com medida de altitude de aproximadamente 8 848 metros acima do nível do mar (ou +8 848 m). E o ponto mais baixo é a fossa das Marianas, localizada no oceano Pacífico, a leste das Filipinas, cuja medida de altitude é de aproximadamente 11 034 metros abaixo do nível do mar (−11 034 m).

Monte Everest. Foto de 2017.

Fonte: Dante (2018, p.14)

No boxe "Você Sabia?", um texto fala sobre sensação térmica (Figura 31). O professor pode elaborar uma atividade com os alunos de medição de temperatura do ambiente e calcular a sensação térmica. Acredita-se que essa atividade iria despertar o interesse do aluno e evidenciar a necessidade dos números negativos.

Figura 31 – Sensação térmica

Você sabia?

Sensação térmica: você já ouviu falar nisso?

Sensação térmica é um fenômeno que resulta da percepção do vento com a temperatura. Considere, por exemplo, que os termômetros meteorológicos estejam registrando uma medida de temperatura *t* de 10 °C. Se a medida de velocidade *v* dos ventos for de 7 km/h, então a medida de sensação térmica *s*, ou seja, a medida de temperatura que nosso corpo "sente", será de 9 °C; com ventos a 40 km/h, a medida de sensação térmica será de −1 °C; se estiver ventando a 79 km/h, então a medida de sensação térmica será de −4 °C. Veja outros exemplos nesta tabela.

Relação entre a temperatura e o vento que resulta na sensação térmica

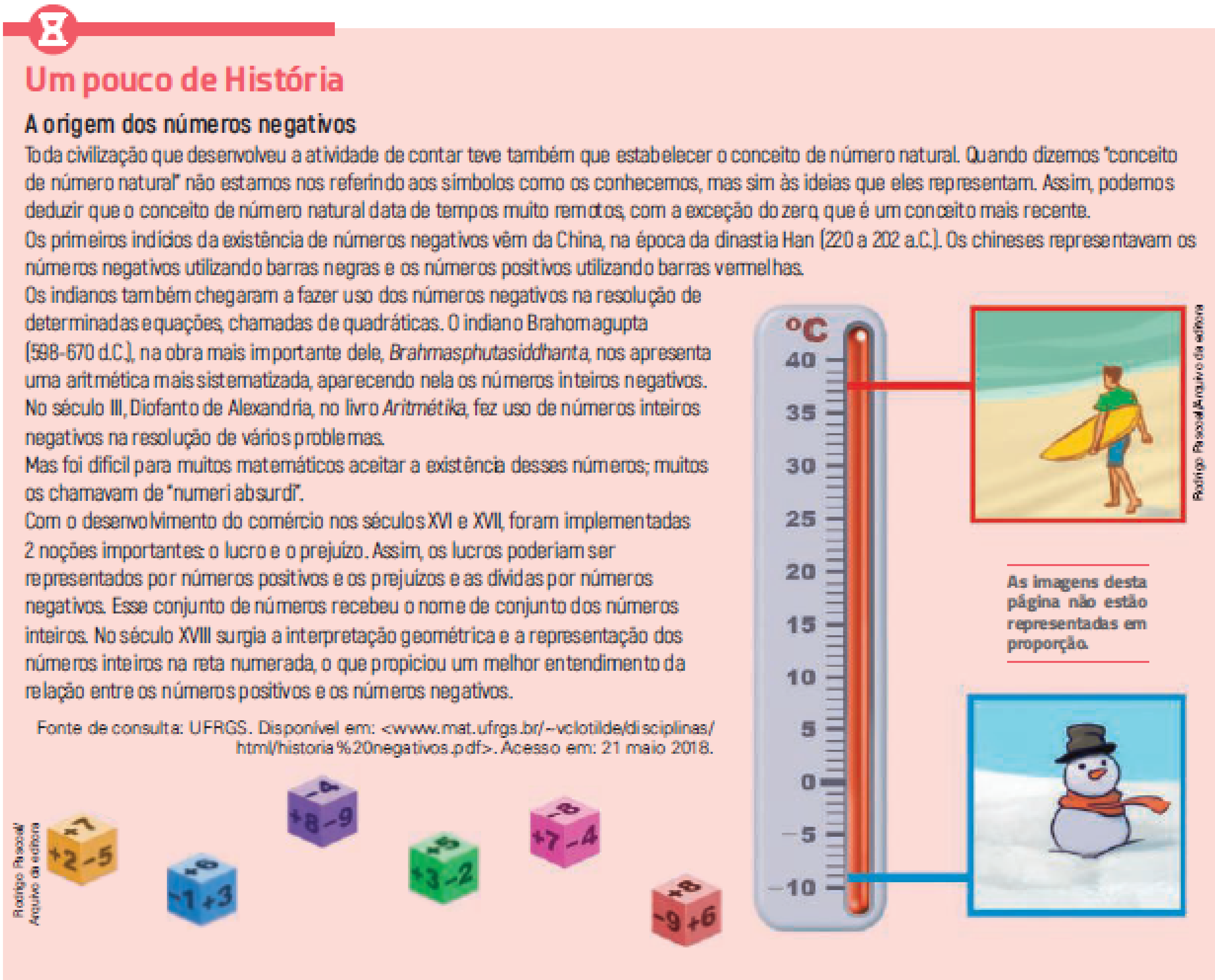
t (em °C)	*v* (em km/h)	*s* (em °C)
−5	7	−6
−5	40	−23
−5	79	−28
0	7	−1
0	40	−16
0	79	−20

Fonte de consulta: INFOESCOLA. *Sensação térmica*. Disponível em: <www.infoescola.com/termodinamica/sensacao-termica/>. Acesso em: 21 maio 2018.

Fonte: Dante (2018, p.13)

No boxe "Um pouco de História", a obra conta um pouco da história dos números inteiros e da dificuldade de muitos matemáticos aceitarem os números inteiros (Figura 32), assim como enfatiza a necessidade desses números para contabilizar lucro x prejuízo. Isso é muito importante, pois os alunos entendem um pouco mais do surgimento dos números, além de verificar que as ideias desse número tiveram resistência pelos matemáticos, logo seria normal a não compreensão imediata de tal assunto.

Figura 32 – Um pouco de História



Um pouco de História

A origem dos números negativos

Toda civilização que desenvolveu a atividade de contar teve também que estabelecer o conceito de número natural. Quando dizemos "conceito de número natural" não estamos nos referindo aos símbolos como os conhecemos, mas sim às ideias que eles representam. Assim, podemos deduzir que o conceito de número natural data de tempos muito remotos, com a exceção do zero, que é um conceito mais recente.

Os primeiros indícios da existência de números negativos vêm da China, na época da dinastia Han (220 a 202 a.C.). Os chineses representavam os números negativos utilizando barras negras e os números positivos utilizando barras vermelhas.

Os indianos também chegaram a fazer uso dos números negativos na resolução de determinadas equações, chamadas de quadráticas. O indiano Brahomagupta (598-670 d.C.), na obra mais importante dele, *Brahmasphutasiddhanta*, nos apresenta uma aritmética mais sistematizada, aparecendo nela os números inteiros negativos.

No século III, Diofanto de Alexandria, no livro *Aritmétika*, fez uso de números inteiros negativos na resolução de vários problemas.

Mas foi difícil para muitos matemáticos aceitar a existência desses números; muitos os chamavam de "numeri absurdi".

Com o desenvolvimento do comércio nos séculos XVI e XVII, foram implementadas 2 noções importantes: o lucro e o prejuízo. Assim, os lucros poderiam ser representados por números positivos e os prejuízos e as dívidas por números negativos. Esse conjunto de números recebeu o nome de conjunto dos números inteiros. No século XVIII surgia a interpretação geométrica e a representação dos números inteiros na reta numerada, o que propiciou um melhor entendimento da relação entre os números positivos e os números negativos.

Fonte de consulta: UFRGS. Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/historia%20negativos.pdf>. Acesso em: 21 maio 2018.

Fonte: Dante (2018, p.16)

No item 2, "O conjunto dos números inteiros", o autor exibe o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números negativos e conclui que o conjunto dos números inteiros é a união do conjunto dos naturais com os negativos (Figura 33).

Figura 33 – Conjunto dos números inteiros

2 O conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números naturais é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Como as representações 2 e +2 têm o mesmo significado, o conjunto dos números naturais também pode ser escrito desta maneira:

$$\mathbb{N} = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots\}$$

Dizemos que os números naturais correspondem aos números inteiros positivos com o zero.

Observe agora o conjunto dos números inteiros negativos:

$$\{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Reunindo os números naturais com os números inteiros negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros**, que é representado assim:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

ou assim:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots\}$$

Observe que -4 é um elemento de $\mathbb{Z}$, mas não é um elemento de $\mathbb{N}$. Dizemos que:

- -4 **pertence** ao conjunto $\mathbb{Z}$ e representamos isso por $-4 \in \mathbb{Z}$;
- -4 **não pertence** ao conjunto $\mathbb{N}$ e representamos isso por $-4 \notin \mathbb{N}$.

Você sabia?

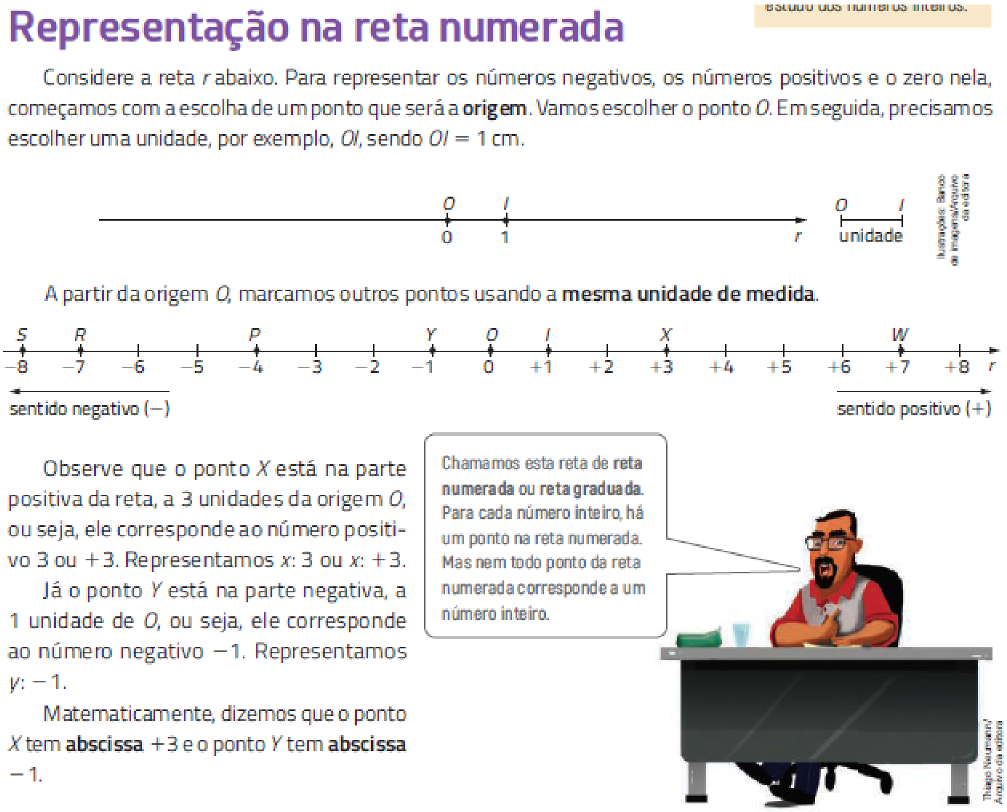
A letra **Z** é a inicial da palavra **zahl**, que significa 'número' em alemão.
Uma curiosidade é que **Z** é também a primeira letra do sobrenome do matemático alemão Ernst Zermelo (1871-1953), que se dedicou ao estudo dos números inteiros.

Fonte: Dante (2018, p.17)

A obra tem a intenção de mostrar o conjunto dos inteiros como a expansão dos conjuntos naturais. Isso possibilita uma compreensão mais natural do conjunto dos números inteiros.

Em seguida, no subitem "Representação na reta numérica", o livro explica o procedimento de construção da reta e fala da abscissa de um ponto (Figura 34) e propõe 10 questões envolvendo as definições de conjunto de números naturais e inteiros, bem como a reta numérica.

Figura 34 – Representação na reta numerada



Representação na reta numerada

Considere a reta *r* abaixo. Para representar os números negativos, os números positivos e o zero nela, começamos com a escolha de um ponto que será a **origem**. Vamos escolher o ponto *O*. Em seguida, precisamos escolher uma unidade, por exemplo, *OI*, sendo *OI* = 1 cm.

A partir da origem *O*, marcamos outros pontos usando a **mesma unidade de medida**.

Observe que o ponto *X* está na parte positiva da reta, a 3 unidades da origem *O*, ou seja, ele corresponde ao número positivo 3 ou +3. Representamos *x*: 3 ou *x*: +3.

Já o ponto *Y* está na parte negativa, a 1 unidade de *O*, ou seja, ele corresponde ao número negativo −1. Representamos *y*: −1.

Matematicamente, dizemos que o ponto *X* tem **abscissa** +3 e o ponto *Y* tem **abscissa** −1.

Fonte: Dante (2018, p.17)

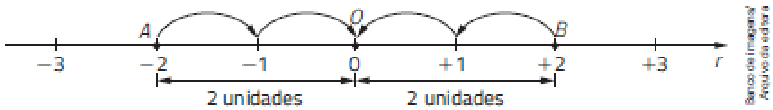
Observa-se que o livro não aborda a reta numérica dos números inteiros como extensão da reta dos números naturais, além de não explorar as várias posições que a reta pode ter, isto é, horizontal, vertical e inclinada, assim como os sentidos do crescimento ou decrescimento que precisa ser atribuído a reta.

O próximo subitem, “Módulo ou valor absoluto de um número inteiro”, define o módulo de um número inteiro como a distância entre o ponto que representa esse número e a origem reta numerada (Figura 35). Depois coloca seis questões que abordam esse assunto.

Figura 35 – Módulo ou valor absoluto de um número inteiro

Módulo ou valor absoluto de um número inteiro

Observe esta reta numerada.



A medida de distância entre o ponto *A* (que representa o −2) e a origem é de 2 unidades.

O número 2, que expressa a medida de distância entre *A* e a origem *O*, é chamado de **módulo** ou **valor absoluto** do número inteiro −2. Indicamos assim: $|-2| = 2$ e lemos: módulo de menos dois é igual a dois.

Observe que a medida de distância entre o ponto *B* (que representa o +2) e a origem também é de 2 unidades, ou seja, o módulo ou o valor absoluto de +2 também é 2. Simbolicamente: $|+2| = 2$.

Chamamos de **módulo** ou **valor absoluto** de um número inteiro a medida de distância entre o ponto que representa esse número e a origem da reta numerada. O módulo de um número inteiro diferente de 0 (zero) é sempre positivo.

Veja outros exemplos.

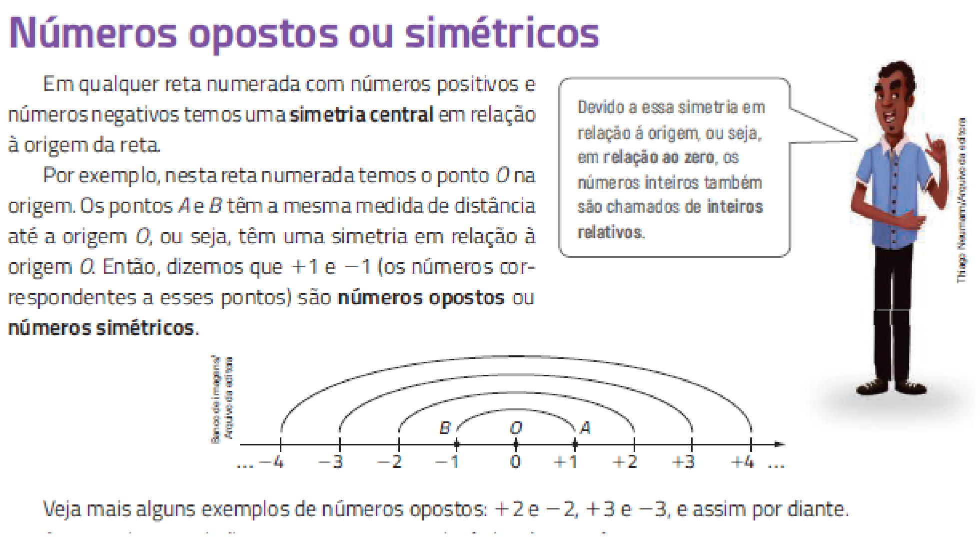
- O valor absoluto de −3 é 3, ou seja, $|-3| = 3$.
- O módulo de +9 é 9, ou seja, $|+9| = 9$.
- O módulo de 0 (zero) é 0, ou seja, $|0| = 0$.
- O valor absoluto de −20 é 20, ou seja, $|-20| = 20$.
- $|+11| = 11$
- $|-16| = 16$
- $|16| = 16$
- $|33| = 33$
- $|-41| = 41$
- $|-39| = 39$
- $|+28| = 28$
- $|+3| + |-2| = 3 + 2 = 5$
- $|-7| + |-8| = 7 + 8 = 15$

Fonte: Dante (2018, p.18)

A forma que é tratado o módulo vem sem significado nenhum. Parece uma definição perdida no conteúdo de números inteiros em que o aluno precisa mudar o sinal do número negativo se ele estiver entre duas barras $||$. O livro define como distância, mas os exemplos e os exercícios só exigem que o aluno faça a troca de sinal se for negativo. A própria simbologia não ajuda: uma opção seria se, ao invés de utilizar assim $|-3|$, utilizasse desta forma $|-3-0|$ e $|0-(-3)|$. Uma outra solução seria deslocar essa definição para depois das operações com números inteiros para ser abordada de uma forma mais completa, como a distância entre dois números inteiros, no qual um não se conhece.

