



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

VICTOR ELIAS ROSA MOSCON DE MATOS

**MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO A ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS LAMINARES TRANSIENTES BIDIMENSIONAIS**

Vitória

2021

VICTOR ELIAS ROSA MOSCON DE MATOS

**MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO A ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS LAMINARES TRANSIENTES BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

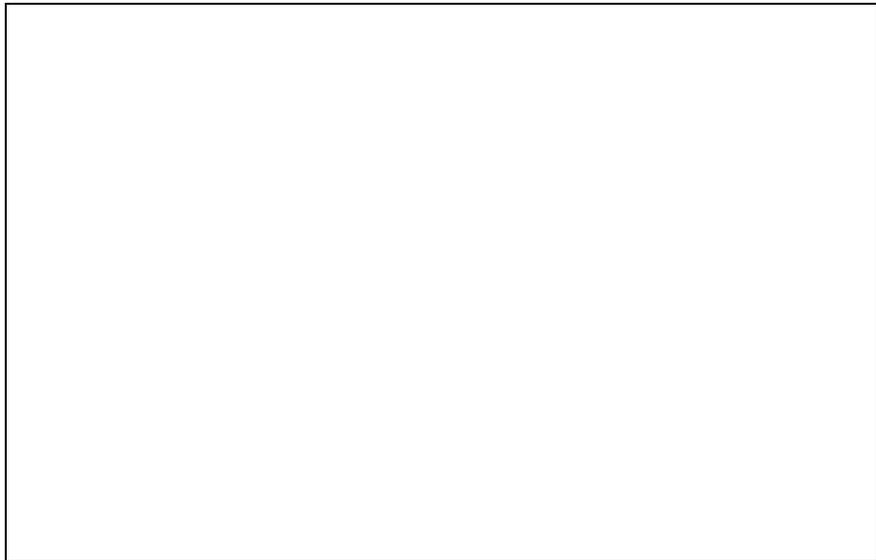
Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Ciência e Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz

Vitória

2021

[FICHA CATALOGRÁFICA]



VICTOR ELIAS ROSA MOSCON DE MATOS

**MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA APLICADO A ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS LAMINARES TRANSIENTES BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Ciência e Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz

Aprovado em: _____.

Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Juan Sergio Romero Saenz
Orientador

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara

Vitória
2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus o dom da vida.

Aos meus pais, Patricia Cristina Rosa e Elias José Moscon Ferreira de Matos, e aos meus irmãos, Elisa, Henrique e Daniel, por todo o incentivo e palavras positivas, sempre me fazendo acreditar que alcançar esse objetivo era possível.

À minha companheira Paula Gomes, por toda a confiança que um dia eu alcançaria esse mérito.

Aos amigos que construí na minha jornada, em especial aos colegas da Vale, por todo o apoio necessário para que eu pudesse alcançar esse objetivo.

Aos meus professores, por todo o conhecimento transmitido, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Juan Sergio Romero Saenz, que sempre esteve disposto a me orientar, de uma maneira excepcional.

*“Para nós os grandes homens não são
aqueles que resolveram os problemas, mas
aqueles que os descobriram”.*

(Albert Schweitzer)

RESUMO

Desde antes do início da atividade industrial no mundo, as máquinas de fluxo desempenham um papel importante para o desenvolvimento da humanidade. A importância do estudo e o conhecimento dos fenômenos do escoamento de fluídos são fundamentais para o desenvolvimento de novas tecnologias no ramo da engenharia e da medicina. Este trabalho visa implementar a otimização topológica em escoamentos transientes laminares bidimensionais. Primeiramente, são calculadas todas as condições do escoamento e suas variações no tempo a partir da equação de Navier-Stokes, e o método de elementos finitos é implementado para a aproximação das equações diferenciais. Então, é iniciado o processo de otimização topológica, utilizando-se como objetivo a minimização da perda de carga em um domínio predefinido, em que é empregado um modelo de material em meio poroso; um método baseado no gradiente da função objetivo é utilizado para a definição da análise de sensibilidade. O conceito de permeabilidade é visto ao longo do desenvolvimento, no qual cada elemento é interpolado entre fluído e sólido em um processo iterativo, de modo que em cada atualização o objetivo de redução da perda de energia ao longo de um canal é otimizado, em que o resultado final desse processo é a geometria ótima para o problema proposto.

Palavras-chave: Otimização topológica. Escoamento transiente. Dinâmica dos fluídos computacional.

ABSTRACT

Since before the beginning of industrial activity in the world, flow machines have played an important role in the development of humanity. The importance of the study and knowledge of fluid flow phenomena is essential for the development of new technologies in the fields of engineering and medicine. This work aims to implement topological optimization in two-dimensional transient laminar flows. First, all flow conditions and their variations over time are calculated from the Navier-Stokes equation, the finite element method is implemented to approximate the differential equations. Then, the topological optimization process is started, using as objective the minimization of the head loss in a predefined domain, where a medium-porous material model is used, a method based on the objective function gradient is used to define the sensitivity analysis. The concept of permeability is seen throughout development, where each element is interpolated between fluid and solid in an iterative process, so that each update the objective of reducing energy loss along a channel is optimized, where the final result of this process is the optimal geometry for the proposed problem.

Keywords: Topological optimization, transient flow, computational fluid dynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Otimização de forma e topológica de um canal; (a) Condição inicial; (b) Otimização de forma; (c) Otimização topológica.....	15
Figura 2 – Transformação entre os sistemas de referência global e local utilizando funções de forma.....	22
Figura 3 – Tipos de processos de otimização.....	28
Figura 4 – Procedimento de otimização.....	31
Figura 5 – Domínio Fixo Estendido.....	32
Figura 6 – Aplicação de diferentes valores de penalização aplicadas à permeabilidade inversa.....	34
Figura 7 – Frações de volume: (a) $V=0,25$; (b) $V=0,4$; (c) $V=0,6$; (d) $V=0,7$	36
Figura 8 – Curva de aproximação convexa pelo Método das Assíntotas Móveis.....	38
Figura 9 – Fluxograma de implementação da otimização topológica.....	45
Figura 10 – Exemplificação da distribuição de material no domínio ao longo do processo iterativo.....	47
Figura 11 – Domínio fixo e condições de contorno para o difusor.....	49
Figura 12 – Relação entre a velocidade máxima de entrada e os passos de tempo.....	50
Figura 13 – Topologia otimizada do difusor considerando o escoamento transiente.....	51
Figura 14 – Resultado na análise do MEF para a geometria ótima; a) Velocidade; b) Pressão.....	51
Figura 15 – Relação objetivo e volume em cada iteração do processo de otimização.....	52
Figura 16 – Geometrias ótimas para o problema do difusor, sendo a) e b) designs obtidos considerando escoamento transiente e c) fluxo permanente.....	53
Figura 17 – Primeiro exemplo de escoamento com 1 entrada e 2 saídas.....	54
Figura 18 – Segundo exemplo de escoamento com 1 entrada e 2 saídas.....	54
Figura 19 – Taxas de entrada e saídas de velocidades em função do tempo.....	55
Figura 20 – a) e c) Geometrias ótimas obtidas pelo autor; b) e d) Geometria ótima apresentada por Deng <i>et al.</i> (2011).....	56

