



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**CENTRO TECNOLÓGICO**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**THIAGO GALDINO BALISTA**

**COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA E COM MÚLTIPLA RECIPROCIDADE  
EM PROBLEMAS GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ**

**VITÓRIA – ES**

**2021**

**THIAGO GALDINO BALISTA**

**COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA E COM MÚLTIPLA RECIPROCIDADE  
EM PROBLEMAS GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro  
Lara

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler  
Neto

**VITÓRIA – ES**

**2021**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**THIAGO GALDINO BALISTA**

**COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA E COM MÚLTIPLA RECIPROCIDADE  
EM PROBLEMAS GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ**

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara – Orientador  
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

---

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Coorientador  
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

---

Prof. Dr. Wellington Betencurte da Silva – Examinador Interno  
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

---

Eng. Dr. André Bulcão – Examinador Externo  
CENPES – PETROBRAS

---

Eng. Dr. Hércules de Melo Barcelos – Examinador Externo  
INMETRO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Vitória (ES), 17 de dezembro 2021.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por todas as minhas conquistas nesses anos, e por me lembrar de que sempre sou mais forte do que penso.

Aos meus pais, Nadyr Roque Balista e Jussara Galdino que, mesmo com a correria de seus trabalhos, educaram e fizeram-me acreditar em sonhos, pois eles são realizáveis, basta ter responsabilidade, comprometimento e dedicação. À minha irmã Isadora Galdino Balista, que me apoiou com pequenas palavras e gestos ao longo do processo. E a todos os familiares, que mesmo com a distância, sempre se fizeram presentes na minha vida.

Ao meu orientador, Professor Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara, por sua disponibilidade em me ajudar, pela amizade e pelos sábios conselhos sempre que o procurei para conversar. A convivência entre nós foi extremamente agradável e sua companhia me levou a grandes aprendizados. Obrigado pela confiança no meu trabalho, não seria possível concluí-lo sem a sua ajuda.

Ao meu coorientador, Professor Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto, também pela confiança, paciência, amizade e por prontamente me auxiliar e aconselhar sempre que precisei. Muito obrigado pela compreensão e orientação.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM e à Universidade Federal Do Espírito Santo – UFES pela oportunidade de cursar o mestrado.

À assistente do PPGEM, Andréia Guzi Eyng, que sempre esteve disposta a me auxiliar na medida do possível, e pela imensa paciência com as “milhares” dúvidas burocráticas.

Agradeço também aos meus amigos, pela cumplicidade e pelos momentos compartilhados.

Enfim, a minha eterna gratidão a todos que conheci nessa jornada de estudos, e à FAPES pelo suporte durante essa etapa da minha vida.

*O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia*

*Robert Collie*

## RESUMO

Este trabalho aborda a aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a solução de problemas regidos pela Equação de Helmholtz. Com essa finalidade, utiliza-se, em um primeiro momento, o procedimento adaptativo intitulado de Interpolação o Direta Autorregularizada (MECID-2), que aplica funções de base radial para resolver o termo integral referente à inércia na Equação de Helmholtz. Esta nova técnica, originou-se da formulação da Interpolação Direta (MECID). No entanto, a técnica da MECID-2 estabelece uma função auxiliar, que consiste na solução fundamental do problema Laplace subtraída de uma função associada ao Tensor de Galerkin e, deste modo, ignora a execução do procedimento de regularização, uma vez que evita a singularidade produzida na solução fundamental devido à coincidência entre os pontos fonte e os pontos de interpolação. Em um segundo momento, a formulação do MEC é proposta estendendo-se a aplicação da Múltipla Reciprocidade (MECMR) a qual usa estrategicamente uma sequência de soluções fundamentais de ordem superior, colaborando para a conversão do termo integral de domínio para o contorno exato apenas utilizando a formulação proposta. Assim, os experimentos numéricos são implementados em problemas bidimensionais a fim de avaliar o desempenho das duas propostas, por meio da solução de problema de respostas, que corresponde em varrer diferentes frequências de excitação. De maneira geral, simulações são comparadas com as soluções analíticas, para gerar informações de referência.

**Palavras-Chave:** Método dos Elementos de Contorno, Equação de Helmholtz, Interpolação Direta, Função de Base Radial, Solução Fundamental de Ordem Superior, Múltipla Reciprocidade.

## ABSTRACT

This work deals with the application of the Boundary Element Method (BEM) to solve problems governed by the Helmholtz Equation. For this, we use the adaptive procedure called Direct Interpolation Self-regularized (DIBEM-2), which applies radial basis functions to solve the integral term referring to the inertia in the Helmholtz Equation. This new technique originated from the formulation Direct Interpolation (DIBEM). However, the DIBEM-2 technique establishes an auxiliary function, which consists of the fundamental solution of the Laplace problem subtracted from a function associated with the Galerkin Tensor and, in this way, ignores the execution of the regularization procedure, since it avoids the singularity produced in the fundamental solution due to the coincidence between the source points and the interpolation points. In a second step, the BEM formulation is proposed by extending the application of Multiple Reciprocity (MRBEM) which strategically uses a sequence of fundamental higher-order solutions, collaborating to convert the domain integral term to the exact contour only using the proposed formulation. Thus, numerical experiments are implemented on two-dimensional problems in order to evaluate the performance of the two proposals by solving the response problem, which corresponds to sweeping different excitation frequencies. In general, simulations are compared with analytical solutions to generate benchmark information.

**Keywords:** Boundary Element Method, Helmholtz Equation, Direct Interpolation, Radial Basis Function, Fundamental Higher-order Solution, Multiple Reciprocity.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Domínio de duas dimensões $\Omega$ delimitado por um contorno $\Gamma u + \Gamma q$ .....	26
Figura 2 – Processo de transformação da integral de domínio para o contorno pela MECMR. .....	41
Figura 3 – Domínio com solução harmônica e condições de contorno para o primeiro exemplo. ....	48
Figura 4 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o primeiro exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno. ....	49
Figura 5 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o primeiro exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno. ....	50
Figura 6 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o primeiro exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno. ....	50
Figura 7 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno. ....	52
Figura 8 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno. ....	52
Figura 9 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno. ....	53
Figura 10 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR. ....	54
Figura 11 – Domínio com solução harmônica e condições de contorno para o segundo exemplo .....	55
Figura 12 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o segundo exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno. ....	56
Figura 13 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o segundo exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno. ....	57

Figura 14 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o segundo exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno. ....	58
Figura 15 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno.....	59
Figura 16 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno.....	59
Figura 17 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno.....	60
Figura 18 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR. ....	61
Figura 19 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 para o cálculo potencial nos pontos internos do domínio.....	62
Figura 20 – Características geométricas e condições de contorno para o terceiro exemplo ....	63
Figura 21 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação simuladas no terceiro exemplo referente ao cálculo das primitivas para a formulação MECMR, utilizando malha de 80 elementos no contorno. ....	64
Figura 22 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação simuladas no terceiro exemplo referente ao cálculo das primitivas para a formulação MECMR, utilizando malha de 160 elementos no contorno. ....	65
Figura 23 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação simuladas no terceiro exemplo referente ao cálculo das primitivas para a formulação MECMR, utilizando malha de 320 elementos no contorno. ....	66
Figura 24 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno. ....	67
Figura 25 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno. ....	67
Figura 26 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno. ....	68
Figura 27 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR. ....	69
Figura 28 – Características geométricas e condições de contorno para o terceiro exemplo. ...	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 80 elementos no contorno.....	49
Tabela 2 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 160 elementos no contorno.....	50
Tabela 3 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 320 elementos no contorno.....	51
Tabela 4 – Análise paramétrica do tempo de processamento para cada malha da MECID-2..	53
Tabela 5 – Análise paramétrica do tempo de processamento para cada malha do MEC.....	54
Tabela 6 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 80 elementos no contorno.....	57
Tabela 7 - Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 160 elementos no contorno.....	57
Tabela 8 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 320 elementos no contorno.....	58
Tabela 9 – Análise paramétrica do tempo de processamento para cada malha da MECID-2..	60
Tabela 10 – Análise paramétrica do tempo de processamento para cada malha do MEC.....	61
Tabela 11 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 80 elementos no contorno.....	64
Tabela 12 - Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 160 elementos no contorno.....	65
Tabela 13 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 320 elementos no contorno.....	66
Tabela 14 – Análise paramétrica do tempo de processamento para cada malha da MECID-2. .....	68
Tabela 15 – Análise paramétrica do tempo de processamento para cada malha do MEC.....	69

## LISTA DE ABREVIATURAS

<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos
<b>MVF</b>	Método dos Volumes Finitos
<b>MDF</b>	Método de Diferenças Finitas
<b>MEC</b>	Método dos Elementos de Contorno
<b>MECDR</b>	Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade
<b>MECID</b>	Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta
<b>MECID-2</b>	Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta Autorregulariza
<b>MECMR</b>	Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade
<b>EDP</b>	Equações Diferenciais Parciais
<b>FBR</b>	Função de Base Radial
<b>TDID</b>	Termo Excedente de Domínio Interpolação Direta
<b>TDMR</b>	Termo Excedente de Domínio Múltipla Reciprocidade
<b>TSPG</b>	Termo da Segunda Primitiva de Galerkin
<b>TIN</b>	Termo Integral Desprezado

## LISTA DE SÍMBOLOS

$t$	Tempo
$k$	Velocidade de propagação da onda acústica
$E$	Módulo de Young ou Módulo de elasticidade
$\rho$	Função densidade
$\omega$	Frequência natural
$x_1$	Coordenada cartesiana
$x_2$	Coordenada cartesiana
$\bar{u}$	Potencial prescrito
$\bar{q}$	Derivada normal prescrita
$\Gamma_u$	Condição de contorno de Dirichlet ou essenciais
$\Gamma_q$	Condição de contorno de Neumann ou naturais
$n$	Direção normal ao contorno
$i$	Índice
$j$	Índice
$u^*(\xi; X)$	Solução fundamental do problema
$q^*(\xi; X)$	Derivada da solução fundamental do problema
$r$	Distância Euclidiana entre dois pontos
$\Delta(\xi; X)$	Função delta de Dirac
$\xi$	Ponto fonte
$X$	Ponto campo genérico
$\Omega(X)$	Domínio do problema
$\eta_i(X)$	Vetor normal direcional
$u(X)$	Potencial escalar
$q(X)$	Derivada do potencial
$c(\xi)$	Constante correlata à localização do ponto fonte
$\Gamma(X)$	Contorno da geometria do problema
$H$	Matriz relacionada aos termos de fluxo da solução fundamental
$G$	Matriz relacionada aos termos da solução fundamental
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$b^*(\xi; X)$	Função auxiliar
$G^*(\xi; X)$	Tensor de Galerkin

$S^*(\xi; X)$	Derivada direcional do Tensor de Galerkin
$F^j(X^j; X)$	Função de interpolação
$\xi \alpha^j$	Coefficiente associado à função de interpolação $F^j$
$X^j$	Ponto base
$\Psi^j(X^j; X)$	Função primitiva de $F^j$
$\eta^j(X^j; X)$	Função neta relacionada à função primitiva
$F^{-1}$	Inversa da matriz correlata à função de base radial
$\xi \Lambda^X$	Matriz diagonal relacionada ao tensor de Galerkin
$N_i$	Vetor neta relacionado às integrais da função neta
$u_j^*(\xi; X)$	Solução fundamental de ordem superior
$q_j^*(\xi; X)$	Derivada da solução fundamental de ordem superior
$S_j$	Coefficiente
$N$	Índice de contador
$V_a$	Valor potencial analítico
$V_n$	Valor potencial numérico
$M_{ant}$	Maior valor analítico

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	17
1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES.....	17
1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	19
1.3 METODOLOGIA .....	20
1.4 RESUMO DOS CAPÍTULOS .....	21
<b>2 O PROBLEMA GOVERNADO PELA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ</b> .....	23
2.1 INTRODUÇÃO .....	23
2.2 OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ A PARTIR DA EQUAÇÃO DE ONDA ACÚSTICA.....	23
<b>3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b> .....	26
3.1 INTRODUÇÃO .....	26
3.2 TRATAMENTO DO TERMO ASSOCIADO AO LAPLACIANO .....	27
<b>4 A FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA PARA PROBLEMAS DE HELMHOLTZ</b> .....	31
4.1 INTRODUÇÃO .....	31
4.2 TRATAMENTO DA INTEGRAL DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ .....	32
4.3 TRATAMENTO DO TERMO EXCEDENTE DE DOMÍNIO.....	35
4.4 PROCEDIMENTO OPERACIONAL E CONSTRUÇÃO MATRICIAL .....	38
<b>5 A FORMULAÇÃO DA MÚLTIPLA RECIPROCIDADE PARA PROBLEMAS DE HELMHOLTZ</b> .....	40
5.1 INTRODUÇÃO .....	40
5.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL .....	42
5.3 PROCEDIMENTO OPERACIONAL E CONSTRUÇÃO MATRICIAL .....	45
<b>6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS</b> .....	46
6.1 INTRODUÇÃO .....	46
6.2 PRIMEIRO EXEMPLO .....	48
6.3 SEGUNDO EXEMPLO .....	55

6.4 TERCEIRO EXEMPLO .....	62
<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>72</b>
<b>APÊNDICE A – Encontrando a função primitiva <math>\Psi^j(X^j; X)</math></b> .....	<b>78</b>
<b>APÊNDICE B – Encontrando a função <math>\eta^j(X^j; X)</math></b> .....	<b>80</b>
<b>APÊNDICE C – Encontrando as primitivas correspondentes à técnica da MECMR.....</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE D – Análise do termo integral de domínio da formulação MECMR .....</b>	<b>86</b>
<b>APÊNDICE E – Solução analítica do terceiro exemplo.....</b>	<b>89</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

A engenharia, de um modo geral, é sempre apontada como uma área promissora, devido ao avanço tecnológico ocorrido em ritmo acelerado. Nos últimos anos, inovações alavancadas por meio desses avanços estão cada vez mais comuns em diversos sistemas, por exemplo: realidade virtual, computação quântica, inteligência artificial, realidade aumentada, entre outras. Assim, essa nova realidade de uso da tecnologia representa enorme mudança não apenas na forma como percebemos os processos comerciais, mas também em nossas atividades cotidianas.

No entanto, um dos fatores que colaborou com esse progresso, iniciou-se em meados do século XX, com o advento da primeira máquina digital eletrônica de grande escala, nomeada de ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*). Motivada por essa ideia, na década cinquenta, foi realizada a produção do EDVAC (*Electronic Discrete Variable Automatic Computer*), o primeiro computador a incorporar programação armazenada que com o desempenho de sucesso, tornou sua arquitetura como padrão para os computadores modernos (ASPRAY, 1983).

Nesse sentido, um engenheiro, um físico ou um matemático aproveitou-se desse avanço tecnológico e aperfeiçoou o estudo e a solução de problemas físicos. Para tanto, estes são desenvolvidos na forma de modelos e passam por uma série de etapas de simplificação. Assim, os modelos podem ser catalogados em dois grupos de estudos: o modelo experimental ou o modelo matemático (BANKS; TRAN, 2009).

Na classe dos modelos experimentais, a solução geralmente se dá pela representação de um determinado problema (isto é, produção de protótipos), em que os pesquisadores dependem de um planejamento sólido, da análise estatística de dados, da habilidade de trabalho, de testes de hipóteses e da conclusão dos resultados (ANTONY, 2003). Entretanto, dependendo da dificuldade, o modelo experimental demanda um estudo extensivo, além de elevado custo para a sua execução.

Em função do acesso ao computador e com o aumento da complexibilidade dos problemas na área da engenharia, ou seja, sistemas envolvendo uma quantidade enorme de equações, a

solução por modelos matemáticos tornou-se ferramenta dominante na resolução desses tipos de problemas. Nesse contexto, com a busca de resultados mais precisos, os modelos matemáticos passaram a ser solucionados por meio dos métodos numéricos, os quais se tornaram excelente alternativa em razão dos métodos analíticos, em alguns problemas complexos, apresentarem soluções demasiadamente difíceis.

Já há algum tempo, os métodos numéricos têm sido amplamente utilizados como uma ferramenta de trabalho caracterizada por uma forte aplicação de conhecimentos científicos à solução de problemas. Diversos métodos foram desenvolvidos, no entanto, um grande número desses métodos não adquiriu êxito em suas aplicações, isso pelo motivo de não apresentar resultados eficazes em cenários técnicos. Então, dentre os métodos numéricos tradicionais, destacam-se: o Método dos Elementos Finitos (HUGHES, 1987), Método dos Volumes Finitos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007) e o Método de Diferenças Finitas (MITCHELL; GRIFFITHS, 1980) os quais são técnicas numéricas baseadas na discretização de domínio (LEO; ELZEIN, 2001).

Em período mais recente, destacou-se mais um método, denominado como Método dos Elementos de Contorno (MEC), o qual requer apenas a discretização do contorno (KIRKUP, 1998). Desse modo, esse método parte das equações do problema escritas na forma integral e utiliza-se dos teoremas relacionados ao cálculo vetorial para gerar expressões matemáticas que envolvam somente termos integrais de contorno.

A consolidação do MEC como opção viável para solução de alguns problemas de engenharia e ciência aplicada veio por volta da década de setenta. Ele apresenta-se como uma ferramenta numérica muito eficiente, pois permite a solução de problemas físicos utilizando um número reduzido de variáveis nodais (BREBBIA; WALKER, 1980); o que permite uma entrada de dados mais simples, diminui drasticamente a quantidade de dados necessários para a solução computacional e o torna mais fácil de ser usado com os modeladores de sólidos e geradores de malhas existentes. Essas vantagens são particularmente importantes para os projetos de pesquisa, quando o processo, usualmente, envolve uma série de modificações difíceis de serem realizadas, empregando-se o MEF (BREBBIA; DOMÍNGUEZ, 1992).

Diante dos fatores supracitados, vale dizer que o MEC se tornou um procedimento numérico alternativo muito poderoso e tem ótimo desempenho na solução de problemas em áreas

relacionadas à mecânica dos sólidos e a problemas acústicos (BREBBIA e WALKER, 1980; BESKOS e MAIER, 2003; BREBBIA et al., 1984); levando inclusive a resultados melhores que o MEF.

Nesse sentido, embora o MEC seja um procedimento numérico alternativo muito poderoso para resolver as Equações Diferenciais Parciais (EDP) que se resultam da modelagem matemática, existem limitações quanto a sua aplicação. É necessário que os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo sejam dados por operadores autoadjuntos (BREBBIA et al., 1984). Assim, um importante desafio apresentado é o desenvolvimento de ferramentas computacionais para solucionar tal particularidade.

Motivado por essa ideia, aborda-se a técnica – Interpolação Direta Autorregularizada – enquadrada como um dos diversos procedimentos adaptativos no MEC. Ressalta-se que o presente trabalho tem raízes na estrutura da formulação do MEC com Interpolação Direta (MECID). Nesse sentido, utiliza-se de uma função auxiliar para contornar o problema de singularidade; todavia o procedimento matemático permanece o mesmo, isto é, utiliza funções de base radial para aproximar o núcleo dos termos integrais de domínio, contribuindo com a transformação do domínio para o contorno do problema.

Assim, convém destacar que o presente trabalho faz parte da mesma linha de estudos dos pesquisadores Loeffler et al (2020a), intitulado de: “A self-regularized scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions”; e Loeffler et al (2020c), intitulado de: “Solução de problema de autovalor associado à formulação autorregularizada do MEC com interpolação direta”.

## 1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Em função de facilitar a compreensão, devido ao bom desempenho da formulação da Interpolação Direta (MECID) em problemas de grande interesse na engenharia, o estudo tem por finalidade trazer conhecimentos mais significativos e aprimorar o desempenho do Método dos Elementos de Contorno (MEC), testando e comparando duas novas formulações.

Dando prosseguimento ao trabalho de Galimberti (2018), que testou o novo procedimento adaptativo do MEC da Interpolação Direta Autorregularizada (MECID-2) com a técnica

MECID, esta dissertação aborda problemas governados pela Equação de Helmholtz e nesses se procura avaliar e comparar o desempenho numérico da nova formulação com o Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade (MECMR) (NOWAK; BREBBIA, 1989b). São métodos distintos, mas expõem algumas similaridades relevantes como: empregar o conceito de uma solução fundamental e do artifício do tensor de Galerkin.

O estudo é implementado no ambiente do MEC, resolvendo alguns problemas bidimensionais, relacionados à Equação de Helmholtz. Então, para a análise da precisão e de algumas particularidades numéricas de ambas as técnicas, os resultados adquiridos são comparados com as soluções analíticas à disposição na literatura especializada.

Em vista disso, o presente trabalho intenta compreender esse procedimento e agregar ainda mais aos bons resultados já explicitados por meio da formulação autorregularizada (MECID-2), ampliando, assim, a precisão e a capacidade de solução do Método dos Elementos de Contorno na comunidade como um todo.

### 1.3 METODOLOGIA

Por meio de uma abordagem matemática, a partir da Equação de Helmholtz, são manipulados alguns problemas bidimensionais com geometria simplificada. Vale evidenciar que o Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem apresentado resultados com elevada precisão quando aplicado em operadores autoadjuntos (BREBBIA et al., 1984). Todavia, alguns problemas de engenharia são representados por operadores não autoadjuntos, ou com os quais a dedução da solução fundamental associada é muito complicada (LOEFFLER; MANSUR, 2017).

Diante do exposto, os problemas governados pela Equação de Helmholtz são resolvidos numericamente utilizando-se a metodologia da formulação da Interpolação Direta Autorregularizada (MECID-2) e da formulação com Múltipla Reciprocidade (MECMR). Assim sendo, nas simulações dos experimentos, serão apresentados três exemplos envolvendo a Equação de Helmholtz. Para a análise do desempenho de ambas as formulações, adotou-se como parâmetro o tempo computacional e o erro relativo percentual, manuseados em problemas de respostas (isto é, realiza-se uma varredura nas frequências de excitação e, como resultado, são encontrados os potenciais e derivadas dos potenciais) (LOEFFLER et al., 2015a).

A modelagem do procedimento matemático será realizada com elementos lineares e nós duplos nas extremidades (quinas), em que existe dualidade de vetores normais. Para processar esses dados, todo o desenvolvimento foi escrito em Fortran, escolha justificada em função da simplicidade proporcionada por essa linguagem. Ademais, é uma linguagem bem acessível e manuseada no meio científico, em específico, quando aplicada ao Método dos Elementos de Contorno.

Por fim, no estudo da eficácia numérica de ambas as formulações, observou-se a influência do nível de refinamento das malhas de elementos no contorno e, para a MECID-2, também se verificou a influência dos pontos interpolantes no interior do domínio. Dessa forma, para os exemplos simulados, a formulação da MECMR levará mais tempo computacional quanto maior for a quantidade de primitivas. Deve-se observar que “primitivas” significam soluções fundamentais de ordem superior. A precisão vai ser uma função disso também.