O último subitem desse capítulo, "Números oposto ou simétricos", define o que é o número simétrico ou oposto, evidencia o zero como referencial, bem como trata o sinal negativo como operação de oposto (Figura 36). Isso é muito importante ser destacado, pois são significados novos que o estudante ainda não está familiarizado.

Figura 36 – Número opostos ou simétricos



Fonte: Dante (2018, p.20)

Depois disso, coloca duas questões sobre o assunto. No subitem "Comparação de números inteiros", o livro começa relembrando o significado dos sinais $<, >$ e $=$. Por meio de tirinhas (Figura 37), coloca para o estudante como fazer comparação de números inteiros utilizando situações como crédito e débito, altitude, temperatura e reta numérica, uma na vertical e outra na horizontal. Além de colocar nove questões para explorar mais o assunto.

Figura 37 – Tirinha envolvendo comparação

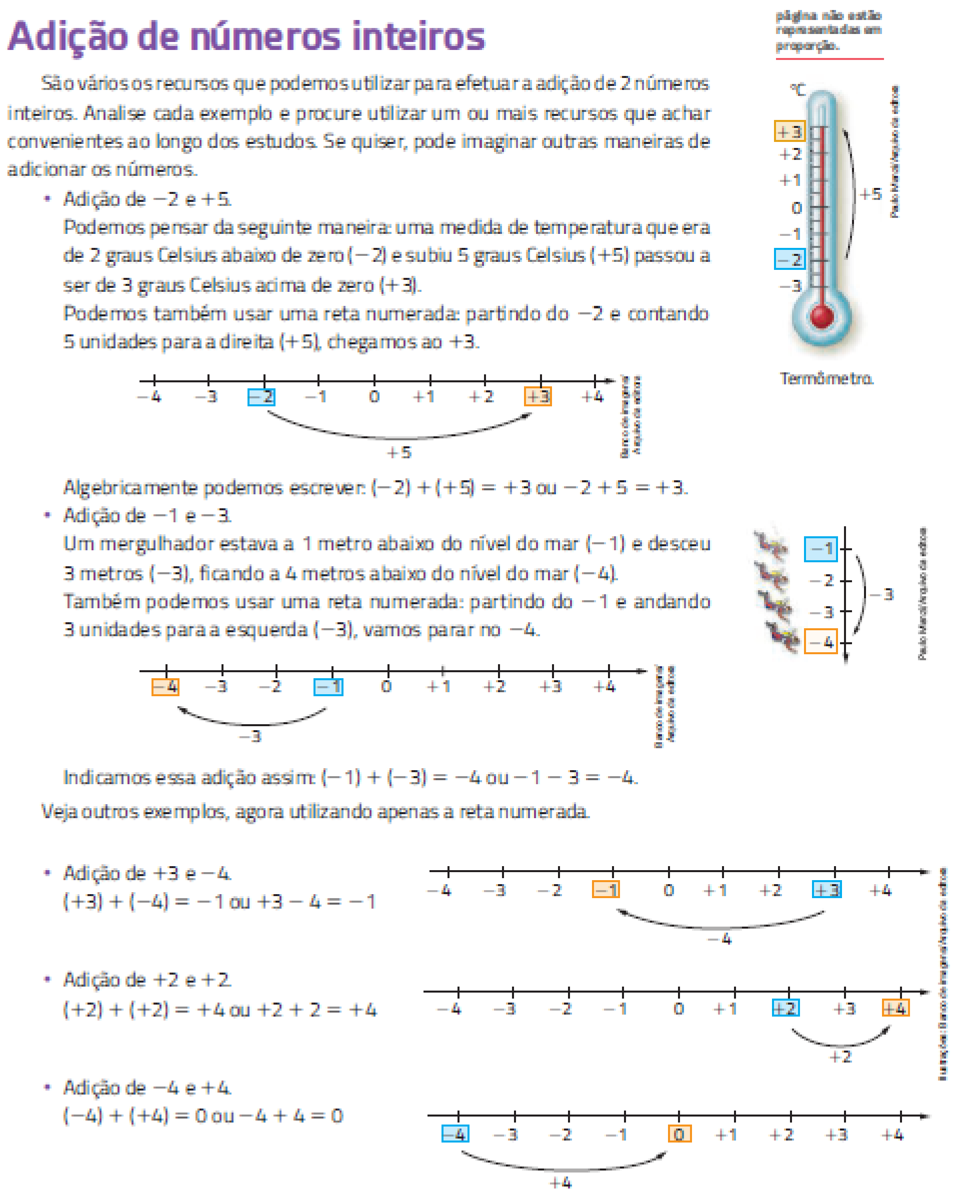
Fonte: Dante (2018, p.21)

Quando o estudante pensa numa situação real que envolve números inteiros, isso facilita a comparação. Assim, fica mais fácil o entendimento do assunto e sua importância devido a sua utilização no dia a dia.

O subitem 4, "Operações com números inteiros", está dividido em cinco partes: Adição de números inteiros; Subtração de números inteiros; Multiplicação de números inteiros; Divisão de números Inteiros; Potenciação: número inteiro na base e número natural no expoente.

Na adição de números inteiros, utiliza-se a situação do cotidiano, como temperatura, profundidade e a reta numérica. O livro passa da escrita completa para a escrita algébrica em todos os exemplos, conforme a Figura 38.

Figura 38 – Adição de números inteiros



Fonte: Dante (2018, p.23)

O livro tem o cuidado de utilizar bastantes situações do cotidiano com o objetivo de não só o aluno perceber a importância do conteúdo para a vida em sociedade, como também facilitar a compreensão do mesmo. Na passagem da escrita completa para a adição algébrica, o livro sugere para o professor utilizar a definição de número oposto.

Em seguida, o livro coloca quinze questões para desenvolver o conceito abordado. Nessas questões, tem proposta individual, em dupla e em grupo, além de tentar mostrar algumas estratégias para o cálculo da adição. Percebe-se que o livro tenta utilizar um pouco da metodologia de Resolução de Problemas, porém, devido à limitação do próprio recurso, não consegue atender os requisitos dessa metodologia.

Na subtração de números inteiros, a obra começa mostrando que antes, só com os números naturais, não se podia fazer várias subtrações. No entanto, com os números inteiros, pode-se fazer todas as subtrações (Figura 39).

Figura 39 – Subtração de números inteiros Teláris

Subtração de números inteiros

Até agora, todas as subtrações com números naturais que você efetuou tinham o primeiro termo (minuendo) maior ou igual ao segundo termo (subtraendo). Veja alguns exemplos.

$7 - 2 = 5$ $\quad 4 - 4 = 0$ $\quad 6 - 3 = 3$ $\quad 10 - 10 = 0$

Algumas subtrações não eram possíveis no conjunto dos números naturais. Por exemplo:

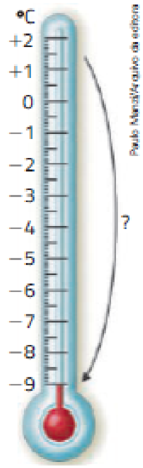
$2 - 5$ $\quad 4 - 9$ $\quad 10 - 12$ $\quad 30 - 80$

Agora, com os números inteiros negativos, sempre podemos efetuar a subtração entre 2 números naturais e também entre quaisquer 2 números inteiros.

Analise as 3 situações a seguir e procure observar a maneira de efetuar a subtração de números inteiros usando a operação inversa.

- Quando uma medida de temperatura passou de $+2$ °C para -9 °C, qual foi a variação?

  Para responder a essa questão, precisamos calcular a diferença entre -9 e $+2$, ou seja, efetuar a subtração $(-9) - (+2)$. Usando a operação inversa, podemos descobrir qual é o número cuja adição com $(+2)$ resulta em (-9). Esse número é o -11, pois $(-11) + (+2) = -9$. Logo, $(-9) - (+2) = -11$ e, então, a temperatura baixou 11 °C.



Termômetro.

Fonte: Dante (2018, p.26)

Posteriormente, o livro mostra como se calcula a variação de temperatura e o deslocamento do elevador, então, resolve a subtração utilizando a operação inversa da adição, bem como faz o cálculo da subtração por meio da soma do oposto (Figura 40).

Figura 40 – Cálculo de variação e deslocamento

$$(-9) \underbrace{- (+2)}_{\text{Oposto de } +2,\ \text{que é } -2.} = -9 - 2 = -11$$

Variação de temperatura

$$(-1) \underbrace{- (+4)}_{\text{Oposto de } +4,\ \text{que é } -4.} = -1 - 4 = -5$$

Deslocamento do elevador

Conclusão

Relacionando as subtrações efetuadas, podemos escrevê-las da seguinte maneira.

$$(-9) - (+2) = (-9) + (-2) = -9 - 2 = -11$$
$$(-1) - (+4) = (-1) + (-4) = -1 - 4 = -5$$

Fonte: Dante (2018, p.26 e 27)

Observa-se que na conclusão o livro colocou uma etapa a mais do que os exemplos, e isso ficou um pouco confuso. Nos exemplos, ele utilizou a definição de oposto que tinha dado anteriormente. E na conclusão quis evidenciar a operação de adição. Porém, não era necessária, pois, nas operações de adição, o livro colocou a notação algébrica resumida nos exemplos, o que permite o entendimento da subtração como adição do número oposto.

Na versão do livro do professor, propõe-se o jogo de tabuleiro, o mesmo colocado no início da unidade número inteiros do livro *A Conquista da Matemática*. Esse jogo, colocado após a abordagem da operação de adição, perde o sentido de provocar a descoberta de como se faz a adição de números inteiros. Os estudantes, ao jogá-lo, só irão praticar adição com números inteiros.

Depois, são colocadas quatro atividades utilizando calculadora, e mais seis questões para treinar a operação de subtração.

Diferentemente da adição, as questões abordadas na subtração são para o aluno repetir os mesmos raciocínios abordados nos exemplos, ou seja, o aluno não precisa investigar para resolver o exercício, só é necessário aplicar a forma que o livro abordou.

Em seguida, o livro coloca um texto que fala sobre a cidade Campos do Jordão, nele são mencionadas as temperaturas média, mínima e máxima da cidade. Assim, o livro propõe três questões que envolvem o cálculo de variação de temperatura e uma questão de interpretação do texto. No livro do professor, ele sugere que seja feita uma escala termométrica e que os alunos localizem as temperaturas da cidade. O texto é interessante, conta um pouco da história da cidade e do clima. O professor de matemática pode abordar a questão da média das temperaturas. O que isso significa? Como é calculada? Além de trabalhar junto com o professor de Geografia e de Ciências outras partes do texto.

Na parte da multiplicação de números inteiros, a obra coloca a seguinte Tabela 2 para o aluno preencher:

Tabela 2 – Multiplicação dos números inteiros

$\times$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
$+3$	$+9$						
$+2$							
$+1$							
0							
-1							
-2							
-3							

Fonte: Dante (2018, p.30)

Por meio do preenchimento da tabela, observando a regularidade que os números aparecem nas linhas e colunas, o aluno deve chegar nas seguintes conclusões:

- a multiplicação entre números inteiros positivos resultou em um número inteiro positivo;
- em uma multiplicação em que um fator é um número inteiro positivo e o outro é zero, o resultado é sempre zero;

- ao observar a sequência dos números nas células amarelas e laranja, deve-se concluir que o resultado de uma multiplicação de 2 números inteiros com sinais diferentes é negativo por meio do preenchimento das células azuis e
- ao preencher as células verdes, o estudante conclui que na multiplicação de dois números inteiros negativos o resultado é positivo.

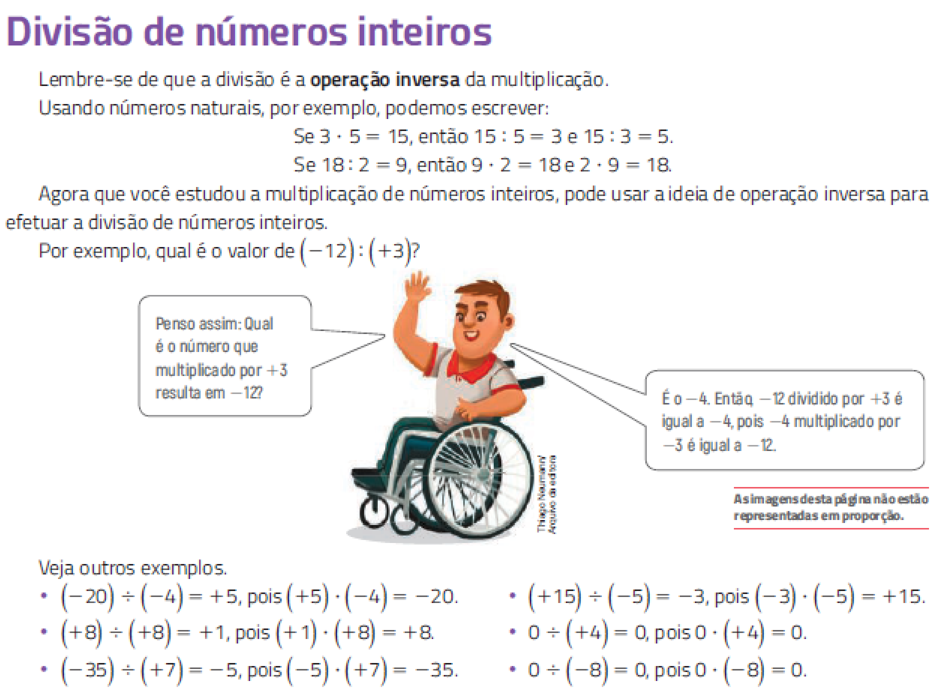
Dessa forma, o livro utilizou a estratégia de ensinar matemática através da resolução de problemas. Inicialmente, o aluno resolve o problema e, por meio da resolução do problema, ele conjectura e chega em alguns fatos matemáticos.

Em seguida, coloca dez exercícios para fixar as conclusões que o aluno chegou anteriormente.

Observa-se que, na adição e subtração de números inteiros, o livro procurou utilizar a ideia de número oposto, porém, na multiplicação, ele recorre à observação de uma tabela e o seu padrão, mas ele poderia explicitar a multiplicação como soma repetida e utilizar a ideia de número oposto para continuar o raciocínio adquirido nas operações de adição e subtração. Isso poderia ajudar a compreensão de alguns alunos que entenderam bem essa ideia.

Por fim, na "Divisão de números inteiros", o livro coloca que a divisão é o inverso da multiplicação, assim o sinal do resultado da divisão pode ser obtido pensando na multiplicação, conforme figura 41. Observa-se um erro de digitação no segundo balão, onde se lê: pois -4 multiplicado por -3 é igual a -12, o correto é +3.

Figura 41 – Divisão de números inteiros Teláris



Divisão de números inteiros

Lembre-se de que a divisão é a **operação inversa** da multiplicação.

Usando números naturais, por exemplo, podemos escrever:

Se $3 \cdot 5 = 15$, então $15 : 5 = 3$ e $15 : 3 = 5$.

Se $18 : 2 = 9$, então $9 \cdot 2 = 18$ e $2 \cdot 9 = 18$.

Agora que você estudou a multiplicação de números inteiros, pode usar a ideia de operação inversa para efetuar a divisão de números inteiros.

Por exemplo, qual é o valor de $(-12) : (+3)$?

Veja outros exemplos.

- $(-20) \div (-4) = +5$, pois $(+5) \cdot (-4) = -20$.
- $(+8) \div (+8) = +1$, pois $(+1) \cdot (+8) = +8$.
- $(-35) \div (+7) = -5$, pois $(-5) \cdot (+7) = -35$.
- $(+15) \div (-5) = -3$, pois $(-3) \cdot (-5) = +15$.
- $0 \div (+4) = 0$, pois $0 \cdot (+4) = 0$.
- $0 \div (-8) = 0$, pois $0 \cdot (-8) = 0$.

Fonte: Dante (2018, p.32)

A obra teve o cuidado de estabelecer dois procedimentos parecidos: um para adição e subtração, o outro para multiplicação e divisão.

O estudante, para decidir o sinal dos resultados da adição, deve pensar em temperatura, altitude, saldo bancário ou reta numérica. Em função da subtração ser a operação inversa da adição, estabelece o resultado empregando a adição. Também pode-se utilizar o sinal - ”como a operação do número oposto, o que torna a subtração uma adição com o número oposto.

Na multiplicação, o estudante deve lembrar da tabela que elaborou e das regras que chegou. Utilizar novamente a ideia de operação inversa na divisão, como a multiplicação é operação inversa da divisão, então a divisão possui as mesmas regras da multiplicação. Esse procedimento de não só utilizar dois modos de pensar nas quatros operações, mas também colocar estruturas matemáticas como função inversa para compreender as operações, proporcionam um ensino mais efetivo dos números inteiros.

Porém, o ideal é utilizar um só procedimento que envolva estruturas matemáticas, por exemplo, operação inversa, a multiplicação como adição repetida e a operação do número oposto.

Em resumo, a obra é boa porque coloca para o estudante o conjunto dos números inteiros com expansão do conjunto dos números naturais; evidencia o zero como referencial na reta numérica; trabalha o sinal -”como subtração e oposto do número; e procura um procedimento mais simplificado para as quatros operações.

Entretanto, o livro não aborda a reta numérica dos inteiros como expansão da reta dos números naturais, nem as várias formas de ser apresentada: horizontal, vertical e inclinada.