Figura 21 – a) e b) Campos de velocidade para os exemplos de dispositivo de 1 entrada e 2 saídas de velocidades; c) e d) Campos de pressões para os exemplos	57
Figura 22 – Domínio fixo para o exemplo de escoamento de 1 entrada e 1 saída com valores de número de Reynolds variáveis	57
Figura 23 – Geometria ótima no exemplo considerando o número de Reynolds variável, em que representa os resultados obtidos por Deng <i>et al.</i> (2011) e b) os resultados obtidos pelo autor	58
Figura 24 – Modelo simplificado de <i>bypass</i> arterial	60
Figura 25 – Domínio fixo <i>bypass</i> arterial	61
Figura 26 – a) Geometria ótima para o <i>bypass</i> arterial; b) Campo de velocidades para o tempo 0,04s; c) Campo de pressões para o tempo 0,04s	62
Figura 27 – Relação entre volume e objetivo em cada iteração do processo de otimização....	63
Figura 28 – a) Técnica de união arterial <i>St Mary's boot</i> ; b) Técnica de união arterial Taylor Patch; c) Técnica de união arterial <i>Miller Cuff</i>	64
Figura 29 – Domínio fixo e condições de contorno <i>bypass</i> considerando o bloqueio parcial .	65
Figura 30 – Resultado de geometria ótima e perfis de velocidade para os casos: a) Caso 1; b) Caso 2; c) Caso 3; d) Caso 4.....	66
Figura 31 – Para o instante de tempo 1s: a) Resultado do campo de velocidades para os casos analítico e numérico; b) Resultado do campo de pressões para os casos analítico e numérico	76
Figura 32 – a) Resultado de velocidade u_1 em função do tempo; b) Resultado de velocidade u_2 em função do tempo.....	78
Figura 33 – a) Erro relativo para as velocidades u_1 em função do tempo; b) Erro relativo para as velocidades u_2 em função do tempo	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros MAM.....	48
Tabela 2 – Parâmetros adimensionais – Exemplos MOT transientes	50
Tabela 3 – Valores da otimização para o exemplo de variação de número de Reynolds	59
Tabela 4 – Casos de entrada de velocidades máximas.....	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DFC	Dinâmica dos Fluidos Computacional
MEF	Método dos Elementos Finitos
MAM	Método das Assíntotas Móveis
MOT	Método de Otimização Topológica
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i> (Material Isotrópico Sólido com Penalização)

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Densidade
μ	Viscosidade dinâmica
∂	Derivada parcial
d	Derivada
t	Tempo
∇	Operador Nabla
σ	Tensor de tensões de Cauchy
T	Tensor de tensões
f	Força
u	Velocidade
p	Pressão
E	Gradiente simétrico
α	Variável de projeto
Ψ	Função de interpolação de pressão do MEF
χ	Função de interpolação de pressão do MEF
x	Coordenada cartesiana
y	Coordenada cartesiana
ξ	Coordenada paramétrica
η	Coordenada paramétrica
φ_i	Função de forma
Δt	Variação do tempo
Z	Objetivo
M	Matriz de massa
R	Vetor resíduo
z	Vetor velocidades e pressões
C	Propriedade característica relacionada ao modelo <i>SIMP</i>
C_0	Propriedade característica do material analisado
q	Coefficiente de penalização
V	Volume total
V_f	Fração de volume fluido
Ω	Domínio

Γ	Função objetivo transiente
U	Termo de restrição superior
L	Termo de restrição inferior
R_{dyn}	Vetor resíduo dinâmico
Tr	Número de etapas-tempos analisados no escoamento transiente
λ	Termo adjunto
Re	Número de Reynolds
k	Vetor teste do método de elementos finitos
b	Escalar teste do método de elementos finitos
s	Segundos
φ	Função objetivo
Φ	Função objetivo forma discreta
t_0	Tempo inicial
T_f	Tempo final
γ	Fator de interpolação escoamento transiente
t_n	Instante de tempo analisado
W	Função peso
κ	Permeabilidade inversa
C_j	Matriz coeficiente do termo difusivo
K_i	Matriz de rigidez
Q_i	Matriz divergente
F_i	Vetor de forças externas
K_κ	Matriz de absorção
J	Matriz jacobiana
C^n	Matriz de inércia
D^n	Matriz jacobiana com dependência do tempo
Δs	Tamanho do passo de otimização
n	Número de graus de liberdade para velocidade
m	Número de graus de liberdade para pressão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	15
1.2	OBJETIVOS	16
1.3	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO	17
2.1	EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES	17
2.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	18
2.2.1	Formulação do problema de escoamento	19
2.2.2	Mapeamento Isoparamétrico	21
2.2.3	Problema Transiente	23
2.2.3.1	<i>Equação parabólica</i>	23
2.2.3.2	<i>Aplicação na equação de Navier-Stokes</i>	24
2.2.3.3	<i>Método de Newton</i>	26
2.2	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	27
2.3.1	Métodos de Otimização	27
2.3.2	Projeto Otimizado	30
2.3.3	Domínio Fixo Estendido	31
2.3.4	Modelo de Material	32
2.3.5	Penalização	33
2.3.6	Restrições	35
2.3.7	Método das Assíntotas Móveis	36
2.3.8	Formulação MOT para Escoamento	38
2.3.8.1	<i>Função objetivo</i>	39
2.3.9	Análise de Sensibilidade	40
3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	44
4	RESULTADOS	48
4.1	RESULTADO OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	48
4.1.1	Difusor	48
4.1.2	Dispositivos multissaídas	53
4.1.3	Variação no Número de Reynolds	57
4.1.4	Bypass Arterial	59
4.1.4.1	<i>Fluxo com restrição total</i>	61
4.1.4.2	<i>Fluxo com restrição parcial</i>	63
5	CONCLUSÃO	68
5.1	TRABALHOS FUTUROS	68
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICE A – Verificação do Método de Elementos Finitos	75

1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento acelerado de computadores de alto desempenho aliado à maturidade da metodologia computacional, surgiu a necessidade generalizada de utilizar a Dinâmica dos Flúidos Computacional (DFC) em uma gama significativa de aplicações de engenharia relativas à análise de fluxo em torno de aeronaves, veículos automotores, área medicinal, simulações de fluxos por meio térmico, máquinas hidráulicas e diversas outras aplicações. A disponibilidade de códigos DFC e os benefícios de custos resultantes do uso de análise computacional, em vez de conduzir experimentos, deram origem a um intenso interesse acadêmico e industrial no uso de métodos computacionais para o projeto de otimização de componentes aero-hidrodinâmicos.

