

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**



JESUINO MARTINS DE SOUZA NETO

NÚMEROS COMPLEXOS E FASORES

VITÓRIA – ES
ABRIL/2021

JESUINO MARTINS DE SOUZA NETO

NÚMEROS COMPLEXOS E FASORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Alancardek Pereira Araujo
Orientador

Moacir Rosado Filho
Coorientador

Jesuino Martins de Souza Neto
Aluno

VITÓRIA – ES
ABRIL/2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e pela companhia nos momentos difíceis.

Agradeço à minha mãe Ednalva pelo amor incondicional, e à minha irmã Iana que sempre manda uma palavra de carinho, mesmo estando longe.

Meu agradecimento especial à minha esposa Ludimila, pelo companheirismo e cuidado diário.

Também quero agradecer ao professor Florêncio pela consideração para com os alunos, aos amigos do Profmat pelo cooperativismo em compartilhar conhecimento e principalmente ao professor Alancardek pela orientação no desenvolvimento da dissertação.

Por fim, agradeço ao meu pai William, que me ensinou a resolver as operações básicas de matemática e me fez tomar gosto pela disciplina. Um dos ensinamentos mais importantes que recebi dele, ainda criança, foi que **o conhecimento** é um dos bens mais preciosos, por ser algo que não pode ser roubado. Sua partida nos deixou em uma tristeza profunda, mas a chegada do seu neto Joaquim trouxe um renovo para nossas vidas.

Uma pequena homenagem ao professor Florêncio...

O bom professor

Certo dia, a Matemática, uma dama respeitada, sentou-se em uma roda de conversa. Sem perder a oportunidade, um jovem que passava por apuros na escola puxou assunto com ela:

- Eu preciso de você.

Um aluno com boas notas, que ouvia a conversa, fingiu não estar ouvindo. E os professores estavam compenetrados, discutindo entre si a veracidade de um Teorema.

Os anos de experiência da Matemática a fizeram compreender que, numa conversa a dois, se não forem tomados os devidos cuidados, ela pode ser mal interpretada... Principalmente em conversas com quem ela tenha pouca intimidade.

Eis que essa senhora se impôs, e com toda a sua elegância, dirigindo-se aos professores pediu ajuda.

O mau professor “fez pouco caso”.

E o bom professor perdeu um tempo (leia-se: investiu um tempo) para tentar fazer com que a Matemática e o bom estudante se entendessem.

RESUMO

De forma simples, um fasor pode ser definido como um vetor utilizado para representar uma onda senoidal. É uma ferramenta matemática bastante útil, em particular no ensino de circuitos de corrente alternada (CA). Todavia, para que o calendário letivo seja cumprido, muitas vezes, o ensino é feito saltando etapas, pois há pressa para que os alunos aprendam a fazer contas.

O trabalho que se segue versará sobre números complexos e fasores, explicando desde os conceitos básicos até suas aplicações.

É importante ressaltar que o assunto fasor não é algo trivial, e possui muitos detalhes para que seja plenamente compreendido. À medida que o tema é utilizado para fins práticos, seus conceitos acabam sendo deixados de lado. Com o presente trabalho, pretende-se construir um material didático capaz de orientar, de forma clara e com o rigor teórico necessário, o estudo sobre números complexos e fasores. Assim, ele poderá servir de referência para a aprendizagem e revisão do tema.

PALAVRAS-CHAVE: Números Complexos, Fasores, Fórmula de Euler, Tensão Elétrica, Corrente Elétrica.

ABSTRACT

To simplify, a phasor can be defined as a vector used to reproduce a sine wave. It is a very useful mathematical tool, in particular the teaching of alternating current (AC) circuits. However, for the academic calendar to be adhered to, teaching is often carried out after the stages, because it is necessary to pressure students to learn how to do math.

This dissertation will discuss complex numbers and phasors, explaining from the basic concepts to their applications.

It is important to emphasize that the phasor issue is not a trivial matter, and has many details to be fully understood. As the theme is used for practical purposes, its concepts end up being left out. With this work, we intend to build a didactic material capable of guiding, in a clear way and with the necessary theoretical rigor, the study of complex numbers and phasors. Thus, it will serve as a reference for learning and reviewing the theme.

KEYWORDS: Complex Numbers, Phasors, Euler Formula, Electric Voltage, Electric Current.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - $\sqrt{2}$ como ponto na reta.....	21
Figura 2 - Representação do par ordenado (a, b) no plano cartesiano.	33
Figura 3 - Vetor associado ao número complexo $z = a + ib$	35
Figura 4 - Alguns números complexos na representação vetorial.	36
Figura 5 - Soma de números complexos representada na Regra do Paralelogramo.....	36
Figura 6 - Significado geométrico do módulo de um número complexo.....	37
Figura 7 - Significado geométrico do conjugado do número complexo z	39
Figura 8 - Número complexo z representado na forma vetorial.....	43
Figura 9 - Significado geométrico da multiplicação de dois números complexos.....	46
Figura 10 - Gráficos de a^x para $a > 1$ e $a < 1$	46
Figura 11 - Representação Geométrica das raízes sextas de 1.	53
Figura 12 - Tensão alternada de 127V rms, 60Hz.....	54
Figura 13 - Tensões Elétricas v_a e v_b defasadas.....	58
Figura 14 - Representação gráfica do Fasor V_b	59
Figura 15 - Representação gráfica do Fasor V_a	59
Figura 16 - Representação de u no plano complexo.	62
Figura 17- Circuito elétrico com uma fonte de tensão e um resistor.....	66
Figura 18 - Variação de tensão e corrente no tempo, circuito puramente resistivo.....	68
Figura 19 - Diagrama fasorial para um elemento resistivo.....	68
Figura 20 - Indutor feito com um condutor enrolado em material ferromagnético.....	68
Figura 21 - Circuito elétrico com uma fonte de tensão e um Indutor.....	69
Figura 22 - Variação de tensão e corrente no tempo, circuito puramente indutivo.....	71
Figura 23 - Diagrama fasorial para um elemento indutivo.....	72
Figura 24 - Representação de um capacitor de placas paralelas.....	72
Figura 25 - Circuito elétrico com uma fonte de tensão e um Capacitor.....	73
Figura 26 - Variação de tensão e corrente no tempo, circuito puramente capacitivo.....	75
Figura 28 - Diagrama fasorial para um elemento capacitivo.....	75
Figura 28 - Circuito elétrico com impedâncias ligadas em série.....	77
Figura 29 - Circuito equivalente da associação de impedâncias em série.....	77
Figura 30 - Relação de equivalência entre os circuitos com impedâncias em série.....	77
Figura 31 - Circuito elétrico com resistor e indutor em série.....	78

Figura 32 - Circuito equivalente de associação série de Resistor e Indutor.	78
Figura 33 - Formas de onda de tensão e corrente em escala real, circuito com resistor e indutor em série.	79
Figura 34 - Formas de onda de tensão e corrente em fora de escala, circuito com resistor e indutor em série.	80
Figura 35 - Tensões em cada um dos elementos do circuito da Figura 31.	81
Figura 36 - Circuito elétrico com impedâncias ligadas em paralelo.	82
Figura 37 - Representação de um nó em um circuito elétrico.	82
Figura 38 - Representação das correntes elétricas em uma associação de impedâncias em paralelo.	83
Figura 39 - Relação de equivalência entre os circuitos com impedâncias em paralelo.	83
Figura 40 - Circuito elétrico com Resistor e Capacitor em paralelo.	84
Figura 41 - Circuito equivalente ao circuito da associação de Resistor e Capacitor em paralelo.	84
Figura 42 - Representação das correntes elétricas em cada componente do circuito.	85
Figura 43 - Diagrama fasorial das correntes elétricas do circuito com Resistor e Capacitor em paralelo.	86
Figura 44 - Variação de tensão e corrente elétrica no tempo. Circuito com Resistor e Capacitor em paralelo.	86
Figura 45 - Gerador elementar com apenas uma bobina.	87
Figura 46 - Gerador Trifásico Elementar.	88
Figura 47 - Tensões elétricas trifásicas variando no tempo.	88
Figura 48 - Diagrama Fasorial do sistema de tensões trifásico.	89
Figura 49 - Diagrama Fasorial das tensões de linha.	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades importantes dos números complexos.....	57
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	UMA BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	13
2.1	Al-Khwarizmi	13
2.2	Baskara e Sridhara	13
2.3	Fibonacci	13
2.4	Cardano e Tartaglia	14
2.5	A Fórmula de Cardano é sempre válida?	17
2.6	Rafael Bombelli	18
2.7	Leonhard Euler	19
3	A ARITMÉTICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	20
3.1	Conjuntos Numéricos	20
3.2	Corpos e Corpos Ordenados	22
3.3	O Corpo dos Números Complexos	25
3.4	Alguns problemas envolvendo a aritmética dos números complexos	31
3.5	Representação dos números complexos como pontos do plano cartesiano	32
3.6	Representação dos números complexos como vetores no plano cartesiano	35
3.7	Módulo de um número complexo	37
3.8	Conjugação	39
3.9	Formas Polar e Exponencial	43
3.10	Potências e Raízes n-ésimas	49
4	FASORES	54
4.1	Da necessidade de fasores	54
4.2	Resumo e notação dos números complexos	56
4.3	Representação de um fasor	57
4.4	Justificativa matemática para utilização de fasores	59
5	UTILIZAÇÃO DE FASORES EM CIRCUITOS ELÉTRICOS	66
5.1	Resistores	66
5.2	Indutores	68
5.3	Capacitores	72
5.4	Impedância	75

5.5 Associações de elementos passivos.....	76
5.5.1 Associação de impedâncias em série.....	76
5.5.2 Associação de impedâncias em paralelo	82
5.6 Sistemas Trifásicos.....	86
6 CONCLUSÃO	92
7 REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho irá discorrer sobre números complexos e fasores, desde os conceitos iniciais até as suas aplicações.

O contato inicial com números complexos se dá, na maioria das vezes, no ensino médio, pois é importante falar com os alunos sobre as soluções de algumas equações de segundo grau que não se enquadram no conjunto dos números reais. Entretanto, os números complexos também podem ser utilizados para resolver vários problemas de ordem algébrica e geométrica, de forma mais simples do que o habitual, e isso é pouco utilizado no ensino médio.

Mas o que é um fasor? De acordo com Clovis Goldemberg, em seu artigo de março de 2007 sobre o assunto, um fasor é “um número complexo, que representa a magnitude e a fase de uma senoide”. No mesmo artigo, ele explica o surgimento dos estudos sobre fasores desenvolvidos por Charles Proteus Steinmetz, e aborda, ainda, a dificuldade deste em explicar a utilidade do tema, diante de sua complexidade.

O objetivo principal da utilização de fasores é a simplificação de cálculos que envolvem equações com funções cossenoidais (ou senoidais). Tal estudo tem aplicação fundamental em circuitos elétricos de corrente alternada.

O trabalho com fasores contribui muito para o ensino da eletricidade, já que circuitos elétricos são pré-requisitos para várias outras disciplinas: eletrônica, máquinas elétricas, transmissão e distribuição de energia elétrica... Daí a justificativa para se escrever sobre o assunto.

Com a dissertação que se segue, pretende-se criar um material que auxilie professores e alunos do ensino médio e profissionalizante no entendimento dos fundamentos de números complexos e fasores, pois a quantidade de detalhes aqui contemplados não caberia em um livro específico de circuitos elétricos.

Antes de entrar na parte específica, referente a fasores, alguns conceitos serão lembrados, pois são necessários para a compreensão do conteúdo pretendido.

2 UMA BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Um fato surpreendente para muitos é que os números complexos surgiram da necessidade de se resolver equações cúbicas, e não, como geralmente se acredita, equações quadráticas. Abaixo, descrevemos uma sequência de acontecimentos históricos, em ordem cronológica, que conduziram ao conceito de número complexo. Para isso, tomaremos, como referência, o artigo “História dos Números Complexos”, de Cristina Cerri e Martha S. Monteiro, (CERRI; MONTEIRO, 2001).

2.1 Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi (780-850) (Muḥammad ibn Mūsā Al-Khwārizmī) foi um matemático, astrônomo, astrólogo e geógrafo persa. Seu *Livro da Restauração e do Balanceamento* apresentou a primeira solução sistemática das equações lineares e quadráticas. Ele é considerado o fundador da Álgebra.

2.2 Baskara e Sridhara

Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas em Álgebra, e Baskara é o nome que imediatamente vem a nossa memória, quando falamos de equações do 2º grau. Entretanto, a fórmula de Baskara não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara, no século IX. Nesta época, ao se resolver uma equação quadrática pela fórmula de Baskara, caso ocorresse uma raiz de número negativo, simplesmente se dizia que a equação não possuía soluções.

2.3 Fibonacci

Os métodos de álgebra conhecidos pelos persas foram introduzidos na Itália pela tradução para o latim do livro de Al-Khwarizmi, por Gerard de Cremona (1114-1187), e pela obra *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci.

No *Liber Abaci*, Fibonacci introduziu os numerais hindu-arábicos na Europa, além de discutir muitos problemas matemáticos, entre os quais estava um particularmente importante, que era resolver a seguinte equação cúbica: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

2.4 Cardano e Tartaglia

O interesse pelo estudo da Matemática ressurgiu na Europa, mais especificamente na Itália, no século XVI. Lá, em meio à disputa, entre os matemáticos Gerolamo Cardano e Niccolò Fontana Tartaglia, pela resolução da equação do 3º grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes, assim as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos surgiram. Descreveremos com um pouco mais de profundidade esta conturbada história:

Girolamo Cardano nasceu em Pavia, em 1501, e faleceu em Roma, em 1576. Sua vida foi marcada por contrastes e extremos. Sabe-se que era excepcional cientista, mas que também era violento, traidor e invejoso, dentre outras qualificações pouco edificantes. Foi autor do *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu a ideia de probabilidade, e também ensinou maneiras de trapacear nos jogos. Sua maior obra, entretanto, foi o *Ars Magna*, publicada na Alemanha, em 1545, considerado, na época, o maior compêndio algébrico existente.

Nicolò Fontana, apelidado de Tartaglia, só tinha em comum com Cardano a nacionalidade italiana e o talento matemático. Nascido em Brescia, em 1500, durante a infância pobre, foi gravemente ferido por golpes de sabre e, por causa deste incidente, ficou com uma profunda cicatriz na boca, o que lhe provocou um permanente defeito na fala. Daí ter sido apelidado de Tartaglia, que significa gago. Ao longo de sua vida, publicou diversas obras, mas o que o colocou, definitivamente, nos anais da Matemática foram suas disputas com Cardano. Consta que, por volta de 1510, um matemático italiano de nome Scipione del Ferro encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo: $x^3 + px + q = 0$

Mas Scipione del Ferro morreu sem publicar sua descoberta. Seu aluno, Antonio Maria Fior, conhecia tal solução e tentou ganhar notoriedade com ela. Na época, eram comuns os desafios entre sábios. Como Tartaglia era um nome que começava a se destacar nos meios culturais da época, Fior propôs um desafio a ele. Tartaglia, apesar de não saber resolver ainda tais equações, aceitou o desafio, confiando em seu potencial. Sabendo que Fior conhecia a solução das equações acima citadas, Tartaglia não só deduziu a resolução para este caso, como também resolveu as equações do tipo: $x^3 + px^2 + q = 0$

O resultado deste desafio foi que Fior saiu humilhado.

Nesta época, Cardano estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis*, que continha ensinamentos sobre Álgebra, Aritmética e Geometria. Ao saber que Tartaglia achara a solução geral da equação de grau 3, pediu-lhe que a revelasse, para que fosse

publicada em seu próximo livro. Tartaglia não concordou, alegando que ele mesmo iria publicar sua descoberta. Cardano acusou-o de mesquinho e egoísta, e não desistiu. Após muitas conversas e súplicas e jurando não divulgar tal descoberta, ele conseguiu que Tartaglia lhe revelasse a solução. Conforme se poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e, em 1545, fez publicar na *Ars Magna* a fórmula de Tartaglia. No final, como em muitos outros casos, a posteridade não fez justiça a Tartaglia: sua fórmula é até hoje conhecida como "**Fórmula de Cardano**".

Agora, vamos conhecer a fórmula que gerou tanta polêmica. Considere a equação geral do 3º grau: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Fazendo a seguinte mudança de variáveis: $x = y - a/3$, tem-se: $y^3 + (b - a^2/3)y + ((2a^3)/27 - ab/3 + c) = 0$.

Ou seja, a equação de terceiro grau proposta, pode sempre ser posta no formato:

$$y^3 + py + q = 0, \text{ onde, } p = b - a^2/3 \quad ; \quad q = (2a^3)/27 - ab/3 + c.$$

A ideia de Tartaglia foi supor que uma solução da equação $y^3 + py + q = 0$ tem o seguinte formato: $y = A + B$.

Ao fazer esta substituição na equação obtemos $(A + B)^3 + p(A + B) + q = 0$. Desenvolvendo:

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + p(A + B) + q = 0 \Rightarrow$$

$$A^3 + B^3 + A(3AB) + B(3AB) + p(A + B) + q = 0 \Rightarrow$$

$$A^3 + B^3 + 3AB(A + B) + p(A + B) + q = 0$$

Para que a última igualdade apresentada seja verdadeira, basta que:

$$3AB = -p$$

$$A^3 + B^3 = -q$$

ou ainda,

$$A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}$$

$$A^3 + B^3 = -q$$

Perceba que a soma e o produto dos números A^3 e B^3 são conhecidos, logo, estes são soluções da seguinte equação de segundo grau: $X^2 + qX - p^3/27 = 0$.