Portanto, os livros analisados, *A Conquista da Matemática* e *Teláris*, são expositivos, isto é, eles mostram ao estudante qual é o procedimento que deve ser aplicado em algumas situações para resolver as questões propostas. Assim, as obras se adequam mais facilmente na categoria de ensinar matemática para resolver problemas. E começar a abordagem dos números inteiros dessa forma expositiva tira toda a descoberta matemática do estudante, já que a matemática se torna um conjunto de regras que precisam ser decoradas.

Com o objetivo de evitar essa concepção dos estudantes de que a matemática é só um conjunto de regras que devem ser memorizadas, para ter um aprendizado mais ativo, o docente deve começar o ensino dos números inteiros com a categoria de ensinar matemática por meio de resolução de problemas.

Para isso, inicialmente o uso dos livros didáticos deve ser como fonte de problemas que proporcionem o entendimento dos conceitos ou elaboração de algoritmos. Observou-se que algumas questões propostas no livro com pequenas modificações se adequam perfeitamente nessa categoria, além de no livro do professor ter algumas sugestões de atividades que podem ser utilizadas para esse fim.

Portanto, os livros didáticos podem ser usados na metodologia de Resolução de Problemas, mas o professor precisa analisar qual o momento e de qual forma irá utilizá-lo.

4 PROPOSTA PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS NAS ESCOLAS, BASEADA NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Preliminarmente, a sequência de atividades da proposta tem como objetivo trabalhar os seguintes objetos de conhecimento e habilidades da BNCC:

- habilidades trabalhadas
  - (EF07MA03) comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração;
  - (EF07MA04) resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
- objeto de conhecimento: números inteiros:
  - usos;
  - história;
  - ordenação;
  - associação com pontos da reta numérica e
  - operações.

A proposta compreende cinco atividades. Sugere-se que a primeira atividade seja o início da abordagem dos números inteiros com os alunos, em sala de aula. No Estado do Espírito Santo se dá no 7º ano. Ela envolve o simulador que proporciona a introdução dos números inteiros. Na segunda, terceira, quarta e quinta atividades são usados dois modelos concretos para fazer as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros, respectivamente.

O uso desses modelos concretos envolve, segundo Almiro[1] (2004 apud OLIVEIRA 2020), a utilização de vários sentidos, sobretudo o tato e a movimentação física, o que auxilia a aprendizagem. Também leva a uma representação concreta de ideias abstratas, o que facilita a compreensão do conteúdo. Tal variação de abordagem na sala de aula proporciona uma aula mais interessante aos alunos.

A primeira, segunda e terceira atividade foram aplicadas na EMEF Santa Cruz, por meio da ferramenta *Google Meet*. Para tanto teve-se que fazer algumas adaptações, que serão descritas a seguir, em decorrência da pandemia COVID-19 e do subsequente isolamento social. Porém, vale ressaltar que o resultado foi satisfatório.

[1] ALMIRO, J. **Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática**. Consultado em maio, v. 28, p. 2009, 2004.

4.1 Primeira atividade

Na atividade se utiliza o PhET *interactive simulation*[2] desenvolvido pela Universidade do Colorado. Nele estão disponíveis diversos simuladores (na atividade se utilizará o simulador de Linhas numéricas: inteiros). Optou-se por utilizar esse simulador porque graficamente ele está bastante atraente e adaptou-se perfeitamente à metodologia Resolução de Problemas, pois, por meio das indagações que serão feitas aos estudantes, eles irão compreender os conceitos e o docente poderá formalizá-los.

Além da adequação do simulador às demandas das atividades, o uso da tecnologia também envolve, de acordo com Schultz (1994 apud FERREIRA, 2007, p. 52 e 53),

> [...] um impacto no currículo de Matemática em pelo menos quatro vertentes:
> (a) Facilitar os cálculos, podendo assim utilizar-se dados reais nos problemas;
> (b) Facilitar a aprendizagem de conceitos;
> (c) Suscitar a necessidade de aprender novos conceitos;
> (d) Adquirir novas capacidades.

Dessa forma, o simulador facilita o aprendizado dos números inteiros ao possibilitar aos estudantes vivenciar a utilização do mesmo no contexto do cotidiano que relaciona altitude e profundidade, assim como dinamiza a experimentação com as posições de figuras animadas tomando como referencial o nível do mar (Figura 42).

Figura 42 – Simulador

Fonte: site PHET[3].

Por conseguinte, por meio da exploração da relação de posição, a atividade permite não só despertar o interesse dos alunos pelo conteúdo dos números inteiros por meio da

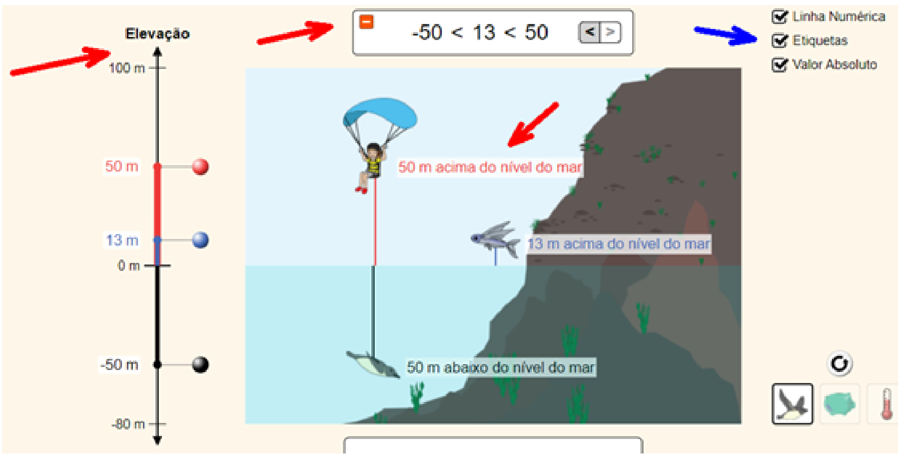
[2] **PHET**. Linha Numérica: Inteiros Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_pt_BR.html> Acesso em 23 de jun. 2021.

aplicação de situações do cotidiano, como também de ampliar o campo numérico dos naturais para o dos inteiros, utilizando a relação de altitude e profundidade. Além disso, viabiliza definição de forma intuitiva do que é o número oposto, o módulo do número, o zero como referencial e as associações do conjunto dos números inteiros com pontos da reta numérica.

4.1.1 Execução da atividade

No que diz respeito à execução da atividade com os alunos, esconda todas as informações, como linha numérica, etiquetas e valor absoluto, antes de começar a atividade com os alunos. Para isso clique nas caixas seletoras indicadas pela seta azul, conforme demonstrado na Figura 43.

Figura 43 – Escondendo as informações do simulador



Fonte: site PHET[4].

Questão 1: Estime a elevação da montanha, considerando que o nível do mar é zero.

Nesse momento, o docente pode relembrar o que é medir, isto é, medir é comparar e precisamos determinar uma unidade de medida. Pode-se sugerir como unidade de medida a altura deles. Durante a execução da atividade com os alunos, eles utilizaram o metro como unidade. Em seguida, perguntou-se: qual era a dimensão do metro? Alguns responderam que era 100, outros, 1000. Então, indagou-se se o metro era maior ou menor que eles e todos afirmaram que era menor. Percebeu-se que eles tinham uma noção de qual é a dimensão do metro.

Posteriormente a esse debate, deve-se determinar a elevação da montanha de acordo com as respostas dos estudantes. Em seguida, coloque a menina em cima da montanha e peça para os discentes darem o nome à menina. Depois coloque a boneca um pouco

[4] **PHET**. Linha Numérica: Inteiros Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_pt_BR.html> Acesso em 23 de jun. 2021.

abaixo da altitude da montanha e peça para eles estimarem a elevação da menina em relação ao nível do mar (Figura 44).

Figura 44 – Posição da menina em relação ao nível do mar

Fonte: site PHET[5].

Questão 2. Quais são os valores da elevação em relação ao nível do mar depois que ela salta? Aumenta ou diminui comparado com o valor estimado da montanha? À medida que ela se aproxima do nível do mar a elevação aumenta ou diminui?

Questão 3. Qual a altitude dela no nível do mar?

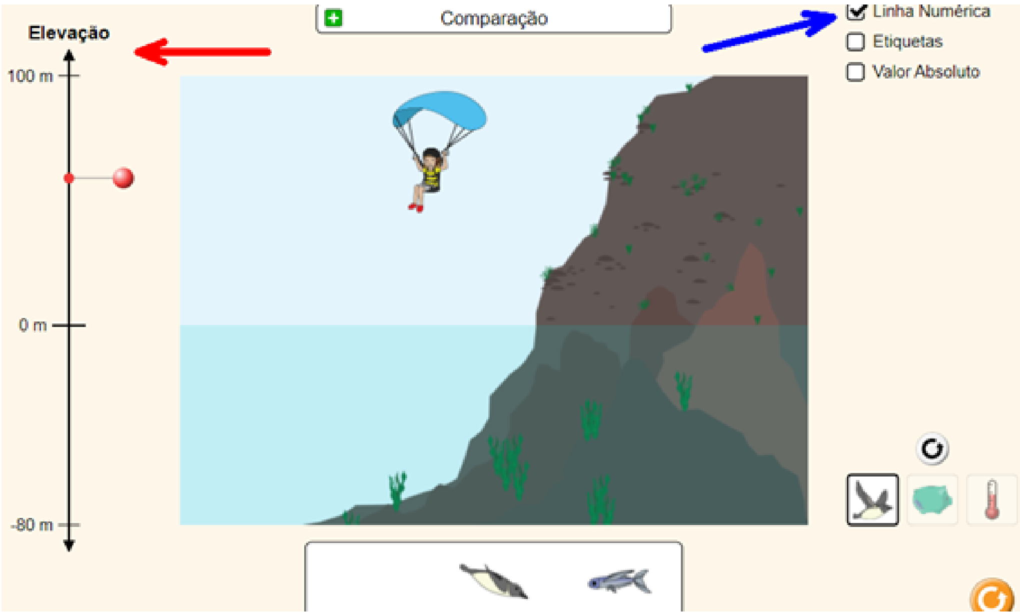
Questão 4. Qual é a elevação da menina quando ela está mergulhando?

A intenção é chegar no uso de números negativos. Após a resposta deles, falar um pouco da história dos números. Por exemplo, "tem-se indícios que o povo chinês já usava, antes de Cristo, notações de números inteiros. Porém, demorou bastante tempo para a comunidade matemática aceitá-los como números".

Logo após, exiba a reta numérica. Para isso clique na caixa seletora Linha Numérica (Figura 45).

[5] **PHET**. Linha Numérica: Inteiros Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_pt_BR.html> Acesso em 23 de jun. 2021.

Figura 45 – Exibição da reta numérica



Fonte: site PHET[6].

Questão 5. Qual região do desenho teria a altitude 50 m? Qual é o procedimento que devemos fazer para encontrar essa altitude?

O propósito das perguntas 5, 6 e 7 é encontrar um procedimento para marcação dos pontos na reta numérica. Na aplicação pelo Meet, os estudantes levantaram a conjectura de que, para marcar os pontos na reta, precisaria ir marcando os pontos médios. Pois está marcado na reta a altura da montanha em 100m e foi solicitado o valor de 50m, então alguns alunos perceberam que 50 era ponto médio de 0 e 100. Essa estratégia é interessante e deve ser valorizada pelo docente, porém, ao aplicá-la, percebeu-se que para marcar o ponto 10m não funcionou porque o ponto médio de 0 e 50 é 25. Em seguida, pegou-se o ponto médio de 0 e 25 e obteve-se 12,5, um número que não é inteiro, dessa forma os estudantes decidiram mudar de estratégia. Isso mostra como a Resolução de Problemas é enriquecedora, já que o tema ponto médio ainda não tinha sido abordado e surgiu de forma natural ao tentar solucionar o problema.

Questão 6. Qual região do desenho seria a altitude de 10m e 5m?

Questão 7. Qual região do desenho devo colocar a elevação de -50m, -10m e -5m?

Tenha em mente que o zero ganha uma função nova, ele não só significa ausência de quantidade como também é o referencial dos números positivos e negativos.

Coloque a menina na altitude de 40, exiba a etiqueta e o valor absoluto, para isso clique nessas caixas seletoras, de acordo com a Figura 46.

[6] **PHET**. Linha Numérica: Inteiros Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_pt_BR.html> Acesso em 23 de jun. 2021.

Figura 46 – Exibição do valor absoluto

Fonte: site PHET[7].

Questão 8. Qual região do desenho devo colocar o pinguim para ele estar oposto à menina?

Explore o conceito de oposto, isto é, oposto a quem e de acordo com qual referencial? Pergunte o oposto de outros números.

Questão 9. Coloque os números -9, 26 e -3 em ordem crescente.

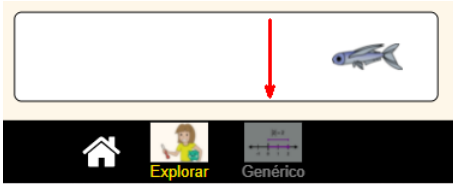
Peça para os estudantes justificarem utilizando a simulação (essa pergunta tem o objetivo de trabalhar a comparação dos números inteiros).

Questão 10. Qual é a distância do peixe ao nível do mar? Tem algum outro lugar acima do nível do mar que tem a mesma distância, que ponto é esse? Falar de módulos (distância).

Explicar que na maioria das vezes a Matemática se desenvolveu para solucionar problemas do cotidiano. No entanto, ela se abstrai da situação concreta e é desenvolvida e posteriormente é novamente aplicada a situações do cotidiano. Então vá para a tela do Genérico, segundo se observa na Figura 47 adiante, e explore mais os conceitos de oposto ou simétrico, módulo e reta numérica.

[7] **PHET**. Linha Numérica: Inteiros Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_pt_BR.html> Acesso em 23 de jun. 2021.

Figura 47 – Ir para tela do Genérico



Fonte: site PHET[8].

Outras atividades que podem ser colocadas para consolidar a representação dos números inteiros na reta numérica, o zero como origem e a ideia de oposição foram retiradas das dissertações de Luna (2019) e de Fantini (2018). A atividade I foi retirada de Luna (2019) e está baseada em Lima e Moisés (1998). As atividades II e IV foram retiradas de Fantini (2018) e foram incluídas a atividade III e o item c na atividade II com o objetivo de estender a localização dos números naturais para os números inteiros.

I) Analisar as situações a seguir e indicar quais são os movimentos possíveis de ocorrer:

a) Movimento de um carro numa estrada. Sugestão de resposta: Os movimentos podem ocorrer em dois sentidos, ida e vinda, aceleração e frenagem, ou seja, todas as forças que empurram o carro para frente e todas as forças que empurram o carro para trás, como o atrito do carro com o solo.

b) Movimento de dinheiro num banco. Sugestão de resposta: Os movimentos podem ocorrer em dois sentidos: dinheiro que tenho (depósito) e dinheiro que retirei (débito ou saque), dinheiro que guardo e dinheiro que gasto.

c) Movimento da temperatura numa região. Sugestão de resposta: O movimento pode ser de frio ou de calor, quente e frio, aumento da temperatura e diminuição da temperatura.

d) Movimento da água num tanque. Sugestão de resposta: A água pode estar entrando ou saindo do tanque, a água que entra pela torneira e a água que é utilizada e sai pelo ralo, tanque recebendo a água e tanque perdendo água, tanque enchendo e tanque esvaziando.

II) A seguir temos as retas numéricas naturais, indique:

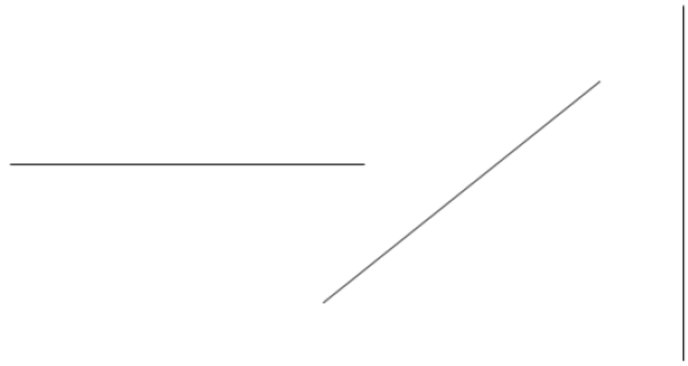
(a) O zero.

(b) Os números de 1 a 5.

(c) Desenhe com uma seta o sentido crescente.

8 **PHET**. Linha Numérica: Inteiros Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_pt_BR.html> Acesso em 23 de jun. 2021.

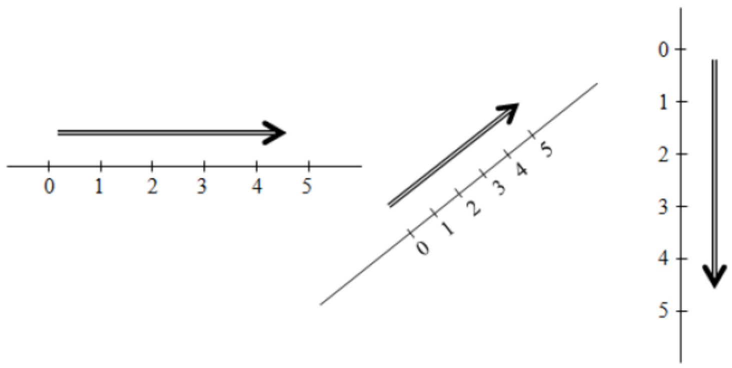
Figura 48 – Atividade II



Fonte: Dissertação Fantini (2018, p.79).

Sugestão de resposta.

Figura 49 – Sugestão de resposta da atividade II



Fonte: Dissertação Fantini (2018, p.79).