Uma utilização do DFC na engenharia é no processo de otimização em geometrias, nos problemas de fluxo. O processo de otimização consiste em definir um objetivo, por exemplo, a redução do coeficiente de resistência ao escoamento em um perfil, em que, a partir dessa definição, são calculadas as variáveis de fluxo, utilizando-se uma solução numérica; desse ponto, o processo de otimização é iniciado com o propósito de fornecer o resultado da geometria ótima do campo de escoamento para o objetivo escolhido dentro das condições de fluxo impostas.

Os algoritmos utilizados nos métodos de otimização podem ser classificados ou em algoritmos evolutivos ou algoritmos baseados em métodos determinísticos.

Os algoritmos evolutivos são os mais populares representantes da otimização estocástica, baseada no método de população. Conforme explicado por Davis (1991), esses algoritmos imitam operações de evolução natural, como *crossover* e mutação, e são aplicados em uma grande gama de soluções candidatas ao resultado ótimo, organizadas em gerações, sendo analisadas até uma convergência na qual o objetivo é encontrado.

Segundo Back (1996), os algoritmos evolutivos podem ser calculados utilizando-se metodologias estatísticas, como o princípio de Pareto. Um grande número de soluções candidatas deve ser avaliado antes de selecionar a solução ideal, levando a uma alta gama de casos a serem analisados. O número de avaliações necessárias aumenta com o acréscimo de número de variáveis do projeto que se deseja otimizar.

Por outro lado, conforme demonstrado por Bertsekas (2014), algoritmos de otimização por método determinístico são baseados em uma dada geometria que é otimizada com base em

informações relacionadas com as derivadas da função objetivo sobre as variáveis de projeto (análise de sensibilidade). Desse modo, as variáveis de design não são atualizadas aleatoriamente, mas com base nas direções orientadas pelas sensibilidades computadas, em que cada ciclo do algoritmo produz uma geometria melhorada. Isso dá origem a uma classe de algoritmos que requerem menos avaliações comparadas com os evolutivos. Nesse método, Mohammadi e Pironneau (2010) identificaram que diferentes objetivos podem ser adotados utilizando-se um fator de ponderação, por exemplo, a minimização da perda de carga e a maximização da dissipação térmica em um mesmo campo de escoamento.

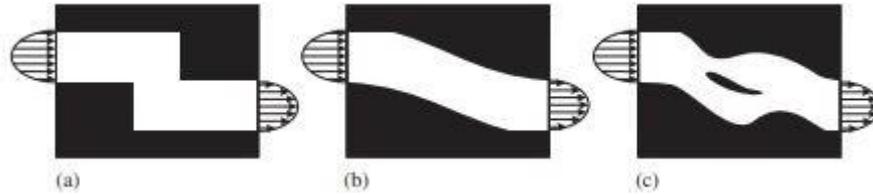
Segundo Papoutsis-Kiachagias e Giannakoglou (2016), exemplos de metodologias de otimização de projetos que utilizam algoritmos por método determinísticos são a otimização de forma e a topológica, sendo o segundo caso o objeto de estudo deste trabalho.

O Método de Otimização Topológica (MOT) já é estudado, há décadas, em diversos campos da engenharia, na mecânica dos sólidos é um tema bem difundido e aplicado. Svanberg (1987) teve uma importância muito relevante nos avanços da técnica, devido à implementação do Método das Assíntotas Móveis (MAM) dentro do universo da mecânica dos sólidos, uma metodologia para a otimização de geometrias baseada em um tipo especial de aproximação convexa.

Referente aos estudos da otimização em escoamentos fluídos, Borrvall e Petersson (2003) foram pioneiros na aplicação de otimização topológica em fluxos, a qual teve como base os conceitos de otimização de forma, propostos anteriormente por Člabuk e Modi (1992) para a redução de perda de pressão, em razão do arrasto em difusores utilizando modelo de fluxo de Stokes em regime permanente.

Ainda no estudo proposto por Borrvall e Petersson (2003), são vistos e comparados os métodos de otimização de forma e de otimização topológica para o fluxo de Stokes, em que para o último tipo de otimização o objetivo é não apenas modificar as formas dos limites, mas também permitir que novos limites apareçam como parte da solução para o problema de otimização, portanto, permitindo uma mudança na conexão da região do fluido – essa diferença pode ser observada na Figura 1.

Figura 1 – Otimização de forma e topológica de um canal; (a) Condição inicial; (b) Otimização de forma; (c) Otimização topológica



Fonte: Kreissl, Pinggen e Maute (2011).

Um conceito de diferenças entre os dois métodos de otimização é visto por Kreissl, Pinggen e Maute (2011), no qual é demonstrado que, para se alcançar uma solução ótima por meio do método de otimização de forma, seria necessário pré-configurar o domínio próximo da solução ideal, entretanto, para o método de otimização topológica é utilizado um domínio inicial completamente fluido ou sólido, não sendo necessário antecipar o resultado ótimo.

Uma característica do método proposto por Borrvall e Petersson (2003) é a utilização de um modelo material fictício, em que as porosidades de cada elemento são tratadas como variáveis de projeto; logo, esse modelo é adotado nos trabalhos posteriores envolvendo outros tipos de escoamentos.

O estudo de otimização de geometrias em escoamentos transientes foi iniciado por Choi *et al.* (2008), por meio de um trabalho de otimização de forma no design de rotor de helicóptero, com auxílio de um método adjunto e análise espectral de tempo.

Posteriormente, Kreissl (2011) abordou o conceito de otimização topológica nos escoamentos transientes em diversos casos previamente abordados por Borrvall e Petersson (2003) para escoamentos permanentes, nos quais é utilizado um sistema de penalização proposto por Brinkman (1949), que impõe velocidade zero em materiais sólidos.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Conforme identificado por Kreissl (2011), há poucos estudos publicados no contexto da aplicação do método de otimização topológica para escoamentos transientes, formando uma grande lacuna no desenvolvimento da técnica para grande parte dos problemas de escoamento vistos no campo da engenharia.