Mas as soluções das equações acima são:

$$X_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$X_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

portanto, basta tomar $A^3 = X_1$ e $B^3 = X_2$, ou seja:

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como a solução da equação $y^3 + py + q = 0$ tem o formato $y = A + B$, obtém-se a **Fórmula de Cardano**:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Sem esquecer que $x = y - a/3$.

E esse valor de x seria uma solução para a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2.5 A Fórmula de Cardano é sempre válida?

Um problema que levou os matemáticos à descoberta dos números complexos foi a solução da equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$.

É simples verificar que: $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$. Assim, $x = 4$ é uma solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Ao dividir ambos os lados da igualdade por $x - 4$, temos:

$$\frac{x^3 - 15x - 4}{x - 4} = x^2 + 4x + 1$$

As raízes de $x^2 + 4x + 1 = 0$, são: $x_1 = -2 + \sqrt{3}$ e $x_2 = -2 - \sqrt{3}$. Portanto, todas as raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ são reais e iguais a: $4, -2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$.

Mas, se aplicarmos a *Fórmula de Cardano*, com $p = -15$ e $q = -4$, obtém-se:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4 - 125 = -121$$

Assim sendo, uma solução seria: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Como mostrado na fórmula, ocorre raiz quadrada de -121 , um número negativo, mesmo a equação tendo todas as raízes reais.

Assim, questões realmente perturbadoras surgiram e não podiam ser ignoradas. Além da extração de raízes quadradas de números negativos, também nos deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida. Quando, nas equações de grau 2, a **Fórmula de Baskara** levava a raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a não existência de soluções. Agora, entretanto, nota-se que há equações de grau 3 com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos.

Não havia como negar que os números reais eram insuficientes para tratar de equações algébricas. O que estava acontecendo no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser

estendido. Ou seja, o objetivo é encontrar um conjunto mais amplo de números, que contenham os reais e, também, as soluções de equações algébricas.

2.6 Rafael Bombelli

Foi Rafael Bombelli, um engenheiro hidráulico e matemático nascido em Bolonha, Itália, em 1526, quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números. Conforme seu próprio relato, em 1572, no livro, *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua ideia foi supor que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente.

Considere novamente a igualdade: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Admitiremos que $\sqrt{-1}$ é um número (obviamente não real), mas que pode operar com os outros números, com as mesmas propriedades básicas dos números reais. Assim: $\sqrt{-c} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{-1}$. Além disso: $(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1})^2 = -1$

Mostraremos, seguindo estas regras, que:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = (2 + \sqrt{-121})$$

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = (2 - \sqrt{-121})$$

De fato, $(2 + \sqrt{-1})^2 = (2 + \sqrt{-1})(2 + \sqrt{-1}) = 4 + 2\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} + (\sqrt{-1})^2 = 3 + 4\sqrt{-1}$. Portanto,

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = (2 + \sqrt{-1})^2(2 + \sqrt{-1}) = (3 + 4\sqrt{-1})(2 + \sqrt{-1}) \Rightarrow$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 6 + 3\sqrt{-1} + 8\sqrt{-1} + 4(\sqrt{-1})^2 \Rightarrow$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{11^2(-1)} = 2 + \sqrt{-121}$$

A partir daí, pode-se chegar à seguinte conclusão:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Portanto, a **Fórmula de Cardano** produz a solução real $x = 4$ da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Os novos números introduzidos por Bombelli da forma $a + \sqrt{-b}$ ou $a + b\sqrt{-1}$, com a e b sendo números reais maiores que 0, são os **Números Complexos**.

Historicamente, é atribuído a Bombelli a criação dos números complexos. O famoso matemático alemão, Gottfried Wilhelm Leibniz, ao ler o livro *L' Algebra* de Bombelli, elogiou o autor, como um "mestre notável da arte analítica".

2.7 Leonhard Euler

O matemático suíço, Leonhard Euler, introduziu a notação $i = \sqrt{-1}$, e visualizou os números complexos como pontos do plano em coordenadas retangulares. Euler usou a fórmula $x + iy = r(\cos\theta + isen\theta)$, e visualizou as raízes da equação $z^n = 1$ como os vértices de um polígono regular de n lados.

Ele também definiu a exponencial complexa: $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$. E provou a famosa fórmula: $e^{i\pi} = -1$.

3 A ARITMÉTICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

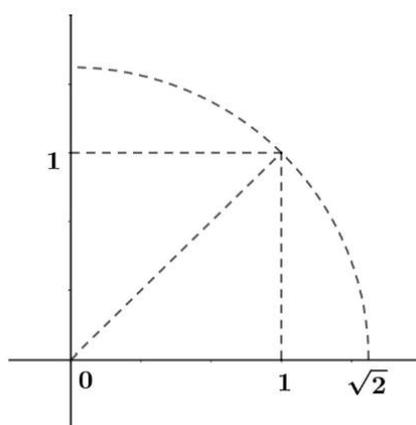
3.1 Conjuntos Numéricos

No conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, uma simples equação como $x + 1 = 0$ não possui solução, pois no conjunto dos números naturais não existem números negativos. Já se considerarmos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, obtido de \mathbb{N} , agregando os simétricos aditivos, a equação $x + 1 = 0$, e mais geralmente $x + n = 0$, admite uma solução em \mathbb{Z} , e note que, o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. No conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros, a equação $2x + 1 = 0$ não possui solução, pois o conjunto dos números inteiros não contém a fração ou número racional $1/2$. Agora considerando o conjunto $\mathbb{Q} = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ dos números racionais, a equação $2x + 1 = 0$ admite solução, e, mais geralmente, as equações da forma $mx + n = 0$, com m e n inteiros, admitem solução em \mathbb{Q} , e além disso, se identificarmos o número inteiro n com a fração $n/1$, percebe-se que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais, isto é, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Conclui-se que, em \mathbb{Q} , qualquer equação do primeiro grau em uma variável, da forma $rx + s = 0$, com r e s números racionais, admite solução, além disso, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Assim, podemos pensar que os conjuntos numéricos evoluem para que possamos resolver cada vez mais equações.

Quando passamos a considerar equações do segundo grau, tais como $x^2 - 2 = 0$, o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais não necessariamente é suficiente para conter soluções. De fato, os gregos da antiguidade já sabiam que o número $\sqrt{2}$ não é uma fração, ou seja, não é um elemento do conjunto \mathbb{Q} dos números racionais. Mas, eles também queriam representar geometricamente os números como pontos de uma reta, e no conjunto \mathbb{Q} das frações, sabe-se que, dadas duas frações f_1 e f_2 , o ponto médio, $(f_1 + f_2)/2$, é uma outra fração. Assim, intuitivamente, entre dois números racionais quaisquer, sempre existe um outro número racional, o ponto médio por exemplo. Daí, quando se pensa no conjunto dos números racionais como pontos de uma reta, a intuição pode levar à conclusão de que não existem "buracos", isto é, regiões sem números racionais na reta. No entanto, uma simples construção geométrica, como aquela mostrada na Figura 1, onde temos no plano com os dois eixos coordenados, um quadrado de lados de comprimento 1 e com o vértice inferior esquerdo

coincidindo com a origem do sistema de coordenadas. Pelo **Teorema de Pitágoras**, o comprimento da diagonal deste quadrado é igual a $\sqrt{2}$, então, considerando um arco de círculo no primeiro quadrante, com centro na origem e raio coincidindo com a diagonal do quadrado, este círculo intersecta o eixo horizontal num ponto de coordenada $\sqrt{2}$. Desta forma, os gregos concluíram que não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais e os pontos da reta. Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, a equação do segundo grau $x^2 - 2 = 0$ não admite solução no conjunto \mathbb{Q} dos números racionais. Agora, se os pontos da reta não podem ser representados pelos números racionais \mathbb{Q} , então, qual seria este conjunto que representa os pontos da reta? Este é o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Os gregos antigos, pelo que se conhece, ainda não tinham recursos matemáticos para caracterizar o conjunto dos números reais \mathbb{R} , apenas se sabia que o conjunto dos números reais, identificado com os pontos de uma reta, deveria conter o conjunto dos números racionais, isto é, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. A caracterização dos números reais e sua construção, partindo dos números racionais, só foi feita no século XIX, com os trabalhos do matemático alemão, R. Dedekind. Desta forma, nossos principais conjuntos numéricos são tais que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, e em cada conjunto extensão, pode-se resolver equações que não possuem solução no anterior.

Figura 1 - $\sqrt{2}$ como ponto na reta.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Devido ao fato de, no conjunto dos números reais não existir raiz quadrada de número negativo, temos que muitas equações polinomiais não possuem soluções em \mathbb{R} , por exemplo

em $x^2 + 1 = 0$. Na próxima seção, definiremos um conjunto de números \mathbb{C} , que contém o conjunto \mathbb{R} dos números reais, e que possui a propriedade de ser "Algebricamente Fechado", o que significa que, toda equação polinomial $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ admite solução em \mathbb{C} .

3.2 Corpos e Corpos Ordenados

Uma **Estrutura Algébrica** é um conjunto munido de uma ou mais operações entre seus elementos e, dependendo das propriedades das operações, estas recebem nomenclatura de **Grupo**, **Anel**, **Corpo**, **Álgebra**, etc. A estrutura algébrica mais importante no nosso contexto é o **Corpo**.

Definição 3.2.1. Um **Corpo** é um conjunto não vazio K , onde estão definidas duas operações: a adição $K \times K \rightarrow K$, $(x,y) \rightarrow x+y$, e a multiplicação $K \times K \rightarrow K$, $(x,y) \rightarrow x \cdot y$, ambas satisfazendo as nove propriedades, abaixo, chamadas **Axiomas de Corpo**.

1. A adição é comutativa.

$$\text{Para todos } x, y \in K, \quad x + y = y + x$$

2. A adição é associativa.

$$\text{Para todos } x, y \in K, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

3. Existência do elemento neutro da adição.

Existe um único elemento $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in K$.

4. Existência do simétrico aditivo de cada elemento de K .

Para cada $x \in K$, existe um elemento $-x \in K$, tal que $x + (-x) = 0$.

5. A multiplicação é comutativa.

$$\text{Para todos } x, y \in K, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

6. A multiplicação é associativa.

$$\text{Para todos } x, y, z \in K, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

7. Existência do elemento neutro da multiplicação.

Existe um único elemento $1 \in K, 1 \neq 0$, tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in K$.

8. Existência do inverso multiplicativo de cada elemento de K diferente de 0.

Para cada $x \in K, x \neq 0$, existe um elemento $x^{-1} \in K$, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

9. Distributividade da multiplicação com relação à adição.

Para todos $x, y, z \in K, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Observação 3.2.1. Uma consequência da Distributividade é a **Regra Multiplicativa dos Sinais**:

- $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
- $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Exemplo 3.2.1. No conjunto $\mathbb{Q} = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ dos números racionais, com as operações de Adição: $p_1/q_1 + p_2/q_2 = (p_1q_2 + p_2q_1)/q_1q_2$, e a Multiplicação: $p_1/q_1 \cdot p_2/q_2 = p_1p_2/q_1q_2$, pode ser verificado que todos os nove Axiomas de Corpo são satisfeitos. Desta forma, o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais, com a Adição e a Multiplicação de frações, é um corpo. Só para citar um exemplo, dado o número racional $p/q, p \neq 0$, seu inverso multiplicativo é $(p/q)^{-1} = q/p$.

Exemplo 3.2.2. O conjunto dos números reais \mathbb{R} com as operações de adição e multiplicação satisfaz os nove Axiomas de Corpo e, portanto, é um corpo.

Exemplo 3.2.3. Considere o conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ com as operações de adição e multiplicação definidas pelas regras:

Adição: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1$ e $1 + 1 = 0$

Multiplicação: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$ e $1 \cdot 1 = 1$

Verifica-se, sem dificuldades, que \mathbb{Z}_2 , com estas operações, satisfaz os Axiomas de Corpo e, assim, também é um corpo. Diferente de \mathbb{Q} e \mathbb{R} que são conjuntos infinitos, \mathbb{Z}_2 é um corpo finito com apenas 2 elementos, este é o menor corpo. Observe que em \mathbb{Z}_2 o simétrico de 1 é o próprio 1, ou seja, $-1 = 1$.

Definição 3.2.2. Um **Corpo Ordenado** é um corpo K munido de um subconjunto $P \subset K$ satisfazendo as seguintes condições:

- I. A adição e a multiplicação de elementos de P pertencem a P .

$$x, y \in P \Rightarrow x + y \in P \text{ e } xy \in P$$

- II. Se $x \in K$ tem-se exatamente uma das seguintes possibilidades:

$$x \in P, \text{ ou } x = 0, \text{ ou } -x \in P$$

O conjunto P é denominado o **Conjunto dos Elementos Positivos** do corpo ordenado K .

Num corpo ordenado K pode-se definir a ordem " $<$ " da seguinte forma:

Dados $x, y \in K$, diz-se que $x < y$ quando $y - x \in P$, diz-se, neste caso, que x é menor do que y .

Se $x < y$, pode-se introduzir o símbolo " $>$ ", e diz-se neste caso que $y > x$ (y é maior do que x).

Também, definem-se os símbolos: $x \leq y \Leftrightarrow x < y$ ou $x = y$, e $x \geq y \Leftrightarrow x > y$ ou $x = y$.

Nota-se que, $x \in P \Leftrightarrow x - 0 \in P \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow 0 < x$.

Portanto, dizer que $x \in P$ é equivalente a dizer que $x > 0$, ou seja, x é um elemento positivo de K .

O conjunto $-P = \{-x; x \in P\}$ chama-se o **Conjunto dos Elementos Negativos do Corpo** ordenado K . Assim, pode-se escrever $K = -P \cup \{0\} \cup P$ (união disjunta).

Observação 3.2.2. Num corpo ordenado K , o quadrado de qualquer elemento diferente de zero é positivo, ou seja, se $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Como $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$, segue-se que em todo corpo ordenado o 1 é positivo e, conseqüentemente -1 é negativo.

Observação 3.2.3. Se em algum corpo K existe um elemento $u \in K$, tal que $u^2 = -1$, então este corpo não possui uma estrutura de corpo ordenado como consequência imediata da Observação 3.2.2.

Observação 3.2.4. Todo corpo ordenado é um conjunto infinito pois, $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \dots$.

Daí, segue-se que o corpo \mathbb{Z}_2 não possui estrutura de corpo ordenado por ser finito.

Exemplo 3.2.4. O conjunto $\mathbb{Q} = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, dos números racionais com as operações de adição e multiplicação definidas no Exemplo 3.2.1 e, fazendo $P = \mathbb{Q}^+$ (as frações positivas) possui uma estrutura de corpo ordenado.

3.3 O Corpo dos Números Complexos

Rafael Bombelli chamou de números complexos, os números da forma $z = a + b\sqrt{-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assumindo $(\sqrt{-1})^2 = -1$, e que as propriedades das operações de adição e multiplicação permaneçam válidas para estes tipos de números, pode-se definir as operações de adição e multiplicação para estes números da seguinte forma:

Sejam $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}$ e $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{-1}$, então:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1\sqrt{-1}) + (x_2 + y_2\sqrt{-1}) \Rightarrow$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{-1} \quad (1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1\sqrt{-1}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{-1}) = x_1x_2 + x_1y_2\sqrt{-1} + y_1x_2\sqrt{-1} + y_1y_2(\sqrt{-1})^2$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{-1} \quad (2)$$

Consideraremos as fórmulas (1) e (2), nesta ordem, como as definições da adição e multiplicação dos números complexos z_1 e z_2 .

Para simplificar, consideraremos a notação de Euler $i = \sqrt{-1}$.

Assim, um número complexo é um número da forma $z = x + iy$, com x e y números reais. Além disso, $i^2 = -1$.

Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, então pelas fórmulas (1) e (2):

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (3)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (4)$$

Definição 3.3.1. (igualdade de números complexos) Os números complexos $z = x + iy$ e $w = u + iv$ são **iguais**, isto é, $z = w$, quando $x = u$ e $y = v$.

Teorema 3.3.1. O conjunto $\mathbb{C} = \{z = x + iy; x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$ com as operações de adição e multiplicação definidas nas fórmulas (3) e (4) é um corpo chamado o **Corpo dos Números Complexos**.

Prova: dados os números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$ mostraremos que valem as nove propriedades da definição de corpo.

1. Comutatividade da adição. Como consequência da comutatividade da adição de números reais:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) \end{aligned}$$

$$z_1 + z_2 = (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 + z_1$$

2. Associatividade da adição. Como consequência da associatividade da adição de números reais:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = ((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) + x_3 + iy_3 =$$

$$\begin{aligned} ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) + x_3 + iy_3 &= ((x_1 + x_2) + x_3) + i((y_1 + y_2) + y_3) = \\ x_1 + (x_2 + x_3) + i(y_1 + (y_2 + y_3)) &= x_1 + iy_1 + (x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3) = \\ x_1 + iy_1 + ((x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)) &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

3. Existência do elemento neutro da adição.

Mostraremos que o número complexo $0 = 0 + i0$ é o elemento neutro da adição, e chama-se zero. De fato, se $z = x + iy$, então:

$$z + 0 = (x + iy) + (0 + i0) = x + 0 + i(y + 0) = x + iy = z$$

4. Existência do simétrico aditivo.

Dado $z = x + iy$, desejamos obter o simétrico aditivo de z , ou seja, um número complexo $w = u + iv$ satisfazendo $z + w = 0$. Então, basta resolver para u e v a equação:

$$x + iy + u + iv = 0$$

$(x + u) + i(y + v) = 0 + i0$, pela igualdade dos números complexos, tem-se:

$$x + u = 0 \quad \text{e} \quad y + v = 0, \text{ e, portanto: } u = -x \quad \text{e} \quad v = -y.$$

Assim, o simétrico aditivo de $z = x + iy$ é $w = -x - iy$, o qual denotaremos por $-z$.