III) A seguir temos as retas numéricas de números inteiros, marque:

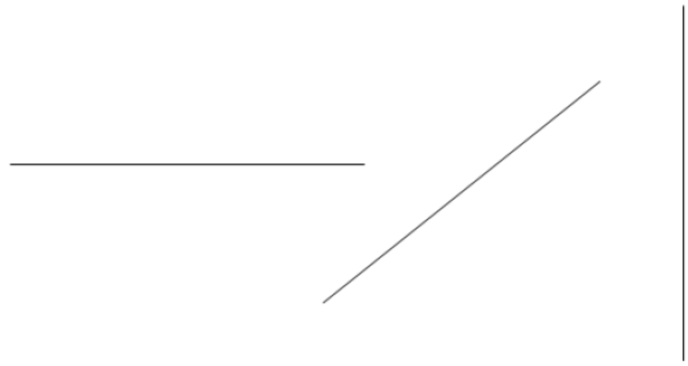
(a) O zero.

(b) Os números de 1 a 5.

(c) os números de -5 a -1.

(d) Desenhe com uma seta o sentido crescente.

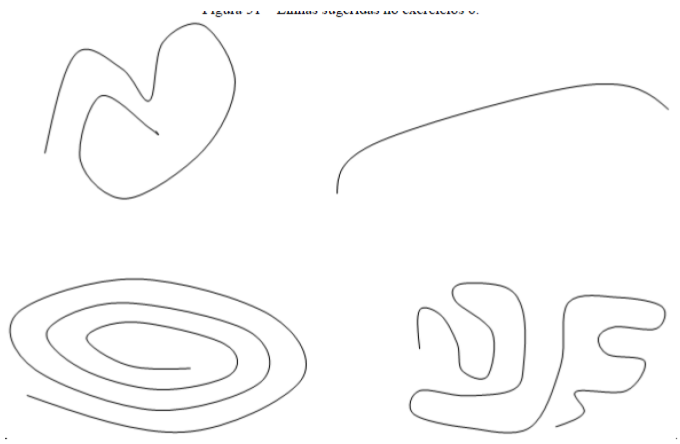
Figura 50 – Atividade III



Fonte: Dissertação Fantini (2018, p.79).

IV) Oriente as linhas a seguir utilizando os números inteiros. Para isso é preciso localizar o zero, marcar a partir dele os números positivos e negativos e indicar, com uma flecha, o sentido crescente.

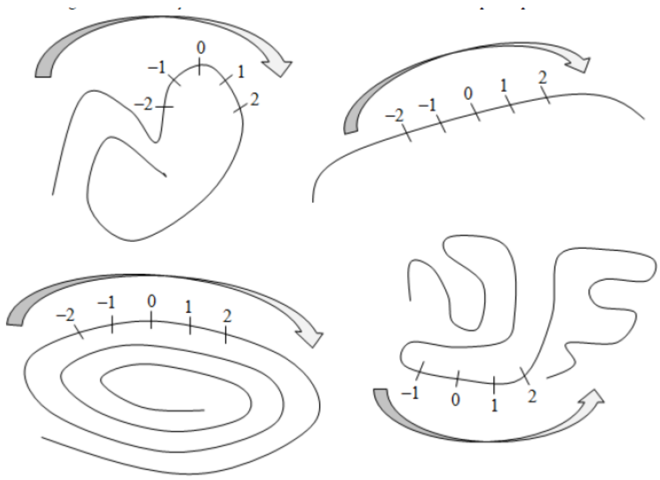
Figura 51 – Atividade IV



Fonte: Dissertação Fantini (2018, p.92).

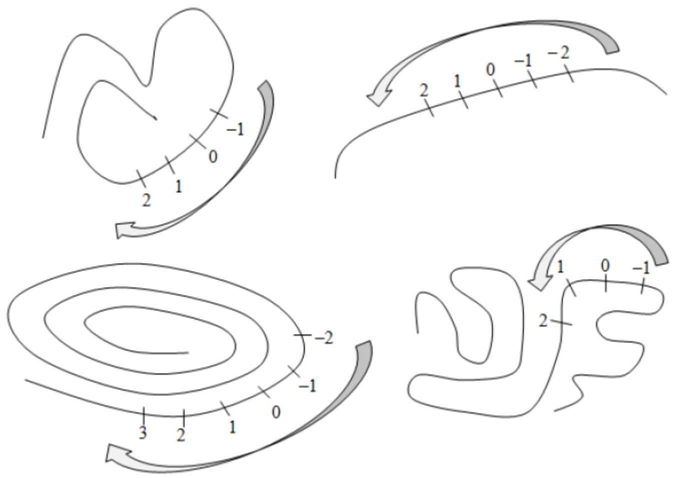
Possíveis respostas.

Figura 52 – Possíveis resposta da atividade IV, parte 1



Fonte: Dissertação Fantini (2018, p.93)

Figura 53 – Possíveis resposta da atividade IV, parte 2



Fonte: Dissertação Fantini (2018, p.93).

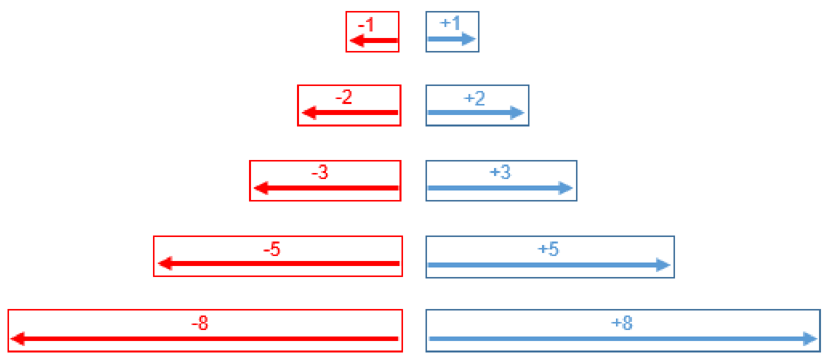
4.2 Segunda atividade adição com inteiros

A atividade tem o objetivo de trabalhar a adição de números inteiros. Utilizando para isso dois modelos: reta numérica com setas e contadores com duas cores, ambos indicados por Van de Walle. Esses modelos serão utilizados nas quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão.

4.2.1 Modelo da reta com seta

O modelo da reta numérica com setas consiste em fabricar alguns conjuntos de números que podem ser confeccionados utilizando cartolina, madeira ou acrílico. Os números positivos são setas azuis que apontam para a direita e os números negativos são setas vermelhas que apontam para a esquerda, conforme Figura 54. Esse modelo permite ressaltar a ideia de números inteiros como distâncias orientadas. O autor explica que o professor não deve ficar explicando com detalhes como é feita as operações nos modelos. O docente deve deixar os estudantes explorarem os modelos para poderem chegar no procedimento da adição com números inteiros.

Figura 54 – Números positivos e negativos no modelo das setas



Fonte: Autoria própria.

Optou-se por estes modelos porque, na adição, ao utilizar exemplos do cotidiano (como ter dinheiro X dívida), eles funcionam muito bem, porém na subtração não se adequa. Por exemplo, $(+3) - (-5)$, o que seria $-(-5)$? Poderia falar que se retirou dívidas, isto é, o primeiro sinal de -"significa retirada, o segundo sinal de dever, nesse caso deve 5, mas retirar dívidas não implica em obter 5, e sim ficar com nada. Isso cria um obstáculo no entendimento dos números inteiros.

Outra dificuldade que pode ser criada é utilizar para cada operação um modelo específico. Os modelos apresentados aqui serviram para as quatros operações.

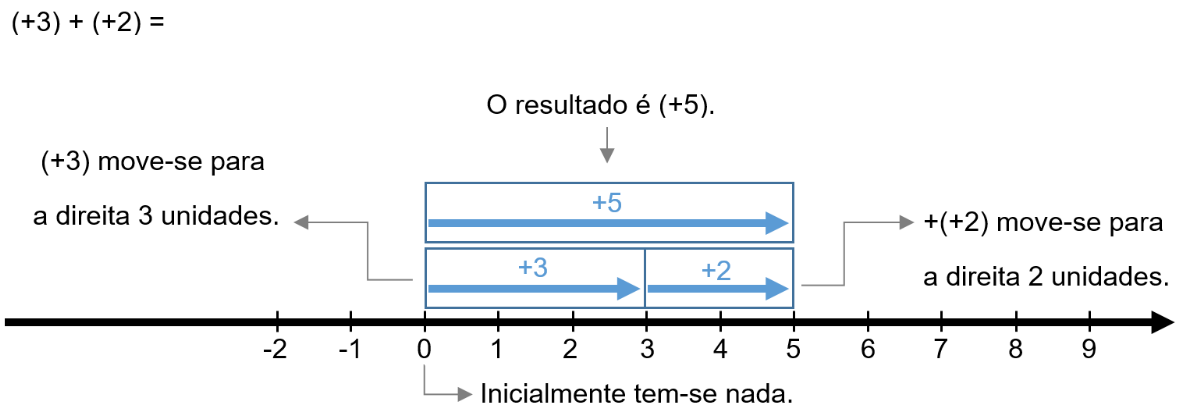
Além dos modelos permitirem aos estudantes, por meio da manipulação, conjecturar hipóteses das operações com números inteiros. Em outras palavras, proporciona aos alunos descobrir como se faz as operações com os inteiros, o que permite um aprendizado mais significativo.

4.2.2 Utilização do modelo da reta numérica com setas

Por sua vez, ao se apresentar as setas para os estudantes, deve-se mostrar as positivas primeiro e indagar a eles como seria as setas que representam os números negativos. É preciso falar da concepção que os números inteiros representam até o momento, ou seja, evidenciar a ideia dos contrários: positivo representa acima do nível do mar, negativo abaixo do nível do mar, lucro X prejuízo, avançar X recuar, adicionar X retirar, dentre outros contrários.

O conceito da adição que será utilizado neste modelo é de adição como avanço. A adição de dois números positivos (naturais) nesse modelo consiste em inicialmente começar do zero na reta numérica e avançar com os números solicitados. Indica-se sempre começar com as operações de números positivos (naturais) e progredir para os números inteiros.

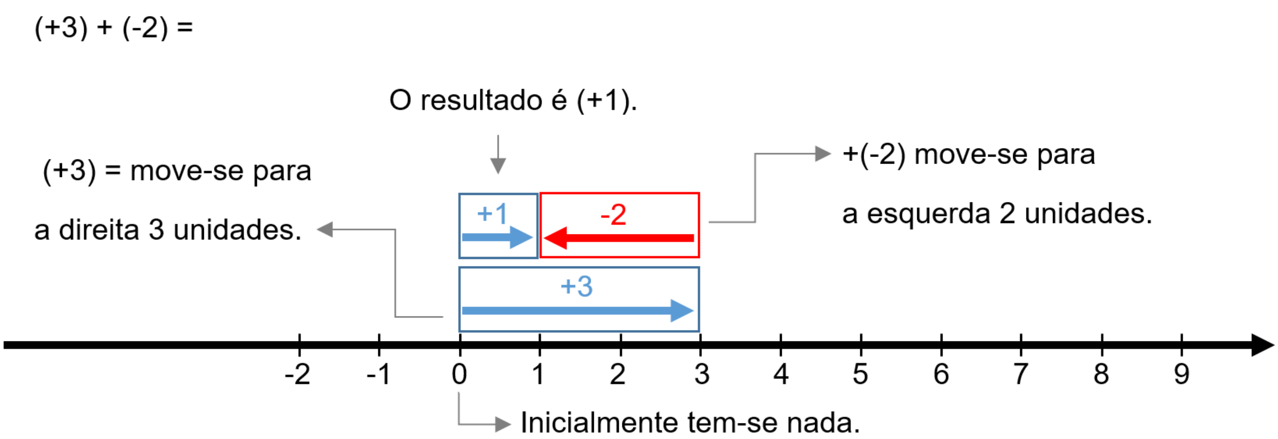
Figura 55 – Exemplo de adição com números positivos (naturais)



Fonte: Autoria própria.

Observa-se na Figura 55 que começamos do zero, adicionar (+3), isto é, um avanço de 3 unidades, em seguida adicionar (+2), logo, teremos um avanço total de 5 unidades.

Figura 56 – Exemplo da adição com números inteiros



Fonte: Autoria própria.

Começar no zero, adicionar (+3), isto é, um avanço de 3 unidades, em seguida adicionar (-2), isso significa que o sinal negativo representa uma oposição do sentido positivo, ou seja, ao invés de avançar duas unidades, iremos voltar duas unidades e o resultado será um avanço de 1 unidade (+1), conforme Figura 56.

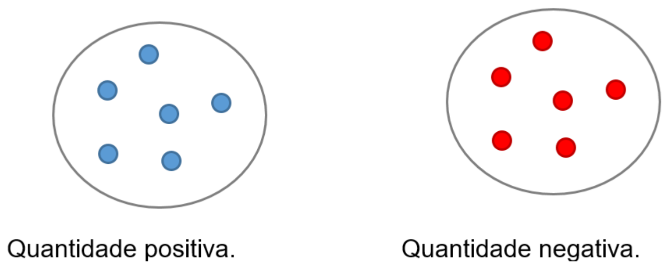
Anteriormente ao distanciamento social, se iria confeccionar as setas, que representam números inteiros, utilizando cartolina. Entretanto, devido ao isolamento, fez-se uma adaptação no *GeoGebra*, que pudesse ser explorada na aula pelo *Meet*.

4.2.3 Modelo com duas cores

Em seu modelo de contadores de duas cores, Van de Walle explica que normalmente os estudantes sentem mais facilidade com este e por isso os docentes optam por trabalhar só com ele. Porém, o significado de quantidades e oposição dos números inteiros devem ser trabalhados nos dois modelos e, com a comparação de ambos, consegue-se maior êxito no ensino desses conceitos.

O modelo utiliza a cor azul para quantidades positivas e vermelha para quantidades negativas (Figura 57).

Figura 57 – Quantidades positivas e negativas



Fonte: Autoria própria.

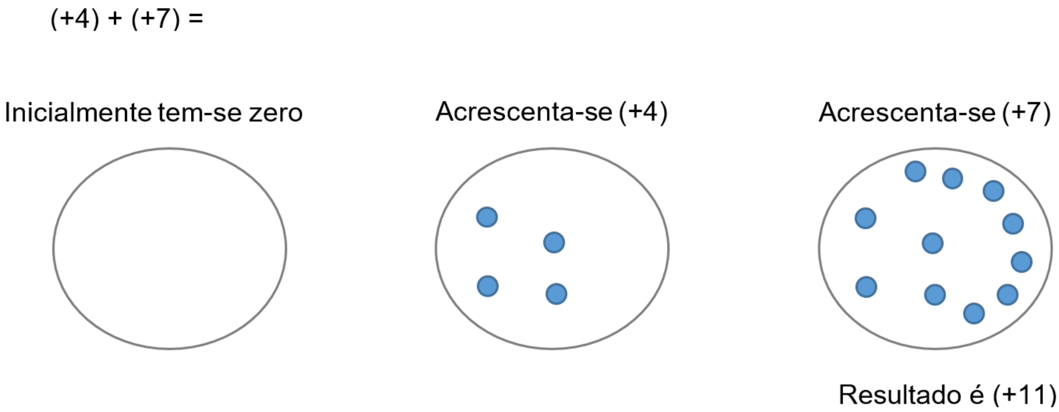
Nesse modelo trabalha-se a adição como juntar ou acrescentar. Para tanto, os discentes precisam entender que ao juntar -1 com $+1$ tem-se zero (Figura 58).

Figura 58 – Um positivo com um negativo é igual a zero

Fonte: Autoria própria.

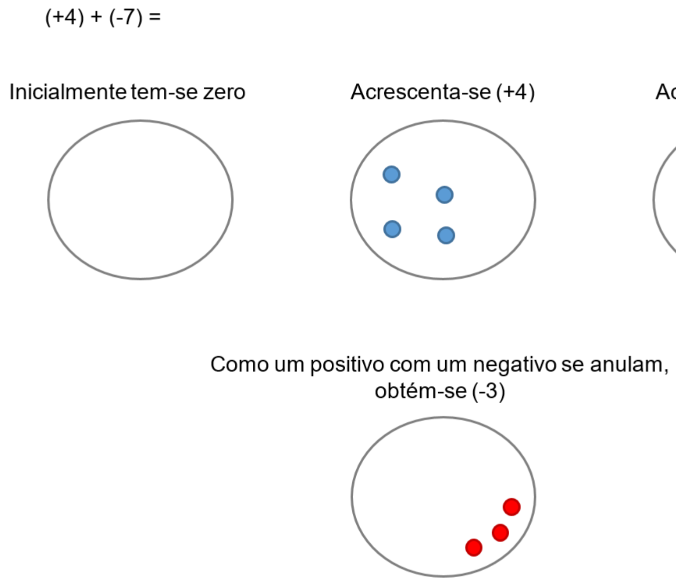
Inicialmente, começa com a adição dos números naturais para ir utilizando o mesmo raciocínio com números negativos (Figuras 59 e 60).

Figura 59 – Exemplo de adição com números positivos (naturais) no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

Figura 60 – Exemplo de adição com números inteiros no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

Outra alternativa de apresentar esse modelo é desenhado, por exemplo, com X's e O's. X's para os números negativos e O's para os números positivos.

Van de Walle propõe, inicialmente, ao docente colocar para metade da turma o modelo da reta numérica com setas e para a outra metade os contadores de duas cores.