É esperado que a nova formulação MECID-2 seja capaz de mostrar resultados numéricos com mais precisão e com custo computacional inferior quando comparado à formulação MECMR.

#### 1.4 RESUMO DOS CAPÍTULOS

Este trabalho está estruturado em sete capítulos, listagem de referências bibliográficas e cinco apêndices, detalhados nos parágrafos seguintes. O primeiro capítulo apresenta uma revisão da literatura para o desenvolvimento da pesquisa aqui discutida, bem como os objetivos e o estudo dos caminhos para realizar os experimentos.

O segundo capítulo apresenta uma pequena revisão bibliográfica com ênfase no fenômeno da propagação de ondas além de demonstrar a relação da equação de Onda Acústica com a Equação de Helmholtz.

No terceiro capítulo, faz-se uma exposição do Método dos Elementos de Contorno. Alguns comentários gerais são apresentados na seção 3.1; e na seção 3.2, realiza-se o desenvolvimento da formulação do MEC aos problemas regidos pela equação de Laplace.

No quarto capítulo, faz-se uma apresentação do procedimento adaptativo da formulação MEC intitulado de Interpolação Direta Autorregularizada (MECID-2) para a solução de problemas

de Helmholtz. Na seção 4.1 é mostrada uma revisão bibliográfica em que temas como: Funções de Base Radial (FBR), Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR) e o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID) são abordados. O tratamento matemático dos termos integrais e a construção matricial para o procedimento adaptativo MECID-2 encontram-se nas seções 4.2, 4.3 e 4.4.

O quinto capítulo também é referente aos problemas regidos pela Equação de Helmholtz, no entanto, abrange os conceitos envolvendo a formulação do MEC, entendendo a aplicação para a Múltipla Reciprocidade (MECMR). O desenvolvimento matemático dos termos integrais e a construção matricial da MECMR fazem parte das seções 5.2 e 5.3, respectivamente.

No sexto capítulo, são apresentados e discutidos os resultados dos experimentos envolvendo a Equação de Helmholtz e, dessa forma, demonstra-se o desempenho das propostas da MECID-2 e da MECMR.

No sétimo capítulo, conclusões são apresentadas avaliando o estudo proposto, seguidas de sugestões para pesquisas futuras.

Na sequência, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas nesse estudo.

O Apêndice A apresenta o desenvolvimento para a função primitiva de interpolação  $\Psi^j$ .

O Apêndice B apresenta processo de desenvolvimento para encontrar a função  $\eta^j$ .

O Apêndice C apresenta as manipulações matemáticas para encontrar as primitivas na formulação do MECMR.

O Apêndice D apresenta o motivo pelo qual a integral de domínio tende para zero na formulação da Múltipla Reciprocidade (MECMR).

Por fim, o Apêndice E, apresenta a dedução da resposta analítica para o terceiro experimento.

## 2 O PROBLEMA GOVERNADO PELA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

### 2.1 INTRODUÇÃO

Há experiências importantes no meio acadêmico demonstrando a aplicação dos problemas governados pela Equação de Helmholtz. Essa equação encontra-se dentro do grupo das equações de Campo Escalar (isto é, problemas físicos), relacionado à Teoria de Campo ou Potencial (LOEFFLER, 1988).

Alguns problemas típicos de mecânica dos sólidos, de representação mais simples, podem ser inseridos nessa categoria, como: torção de barras prismáticas, escoamento de lubrificantes em mancais de deslizamento, deflexão de membranas e propagação de ondas planas e cisalhantes (LOEFFLER, 1988). No que se refere ao fenômeno da propagação de ondas, segundo Butkov (1988), trata-se de um fenômeno que é matematicamente descrito por um certo tipo de Equação Diferencial Parcial (EPD) e, representa as vibrações livres de um meio no qual há propagação de energia mecânica.

No entanto, em alguns casos, o estudo da resolução dessas equações diferenciais parciais apresenta obstáculos para serem resolvidos. Diante do exposto, esses casos têm sido resolvidos preferencialmente por meio de técnicas numéricas discretas de domínio. Apesar disso, para um número gradativo de problemas, percebeu-se que a solução das EDP pode ser obtida apenas pela discretização do contorno, isso porque a grande vantagem do Método dos Elementos de Contorno sobre os métodos que se baseiam na discretização do domínio é a redução do número de dimensões espaciais e do esforço de modelagem (BREBBIA, 1983).

O objetivo agora é demonstrar a relação da equação de Onda Acústica com a Equação de Helmholtz.

### 2.2 OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ A PARTIR DA EQUAÇÃO DE ONDA ACÚSTICA

Inicialmente, é interessante deduzir a Equação de Helmholtz como um caso particular da equação diferencial de onda acústica (GAUK et al., 2003). Em sequência, assumindo que uma

função dependente do espaço e do tempo,  $u(X, t)$ , obedece à equação de onda linear em um determinado domínio (BREBBIA, 1983), têm-se:

$$U_{,ii}(X, t) = \frac{1}{k^2} \ddot{U}(X, t) \quad (2.1)$$

Em que o fator constante  $k$  é a velocidade de propagação da onda acústica, fornecida pela equação (2.2):

$$k^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.2)$$

Na equação (2.2),  $E$  representa o módulo de elasticidade e  $\rho$  é a densidade em  $(X, t)$ . Na análise de vibrações, procuram-se as configurações de equilíbrio relacionadas às frequências naturais. De acordo com Long (2006), admitindo-se o movimento como a soma de harmônicos, a equação geral para o potencial  $U(X, t)$  é dada por:

$$U(X, t) = u(X)e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

Realizando-se a manipulação matemática na equação (2.3), isto é, derivando duas vezes, em relação ao tempo. Encontra-se a diferencial parcial e temporal de segunda ordem, conforme se segue:

$$\ddot{U}(X, t) = -\omega^2 u(X)e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

Utilizando a mesma metodologia aplicada na equação (2.4), porém em relação a sua localização espacial  $X$ , novamente, encontra-se uma diferencial de segunda ordem. O resultado é apresentado na equação (2.5):

$$U_{,ii}(X, t) = u_{,ii} e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

Logo, aplicando a equação (2.4) e (2.5) na equação (2.1), chega-se à expressão (2.6).

$$u_{,ii}(X)e^{i\omega t} = -\frac{\omega^2}{k^2}u(X)e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

Na equação (2.6),  $\omega$  representa a frequência natural. Para melhor visualização, ao decorrer desta dissertação, usa-se então para o lado direito a definição da equação (2.7).

$$\lambda = \frac{\omega^2}{k^2} \quad (2.7)$$

Assim, a utilização do conceito da equação (2.7) resulta em:

$$u_{,ii}(X)e^{i\omega t} = -\lambda u(X)e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

Por fim, têm-se a Equação de Helmholtz, que é considerada uma equação diferencial parcial que não tem dependência com relação à variável tempo.

$$u_{,ii}(X) + \lambda u(X) = 0 \quad \lambda = \frac{\omega^2}{k^2} \quad (2.9)$$

Vale enfatizar que nos problemas que apresentem um domínio com solução harmônica, a equação de onda acústica é convenientemente substituída pela Equação de Helmholtz (BREBBIA, 1983).

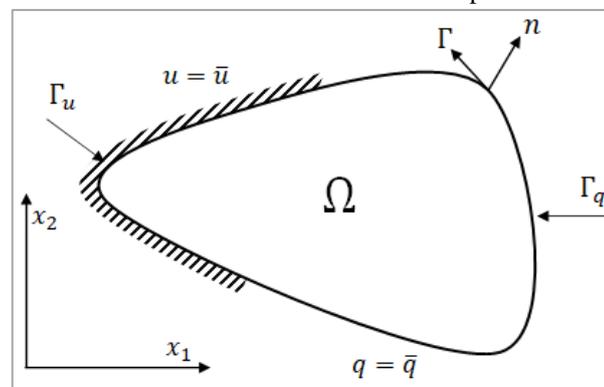
### 3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Comparado com os mais populares métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método de Diferenças Finitas (MDF), os quais são classificados como técnicas de domínio. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) se tornou uma ferramenta de simulação numérica muito poderosa que se distingue por ser um método aplicado ao contorno do domínio. Sua discretização numérica advém de um ambiente de dimensões geométricas reduzidas. Por exemplo, um problema bidimensional e tridimensional pode ser representado por curvas e por superfícies, respectivamente.

Para qualquer problema governado por equação diferencial ser passível de resolução, ele deve ser matematicamente bem caracterizado, isto é, necessita-se do conhecimento de pelo menos uma das condições de contorno estabelecidas para o problema. Essas condições de contorno podem se apresentar basicamente de três formas: as condições de Dirichlet ou essenciais (que se referem à variável básica do problema ou potencial); condições de Neumann ou naturais (que se referem à derivada normal da variável básica); e condições de Robin ou mistas (que se referem a uma combinação linear de ambas) (CHAI et al., 2021), entretanto, essa última condição não será abordada no escopo desse trabalho. A simbologia adotada para apontar as condições de contorno essenciais e naturais é explicitada na Figura 1, para um domínio bidimensional genérico  $\Omega$ .

Figura 1 – Domínio de duas dimensões  $\Omega$  delimitado por um contorno  $\Gamma_u + \Gamma_q$



Fonte: Adaptado de Cruz (2012).

Na Figura 1, as condições de contorno elementares são compostas por duas partes conhecidas. No contorno  $\Gamma_u$ , a simbologia representa as condições de Dirichlet, enquanto no contorno  $\Gamma_q$  a

simbologia representa as condições de Neumann. Vale ressaltar que o domínio  $\Omega$  abordado pode representar um sistema, um corpo ou um volume de controle de um dado problema físico.

De um modo geral, a maioria dos problemas físicos decai em equações diferenciais de segunda ordem, em que o MEC implica transformar a formulação diferencial em integrais de forma inversa utilizando artifícios matemáticos, tais como aplicar o Teorema da Divergência (STEWART, 2009), de forma a possibilitar levar as integrais ao contorno do domínio, além de admitir uma função de ponderação com propriedades específicas. Um exemplo disso seriam os problemas governados pela Equação de Laplace, para o caso de potencial escalar.

### 3.2 TRATAMENTO DO TERMO ASSOCIADO AO LAPLACIANO

Para compreender o equacionamento da formulação do MEC, será abordado um problema governado pela equação de Laplace, que representa os problemas físicos estacionários e simples, encontrados no grupo de Equação de Campo Escalar (AKIN, 2005). Por simplicidade, na equação (3.1) utiliza-se notação indicial.

$$u_{,ii}(X) = 0 \quad (3.1)$$

Por conveniência, o início do desenvolvimento matemático padrão do MEC se dá a partir da formulação diferencial, integrando-a sobre todo o domínio  $\Omega$  definido, como demonstrado na equação (3.2), transcrita abaixo:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

O conceito das funções de ponderação  $u^*(\xi; X)$  correspondem à solução de um problema de campo escalar estacionário, governado pela equação de Poisson. Assim,  $u^*(\xi; X)$ , denominado de solução fundamental, é a solução de um domínio infinito da equação (3.3), no qual uma fonte concentrada atua no ponto fonte  $\xi$  (BREBBIA; DOMÍNGUEZ, 1992). Assim sendo, têm-se:

$$u_{,ii}^*(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (3.3)$$

O termo  $\Delta(\xi; X)$  é denominado como delta de Dirac e é uma função generalizada que representa uma fonte pontual existente em  $X = \xi$  (BREBBIA et al., 1984). De acordo com Brebbia e Walker (1980), para problemas bidimensionais, a solução fundamental  $u^*(\xi; X)$  correlata ao problema, bem como sua derivada normal  $q^*(\xi; X)$ , são apresentadas a seguir:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln[r(\xi; X)]}{2\pi} \quad (3.4)$$

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} r_i(\xi; X) \eta_i(X) \quad (3.5)$$

Nas equações (3.4) e (3.5),  $r(\xi; X)$  é a distância Euclidiana entre o ponto fonte  $\xi$  e um ponto campo qualquer do domínio  $X$ , em que a ação do ponto fonte  $\xi$  gera um efeito. Retornando na equação (3.2), que se encontra em sua forma integral forte, aplica-se a integração por partes e, conseqüentemente, encontra-se a forma integral fraca, conforme se segue:

$$\int_{\Omega} [u_{,i}(X)u^*(\xi; X)]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i}(X)u_{,i}^*(\xi; X) d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Integrando novamente por partes a integral de domínio que se encontra no segundo termo da equação (3.6), obtém-se a equação (3.7):

$$\int_{\Omega} [u_{,i}(X)u^*(\xi; X)]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} [u(X)u_{,i}^*(\xi; X)]_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u(X)u_{,ii}^*(\xi; X) d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

A obtenção do modelo inverso é de grande importância para o MEC. Assim sendo, aplica-se o teorema da divergência no primeiro e segundo termo integral de domínio da equação (3.7) para levá-la ao contorno  $\Gamma$ . O resultado é apresentado na equação (3.8):

$$\int_{\Gamma} u_{,i}(X)\eta_i(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X)u_{,i}^*(\xi; X)\eta_i(X)d\Gamma + \int_{\Omega} u(X)u_{,ii}^*(\xi; X)d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

Então, assumindo que:

$$u_{,i}(X)\eta_i(X) = q(X) \quad (3.9)$$

$$u_{,i}^*(\xi; X)\eta_i(X) = q^*(\xi; X) \quad (3.10)$$

Portanto, a equação (3.8) pode ser reescrita como na equação (3.11):

$$\int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma + \int_{\Omega} u(X)u_{,ii}^*(\xi; X)d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

Note, na equação (3.11), a permanência de um termo integral de domínio. Então, para tratar o termo, é necessário relacionar a solução fundamenta com a função do Delta de Dirac (ver equação (3.12)). Assim sendo, desde que  $X$  pertença  $\Omega$ , a propriedade da função delta de Dirac pode ser utilizada (BREBBIA et al., 1984). Dessa forma, tem-se a equação (3.13):

$$\int_{\Omega} u(X)u_{,ii}^*(\xi; X) d\Omega = - \int_{\Omega} u(X)\Delta(\xi; X) d\Omega \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} u(X)u_{,ii}^*(\xi; X) d\Omega = -c(\xi)u(\xi) \quad (3.13)$$

Segundo Brebbia e Walker (1980), o termo  $c(\xi)$  é uma constante que se submete da localização do ponto fonte  $\xi$  ao domínio  $\Omega$  e, considerando que aquele não necessariamente deve estar no domínio, como também pode estar presente tanto no contorno quanto fora dele. As seguintes condições são válidas para problemas que o valor de  $c(\xi)$  envolvam contorno suave:

$$c(\xi) = 1 \quad \text{se} \quad \xi \in \Omega(X) \quad (3.14)$$

$$c(\xi) = \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad \xi \in \Gamma(X) \quad (3.15)$$

$$c(\xi) = 0 \quad \text{se} \quad \xi \notin \Omega(X) \quad (3.16)$$

Já os problemas que envolvam curvas não suaves (cantos), ou seja, possuem ângulos acentuados. Segundo Brebbia e Domínguez (1992), o valor de  $c(\xi)$  poderá ser calculado de acordo com a equação (3.17)

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (3.17)$$

Na equação (3.17),  $\alpha$  é dado em radianos. Em sequência, aplicando-se a propriedade descrita na equação (3.13) no termo integral de domínio da equação (3.11) chega-se à equação (3.18):

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma = \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma \quad (3.18)$$

Finalmente, o sistema linear, gerado por meio da discretização do contorno, pode ser representado matricialmente para o termo Laplaciano de acordo com a equação (3.19):

$$[H]\{u\} = [G]\{q\} \quad (3.19)$$

As matrizes  $[H]$  e  $[G]$  são matrizes  $n \times n$ , isto é, matrizes oriundas das integrais da solução fundamental para derivada normal e potencial, respectivamente; e  $\{u\}$  e  $\{q\}$  são os vetores de tamanho  $n$  para o potencial e sua derivada (BREBBIA et al., 1984). Sabendo-se que  $n$  representa o número de pontos nodais presentes no contorno do problema.

## 4 A FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA PARA PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

### 4.1 INTRODUÇÃO

Conforme apresentado ao longo da dissertação, a utilização de métodos numéricos, nos dias de hoje, está cada vez mais comum na prática da engenharia, devido à eficiência na resolução de problemas corriqueiros. Diante do exposto, de acordo com Brebbia et al (1984), diversos projetos de pesquisa apontaram um bom desempenho do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em aplicações nas quais os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo são autoadjuntos. Todavia, alguns problemas não se expressam por operadores diferenciais que dispõem tal propriedade específica ou, então, apresentam forma de integral inversa associada complexa (LOEFFLER; MANSUR, 2017).

Neste cenário, o uso de Funções de Base Radial (FBR) (BUHMANN, 2003) como ferramenta auxiliar nas técnicas numéricas, tem se mostrado recurso muito eficiente, não apenas com MEC, mas com outros métodos numéricos, em particular o Método dos Elementos Finitos (MEF), nas suas formulações sem malha (meshless) (BELYTSCHKO et al., 1996). No que se refere à classe de problemas modelados com o MEC, Nardini e Brebbia (1983) aplicaram tais funções com sucesso em integrais de domínio com o advento da formulação nomeada por eles de “Dupla Reciprocidade” (MECDR). Posteriormente, com o estudo dos pesquisadores Partridge et al (1992) a formulação MECDR demonstrou superar as dificuldades matemáticas que se impõem para solucionar expressões integrais envolvendo tais particularidades.

A formulação da MECDR não é uma técnica de simples interpolação; ela apresenta alguns procedimentos interessantes, tais como: usar “[...] uma sequência de funções de base radial para aproximar parte do núcleo das integrais de domínio e também empregar estrategicamente uma função primitiva expressa em termos de um Laplaciano ou um operador diferencial [...]” (LOEFFLER et al., 2020b). Com consequência, permite a aplicação dos recursos da integração por partes e Teorema da Divergência. Entretanto, a formulação da Dupla Reciprocidade apresenta alguns problemas sérios, como imprecisões numéricas nos casos em que muitos polos internos são necessários para representar propriedades de domínio, por exemplo, a inércia. Esse grande número de polos, resulta em problemas de mau condicionamento matricial e imprecisões numéricas (LOEFFLER et al., 2015a).

Diante dos problemas supracitados, outra particularidade da MECDR é o fato de exigir a construção de duas matrizes auxiliares multiplicando as matrizes  $H$  e  $G$  do MEC (LOEFFLER et al., 2017). Nesse contexto, a técnica da Interpolação Direta foi proposta com o intuito de oferecer uma alternativa ao uso da Dupla Reciprocidade na solução dessas integrais de domínio, que normalmente envolvem problemas difusivo-advectivo, fonte, inércia, dentre outras ações de campo (LOEFFLER; MANSUR, 2017).

A formulação do MEC e a sua relação com a recente técnica da Interpolação Direta (MECID) foi proposta por Loeffler (2015a) e vem sendo explorada ao longo de vários projetos de pesquisa. Basicamente a MECID aplica um procedimento de aproximação com funções de base radial para resolver o termo de inércia da integral de domínio (isto é, na Equação de Helmholtz), a fim de transformar em uma integral de contorno; esta técnica tem uma abordagem conceitualmente semelhante à técnica MECDR, no entanto, é mais simples, geral e robusta (LOEFFLER et al., 2015a).

Diante do que foi apresentado, a MECID demonstrou bons resultados em problemas de Poisson (LOEFFLER et al., 2015b) e em problemas de Helmholtz (LOEFFLER et al., 2015a). Uma iniciativa derivada dessa técnica busca ampliar o estudo com a formulação autorregularizada, aqui denominada de MECID-2, esta aborda o mesmo conceito da MECID; todavia, nas manipulações matemáticas, pode-se utilizar de uma solução auxiliar para evitar o problema de singularidade (LOEFFLER et al., 2020a). Na formulação MECID esse mesmo problema, atualmente, pode ser solucionado por uma regularização similar ao proposto por Hadamard (LOEFFLER; MANSUR, 2017).