5. Comutatividade da multiplicação. Como consequência da comutatividade da multiplicação real,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) = \\ x_2x_1 - y_2y_1 + i(x_2y_1 + y_2x_1) &= (x_2 + iy_2) \cdot (x_1 + iy_1) = z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

6. Associatividade da multiplicação. Basta mostrar que os números complexos h e t dados por $h = (z_1 \cdot z_2)z_3$ e $t = z_1(z_2 \cdot z_3)$ são iguais.

7. Elemento neutro da multiplicação.

Mostraremos que o número complexo $1 = 1 + i0$, satisfaz $1 \cdot z = z$ para todo complexo z .

De fato, se $z = x + iy$:

$$1 \cdot z = (1 + i0) \cdot (x + iy) = (1 \cdot x - 0 \cdot y) + i(1 \cdot y + 0 \cdot x) = x + iy = z$$

8. Existência do inverso multiplicativo de todo $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$.

Seja $z = x + iy \neq 0$ e $w = u + iv$.

É suficiente resolver para $w = u + iv$ a equação $z \cdot w = 1 + i0$. Da seguinte forma:

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (u + iv) = 1 + i0 \Rightarrow$$

$$xu - yv + i(xv + yu) = 1 + i0$$

Pela igualdade de números complexos, temos as duas equações lineares nas variáveis u e v .

$$xu - yv = 1$$

e

$$xv + yu = 0$$

ou ainda,

$$xu - yv = 1$$

e

$$yu + xv = 0.$$

Resolvendo pela **Regra de Cramer**, temos que o determinante da matriz dos coeficientes é:

$$\Delta = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} = x$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} = -y$$

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Portanto, o inverso multiplicativo de $z = x + iy \neq 0$ é

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

w será denotado por z^{-1} .

9. Distributividade.

Basta mostrar que os números complexos h e t dados por, $h = z_1(z_2 + z_3)$ e $t = z_1z_2 + z_1z_3$, são iguais.

Definição 3.3.1. Seja $z = a + ib$ um número complexo. O número real a , chama-se *parte real* do número complexo z , denotada por $Re(z) = a$, e o número real b chama-se a *parte imaginária* de z , denotada por $Im(z) = b$.

Observação 3.3.1. Considere um número complexo $z = a + i0$ com a parte imaginária igual a 0. Identificaremos este número complexo com o número real $Re(z) = a$, ou seja, $a + i0 = a$. Com esta identificação temos que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, ou seja, os números reais são identificados com os números complexos com parte imaginária igual a zero. Assim, temos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Mostraremos agora que, para os números complexos com parte imaginária zero, as operações de adição e multiplicação complexas coincidem com as mesmas operações reais.

De fato, sejam $z = a + i0$ e $w = b + i0$ números complexos com partes imaginárias zero, note que pela identificação na Observação 3.3.1, $z = a$ e $w = b$.

- Adição: $z + w = a + i0 + b + i0 = a + b + i(0 + 0) = a + b + i(0) = a + b$
- Multiplicação: $z \cdot w = (a + i0) \cdot (b + i0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0) + i(a \cdot 0 + b \cdot 0) = a \cdot b + i0 = a \cdot b$

Além disso, pela identificação, o zero complexo $0 = 0 + i0$ coincide com o zero real, e o elemento neutro multiplicativo complexo $1 = 1 + i0$ coincide com o 1 real.

Estas propriedades juntas dizem que \mathbb{R} não é apenas um subconjunto de \mathbb{C} , mas um subcorpo do corpo dos números complexos, ou seja, com as operações de adição e multiplicação complexas, os números complexos com parte imaginária zero formam um corpo semelhante ao corpo dos números reais.

Observação 3.3.2. Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número real e $z = x + iy$ um número complexo. Então, a multiplicação $a \cdot z$ pode ser feita diretamente com resultado $a \cdot x + ia \cdot y$.

De fato, identificando $a = a + i0$, tem-se:

$$a \cdot z = (a + i0) \cdot (x + iy) = (a \cdot x - 0 \cdot y) + i(a \cdot y + 0 \cdot x) = a \cdot x + ia \cdot y$$

Observação 3.3.3. No corpo \mathbb{C} dos números complexos tem-se que:

$$i^2 = (0 + i1)^2 = (0 + i1) \cdot (0 + i1) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + i0 = -1$$

Assim, pela Observação 3.2.3., o corpo \mathbb{C} não possui uma estrutura de corpo ordenado, em particular, em \mathbb{C} os símbolos $<, \leq, >$ e \geq não estão definidos como no corpo dos números reais.

Observação 3.3.4. Para todo número complexo z , tem-se $z \cdot 0 = 0$.

De fato, se $z = x + iy$, então:

$$z \cdot 0 = (x + iy)(0 + i0) = (x \cdot 0 + y \cdot 0) + i(x \cdot 0 + y \cdot 0) = 0 + i0 = 0$$

Observação 3.3.5. Se z_1 e z_2 são números complexos, abreviaremos a multiplicação $z_1 \cdot z_2$ por $z_1 z_2$.

Observação 3.3.6. Se z e w são números complexos, com $w \neq 0$, então define-se:

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}$$

3.4 Alguns problemas envolvendo a aritmética dos números complexos

Exemplo 1. Sejam z e w números complexos, mostre que se $zw = 0$, então, ou $z = 0$ ou $w = 0$.

Solução. Se $z = 0$ ou $w = 0$, então, pela Observação 3.3.4, $zw = 0$.

Suponhamos que $z \neq 0$, então existe o inverso multiplicativo z^{-1} .

Se $zw = 0$, então, multiplicando por z^{-1} , tem-se:

$$z^{-1} \cdot (zw) = z^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (z^{-1}z) \cdot w = 0 \Rightarrow 1 \cdot w = 0 \Rightarrow w = 0$$

Similarmente, se $w \neq 0$ considere o inverso multiplicativo w^{-1} .

Se $zw = 0$, então multiplicando por w^{-1} , tem-se:

$$(zw)w^{-1} = 0 \cdot w^{-1} \Rightarrow z \cdot (w \cdot w^{-1}) = 0 \Rightarrow z \cdot 1 = 0 \Rightarrow z = 0$$

Exemplo 2. Determine os inversos multiplicativos de i e $1 - 2i$, e calcule $i/(1 - 2i)$.

Solução. Na demonstração da Propriedade 8 no Teorema 2.3.1. obtivemos que, se $z = x + iy \neq 0$, então

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Assim,

$$i = 0 + i1 \Rightarrow i^{-1} = \frac{0}{0^2 + 1^2} - i \frac{1}{0^2 + 1^2} = -i,$$

$$(1 - 2i)^{-1} = \frac{1}{1^2 + (-2)^2} - i \frac{(-2)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{1}{5} + i \frac{2}{5} \text{ e}$$

$$\frac{i}{1 - 2i} = i \cdot (1 - 2i)^{-1} = i \left(\frac{1}{5} + i \frac{2}{5} \right) = -\frac{2}{5} + i \frac{1}{5}.$$

3.5 Representação dos números complexos como pontos do plano cartesiano

Pode-se representar o conjunto \mathbb{R} dos números reais, como pontos de uma reta, da seguinte forma: dada uma reta horizontal no plano, primeiro fixa-se um ponto O , chamado a **origem** e associa-se a O o número real 0 . Agora, dado um número real $a \neq 0$, associa-se a a , um ponto $P(a)$ da reta da seguinte forma: se $a > 0$ $P(a)$ é o único ponto da reta, à direita de O , cuja distância até O é exatamente igual a a , e se $a < 0$ $P(a)$ é o único ponto da reta, à esquerda de O , cuja distância até O é exatamente igual a $|a|$. Em geral, representa-se $P(a)$ por a . Desta forma estabelece-se uma correspondência biunívoca entre o conjunto \mathbb{R} dos números reais e uma reta no plano.

Considerando agora o conjunto \mathbb{C} dos números complexos, faz sentido perguntar se existe alguma representação geométrica para \mathbb{C} . Para responder a esta questão, nota-se que para formar um número complexo é necessário um par de números reais, mais precisamente, dado um par ordenado de números reais (a, b) , associa-se a este par o número complexo $z = a + ib$ e, reciprocamente, dado um número complexo $z = a + ib$, associa-se a este, o par ordenado (a, b) . O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é, por definição, o produto cartesiano de \mathbb{R} por ele mesmo, ou seja, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$, desta forma, com a identificação usual de \mathbb{R}^2 com o plano cartesiano, pode-se representar o número complexo
 $z = a + ib$ pelo ponto (a, b) do plano cartesiano, como na Figura 2.

Observação 3.5.1. Com a identificação $a + ib = (a, b)$, o plano cartesiano \mathbb{R}^2 herda as operações de \mathbb{C} , da seguinte forma:

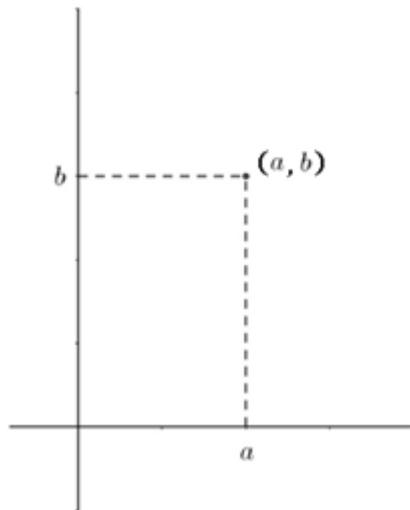
Dados os pontos do plano $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$, identificados com os números complexos $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, tem-se:

Adição:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Figura 2 - Representação do par ordenado (a, b) no plano cartesiano.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Multiplicação:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

Com estas duas operações, o plano \mathbb{R}^2 torna-se uma outra representação do conjunto dos números complexos.

Teorema 3.5.1. O plano \mathbb{R}^2 com as operações de adição e multiplicação definidas por:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

é um corpo semelhante ao corpo \mathbb{C} dos números complexos.

Prova: A demonstração é idêntica à do Teorema 3.3.1 com elemento neutro da adição $(0,0)$ e elemento neutro da multiplicação $(1,0)$.

Observação 3.5.2. A função $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\Phi(a + ib) = (a, b)$ é injetora e sobrejetora, uma bijeção entre \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 . Além disso, pela Observação 3.5.1.:

$$\Phi((a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)) = \Phi(a_1 + ib_1) + \Phi(a_2 + ib_2)$$

$$\Phi((a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)) = \Phi(a_1 + ib_1) \cdot \Phi(a_2 + ib_2)$$

$$\Phi(0 + i0) = (0,0)$$

$$\Phi(1 + i0) = (1,0)$$

Na **Teoria de Corpos**, uma função entre dois corpos, como Φ acima, chama-se um isomorfismo de corpos, e dois corpos relacionados por um isomorfismo de corpos são chamados corpos isomorfos e são indistinguíveis perante a **Teoria de Corpos**, ou seja, \mathbb{C} com suas duas operações e \mathbb{R}^2 com as duas operações definidas no **Teorema 3.5.1** são considerados "iguais" na **Teoria de Corpos**. Assim, \mathbb{R}^2 com as operações de adição e multiplicação definidas no **Teorema 3.5.1** será considerado o corpo \mathbb{C} dos números complexos.

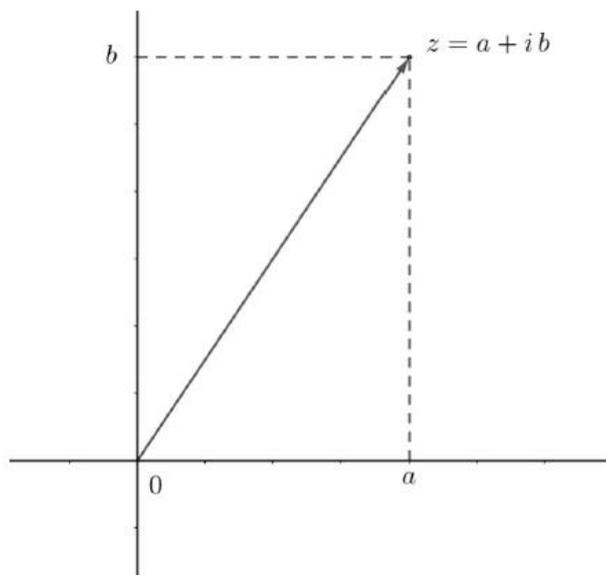
Observação 3.5.3. Os números complexos com parte imaginária zero $z = a + i0$ correspondem aos pontos do plano da forma $(a, 0)$, ou seja, pontos que estão sobre o eixo das abscissas, chamado aqui de **eixo real**, e os números complexos com parte real zero $z = 0 + ib$ correspondem aos pontos do plano da forma $(0, b)$, ou seja, pontos que estão sobre o eixo das ordenadas, chamado aqui de **eixo imaginário**. Desta forma, geometricamente o corpo ordenado dos números reais \mathbb{R} coincide com os pontos de \mathbb{C} que estão sobre o eixo das abscissas.

3.6 Representação dos números complexos como vetores no plano cartesiano

Com a finalidade de dar um significado geométrico para a operação de adição de números complexos, introduziremos a representação vetorial de um número complexo.

Definição 3.6.1. Dado o número complexo $z = a + ib$, associamos a z o vetor, ou segmento de reta orientado (seta) com origem em $0 = (0,0)$ e extremidade $(a, b) = a + ib = z$, como na Figura 3.

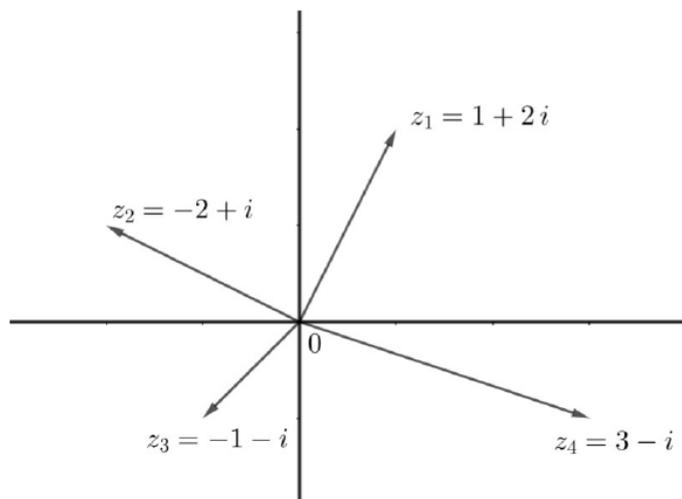
Figura 3 - Vetor associado ao número complexo $z = a + ib$.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Observação 3.6.1. A associação dada na Definição 3.6.1. estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto \mathbb{C} dos números complexos e os vetores com origem em $(0,0)$ (o vetor nulo). Na Figura 4 temos vários números complexos na representação vetorial.

Figura 4 - Alguns números complexos na representação vetorial.

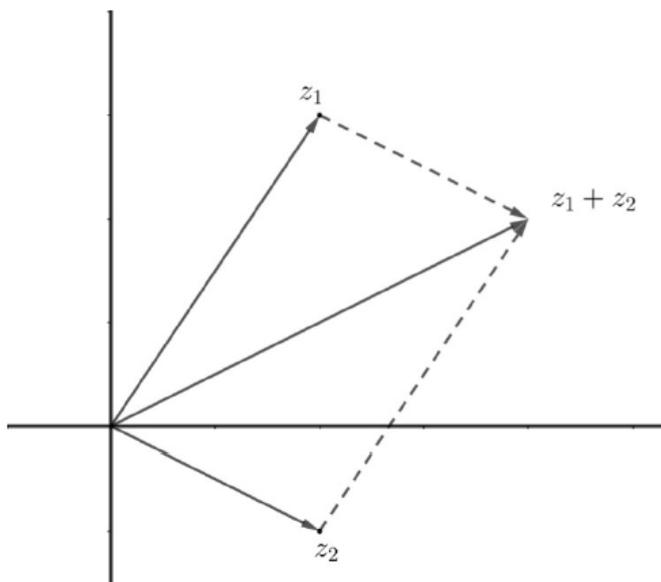


Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Observação 3.6.2. (Significado geométrico da adição de números complexos)

Sejam $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ números complexos, então, o número complexo $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ é representado geometricamente pelo vetor definido pela diagonal do paralelogramo formado pelos vetores z_1 e z_2 , como mostrado na Figura 5. Essa regra de formação do número complexo soma chama-se **Regra do Paralelogramo**.

Figura 5 - Soma de números complexos representada na Regra do Paralelogramo.