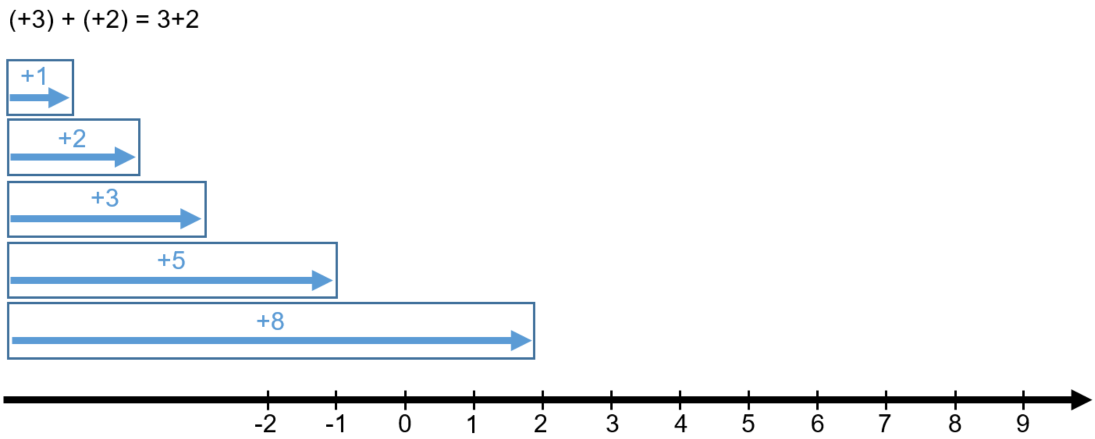
4.2.4 Questões da atividade de adição

1) Calcule.

A) $(+3) + (+2) =$

Na aula realizada pelo *Meet* apresentou-se a reta numérica e alguns números inteiros representados por vetores. Começou-se com os números positivos (naturais) (Figura 61).

Figura 61 – Números positivos e reta numérica



Fonte: Autoria própria.

Perguntou-se: Como podemos somar o (+3) a (+2) utilizando a reta numérica?

Inicialmente tem-se nada, logo, estamos em que ponto da reta numérica?

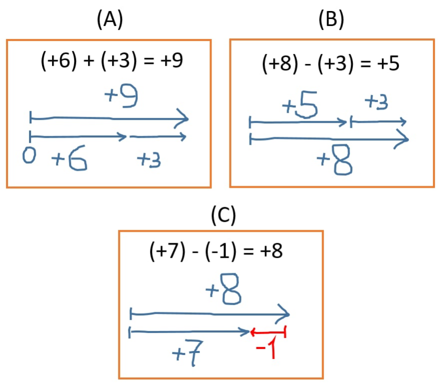
Tem-se o (+3). Onde devo colocar esse número?

Queremos adicionar o número (+2), onde coloco esse número?

Qual é o resultado?

É útil solicitar aos alunos para desenhar no caderno a reta numérica com setas de forma simplificada, conforme Figura 62.

Figura 62 – Desenho simplificado do modelo



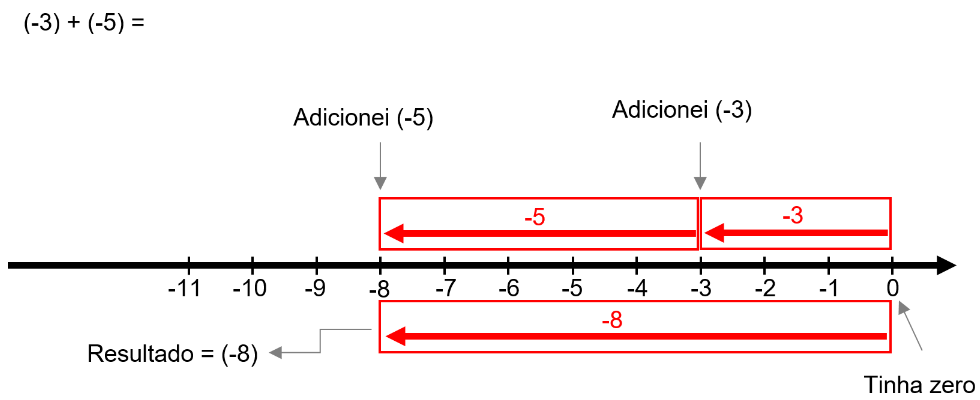
Fonte: Autoria própria.

B) $(+5) + (+3) =$

C) $(-3) + (-5) =$

Em função dos estudantes estarem em aula remota, tiveram ajuda em casa, e quando esse item foi colocado na aula por meio do *Meet*, alguns falaram que menos com menos dá mais. Porém, ao fazer a adição utilizando o modelo da reta numérica com setas, tiveram uma surpresa (Figura 63).

Figura 63 – Resultado do item c



Fonte: Autoria própria.

D) $(-3) + (-2) =$

E) O que acontece quando adicionamos duas quantidades positivas, isto é, o resultado é positivo ou negativo?

F) O que acontece quando adicionamos duas quantidades negativas, isto é, o resultado é positivo ou negativo?

G) $(+7) + (-4) =$ H) $(-7) + (+4) =$

I) O que acontece quando adicionamos duas quantidades, uma positiva e outra negativa, isto é, o resultado é positivo ou negativo?

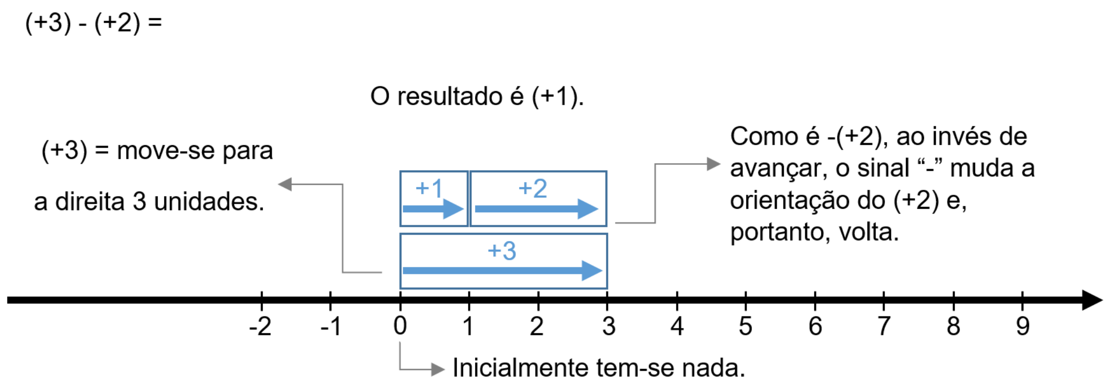
4.3 Terceira atividade: subtração com inteiros

Nessa atividade utiliza-se mais uma vez os modelos de contadores de duas cores e da reta numérica com setas de Van de Walle. Agora o principal objetivo é chegar à conclusão de que a subtração pode ser vista como adição de números inteiros.

4.3.1 Utilização do modelo da reta numérica com setas

No modelo das setas a subtração tem o significado de voltar ou se mover no sentido oposto, isto é, o sinal “-” será tratado como a operação de determinar o oposto (Figuras 64 e 65).

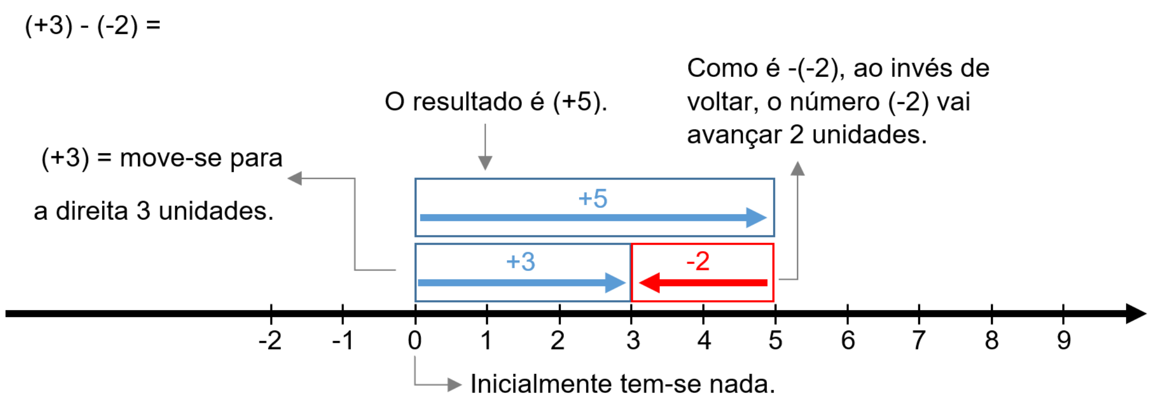
Figura 64 – Exemplo de subtração com números positivos (naturais)



Fonte: Autoria própria.

Observe na figura acima que se colocou a seta $(+2)$ voltando, ao invés de colocar a seta que representa (-2). Essa mudança deve ser concluída pelo discente, isto é, a transformação da subtração em adição com o número oposto (Figura 64).

Figura 65 – Exemplo de subtração com números inteiros

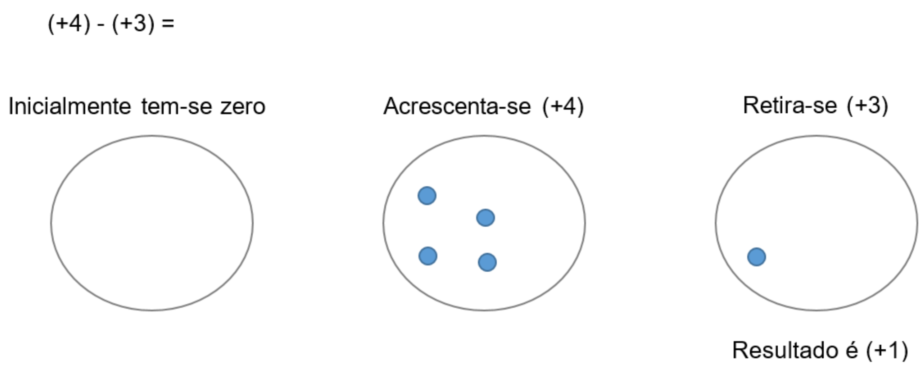


Fonte: Autoria própria.

4.3.2 Modelo com duas cores

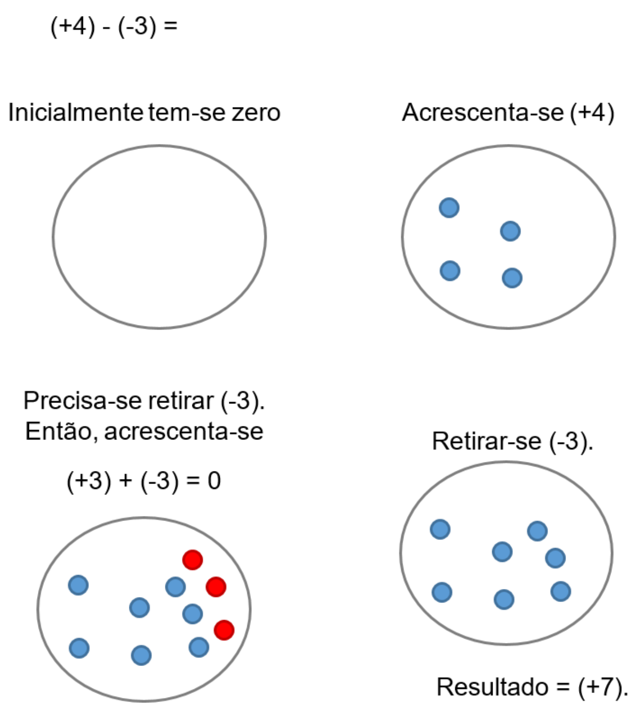
No modelo dos contadores, a subtração tem o significado de retirada (Figura 66 e 67).

Figura 66 – Exemplo de subtração com números positivos (naturais) no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

Figura 67 – Exemplo de subtração com números inteiros no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

A) $(+3) - (+2) =$

Como se deve fazer a subtração? Como devemos colocar a seta $(+2)$? Qual é o resultado?

B) $(+3) - (+5) =$

Como iremos fazer?

Nesse item tem-se uma novidade, pois antes no conjunto dos números naturais essa operação não podia ser feita. Dessa forma, aparece como resultado o número negativo.

C) $(-4) - (+3) =$
D) $(-4) - (-3) =$
E) $0 - (+5) =$
F) $0 - (-5) =$
J) Podemos representar a subtração como adição de números inteiros? Justifique.

O docente deve ir avaliando a compreensão da turma, pois deve prosseguir com problemas desse tipo até perceber que a maioria entendeu a adição e subtração com inteiros. Em outras palavras, os estudantes precisam chegar a conclusões que possibilitem fazer os cálculos sem os modelos.

Com o aprendizado do algoritmo da adição dos números inteiros consolidado pelos os estudantes, o docente deve propor problemas do cotidiano que envolvem tais operações, como saldo bancário, variação de temperatura, dentre outros. Problemas desse tipo são facilmente encontrados nos livros didáticos.

Ao trabalhar o modelo das setas em aulas presenciais, no primeiro dia teve-se impressão que os estudantes estavam com dificuldades, porém, no segundo dia de aula presencial, observou-se que eles tinham compreendido bem o modelo. Inclusive os discentes conseguiram rapidamente não só fazer os cálculos sem o uso do modelo, como justificar seus resultados utilizando os conceitos de números inteiros.

De acordo com Barbara Oakley (2015, p. 12), existem "[...] duas diferentes redes entre as quais o cérebro alterna que corresponde a um estado de atenção concentrada e um estado de repouso mais relaxado [...] essas redes são muito importantes para a aprendizagem". Ela explica que alternamos entre essas duas redes. No estado de atenção usa-se métodos racionais, sequenciais e analíticos para resolver problemas. O estado de repouso permite que diferentes áreas do cérebro sejam acionadas e produzam novas conclusões. O que deve ter ocorrido com os estudantes que, após terem trabalhado no estado de atenção com o modelo da reta com setas, ao mudarem o pensamento para o modo relaxado, eles conseguiram concluir as novas operações.

4.4 Quarta atividade: multiplicação com inteiros

Nesta atividade utilizou-se novamente os modelos de contadores de duas cores e da reta numérica com setas colocado por Van de Walle para determinar o procedimento da multiplicação com inteiros.

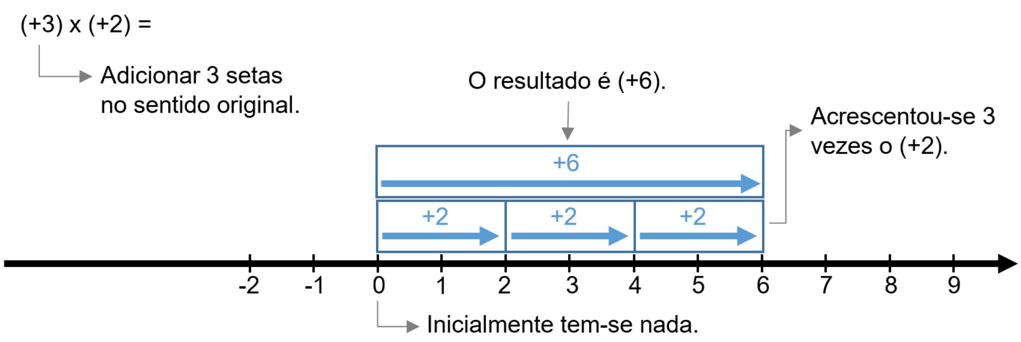
Existem várias formas de demonstrar a regra dos sinais na multiplicação, demonstrações geométricas, utilização de sequências para mostrar que $-x- = +$. O problema oriundo de tais demonstrações é que essas são pouco compreendidas pelos estudantes. Desse modo, eles acabam decorando a regra ao invés de compreendê-la.

A utilização dos modelos tem o intuito de levar à compreensão das regras por meio da manipulação dos modelos. Com isso, não seria uma mera memorização de regras, mas a compreensão delas.

4.4.1 Utilização do modelo da reta numérica com setas

Deve-se usar a mesma ideia da multiplicação com números naturais. Isto é, o primeiro número é o contador, quantas vezes irá adicionar o segundo fator da multiplicação. (+3) indica que se vai adicionar o segundo fator três vezes e como o sinal é positivo será no sentido original do número. Ou seja, 3 conjuntos de (+2) no sentido positivo, crescente (do O para o +1), o que pode ser observado na Figura 68.

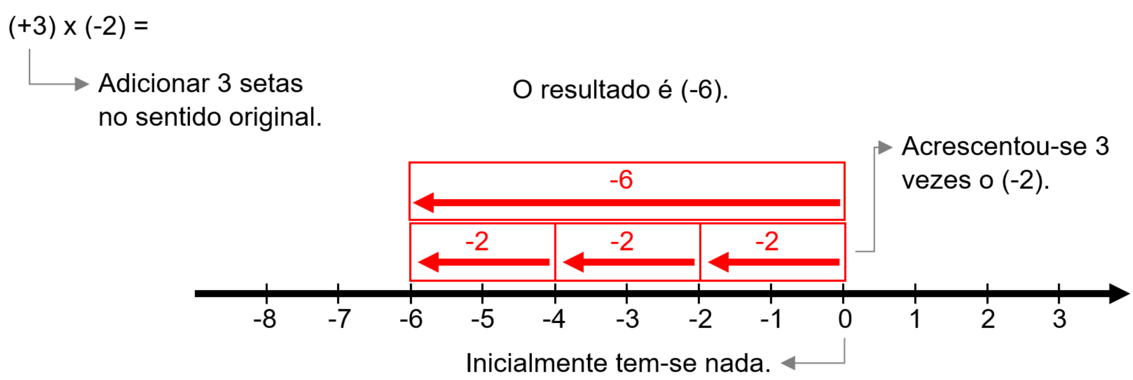
Figura 68 – Exemplo de multiplicação com números positivos (naturais)



Fonte: Autoria própria.

Com esse mesmo raciocínio se faz com números inteiros (Figura 69).