#### 4.2 TRATAMENTO DA INTEGRAL DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Por conveniência, como abordado no capítulo dois, tem-se a equação de Hemholtz considerada uma EDP que não tem dependência com relação ao tempo:

$$\nabla^2 u(X) + \lambda u(X) = 0 \quad \lambda = \frac{\omega^2}{k^2} \quad (4.1)$$

Inicialmente, propõe-se uma nova função auxiliar  $b^*(\xi; X)$  para que se possa integrar a equação (4.1) e realizar as devidas manipulações matemáticas (BALISTA et al., 2021). Como resultado,

obtêm-se os termos integral de contorno na forma inversa de acordo com o mecanismo típico do MEC. Essa função é apresentada na equação (4.2):

$$b^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X) \quad (4.2)$$

A função auxiliar  $b^*(\xi; X)$  proposta na equação (4.2), consiste na função de ponderação  $u^*(\xi; X)$ , que corresponde à solução fundamental do problema governado pela equação de Laplace subtraída de uma função  $G^*(\xi; X)$ , que representa o Tensor de Galerkin. O que se propõe, portanto, é a aplicação da equação (4.2) na equação (4.1), assim:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)[u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X)]d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} u(X)[u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X)]d\Omega \quad (4.3)$$

O ponto de partida é o mesmo, seguindo a teoria clássica do MEC. Toma-se a forma integral forte para, posteriormente, encontrar-se a forma inversa da integral. Conforme Partridge et al (1992), para problemas bidimensionais, a equação que define a função  $u^*(\xi; X)$  bem como o Tensor de Galerkin  $G^*(\xi; X)$ , é representada nas equações (4.4) e (4.5), respectivamente:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln[r(\xi; X)]}{2\pi} \quad (4.4)$$

$$G^*(\xi; X) = \frac{r^2(\xi; X)}{8\pi} [1 - \ln r(\xi; X)] \quad (4.5)$$

Prosseguindo, expandindo a equação (4.3), tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi; X)d\Omega - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X)G^*(\xi; X)d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega + \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega \quad (4.6)$$

Na MECID-2, a abordagem do primeiro termo integral de domínio do lado esquerdo da equação (4.6) é análoga ao que se faz usualmente com o operador Laplaciano (ver equação (3.18)). Considerando o uso dessa alegação, encontra-se a equação (4.7):

$$-c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma + \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X)G^*(\xi; X)d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega + \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega \quad (4.7)$$

Note na equação (4.7) a permanência de um termo integral de domínio do lado esquerdo. Assim sendo, aplica-se a técnica da integração por partes duas vezes, sequencialmente, via Teorema da Divergência é plausível transpor os termos integrais de domínio para o contorno. Reorganizando os termos desenvolvidos nessa equação e, por conveniência, invertendo o sinal, eles podem ser reescritos como na equação (4.8):

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma} u_{,i}(X)\eta_i(X)G^*(\xi; X)d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} u(X)G^*_{,i}(\xi; X)\eta_i(X)d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} u(X)G^*_{,ii}(\xi; X)d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega \quad (4.8)$$

Na equação (4.8), observa-se que por meio das manipulações matemáticas, foram introduzidas duas novas funções. Onde  $q^*(\xi; X)$  é a derivada normal, assim como no capítulo três; reciprocamente,  $S^*(\xi; X)$  é a derivada direcional do tensor de Galerkin (LOEFFLER et al., 2020a) conforme se segue:

$$q^*(\xi; X) = u_{,i}^*(\xi; X)\eta_i(X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)}r_i(\xi; X)\eta_i(X) \quad (4.9)$$

$$S^*(\xi; X) = G^*_{,i}(\xi; X)\eta_i(X) = \left[ \frac{0,5 - \ln[r(\xi; X)]}{4\pi} \right] r_i(\xi; X)\eta_i(X) \quad (4.10)$$

Ainda na equação (4.8), pode-se observar que um dos termos do lado esquerdo da igualdade apresenta a derivada segunda do tensor de Galerkin  $G^*_{,ii}(\xi; X)$ . Então, de acordo com os pesquisadores Brebbia e Domínguez (1992) esse termo pode ser manipulado utilizando o conceito do Tensor de Galerkin, dado por:

$$G^*_{,ii}(\xi; X) = u^*(\xi; X) \quad (4.11)$$

Utilizando-se do argumento da equação (4.11) e substituindo-o no termo da equação (4.8), encontra-se a equação (4.12):

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma + \\ & \lambda \int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X)d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X)d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega = \quad (4.12) \\ & \lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega \end{aligned}$$

Nesse ponto do desenvolvimento, observa-se na equação (4.12) que o termo integral de domínio no lado esquerdo é análogo ao primeiro termo do lado direito, sendo assim, os dois se anulam. Considerando o uso desse argumento, segue na equação (4.13) a formulação completa:

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma + \\ & \lambda \int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X)d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X)d\Gamma = -\lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega \quad (4.13) \end{aligned}$$

Finalmente, de acordo com a equação (4.13), nota-se que todos os termos do lado esquerdo se encontram no contorno do problema e, conseqüentemente, estão de acordo com a teoria clássica do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Em contrapartida, o termo integral do lado direito ainda está no domínio. Dedicar-se a seguir uma seção específica ao tratamento desse termo integral de domínio

#### 4.3 TRATAMENTO DO TERMO EXCEDENTE DE DOMÍNIO

A ideia básica da Interpolação Direta (MECID) é interpolar todo núcleo do termo integral de domínio, incluindo a solução fundamental. Subseqüente ao tratamento matemático realizado na seção 4.2, o último termo que demanda tratamento algébrico é um termo integral de domínio inserido na formulação devido à aplicação da função auxiliar  $b^*(\xi; X)$ . Para melhor compreensão do desenvolvimento matemático, este é escrito de forma isolada na equação (4.14):

$$TDID = -\lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega \quad (4.14)$$

Embora esta dissertação apresente um esquema autorregularizado, o qual originou-se da técnica MECID, o procedimento matemático permanece o mesmo, em que todo o núcleo desse termo TDID é aproximado. Assim sendo, substitui-se o núcleo do termo integral de domínio por uma combinação linear de funções arbitrárias ponderadas por um coeficiente  $\xi \alpha^j$ . Tal artifício pode ser observado na equação (4.15):

$$\text{TDID} = -\lambda^2 \int_{\Omega} u(X) G^*(\xi; X) d\Omega = -\lambda^2 \int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(X^j; X) d\Omega \quad (4.15)$$

Na equação (4.15), o  $F^j(X^j; X)$  simboliza um conjunto de funções de interpolação radiais e o  $\xi \alpha^j$  é um coeficiente que corresponde à função de interpolação, que depende do ponto fonte  $\xi$  e dos pontos arbitrários  $X^j$ . Convém destacar, para cada ponto fonte  $\xi$ , a interpolação é realizada por meio de uma varredura de todos os pontos de base arbitrários  $X^j$  em relação com os pontos de domínio  $X$  (isto é, pontos de interpolação), ponderados pelos coeficientes  $\xi \alpha^j$  (LOEFFLER et al., 2017). Prosseguindo, diante de uma variedade de FBR na literatura, foi escolhida para esse trabalho a função radial de placa fina (ver equação (4.16)), a qual os pesquisadores Barcelos (2014) e Pereira (2016) utilizaram em outros estudos e apresentaram bons resultados.

$$F^j(X^j; X) = r^2(X^j; X) \ln r(X^j; X) \quad (4.16)$$

Então, como as funções de interpolação utilizadas  $F^j(X^j; X)$  pertencem à classe das funções de base radiais, seu argumento é composto pela distância Euclidiana  $r(X^j; X)$  entre os pontos de base arbitrários  $X^j$  e os pontos de interpolação  $X$  (LOEFFLER et al., 2015b). Em termos operacionais, geralmente é interessante a escolha de pontos de base arbitrários  $X^j$  em coincidência com número de pontos nodais no contorno. Assim sendo, observa-se essa função na equação (4.17):

$$r(X^j; X^e) = \sqrt{(x_1^j - x_1^e)^2 + (x_2^j - x_2^e)^2} \quad (4.17)$$

Retornando à equação (4.15), o termo integral de domínio é transformado numa integral de contorno elegendo uma função primitiva de interpolação da função  $F^j(X^j; X)$ , aqui denominada de  $\Psi^j(X^j; X)$  (APÊNDICE A). Essa proposta é semelhante à que ocorre na formulação da Dupla Reciprocidade (NARDINI; BREBBIA, 1983). Dando continuidade, os conceitos de primitiva, integração por partes e Teorema da Divergência serão utilizados. Como resultado, é plausível transpor o termo integral de domínio para o contorno. A equação (4.18) apresenta de forma sucinta esse procedimento.

$$\begin{aligned}
TDID &= \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega \\
&= \lambda^2 \xi \alpha^j \int_{\Omega} F^j(X^j; X)d\Omega \\
&= \lambda^2 \xi \alpha^j \int_{\Omega} \Psi_{,ii}^j(X^j; X)d\Omega = \lambda^2 \xi \alpha^j \int_{\Omega} (\Psi_{,i}^j)_{,i}(X^j; X)d\Omega \\
&= \lambda^2 \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \Psi_{,i}^j(X^j; X)\eta_i(X)d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.18}$$

A transformação do termo integral de domínio para o contorno exposta na equação (4.18) foi testada e deu resultados bastante satisfatórios em aplicações preliminares (LOEFFLER et al., 2020a). Ainda nessa equação, pode-se considerar o argumento da equação (4.19):

$$TDID = \lambda^2 \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \Psi_{,i}^j(X^j; X)\eta_i(X)d\Gamma = \lambda^2 \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X)d\Gamma \tag{4.19}$$

Na equação (4.19),  $\eta_i(X)$  representa o vetor normal na região do contorno, e o processo de desenvolvimento para encontrar função  $\eta^j(X^j; X)$  pode ser visualizado no APÊNDICE B. Por fim, reescrevendo a equação (4.3), com as manipulações matemáticas usadas nas equações (4.13) e (4.19), obtém-se a equação (4.20), representando a forma integral inversa empregando a formulação da Interpolação Direta Autorregularizada (MECID-2) para o problema regido pela Equação de Helmholtz.

$$\begin{aligned}
&c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma + \\
&\lambda \int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X)d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X)d\Gamma = -\lambda^2 \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X)d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.20}$$

#### 4.4 PROCEDIMENTO OPERACIONAL E CONSTRUÇÃO MATRICIAL

Uma vez executado o procedimento de discretização empregando a formulação Interpolação Direta Autorregularizada (MECID-2) para o problema de Helmholtz, pode-se escrever o tratamento matricial, considerando os procedimentos típicos do MEC. Assim sendo, ignora-se provisoriamente o termo integral de contorno do lado direito da equação (4.20) e, com isso, tem-se a equação (4.21):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} W_{11} & \dots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \dots & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} + \\ & \lambda \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = -\lambda^2 \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{Bmatrix} = -\lambda^2 \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Na equação (4.21), convém destacar que o vetor  $N_j$  resulta da função radial auxiliar  $\eta^j(X^j; X)$  ao decorrer de todo o contorno. Prosseguindo, ainda nessa equação, para a formação de uma matriz na qual o potencial  $u(X)$  apareça explicitamente no lado direito, faz-se como na equação (4.22):

$$A_\xi = -\lambda^2 [N_1 \quad \dots \quad N_m] \begin{bmatrix} \xi \alpha_1 \\ \vdots \\ \xi \alpha_m \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Para tanto, o vetor  $A_\xi$  é calculado usando o argumento apresentado na equação (4.15). Por conveniência, repete-se o mesmo:

$$u(X)G^*(\xi; X) = \xi \alpha^j F^j(X^j; X) \quad (4.23)$$

Assim, isolando o coeficiente  $\xi \alpha^j$ , pode-se escrever a equação (4.23) em forma matricial. Considerando esse argumento, encontra-se a equação (4.24):

$$\begin{bmatrix} \xi \alpha^j \end{bmatrix} = [F^j]^{-1} \begin{bmatrix} \xi \Lambda^X \end{bmatrix} (u) \quad (4.24)$$

Por inspeção, o coeficiente  $\xi \alpha^j$  é constituído por uma matriz inversa da função de base radial  $F^j(X^j; X)$  multiplicado pelo produto da matriz diagonal  $\xi \Lambda^X$  do Tensor de Galerkin com o vetor potencial  $u(X)$ . Então, substituindo a equação (4.24), na equação (4.22), chega-se à equação (4.25):

$$A_\xi = -\lambda^2 [N_1 \quad \dots \quad N_n] \left\{ \begin{array}{l} [F^{11} \quad \dots \quad F^{1n}]^{-1} \begin{bmatrix} \xi \Lambda^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi \Lambda^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ -\lambda^2 [M]\{u\} \end{array} \right\} = \quad (4.25)$$

Finalmente, usando alguns algebrismos, o sistema matricial completo pode ser escrito como na equação (4.26), em que uma matriz de inércia aparece de forma explícita  $[M]$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} W_{11} & \dots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \dots & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ + \lambda \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = -\lambda^2 \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Assim sendo, por simplicidade, tem-se:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} - \lambda[W]\{u\} + \lambda[S]\{q\} = -\lambda^2[M]\{u\} \quad (4.27)$$

As matrizes  $[W]$  e  $[S]$ , presentes na equação (4.27), são matrizes oriundas à integração da derivada direcional de Galerkin e do Tensor de Galerkin

## 5 A FORMULAÇÃO DA MÚLTIPLA RECIPROCIDADE PARA PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

### 5.1 INTRODUÇÃO

A aplicação direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para solucionar problemas de valor no contorno com efeitos dependentes do tempo ou certos tipos de não linearidade, geralmente, resulta em uma equação integral que contém integrais de domínio (BREBBIA et al., 1984). Embora essas integrais não introduzam novas incógnitas, elas diminuem a elegância da formulação e afetam a eficiência do método (NOWAK; BREBBIA, 1992).

O desenvolvimento dessas formulações em problemas que afetam a eficiência do MEC requer tratamento especial durante a sua aplicação. Dentro desse discurso, em um esforço para evitar esse termo integral de domínio, grande quantidade de projetos de pesquisa foi conduzida para estudar maneiras eficientes de transformar integrais de domínio para integrais de contorno. Assim sendo, no passado, alguns procedimentos adaptativos do MEC foram desenvolvidos, tais como: a técnica da Dupla Reciprocidade, técnica de Expansão de Fourier, técnica do Tensor de Galerkin e a técnica Múltipla Reciprocidade (NEVES; BREBBIA, 1991).

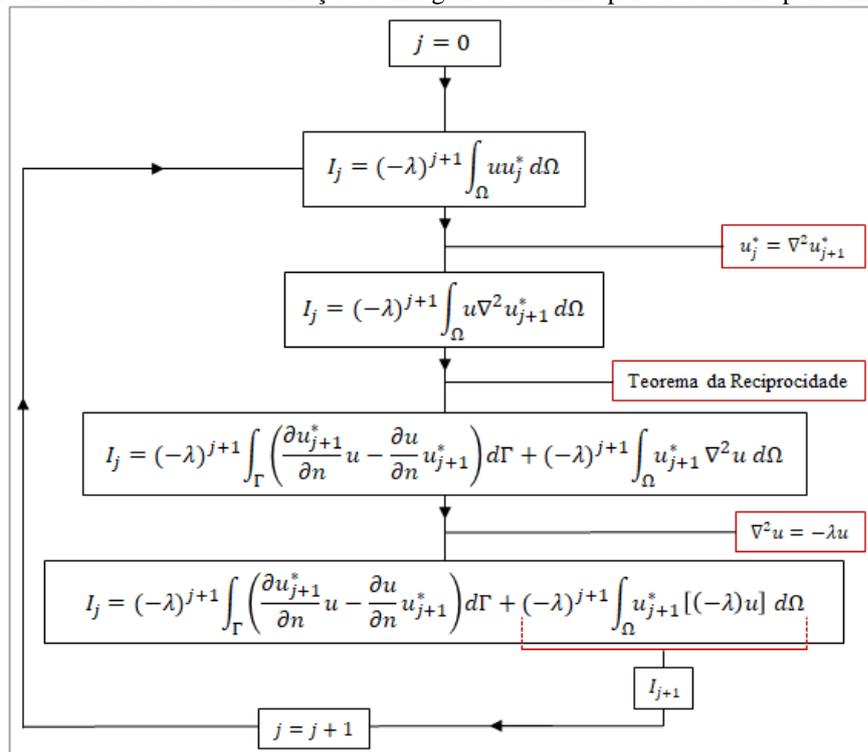
A primeira abordagem, como já mencionado no escopo dessa pesquisa, iniciou-se na década de 80 com a técnica da Dupla Reciprocidade (MECDR) apresentada pelos pesquisadores Nardini e Brebbia (1983). A segunda abordagem, conforme Nowak e Brebbia (1989b) é fundamentada na expansão do termo fonte em uma série de Fourier. O estudo do método foi proposto pelo pesquisador Tang (1988) sendo utilizado para resolver problemas de potencial e elasticidade. No entanto, quando se trata de certos tipos de não linearidade, o método não é simples de se aplicar, pois o cálculo dos coeficientes pode ser computacionalmente difícil (NOWAK; BREBBIA, 1992). Prosseguindo, a terceira classe de abordagem está relacionada à técnica do Tensor de Galerkin em que, de acordo com Partridge et al (1992), utilizando uma solução fundamental de ordem superior em termos de uma primitiva e da identidade de Green é possível transformar certos tipos de integrais de domínio para o contorno.

Nesse contexto, a formulação da Múltipla Reciprocidade (MECMR) foi desenvolvida originalmente por Nowak (1989) no CMI (*Computational Mechanics Insitute*) como uma ferramenta mais geral para a solução de ampla gama de problemas parabólicos e hiperbólicos

(BREBBIA, 1991). Adiante, os pesquisadores Nowak e Brebbia (1989a; 1989b) também estenderam o estudo a uma série de aplicações, incluindo os problemas regidos pela equação de Helmholtz. Conceitualmente, a MECMR pode ser considerada uma extensão da técnica da MECDR, todavia a ideia por trás de cada uma é essencialmente diferente (NOWAK; PARTRIDGE, 1992). Isso porque ao invés de aproximar o termo fonte, a técnica MECMR introduz uma sequência de soluções fundamentais de ordem superior (BREBBIA, 1991).

Com base no capítulo dois dessa dissertação, em específico na equação (2.9), percebe-se que a Equação de Helmholtz é composta por dois termos com significados físicos distintos: um termo de caráter difusivo e o outro denominado de reativo. Assim sendo, o termo difusivo, isoladamente, corresponde aos problemas de Laplace, cujo desenvolvimento pelo MEC é bastante conhecido. O termo reativo não possui um operador diferencial nele aplicado e seu tratamento pelo MEC pode ser feito por meio de diversas estratégias. Neste texto, por simplicidade, desenvolve-se a forma integral típica do MEC para os termos difusivo e reativo separadamente. Primeiro deduz-se a equação integral para o termo difusivo e, posteriormente, aborda-se o termo reativo que é resolvido diferentemente pela MECID regularizada e pela MECMR. Nesse contexto, as manipulações matemáticas da MECMR, são mostradas de maneira sucinta para a Equação de Helmholtz conforme o fluxograma na Figura 2.

Figura 2 – Processo de transformação da integral de domínio para o contorno pela MECMR.



Fonte: Adaptado de Nowak e Partridge (1992).

De modo geral, a MECMR generaliza o conceito do tensor de Galerkin (ver Figura 2) a qual adota estrategicamente uma sequência de soluções fundamentais de ordem superior em termos de uma primitiva relacionada ao Laplaciano, ou um operador diferencial ao invés do operador de Helmholtz, assim aplica a identidade de Green de maneira recorrente (KAMIYA; ANDOH, 1993). Como resultado, a técnica transforma as integrais de domínio em um contorno exato apenas utilizando a formulação proposta.

Nesse capítulo, apresenta-se o desenvolvimento da formulação da Múltipla Reciprocidade em um problema governado pela Equação de Helmholtz.

## 5.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL

Considerando novamente a Equação de Helmholtz, para simplificar os termos aqui subscritos, denominados como  $u_0^*(\xi; X)$ , são conhecidos como solução fundamental. Eles foram usados para distinguiem-se de outras soluções semelhantes as quais serão geradas durante a manipulação matemática.

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(X) u_0^*(\xi; X) d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} u(X) u_0^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.1)$$

Na equação (5.1), o termo subscrito como  $u_0^*(\xi; X)$  corresponde à solução fundamental dos problemas regidos pela Equação de Laplace (KAMIYA; ANDOH, 1993). Assim sendo, o termo integral de domínio do lado esquerdo (isto é, o termo difusivo) pode ser manipulado de acordo com o padrão do MEC e, desse modo ser transformado numa integral de contorno, conforme se segue:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q_0^*(\xi; X) - q(X)u_0^*(\xi; X)]d\Gamma = \lambda \int_{\Omega} u(X) u_0^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.2)$$

Recordando, nesse trabalho  $u(X)$  representa o potencial escalar e  $q(X)$  sua derivada normal; reciprocamente  $u_0^*(\xi; X)$  simboliza a solução fundamental, e  $q_0^*(\xi; X)$  é a sua derivada normal, ambas dependem da distância Euclidiana  $r(\xi; X)$ . Continuando, conforme Kamiya e Andoh (1992), a aplicação da Múltipla Reciprocidade (MECMR) se faz exatamente no termo integral

de domínio que persiste no lado direito da equação (5.2). Então, para melhor compreensão do desenvolvimento matemático, esse é escrito de forma isolada na equação (5.3):

$$TDMR = \lambda \int_{\Omega} u(X) u_0^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.3)$$

Para haver sucesso, a primeira etapa de abordagem do termo reativo, aqui denominado de TDMR, consiste em adotar as soluções fundamentais de ordem superior (KAMIYA; ANDOH, 1993). Dessa forma, a equação (5.4) apresenta este processo:

$$\nabla^2 u_{j+1}^* = u_j^*, \quad q_j^* = \left( \frac{\partial u_j^*}{\partial n} \right), \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.4)$$

O desenvolvimento com mais detalhes do termo integral de domínio que persiste na equação (5.3) é apresentado no APÊNDICE C, em que pode ser manipulado com o uso da identidade de Green (KREYSZIG, 2006) ou, analogamente, utilizando-se da técnica da integração por partes duas vezes, sequencialmente, via Teorema da Divergência em que é possível transpor as integrais de domínio para o contorno exato apenas com a formulação do problema. Vale ressaltar, uma vez que a solução fundamental é manipulada pela primeira vez (isto é, o termo subscrito é igual  $u_1^*(\xi; X)$ ), a solução corresponde à primeira primitiva do Tensor de Galerkin. Assim sendo, usando o conceito abordado na equação (5.4) e aplicando no termo TDMR na equação (5.3), chega-se à:

$$TDMR = \lambda \int_{\Omega} u(X) u_0^*(\xi; X) d\Omega = \lambda \int_{\Gamma} [u(X) q_1^*(\xi; X) - q(X) u_1^*(\xi; X)] d\Gamma - \lambda \int_{\Omega} u(X) u_1^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.5)$$

Note na equação (5.5) que um dos termos integrais ainda está no domínio. Então, usando a técnica da MECMR, o termo integral de domínio é transformado em uma série de integrais no contorno. Assim, conforme Kamiya et al (1993), o procedimento realizado  $N$  vezes, converte-se na equação (5.6):

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=0}^N (-\lambda)^j \int_{\Gamma} [u(X) q_j^*(\xi; X) - q(X) u_j^*(\xi; X)] d\Gamma = (-1)(\lambda)^{N+1} \int_{\Omega} u(X) u_N^*(\xi; X) d\Omega \quad (5.6)$$

A título de informação, conforme Kamiya e Andoh (1991) uma expressão mais geral pode ser admitida considerando-se que o lado direito da equação (5.6) é desprezado na prática da engenharia. Isso porque foi comprovado por estudos que para as dimensões bidimensionais e tridimensionais, a integral de domínio converge para zero quando  $N$  for suficientemente grande (ver APÊNDICE D). Portanto, dessa forma, chega-se à equação (5.7):

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=0}^N (-\lambda)^j \int_{\Gamma} [u(X)q_j^*(\xi; X) - q(X)u_j^*(\xi; X)] d\Gamma = 0 \quad (5.7)$$

Deve-se ressaltar que na equação (5.7) tanto o campo do potencial  $u_j^*(\xi; X)$  quanto a sua derivada normal  $q_j^*(\xi; X)$  são funções de alta ordem, ou seja, variam de acordo com o desenvolvimento das primitivas. Nesse contexto, para problemas bidimensionais, de acordo com Kamiya et al (1993) a equação que define a solução fundamental  $u_j^*(\xi; X)$  é representada na equação (5.8):

$$u_j^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} r^{2j}(\xi; X) \frac{1}{4^j (j!)^2} \{ \ln[r(\xi; X)] - S_j \} \quad (5.8)$$

onde a derivada normal  $q_j^*(\xi; X)$  pode ser definida de forma conveniente ao conceito abordado na equação (5.8) (NOWAK; BREBBIA, 1992). Portanto, utilizando-se desse argumento, tem-se a equação (5.9):

$$q_j^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} r^{2j-2}(\xi; X) \frac{1}{4^j (j!)^2} \{ \{2j \ln[r(\xi; X)] + 1\} - 2jS_j \} r_i(\xi; X) \eta_i(X) \quad (5.9)$$

em que o coeficiente  $S_j$  é adquirido recorrentemente a partir das condições a seguir:

$$S_j = 0, \quad (j = 0) \quad (5.10)$$

$$S_j = \sum_{l=1}^j \frac{1}{l}, \quad (j \geq 1) \quad (5.11)$$

### 5.3 PROCEDIMENTO OPERACIONAL E CONSTRUÇÃO MATRICIAL

Uma vez executado o procedimento de discretização empregando a formulação da Múltipla Reciprocidade (MECMR) para o problema de Helmholtz, a equação (5.7) se apresenta na forma matricial como na equação (5.12):

$$\sum_{j=0}^n (-\lambda)^j [H_j] \{u\} - \sum_{j=0}^n (-\lambda)^j [G_j] \{q\} = \{0\} \quad (5.12)$$

Note pela equação (5.12) que as matrizes  $H_j$  e  $G_j$ , em que  $j = 0, 1, \dots, n$  são avaliadas apenas uma vez, isso porque a solução fundamental de ordem superior (ver equação (5.8)) não depende da variável  $\lambda$  (WANG et al., 2004). Assim sendo, essas podem ser escritas como na equação (5.13):

$$\begin{aligned} [H] &= [H_0] - \lambda^2 [H_1] + \dots + (\lambda)^j [H_n] \\ [G] &= [G_0] - \lambda^2 [G_1] + \dots + (\lambda)^j [G_n] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Destaca-se que as matrizes  $[H_j]$  e  $[G_j]$  presentes na equação (5.13) são matrizes de coeficientes relacionadas às soluções fundamentais de ordem superior, ou seja, para  $q_j^*(\xi; X)$  e  $u_j^*(\xi; X)$ ; reciprocamente  $\{u\}$  e  $\{q\}$  são os vetores compostos pelos valores de potencial e derivada normal (KAMIYA; ANDOH, 1993). Portanto, a equação (5.12) pode ser simplificada como:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \{0\} \quad (5.14)$$

Por fim, as matrizes  $H$  e  $G$  são denominadas de matrizes polinomiais em termos de  $\lambda$  (ver equação (5.13), isto é, que contém o  $\lambda$  inserido de forma mais explícita. Subsequente,  $H_j$  e  $G_j$  são totalmente livres da magnitude de  $\lambda$  (KAMIYA et al., 1993).