Na medicina, por exemplo, conforme proposto por Nørgaard, Sigmund e Lazarov (2016), o método de otimização topológica pode ser utilizado em sistemas de *bypass* sanguíneo, promovendo melhor qualidade de vida e eliminação de complicações pós-cirúrgicas decorrentes de fenômenos de recirculação e criação de zonas de estagnação, pois esses sintomas possuem influência da geometria do canal.

A vantagem de se utilizar o MOT é a característica do domínio fixo estendido, em que não é necessário propor uma geometria inicial, sendo possível, assim, obter resultados satisfatórios em uma grande gama de problemas da engenharia pela inclusão e retirada do material nos elementos do domínio.

1.2 OBJETIVOS

Esta dissertação tem como objetivo implementar o método de otimização topológica em escoamentos transientes laminares incompressíveis bidimensionais, discretizado por meio do MEF. Para isso, foi feito o estudo da formulação do MEF para escoamentos transientes e do método de otimização topológica.

Os resultados das topologias foram comparados com a literatura para a validação do método desenvolvido, sendo propostos, posteriormente, resultados ótimos de problemas utilizando o método de otimização topológica implementado.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Além da introdução, esta dissertação é composta por outros quatro capítulos:

- Capítulo 2 – apresenta os aspectos relativos ao conteúdo teórico relevante para o trabalho;
- Capítulo 3 – traz o método de implementação utilizado;
- Capítulo 4 – expõe os resultados obtidos do método proposto; e
- Capítulo 5 – apresenta as considerações finais da dissertação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

São observados escoamentos transientes em um grande número de problemas na mecânica dos fluídos, variando de fenômenos naturais até aplicações de engenharia, por exemplo, as aeronaves militares e civis que estão contando com motores cada vez mais potentes; como consequência, o ruído resultante se tornou um incômodo importante, o qual a ciência está continuamente tentando reduzir. Uma importante parte desse ruído não se origina do próprio motor, mas da interação instável entre o jato de exaustão e o meio ambiente. Portanto, compreender a natureza e as características dos escoamentos instáveis é de grande interesse para a ciência e a engenharia (BENEDDINE, 2017).

Com os avanços tecnológicos em CFD é possível realizar estudos aprofundados em torno dos fluxos instáveis, pois esses requerem grande poder computacional para a análise. Seguindo o mesmo viés, é vista uma grande oportunidade de avanço nos estudos em torno do método de otimização topológica em estruturas e escoamentos, devido às novas tecnologias de fabricação de componentes, pois atualmente são fornecidas soluções de manufatura para topologias complexas, provenientes de avanços tecnológicos.

Segundo Tsega e Katiyar (2018), o método dos elementos finitos (MEF) se tornou uma das ferramentas de engenharia mais importantes e úteis para engenheiros e cientistas, nas últimas décadas. O método dos elementos finitos é considerado uma ferramenta muito poderosa e eficiente na solução de equações diferenciais parciais. Buscar a solução exata de algumas aplicações de engenharia, como problemas de fluxo de escoamentos, ainda é uma tarefa desafiadora a ser superada, porém, as aproximações resultantes do MEF descrevem os fenômenos avaliados de forma assertiva.

2.1 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

De acordo com White e Corfield (2006), o movimento de fluídos pode ser descrito pela equação de Navier-Stokes, identificada na Equação 2.1. A conservação de massa combinada com o escoamento incompressível, quando ρ é uma constante, resulta na continuidade representada na Equação 2.2.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

Em que \mathbf{u} é o campo velocidade, ρ é a densidade mássica, \mathbf{f} são as forças exercidas sobre o corpo e σ é o tensor de tensão de Cauchy, o qual é definido pela Equação 2.3.

$$\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) - p\mathbf{I} \quad (2.3)$$

Em que \mathbf{I} denota o tensor identidade, p é a representação da pressão, μ é a viscosidade dinâmica e $\epsilon(\mathbf{u})$ é o gradiente simétrico de velocidade representado pela Equação 2.4.

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (2.4)$$

Segundo Borrvall e Petersson (2003), o método de otimização topológica distribui regiões sólidas e fluídas ao longo do domínio, o que torna necessário modelar o comportamento de ambos os materiais. O modelo de material baseado na porosidade é utilizado para simular regiões sólidas, impondo restrições de escoamento. O fluxo por meio das regiões porosas é descrito pela lei de Darcy, representada pela Equação 2.5.

$$\kappa \mathbf{u} = \nabla p - \mathbf{f} \quad (2.5)$$

De acordo com Borrvall e Petersson (2003), o parâmetro κ é a permeabilidade inversa, a qual possui a função de diferenciar áreas de alta e baixa permeabilidade, fluídas e sólidas, respectivamente.

A equação de Brinkman é obtida introduzindo o termo de porosidade da Equação 2.5 na equação de Navier-Stokes, conforme demonstra a Equação 2.6.

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{f} - \kappa \mathbf{u} \quad (2.6)$$

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No método de elementos finitos, o domínio de interesse é subdividido em pequenos subdomínios chamados elementos finitos. Sobre cada elemento, a variável desconhecida é aproximada por uma combinação linear de aplicações de aproximação chamadas de funções de

forma, as quais estão associadas aos nós que caracterizam o elemento. Os resultados das aproximações para elementos são montados em um único conjunto, a fim de obter-se um sistema global para o todo domínio.

2.2.1 Formulação do problema de escoamento

Para a solução da equação de Navier-Stokes devem ser utilizados métodos numéricos, devido à dificuldade de solução analítica das equações diferenciais parciais presentes. O método de elementos finitos pode ser implementado para achar a solução aproximada das equações de Navier-Stokes. Esse método tem como um dos seus pontos fortes a utilização em geometrias complexas, nas quais outros métodos possuem maior custo computacional na implementação.

O primeiro passo para a implementação do método dos elementos finitos é obter a formulação fraca das equações diferenciais do problema. As equações diferenciais parciais são multiplicadas por uma função teste, em que o resultado é integrado sobre um domínio Ω .

O método Galerkin é o mais usual dos baseados em resíduos ponderados. Dentro do universo de problemas instáveis, Frýba (2013) utilizou esse método para problemas de carga móveis variáveis no tempo; Cockburn e Shu (1998) realizaram o estudo desse método para análises de sistemas de convecção e difusão dependentes do tempo.