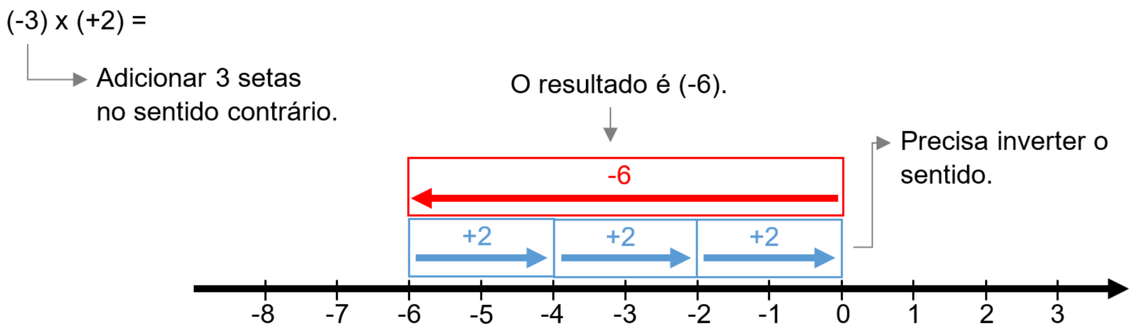
Figura 69 – Exemplo de multiplicação com números inteiros



Fonte: Autoria própria.

No caso em que o primeiro fator é negativo, adicionou-se no sentido contrário do número do segundo fator (Figura 70).

Figura 70 – Exemplo do primeiro fator negativo



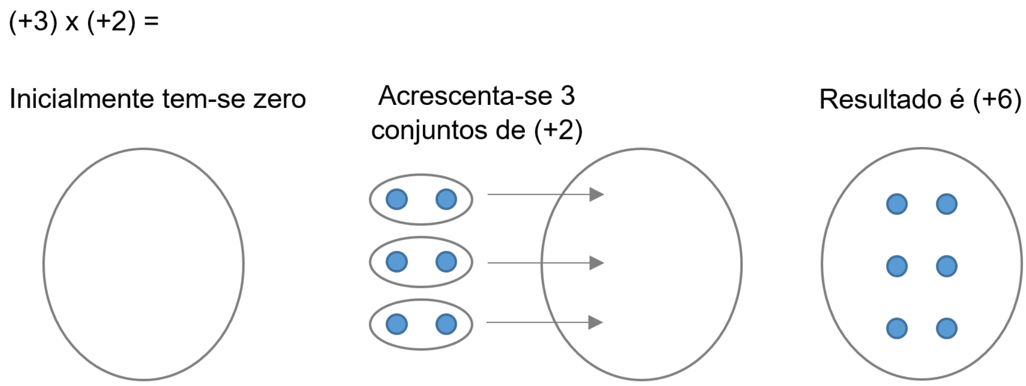
Fonte: Autoria própria.

Em função do primeiro fator ser negativo, o segundo fator $(+2)$, ao invés de no seu sentido original, o sentido crescente da reta (do 0 para o 1), ele irá no sentido contrário (do 0 para -1). Assim, três conjuntos de $(+2)$ no sentido contrário resultam em (-6) (Figura 70).

4.4.2 Modelo com duas cores

Neste modelo se usará a mesma ideia da multiplicação com números naturais. Isto é, o primeiro número é o contador, ele significa quantas vezes irá adicionar o segundo fator da multiplicação (Figura 71 e 72).

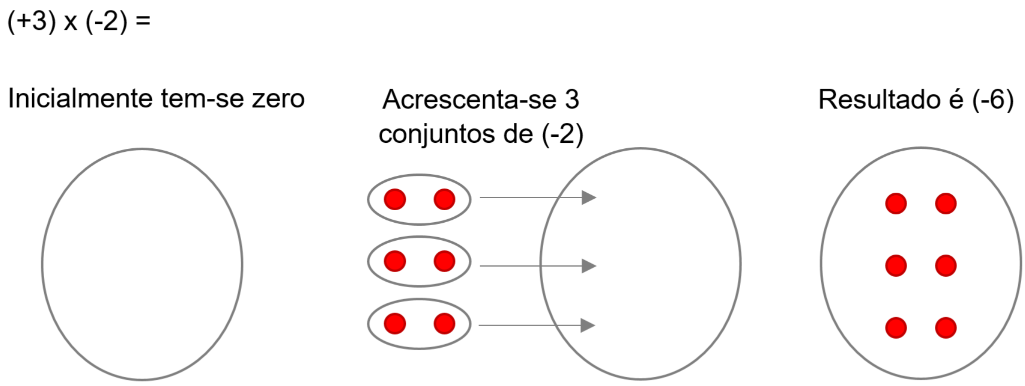
Figura 71 – Multiplicação com números positivos (naturais) no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

$(+3)$ indica adicionar o segundo fator três vezes, pois o sinal é positivo. Ou seja, 3 conjuntos de $(+2)$. O que pode ser observado na Figura 71.

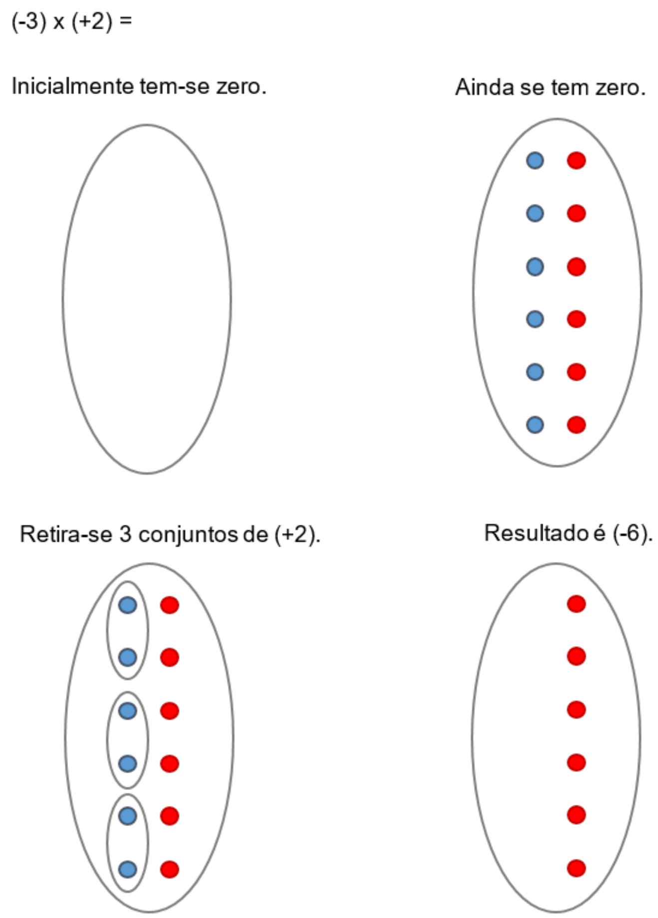
Figura 72 – Multiplicação com números inteiros no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

Com o primeiro fator negativo, ao invés de adicionar, deve-se retirar os conjuntos do segundo fator (Figura 73).

Figura 73 – Multiplicação com o primeiro fator negativo



Fonte: Autoria própria.

O uso dos modelos tem o propósito de tornar as ideias abstratas mais palpáveis. Outro objetivo é possibilitar ao aluno a construção do seu conhecimento. Assim, deve-se deixar o aluno manusear os modelos para que ele chegue no procedimento da multiplicação dos inteiros.

Questões.

A) $(+3) \times (+2) =$

É preciso relembrar e discutir como este modelo das setas e de contadores são trabalhados com os números naturais. Exemplo, começo do zero o que devo fazer, se a conta é $3x2 =$? O que isso significa?

B) $(+3) \times (-2) =$

C) $(-3) \times (+2) =$

D) O que acontece quando multiplicamos duas quantidades, uma positiva e outra negativa, isto é, o resultado é positivo ou negativo?

E) $(-3) \times (-2) =$

F) $(+4) \times (+7) =$

G) O que acontece quando multiplicamos duas quantidades positivas, isto é, o resultado é positivo ou negativo?

H) O que acontece quando multiplicamos duas quantidades negativas, isto é, o resultado é positivo ou negativo?

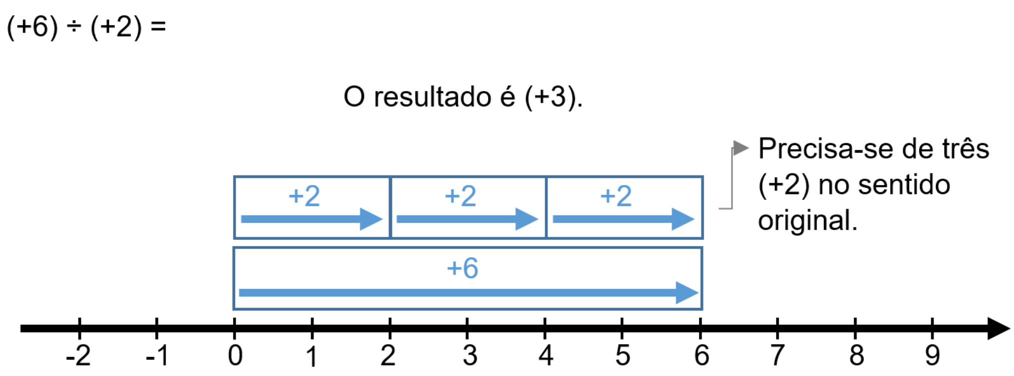
4.5 Quinta atividade: divisão com inteiros

Agora, o objetivo é usar os mesmos modelos para determinar o procedimento da divisão com números inteiros. No que se refere ao uso dos modelos entre as quatro operações, a divisão é a que oferece maior grau de dificuldade. Embora mais árdua, não se encontrou nenhuma proposta mais simples que possibilitasse alcançar o objetivo. O modelo utiliza a ideia de que a divisão é a operação inversa da multiplicação, isto é, $(+2) \times (?) = (+6)$ significa quantas vezes irei adicionar ou retirar $(+2)$ para obter $(+6)$.

4.5.1 Utilização do modelo da reta numérica com setas

Com o propósito de determinar o sinal do resultado, deve-se observar se as setas estão no seu sentido original ou no sentido contrário. Em outras palavras, se são setas que representam números positivos, o seu sentido original é partir do zero e ir no sentido do $+1$. Se são setas negativas, partem do zero e vão no sentido de -1. Na divisão de $(+6)$ por $(+2)$, quantos $(+2)$ preciso para formar $(+6)$? Essa é a pergunta da divisão. Para formar $(+6)$, precisamos de 3 setas $(+2)$ no seu sentido. Isto é, as setas de $(+2)$ irão partir do zero e avançar na direção positiva até o 6. Como pode ser conferido na Figura 74.

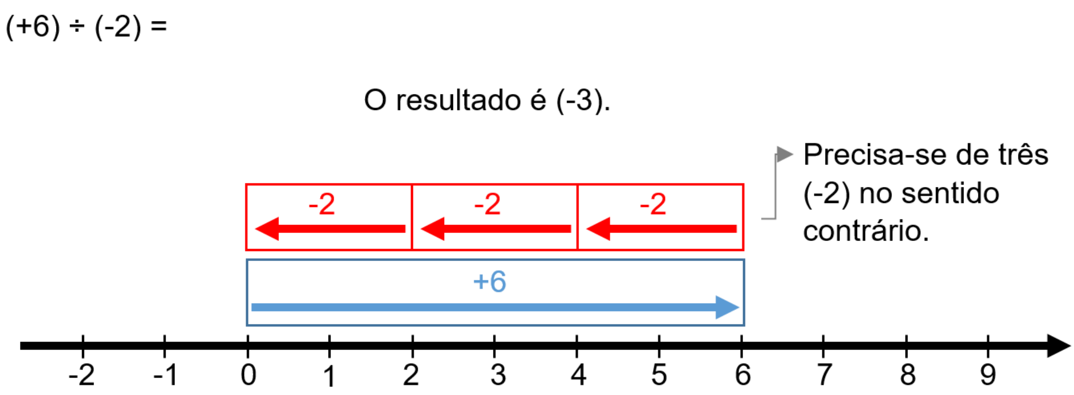
Figura 74 – Exemplo de dividendo e divisor positivos



Fonte: Autoria própria.

Na divisão de $(+6)$ por (-2), quantos (-2) precisa-se para formar $(+6)$? Para formar $(+6)$ utilizando setas de (-2), começa do zero e avança no sentido de $+1$, ou seja, as setas de (-2) percorrem no seu sentido contrário. Portanto, o resultado será negativo (Figura 75).

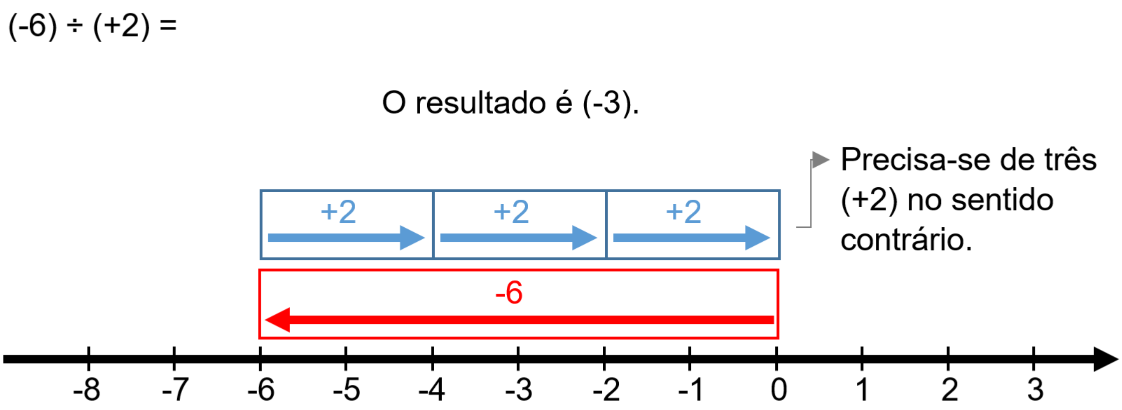
Figura 75 – Exemplo de divisão com dividendo positivo e divisor negativo no modelo das setas



Fonte: Autoria própria.

Na divisão de (-6) por $(+2)$, quantos $(+2)$ precisa-se para formar (-6)? Da mesma forma que o exemplo anterior, precisará de 3 setas $(+2)$ no seu sentido contrário, logo, o resultado será (-3) (Figura 76).

Figura 76 – Exemplo de divisão com dividendo negativo e divisor positivo



Fonte: Autoria própria.

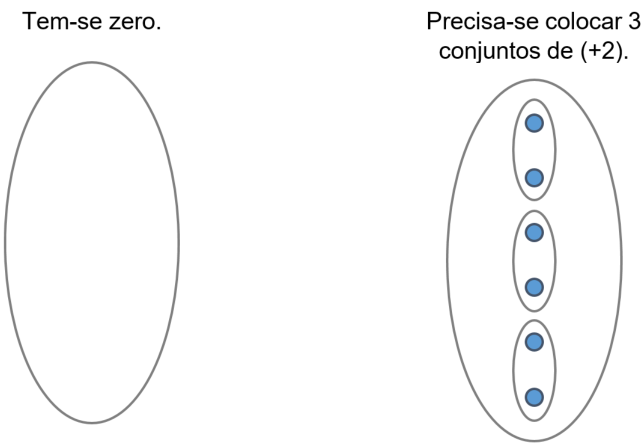
4.5.2 Modelo com duas cores

Com o objetivo de determinar o sinal do resultado desse modelo, observa-se se os conjuntos são retirados ou colocados.

Na divisão de $(+6)$ por $(+2)$, quantos $(+2)$ preciso para formar $(+6)$? Essa é a pergunta da divisão.

Para se obter $(+6)$ é necessário colocar 3 conjuntos de $(+2)$. Como se adicionou os conjuntos o resultado é positivo (Figura 77).

Figura 77 – Exemplo de dividendo e divisor positivos no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

Em decorrência de adicionar 3 conjuntos, o resultado é $(+3)$.

Na divisão de $(+6)$ por (-2), quantos (-2) precisa-se para formar $(+6)$?

Para se obter $(+6)$ precisa ser retirado 3 conjuntos de (-2). Em decorrência de ter retirado os conjuntos, o resultado será negativo (Figura 78).

Figura 78 – Exemplo de divisão com dividendo positivo e divisor negativo no modelo de duas cores

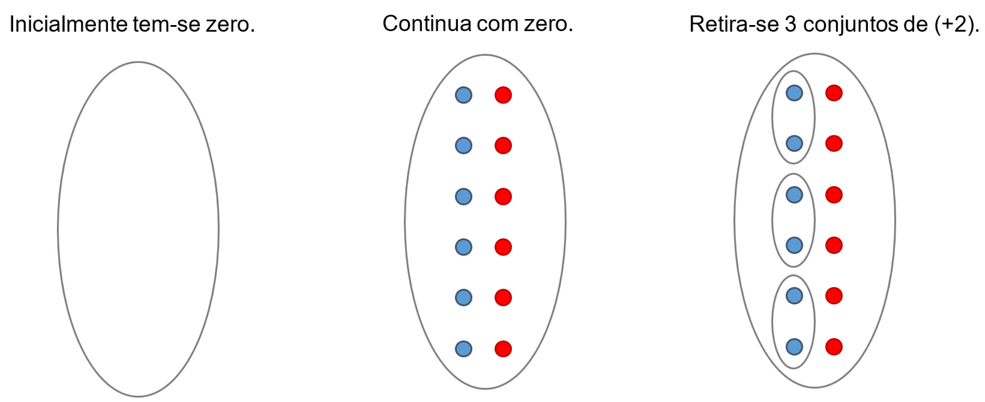
Fonte: Autoria própria.

O resultado é (-3).

Na divisão de (-6) por $(+2)$, quantos $(+2)$ precisa-se para formar (-6)?