## 6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados envolvendo a Equação de Helmholtz para demonstrar o desempenho do procedimento recursivo da nova formulação com Interpolação Direta Autorregularizada (MECID-2), quando comparado com a solução do Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade (MECMR). A intenção é de avaliar o comportamento dessa nova formulação e oferecer uma ferramenta mais simples e geral como alternativa para as formulações do MEC existentes. Nas simulações realizadas, elementos lineares são empregados em ambas as formulações e os valores numéricos comparados com soluções analíticas à disposição.

### 6.1 INTRODUÇÃO

Para possibilitar a comparação entre a nova formulação (MECID-2) e a técnica da Múltipla Reciprocidade (MECMR) foram selecionados três exemplos com geometria simplificada, nos quais a apresentação dos resultados se faz com a ajuda de tabelas e gráficos ilustrativos de desempenho, que consideram o tempo computacional e demonstram o erro relativo percentual para o potencial ou sua derivada normal, conforme as condições prescritas no exemplo.

Destaca-se que devido aos contornos dos problemas simulados possuírem arestas, ou seja, pontos com grande ângulo e com alteração no tipo de condição de contorno na maioria dos casos, foram utilizados pontos nodais duplos para todos os exemplos. Subsequente, encontram-se as características importantes dos experimentos:

Em relação ao computador utilizado:

- Processador: Intel®Core™ i7-4500U CPU @ 1.80GHz;
- Memória RAM: 8,00 GB;
- Sistema operacional: Windows 10 Home Single Language 64 bits.
- Armazenamento: SSD 250 GB.

Em relação à programação de ambas as técnicas:

- A implementação dos algoritmos encarregados pela solução numérica foi construído em linguagem FORTRAN 90 com precisão dupla.

Em relação a nova formulação MECID-2:

- Foram simulados testes com três malhas de contorno diferentes contendo 84, 164 e 324 nós (considerando nós duplos nos vértices);
- Foram simulados testes com quatro malhas de pontos internos contendo 144, 324, 484 e 576 elementos.
- FBR utilizada: Radial de Placa Fina;
- Foram utilizados 40 pontos de Gauss durante o processo de integração numérica.

Em relação a técnica MECMR:

- Foram simulados testes com três malhas de contorno diferentes, contendo 84, 164 e 324 nós (considerando nós duplos nos vértices);
- Foram utilizados 40 pontos de Gauss durante o processo de integração numérica.

Na sequência, os problemas governados pela Equação de Helmholtz englobam três grupos distintos: os problemas de autovalor (isto é, fornecem as frequências naturais do sistema) (Loeffler et al., 2020c); os problemas inversos (DAN et al., 2016); e os problemas de resposta, nos quais o sistema é solucionado por uma varredura nas frequências de excitação e, como resultado, determinam-se as configurações de equilíbrio do potencial em função de um conjunto de condições de contorno conhecidas. Ressalta-se que o grupo de problema de resposta foi abordado nos experimentos.

No que tange aos testes de convergência, recorreu-se ao critério de avaliação do erro relativo percentual (ver equação (6.1)); este é igual à diferença entre os valores numéricos e analíticos dividida pelo módulo do maior valor analítico

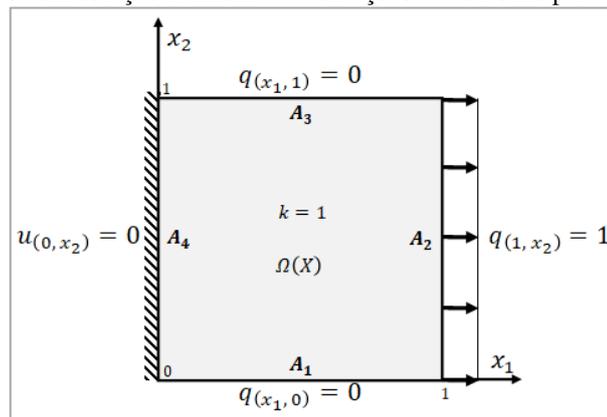
$$E = \sum_{i=1}^N |V_a - V_n|_i \frac{100}{N|M_{ant}|} \quad (6.1)$$

Na equação (6.1), os termos  $V_a$  e  $V_n$  representam os valores do potencial analítico e do potencial numérico calculado no ponto  $i$  respectivamente;  $M_{ant}$  é o maior valor analítico encontrado na varredura de cada problema; e  $N$  caracteriza o número de potenciais calculados ou graus de liberdade.

## 6.2 PRIMEIRO EXEMPLO

Para melhor avaliar as características da MECID-2 e MECMR junto à Equação de Helmholtz, este primeiro exemplo a ser testado consiste em um problema unidimensional. Nesse contexto, a Figura 3 apresenta as características físicas e geométricas desse problema que simboliza uma barra elástica engastada.

Figura 3 – Domínio com solução harmônica e condições de contorno para o primeiro exemplo.



Fonte: Produção do próprio autor.

Como observado na Figura 3, esse caso é considerado simples, pois há escoamento em apenas uma direção. As características geométricas consistem em condição de Neumann prescritas nulas nas arestas  $A_1$  e  $A_3$  do domínio; condição de Dirichlet prescrita nula na aresta  $A_4$  do domínio e, na aresta  $A_2$ , condição de Neumann não-homogênea, isto é, igual a um. A equação de governo é fornecida pela equação (6.2):

$$k^2 \frac{\partial u(x_1)}{\partial x_1^2} = -\omega^2 u(x_1) \quad (6.2)$$

Considerando o valor da variável  $k$  como unitário e mantendo as condições de contorno impostas, a solução analítica resulta na equação (6.3).

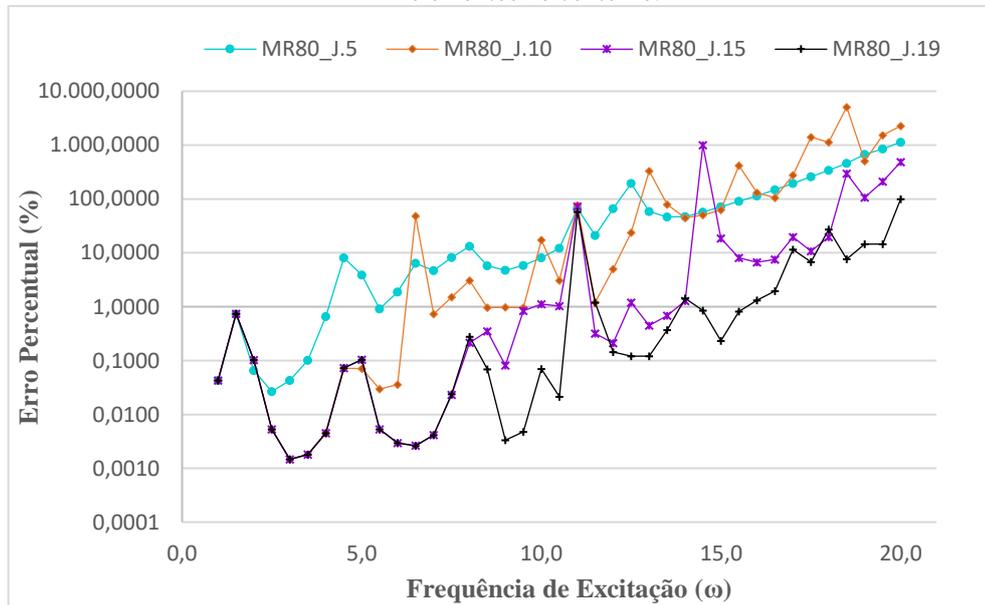
$$u(x_1) = \frac{\sin(\omega x_1)}{\cos(\omega)} \quad (6.3)$$

Para o primeiro exemplo, foram processadas simulações da MECID-2 e da MECMR com a mesma quantidade de pontos nodais e, para a MECID-2, também se utilizou de pontos

interpolantes no interior do domínio, pois todo o núcleo da integral de domínio referente à inércia é interpolado. Os valores das malhas de 80, 160, e 320 representam os pontos no contorno, enquanto 144, 324, 484 e 576 os pontos internos. Convém destacar que por se tratar de um exemplo de barra elástica engastada não são contabilizados os potenciais numéricos referentes à aresta  $A_4$  (isto é, aresta engastada). Nessa linha de raciocínio, o contorno das outras três arestas possui condição de Neumann prescrita, conseqüentemente demanda apenas o cálculo do potencial. As frequências de excitação  $\omega$  utilizadas para as simulações numéricas foram variadas de 1,00 a 20,00 em um intervalo de 0,50.

Inicia-se a exibição dos resultados com três testes de convergência para a formulação MECMR, para as malhas de 80, 160 e 320 apresentadas nas Figuras 4, 5 e 6 respectivamente, que têm como parâmetros a quantidade de primitivas calculadas e o nível de refinamento da malha de contorno. O tempo computacional é então avaliado e mostrado nas Tabelas 1 a 3, em relação aos parâmetros de cada malha.

Figura 4 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o primeiro exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno.

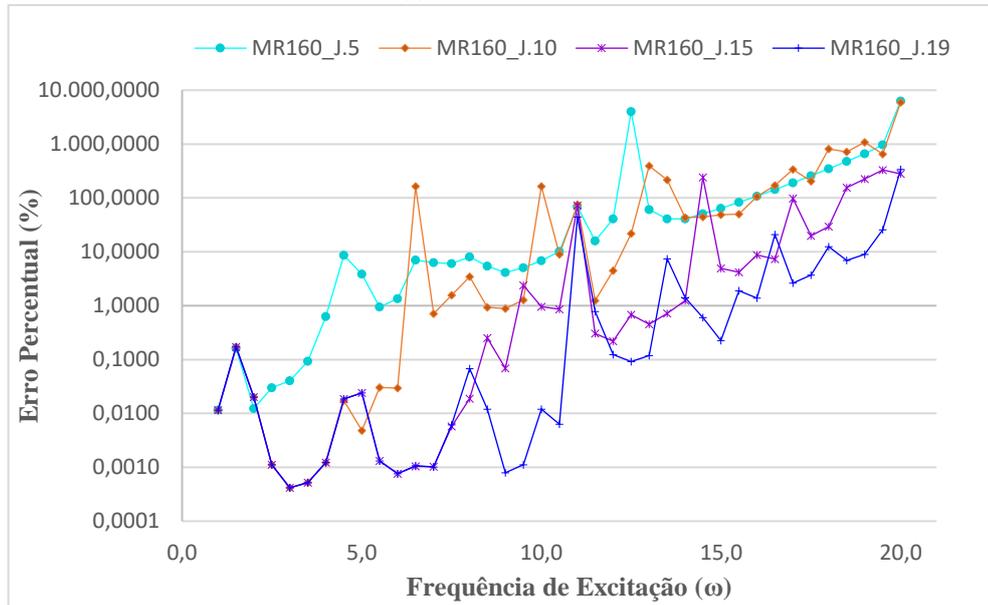


Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 1 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 80 elementos no contorno.

<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (5)	50,80
MECMR (20)	103,92
MECMR (15)	152,19
MECMR (19)	193,93

Figura 5 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o primeiro exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno.

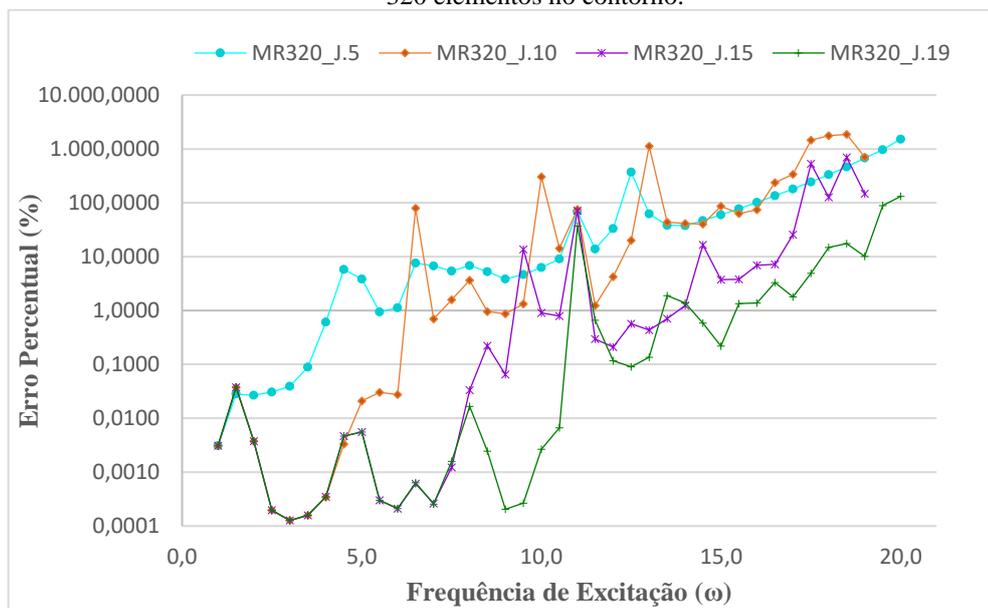


Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 2 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 160 elementos no contorno.

Primitivas ( $j$ )	Tempo (s)
MECMR (5)	210,07
MECMR (20)	466,06
MECMR (15)	602,32
MECMR (19)	754,04

Figura 6 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o primeiro exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 3 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 320 elementos no contorno.

<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (5)	836,20
MECMR (20)	1469,03
MECMR (15)	2461,02
MECMR (19)	2977,92

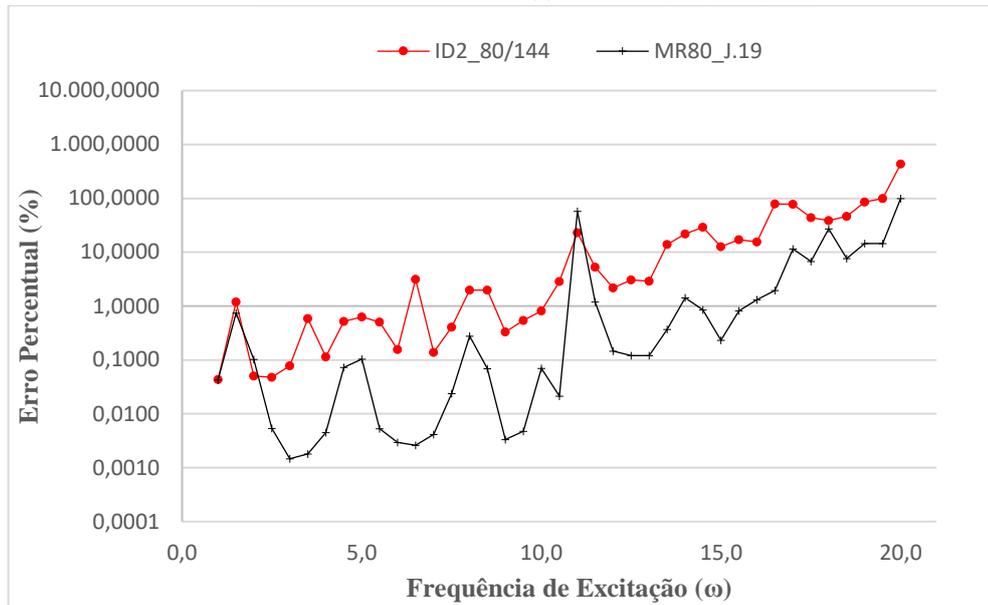
Observa-se que os resultados obtidos por meio da MECMR apresentaram uma queda sistêmica do erro relativo percentual quando se utilizou de um maior número de elementos de contorno (ver Figura 4 a 6). Deve-se enfatizar que as integrações são avaliadas apenas uma vez, o que melhora significativamente a eficiência do algoritmo (WANG et al., 2004). Os três testes executados apontam boa precisão para as baixas frequências de excitação ( $\omega \leq 10,00$ ) e um crescimento gradativo do erro relativo com o aumento das frequências ( $\omega \geq 10,50$ ).

A limitação da aplicação da formulação MECMR em problemas genéricos é a dificuldade de se determinar explicitamente as soluções fundamentais de ordem superior utilizando a fórmula de recorrência (NEVES; BREBBIA, 1991). É possível observar também que, com a utilização de um número maior de primitivas calculadas (ver Tabelas 1 a 3), demanda-se um tempo computacional maior. Entretanto, quando aumenta esse número (isto é, de 5 para 19 primitivas), por consequência, ocorre uma redução significativa dos níveis de erro relativo, o que é um comportamento esperado para os testes de convergência. Assim, é preciso ressaltar que o método se mostrou convergente e apresentou resultados satisfatórios dentro do intervalo de frequência analisado.

No segundo momento, executa-se separadamente os resultados das simulações computacionais comparando o desempenho entre a formulação MECID-2 e a MECMR utilizando malhas de 80, 160 e 320 elementos no contorno, mostrados nas Figuras 7, 8 e 9, respectivamente. Destaca-se que na formulação MECID-2 serão expostas as malhas mais refinadas para nuvem de pontos internos, isto é, 144, 484 e 576 pontos (GALIMBERTI, 2018); em concomitância, para a formulação da MECMR, será empregado o maior número de primitivas geradas ( $j = 19$ ).

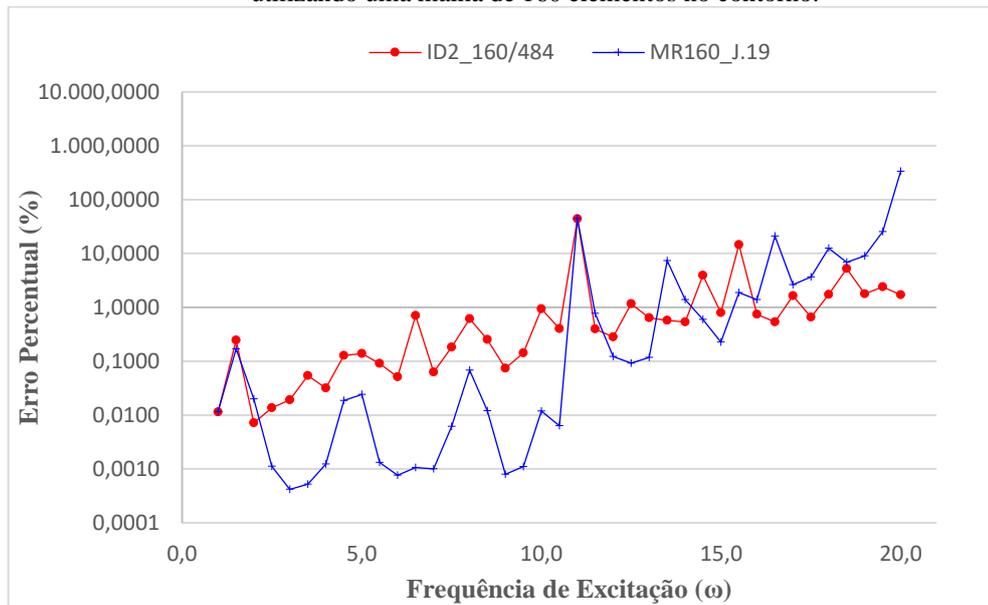
Inicia-se, portanto, na mesma sequência, demonstrando a linha de tendência dos erros relativos percentuais de ambas as formulações para cada malha empregada.

Figura 7 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

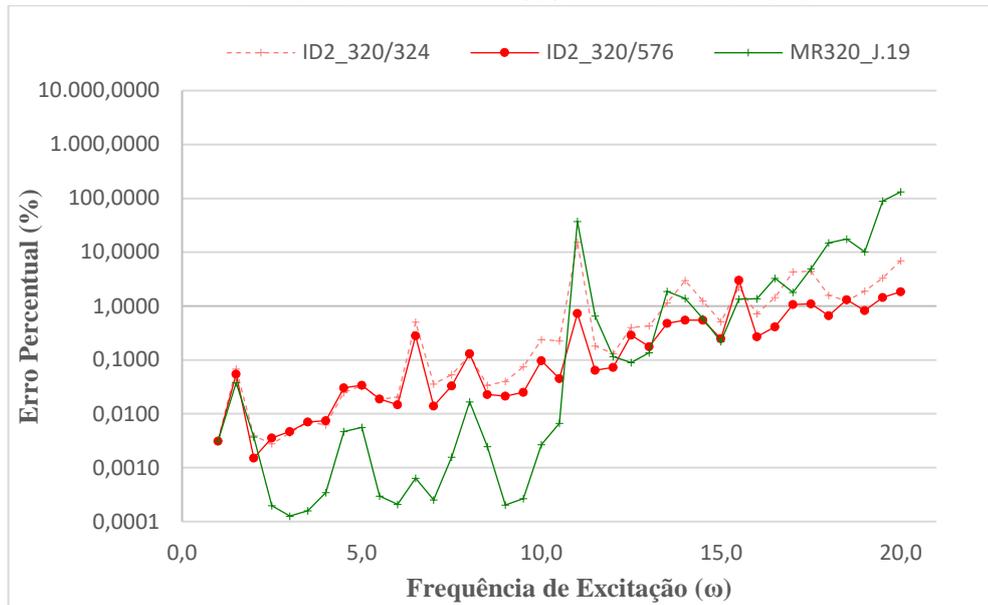
Figura 8 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

As Figura 7 e 8 mostram excelente comportamento dos resultados para as simulações computacionais da MECID-2 e da MECMR. Os níveis de erro caíram significativamente com a utilização da malha no contorno, pois a malha com 160 nós no contorno, obteve desempenho superior quando comparada com a malha de 80 nós no contorno, entretanto, na MECID-2 não é plausível desconsiderar a importância da nuvem de pontos internos. Nessa linha de raciocínio, na Figura 9, para a MECID-2, uma malha de 320 elementos no contorno é fixada, e varia-se a nuvem de pontos internos.