Segundo Reddy e Gartling (2010), o método de Galerkin é usado quando as funções de ponderação e os campos desconhecidos são representados pelo mesmo espaço de funções. Assim, a formulação fraca do problema declarado é dada pelas Equações 2.7 e 2.8.

$$\int_{\Omega} \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{k} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{k} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{k} d\Omega \quad (2.7)$$

$$\int_{\Omega} b (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (2.8)$$

Em que \mathbf{k} e b são funções testes, sendo o primeiro vetorial e o outro escalar, respectivamente.

O tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ para um fluido newtoniano é definido pela Equação 2.9.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Por meio da discretização de um modelo contínuo em pontos discretos (nós) do domínio, é utilizado o método de elementos finitos para achar a solução aproximada, pelo problema da formulação fraca. A relação entre a distribuição de velocidade nos dois eixos bidimensionais e a pressão em cada nó dos elementos é identificada pelas Equações 2.10 e 2.11.

$$u_1 \cong \sum_{j=1}^n \psi_j u_j^1 = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{u}_1; u_2 \cong \sum_{j=1}^n \psi_j u_j^2 = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{u}_2 \quad (2.10)$$

$$p \cong \sum_{j=1}^m \chi_j p_j = \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{p} \quad (2.11)$$

Em que \mathbf{u} representa o campo das velocidades bidimensionais e p o das pressões, logo, \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{p} são as soluções aproximadas nos pontos nodais, $\boldsymbol{\Psi}$ e $\boldsymbol{\chi}$ são funções de interpolações de implementação para a velocidade e pressão, respectivamente, n e m são os graus de liberdade para a velocidade e a pressão.

Substituindo os valores das soluções numéricas de velocidade e pressão obtidos por meio das interpolações de elementos na formulação fraca, são obtidas as equações algébricas para o MEF. Conforme identificou Romero e Silva (2014), a equação algébrica global considerando o caso bidimensional é definida pela Equação 2.12, e os coeficientes matriciais pelas Equações 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} & -\mathbf{Q}_2 \\ -\mathbf{Q}_1^T & -\mathbf{Q}_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Sendo os coeficientes definidos das matrizes:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \phi_j \phi_i d\Omega \quad (2.13)$$

$$\mathbf{K}_\kappa = \int_{\Omega} \kappa \Psi \Psi^T dx \quad (2.14)$$

$$\mathbf{C}_j(\mathbf{u}_j) = \int_{\Omega} \rho_0 \Psi (\Psi^T \mathbf{u}_j) \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx \quad (2.15)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dx \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Q}_i = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \chi^T dx \quad (2.17)$$

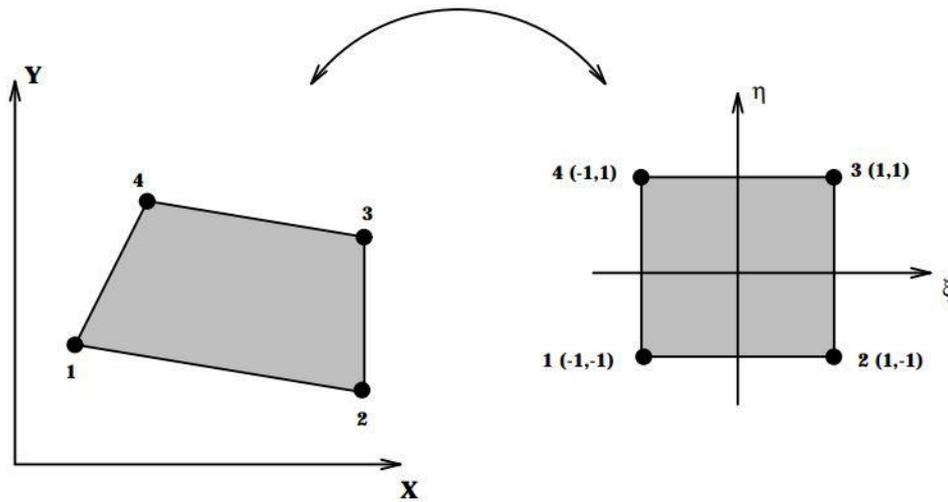
$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega} \Psi f_i dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.18)$$

Em que \mathbf{M} é a matriz de massa; \mathbf{K}_κ é a matriz de absorção; \mathbf{C}_j é a matriz coeficiente do termo convectivo; \mathbf{K}_{ij} é a matriz de rigidez; \mathbf{Q} é a matriz divergente; \mathbf{F}_i o vetor de forças externas por unidade de massa; os valores de $\dot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\mathbf{p}}$ são os referentes às variações de velocidade e pressão no tempo.

2.2.2 Mapeamento Isoparamétrico

Dado um domínio discretizado em elementos quadrangulares, procura-se achar uma transformação de coordenadas que leve o elemento quadrático (x, y) em um elemento quadrado biunitário (ξ, η) . Geralmente, o elemento finito possui uma forma distorcida no sistema global e deseja-se obter uma transformação para um sistema local no qual os lados do elemento permaneçam retos, como apresenta a Figura 2. Essa transformação está baseada nas funções de forma (BITTENCOURT, 2007).

Figura 2 – Transformação entre os sistemas de referência global e local utilizando funções de forma



Fonte: Bittencourt (2007).

Em que $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$. As funções de transformação são representadas nas Equações 2.19.

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i \phi_i(\xi, \eta) \\ y &= \sum_{i=1}^n y_i \phi_i(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Em que x_i e y_i são as coordenadas dos nós dos elementos, as funções ϕ_i são elementos lagrangianos, $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$ e $\phi_i = 1$ no nó i e 0 em todos os outros nós.

Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), no caso das velocidades as funções de base biquadráticas podem ser representadas pelas Equações 2.20.

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta - 1) \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta - 1) \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta + 1) \\ \phi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta + 1) \\ \phi_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta - 1) \\ \phi_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2) \\ \phi_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1) \\ \phi_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2) \\ \phi_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Para o caso da pressão, essa é aproximada com funções lineares, as quais são determinadas pelas Equações 2.21:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \chi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \chi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \chi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

2.2.3 Problema Transiente

Segundo Fortuna (2000), os problemas transientes são compostos pela variação temporal de grandezas físicas, em que são iniciados a partir de valores de grandezas em um certo tempo t_0 . São calculados pela solução numérica das equações diferenciais parciais novos valores das grandezas nos intervalos de tempo Δt até alcançar o instante final t_f , conforme a Equação 2.22.

$$t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t, \dots, t_f - \Delta t, t_f \quad (2.22)$$

Ainda de acordo com Fortuna (2000), os fenômenos transientes são modelados por equações diferenciais parabólicas ou hiperbólicas. Quando apresentam mecanismo de dissipação de energia, por exemplo, escoamento de fluidos, são utilizadas equações parabólicas para descrever os fenômenos dissipativos.