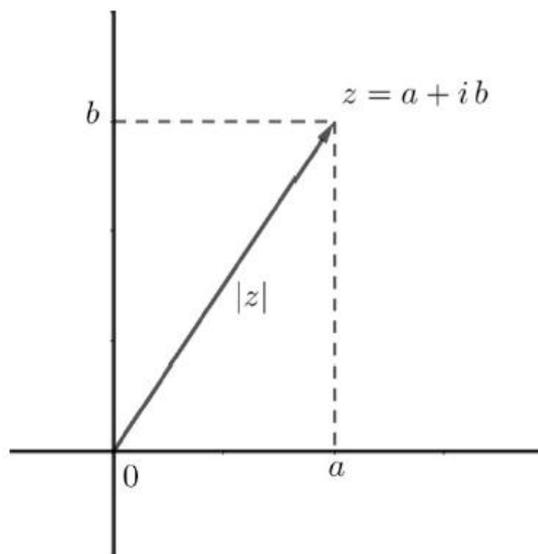
Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

3.7 Módulo de um número complexo

Definição 3.7.1. Seja $z = a + ib$ um número complexo, o módulo de z é o número real não negativo definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Na Figura 6 está representado o significado geométrico do módulo de um número complexo. Se representarmos o número complexo $z = a + ib$ na forma vetorial como mostrada na Figura 6, $|z|$ é o comprimento do vetor z , ou seja, é a distância euclidiana do ponto (a, b) à origem $(0, 0)$. Também, como o triângulo da Figura 6 é retângulo com comprimento da hipotenusa $|z|$ e catetos de comprimentos a e b , segue do **Teorema de Pitágoras** que $z^2 = a^2 + b^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$.

Figura 6 - Significado geométrico do módulo de um número complexo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Exemplo 3. Alguns números complexos e seus módulos.

(a) $z = 1 + 2i$, então $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

(b) $w = 5i$, então $|w| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$

(c) $u = -1 - 3i$, então $|u| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

(d) $\omega = \cos \theta + i \sin \theta$, então $|\omega| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$

Teorema 3.7.1. (Propriedades do módulo) Sejam z , z_1 e z_2 números complexos quaisquer, então:

$$a) \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

$$b) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Prova:

- a) Como $x \leq |x|$ para todo número real x , tem-se $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$ e $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)|$. Pelo **Teorema de Pitágoras**, o comprimento de cada cateto de um triângulo retângulo é sempre menor ou igual ao comprimento da hipotenusa, assim,

$$\operatorname{Re}(z) \leq |z| \text{ e } \operatorname{Im}(z) \leq |z|, \text{ ver Figura 6 com } a = \operatorname{Re}(z) \text{ e } b = \operatorname{Im}(z).$$

- b) Sejam $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

$$|z_1 \cdot z_2| = |(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)| = |(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{|z_1|^2 |z_2|^2}$$

Logo, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

3.8 Conjugação

Definição 3.8.1. Seja $z = a + ib$ um número complexo, o conjugado de z é o número complexo \bar{z} definido por $\bar{z} = a - ib$.

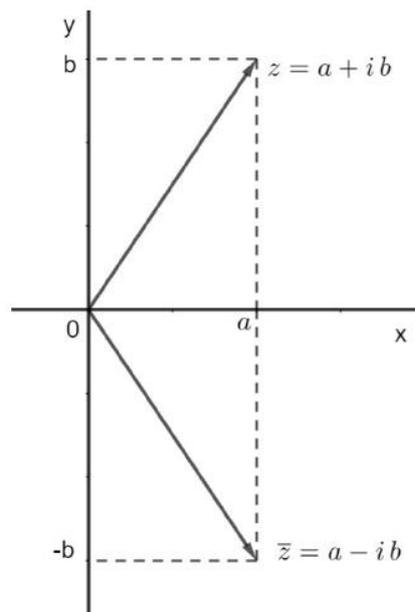
Exemplo 4. Alguns números complexos e seus conjugados.

- a) $z = 1 + i2$, então $\bar{z} = 1 - i2$
- b) $w = \sqrt{2}i$, então $\bar{w} = -\sqrt{2}i$
- c) $u = a \in \mathbb{R}$, então $\bar{u} = a = u$
- d) $v = -1 - i$, então $\bar{v} = -1 + i$

Significado geométrico da conjugação

Dado o número complexo $z = a + ib$, considere z como um vetor, como na Seção 3.6. Então o conjugado $\bar{z} = a - ib$ é a reflexão do vetor z em torno do eixo real, ou seja, o eixo-x no plano \mathbb{C} (veja a Figura 7).

Figura 7 - Significado geométrico do conjugado do número complexo z .



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Teorema 3.8.1. (Propriedades da Conjugação) Sejam z , z_1 e z_2 números complexos, então:

- a) $\overline{\overline{z}} = z$
- b) $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$
- c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- e) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- f) $z + \overline{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$ e $z - \overline{z} = 2 \cdot \text{Im}(z)$

Prova:

Sejam $z = a + ib$, $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

- a) $\overline{\overline{z}} = \overline{(a + ib)} = \overline{a - ib} = a - (-ib) = a + ib = z$
- b) $\overline{z} = z \iff a - ib = a + ib \iff b = -b \iff b = 0 \iff z = a \in \mathbb{R}$
- c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$
 $\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

O caso $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ tem prova similar.

- d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)}$
 $\overline{z_1 z_2} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$
 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(a_1 + ib_1)} \cdot \overline{(a_2 + ib_2)} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2)$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)}$$

Portanto, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

e) $z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = aa + bb + i(-ab + ab) = a^2 + b^2 = |z|^2$

f) $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \cdot \text{Re}(z)$

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2 \cdot \text{Im}(z)$$

Também é verdade que, se $z_2 \neq 0$, então $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{z_2}$. Mas, para provar esta propriedade é interessante usar o seguinte lema que produz uma fórmula simples para o inverso multiplicativo.

Lema 3.8.1. Se $z \neq 0$, então

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Prova: Suponhamos que $z \neq 0$, então $|z| > 0$, e pelo **Teorema 3.8.1 e)** temos que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Como $|z| > 0$, então $|z|^2 > 0$, multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{|z|^2}$ tem-se

$$z \cdot \bar{z} \frac{1}{|z|^2} = |z|^2 \frac{1}{|z|^2} \Rightarrow z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

Como o inverso multiplicativo de z é a única solução em w da equação $zw = 1$, temos que

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Proposição 3.8.1. Sejam z_1 e z_2 números complexos com $z_2 \neq 0$, então:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{z_2}.$$

Prova. Sejam $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, então:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1 \cdot z_2^{-1}} = \overline{\left(z_1 \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \frac{\overline{\overline{z_2}}}{|z_2|^2} = \overline{z_1} \cdot \frac{z_2}{|z_2|^2}$$

Exemplo 5. Resolva a equação em z :

$$(1 - 2i)z = -3i$$

Solução. Usando a Propriedade e) do **Teorema** 3.8.1, multiplicamos a equação por $\overline{(1 - 2i)}$:

$$\overline{(1 - 2i)}(1 - 2i)z = -3i\overline{(1 - 2i)}$$

$$|1 - 2i|^2 z = -3i(1 + 2i)$$

$$5z = -6 - 3i$$

$$z = -\frac{6}{5} - i\frac{3}{5}$$

Exemplo 6. Calcule os inversos multiplicativos dos números complexos abaixo.

- a) i
- b) $-1 + i$
- c) $a + ib$, com $a^2 + b^2 > 0$
- d) $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$

Solução. Usando o **Lema** 3.8.1

- a)

$$i^{-1} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1^2} = -i$$

b)

$$(-1 + i)^{-1} = \frac{\overline{(-1 + i)}}{|-1 + i|^2} = \frac{-1 - i}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

c)

$$(a + ib)^{-1} = \frac{\overline{(a + ib)}}{|a + ib|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

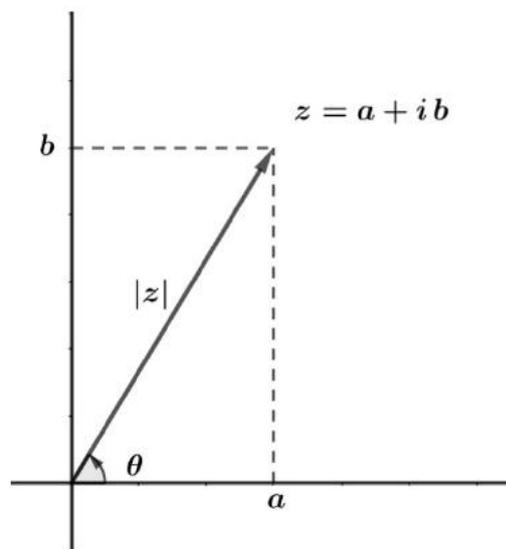
d)

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-1} = \frac{\overline{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}}{|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)|^2} = (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$$

3.9 Formas Polar e Exponencial

Considere um número complexo $z = a + ib$ diferente de zero, representado na forma vetorial no plano complexo, como mostrado na Figura 8. Seja θ o ângulo que o vetor z faz com o eixo real, aqui convencionaremos que θ é positivo no sentido anti horário e negativo no sentido horário. Pelo **Teorema de Pitágoras** tem-se que $|z|^2 = a^2 + b^2$ e das relações trigonométricas no triângulo retângulo tem-se que $\cos(\theta) = a/|z|$ e $\operatorname{sen}(\theta) = b/|z|$. Assim pode-se escrever: $z = |z| \cos(\theta) + i|z| \operatorname{sen}(\theta)$.

Figura 8 - Número complexo z representado na forma vetorial.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Se $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, então $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$. Essa escrita chama-se a **Forma Polar** do número complexo z .

O número real positivo r é o **módulo** de z e o ângulo θ é um **argumento** de z , aqui consideraremos o argumento sempre em radianos.

Observação 3.9.1. $\operatorname{arg}(z)$ representa o conjunto de todos os ângulos θ para os quais vale a fórmula $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, com $r = |z|$. Se um ângulo θ_0 é conhecido, então verifica-se que $\operatorname{arg}(z) = \{\theta_0 + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$. Dado $z \neq 0$, o argumento principal, $\operatorname{Arg}(z)$, é o único ângulo θ em $\operatorname{arg}(z)$ satisfazendo $-\pi < \theta \leq \pi$.

Exemplo 7. Exemplos de números complexos e seus argumentos principais.

a) $\operatorname{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

b) $\operatorname{Arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$

d) $\operatorname{Arg}(-2) = \pi$

e) $\operatorname{Arg}(1) = 0$

Exemplo 8. Algumas vezes, dependendo da aplicação, é necessário especificar um conjunto de valores de $\arg(z)$. Por exemplo, se considerarmos $\arg(z)$ no domínio $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi$, temos que neste domínio:

$$\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\arg(-1 - i) = \frac{5\pi}{4}$$

O seguinte resultado é importante para darmos um significado geométrico para a multiplicação de dois números complexos.

Teorema 3.9.1. Sejam z_1 e z_2 números complexos diferentes de zero, então:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ e } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Prova: Primeiramente, escrevemos z_1 e z_2 na forma polar:

$$z_1 = r_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \text{ e } z_2 = r_2(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

$$z_1 z_2 = (r_1 \cos \alpha + i r_1 \operatorname{sen} \alpha)(r_2 \cos \beta + i r_2 \operatorname{sen} \beta) \Rightarrow$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos \alpha \cos \beta - r_1 r_2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + i(r_1 r_2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + r_1 r_2 \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)$$

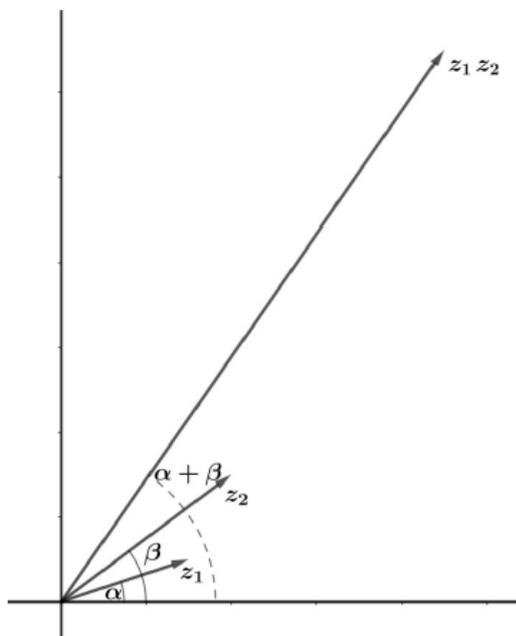
$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i r_1 r_2(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\alpha + \beta) + i r_1 r_2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta).$$

Esta última expressão é a representação polar de um número complexo de módulo $r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$ e argumento $\alpha + \beta = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

A Figura 9, a seguir, ilustra o significado geométrico da multiplicação de dois números complexos:

Figura 9 - Significado geométrico da multiplicação de dois números complexos.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

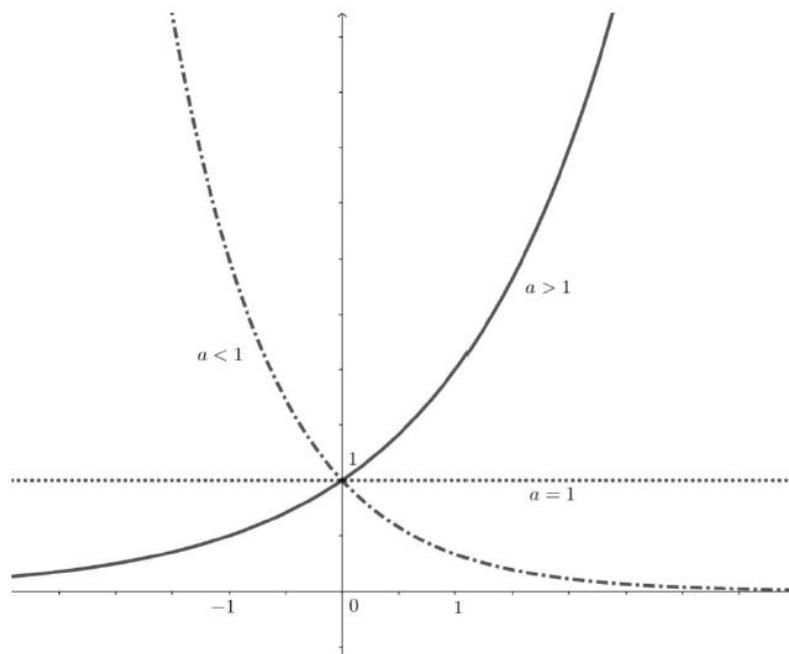
Observação 3.9.2. Um número complexo não nulo possui infinitos argumentos, de fato, se $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, então $z = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)) \forall n \in \mathbb{Z}$ devido à 2π - *periodicidade* das funções seno e cosseno.

Segue-se que se $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)) = z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2))$, então: $r_1 = r_2$ e $\theta_2 - \theta_1 = 2n\pi$ para algum número inteiro n .

A representação exponencial

Se $a > 0$ é uma constante, então a função real $f(x) = a^x$ chama-se uma função exponencial com base a . Na Figura 10 tem-se os gráficos de a^x para $a > 1$ e monótona decrescente no caso $a < 1$, em ambos os casos a função é invertível com função inversa $f^{-1}(x) = \log_a x$ o logaritmo na base a de x .

Figura 10 - Gráficos de a^x para $a > 1$ e $a < 1$.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Em aplicações, as bases mais comuns são $a = 10$, $a = 2$ e $a = e$. Especialmente a função exponencial de base e , $f(x) = e^x$ ocorre com frequência em física, engenharia, biologia, finanças, etc. Em física, grandezas como a corrente elétrica em circuitos com capacitores e resistores decaem exponencialmente em função do tempo; em biologia o aumento da população de animais num habitat sem predadores é exponencial e, em finanças, um capital sujeito a juros compostos também tem um comportamento exponencial. O número e , também chamado de *Número de Euler*, é definido pelo limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e tem valor aproximado $e = 2,7182818284590452353\dots$

A função exponencial na base e , e^x pode ser estendida ao conjunto dos números complexos:

Se $z = x + iy$ é um número complexo, define-se:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y) \quad (5)$$

Nota-se que, de fato, é uma extensão pois, quando $z = x + i0$ então:

$e^z = e^{x+i0} = e^x \cos(0) + ie^x \operatorname{sen}(0) = e^x$, ou seja, quando o número complexo é real, então a exponencial complexa coincide com a exponencial real. Na situação particular, quando $z = i\theta$ tem-se a **Fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \quad (6)$$

Assim, se $z \neq 0$ é um número complexo que, escrito na forma polar $r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, então:

$$z = re^{i\theta} \quad (7)$$

A fórmula (7) chama-se a representação do número complexo na forma exponencial.

Exemplo 9. Escrever os números complexos, abaixo, na forma exponencial, usar o argumento principal dos números.

a) $z = 1 + i$

b) $z = -2i$

c) $z = -5$

d) $z = 1$

Solução:

a) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, então $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $|-2i| = \sqrt{0^2 + 1(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\operatorname{arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2}$, então $-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

c) $|-5| = 5$, $\arg(-5) = \pi$, então $-5 = 5e^{-i\pi}$

d) $|1| = 1$, $\arg(1) = 0$, então $1 = e^{-i0}$

Observação 3.9.3. Sejam $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, então, como consequência da demonstração do **Teorema 3.9.1.**, tem-se que: $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

Observação 3.9.4. Se $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, ..., $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ são números complexos, então: $z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}$.

Esta igualdade é provada por indução sobre o número n de números complexos multiplicados.