Figura 9 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

Observando a Figura 9, percebe-se melhora no comportamento, com uma queda gradual na linha de tendência do erro relativo durante o refinamento da malha, isto é, de 324 para 576 pontos internos. Tal comportamento afirma que o refinamento da malha de pontos internos é um parâmetro importante para a formulação. Prosseguindo, como a MECID-2 é uma iniciativa que se originou da técnica MECID, convém destacar que malhas com pouco refinamento no contorno e com muitos polos internos podem gerar problemas de integração quase singular, os quais exigem uma estratégia eficiente para o cálculo das integrais (LOEFFLER et al., 2015a).

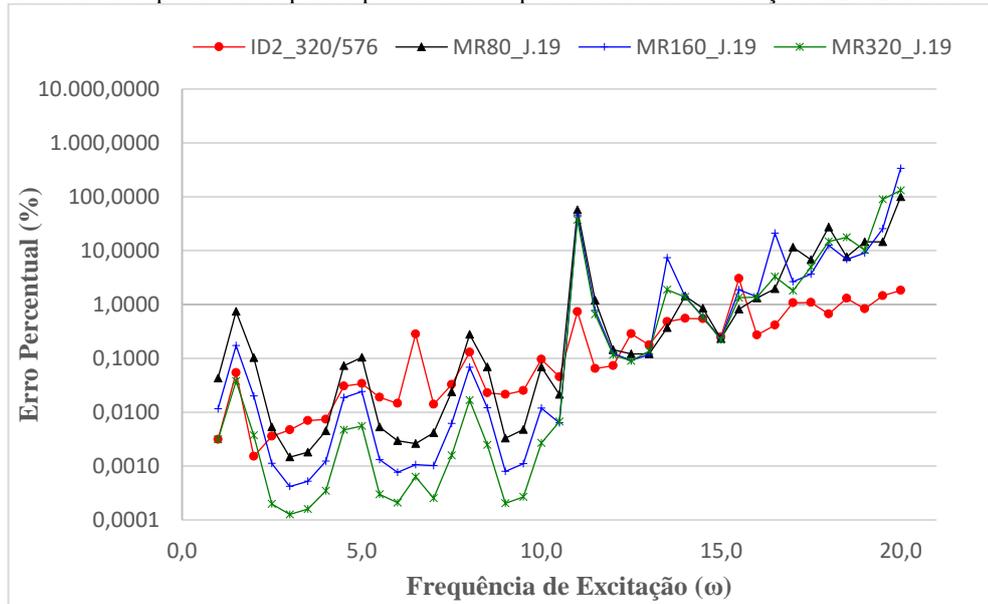
Na Tabela 4, são mostrados os tempos de processamento, em relação à MECID-2, para os resultados obtidos nas Figura 7, 8 e 9.

Tabela 4 – Análise paramétrica tempo de processamento para cada malha da MECID-2.

<b>Malhas MECID-2</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECID-2 (80/144)	42,74
MECID-2 (160/484)	379,09
MECID-2 (320/324)	754,48
MECID-2 (320/576)	1666,27

Finalizando o primeiro exemplo, analisam-se os resultados dos potenciais associados à malha mais refinada para as formulações MECID-2 e, para a MECMR, será usado o maior número de primitivas geradas ( $j = 19$ ) e, malhas de 80, 160, 320 elementos no contorno. Os resultados são plotados na Figura 10.

Figura 10 – Análise paramétrica para o primeiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR.



Fonte: Produção do próprio autor.

A Figura 10 exibe, de forma geral, a possibilidade de uma falsa representação do erro relativo obtido pelos métodos. Esse fator pode ser representado pelos picos de erros, denominados de ressonância acústica; esse, ocorrerá se a frequência de excitação utilizada na simulação, coincidir com a frequência natural do problema em análise (BAI, 1992). Por exemplo, há uma frequência natural bem próxima da frequência de excitação igual a 11,00 Hz, como consequência, a solução analítica se estende para o infinito gerando picos de resposta no resultado. Na sequência, como o tempo computacional é também um ponto importante, na Tabela 5, são mostrados os tempos de processamento, em relação aos parâmetros de controle da Figura 10.

Tabela 5 – Análise paramétrica tempo de processamento para cada malha do MEC.

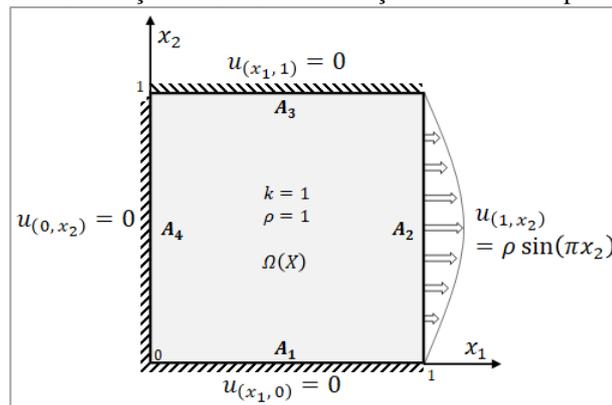
Malhas MEC	Tempo (s)
MECID-2 (320/576)	1666,27
MECMR (80)	193,93
MECMR (160)	754,04
MECMR (320)	2977,92

Por fim, ainda sobre a Figura 10, é possível observar, em comparação com a Tabela 5, que a precisão da MECID-2, ao realizar a varredura nas frequências excitação, foi semelhante à da MECMR, todavia, a MECID-2 apresentou uma curva de tendencia bem mais precisa dos resultados. Vale destacar também uma redução de aproximadamente 45% no tempo de processamento para a malha mais refinada da MECID-2 quando comparada com a MECMR.

### 6.3 SEGUNDO EXEMPLO

Neste segundo experimento, avaliam-se as características da MECID-2 e da MECMR junto à Equação de Helmholtz, sendo, porém, esse problema bidimensional. Nesse contexto, a Figura 11 apresenta as características físicas e geométricas desse problema, que simboliza uma membrana quadrada com três bordas fixas.

Figura 11 – Domínio com solução harmônica e condições de contorno para o segundo exemplo



Fonte: Produção do próprio autor.

Como observado na Figura 11, esse experimento é considerado um pouco mais complexo quando comparado com o primeiro exemplo, isso porque apenas as condições Dirichlet estão prescritas. Especificamente, prescritas nulas nas arestas  $A_1$ ,  $A_3$  e  $A_4$ ; na aresta  $A_2$ , é prescrita uma condição senoidal. Sua solução é encontrada por meio da equação (6.4) de governo:

$$k^2 \left[ \frac{\partial u(x_1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u(x_2)}{\partial x_2^2} \right] = -\omega^2 u(x_1, x_2) \quad (6.4)$$

Considerando o valor das variáveis  $k$  e  $\rho$  como unitário e mantendo as condições de contorno impostas, a solução analítica pode ser obtida pelo método da separação de variáveis (GONZAGA, 2014). O resultado é apresentado na equação (6.5):

$$u(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 \sqrt{\omega^2 - \pi^2}) \sin(\pi x_2)}{\sin(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})} \quad (6.5)$$

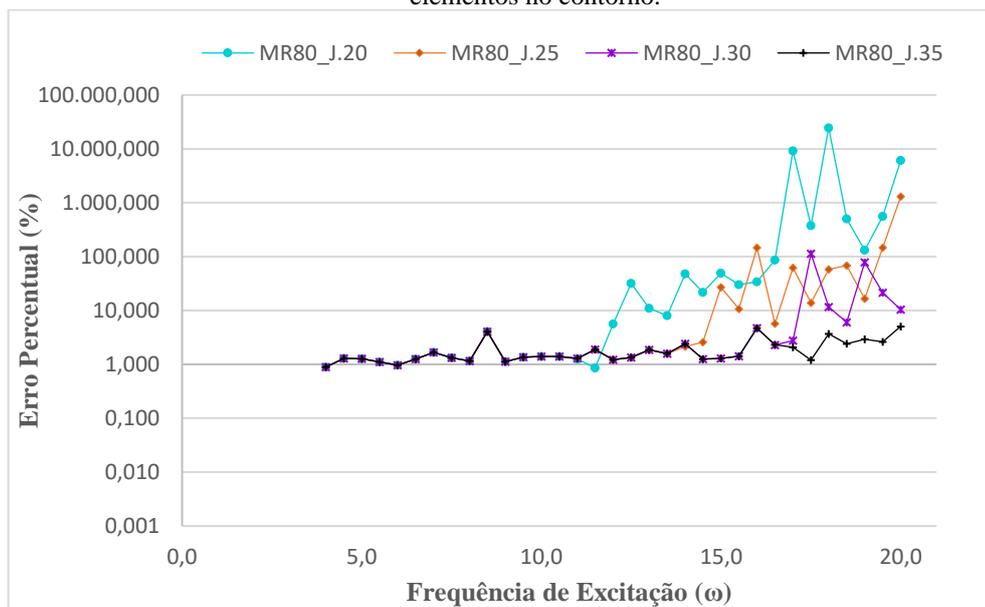
De acordo com Loeffler et al (2020a), devido à indeterminação gerada quando  $\omega = \pi$ , juntamente com as respostas complexas obtidas com  $\omega < \pi$ , todos os valores de frequência de

excitação são escolhidos como maiores que  $\pi$  (isto é,  $\omega^2 > \pi^2$ ). Nesse contexto, as frequências de excitação  $\omega$  utilizadas para as simulações numéricas foram variadas de 4,00 a 20,00 em um intervalo de 0,50.

Para realizar uma comparação de desempenho como no primeiro exemplo, no que se refere ao comportamento da MECID-2 e da MECMR, foram processadas simulações para ambas as técnicas com a mesma quantidade de pontos nodais e, para a MECID-2, também se utilizou de pontos interpolantes no interior do domínio. Os valores das malhas de 80, 160 e 320 representam os pontos no contorno, enquanto 324, 484 e 576 os pontos internos. Cabe destacar que por se tratar de um exemplo que foi submetido exclusivamente a condições prescritas de Dirichlet, foram avaliados os erros relativos percentuais, gerados por meio da derivada do potencial em todo o contorno do problema.

Aqui, analogamente ao primeiro exemplo, inicia-se a exibição de resultados com três testes de convergência para a formulação MECMR, para as malhas de 80, 160 e 320 apresentadas nas Figuras 12, 13 e 14 respectivamente, que têm como parâmetros a quantidade de primitivas calculadas e o nível de refinamento da malha de contorno. O tempo computacional é então avaliado e mostrado nas Tabelas 6 a 8, em relação aos parâmetros de cada malha.

Figura 12 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o segundo exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno.

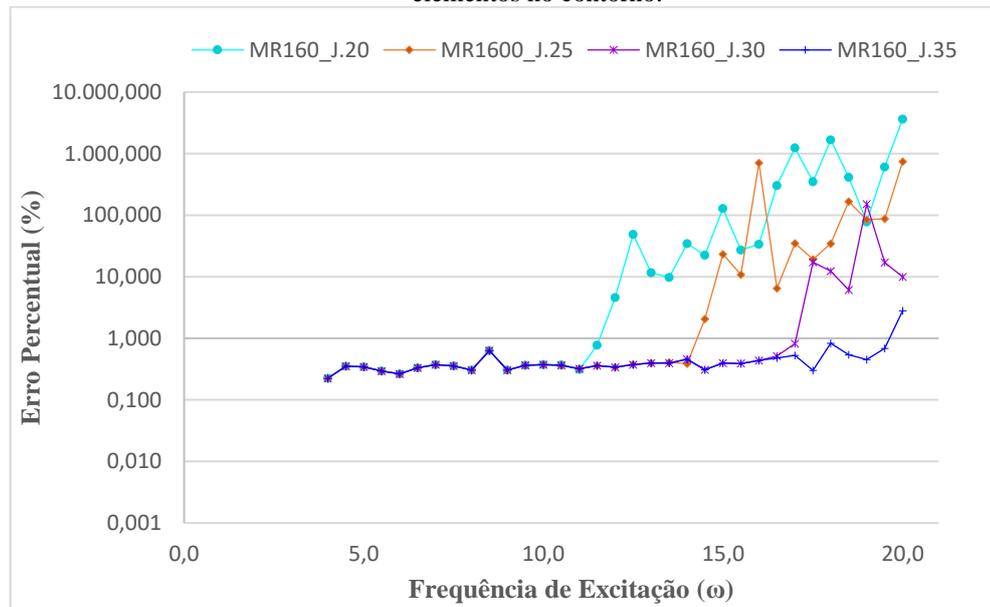


Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 6 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 80 elementos no contorno.

<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (20)	189,66
MECMR (25)	227,54
MECMR (30)	266,05
MECMR (35)	299,63

Figura 13 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o segundo exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno.



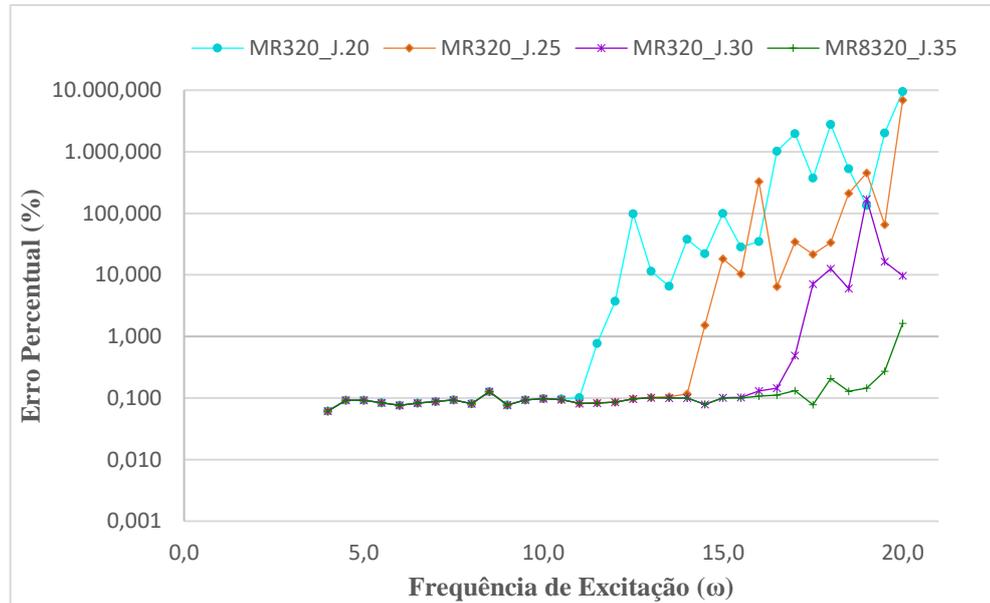
Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 7 - Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 160 elementos no contorno.

<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (20)	661,59
MECMR (25)	850,48
MECMR (30)	1015,33
MECMR (35)	1148,28

Na sequência, é possível observar que a formulação se mostrou convergente e apresentou um bom desempenho. Mais uma vez, os resultados obtidos por meio da MECMR apresentaram queda sistêmica do erro relativo percentual quando se utilizou de um maior número de elementos no contorno. Entretanto, foi necessário um número de primitivas calculadas acima de 20, o qual é superior ao maior número de primitivas geradas para o primeiro exemplo. As três simulações executadas, quando se utilizou de 20 primitivas, os resultados mostraram bom desempenho para as baixas frequências de excitação ( $\omega \leq 10,00$ ) e um crescimento gradativo do erro relativo com o aumento da frequência (ver Figuras 12 a 14).

Figura 14 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação para o segundo exemplo referente ao cálculo das primitivas da formulação MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

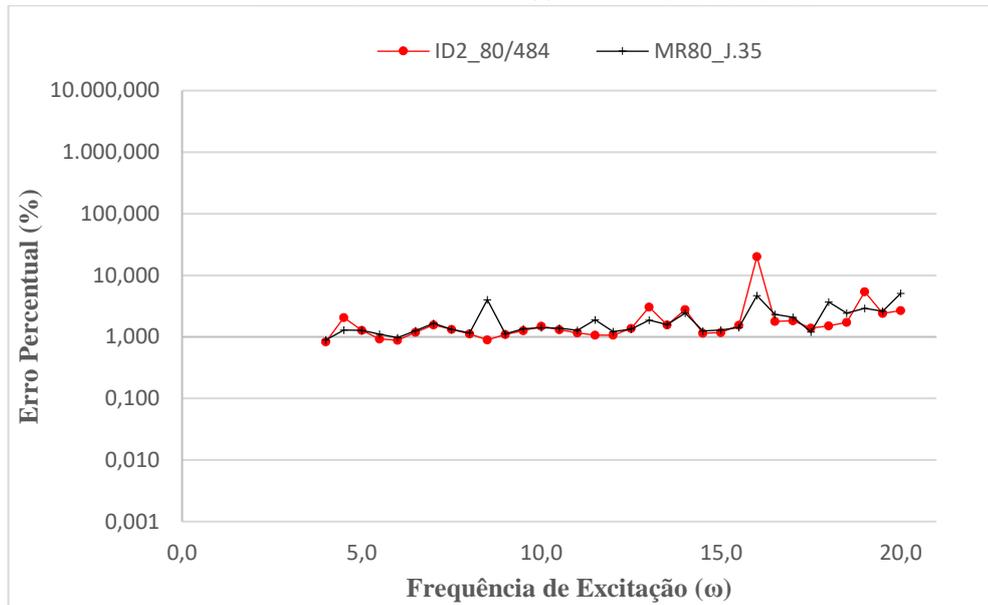
Tabela 8 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 320 elementos no contorno.

<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (20)	2547,10
MECMR (25)	3366,19
MECMR (30)	3941,49
MECMR (35)	4522,99

Ainda sobre a formulação MECMR, é importante destacar que o elevado tempo computacional está relacionado diretamente ao número de primitivas geradas (ver Tabelas 6 a 8). Por exemplo, quando aumenta o número de primitivas (isto é, de 20 para 35) por consequência, ocorre uma queda expressiva dos níveis de erro relativo, em contrapartida, demanda maior tempo de processamento. Por fim, em comparação com o primeiro exemplo, a precisão é pior, devido à maior complexibilidade numérica.

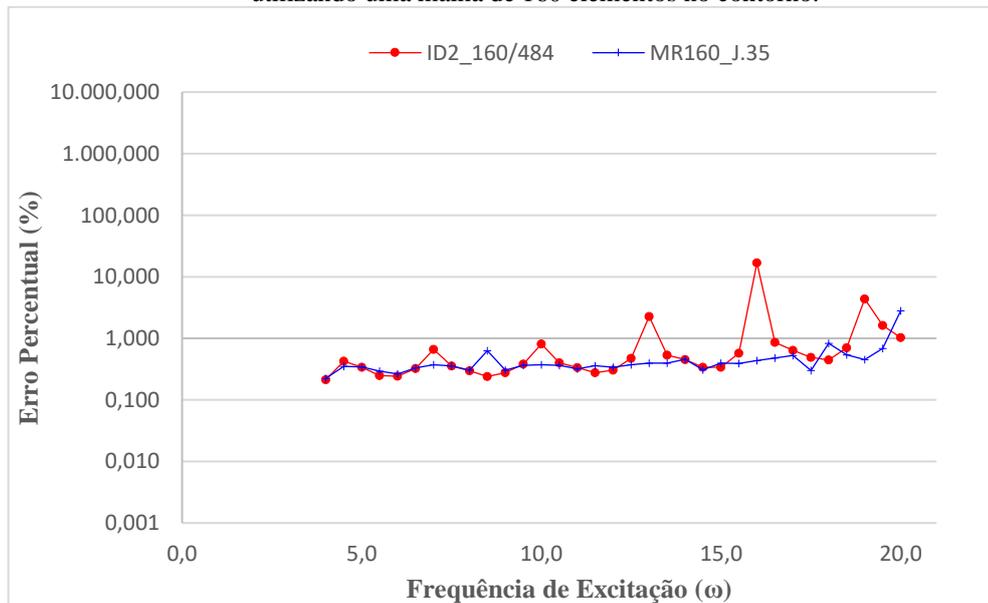
De forma complementar, um segundo teste de convergência é executado, comparando o desempenho entre a formulação MECID-2 e a MECMR. Os resultados são apresentados utilizando-se três discretizações diferentes com 80, 160 e 320 elementos de contorno, como demonstrado nas Figuras 15, 16 e 17 respectivamente. Aqui, novamente, serão expostas para a técnica da MECID-2 as malhas mais refinadas de pontos internos que apresentam os menores erros; da mesma forma para a formulação MECMR será usado o maior número de primitivas geradas ( $j = 35$ ).

Figura 15 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 16 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno.



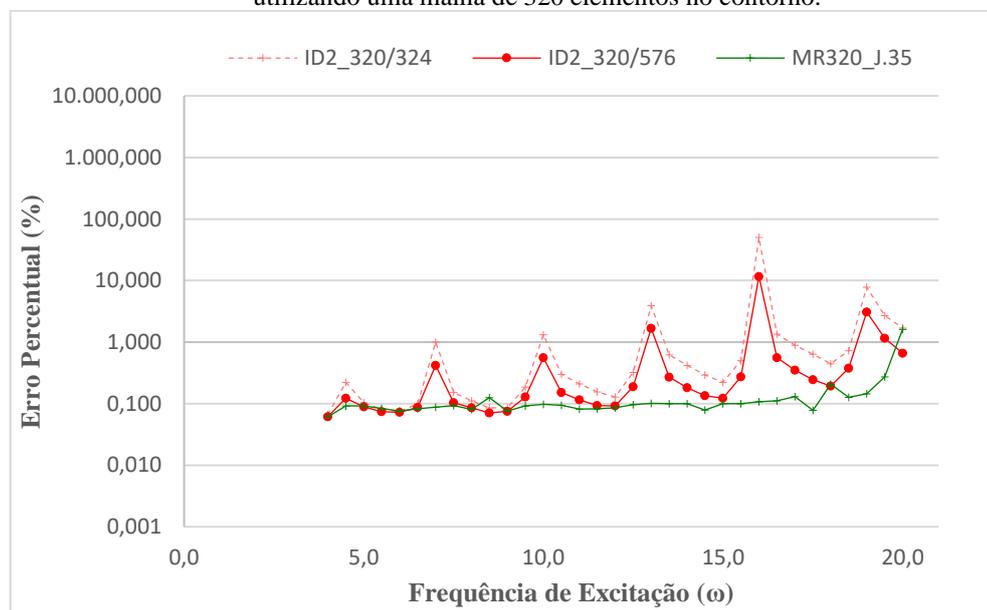
Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 15, para a formulação MECID-2, destaca-se uma particularidade no comportamento da malha de 80 elementos no contorno, em que se percebe melhora no desempenho com utilização de uma nuvem maior de pontos internos (ou seja, 484 pontos). Tal particularidade, controversa ao esperado, conforme o argumento do primeiro exemplo, justifica-se, provavelmente, por meio das características das condições de contorno que são todas prescritas na condição de Dirichlet e, como consequência, pode-se encontrar uma resposta mal

condicionada para as simulações numéricas do exemplo, entretanto essa particularidade não será analisada nessa dissertação.