Da mesma forma do exemplo anterior, tem-se que fazer retiradas de conjuntos, assim, o resultado será negativo (Figura 79).

Figura 79 – Exemplo de divisão com dividendo negativo e divisor positivo no modelo de duas cores



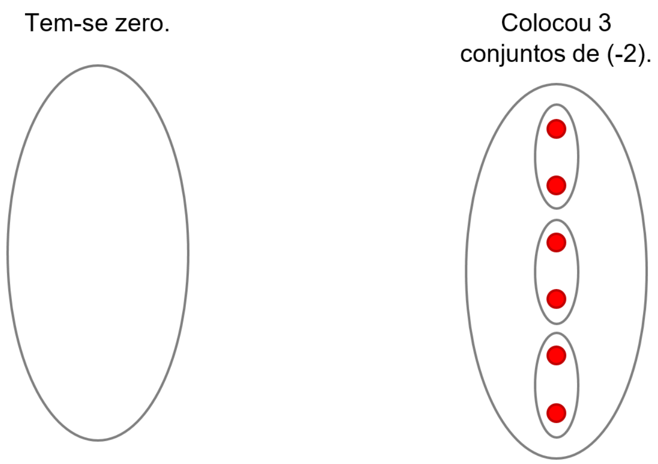
Fonte: Autoria própria.

Como retirou-se 3 conjuntos, logo o resultado é (-3).

Na divisão de (-6) por (-2), quantos (-2) precisa-se para formar (-6)?

Para se obter (-6), precisa-se adicionar 3 conjuntos de (-2), portanto o resultado será positivo (Figura 80).

Figura 80 – Exemplo de dividendo e divisor negativos no modelo de duas cores



Fonte: Autoria própria.

Resultado (+3), pois teve-se que adicionar três conjuntos.

Questões.

A) $(+6) \div (+2) =$

B) $(+6) \div (-2) =$

C) $(-6) \div (+2) =$

D) $(-6) \div (-2) =$

4.6 Resultado da aplicação nas aulas remotas via Google Meet

As atividades foram elaboradas para serem ministradas em turmas dos 7^{os} anos, em aulas presenciais. Porém, em função da pandemia, fizemos algumas adaptações a fim de trabalhá-las em aulas remotas, utilizando o aplicativo *Google Meet*.

As aulas foram ministradas na escola municipal EMEF Santa Cruz, do município de Aracruz, situado no estado do Espírito Santo. Para os estudantes que estão cursando o 7º ano do Ensino Fundamental, de três turmas diferentes. Participaram das aulas uma média de 24 estudantes.

A escola estava desde de março de 2020 sem aulas presenciais. Em fevereiro de 2021, começaram as aulas do ano letivo de 2021, de forma remota. No entanto, as primeiras aulas ministradas pelo aplicativo *Google Meet* foram as de Matemática. Devido à restrição de acesso à internet de alguns discentes, poucos conseguiram participar. Aplicou-se o questionário para saber a opinião dos estudantes referente às aulas ministradas.

Utilizou-se o aplicativo *Formulários Google* e colocou-se *emojis* coloridos para caracterizar a escala de satisfação (Figura 81).

Figura 81 – *Emojis* de satisfação

Fonte: Site dreanstime[9].

4.6.1 Resultado da primeira atividade

A primeira atividade foi ministrada em uma aula interdisciplinar, da Matemática com a Geografia, voltada aos alunos dos 7^{os} anos, que ocorreu via *Google Meet*. O objetivo da aula era revisar os seguintes conteúdos: introdução aos números inteiros, reta numérica, oposto ou simétrico e módulo bem como fazer a conexão com os conteúdos da Geografia, como: altitude, batimetria e relevo, utilizando o simulador Linha Numérica: Inteiros.

A aula foi ministrada no dia 27 de abril de 2021. Havia 26 pessoas conectadas. Acredita-se que 23 alunos, a professora de matemática, o professor de geografia e a diretora da escola.

Os estudantes que participaram estavam em ensino remoto até então. Ou seja, estudavam em suas residências utilizando livros didáticos e vídeos, segundo a orientação via *WhatsApp*. Como os assuntos que eram objetos da aula já tinham sido propostos como tópicos a serem estudados, a aula era, na verdade, uma revisão.

Conforme descrito anteriormente, por meio dos questionamentos foram abordados os seguintes conteúdos: estimativa, o que é medir, a necessidade dos números inteiros, localização dos números na reta, número oposto, módulo e comparação dos números inteiros, além de contar um pouco da história dos números negativos e como foi o desenvolvimento da Matemática.

Percebeu-se que os alunos gostaram e que participaram bastante da aula não só falando como escrevendo no chat. O comportamento dos alunos foi melhor do que o esperado: mantiveram os microfones desligados enquanto não falavam, respeitaram a vez do outro falar. Vale ressaltar que, quando se iniciaram comentários depreciativos no *chat* mediante respostas incorretas, o professor de geografia lembrou que esse era o momento de errar.

Os estudantes responderam todas as perguntas com uma certa facilidade. A maior dificuldade foi a marcação de valores na reta numérica. Além disso, ao serem indagados quanto à dúvida, os alunos disseram que não as tinham. Esses ainda falaram no chat que “queriam aulas como essa toda semana”.

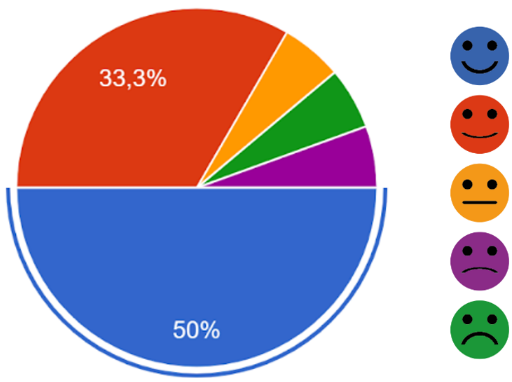
[9] Emociones con sonrisas. Disponível em: <https://es.dreamstime.com/emociones-con-sonrisas-image123035122>. Acesso em 31 de jul. 2021.

Na plataforma de reuniões, uma das dificuldades foi acompanhar a participação do aluno, pois, na ausência de um e-mail institucional, a alternativa era entrar com e-mail particular, nem sempre com o nome do discente.

Inicialmente 60 alunos sinalizaram que iriam participar, porém algumas mães relataram antes da aula que a internet estava instável. No fim, 26% dos alunos do 7º ano participaram. A falta de instrumentos por parte dos alunos foi outro desafio, já que a maioria não tinha computador e participava utilizando o celular, ou não dispunha de acesso à internet e/ou celular.

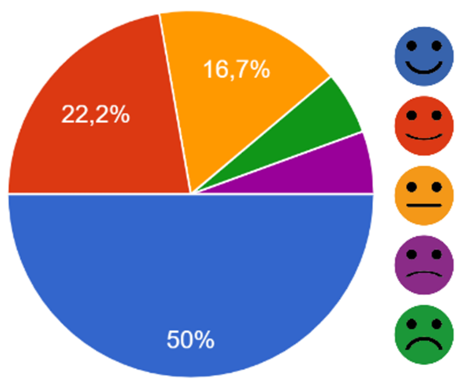
Visando saber sua opinião sobre a aula e o quanto a aula impactou no aprendizado dos números inteiros, no dia seguinte enviou-se nos grupos dos alunos o link de um formulário que continha um questionário de satisfação. Nas Figuras 82, 83, 84 e 85 e na Tabela 3 a seguir encontram-se as perguntas bem como a distribuição de suas respostas.

Figura 82 – A simulação envolvendo a montanha e o nível do mar despertou interesse sobre os Números Inteiros?



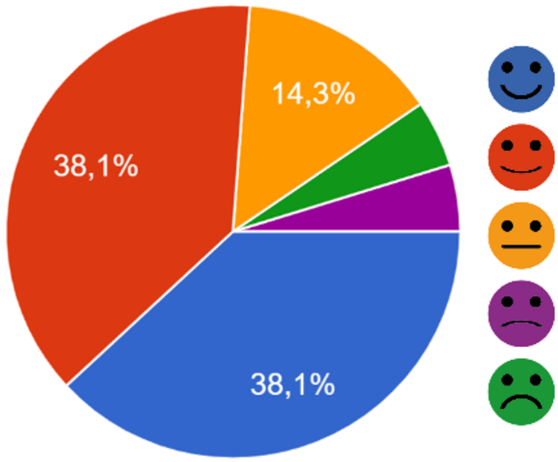
Fonte: Autoria própria

Figura 83 – A simulação auxiliou na compreensão dos Números Inteiros?



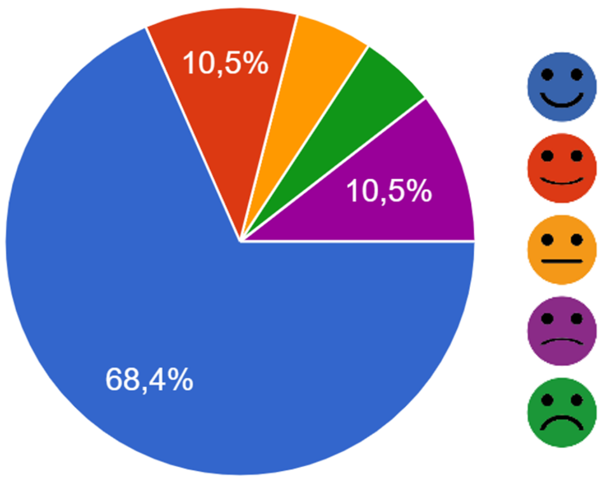
Fonte: Autoria própria

Figura 84 – Qual nível de dificuldade você teve para responder as perguntas?



Fonte: Autoria própria

Figura 85 – Você gostou da simulação apresentada?



Fonte: Autoria própria

Tabela 3 – Resposta dos alunos da primeira atividade

Escreva o que você aprendeu de Matemática e o que achou da simulação:	
Aluno	Resposta
1	Aprendi a ter uma noção de tamanho.
2	Aprendi bastante e gostei.
3	Números positivos e negativos, achei bem explicativa.
4	Aprendi números inteiros são o nível do mar e o que foi mostrado na aula, acompanhei tudo! Achei fácil de entender simulação, só tive umas dúvidas.
5	Assim... eu gostei bastante acho que deveria ter mais aulas como essa.
6	Eu aprendi o nível do mar e o zero $+1$ -1 foi uma boa videoaula.
7	Reta numérica, números quebradiços e inteiros.
8	Podia ter mais aulas assim.
9	Muito boa.
10	Retas numéricas.
11	Achei que foi um jeito legal de ensinar a matéria. Aprendi mais um pouco sobre números inteiros.
12	Aprendi reta numérica, adorei a simulação.
13	Não entendi muito mas eu entendi. Eu adorei a aula muito legal.
14	Números inteiros. Me ajudou a compreender números positivos e negativos.
15	Não.

Fonte: Autoria própria

Em resumo, a aula teve uma boa aceitação pelos alunos e profissionais da escola. Porém, alguns ajustes são necessários, como elaborar uma forma de acompanhamento dos alunos que estão interagindo. Uma opção seria olhar no chat os nomes que estão lá e fazer a pergunta direcionada para cada aluno. Além disso, observou-se a necessidade de ter mais um profissional da escola para auxiliar o professor com o chat e com a interação dos alunos.

4.6.2 Resultado da segunda atividade.

A segunda atividade também foi realizada de forma remota via Google Meet na EMEF Santa Cruz, para os alunos dos 7^{os} anos de três turmas diferentes. Chegou a atingir 27 pessoas conectadas. Acredita-se que 25 alunos, professora de matemática e a diretora da escola. O objetivo da aula era desenvolver a soma e a subtração dos números inteiros utilizando o modelo da reta numérica com setas conforme descrito anteriormente. Para tanto, foi utilizado o *GeoGebra*. Por meio da resolução de questões simples como $(+3)+(+2) =$, foi elaborado um método de adição e subtração utilizando a reta numérica com setas.

A maior parte dos alunos preferiu se expressar via chat; 5 a 6 alunos participaram mais por meio do microfone. Os alunos usaram o *chat* tanto para expressar suas ideias quanto para conversar assuntos que fogem ao objetivo da aula, por exemplo, alguns marcaram de jogar videogame. Embora tal atitude demonstre falta de foco na aula, ela também nos lembra do papel da escola em viabilizar interação social entre indivíduos da mesma idade, o que é importante no desenvolvimento socioemocional saudável da criança e do adolescente.

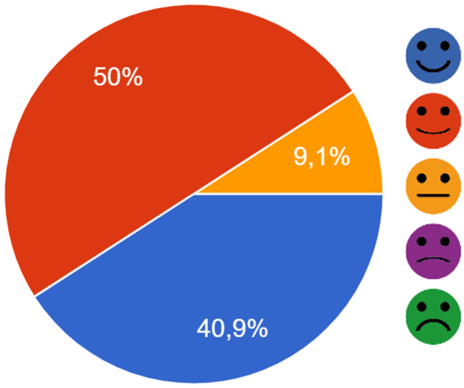
Além disso, outra demonstração de dispersão foi brincar com a opção “levantar a mão” por um dos alunos, que selecionava mesmo sem o desejo de falar. Logo, a perda do foco na aula é um desafio que se transfere para o ambiente virtual, cujo enfrentamento demanda que o professor continue a apresentar a atividade, interagir com aluno, bem como controlar o que está acontecendo. A divisão de telas do computador poderia contribuir com esse equilíbrio de tarefas. Porém é importante considerar o desgaste mental que é alternar a concentração entre tantos elementos, tendo em vista o impacto em termos de saúde mental que é desempenhar tal função a longo prazo e a consequente perda de saúde pelo profissional e de qualidade de ensino por parte do aluno, pois nesse contexto as aulas terão sua qualidade prejudicada.

Em função de terem sido propostas questões, como: A) $(+3)+(+2) =$; B) $(+2)+(+3) =$; C) $(+3)+(+5) =$; D) $(+5)+(+3) =$; E) $(+3)-(+2) =$; F) $(+2)-(+3) =$; G) $(+3)-(+5) =$; e H) $(+5)-(+3) =$, os alunos conjecturam que na adição poderia trocar a ordem das parcelas que a soma não iria se alterar, porém, na subtração, quando se trocava o minuendo pelo subtraendo, a diferença ficava trocada de sinal.

No momento da resolução do item J) $(-3)+(-5) =$, o aluno disse que menos com menos dá mais, assim, ao resolver a questão utilizando a reta numérica, se observou que o resultado era (-8). Chegou-se à conclusão que essa hipótese não é sempre válida. Outra fala do estudante foi que, ao fazer a soma de um número positivo e outro negativo, uma parte é cancelada e você observa o que sobra. Isso é uma das estratégias que se quer desenvolver no aluno, na adição de números inteiros.

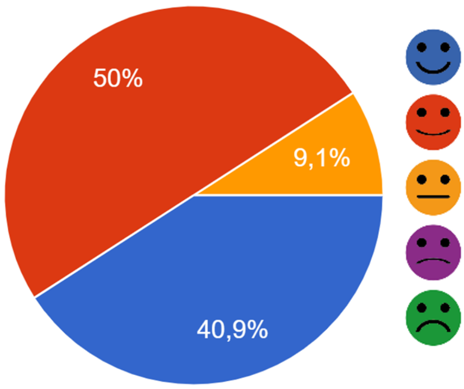
De modo diferente da primeira aula, o link do questionário de satisfação referente a essa aula foi enviado no final da aula pelos grupos de WhatsApp e pelo chat do Meet. O questionário de satisfação abrangeu as mesmas questões. As perguntas e a distribuição de suas respostas encontram-se nas Figuras 86, 87, 88 e 89 e na Tabela 4 a seguir.

Figura 86 – A adição e subtração na reta numérica com setas despertou interesse?



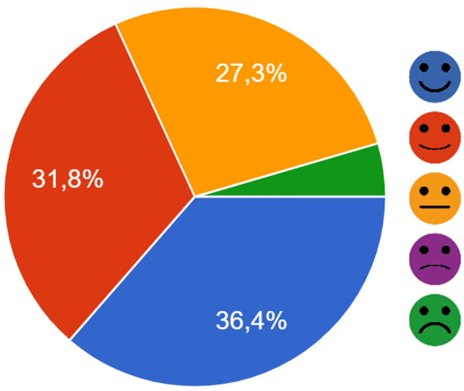
Fonte: Autoria própria

Figura 87 – A adição e subtração utilizando a reta numérica com setas auxiliou na compreensão?



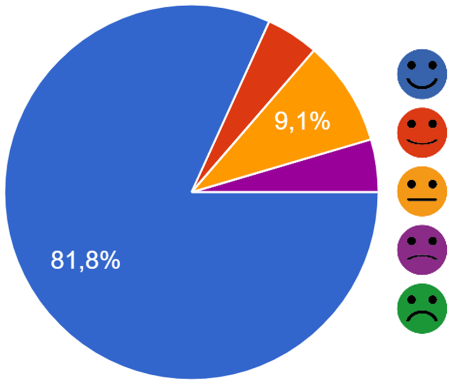
Fonte: Autoria própria

Figura 88 – Qual nível de dificuldade você teve para responder as perguntas? (Atividade 2 e 3)



Fonte: Autoria própria

Figura 89 – Você gostou da aula? (Atividade 2 e 3)



Fonte: Autoria própria

Tabela 4 – Resposta dos alunos da segunda e da terceira atividade

Escreva o que você aprendeu de Matemática e o que achou da simulação:	
Aluno	Resposta
1	Aprendi o que a professora quis ensinar.
2	Achei legal aprendi muita coisa.
3	Foi legal.
4	Achei que é um assunto simplista e compreensível.
5	Achei interessante.
6	Eu achei legal a aula.
7	Contas, um pouco complicado, mais foi legal.
8	Que depende dos números o resultado não altera.
9	Uma boa aula.
10	Aprendi muito coisas que eu estava com dificuldade.
11	Nem tudo mais um pouco.
12	Adição e subtração.
13	Aprendi bastante.