3.10 Potências e Raízes n-ésimas

Definição 3.10.1. Sejam z um número complexo diferente de 0 e $n \in \mathbb{N}$ um número natural.

Define-se a n-ésima potência de z por $z^n = z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z \cdot z}_{n \text{ fatores}}$.

Quando $n = 0$, $z^0 = 1$.

Se $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, define-se

$$z^{-n} = (z^n)^{-1} = \frac{1}{z^n}.$$

Teorema 3.10.1 Seja $z = r e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ um número complexo e $n \in \mathbb{N}$.

Então $z^n = (r e^{i\theta})^n = (r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)))^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$.

Prova: Segue da Observação 3.9.4. com:

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = r^n e^{in\theta}$$

Corolário 3.10.1 (Fórmula de De Moivre) Se $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

Exemplo 10. Calcular as potências:

a) $(1 + i)^3$

b) i^n

Solução:

a) Note que $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, então $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Assim, $(1 + i)^3 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = (\sqrt{2})^3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$

$$(1 + i)^3 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i.$$

b) Note que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ... os valores se repetem com periodicidade 4. Assim, potência múltiplo de 4 dá 1, potência múltiplo de 4 somada com 1 dá i , potência múltiplo de 4 somada com 2 dá -1 e potência múltiplo de 4 somada com 3 dá $-i$. Assim, para $k = 0, 1, 2, \dots$

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 4k \\ i, & \text{se } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{se } n = 4k + 2 \\ -i, & \text{se } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Definição 3.10.2. Dados um número complexo ω e um número natural n , uma raiz n -ésima de ω é uma solução em z da equação $z^n = \omega$. Quando $n = 2$ diz-se raiz quadrada e quando $n = 3$ diz-se raiz cúbica.

Por exemplo, i e $-i$ são ambas raízes quadradas de -1 , pois $i^2 = -1$ e $(-i)^2 = -1$.

Usaremos a Definição 3.10.2 e a Observação 3.9.2 para deduzir uma fórmula para o cálculo das raízes n -ésimas de um dado número complexo.

Seja $\omega = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$ um dado número complexo e $n > 1$ um número natural.

Determinaremos todos os números complexos. Seja $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ que satisfazem a equação:

$$z^n = \omega \quad (8)$$

Escrevendo (8) na forma polar

$$r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = r_0(\cos(\theta_0) + i \operatorname{sen}(\theta_0)) \quad (9)$$

De (9) e da Observação 3.9.2. tem-se:

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \cos(n\theta) = \cos(\theta_0) \text{ e } \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}(\theta_0) \quad (10)$$

De (10):

$$n\theta - \theta_0 = 2k\pi, \text{ para algum número inteiro} \quad (11)$$

De (11) tem-se:

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \quad (12)$$

A fórmula (10) produz o módulo de uma raiz n -ésima de ω e (12) produz os argumentos. Assim, todas as raízes n -ésimas de ω são dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \right), k \in \mathbb{Z}$$

Mas, observe que, como as funções sen e \cos são 2π -periódicas, existe uma infinidade de repetições de valores para z_k quando k percorre todos os números inteiros.

Para não haver repetições, basta deixar k variar no conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Desta forma, acabamos de provar o seguinte resultado:

Teorema 3.10.2. Dado o número complexo $\omega = r_0 e^{i\theta_0} = r_0(\cos(\theta_0) + i \operatorname{sen}(\theta_0)) \neq 0$ e um número natural $n > 1$. Então as raízes n -ésimas de ω são os n números complexos z_0, z_1, \dots, z_{n-1} dados por:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (13)$$

Raízes n -ésimas da unidade 1

Se tomarmos $\omega = 1$ temos que $\omega = r_0 e^{i\theta_0}$, com $r_0 = 1$ e $\theta_0 = 0$, usando a fórmula (13) temos que as raízes n -ésimas de 1 são dadas por:

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (14)$$

Na forma exponencial:

$$\omega_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (15)$$

Observação 3.10.1. Se usarmos as identidades trigonométricas cosseno e seno da soma na fórmula (13), esta pode ser reescrita como:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (16)$$

Obtemos que (16) é um produto de dois números complexos:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right) \quad (17)$$

A segunda parcela em (17) é justamente ω_k , a k -ésima raiz n -ésima de 1. Desta forma, pode-se escrever as raízes n -ésimas de ω em função das raízes n -ésimas de 1:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n}\right) \right) \omega_k, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (18)$$

Geometria das raízes n-ésimas

Observa-se pela fórmula (16) que $|z_k| = \sqrt[n]{r_0}$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, ou seja, as raízes n-ésimas de ω são pontos ou vetores do círculo de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt[n]{r_0}$, e além disso, os ângulos entre uma raiz n-ésima e a consecutiva são iguais a $\frac{2\pi}{n}$, portanto, as raízes n-ésimas de ω geometricamente são os vértices de um polígono regular de n lados sobre o círculo de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt[n]{r_0}$. Em particular, conhecendo uma das raízes n-ésimas é possível conhecer todas.

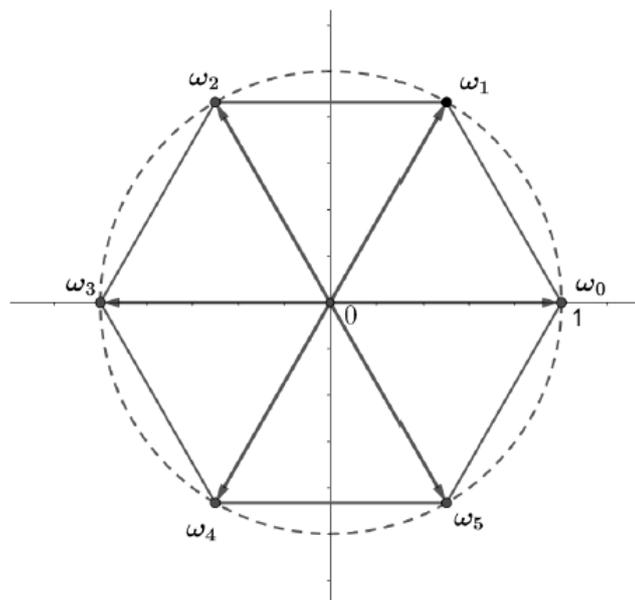
Exemplo 11. As raízes sextas de 1, ou seja, as soluções da equação $z^6 - 1 = 0$:

Solução.

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{6}\right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Formam os vértices de um hexágono, como representado na Figura 11.

Figura 11 - Representação Geométrica das raízes sextas de 1.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

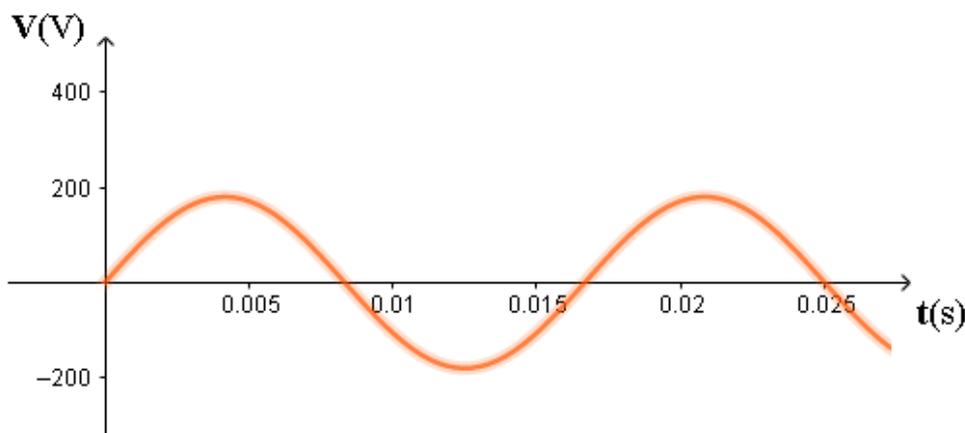
4 FASORES

4.1 Da necessidade de fasores

As tensões elétricas utilizadas em circuitos de corrente alternada, que estão presentes em nosso cotidiano, têm o formato senoidal. Isso pode parecer insólito para pessoas que não são da área elétrica, mas considere um aparelho elétrico (um chuveiro, por exemplo) comprado na cidade de Vitória ES, que possui os seguintes dados de placa: 127V, 4500W. Isso significa que este aparelho desenvolve uma potência ativa de 4500 Watts, quando ligado a uma tensão elétrica eficaz de 127 Volts. Essa tensão tem, na verdade, um formato senoidal, com frequência de 60Hz, e seus valores máximo e mínimo são de, aproximadamente, +180 Volts e -180 Volts:

$$v(t) = 180 \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot t)$$

Figura 12 - Tensão alternada de 127V rms, 60Hz.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Essa é a forma mais eficiente de transmitir energia elétrica até os dias atuais, pois, uma vez que a tensão é alternada, pode-se facilmente aumentar ou diminuir os níveis de tensão com o uso de transformadores.

É interessante que em transmissão de energia elétrica as tensões sejam elevadas, pois isso implica em uma corrente elétrica menor para uma mesma potência, assim, consegue-se minimizar as perdas pelo aquecimento dos condutores (perdas por efeito Joule).

O valor eficaz, ou rms (*root mean square*), da tensão elétrica é obtido dividindo-se o valor máximo por raiz quadrada de 2:

$$V_{rms} = \frac{180}{\sqrt{2}} \cong 127 V$$

Conceitualmente, “o valor rms da onda senoidal equivale ao valor em tensão contínua, que produz o mesmo efeito térmico, quando aplicado sobre uma carga resistiva R”, informação contida em “Princípios de telecomunicações: teoria e prática” de Julio Cesar de Oliveira Medeiros (MEDEIROS, 2016). É uma forma de simplificar a representação do valor da tensão, já que a frequência utilizada em um país tem o valor padronizado. No Brasil é utilizada frequência de 60 Hz.

Conhecendo a tensão elétrica e sabendo o valor da resistência elétrica do equipamento, é possível determinar a corrente que irá circular pelos fios onde o aparelho é conectado. No caso do chuveiro elétrico, que é um equipamento puramente resistivo, a corrente estará “em fase” com a tensão, ou seja, a corrente terá o mesmo formato da tensão, e os valores de mínimo e máximo de tensão e corrente ocorrerão nos mesmos instantes.

De acordo com a Lei de Ohm, a intensidade da corrente elétrica é igual ao valor da tensão elétrica dividida pela resistência:

$$I = \frac{V}{R}$$

Onde:

I = Intensidade da Corrente Elétrica, dada em ampères;

V = Tensão Elétrica, de unidade volts;

R = Resistência Elétrica, de unidade ohms.

Se as correntes estiverem em fase com as tensões, não há necessidade do uso de fasores. Entretanto, nem sempre os equipamentos são puramente resistivos: existem as partes indutivas e capacitivas, que também devem ser consideradas. Tais partes influenciam no

atraso ou adiantamento da corrente elétrica com relação à tensão. Além disso, as tensões utilizadas geralmente são distribuídas em 3, de mesmo valor eficaz, porém defasadas entre si. De forma que é possível realizar associações entre tais tensões.

Realizar operações (soma, subtração, multiplicação e divisão) de equações que envolvem funções trigonométricas é uma tarefa difícil. Diante desta realidade, os cálculos com a utilização de fasores se mostraram a forma mais eficiente para o estudo de circuitos de corrente alternada.

Como a letra I é utilizada para indicar corrente elétrica, será utilizada uma outra letra para representar a unidade imaginária (i). De agora em diante, a unidade imaginária será tratada por j . Portanto: $j = \sqrt{-1}$

4.2 Resumo e notação dos números complexos

Feitas as devidas considerações sobre números complexos, nos capítulos anteriores, será apresentado um breve resumo, com operações básicas necessárias para o estudo dos próximos capítulos.

Considere os números naturais n e k , e os número complexos z e w , $z \neq 0$, tais que:

$$z = a + bj, w = c + dj.$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \operatorname{arg}(z) = \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$|w| = \sqrt{c^2 + d^2}, \operatorname{arg}(w) = \delta = \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$$

Será utilizada a seguinte notação para representar os números complexos z e w na forma polar:

$$z = |z| \angle \varphi$$

$$w = |w| \angle \delta$$

A Tabela 1 apresenta o registro de algumas propriedades importantes dos números complexos, e servirá como referência:

Tabela 1 - Propriedades importantes dos números complexos.

Soma	$z + w = (a + c) + (b + d)j$
Subtração	$z - w = z + (-w) = (a - c) + (b - d)j$
Multiplicação	$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)j = w \cdot z \angle (\delta + \varphi)$
Divisão	$\frac{w}{z} = \frac{ w \angle \delta}{ z \angle \varphi} = \frac{ w }{ z } \angle (\delta - \varphi)$
Potenciação	$z^n = z ^n [\cos(n\varphi) + j \operatorname{sen}(n\varphi)]$
Radiciação	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{ z } \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}\right) \right]$
Fórmula de Euler	$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \operatorname{sen}(\theta)$
Conjugado do número complexo	$\bar{z} = a - bj = z \angle (-\varphi)$
Igualdade do número complexo	$z = w \Leftrightarrow a = c \ ; \ b = d$

4.3 Representação de um fasor

Considere uma tensão elétrica $v_a(t)$, variável no tempo, que possui o formato cossenoidal. A função que define tal tensão será:

$$v_a(t) = V_m \cdot \cos(\omega t)$$

Na equação acima V_m representa o valor máximo da tensão (chamado de amplitude) e ω é a frequência angular, dada em rad/s:

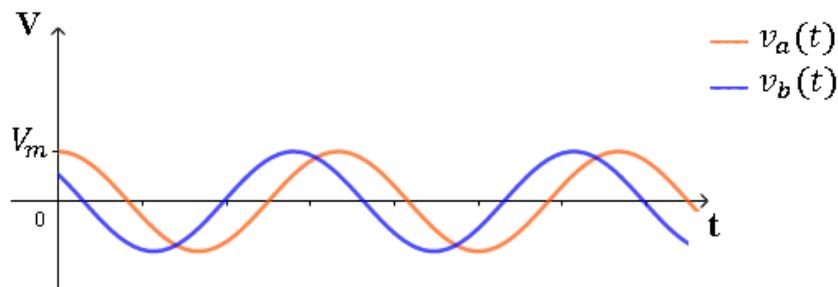
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Onde f é a frequência, dada em hertz.

Existe uma tensão elétrica $v_b(t)$ que possui o mesmo formato e a mesma amplitude da tensão $v_a(t)$, mas tais tensões estão defasadas, ou seja, possuem valores de máximo e mínimo em instantes distintos: $v_b(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \beta)$, onde β é o ângulo de fase da tensão v_b .

Abaixo estão representadas as tensões elétricas v_a e v_b , variando no tempo:

Figura 13 - Tensões Elétricas v_a e v_b defasadas.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

É importante ressaltar que tais tensões podem ser representadas em função do seno ou cosseno, uma vez que:

$$\cos(\theta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Como foi dito anteriormente, $\text{Re}[e^{j\theta}]$ é a parte real do número complexo $e^{j\theta}$:

$$\text{Re}[e^{j\theta}] = \text{Re}[\cos(\theta) + j \cdot \text{sen}(\theta)] = \cos(\theta)$$

Logo,

$$v_b(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \beta) = \text{Re}[V_m \cdot e^{j(\omega t + \beta)}] = \text{Re}[V_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\beta}]$$

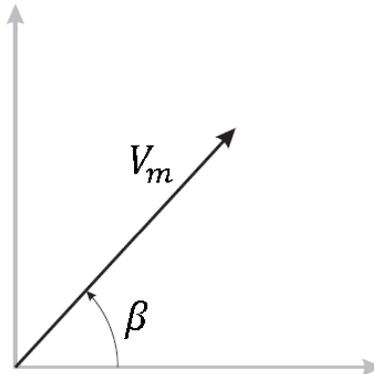
O Fasor \vec{V}_b será definido como:

$$\vec{V}_b = V_m \cdot e^{j\beta} = V_m \angle \beta$$

O termo $e^{j\omega t}$ será sempre omitido na representação de fasores, pois, em se tratando de grandezas elétricas em circuitos de corrente alternada, todos os componentes estarão submetidos à mesma frequência, ou seja, $e^{j\omega t}$ será um termo comum a todos.

Graficamente, o Fasor \vec{V}_b terá a seguinte representação:

Figura 14 - Representação gráfica do Fasor \vec{V}_b .



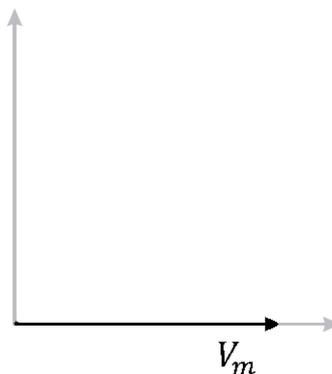
Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Vale ressaltar que essa não é a única representação possível para o Fasor \vec{V}_b .

No caso, foi considerado que a tensão $v_a(t)$ está na referência, e, portanto, o Fasor \vec{V}_a teria ângulo de fase igual a zero:

Independente da referência adotada, o Fasor \vec{V}_b sempre estará adiantado um ângulo β com relação ao Fasor \vec{V}_a .

Figura 15 - Representação gráfica do Fasor \vec{V}_a .