Em um segundo momento, como esperado, o comportamento numérico da derivada do potencial demonstrou resultados satisfatórios para ambas as formulações (ver Figura 15 e 16). Porém, em comparação com o primeiro exemplo, ao realizar a varredura nas frequências de excitação, à medida que se refinou a malha no contorno, a formulação MECMR apresentou estabilidade na curva de tendência para o erro relativo, como mostra na Figura 17.

Figura 17 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

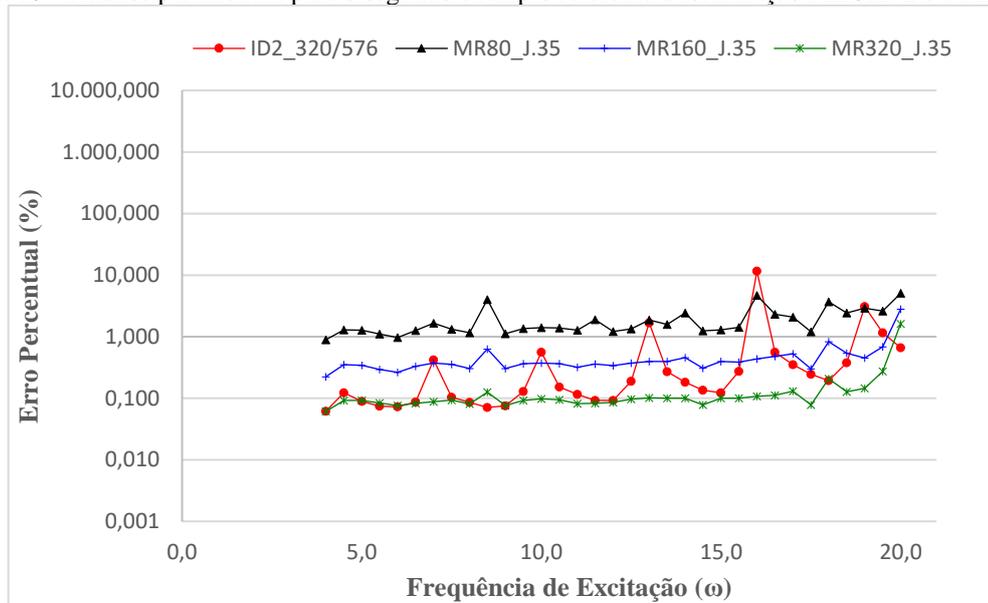
Ainda sobre a Figura 17, é possível reafirmar que o refinamento da malha de pontos internos é um parâmetro importante para a formulação MECID-2. Tal argumento é comprovado quando se fixa a malha de elementos no contorno e varia-se a nuvem de pontos internos. Prosseguindo, na Tabela 9, são mostrados os tempos de processamento, em relação a MECID-2, para os resultados obtidos nas Figuras 15, 16 e 17.

Tabela 9 – Análise paramétrica do tempo de processamento para cada malha da MECID-2.

<b>Malhas MECID-2</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECID-2 (80/484)	185,40
MECID-2 (160/484)	417,79
MECID-2 (320/324)	526,99
MECID-2 (320/576)	952,83

Nessa parte, analisam-se os resultados das derivadas dos potenciais associados à malha mais refinada para as formulações MECID-2 enquanto para a MECMR será usado o maior número de primitivas geradas ( $j = 35$ ) e malhas de 80, 160 e 320 elementos no contorno. Os resultados são plotados na Figura 18 e o tempo de processamento para cada malha na Tabela 10.

Figura 18 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR.



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 10 – Análise paramétrica tempo de processamento para cada malha do MEC.

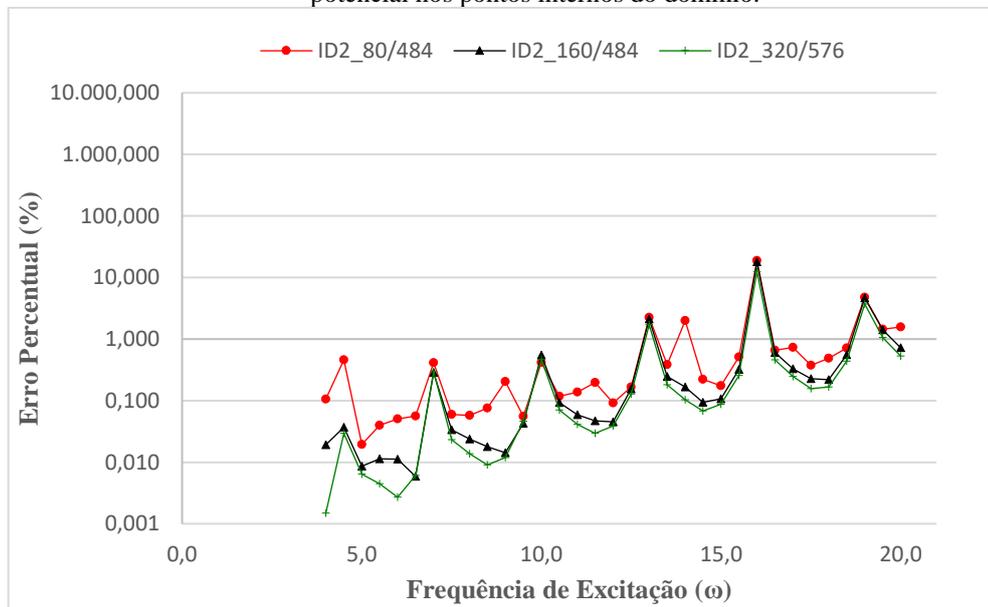
Malhas MEC	Tempo (s)
MECID-2 (320/576)	952,83
MECMR (80)	299,63
MECMR (160)	1148,28
MECMR (320)	4522,99

Na Figura 18, é possível observar, em comparação com a Tabela 10, que a precisão da MECMR está vinculada tanto com o refinamento da malha dos elementos de contorno quanto ao número de primitivas geradas. Convém destacar que a formulação da MECMR, ao realizar a varredura nas frequências de excitação, apresentou uma curva de tendência mais estável dos resultados, entretanto, a MECID-2 ao utilizar uma malha mais refinada, aparenta comportamento com baixos níveis de erro relativo. Observa-se ainda uma redução drástica no tempo de processamento para a malha mais refinada da MECID-2 quando comparada com a MECMR.

Finalizando o segundo exemplo, para completar a análise, testa-se a convergência da formulação MECID-2, porém, agora, analisam-se os resultados associados a potenciais nos

pontos internos do domínio (ver Figura 19). Convém destacar que os valores de contorno de todas as arestas influenciam nos resultados dos pontos internos.

Figura 19 – Análise paramétrica para o segundo exemplo referente à formulação MECID-2 para o cálculo potencial nos pontos internos do domínio.



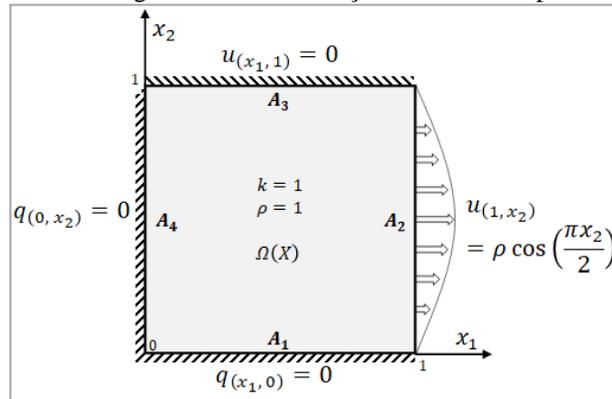
Fonte: Produção do próprio autor.

A Figura 19 exibe, de forma geral, uma curva de tendência muito próxima para os três níveis de refinamento, ou seja, malhas de 80, 160, 320 elementos de contorno e, respectivamente 484, 484, 576 pontos internos. Porém uma observação mais atenta, revela uma redução sistêmica do erro relativo percentual quando se analisaram os potenciais nos pontos internos do domínio. Nessa linha de raciocínio, percebe-se ainda que a malha com 160 elementos no contorno e 484 pontos internos, demonstrou uma linha de tendência do erro relativo com pouca variação quando foi comparada com a malha mais refinada. Por fim, é possível observar de forma reiterada aqui, como citado no primeiro exemplo, picos de resposta nos resultados pelo motivo da proximidade entre a frequência natural e a frequência de excitação.

#### 6.4 TERCEIRO EXEMPLO

O terceiro e último experimento consiste em resolver novamente uma membrana quadrada com três bordas fixas semelhantes àquela apresentada no segundo exemplo (ver seção 6.3), entretanto as condições de contorno são diferentes. As características geométricas e condições de contorno aplicadas ao experimento, são dadas na Figura 20.

Figura 20 – Características geométricas e condições de contorno para o terceiro exemplo



Fonte: Produção do próprio autor.

A condição de contorno imposta nesse terceiro exemplo, consiste em condição de Dirichlet prescrita nas arestas  $A_2$  e  $A_3$  do domínio, enquanto nas arestas  $A_1$  e  $A_4$  do domínio condição de Neumann prescrita. A equação de governo pautada para o experimento toma a forma da equação (6.6):

$$k^2 \left[ \frac{\partial u(x_1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u(x_2)}{\partial x_2^2} \right] = -\omega^2 u(x_1, x_2) \quad (6.6)$$

Então, presumindo o valor das variáveis  $k$  e  $\rho$  como unitário e mantendo as condições de contorno impostas, a solução analítica pode ser obtida pelo Método de Separação de Variáveis (ver APÊNDICE E). O resultado é explicitado na equação (6.7):

$$u(x_1, x_2) = \frac{\rho}{\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)} \cos\left(x_1 \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} x_2\right) \quad (6.7)$$

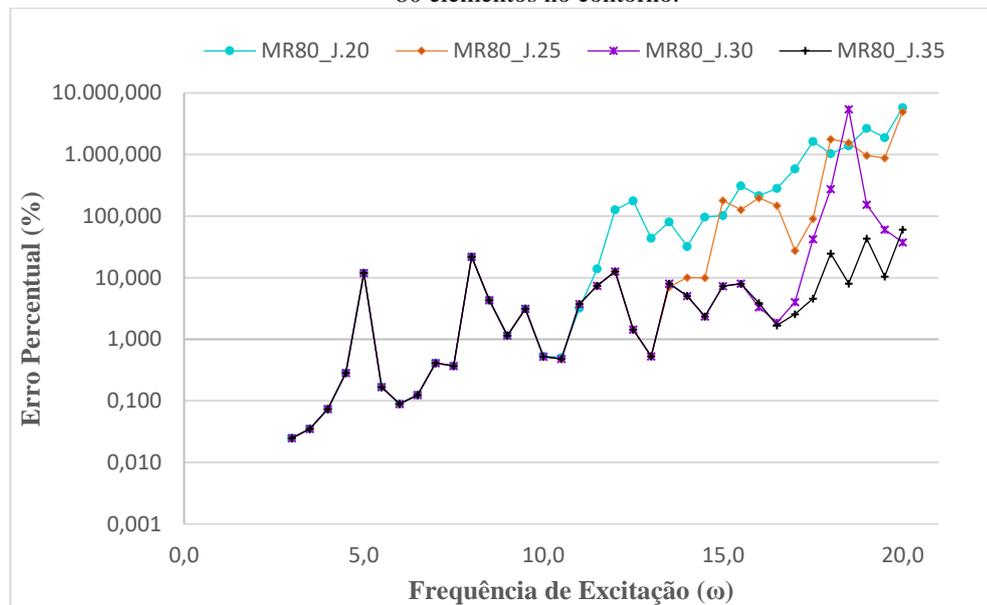
Dadas essas características para a varredura das frequências de excitação, todos os valores são escolhidos como maiores que  $(\pi/2)^2$ , conseqüentemente, o núcleo da raiz na equação (6.7) torna-se sempre positivo. Assim sendo, as frequências de excitação  $\omega$  usadas para as simulações numéricas foram variadas de 3,00 a 20,00 em um intervalo de 0,50.

Os resultados são apresentados utilizando três discretizações diferentes com 80, 160 e 320 elementos de contorno para ambas as formulações e, para a formulação MECID-2, também se utilizou de pontos interpolantes no interior do domínio (isto é, 324, 484 e 576 pontos). Nesse

exemplo, foram avaliados os erros relativos percentuais, gerados por meio do cálculo do potencial. Assim, o contorno analisado situa-se nas arestas  $A_1$  e  $A_4$  do domínio, onde possui condição de Neumann prescrita.

Como nos exemplos anteriores, três testes de convergência para a formulação MECMR, usando malhas com 80, 160 e 320 elementos no contorno, são apresentados nas Figuras 21, 22 e 23, respectivamente. Mais uma vez, os resultados têm como parâmetro a quantidade de primitivas calculadas e o nível de refinamento da malha de contorno. Nas Tabelas de 11 a 13 são mostrados os tempos computacionais em relação aos parâmetros de cada malha.

Figura 21 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação simuladas no terceiro exemplo referente ao cálculo das primitivas para a formulação MECMR, utilizando malha de 80 elementos no contorno.

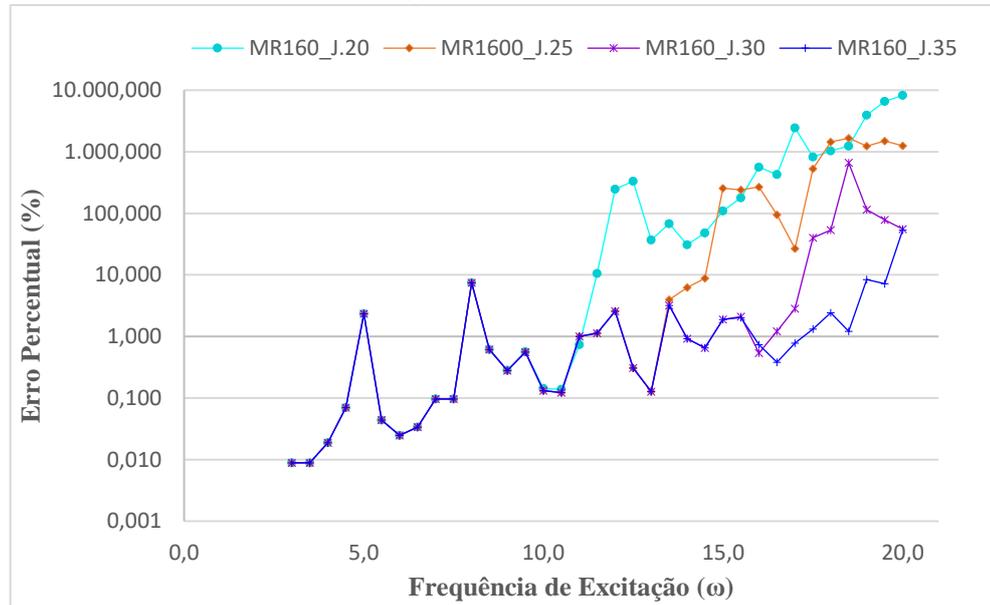


Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 11 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 80 elementos no contorno.

<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (20)	188,28
MECMR (25)	228,99
MECMR (30)	264,73
MECMR (35)	314,93

Figura 22 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação simuladas no terceiro exemplo referente ao cálculo das primitivas para a formulação MECMR, utilizando malha de 160 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

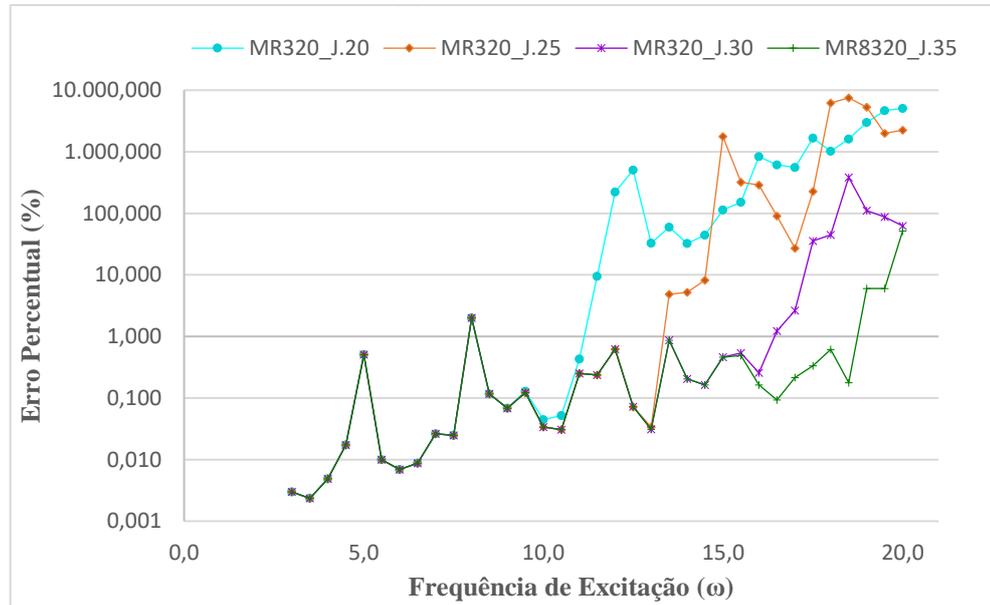
Tabela 12 - Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 160 elementos no contorno.

<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (20)	659,37
MECMR (25)	908,32
MECMR (30)	1118,50
MECMR (35)	1352,53

Note-se, nas Figuras 21 e 22, uma queda consistente do erro relativo durante o refinamento da malha de contorno e do maior número de primitivas calculadas. Tal resultado confirma o comportamento convergente da formulação MECMR em relação a esses parâmetros. Vale registrar que a linha de tendência dos erros relativos começou a demonstrar convergência para um número acima de vinte primitivas geradas e, como consequência, um grande tempo computacional é gasto (ver Tabelas 11 a 13).

Na Figura 23, é mostrado o erro relativo percentual cometido com a malha de elemento de contorno mais refinada quando foi realizada a varredura das frequências de excitação de 3,00 a 20,00 do exemplo da membrana quadrada.

Figura 23 – Curva de convergência do erro relativo percentual em função das frequências de excitação simuladas no terceiro exemplo referente ao cálculo das primitivas para a formulação MECMR, utilizando malha de 320 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 13 – Relação do tempo computacional para cada primitiva usando 320 elementos no contorno.

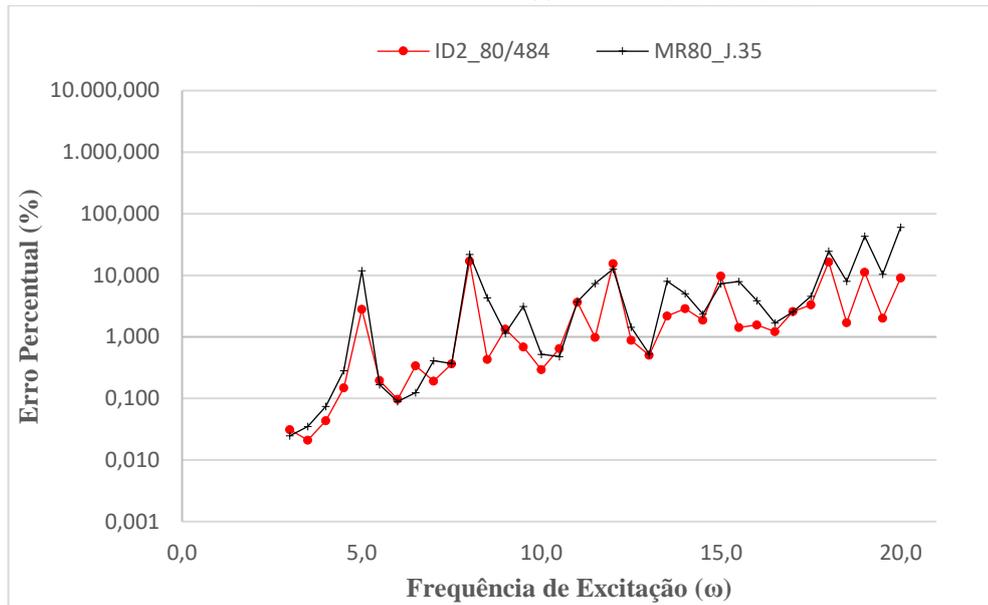
<b>Primitivas (<math>j</math>)</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECMR (20)	2945,19
MECMR (25)	3453,73
MECMR (30)	4249,10
MECMR (35)	4937,05

Note-se, na Figura 23, a boa precisão da formulação MECMR quando é usada uma malha de elementos de contorno mais refinada com o maior número de primitivas geradas, em que, mais uma vez, mostrou queda do erro relativo percentual.

Na sequência, um segundo teste de convergência é realizado. Analisa-se agora, a parametrização referente à formulação MECID-2 e MECMR, no comportamento dos erros relativos para o cálculo dos potenciais.