2.2.3.1 Equação parabólica

De acordo com Reddy e Gartling (2010), para o caso de escoamento de Stokes o problema parabólico é dado na forma representada pela Equação 2.23.

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.23)$$

O problema de valor inicial consiste em achar a função $u = u(t)$ que satisfaz a Equação 2.23 e a condição inicial $u(t = 0) = u_0$.

As formas discretas utilizadas para a solução desses tipos de problemas são representadas pelas Equações 2.24, 2.25 e 2.26.

$$M\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + K\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n+\gamma} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}_{n+\gamma} = (1 - \gamma)\mathbf{u}_n + \gamma\dot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.26)$$

Em que \mathbf{u}_n e $\dot{\mathbf{u}}_n$ são as aproximações discretas para $u(t)$ e $\dot{u}(t)$; o valor de γ é o parâmetro de interpolação que assume o valor no intervalo entre 0 e 1. Os parâmetros de interpolação podem assumir os seguintes valores:

0: Diferença a frente de Euler, condicionalmente estável $O(\Delta t)$

$\frac{1}{2}$: Crank – Nicholson incondicionalmente estável $O(\Delta t^2)$

$\frac{2}{3}$: Método de Galerkin incondicionalmente estável $O(\Delta t^2)$

1: Diferença atrás de Euler, incondicionalmente estável $O(\Delta t)$

A derivada no tempo da variável \mathbf{u} pode ser aproximada conforme representada pelas Equações 2.27 e 2.28.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \dot{\mathbf{u}}_{n+\gamma} \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+\gamma} = (1 - \gamma)\dot{\mathbf{u}}_n + \gamma\dot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad \text{para} \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (2.28)$$

Sendo $t = t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t$ e $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

2.2.3.2 Aplicação na equação de Navier-Stokes

A implementação das equações de Navier-Stokes, a partir do método de elementos finitos para o problema transiente, foi analisada por Thomée (2007), em que foi verificada a aplicação do método dos resíduos na equação da quantidade de movimento linear, assim, tem-se a Equação 2.29.

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \phi_i d\Omega + \left\{ \int_{\Omega} \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} \right\} \phi_i d\Omega = 0 \quad (2.29)$$

Ou na forma tensorial da Equação 2.12, representada pela Equação 2.30.

$$\mathbf{M}_z \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (2.30)$$

Os valores de $\mathbf{C}(\mathbf{u})$, \mathbf{K} , \mathbf{Q} e \mathbf{F} são representados pelas Equações 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18, respectivamente, podendo a Equação 2.30 ser representada de maneira mais compacta, conforme a Equação 2.31.

$$\mathbf{M}_z \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{z} = \bar{\mathbf{F}} \quad (2.31)$$

Em que o valor da matriz de massa \mathbf{M}_z é representado na Equação 2.32 e cada componente \mathbf{M} pela Equação 2.13.

$$\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Os valores de \mathbf{M}_z e \mathbf{K} são encontrados pela solução da formulação do método de elementos finitos. O valor de \mathbf{z} é referente às velocidades e pressões em cada elemento do escoamento; a Equação 2.33 representa o valor de \mathbf{z} , em que \mathbf{u} e \mathbf{p} são os valores de velocidade e pressão, respectivamente.

$$\mathbf{z} = [\mathbf{u} \ \mathbf{p}]^t \quad (2.33)$$

Aplicando os tempos t_n e t_{n+1} na Equação 2.31 são obtidas as Equações 2.34 e 2.35.

$$\mathbf{M}_z \dot{\mathbf{z}}_n = \mathbf{F}_n - \mathbf{K}_n \mathbf{z}_n = \mathbf{R}_n \quad (2.34)$$

$$\mathbf{M}_z \dot{\mathbf{z}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \quad (2.35)$$

Sendo a Matriz de Massa \mathbf{M}_z , independentemente do tempo, a aplicação dessas Equações 2.27 e 2.28 na equação de Navier-Stokes é vista da Equação 2.36.

$$\mathbf{M}_z (\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n) = \Delta t_{n+1} \gamma (\mathbf{R}_{n+1}) + \Delta t_{n+1} (1 - \gamma) (\mathbf{R}_n) \quad (2.36)$$

Sendo o novo vetor resíduo gerado na equação 2.36 representado na Equação 2.37.

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{M}_z (\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n) - \Delta t_{n+1} \gamma (\mathbf{R}_{n+1}) - \Delta t_{n+1} (1 - \gamma) (\mathbf{R}_n) \quad (2.37)$$

Em que $\mathbf{u}_{n+1} = \sum_{j=1}^N \phi_j u_{n+1}^j$.

2.2.3.3 Método de Newton

Conforme utilizado por Dhatt, Fomo e Bourque (1981), o método de Newton consiste em resolver problemas não lineares por meio do cálculo de vários incrementos do vetor das incógnitas até que o vetor dos resíduos seja minimizado. Segundo Portella (1984), é chamado de matriz jacobiana ou tangente, a qual é obtida pela discretização da primeira variação da derivada funcional do método dos resíduos ponderados de Galerkin.

Para a solução do sistema não linear resultante de \mathbf{R} , a partir do método de Newton, são identificadas as Equações 2.38 e 2.39.

$$\hat{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{z} = -\hat{\mathbf{R}}_k \quad (2.38)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \Delta \mathbf{z} \quad (2.39)$$

Em que $\hat{\mathbf{J}}$ é a representação da matriz jacobiana ao longo do tempo, identificada pelas Equações 2.40 e 2.41, onde é atribuído o parâmetro de interpolação $\gamma=1$, onde a matriz de massa é independente do tempo.

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_i}{\partial z_{n+1}^j} = \mathbf{M}_z - \Delta t_{n+1} \gamma \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}}{\partial z_{n+1}^j} = \mathbf{M}_z + \Delta t_{n+1} \gamma \mathbf{J} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}}{\partial z_{n+1}^j} = \mathbf{K}_{n+1} + \frac{\partial \mathbf{K}_{n+1}}{\partial \mathbf{z}_{n+1}} \mathbf{z}_{n+1} \quad (2.41)$$

Em que para cada instante de tempo t_{n+1} resolve-se o sistema não linear identificado pela Equação 2.38.

2.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

2.3.1 Métodos de Otimização

Os métodos de otimização são utilizados quando se deseja achar a melhor configuração de um determinado sistema, que terá como resultado a performance máxima para um dado problema, o que resulta, muitas vezes, em um ganho expressivo de custo e/ou parâmetros operacionais de um projeto.