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

4.4 Justificativa matemática para utilização de fasores

Até aqui, não está claro, ainda, como os fasores irão auxiliar no processo de operações com funções trigonométricas. Repare que as tensões elétricas v_a e v_b estão

variando no tempo com relação a um potencial elétrico igual a 0 Volts, que é o potencial elétrico da terra (referência). Mas qual seria a diferença de potencial elétrico entre v_a e v_b ?

A pergunta pode ser respondida da seguinte forma:

$$v_a - v_b = V_m \cdot \cos(\omega t) - V_m \cdot \cos(\omega t + \beta) = V_m \cdot [\cos(\omega t) - \cos(\omega t + \beta)]$$

$$v_a - v_b = V_m \{ \cos(\omega t) - [\cos(\omega t) \cdot \cos(\beta) - \text{sen}(\omega t) \cdot \text{sen}(\beta)] \}$$

Percebe-se que calcular a diferença de potencial elétrico entre as tensões, desenvolvendo as equações trigonométricas, é uma tarefa trabalhosa. Aqui os fasores começam a auxiliar neste processo, pois será possível representar a diferença de potencial entre v_a e v_b na forma:

$$v_a - v_b = K_m \cdot \cos(\omega t + \vartheta)$$

E os valores de K_m e ϑ podem ser calculados de forma quase direta utilizando fasores. Para criar um caso geral, considere as funções:

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \rho)$$

$$g(t) = G_m \cos(\omega t + \sigma)$$

Com $F_m, G_m \in \mathbb{R}$ e $F_m, G_m > 0$.

Será mostrado que existe $h(t)$, tal que:

$$f(t) - g(t) = h(t) = H_m \cos(\omega t + \tau)$$

Da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &= F_m \cos(\omega t + \rho) - G_m \cos(\omega t + \sigma) \\ &= F_m [\cos(\omega t) \cos(\rho) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\rho)] - G_m [\cos(\omega t) \cos(\sigma) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\sigma)] \end{aligned}$$

$$= [F_m \cos(\rho) - G_m \cos(\sigma)] \cos(\omega t) - [F_m \sin(\rho) - G_m \sin(\sigma)] \sin(\omega t).$$

Sejam r e s , tais que:

$$r = F_m \cos(\rho) - G_m \cos(\sigma)$$

$$s = F_m \sin(\rho) - G_m \sin(\sigma)$$

logo,

$$f(t) - g(t) = r \cdot \cos(\omega t) - s \cdot \sin(\omega t).$$

Se $\sqrt{r^2 + s^2} \neq 0$, então,

$$r \cdot \cos(\omega t) - s \cdot \sin(\omega t) = \sqrt{r^2 + s^2} \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \cos(\omega t) - \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \sin(\omega t) \right).$$

Repare que:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \leq 1 \quad , \quad \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \leq 1$$

e

$$\left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)^2 = 1.$$

Então, existe τ , tal que:

$$\cos(\tau) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \quad \text{e} \quad \sin(\tau) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}.$$

De fato, considere o número complexo u , tal que:

$$u = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + j \cdot \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right),$$

representando u na forma polar, temos:

$$u = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + j \cdot \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right) = |u| \angle \alpha$$

com

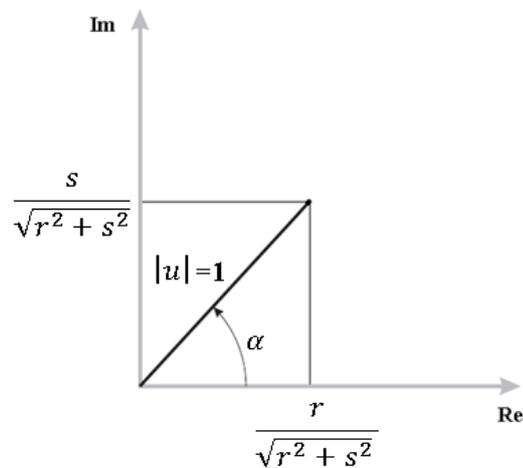
$$0 \leq \alpha < 2\pi$$

e

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)^2} = 1.$$

Na Figura 16 pode ser visualizada a representação de u no plano complexo.

Figura 16 - Representação de u no plano complexo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

$$\cos(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}.$$

De fato, existe τ :

$$\tau = \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = \tan^{-1} \left[\frac{\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)}{\left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{s}{r} \right].$$

■

Retomando o raciocínio,

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &= r \cdot \cos(\omega t) - s \cdot \sin(\omega t) \\ &= \sqrt{r^2 + s^2} \cdot [\cos(\tau) \cos(\omega t) - \sin(\tau) \sin(\omega t)] \Rightarrow \\ f(t) - g(t) &= \sqrt{r^2 + s^2} \cdot [\cos(\omega t + \tau)]. \end{aligned}$$

Assim sendo, provou-se que: $f(t) - g(t) = h(t) = H_m \cos(\omega t + \tau)$, onde,

$$H_m = \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{[F_m \cos(\rho) - G_m \cos(\sigma)]^2 + [F_m \sin(\rho) - G_m \sin(\sigma)]^2}$$

e

$$\tau = \tan^{-1} \left[\frac{s}{r} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{F_m \sin(\rho) - G_m \sin(\sigma)}{F_m \cos(\rho) - G_m \cos(\sigma)} \right].$$

Utilizando o mesmo processo, é possível provar que $f(t) + g(t)$ pode ser expresso por meio de uma função com o formato de $h(t)$:

$$f(t) + g(t) = m(t) = M_m \cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$M_m = \sqrt{[F_m \cos(\rho) + G_m \cos(\sigma)]^2 + [F_m \sin(\rho) + G_m \sin(\sigma)]^2}$$

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left[\frac{F_m \sin(\rho) + G_m \sin(\sigma)}{F_m \cos(\rho) + G_m \cos(\sigma)} \right]$$

Será feita uma analogia entre as operações com números complexos e com funções senoidais.

Considere dois números complexos F e G , tais que:

$$F = F_m \angle \rho = F_m \cos(\rho) + j \cdot F_m \operatorname{sen}(\rho)$$

$$G = G_m \angle \sigma = G_m \cos(\sigma) + j \cdot G_m \operatorname{sen}(\sigma)$$

Realizando a operação de soma $F + G$:

$$F + G = [F_m \cos(\rho) + G_m \cos(\sigma)] + j \cdot [F_m \operatorname{sen}(\rho) + G_m \operatorname{sen}(\sigma)]$$

Pode-se observar que o módulo e o argumento são, respectivamente, M_m e ε :

$$|F + G| = \sqrt{[F_m \cos(\rho) + G_m \cos(\sigma)]^2 + [F_m \operatorname{sen}(\rho) + G_m \operatorname{sen}(\sigma)]^2} = M_m$$

$$\operatorname{arg}(F + G) = \tan^{-1} \left[\frac{F_m \operatorname{sen}(\rho) + G_m \operatorname{sen}(\sigma)}{F_m \cos(\rho) + G_m \cos(\sigma)} \right] = \varepsilon.$$

Realizando a operação de subtração $F - G$:

$$F - G = [F_m \cos(\rho) - G_m \cos(\sigma)] + j \cdot [F_m \operatorname{sen}(\rho) - G_m \operatorname{sen}(\sigma)]$$

$$|F - G| = \sqrt{[F_m \cos(\rho) - G_m \cos(\sigma)]^2 + [F_m \operatorname{sen}(\rho) - G_m \operatorname{sen}(\sigma)]^2} = H_m$$

$$\operatorname{arg}(F - G) = \tan^{-1} \left[\frac{F_m \operatorname{sen}(\rho) - G_m \operatorname{sen}(\sigma)}{F_m \cos(\rho) - G_m \cos(\sigma)} \right] = \tau.$$

Os resultados obtidos com as operações com os números complexos F e G foram exatamente os mesmos que obteve-se realizando as operações com as funções $f(t)$ e $g(t)$. Assim, será utilizada essa ideia de números complexos para fazer a definição de fasores.

Definição 4.4.1. O fasor associado à função $f(t) = F_m \cos(\omega t + \rho)$ é o número complexo $F = F_m[\cos(\rho) + j \cdot \operatorname{sen}(\rho)]$.

Reciprocamente, a função associada ao fasor $F = F_m[\cos(\rho) + j \cdot \text{sen}(\rho)]$ é a função $f(t) = F_m \cos(\omega t + \rho)$.

A partir daqui, os cálculos com funções senoidais serão feitos utilizando fasores, e o fasor obtido como resultado representará a função a qual este está associado.

Como visto, os fasores facilitam as operações de soma e subtração. Além disso, com a utilização de fasores, é possível transformar equações diferenciais, necessárias para resolução de circuitos CA, em equações algébricas. Isso será mostrado no próximo capítulo.

5 UTILIZAÇÃO DE FASORES EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

Em circuitos elétricos existem basicamente três elementos passivos: resistores, indutores e capacitores. Inicialmente tais elementos serão estudados em separado, com a utilização de fasores em circuitos CA, e posteriormente serão mostrados alguns circuitos com associações destes.

5.1 Resistores

O resistor foi citado, anteriormente, no exemplo do chuveiro elétrico.

Considere o circuito elétrico com um resistor e uma fonte de tensão:

Figura 17- Circuito elétrico com uma fonte de tensão e um resistor.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

O resistor possui uma resistência elétrica (R), de unidade ohm (Ω), que está relacionada com a dificuldade que o resistor oferece à passagem de corrente elétrica.

De acordo com a Lei de Ohm:

$$V(t) = R \cdot I(t),$$

sendo,

$$V(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad V(t) = \text{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} \right] = \text{Re} \left[V_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha} \right].$$

A corrente que irá circular pelo resistor será:

$$I(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \beta) \Rightarrow I(t) = \operatorname{Re} \left[I_m \cdot e^{j(\omega t + \beta)} \right] = \operatorname{Re} \left[I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} \right].$$

Portanto,

$$\operatorname{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} \right] = R \cdot \operatorname{Re} \left[I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} \right].$$

É possível eliminar a representação Re (indicação da parte real do número) que aparece em ambos os lados da igualdade:

$$V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} = R \cdot I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} \Rightarrow V_m \cdot e^{j\alpha} = R \cdot I_m \cdot e^{j\beta}$$

ou seja,

$$\vec{V} = R \cdot \vec{I}$$

onde,

$$\vec{V} = V_m \angle \alpha$$

e

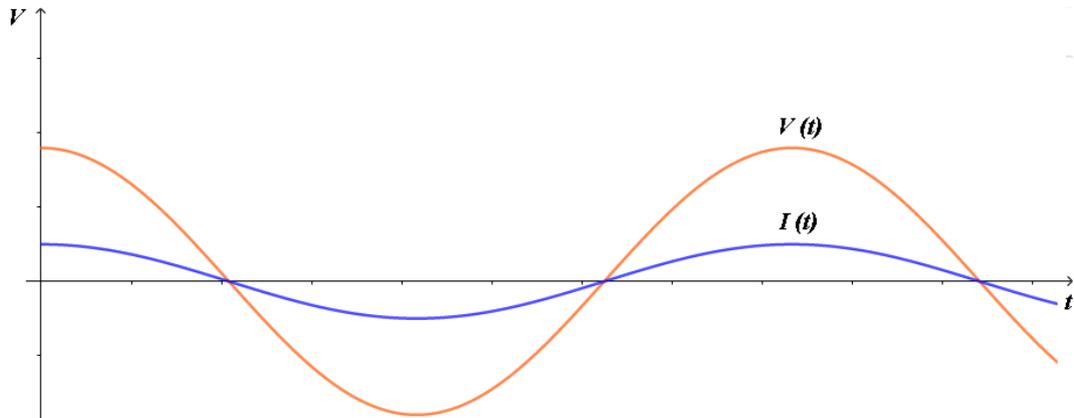
$$\vec{I} = I_m \angle \beta.$$

Como havia sido dito anteriormente, por ser um elemento é puramente resistivo, a tensão estará em fase com a corrente, logo:

$$\alpha = \beta.$$

Abaixo podem ser visualizadas as formas de onda de tensão e corrente do circuito representado na Figura 17:

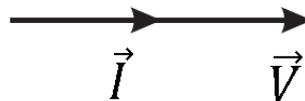
Figura 18 - Variação de tensão e corrente no tempo, circuito puramente resistivo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

O diagrama fasorial para um elemento resistivo será representado da seguinte forma:

Figura 19 - Diagrama fasorial para um elemento resistivo.



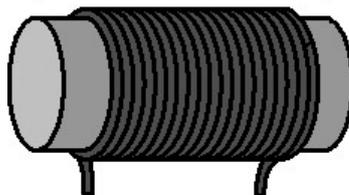
Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

A tensão $V(t)$ está na referência.

5.2 Indutores

Considere um fio condutor enrolado helicoidalmente sobre um núcleo de material ferromagnético, ou mesmo no ar. O fio possui uma resistência elétrica, que por sinal é baixa, mas o fato de estar enrolado confere a este uma característica em circuitos elétricos diferente de um resistor. O novo componente será chamado de indutor:

Figura 20 - Indutor feito com um condutor enrolado em material ferromagnético.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

A característica deste equipamento será chamada de indutância (L), de unidade henry (H), que é diretamente proporcional ao número de voltas (espiras) do fio condutor em torno do núcleo, à permeabilidade magnética do núcleo, à área da seção do núcleo, e inversamente proporcional ao comprimento do indutor.

A permeabilidade magnética é definida como o grau de magnetização de um material em resposta a um campo magnético aplicado. Em indutores cujo núcleo é um material ferromagnético (por exemplo, ferrite), a permeabilidade magnética do seu núcleo é elevada, aumentando-se assim a sua indutância.

De acordo com a **Lei de Lenz**, uma força eletromotriz é induzida em um condutor quando há uma variação com fluxo magnético, em um sentido que se oponha à variação do fluxo magnético. Um indutor se opõe à variação de corrente, pois a variação do campo magnético através das espiras da bobina faz surgir uma tensão autoinduzida.

Considerando um circuito puramente indutivo, a corrente está atrasada em relação à tensão. Se for aplicada uma tensão senoidal sobre um indutor ideal, a corrente fica atrasada 90° em relação à tensão.

Figura 21 - Circuito elétrico com uma fonte de tensão e um Indutor.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

A equação diferencial básica para um indutor ideal é:

$$V(t) = L \cdot \frac{d[I(t)]}{dt},$$

sendo,

$$V(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow V(t) = \operatorname{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} \right] = \operatorname{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} \right].$$

A corrente que irá circular pelo indutor será:

$$I(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \beta) \Rightarrow I(t) = \operatorname{Re} \left[I_m \cdot e^{j(\omega t + \beta)} \right] = \operatorname{Re} \left[I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} \right],$$

portanto,

$$V(t) = L \cdot \frac{d[I(t)]}{dt} \Rightarrow \operatorname{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} \right] = L \frac{d \operatorname{Re} \left[I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} \right]}{dt}.$$

Logo,

$$\operatorname{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} \right] = j\omega L \cdot \operatorname{Re} \left[I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} \right].$$

Eliminando a função “real” dos dois lados:

$$V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} = j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} \Rightarrow V_m \cdot e^{j\alpha} = j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\beta}.$$

Ou seja,

$$\vec{V} = j\omega L \cdot \vec{I},$$

onde,

$$\vec{V} = V_m \angle \alpha$$

e

$$\vec{I} = I_m \angle \beta.$$

Repare que:

$$V_m \cdot e^{j\alpha} = j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\beta},$$

mas,

$$j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\beta} = \omega L \cdot I_m \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\beta} = \omega L \cdot I_m \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} + \beta)}.$$

Daí, $V_m \cdot e^{j\alpha} = \omega L \cdot I_m \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} + \beta)}$. Logo, conclui-se que:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta.$$

Como era esperado, a tensão está adiantada de $\pi/2$ (ângulo em radianos) com relação à corrente. Isso equivale a 90° .

De outra forma, analise a equação geral do indutor:

$$V(t) = L \cdot \frac{d[i(t)]}{dt} = L \cdot \frac{d[I_m \cdot \cos(\omega t + \beta)]}{dt} = -L\omega \cdot I_m \cdot \text{sen}(\omega t + \beta).$$

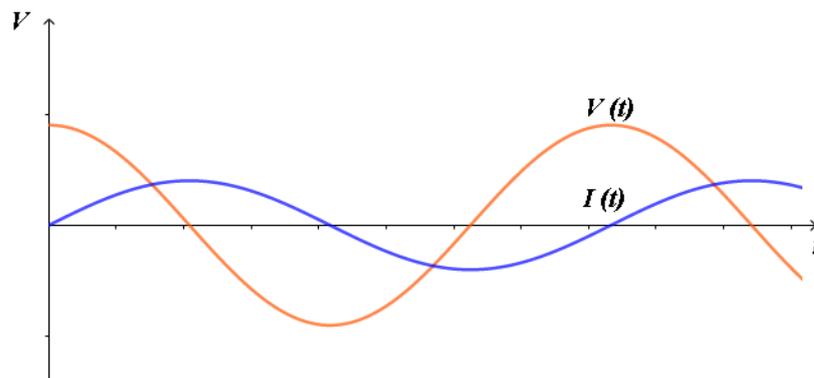
Mas, $V(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, logo, $V_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) = -L\omega \cdot I_m \cdot \text{sen}(\omega t + \beta)$.