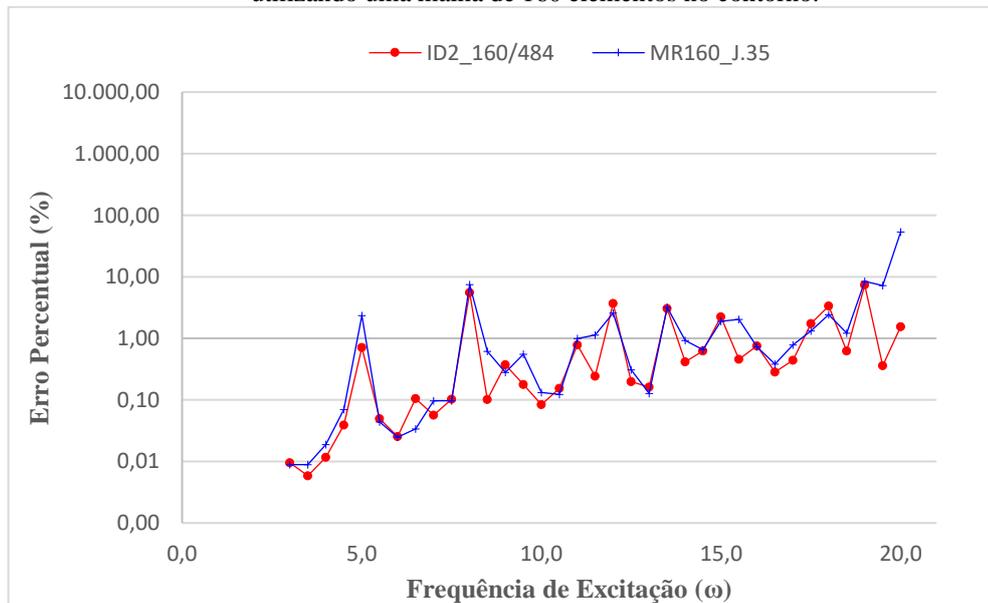
Na Figura 24, são comparados os resultados das simulações numéricas entre as formulações utilizando uma malha de 80 elementos no contorno e, para a MECID-2, utilizou-se de uma nuvem de pontos internos de 484 pontos. Os resultados plotados revelam bom desempenho para ambas as simulações. Uma melhora razoável no desempenho das formulações é observada quando se alterou a malha para 160 elementos no contorno, de acordo com o apresentado na Figura 25.

Figura 24 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 80 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

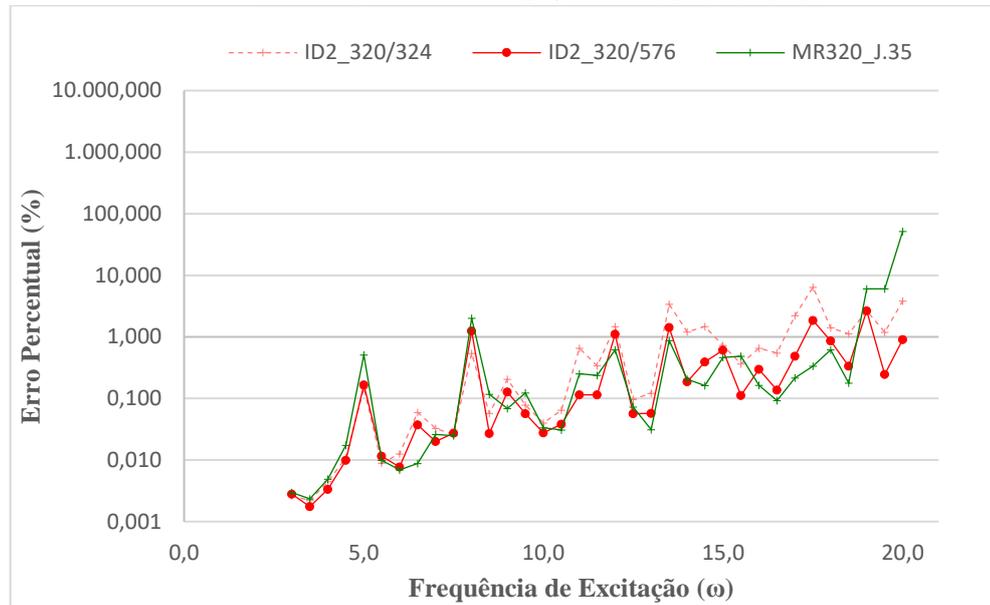
Figura 25 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 160 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

Em um segundo momento, inicia-se outra análise paramétrica para ambas as formulações, porém, dessa vez, fixando-se uma malha de 320 elementos no contorno, e variando o nível de refinamento da nuvem de pontos internos para a formulação MECID-2. Então, na Figura 26, exibem-se os resultados encontrados:

Figura 26 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR utilizando uma malha de 320 elementos no contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 26, mais uma vez, pode-se perceber que o refinamento da malha de elementos de contorno atua favoravelmente, melhorando o comportamento do erro relativo. Como também esperado, para a formulação MECID-2, percebe-se queda gradativa do erro relativo percentual quando se usou de um número maior de pontos internos. Ainda nessa linha de raciocínio, observa-se que a precisão dessa técnica é melhor para as baixas frequências de excitação, pois, como observado, o erro relativo aumenta para valores mais altos de frequências. Como a MECID-2 é uma iniciativa que se originou da técnica MECID, destaca-se que tal fator justificasse, provavelmente, pelo fato de a matriz de massa gerada por ambas as formulações ser multiplicada por seus quadrados, resultando em uma participação potencialmente maior desta matriz em comparação com as matrizes  $H$  e  $G$  (LOEFFLER et al, 2015a).

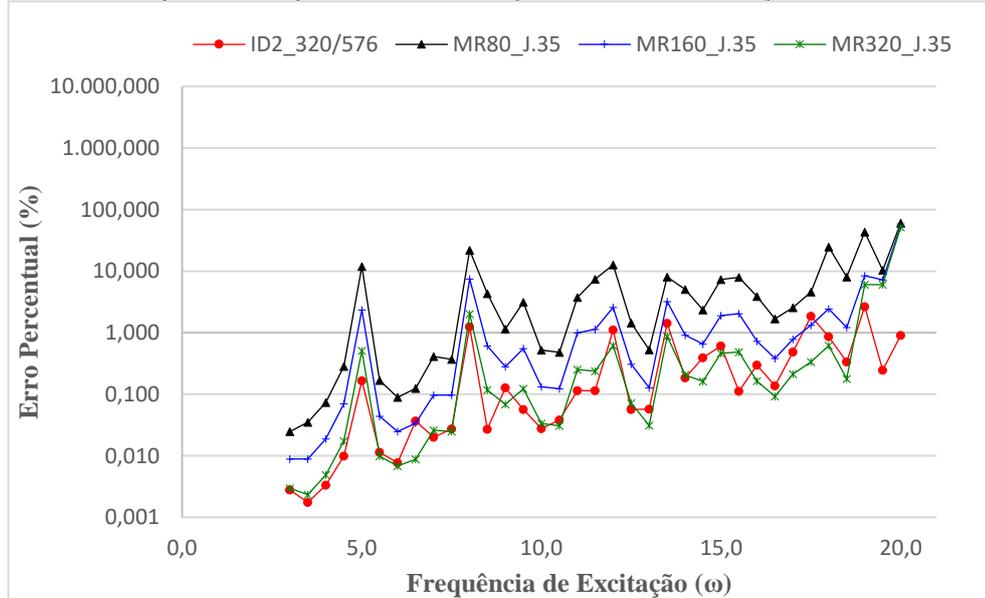
Na Tabela 14, são mostrados os tempos de processamento, em relação à MECID-2 para os resultados obtidos nas Figuras 24, 25 e 26.

Tabela 14 – Análise paramétrica tempo de processamento para cada malha da MECID-2.

<b>Malhas MECID-2</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECID-2 (80/484)	151,29
MECID-2 (160/484)	384,83
MECID-2 (320/324)	522,40
MECID-2 (320/576)	1287,89

Por fim, exibem-se, abaixo, os resultados dos potenciais associado à malha mais refinada para as formulações MECID-2, enquanto para a MECMR, será usado o maior número de primitivas geradas e três discretizações diferentes com 80, 160 e 320 elementos de contorno. O comportamento de ambas as formulações é mostrado na Figura 27 e o tempo de processamento para cada malha na Tabela 15.

Figura 27 – Análise paramétrica para o terceiro exemplo referente à formulação MECID-2 e à MECMR.



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 15 – Análise paramétrica tempo de processamento para cada malha do MEC.

<b>Malhas MEC</b>	<b>Tempo (s)</b>
MECID-2 (320/576)	1287,89
MECMR (80)	314,93
MECMR (160)	1352,53
MECMR (320)	4937,05

Observa-se nos resultados, que a precisão da MECID-2, ao realizar a varredura nas frequências de excitação, foi semelhante à da MECMR, entretanto, existe um custo computacional que não pode ser desprezado. Comparando-se a malha mais refinada da MECID-2 com a malha de 320 elementos no contorno para a formulação MECMR, percebe-se redução de aproximadamente 70% no tempo de processamento da formulação MECID-2. Mais uma vez, a formulação MECID-2 se mostrou precisa de acordo com os resultados obtidos para este terceiro experimento.

## 7 CONCLUSÃO

O desenvolvimento dessa dissertação foi caracterizado pela investigação da formulação do MEC com a recente técnica da Interpolação Direta Autorregularizada (MECID-2) quando comparada com Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade (MECMR) em análise de problemas regidos pela Equação de Helmholtz.

Os exemplos aqui resolvidos possuem geometria regular e têm solução analítica disponível para melhor avaliação da precisão e convergência dos resultados para ambas as formulações. Ambas apresentaram resultados bastante aceitáveis para o propósito da engenharia. Vale ressaltar que por se tratar de uma varredura de frequências de excitações é normal a possibilidade de picos de resposta nos resultados. Isso porque a proximidade entre a frequência natural e a frequência de excitação gera o fenômeno de ressonância acústica. Na detecção da ressonância, a técnica da MECMR aparentou ter maior sensibilidade comparativamente a MECID-2, uma vez que esta mostrou picos de erro maiores nas simulações numéricas.

É preciso destacar que tanto a formulação da MECID-2 quanto a MECMR apresentaram melhor desempenho dos resultados para baixas frequências de excitação e crescimento gradativo do erro relativo para os espectros de frequências maiores, conforme esperado, pois a representação numérica da resposta em altas frequências implica necessariamente uma discretização cada vez mais refinada para que a qualidade dos resultados seja mantida. Nesse contexto, a análise dos resultados para a varredura das maiores frequências (isto é,  $\omega \geq 10$ ), a formulação MECID-2 mostrou melhor precisão nos resultados e custo computacional inferior à técnica da MECMR. Porém, essa comparação não é tão simples de se abordar. No que se refere à análise de ondas estacionárias, o número de graus de liberdade é fator muito importante. Posto isso, a comparação entre ambas as formulações se torna desigual, pois a formulação MECID-2 utiliza-se também da discretização com pontos internos no interior do domínio e, nesse sentido, introduz maior número de graus de liberdade. Já a formulação da MECMR realiza a discretização só no contorno e busca compensar essa ausência de graus de liberdade considerando uma sequência de soluções fundamentais de ordem superior, mas isto não é suficiente para a boa representação de altos modos vibracionais. Convém destacar, que o número de graus de liberdade utilizados foi superior para a MECID-2, no entanto, o custo computacional das primitivas geradas pela MECMR é maior do que o tempo de processamento do sistema matricial de maior ordem da MECID-2.

Assim sendo, por meio dos testes realizados na formulação MECID-2, comprovou-se que a utilização de pontos internos no interior do domínio é um parâmetro importante para desempenho da formulação; todavia, é necessária atenção para algumas categorias de problemas, pois malhas com poucos elementos no contorno e com muitos polos internos podem gerar resposta mal condicionada, devido a problemas de integração. Nesse sentido, a implementação de esquemas de integração adaptativo é bastante importante.

Ainda nessa categoria, é preciso enfatizar que a formulação MECID quando ajustada com a solução auxiliar  $b^*(\xi; X)$ , eliminando definitivamente a necessidade da execução do procedimento de regularização, retornou resultados coerentes em termos de precisão, no intervalo de frequências de excitação analisadas.

Para o caso da formulação MECMR, observou-se que elevado tempo computacional está relacionado diretamente com o número de primitivas geradas. Convém destacar que “primitivas” significam soluções fundamentais de ordem superior. Assim sendo, fixando-se uma malha de elementos no contorno e aumentando o número de primitivas, demanda-se maior tempo de processamento, porém, comprova-se bom desempenho da formulação quando tal procedimento é realizado.

De modo geral, a técnica da MECMR ainda é a alternativa mais simples para superar as dificuldades matemáticas que surgem na aplicação do MEC em problemas nos quais os operadores que caracterizam a equação de governo não são autoadjuntos. No entanto, a técnica MECID-2, por meio de um procedimento de varredura das frequências de excitação (isto é, problemas de respostas), demonstrou possuir flexibilidade e robustez quando utilizada em problemas de Helmholtz. Também convém destacar, para a formulação MECID-2, que os resultados das simulações numéricas expuseram menor custo computacional, o que não pode ser desprezado, e mais precisão.

Finalmente, tendo em vista os parâmetros analisados, em trabalhos futuros, pode-se propor a extensão da formulação MECID-2 para problemas dinâmicos, isto é, casos em que a resposta avança no tempo, além realizar a modelagem matemática para outros tipos de problemas, por exemplo: os de elasticidade.

## REFERÊNCIAS

AKIN, J. E. **Finite Element Analysis with Error Estimators: An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students**. Elsevier, 2005.

ANTONY, J. **Design of Experiments for Engineers and Scientists**. Elsevier Science & Technology Books, 2003.

ASPRAY, W. **From ENIAC to UNIVAC: An appraisal of the Eckert-Mauchly Computers**. By Nancy Stern. Bedford, MA (Digital Press). 1981. x+ 286 pp. Appendix: "First Draft of a Report on the EDVAC" by John von Neumann. Bibliography. *Historia Mathematica*. Vol. 10, no. 2, pp. 228-233, 1983.

BAI, M. R. **Study of Acoustic Resonance in Enclosures Using Eigenanalysis Based on Boundary Element Methods**. *The Journal of the Acoustical Society of America*. Vol. 91, no. 5, pp. 2529-2538, 1992

BALISTA, T. G.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C. **Performance Comparison between the Multiple Reciprocity and Direct Interpolation Boundary Element Method in Problems Governed by the Helmholtz Equation**. In: *Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering | Pan American Congress on Computational Mechanics (PANACM)*. Anais de CILAMCE 2021. Rio de Janeiro: ABMEC, Vol. 3, 2021.

BANKS, H. T.; TRAN, H. T. **Mathematical and Experimental Modeling of Physical and Biological Processes**. CRC Press, 2009.

BARCELOS, H. M., **Comparação de Desempenho entre a formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em Problemas de Poisson e Helmholtz**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ, Y.; ORGAN, D.; FLEMING, M.; KRYSL, P. **Meshless methods: an overview and recent developments**. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. Vol. 139, pp. 3-47, 1996.

BESKOS, D.; MAIER, G. **Boundary Element Advances in Solid Mechanics**. Springer-Verlag Wien GmbH, 2003.

BUHMANN, M. D. **Radial Basis Functions: Theory and Implementations**. Cambridge university press, 2003.

BUTKOV, E. **Física matemática**. Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.

BREBBIA, C. A. **Progress in Boundary Element Methods**. Springer Science+Business Media New York LLC. Ed. C. A. Brebbia. Vol. 2, 1983

BREBBIA, C. A. **Two Different Approaches for Transforming Domain Integrals to the Boundary**. Mathematical and Computer Modelling, Vol. 15, no. 3-5, pp 43-58, 1991.

BREBBIA, C. A.; DOMÍNGUEZ, J. **Boundary Elements an Introductory Course**. 2. ed. Boston, Southampton: Computational Mechanics Publications, 1992.

BREBBIA, C. A.; NOWAK, A. J. **A New Approach for Transforming Domain Integrals to the Boundary, in Numerical Methods in Engineering**, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York. Vol. 1, 1989a.

BREBBIA, C.A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L.C. **Boundary Element Techniques**. First Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary Element Techniques in Engineering**. U.K.: Newnes-Butterworths, 1980.

CHAI, M.; LUO, K.; WANG, H.; ZHENG, S.; FAN, J. **Imposing mixed Dirichlet-Neumann-Robin boundary conditions on irregular domains in a level set/ghost fluid based finite difference framework**. Computers & Fluids. Vol. 214, pp. 104772, 2021.

CRUZ, A. L. **Modelagem Direta de Integrais de Domínio Usando Funções de Base Radial no Contexto do Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2012.

DAN, M. L.; MANSUR, W. J.; PETERS, F. C. **A BEM Based Methodology to Solve Inverse Problems Considering Fictitious Background Media**. Engineering Analysis with Boundary Elements, United Kingdom. Vol. 66, no.1, pp. 109–118, 2016.

GALIMBERTI, R. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Resolver Problemas de Helmholtz Usando Funções de Interpolação de Base Radial sem Regularização**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

GAUL, L.; KÖGL, M.; WAGNER, M. **Boundary element methods for engineers and scientists: an introductory course with advanced topics**. Springer Science & Business Media, 2003.

GONZAGA, B. R. **Solução analítica de um problema bidimensional de propagação de ondas em meio não homogêneo pelo Método de Separação de Variáveis**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

HUGHES, T. J.R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, 1987.

KAMIYA, N.; ANDOH, E. **A Note on Multiple Reciprocity Boundary Element Method: Neglect of Domain Term**. Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 10, pp. 273-275, 1992.

KAMIYA, N.; ANDOH, E. **Helmholtz Eigenvalue Analysis by Boundary Element Method**. Journal of Sound and Vibration. Vol. 160, no. 2, pp. 279-287, 1993.

KAMIYA, N.; ANDOH, E. **Robust Boundary Element Scheme for Helmholtz Eigenvalue Equation**. Boundary Elements XIII. Springer, Dordrecht. Pp. 839-850, 1991.

KAMIYA, N.; ANDOH, E.; NOGAE, K. **Eigenvalue Analysis by the Boundary Element Method: New Developments**. Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 12, pp. 151-162, 1993.

KIRKUP, S. M. **The Boundary Element Method in Acoustics**. Integrated sound software, 1998.

KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics**. 9ª ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.

LEO, C.; ELZEIN, A. **Boundary-Only Formulations for Modeling Contaminant Transport**. Computational Mechanics – New Frontiers for the New Millennium. Elsevier. Pp. 765-770, 2001

LOEFFLER, C. F. **Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (RJ), 1988.

LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M.; MANSUR, W.J.; BULCÃO, A. **Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation**. Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 61, pp. 218-225, 2015a.

LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L.; BULCÃO, A. **Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method**. Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 50, pp. 97-108, 2015b.

LOEFFLER, C. F.; GALIMBERTI, R.; BARCELOS, H. M. **A self-regularized Scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions**. Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 118, pp. 11-19, 2020a.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W.J. **A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem**. Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 74, pp. 14-18, 2017.

LOEFFLER, C. F.; PEREIRA, P. V. M.; LARA, L. O. C.; MANSUR, W. J. **Comparison between the formulation of the boundary element method that uses fundamental solution dependent of frequency and the direct radial basis boundary element formulation for solution of Helmholtz problems**. Vol. 79, pp. 81-87, 2017.

LOEFFLER, C. F.; SERAFIM, L. D. B.; PINHEIRO, V. P. **Uma comparação Preliminar entre os Métodos de Interpolação Direta e Dupla Reciprocidade na Solução de Onda**

**Acústica em Duas Dimensões.** In: Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Anais de CILAMCE 2020. Foz do Iguaçu, Paraná: ABMEC, Vol. 41, 2020b.

LOEFFLER, C. F.; SIRTOLI, L. H.; LARA, L. O. C. **Solução do Problema de Autovalor Associado à Formulação Autorregularizada do MEC com Interpolação Direta.** XI Encontro Científico de Física Aplicada. Blucher Proceedings. 2020c.

LONG, M. **Architectural acoustics.** Elsevier Inc. All rights reserved, 2006.

MITCHELL, A. R.; GRIFFITHS, D. F. **The Finite Difference Method in Partial Differential Equations.** John Wiley, 1980.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. **A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements,** in Boundary Element Methods in Engineering, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer Verlag, Berlin and New York, 1983.

NEVES, A. C.; BREBBIA, C. A. **The multiple reciprocity boundary method element method in elasticity: a new approach for transforming domain integrals to the boundary.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 31, pp. 709-727, 1991.

NOWAK, A. J. **The Multiple Reciprocity Method of Solving Transient Heat Conduction Problems,** in Boundary Elements XI, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York. Vol. 2, 1989.

NOWAK, A. J.; BREBBIA, C. A. **Numerical verification of the multiple reciprocity method for linear potential problems with body forces.** Engineering analysis with boundary elements. Vol. 10, no. 3, pp. 259-266, 1992.

NOWAK, A. J.; BREBBIA, C. A. **The Multiple Reciprocity Method: A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary.** Engineering analysis with boundary elements. Vol. 6, no.3, pp. 164-167, 1989b.

NOWAK, A. J.; PARTRIDGE, P. W. **Comparison of the Dual Reciprocity and the Multiple Reciprocity Methods.** Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 10, pp. 155-160, 1992.

PARTRIDGE, P.W.; BREBBIA, C.A.; WROBEL, L.C. **The Dual Reciprocity Boundary Element Method.** Computational Mechanics Publications, Southampton 1992.

PEREIRA, P. V. M. **Comparação entre duas formulações do Método dos Elementos de Contorno: a que faz Integração Direta e a que usa Solução Fundamental Dependente da Frequência em Problemas Bidimensionais Governados pela Equação de Helmholtz.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

STEWART, J. **Cálculo: Volume 2.** 6ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

TANG, W. **Transforming Domain in to Boundary Integrals in BEM.** A Generalized Approach, Lecture Notes in Engineering, ed. C.A. Brebbia & S.A. Orszag, Springer-Verlag, 1988.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computacional Fluid Dynamics: The Finite Volume Method.** [S.I.]: Pearson Education, 2007.

WANG, X.; LU, C.; ANG, W. T. **Modeling of PCF with multiple reciprocity boundary element method.** Optics Express. Vol. 12, no. 5, pp. 961-966, 2004.

WROBEL, L. C; BREBBIA, C. A. **The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Nonlinear Diffusion Problems.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 65, pp 147-164, 1987.