Fonte: Autoria própria

Em síntese, os alunos relataram ter gostado da aula. No que se refere ao escopo matemático da aula, conclui-se que se atingiu o objetivo de elaborar junto com o aluno um procedimento de adição e subtração com números inteiros utilizando a reta numérica com setas, com o acréscimo de promover a conjectura de algumas propriedades da adição pelos alunos. Por sua vez, no que se refere a aula via *Google Meet*, os desafios foram envolver o estudante e fomentar maior participação dos alunos. Além disso, observou-se que eles gostaram da oportunidade de rever e conversar com os colegas na aula via *Meet*.

5 A FORMAÇÃO DO PROFESSOR PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS

Segundo os índices do Sistema de Avaliação Educação Básica (SAEB) em 2019, os alunos do estado do Espírito Santo estão com baixo nível de proficiência matemática. De acordo com a síntese em uma escala de quatro itens, realizada pelo site Qedu[1], o percentual de conhecimento dos alunos é: Insuficiente 21,53%, Básico 55,74%, Proficiente 19,69% e Avançado 3,04%. Ou seja, só 22,73% dos estudantes do Ensino Fundamental tem proficiência em Matemática. Desse modo, é evidente a necessidade de melhorar o ensino matemático, o que envolve formar um professor mais capacitado a ensinar na escola básica durante a graduação em licenciatura matemática.

Nos campos universitários, percebe-se a mobilização de culpar o domínio matemático dos professores do Ensino Básico pelo fracasso em lecionar matemática. Assim, as suas mobilizações majoritariamente envolvem continuar ensinando conteúdos matemáticos que normalmente não são abordados nas escolas, como: Cálculo, Álgebra Linear, Álgebra e Análise. Vale ressaltar que esses conteúdos são cruciais na graduação, porém esses devem ser abordados de forma mais direcionada ao ensino da matemática.

O fracasso do ensino matemático vai além dos problemas de domínio do conteúdo específico da matemática, envolvendo também – e principalmente – o não entendimento de como ensinar matemática durante a licenciatura. Essa disfunção se concentra na dissociação na formação pedagógica do conteúdo puramente matemático, uma vez que gera um docente incapaz de enxergar como construir o conhecimento na perspectiva do aluno, e, portanto, menos eficiente em ensinar. Em outras palavras, durante a graduação, o professor faz bacharelado e licenciatura de forma conjunta, o que torna a forma de tratar o conteúdo menos aplicável à licenciatura.

Durante a licenciatura de matemática, as disciplinas pedagógicas pouco trabalham como ensinar a matemática nas escolas. Os conteúdos são abordados de forma geral, isto é, como deveria ser o ensino de todas as disciplinas, História, Português, Matemática, Geografia dentre outras.

Provavelmente, tinha-se convicção que os estudantes, ao misturar os conhecimentos matemáticos com os pedagógicos, facilmente elaborariam um ensino de matemática de qualidade. Porém, não é isso que acontece. Normalmente, com a falta do conhecimento específico de como ensinar matemática, os docentes tendem a reproduzir de forma precária como eles foram ensinados. Visando a melhorar o ensino matemático nas escolas, é crucial que o licenciando aprenda durante a graduação tanto como se constrói o conhecimento ou como ocorre o aprendizado matemático quanto as diferentes formas de abordar os seus conteúdos.

[1] **Distribuição dos alunos por nível de proficiência**. Disponível em: <https://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia>. Acesso em 04 jul. 2021.

Como exemplo da centralização do conteúdo matemático no curso de bacharelado e licenciatura envolvendo os números inteiros se resume em apresentar a definição de operação, apresentar os axiomas e seguir fazendo deduções das proposições seguintes como:

Operações

Dado um conjunto não vazio A, uma operação em A é qualquer função de $A \times A$ em A. O papel de uma operação é "transformar" dois elementos de A em um elemento em A. As operações geralmente são representadas por símbolos em vez de letras. Por exemplo, em vez de denotarmos uma operação por $f : A \times A \to A$, optamos por representar por algo assim: $* : A \times A \to A$. Além disso, a imagem de um par ordenado (a, b) pela operação $*$ é denotado $a * b$ em vez de $*(a, b)$. Esta última notação que vem da versão clássica $f(a, b)$ de funções.

As principais propriedades de uma operação $* : A \times A \to A$ são as seguintes:

1. $a * b = b * a$, quaisquer que sejam $a, b \in A$. (comutatividade)
2. $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in A$. (associatividade)
3. Existe $e \in A$ tal que $e * a = a * e = a$, qualquer que seja $a \in A$. (existência do neutro)
4. Para cada $a \in A$, existe $\tilde{a} \in A$ tal que $a * \tilde{a} = \tilde{a} * a = e$. (existência do inverso)

Usamos a notação $(A, *)$ para indicar que A está munido de uma operação $*$. Quando $*$ satisfaz as quatro propriedades acima $(A, *)$ é dito um grupo abeliano.

Axiomas dos Inteiros

O conjunto dos números inteiros é denotado por $\mathbb{Z}$ e é caracterizado pela lista de axiomas abaixo que introduz em $\mathbb{Z}$ duas operações e uma relação de ordem.

1. $\mathbb{Z}$ é munido de duas operações "+" e "·" que satisfazem as propriedades de operações conforme a tabela abaixo:

	$+$	$\cdot$
comutatividade	✔	✔
associatividade	✔	✔
existência do neutro	✔	✔
existência do inverso	✔	

   OBS: Aqui também assumimos que o neutro de uma operação é distinto do neutro da outra. Denotamos o neutro da soma por 0 e do produto por 1, como usualmente é feito.

2. Vale a **distributividade** entre as duas operações: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

3. Vale a **lei de integridade** : $a \cdot b = 0$ implica $a = 0$ ou $b = 0$.

4. $\mathbb{Z}$ possui uma relação de ordem $\leq$ que satisfaz o seguinte:

   a) $a \leq a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$; **(reflexiva)**

   b) $a \leq b$ e $b \leq a$ implica $a = b$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$; **(antissimétrica)**

   c) $a \leq b$ e $b \leq c$ implica $a \leq c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$; **(transitiva)**

   d) $a \leq b$ e $c \in \mathbb{Z}$ implica $a + c \leq b + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$; (compatibilidade com a soma)

   e) $a \leq b$ e $0 \leq c$ implica $a \cdot c \leq b \cdot c$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. **(compatibilidade com o produto)**

   f) Todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente possui um mínimo. **(boa ordem)**

É a partir destes axiomas que tentamos provar tudo mais a respeito de números inteiros.

Tal abordagem é menos cabível para a licenciatura, pois para os números inteiros uma ementa mais completa envolve a história da matemática, conhecimento específico pedagógico para o ensino desse assunto, metodologia de Resolução de Problemas e propostas de ensino na escola básica.

Abordar perspectiva histórica da matemática não só demonstra o processo de descoberta do conhecimento, como também evidencia possíveis entraves no aprendizado. Segundo Hadamard[2], "[...] a formalização de teorias proporciona o desaparecimento ou a desconsideração dos vestígios iniciais da descoberta ou da invenção matemática" (HADAMARD, 1945. p. 233, apud RIPOLL, p. XX, 2016). Em outras palavras, a abordagem puramente algébrica perde o entendimento de como o conteúdo foi produzido, enquanto a concepção histórica o mantém. A história da matemática como processo de descobrimento também pode ser utilizada para o ensino da matemática na escola básica.

A dificuldade de aceitação dos números inteiros pela comunidade matemática é um exemplo histórico dos impasses da construção do conhecimento matemático. Segundo Ripoll (2016), nos séculos XVI e XVII os números negativos apareciam na resolução de equações, mas os matemáticos consideravam esses resultados falsos ou impossíveis. Um exemplo é o matemático Cardano que não admitia que "menos multiplicado por menos pudesse ser mais". Só a partir do XVIII, com a representação geométrica dada pelo matemático suíço Jean-Robert Argand, que os números negativos foram realmente aceitos. Assim, faz sentido a proposta do modelo da reta numérica com setas, explicitado no capítulo 4, que se utiliza dessa representação geométrica proposta por Argand, na qual ele atribui "um sentido às operações com números negativos, como, por exemplo, à multiplicação por -1, que passa a ser vista como uma reflexão em relação à origem" (RIPOLL, 2016, p. 11).

Segundo Eves (2011), foi na China que se encontrou o primeiro indício de números negativos em um documento intitulado *K'ui-ch'ang Suanshu* ou *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, da Dinastia Han (206 a.C., -221 d.C.). Ele foi reescrito por outros matemáticos na Dinastia Sung em 1115, sendo Li Yeh um deles.

> Li Yeh merece menção especial por ter introduzido uma notação para números negativos que consistia em fazer um traço diagonal no dígito da direita de um número escrito no sistema científico ou no sistema de barras chinês. Assim, -10724 apareceria na forma

[2] HADAMARD, J. **An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field**. United Kingdom: Dover, 1945.

Figura 90 – Representação de número negativo

Fonte: (EVES, 2011, p. 246).

Portanto, tem-se indício do uso dos números inteiros pelo menos dois séculos antes de Cristo. Contudo é apenas no século XVIII depois de Cristo que começa a sua aceitação e somente no século XIX ocorre a sua formalização. Desse modo, é compreensível que o aluno demore para assimilar esse conteúdo.

Outro fato histórico intrigante é o uso dos números inteiros no comércio. Segundo Medeiros (1992), os hindus já atribuíram o significado de débito para os números negativos e posteriormente no mercantilismo utilizou-se os números positivos para entrada de dinheiro e os negativos para saída. Esse uso no cotidiano contribuiu para dificuldade de aceitar que "$- \times - = +$", pois como dívidas multiplicadas por dívidas resultaria em crédito? Essa é mais uma constatação histórica que nos ensina a educar, por nos lembrar que o uso desse modelo não é indicado no ensino da matemática, porque irá criar um obstáculo no entendimento das operações envolvendo os números negativos.

É imperativo que a formação do professor viabilize conhecimento específico pedagógico para o ensino dos números inteiros, que é, na citação de Ripoll (2016) sobre Schubring (2014)[3],

> [...] a necessidade de um meta saber do professor, isto é, um *saber sobre o saber* Schubring (2014): o professor de matemática deve conhecer não apenas os conceitos e teorias a ensinar, como também compreender a própria natureza desse conhecimento (RIPOLL, 2016, p. X, grifo do autor).

Na abordagem com números inteiros esse "meta saber" envolve a consciência de que se está ampliando o conhecimento que os alunos têm dos números naturais para o dos números inteiros, uma vez que no 7° ano os estudantes têm o seu primeiro contato com o conjunto dos números inteiros. Com isso, segundo Ripolli (2016), o zero passa a ter dois significados: ausência e referencial. O significado do sinal "-" passa a ter três atribuições: indicar que o número é negativo, operação de subtração e operação de oposto. Outra novidade é a compreensão de que os números inteiros são quantidades orientadas. Portanto, esses números são utilizados para modelar opostos, como altitude e profundidade; subir e descer; avançar e voltar; gols pró e gols contra; dentre outros.

Tendo em vista os benefícios da metodologia de Resolução de Problemas tanto no ensino de números inteiros quanto dos demais conteúdos matemáticos na escola básica, o seu uso deve ser melhor abordado na licenciatura de matemática. Ou seja, deve haver sugestões de modelos que propiciem essa metodologia, por exemplo, o método de duas cores

[3] SCHUBRING, G. A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In Roque, T, & Giraldo, V. (eds.), **O Saber do Professor de Matemática**: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

colocado no capítulo 4, além de trabalhar as 10 etapas dessa metodologia, explicitadas no capítulo 2.

Os graduandos em licenciatura matemática devem ser ensinados a elaborar proposta de ensino, bem como ter contato com elas no decorrer do curso, uma vez que essas são utilizadas no exercício da profissão. Isto é, deve se mostrar fontes confiáveis, critérios de seleção das atividades, como estabelecer que uma atividade foi bem sucedida e ajudá-lo a ter um repertório de propostas, como a do capítulo 4.

Em suma, o curso de licenciatura em matemática deve se modificar para que não mais se aborde pedagogia e conteúdo matemático de forma dissociada, mas sim com viés para o ensino. Com o intuito de formar um professor que, conhecendo o processo de aprendizado matemático bem como as suas ferramentas, seja mais capaz de lecionar.

6 CONCLUSÃO

No transcorrer desta dissertação, a metodologia de Resolução de Problemas mostrou-se capaz tanto de despertar o interesse dos estudantes quanto de melhorar a sua competência em números inteiros, principalmente ao utilizá-la com atividades que envolvem materiais manipulativos e novas tecnologias, tendo em vista que essas acrescem ao processo de aprendizado em concordância com as concepções da neurociência por terem o caráter mais envolvente, concreto e que abrange o uso de uma quantidade maior de sentidos. A aplicação da proposta de ensino de números inteiros neste trabalho possibilitou averiguar tais benefícios por meio das respostas dos alunos no questionário de satisfação e pela observação da professora em sala de aula.

Com o intuito de aplicar essa metodologia, o professor da escola básica precisa modificar a utilização do livro didático. Embora o livro seja uma fonte de problemas que podem ser usados com o objetivo de ensinar matemática por meio da resolução de problemas, na maioria das questões é necessário fazer algumas modificações para adaptá-las a essa metodologia. O livro também é um recurso que pode ser utilizado na perspectiva de aprender matemática para resolver problemas.

Da mesma forma, os cursos de licenciatura em matemática carecem dispor dessa metodologia em suas ementas. Nesse contexto, também deve-se abordar proposta de ensino para a escola básica que envolvem a metodologia de Resolução de Problemas, tal qual a proposta neste trabalho no capítulo 4, além de tratar os conteúdos matemáticos com um viés mais pedagógico.

Em resumo, sugerimos que sejam elaboradas sequências didáticas que envolvam a metodologia de Resolução de Problemas e os conteúdos abordados no Ensino Básico, visando a auxiliar a utilização da metodologia de resolução de problemas e assim angariar seus benefícios.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, 2019. 595 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 29 maio 2020.

__________. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Fundamental – Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. 142 p.

__________. Ministério da Educação. **PNLD 2020**: Matemática – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019. Disponível em: <https://pnld.nees.ufal.br/assets−pnld/guias/Guia_pnld_2020_pnld2020−matematica.pdf>. Acesso em: 26 mai 2021.

Confederação Brasileira de Futebol. Campeonato Brasileiro de Futebol - Série A - 2020. Disponível em: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2020>. Acesso em: 13 jan. 2021.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática**: 7º ano, Ensino Fundamental. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

Distribuição dos alunos por nível de proficiência. Disponível em: <https://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia>. Acesso em: 04 jul. 2021.

Emociones con sonrisas. Disponível em: <https://es.dreamstime.com/emociones−con−sonrisas−image123035122>. Acesso em: 31 de jul. 2021.

FANTINI, P. **Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). São Carlos:USP/SP, 2018.

FERREIRA, P. L. A. V. **A opção dos alunos pelas tecnologias**: Um olhar sobre a utilização do Sketchpad na resolução de problemas. Dissertação (Mestrado em Matemática, Especialização em Matemática para o Ensino). Faro: 2007.

GIOVANNI, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A Conquista Matemática**: 7º ano, Ensino Fundamental. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

HADAMARD, J. **An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field**. United Kingdom: Dover, 1945.

HIEBERT, J.,CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., FUSON, K., WEARNE, D., MURRAY, H., OLIVIER, A., HUMAN, P. **Making sense**: Teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemenn.

LUNA, E. L. S. **O pensamento dos comerciantes medievais como elemento textual para o ensino dos números inteiros na educação básica**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). São Carlos:USP/SP, 2019.

OAKLEY, B. **Aprendendo como aprender**: como ter sucesso em matemática, ciências e qualquer outra matéria (mesmo se você foi reprovado em álgebra). Trad. Alexandre de Azevedo Palmeira Filho. São Paulo: Infopress Nova Mídia, 2015.

OLIVEIRA, A., A., G. **Motivando a Aprendizagem de Números Inteiros Por Meio de Materiais Manipuláveis**: Uma Experiência no Sétimo Ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Rio de Janeiro: Seropédica / UFRRJ, 2020.

ONUCHIC, L. d. l. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em resolução de problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. BOLEMA − Boletim de Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

__________, L. d. l. R. et al. (Orgs.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PHET. Linha Numérica: Inteiros. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line -integers/latest/number−line−integers_pt_BR.html> Acesso em: 23 jun. 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

__________, G. **O ensino por meio de problemas**. Revista do professor de Matemática, 07. Disponível: https://www.rpm.org.br/cdrpm/7/3.htm. Acesso em 10 abr. 2021.

REDLING, J. P. **A Metodologia de Resolução de Problemas**: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Bauru: UNESP/SP, 2011.

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. Livro do Professor de Matemática da Educação Básica – Números Inteiros, volume II. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31-42.

SCHUBRING, G. A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In: Roque, T, & Giraldo, V. (eds.). **O Saber do Professor de Matemática**: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1989.

THORNDIKE, E. L. **The new methods in Arithmetic**. 1921. Disponível em: < http://archive.org/stream/newmethodsinari00tho-goog#page/n136/mode/2up>. Acesso em: 23 out. 2013.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo Henrique Colonesse. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIEIRA, Í. N. **Aplicando Ideias de Polya na Resolução de Problemas de Geometria da Obmep para o Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Ilhéus: UESC//BA, 2020.