Fica claro que para a igualdade ser verdadeira, necessariamente:

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \pm 2 \cdot k \cdot \pi ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Abaixo podem ser visualizadas as formas de onda de tensão e corrente do circuito representado na Figura 21:

Figura 22 - Variação de tensão e corrente no tempo, circuito puramente indutivo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

O diagrama fasorial para um elemento indutivo será representado da seguinte forma:

Figura 23 - Diagrama fasorial para um elemento indutivo.

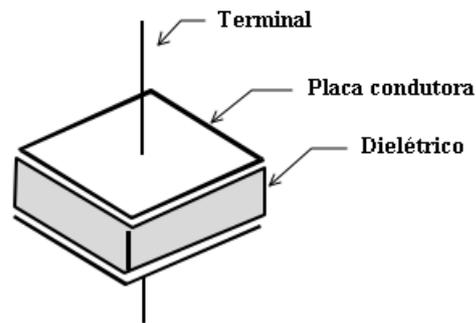


Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

5.3 Capacitores

Um capacitor é formado, basicamente, por duas placas condutoras paralelas, denominadas armaduras, separadas por um material isolante, denominado dielétrico. É um dispositivo que armazena cargas elétricas. A capacitância (C), característica de um capacitor, tem unidade Farad (F).

Figura 24 - Representação de um capacitor de placas paralelas.

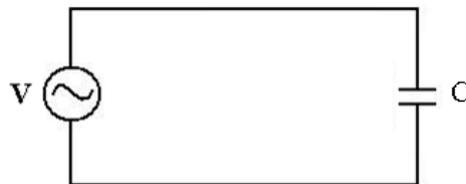


Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Em um capacitor de placas paralelas, a capacitância é diretamente proporcional à área de suas placas e da constante dielétrica do material isolante introduzido entre essas placas e inversamente proporcional à distância de separação das placas do capacitor.

Considerando um circuito puramente capacitivo, a corrente está adiantada em relação à tensão. Se for aplicada uma tensão senoidal sobre um capacitor ideal, a corrente fica adiantada 90° em relação à tensão.

Figura 25 - Circuito elétrico com uma fonte de tensão e um Capacitor.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

A equação diferencial básica para um capacitor ideal é:

$$I(t) = C \cdot \frac{d[V(t)]}{dt},$$

sendo,

$$V(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad V(t) = \text{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} \right] = \text{Re} \left[V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} \right].$$

A corrente que irá circular pelo capacitor será:

$$I(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \beta) \Rightarrow I(t) = \operatorname{Re} [I_m \cdot e^{j(\omega t + \beta)}] = \operatorname{Re} [I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta}],$$

portanto,

$$I(t) = C \cdot \frac{d[V(t)]}{dt} \Rightarrow \operatorname{Re} [I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta}] = C \frac{d\operatorname{Re} [V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha}]}{dt} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} [I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta}] = j\omega C \cdot \operatorname{Re} [V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha}].$$

Eliminando a função “real” dos dois lados:

$$I_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\beta} = j\omega C \cdot V_m \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\alpha} \Rightarrow I_m \cdot e^{j\beta} = j\omega C \cdot V_m \cdot e^{j\alpha}.$$

Ou seja,

$$\vec{I} = j\omega C \cdot \vec{V},$$

onde,

$$\vec{V} = V_m \angle \alpha$$

e

$$\vec{I} = I_m \angle \beta.$$

Repare que:

$$I_m \cdot e^{j\beta} = j\omega C \cdot V_m \cdot e^{j\alpha} = \omega C \cdot V_m \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\alpha} = \omega C \cdot V_m \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} + \alpha)},$$

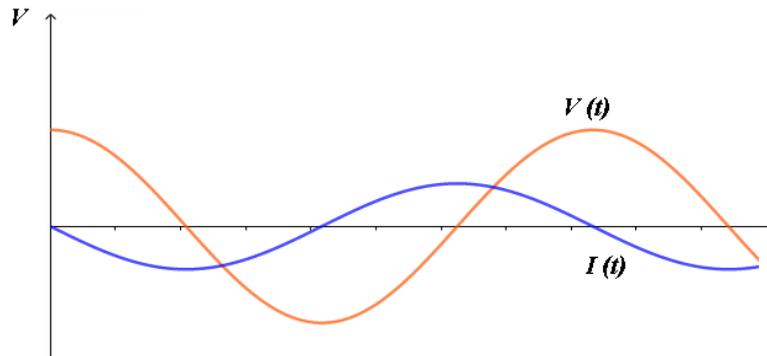
conclui-se que:

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = \beta.$$

Como era esperado, a tensão está atrasada de $\pi/2$ em relação à corrente.

Abaixo podem ser visualizadas as formas de onda de tensão e corrente do circuito representado na Figura 25:

Figura 26 - Variação de tensão e corrente no tempo, circuito puramente capacitivo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Figura 27 - Diagrama fasorial para um elemento capacitivo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

5.4 Impedância

O conceito de impedância está relacionado com a capacidade de resposta de um circuito elétrico percorrido por uma corrente alternada. Comparando as relações fasoriais obtidas para os elementos resistivos, indutivos e capacitivos, respectivamente, temos:

$$\vec{V} = R \cdot \vec{I}$$

$$\vec{V} = j\omega L \cdot \vec{I}$$

$$\vec{I} = j\omega C \cdot \vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{j\omega C} \vec{I}$$

Será definida a impedância Z , que é dada pela relação entre \vec{V} e \vec{I} :

$$\vec{V} = Z \cdot \vec{I} \Rightarrow Z = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$$

Note que a impedância é um número complexo que relaciona tensão elétrica e corrente elétrica. Ou seja, Z não é um fasor.

A unidade de impedância é o ohm, mesma unidade da resistência elétrica.

- A impedância de um resistor é igual à resistência (R):

$$Z_{Resistor} = R$$

- A impedância de um indutor é igual à reatância indutiva (X_L):

$$Z_{Indutor} = X_L = j\omega L$$

- A impedância de um capacitor é igual à reatância capacitiva (X_C):

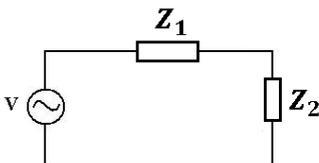
$$Z_{Capacitor} = X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

5.5 Associações de elementos passivos

5.5.1 Associação de impedâncias em série

É possível calcular a impedância equivalente de um circuito com mais de um elemento. Se os elementos estiverem em série, a impedância equivalente será a soma destes. Considere o circuito da figura a seguir com duas impedâncias, Z_1 e Z_2 , ligadas em série:

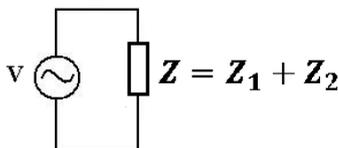
Figura 28 - Circuito elétrico com impedâncias ligadas em série.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

No caso de uma associação em série, a corrente que flui pelas impedâncias é a mesma. É possível representar um circuito elétrico equivalente a este, que irá desenvolver uma mesma potência elétrica, com apenas uma impedância:

Figura 29 - Circuito equivalente da associação de impedâncias em série.



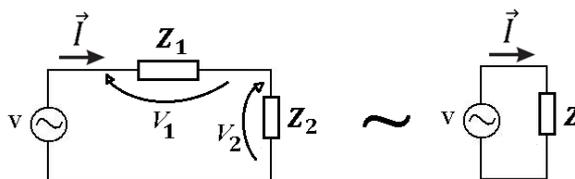
Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Na Figura 29 tem-se um circuito equivalente, em que circula uma mesma corrente elétrica do circuito da Figura 28. Mas repare que a diferença de potencial em cada elemento é diferente. Sobre a impedância Z_1 haverá uma diferença de potencial (V_1), e sobre a impedância Z_2 haverá uma outra diferença de potencial (V_2), que somadas igualam-se à diferença de potencial da fonte:

$$V = V_1 + V_2$$

A figura a seguir ilustra a relação de equivalência entre os circuitos:

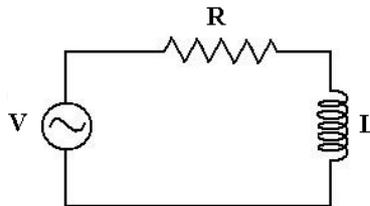
Figura 30 - Relação de equivalência entre os circuitos com impedâncias em série.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Exemplo 5.5.1. Considere o circuito da figura abaixo, com uma resistência elétrica (R) de 20Ω e uma indutância (L) de 50 mH. O gerador que alimenta o circuito tem tensão de 220 V (valor eficaz) com frequência de 60 Hz.

Figura 31 - Circuito elétrico com resistor e indutor em série.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Solução:

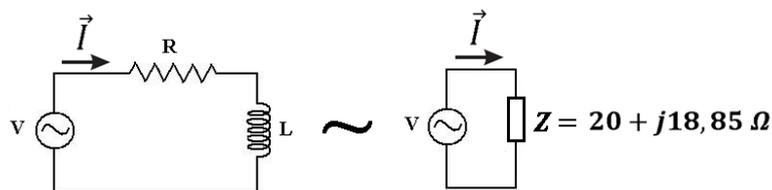
Será calculada a corrente elétrica do circuito e a diferença de potencial sobre o resistor e sobre o indutor.

A impedância do indutor é dada por:

$$Z_{Indutor} = X_L = j\omega L = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 50 \cdot 10^{-3} = j18,85 \Omega$$

Assim, é possível fazer a relação de equivalência com um circuito de apenas uma impedância Z , que será a soma das duas:

Figura 32 - Circuito equivalente de associação série de Resistor e Indutor.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Para calcular a corrente elétrica (I) do circuito, basta dividir a tensão pela impedância, mas, para isso, é importante que a impedância esteja na forma polar. A transformação da

forma retangular para a polar é feita com uma operação simples, já descrita anteriormente (Vide Tabela 1).

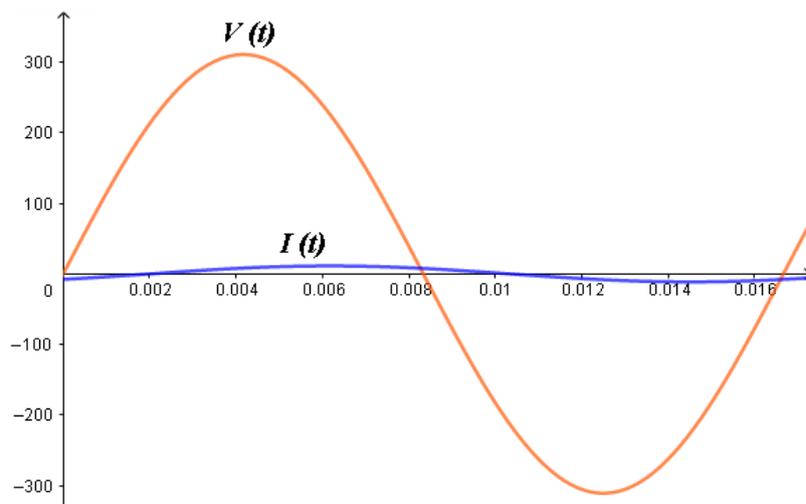
Logo, $Z = 20 + j18,85 \Omega = 27,48 \angle 43,30^\circ \Omega$. Portanto,

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{27,48 \angle 43,30^\circ} = 8,01 \angle -43,30^\circ A$$

Esse é o valor eficaz da corrente elétrica.

Na figura a seguir estão representadas as formas de onda da tensão da fonte e da corrente elétrica do circuito em escala real.

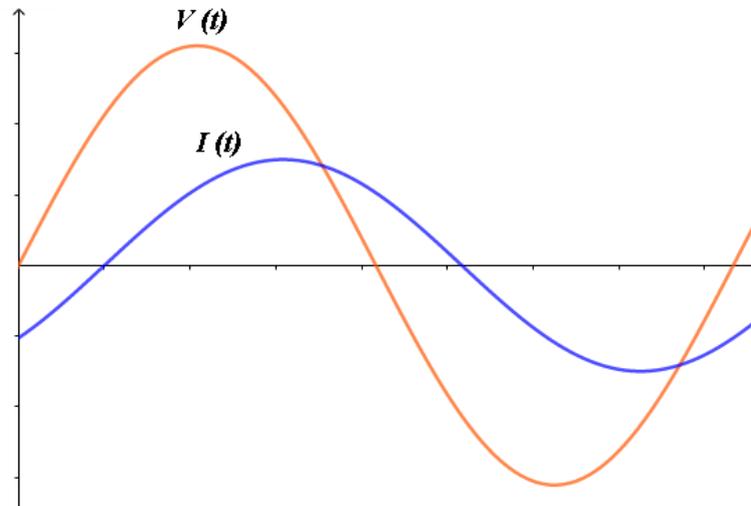
Figura 33 - Formas de onda de tensão e corrente em escala real, circuito com resistor e indutor em série.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Na Figura 34 as formas de onda estão representadas fora de escala, para representar melhor a defasagem entre tensão e corrente elétrica.

Figura 34 - Formas de onda de tensão e corrente em fora de escala, circuito com resistor e indutor em série.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Vale ressaltar que os valores máximos de tensão e corrente são iguais aos valores eficazes multiplicados por raiz de 2. Logo, o valor máximo da corrente elétrica é de, aproximadamente, 11,33 A e o valor máximo da tensão elétrica é de 311,13 V.

A diferença de potencial sobre o resistor (V_R) será igual à impedância do resistor multiplicada pela corrente elétrica:

$$\vec{V}_R = R \cdot \vec{I} \Rightarrow \vec{V}_R = (20) \cdot (8,01 \angle -43,30^\circ) = 160,2 \angle -43,30^\circ$$

Analogamente, a diferença de potencial sobre o indutor (V_L) será igual à impedância do indutor multiplicada pela corrente elétrica:

$$\vec{V}_L = X_L \cdot \vec{I} \Rightarrow \vec{V}_L = (j18,85) \cdot (8,01 \angle -43,30^\circ) = (18,85 \angle 90^\circ) \cdot (8,01 \angle -43,30^\circ)$$

$$\vec{V}_L = 150,99 \angle 46,7^\circ$$

Ao somar as diferenças de potencial elétrico, tem-se:

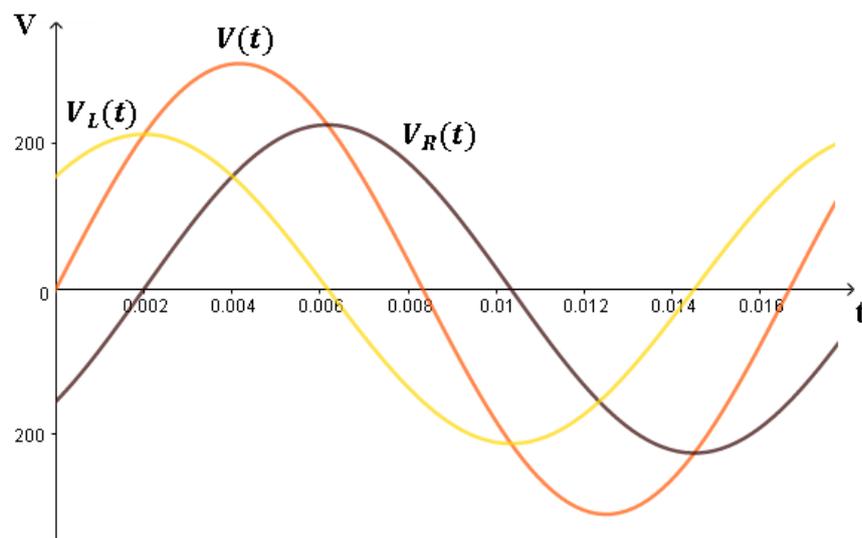
$$\vec{V}_R + \vec{V}_L = 160,2 \angle -43,30^\circ + 150,99 \angle 46,7^\circ = 116,59 - j109,87 + 103,55 + j109,89$$

$$\vec{V}_R + \vec{V}_L = 220,14 + j0,02 \approx 220 \angle 0^\circ = \vec{V}$$

Como era esperado, a soma das diferenças de potencial sobre os elementos é igual à tensão do gerador. Há um erro mínimo, devido às aproximações utilizadas com 2 elementos significativos após a vírgula.

A seguir estão representadas as tensões em cada um dos elementos para fins comparativos:

Figura 35 - Tensões em cada um dos elementos do circuito da Figura 31.

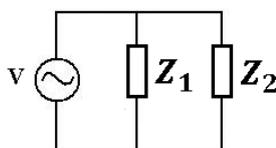


Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

5.5.2 Associação de impedâncias em paralelo

Se os elementos estiverem conectados em paralelo, em um circuito, estarão sob a mesma diferença de potencial elétrico. A figura a seguir ilustra uma associação de duas impedâncias em paralelo:

Figura 36 - Circuito elétrico com impedâncias ligadas em paralelo.



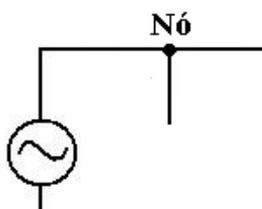
Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Como as impedâncias estão conectadas diretamente ao potencial elétrico da fonte de tensão, em cada uma delas, irá circular uma corrente elétrica, que depende apenas da tensão elétrica da fonte e de cada uma das impedâncias.

Existe uma importante definição em circuitos elétricos, conhecida como a **Primeira Lei de Kirchhoff**. Ela diz, basicamente, que “a soma das correntes elétricas que chegam a um nó é igual à soma das correntes que saem deste”.

Um nó é um ponto de um circuito elétrico, onde três ou mais condutores estão conectados:

Figura 37 - Representação de um nó em um circuito elétrico.