## APÊNDICE A – Encontrando a função primitiva $\Psi^j(X^j; X)$

O vigente apêndice apresenta um breve desenvolvimento da função primitiva  $\Psi^j(X^j; X)$  que foi usada como ferramenta para a manipulação matemática quando aplicada a técnica da Integração Direta Autorregularizada. Diante disso, considerando a relação entre  $F^j(X^j; X)$  e  $\Psi^j(X^j; X)$ , tem-se:

$$F^j(X^j; X) = \Psi_{,ii}^j(X^j; X) \quad (\text{A.1})$$

Como a equação (A.1) é um conjunto de funções radiais, é fundamental definir o Laplaciano para coordenadas polares. Então, o sistema pode ser analisado como se segue na equação (A.2):

$$F^j(X^j; X) = \frac{\partial^2 \Psi^j(X^j; X)}{\partial r^2} + \frac{\partial \Psi^j(X^j; X)}{r \partial r} + \frac{\partial \Psi^j(X^j; X)}{r^2 \partial \theta} \quad (\text{A.2})$$

O termo que comporta a variação angular da equação (A.2) pode ser anulado, isso pelo motivo da função primitiva  $\Psi^j$  não depender de  $\theta$ , assim:

$$rF^j(X^j; X) = \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d\Psi^j(X^j; X)}{dr} \right] \quad (\text{A.3})$$

Uma vez conhecida a solução da equação (A.3), é plausível encontrar a função primitiva  $\Psi^j(X^j; X)$  correspondente à função radial de placa fina. Então, substituindo a equação (4.16) na expressão (A.3) chega-se à equação (A.4):

$$r^3(X^j; X) \ln r(X^j; X) = \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d\Psi^j(X^j; X)}{dr} \right] \quad (\text{A.4})$$

Logo, tem-se que:

$$\int r^3(X^j; X) \ln r(X^j; X) dr = r \frac{d\Psi^j(X^j; X)}{dr} \quad (\text{A.5})$$

Com o propósito de alcançar a expressão desejada, é possível integrar a equação (A.5), como resultado, tem-se a equação (A.6):

$$\frac{d\Psi^j(X^j; X)}{dr} = \frac{4r^4 \ln r}{16r} - \frac{r^4}{16} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.6})$$

Conforme pode ser visto na equação (A.6) e levando em consideração que a função primitiva  $\Psi$  pode ser definida como uma função mais simples, conclui-se que  $A = 0$ . Nesse contexto, eliminado os termos que não apresentam influência, chega-se à equação (A.7), que corresponde à primitiva para a função de placa fina.

$$\Psi^j(X^j; X) = \frac{r^4 \ln[r(X^j; X)]}{16} - \frac{r^4(X^j; X)}{32} \quad (\text{A.7})$$

## APÊNDICE B – Encontrando a função $\eta^j(X^j; X)$

Este apêndice apresenta de forma detalhada o desenvolvimento da função  $\eta^j(X^j; X)$  que foi utilizada como uma expressão do termo de contorno. Assim sendo, sabe-se que:

$$\eta^j(X^j; X) = \Psi_{,i}^j(X^j; X)\eta_i(X) \quad (\text{B.1})$$

Nesse caso, será considerada uma região bidimensional. Portanto, aplicando a regra da cadeia, a equação (B.1) pode ser reescrita como na equação (B.2):

$$\eta^j(X^j; X) = \frac{d\Psi^j}{dr} \left( \frac{dr}{dx_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{dr}{dx_2} \frac{dx_2}{dn} \right) \quad (\text{B.2})$$

O processo de discretização desse sistema aborda o conceito relacionado ao raio vetor. Por conveniência este é exposto abaixo de acordo com a equação (B.3):

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} \quad (\text{B.3})$$

Utilizando o argumento da equação (B.3) e trabalhando algebricamente na equação (B.2), a equação (B.4) pode ser escrita em função das derivadas desse raio vetor com relação às coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente:

$$\frac{dr}{dx_1} = [2(x_1 - x'_1)] \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{dr}{dx_2} = [2(x_2 - x'_2)] \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} \right] \quad (\text{B.5})$$

Nesse contexto, após as manipulações matemáticas, sabe-se que:

$$\frac{dr}{dx_i} = \frac{r_i}{r} \quad (\text{B.6})$$

Assim, a equação (B.7) pode ser definida de forma conveniente ao conceito abordado na equação (B.6), em que  $\left(\frac{r_1}{r} \text{ e } \frac{r_2}{r}\right)$  são os componentes normalizados do raio vetor.

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{r_1}{r}; \quad \frac{dr}{dx_2} = \frac{r_2}{r} \quad (\text{B.7})$$

Logo, aplica-se a propriedade correspondente à equação (B.7) sob a expressão (B.2), assim:

$$\eta^j(X^j; X) = \frac{d\Psi^j}{dr} \left( \frac{r_1}{r} \frac{dx_1}{dn} + \frac{r_2}{r} \frac{dx_2}{dn} \right) \quad (\text{B.8})$$

Na equação (B.8), os componentes normalizados  $\left(\frac{dx_1}{dn} \text{ e } \frac{dx_2}{dn}\right)$  constituem o vetor normal na região do contorno. Por essa razão, a equação (B.8) fica reescrita como na equação (B.9):

$$\eta^j(X^j; X) = \frac{d\Psi^j(X^j; X)}{dr} \frac{r_i \eta_i}{r(X^j; X)} \quad (\text{B.9})$$

Por conveniência, repete-se a equação (A.7) que corresponde à primitiva da função de interpolação, assim:

$$\Psi^j(X^j; X) = \frac{r^4 \ln[r(X^j; X)]}{16} - \frac{r^4(X^j; X)}{32} \quad (\text{B.10})$$

Trabalhando algebricamente na equação (B.10), encontra-se:

$$\frac{d\Psi^j(X^j; X)}{dx_i} = \left[ \frac{4r^3(X^j; X) \ln(r(X^j; X))}{16} + \frac{r^4(X^j; X)}{16r} \right] \frac{r_i}{r} - \frac{4r^3(X^j; X) r_i}{32r} \quad (\text{B.11})$$

Reorganizando os termos da equação (B.11), chega-se à equação (B.12):

$$\frac{d\Psi^j(X^j; X)}{dx_i} = \left[ \frac{r^2(X^j; X) \ln(r(X^j; X))}{4} + \frac{r^2(X^j; X)}{16} \right] r_i - \frac{2r^2(X^j; X)}{16} r_i \quad (\text{B.12})$$

Assim sendo, manipulando matematicamente a expressão (B.12), encontra-se o resultado da função  $\eta^j(X^j; X)$ , podendo ser posta tal como na equação (B.13):

$$\eta^j(X^j; X) = \left[ \frac{r^2(X^j; X) \ln(r(X^j; X))}{4} - \frac{r^2(X^j; X)}{16} \right] r_i \eta_i \quad (\text{B.13})$$

## APÊNDICE C – Encontrando as primitivas correspondentes à técnica da MECMR

O capítulo 5 apresentou, de maneira sintética, o desenvolvimento recorrente da MECMR governada pela equação de Helmholtz. É conveniente repetir a equação (5.3) referente à TDMR, uma vez que se pode expor de forma aprofundada a manipulação matemática desse capítulo.

$$TDMR = \lambda \int_{\Omega} u(X) u_0^*(\xi; X) d\Omega \quad (C.1)$$

Sequencialmente, é necessário abordar os conceitos apresentados pela equação (5.4), sendo também repetidos aqui por conveniência:

$$\nabla^2 u_{j+1}^* = u_j^*, \quad q_j^* = \left( \frac{\partial u_j^*}{\partial n} \right), \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (C.2)$$

Utilizando-se então da equação (C.1), e inserindo-a no argumento da equação (C.2), chega-se à equação (C.3):

$$\nabla^2 u_1^* = u_0^* \quad (C.3)$$

Substituindo então a expressão de tratamento da equação (C.3), na equação (C.1), a primeira primitiva relacionada ao tensor de Galerkin é dada por:

$$TDMR = \lambda \int_{\Omega} u(X) \nabla^2 u_1^*(\xi; X) d\Omega \quad (C.4)$$

Repare que a estrutura matemática relacionada à equação (C.4) permite trabalhar algebricamente utilizando a teoria clássica atribuída pelo MEC. Então, aplicando pela primeira vez a integração por partes na TDMR, obtém-se a equação (C.5):

$$TDMR = \lambda \int_{\Omega} [u(X) u_{1,i}^*(\xi; X)]_{,i} d\Omega - \lambda \int_{\Omega} u_{,i}(X) u_{1,i}^*(\xi; X) d\Omega \quad (C.5)$$

Integrando, novamente por partes, a integral de domínio presente no segundo termo da equação (C.5), chega-se à equação (C.6):

$$TDMR = \lambda \int_{\Omega} [u(X)u_{1,i}^*(\xi; X)]_{,i} d\Omega - \lambda \int_{\Omega} [u_{,i}(X)u_1^*(\xi; X)]_{,i} + \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X)u_1^*(\xi; X)d\Omega \quad (C.6)$$

O desenvolvimento da TDMR para a formulação da MECMR continua com a execução do Teorema da Divergência na equação (C.6). Então, ela pode ser reescrita como na equação (C.7):

$$TDMR = \lambda \int_{\Gamma} u(X)u_{1,i}^*(\xi; X)\eta_i(X)d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} u_{,i}(X)\eta_i(X)u_1^*(\xi; X)d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X)u_1^*(\xi; X)d\Omega \quad (C.7)$$

Note-se, na equação (C.7), que um dos termos integrais ainda está no domínio. Então, sua estrutura permite empregar o argumento exemplificado no capítulo 2 (ver equação (2.9)) na Equação de Helmholtz. Por conveniência, repete-se o mesmo na equação (C.8):

$$\nabla^2 u(X) = -\lambda u(X) \quad (C.8)$$

Assim sendo, considerando o fundamento da equação (C.8) e substituindo-o no termo de domínio na equação (C.7), tem-se:

$$TDMR = \lambda \int_{\Gamma} u(X)u_{1,i}^*(\xi; X)\eta_i(X)d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} u_{,i}(X)\eta_i(X)u_1^*(\xi; X)d\Gamma - \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)u_1^*(\xi; X)d\Omega \quad (C.9)$$

Como mencionado no capítulo 5 dessa dissertação, o processo de discretização da MECMR adota estrategicamente uma sequência de soluções fundamentais de ordem superior em termos de uma primitiva. Portanto, utilizando-se dessa definição, substitui-se o último termo integral de domínio na equação (C.9), na expressão (C.2), assim:

$$TDMR = \lambda \int_{\Gamma} u(X) u_{1,i}^*(\xi; X) \eta_i(X) d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} u_{,i}(X) \eta_i(X) u_1^*(\xi; X) d\Gamma - \lambda^2 \int_{\Omega} u(X) \nabla^2 u_2^*(\xi; X) d\Omega \quad (C.10)$$

Da mesma forma como foi realizado no capítulo 3, aplica-se a propriedade correspondente das equações (3.9) e (3.10). O procedimento pode ser visualizado como na equação (C.11):

$$TDMR = \lambda \int_{\Gamma} u(X) q_1^*(\xi; X) d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} q(X) u_1^*(\xi; X) d\Gamma - \lambda^2 \int_{\Omega} u(X) \nabla^2 u_2^*(\xi; X) d\Omega \quad (C.11)$$

Note na equação (C.11), que sua estrutura revela um termo integral que ainda está no domínio. Assim sendo, usando a técnica da MECMR, o termo integral de domínio é transformado em uma série de integrais no contorno. Novamente, esse termo de domínio, aqui denominado de TSPG, será isolado (ver equação C.12)).

$$TSPG = -\lambda^2 \int_{\Omega} u(X) \nabla^2 u_2^*(\xi; X) d\Omega \quad (C.12)$$

Na equação (C.12), observa-se, analogamente, que o desenvolvimento do TSPG pode ser trabalhado com o uso da integração por partes duas vezes, sequencialmente, via Teorema da Divergência, é possível transpor essa integral de domínio para o contorno. Portanto, agora, essa integral pode ser escrita como na equação (C.13):

$$TSPG = -\lambda^2 \int_{\Gamma} u(X) q_2^*(\xi; X) d\Gamma + \lambda^2 \int_{\Gamma} q(X) u_2^*(\xi; X) d\Gamma + \lambda^3 \int_{\Omega} u(X) \nabla^2 u_3^*(\xi; X) d\Omega \quad (C.13)$$

Finalizando, o procedimento realizado  $N$  vezes, converte-se na equação (5.6) explicitada no capítulo 5.

## APÊNDICE D – Análise do termo integral de domínio da formulação MECMR

Este apêndice, segundo os pesquisadores Kamiya e Andoh (1991), apresenta o motivo pelo qual a integral de domínio é negligenciada na formulação da Múltipla Reciprocidade (MECMR). Assim sendo, presume-se que o domínio  $\Omega$  da equação (5.6) seja limitado, portanto, a distância Euclidiana  $r(\xi; X)$  bem como a constante  $\lambda$  são finitas. Nesse contexto, a integral de domínio que aparece nessa equação, apresenta-se como na equação (D.1):

$$TIN = (-1)(\lambda)^{N+1} \int_{\Omega} u(X)u_N^*(\xi; X)d\Omega \quad (D.1)$$

Então, o valor absoluto da equação (D.1), torna-se:

$$TIN = \left| (-1)(\lambda)^{N+1} \int_{\Omega} u(X)u_N^*(\xi; X)d\Omega \right| \leq (\lambda)^{N+1} |u(X)|_{max} |u_N^*(\xi; X)|_{max} \int_{\Omega} d\Omega \quad (D.2)$$

A solução fundamental de ordem superior, para problemas bidimensionais, já foi apresentada na equação (5.8), sendo repetida aqui, por conveniência, na equação (D.3):

$$u_n^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} r^{2n}(\xi; X) \frac{1}{4^n (n!)^2} \{ \ln[r(\xi; X)] - S_n \} \quad (D.3)$$

A título de informação, nesse momento, cabe admitir a quantidade de  $j$  por meio do argumento da expressão (D.4):

$$j = (\lambda)^{n+1} |u_n^*|_{max} \geq 0 \quad (D.4)$$

Assim sendo, para um  $N$  suficientemente grande, tem-se:

$$|\ln[r(\xi; X)] - S_n| = S_n - \ln[r(\xi; X)] \quad (D.5)$$

Em razão das expressões (D.4) e (D.5), a equação (D.3) é reescrita como na equação (D.6):

$$j = \frac{r^{2n}(\xi; X) (\lambda)^{n+1}}{2\pi 4^n (n!)^2} \{S_n - \ln[r(\xi; X)]\} \quad (\text{D.6})$$

Da equação (5.11), após a implementação dos devidos algebrismos, percebe-se que para  $n \geq 1$ , o valor do coeficiente  $S_n$  pode ser operado conforme a igualdade mostrada na equação (D.8):

$$S_n = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} < \int_1^n 1 + \frac{1}{l} dl \quad (\text{D.7})$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln(n) + 1 \quad (\text{D.8})$$

Então, utilizando-se do argumento definido na equação (D.9) e considerando-se a igualdade entre logaritmos, encontra-se a expressão (D.10):

$$\ln(n!) > \int_1^n \ln(x) dx = \ln\left(\frac{n^n e}{e^n}\right) \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{e} \left(\frac{e}{n}\right)^n \quad (\text{D.10})$$

Reunindo-se as expressões (D.8) e (D.10), na equação (D.6), chega-se à equação (D.11) depois de realizar alguns procedimentos matemáticos.

$$j = \frac{r^2(\xi; X)(\lambda)^4}{8\pi} \left[ \frac{\left(\frac{r(\xi; X)\lambda e}{2}\right)^{n-1}}{(n)^{n-1}} \right]^2 \left\{ \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{\ln[r(\xi; X)]}{n^2} \right\} \quad (\text{D.11})$$

Assim sendo, nesse desenvolvimento, pode-se considerar que:

$$A = \frac{r(\xi; X)\lambda e}{2}; \quad B = \left(\frac{A}{n}\right)^{n-1}; \quad C = \left\{ \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{\ln[r(\xi; X)]}{n^2} \right\} \quad (\text{D.12})$$

A constante  $B$ , na equação (D.12), pode ser operada, considerando-se a identidade logarítmica da equação (D.13):

$$\ln(B) = A \frac{\ln\left(\frac{A}{n}\right)}{\left(\frac{A}{n-1}\right)} \quad (\text{D.13})$$

Nessa parte do estudo, utiliza-se o conceito de limite para verificar o comportamento das constantes mostradas na equação (D.12). Assim sendo, aplicam-se os valores limites como sendo  $n \rightarrow \infty$ . Com isso, decorre que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{n-1}\right) = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{A}{n}\right) = -\infty \quad (\text{D.15})$$

I. Quanto ao limite de  $B$ , tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [B] = 0 \quad (\text{D.16})$$

II. Quanto ao limite de  $C$ , tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [C] = 0 \quad (\text{D.17})$$

Por consequência, na equação (D.11), tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [j] = 0 \quad (\text{D.18})$$

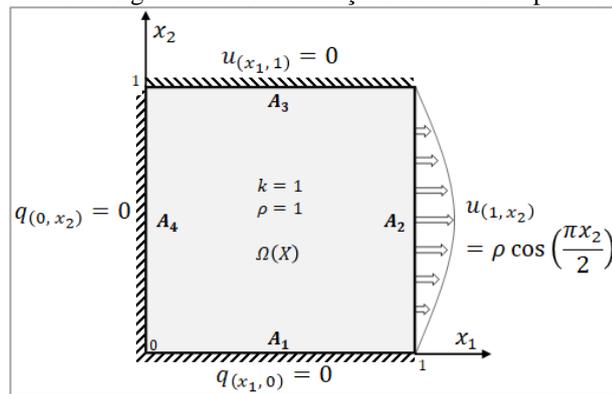
Finalmente, encontra-se o valor do termo integral de domínio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [TIN] = 0 \quad (\text{D.19})$$

## APÊNDICE E – Solução analítica do terceiro exemplo

Este apêndice apresenta, de forma minuciosa, a solução analítica do terceiro exemplo, que corresponde a um problema com domínio bidimensional retangular de dimensões  $0 \leq x_1 \leq 1$  e  $0 \leq x_2 \leq 1$ . Por conveniência, na Figura 28, repetem-se as características geométricas e condições de contorno aplicadas ao experimento.

Figura 28 – Características geométricas e condições de contorno para o terceiro exemplo.



Fonte: Produção do próprio autor.

A equação de governo, que descreve o terceiro exemplo, já foi apresentada na equação (6.6), sendo repetida aqui também por conveniência:

$$k^2 \left[ \frac{\partial u(x_1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u(x_2)}{\partial x_2^2} \right] = -\omega^2 u(x_1, x_2) \quad (\text{E.1})$$

A condição de contorno imposta nesse terceiro exemplo, consiste em condição de Dirichlet prescrita nas arestas  $A_2$  e  $A_3$  do domínio e, nas arestas  $A_1$  e  $A_4$  do domínio, condição de Neumann prescrita. Esse argumento pode ser visualizado de acordo com a equação (E.2):

$$\begin{cases} q(x_1, 0) = 0 \\ u(1, x_2) = \rho \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \\ u(x_1, 1) = 0 \\ q(0, x_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

Por meio do Método de Separação de Variáveis, pode-se escrever  $u(X) = u(x_1, x_2)$  como na equação (E.3):

$$u(x_1, x_2) = X_n(x_1)Y_m(x_2) \quad (\text{E.3})$$

Assim, assumindo as variáveis  $k$  e  $\rho$  como unitários, tem-se:

$$\frac{X_n''(x_1)}{X_n(x_1)} = -\frac{Y_m''(x_2)}{Y_m(x_2)} = \omega_{nm}^2 \quad (\text{E.4})$$

Diante da expectativa de comportamento do problema, toma-se  $\omega_{nm}^2$  como valor positivo. Esse é uma constante de separação, que pode ser substituída pela soma de outras duas constantes, da forma:

$$\omega_{nm}^2 = \alpha_{nm}^2 + \beta_{nm}^2 \quad (\text{E.5})$$

As soluções para as coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  são fornecidas na forma de uma EDO de segunda ordem, conforme visto nas equações (E.6) e (E.7):

$$X_n(x_1) = A_n \cos(\alpha_n x_1) + B_n \sin(\alpha_n x_1) \quad (\text{E.6})$$

$$Y_m(x_2) = C_m \cos(\beta_m x_2) + D_m \sin(\beta_m x_2) \quad (\text{E.7})$$

Nessa parte do estudo, aplicam-se as condições de contorno presentes na equação (E.2), na expressão (E.3). Dessa forma, decorre que:

I. Quanto ao contorno  $q(x_1, 0) = 0$ , tem-se:

$$Y_m'(0) = -\beta_m C_m \sin[\beta_m(0)] + \beta_m D_m \cos[\beta_m(0)] \quad (\text{E.8})$$

$$D_m = 0 \quad (\text{E.9})$$

II. Quanto ao contorno  $u(x_1, 1) = 0$ , tem-se:

$$Y_m(0) = C_m \cos[\beta_m(1)] + 0 \sin(\beta_m(1)) \quad (\text{E.10})$$

Assim, para evitar uma solução trivial, a constante  $C_m$  não pode ser nula, então:

$$C_m \neq 0 \quad (\text{E.11})$$

Por consequência, para que a equação (E.10) seja verdadeira, é válido deduzir o valor da constante  $\beta_m$  de acordo com o argumento da equação (E.12):

$$\beta_m = \frac{m\pi}{2L} \quad (\text{E.12})$$

Então, considera-se o valor da variável  $L$  como unitário. Assim sendo, substituindo a equação (E.12), na equação (E.10), a equação (E.7) pode ser escrita como na equação (E.13):

$$Y_m(x_2) = C_m \cos\left(\frac{m\pi}{2} x_2\right) \quad (\text{E.13})$$

III. Quanto ao contorno  $q(0, x_2) = 0$ , tem-se:

$$X_n(0) = -\alpha_n A_n \sin[\alpha_n(0)] + \alpha_n B_n \cos[\alpha_n(0)] \quad (\text{E.14})$$

$$B_n = 0 \quad (\text{E.15})$$

IV. Quanto a última condição de contorno, em que  $u(1, x_2) = \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} x_2\right)$ , tem-se:

$$A_n \cos[\alpha_n(1)] \left[ C_m \cos\left(\frac{m\pi}{2} x_2\right) \right] = \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} x_2\right) \quad (\text{E.16})$$

E, nesse exemplo, é permitido considerar que:

$$E_{nm} = A_n(C_m) \quad (\text{E.17})$$

Logo, substituindo a equação (E.17), na expressão (E.16), chega-se à equação (E.18):

$$\rho \cos\left(\frac{\pi}{2} x_2\right) = E_{nm} \cos(\alpha_n) \cos\left(\frac{m\pi}{2} x_2\right) \quad (\text{E.18})$$

Pode-se então representar de maneira sucinta a equação (E.18) por meio de uma expansão do sistema para ordem  $n$  (isto é,  $n = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Nesse contexto, encontra-se a equação (E.19):

$$\begin{aligned} \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} x_2\right) = & E_{1m} \cos(\alpha_n) \cos\left(\frac{m\pi}{2} x_2\right) + E_{2m} \cos(\alpha_n) \cos\left(\frac{m\pi}{2} x_2\right) \\ & + E_{3m} \cos(\alpha_n) \cos\left(\frac{m\pi}{2} x_2\right) + \dots + E_{nm} \cos(\alpha_n) \cos\left(\frac{m\pi}{2} x_2\right) \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Por inspeção, é plausível declarar que a variável  $m$  não interfere no sistema, ou seja,  $m = 1$ , necessariamente. Rearranjando a equação (E.19), chega-se à equação (E.20):

$$E_n = \frac{\rho}{\cos(\alpha_n)} \quad (\text{E.20})$$

Finalmente, ao substituir todas as condições de contorno na equação (E.3), obtém-se a solução final do terceiro exemplo conforme a equação (E.21):

$$u(x_1, x_2) = \frac{\rho}{\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)} \cos\left(x_1 \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} x_2\right) \quad (\text{E.21})$$