Na mecânica dos sólidos podem ser utilizados métodos de otimização para desenvolver-se, por exemplo, uma geometria ótima de estrutura, com a melhor distribuição de tensões possível; com isso são elaborados projetos de estruturas mais leves, conseqüentemente, com menor custo de manufatura. Um outro exemplo é na mecânica dos fluídos, em que é possível projetar dispositivos com menores perdas de carga, melhores dissipações térmicas, entre outros parâmetros.

Há algumas décadas, os métodos de otimização possuíam como principal ressalva a fabricação dos sistemas otimizados, devido à restrição dos métodos de manufatura para topologias complexas. Com os avanços tecnológicos, são vistos novos processos de fabricação, os quais viabilizam a manufatura e a conseqüente aplicação de diversos sistemas otimizados na indústria.

Existem alguns métodos de otimização na literatura, os quais são utilizados com finalidades diferentes, dentre os quais o mais conhecido e aplicado são a otimização topológica, de forma e paramétrica.

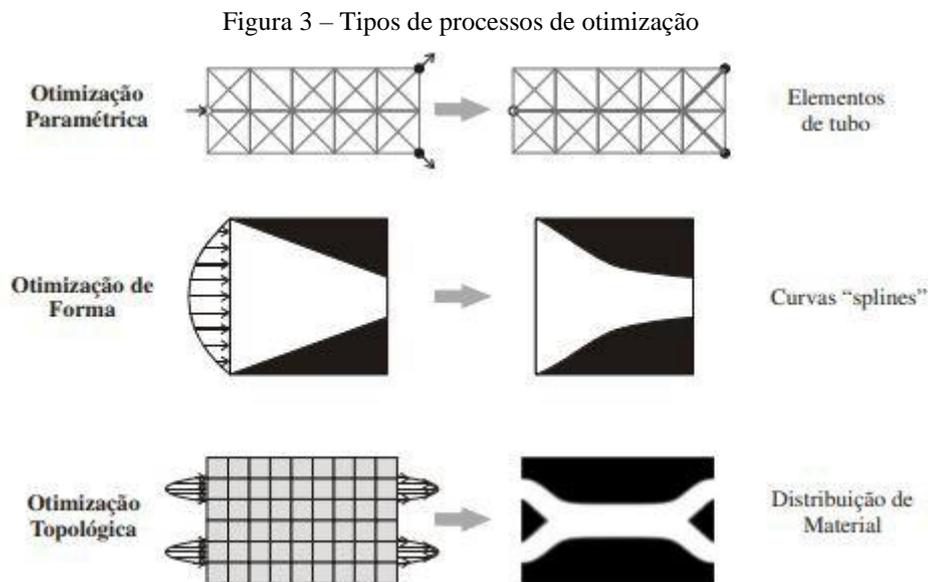
Na otimização paramétrica, é utilizado um modelo básico predeterminado de parâmetros, como geometria e material; os parâmetros são alterados até que convirjam para a otimização do sistema. A capacidade de otimização nesse processo se dá pela quantidade de parâmetros que são analisados e pelo nível de detalhamento do modelo proposto, uma vez que esse método possui restrição quanto à alteração dos contornos do problema analisado.

No método de otimização de forma também é utilizado um modelo com geometria predeterminada, porém, com alguns parâmetros aplicados como variável de projeto, no qual esses são modificados até a otimização. A principal diferença entre a otimização paramétrica e

a otimização de forma é que nessa última os contornos podem ser modificados, porém, ainda de uma maneira limitada. Esse método é adequado para “acabamento” de projetos, sendo ele utilizado em uma topologia já conhecida, pelo qual é feito o refino dos parâmetros até a convergência para o resultado ótimo, sem grandes discrepâncias de geometria quando comparadas ao modelo inicial.

Já na otimização topológica não é utilizada uma geometria inicial, apenas um domínio fixo, que, inicialmente pode ser todo sólido ou fluído, e a otimização é feita por meio da variação de densidade dentro do domínio estudado; logo, a geometria ótima é moldada para o problema específico. Tem-se como principal vantagem desse método a redução da restrição de geometria que é vista nos outros dois processos de otimização, porém, os resultados dos sistemas otimizados a partir do método de otimização topológica podem gerar estruturas complexas e de difícil manufatura.

As diferenças práticas entre os métodos de otimização podem ser observadas na Figura 3.



Fonte: Koga (2010, p. 24).

No método de otimização topológica é utilizada uma função objetivo ou função de custo para alcançar o desempenho máximo de um projeto, visando adquirir determinadas características em sistemas sólidos, fluídos, elétricos, térmicos etc. Algumas das principais características que são vistas como objetivo para o método de otimização topológica são: a maximização da rigidez

em sólidos; o aumento da dissipação térmica; a redução da perda de energia em sistemas fluídos; e o aumento da velocidade em escoamentos.

Um conceito importante do MOT é o domínio fixo estendido, nele há a premissa de um espaço que, inicialmente, é totalmente fluido ou sólido, do qual é retirado ou incluído material em um processo iterativo, que é atualizado por meio de gradientes baseados na função objetivo do processo de otimização.

Geralmente, um parâmetro de limitação da parcela sólida ou fluída é utilizado no processo de otimização, o que faz o procedimento ser mais controlado, e o resultado dentro dos parâmetros estabelecidos.

Outro conceito importante para a compreensão do método é a pseudodensidade, característica que permite que um ponto no domínio não seja necessariamente sólido ou fluído, mas permite o aparecimento de estados entre os dois descritos.

O processo de otimização consiste em variar as densidades nos elementos entre “0” e “1” (fluído e sólido, respectivamente), até se chegar à topologia de máximo desempenho para as características requeridas; é comum que as pseudodensidades assumam valores intermediários entre “0” e “1” durante o processo iterativo. Como esse conceito de estado não tem sentido físico e de engenharia, é aplicado um método de penalização das densidades para tais elementos, forçando os valores intermediários a resultados extremos nas regiões de pseudodensidades intermediárias, também conhecidas como regiões cinzas.

Deve ser empregado um método numérico para a análise dos efeitos formados pela otimização da geometria, que pode ser, por exemplo, o método de elementos finitos, elementos de contorno ou Lattice Boltzmann, conforme aplicado por Nørgaard, Sigmund e Lazarov (2016).

O MEF é um método bastante difundido na aplicação do MOT, o qual foi, inicialmente, aplicado por Bendsøe e Sigmund (1995). A utilização do método de elementos finitos tem como vantagem a adequação ao problema de otimização devido à utilização da mesma malha discretizada para a definição das pseudodensidades.