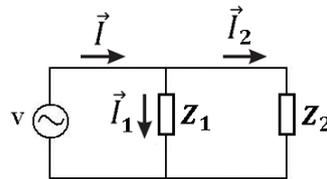


Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

A corrente elétrica que passa pela impedância Z_1 será chamada de \vec{I}_1 , e a corrente elétrica que passa pela impedância Z_2 será chamada de \vec{I}_2 . Portanto, a corrente solicitada da fonte (\vec{I}) é igual à soma das correntes das duas impedâncias:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

Figura 38 - Representação das correntes elétricas em uma associação de impedâncias em paralelo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

É possível representar um circuito, equivalente ao da Figura 38, com apenas uma impedância. Repare que:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}}{Z_1}$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{V}}{Z_2}$$

Logo,

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{Z_1} + \frac{\vec{V}}{Z_2} = \frac{Z_2\vec{V} + Z_1\vec{V}}{Z_1Z_2} = \vec{V} \cdot \frac{(Z_2 + Z_1)}{Z_1Z_2}$$

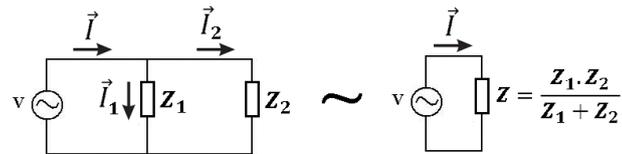
Daí:

$$\vec{V} = \frac{Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)} \cdot \vec{I}$$

Assim, para obter um circuito equivalente ao da associação em paralelo, basta utilizar uma impedância Z , tal que:

$$Z = \frac{Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)}$$

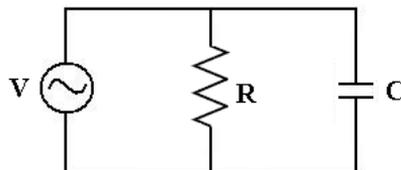
Figura 39 - Relação de equivalência entre os circuitos com impedâncias em paralelo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Exemplo 5.5.2. Considere o circuito da figura abaixo com uma resistência elétrica (R) de 25Ω e uma capacitância (C) de $56 \mu\text{F}$. O gerador que alimenta o circuito tem tensão de 220 V (valor eficaz) com frequência de 60 Hz .

Figura 40 - Circuito elétrico com Resistor e Capacitor em paralelo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

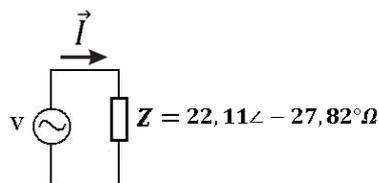
A impedância do capacitor é dada por:

$$Z_{\text{capacitor}} = X_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot f \cdot 56 \cdot 10^{-6}} = -j47,37 \Omega$$

Calculando a impedância (Z), equivalente da associação dos elementos em paralelo, tem-se:

$$Z = \frac{R \cdot X_C}{R + X_C} = \frac{25 \cdot (-j47,37)}{25 - j47,37} = \frac{-j1184,25}{25 - j47,37} = \frac{1184,25 \angle -90^\circ}{53,56 \angle -62,18^\circ} = 22,11 \angle -27,82^\circ \Omega$$

Figura 41 - Circuito equivalente ao circuito da associação de Resistor e Capacitor em paralelo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

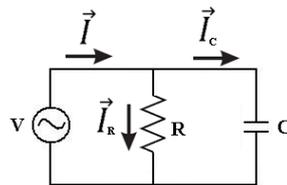
A corrente elétrica solicitada da fonte será dada por:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{22,11\angle -27,82^\circ} = 9,95\angle 27,82^\circ A$$

Mas repare que tal corrente elétrica é a soma da corrente elétrica que flui pelo resistor e pelo capacitor:

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

Figura 42 - Representação das correntes elétricas em cada componente do circuito.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Calculando as correntes elétricas em cada ramo do circuito, tem-se:

$$\vec{I}_R = \frac{\vec{V}}{R} = \frac{220\angle 0^\circ}{25\angle 0^\circ} = 8,8\angle 0^\circ A$$

$$\vec{I}_C = \frac{\vec{V}}{X_C} = \frac{220\angle 0}{-j47,37 \Omega} = \frac{220\angle 0^\circ}{47,37\angle -90^\circ} = 4,64\angle 90^\circ A$$

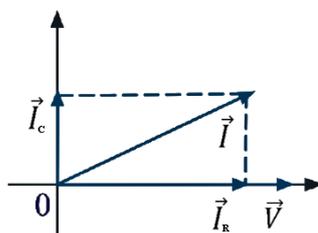
Somando as correntes elétricas do resistor e do capacitor:

$$\vec{I}_R + \vec{I}_C = 8,8\angle 0^\circ + 4,64\angle 90^\circ = 8,8 + j4,64 = 9,95\angle 27,8^\circ = \vec{I}$$

Como era esperado, ao somar as correntes elétricas dos componentes, obtém-se a corrente elétrica da fonte.

Na figura a seguir, está representado o diagrama fasorial das correntes elétricas e da tensão da fonte.

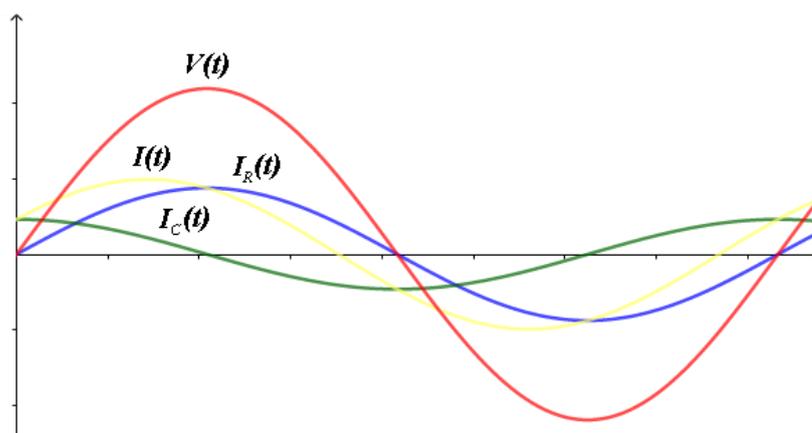
Figura 43 - Diagrama fasorial das correntes elétricas do circuito com Resistor e Capacitor em paralelo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Na Figura 44 é possível visualizar a tensão da fonte, bem como as correntes elétricas do circuito, variando no tempo:

Figura 44 - Variação de tensão e corrente elétrica no tempo. Circuito com Resistor e Capacitor em paralelo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

5.6 Sistemas Trifásicos

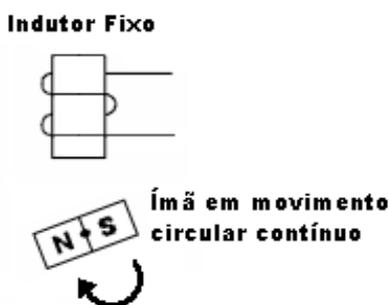
O sistema trifásico é o mais utilizado em Sistemas Elétricos. A principal justificativa para se optar por este sistema está na otimização do processo de geração de energia elétrica (que apesar de possuir este nome, trata da transformação de alguma forma de energia em energia elétrica), além disso, em geral, os equipamentos trifásicos (que utilizam três tensões elétricas simultaneamente), como motores, são mais eficientes quando comparados aos equipamentos monofásicos (que utilizam apenas uma tensão elétrica). Existem também alguns componentes elétricos que são chamados de bifásicos, por funcionarem utilizando-se a aplicação de duas tensões distintas.

Uma das formas mais comuns de gerar tensão elétrica utiliza uma aplicação da **Lei da Indução Eletromagnética**, também conhecida como **Lei de Faraday-Neumann-Lenz**. Ela descreve como a variação de um campo magnético no tempo, através de um circuito em repouso, produz um campo elétrico não-eletrostático que, por sua vez, produz uma corrente elétrica no circuito. A versão mais difundida da **Lei de Faraday** afirma: “A força eletromotriz induzida em qualquer circuito fechado é igual ao negativo da variação do fluxo magnético com o tempo na área delimitada pelo circuito.”

Ou seja, a **Lei de Faraday-Neumann-Lenz**, explica que, sempre que houver variação do fluxo magnético no tempo, haverá surgimento de uma tensão elétrica, que dá origem a uma corrente elétrica, se houver um circuito elétrico fechado. A variação do fluxo magnético pode ser feita, por exemplo, pelo movimento de um ímã. Se este movimento ocorre próximo a um condutor de eletricidade, a **Lei de Faraday-Neumann-Lenz** se aplica, e temos uma tensão elétrica induzida neste condutor.

O movimento circular é o tipo de movimento contínuo mais simples de ser reproduzido. É muito provável que tenha surgido antes da invenção da roda, que data mais de 5 mil anos. Este movimento será utilizado no gerador elétrico elementar representado a seguir:

Figura 45 - Gerador elementar com apenas uma bobina.

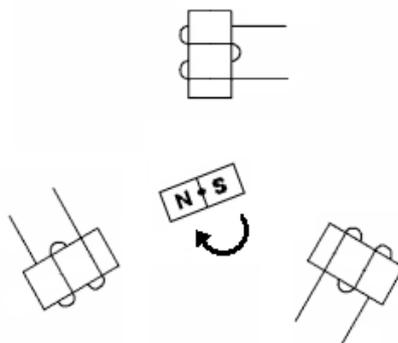


Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Mantendo fixa uma bobina, como representado na Figura 45, e fazendo um ímã realizar um movimento circular contínuo, será induzida uma tensão elétrica na bobina. Se o ímã é mantido em velocidade constante, será produzida uma tensão elétrica senoidal padronizada, cuja frequência dependerá da velocidade de rotação do ímã.

A geração de tensões trifásicas utiliza este processo, mas são utilizadas três bobinas fixas e um ímã realiza o movimento giratório, como representado na Figura 46. Cabe ressaltar que, na grande maioria das vezes, os geradores trifásicos utilizam, no rotor, uma bobina submetida a uma corrente elétrica contínua, que produz um campo magnético contínuo, similar ao existente em um ímã permanente.

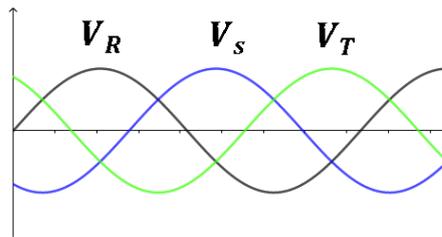
Figura 46 - Gerador Trifásico Elementar.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Com essa configuração elementar, as bobinas estão separadas de 120° mecânicos. Isso irá produzir uma defasagem de 120° elétricos entre as tensões elétricas induzidas nas bobinas. Na figura a seguir estão representadas as três tensões elétricas de um sistema trifásico, chamadas de V_R , V_S e V_T .

Figura 47 - Tensões elétricas trifásicas variando no tempo.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Considerando que o valor de pico das três tensões é igual a V_m , é possível representar as equações de cada uma das tensões variando no tempo (t), com relação ao potencial elétrico 0V:

$$V_R = V_m \text{sen}(\omega t + 0)$$

$$V_S = V_m \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$V_T = V_m \text{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

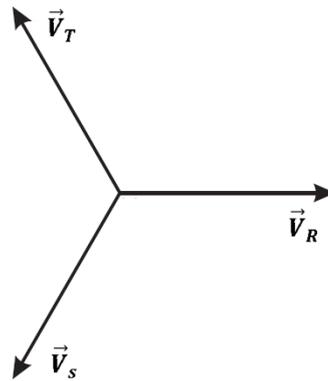
Consequentemente, os fasores que representam tais tensões serão:

$$\vec{V}_R = V_m \angle 0$$

$$\vec{V}_S = V_m \angle -120^\circ$$

$$\vec{V}_T = V_m \angle 120^\circ$$

Figura 48 - Diagrama Fasorial do sistema de tensões trifásico.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

As tensões acima representadas são chamadas de tensões de fase. Se duas tensões forem conectadas diretamente, haverá uma diferença de potencial de amplitude maior, e será chamada de **tensão de linha**. Por exemplo, conectando a fase V_R à fase V_S , tem-se uma diferença de potencial V_{RS} , que será dada por:

$$\overrightarrow{V_{RS}} = \overrightarrow{V_R} - \overrightarrow{V_S} = V_m \angle 0 - (V_m \angle -120^\circ)$$

Para realizar a operação de subtração, os números devem estar na forma retangular, como representado na Tabela 1. Logo:

$$\overrightarrow{V_{RS}} = V_m - (V_m \cdot \cos(-120^\circ) + jV_m \operatorname{sen}(-120^\circ)) = V_m - \left(V_m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + jV_m \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

$$\overrightarrow{V_{RS}} = V_m + \frac{1}{2} \cdot V_m + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot jV_m = V_m \left(\frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{V_{RS}} = V_m \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} \right) \right) = V_m \left(\sqrt{\frac{12}{4}} \angle \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right)$$

$$\overrightarrow{V_{RS}} = \sqrt{3} V_m \angle 30^\circ$$

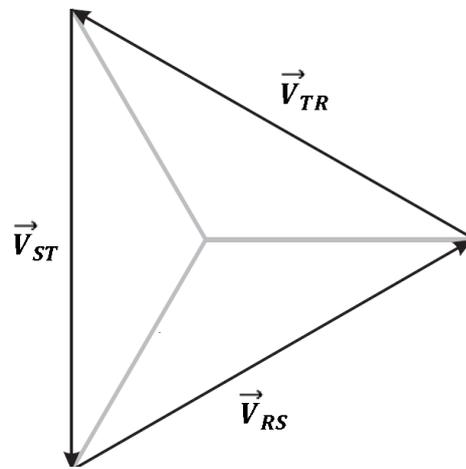
Este multiplicador $\sqrt{3}$ aparece frequentemente em circuitos trifásicos.

A equação da tensão V_{RS} variando no tempo será:

$$V_{RS} = \sqrt{3}V_m \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Realizando procedimento similar ao cálculo de V_{RS} é possível calcular as tensões V_{TR} e V_{ST} . Na Figura a seguir está representado o diagrama fasorial das tensões de linha.

Figura 49 - Diagrama Fasorial das tensões de linha.



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor.

Onde,

$$\overrightarrow{V_{RS}} = \sqrt{3}V_m \angle 30^\circ$$

$$\overrightarrow{V_{TR}} = \sqrt{3}V_m \angle 150^\circ$$

$$\overrightarrow{V_{ST}} = \sqrt{3}V_m \angle 270^\circ$$

6 CONCLUSÃO

Ao fim deste trabalho, concluímos um estudo bem detalhado sobre os conjuntos numéricos, onde apresentamos a definição de **Corpo e Corpo Ordenado**. Foi explicado o conceito dos números complexos \mathbb{C} , e como se deu o processo histórico para criar essa definição. Também, explicou-se porque o conjunto dos números complexos não pode ser considerado um **Corpo Ordenado**.

O conceito de números complexos foi utilizado para explicar a definição de fasores, quando uma função trigonométrica é associada a um número complexo, que pode ser representado através de um fasor.

Apresentadas tais definições, foi explicado como a utilização de fasores auxilia nos estudos sobre circuitos de corrente alternada. Nesta parte, foram mostrados elementos passivos de circuitos elétricos, e como cada um se comporta quando submetido a tensões elétricas alternadas. Ainda nesse contexto, explicou-se como flui a corrente elétrica, quando há associação desses elementos passivos em circuitos elétricos.

Por fim, mostramos o conceito do sistema trifásico, citamos alguns equipamentos que utilizam duas ou três tensões, simultaneamente, em seu funcionamento, e foi mostrado como se dá o diagrama fasorial dessas tensões, que estão defasadas entre si de “120° elétricos”.

Entendemos que o intuito principal do texto foi alcançado, pois explicamos as definições de fasores, com um rigor matemático e detalhamento não encontrados em livros de circuitos elétricos. Por vezes, utilizamos uma linguagem mais simples do que o habitual no meio matemático acadêmico, como a notação de um número complexo z com módulo seguido do argumento ($z = |z| \angle \varphi$), pois é uma simplificação comum no estudo de circuitos elétricos, e a ideia é que este texto possa ser utilizado, também, por alunos de ensino médio e profissionalizante.

7 REFERÊNCIAS

CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos Números Complexos**. Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática. IME-USP, 2001.

COSTA, C.; ARNANT, R. C. T. **Números Complexos e Trigonometria**. 2ª edição. Fundação CECIERJ, 2009.

CRUZ, E. C. **Circuitos Elétricos – Corrente Contínua e Corrente Alternada**. São Paulo: Editora Érica, 2013.

DO CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria, Números Complexos**. Coleção do Professor de Matemática. 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

FILHO, M. R.; SILVA, D. S. V.; ARAÚJO, A. P. **Fasores: Uma Aplicação de Números Complexos**.

MARKUS, O. **Circuitos elétricos: corrente contínua e corrente alternada** – Teoria e Exercícios. São Paulo: Editora Érica, 2008.

MEDEIROS, J. C. O. **Princípios de telecomunicações: teoria e prática**. 5ª edição. São Paulo: Érica, 2016.

MERINO, O. **A Short History of Complex Numbers**. Department of Mathematics. University of Rhode Island, 2006.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. **Circuitos Elétricos**. 10ª edição. Editora Pearson Brasil, 2016.