O estudo de otimização topológica em escoamentos transientes foi iniciado por Kreissl, Pingen e Maute (2011), nos quais o problema de otimização é analisado usando a formulação estabilizada de elemento finito e as correspondentes equações discretizadas adjuntas do método de otimização.

2.3.2 Projeto Otimizado

A utilização da otimização topológica em um projeto consiste na união de um método de análise, um algoritmo de otimização e um objetivo.

Definido o domínio inicial do projeto, o problema é discretizado a partir do método de análise, na qual são definidas as variáveis de projeto em cada elemento do domínio e suas respectivas condições de contorno, regiões de entrada e saída de fluido ou velocidades prescritas.

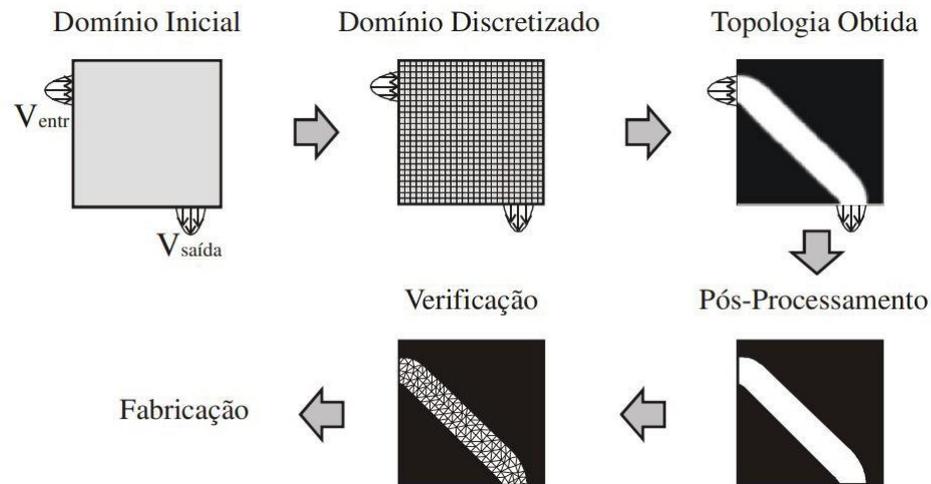
Uma característica da otimização topológica em escoamentos fluídos é que a variável de projeto a ser utilizada é a pseudodensidade, a qual é compreendida como a característica responsável por definir o tipo de material que está sendo empregado em cada elemento, sólido ou fluído.

O processo de otimização é iniciado com o cálculo das variáveis de estado (pressão, temperatura, velocidade) por meio do método de análise, com isso é mensurada a performance da topologia visando a um objetivo predeterminado. A partir do cálculo dos gradientes do objetivo em relação às variáveis de projeto é possível verificar em quais direções devem ser modificadas as pseudodensidades para otimizar a topologia. Esse processo é iterativo e é realizado até que seja convergida a solução ótima da topologia do problema avaliado.

Depois de ser definida a solução ótima, é novamente analisada a topologia utilizando-se o método de análise para a verificação da topologia e a realização de mudanças para possibilitar a manufatura da estrutura encontrada, também conhecida como pós-processamento.

A Figura 4 mostra o procedimento da otimização topológica em um projeto.

Figura 4 – Procedimento de otimização



Fonte: Koga (2010, p. 27).

2.3.3 Domínio Fixo Estendido

Para a realização da otimização topológica é conceituado um domínio fixo estendido de projeto (Ω), ou seja, os limites da região na qual a otimização é realizada. Nessa região, será acrescentado ou retirado material conforme indicado pelos gradientes de otimização. É importante destacar que a solução ótima (Ω_d), a priori, é desconhecida.

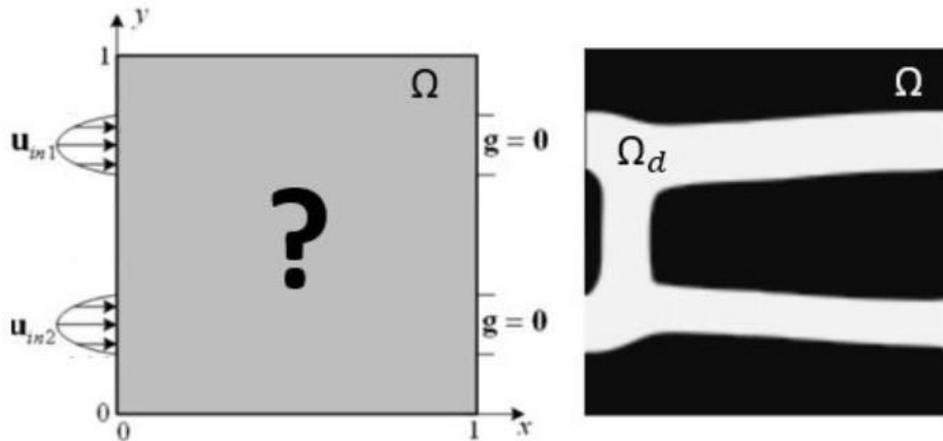
Segundo Bendsøe (1989) há duas grandes vantagens em utilizar o domínio fixo estendido:

- A região ótima (Ω_d) será encontrada dentro do domínio fixo (Ω).
- Não é necessário adaptar a malha de projeto ao longo das interações.

Ou seja, é realizada apenas uma discretização inicial na região em que será utilizado o método de análise, e essa mesma malha é mantida fixa ao longo de toda a otimização, o algoritmo apenas modifica a distribuição de material e não a malha do problema.

O conceito de domínio fixo estendido por ser identificado na Figura 5.

Figura 5 – Domínio Fixo Estendido



Fonte: Adaptado de Deng *et al.* (2011).

2.3.4 Modelo de Material

No processo de otimização, um conceito básico a ser utilizado é o modelo de material. É importante para um problema de otimização um modelo contínuo, bem-posto, que permita obter uma solução única. O problema discreto (0 e 1, ou fluído e sólido) nem sempre é possível e tem como característica não possuir solução única, apresentando uma dependência da discretização do problema, ou seja, para cada discretização haverá uma solução diferente.

A fim de contornar esse evento indesejado, é utilizado o modelo de material, que define o tipo de material a ser utilizado na otimização e como ocorre uma transição contínua entre suas propriedades, isto é, como os materiais são formados em cada ponto. Ou seja, a partir da distribuição de material é possível obter-se a geometria ótima.

O modelo de densidades proposto por Bendsøe (1989), também conhecido como *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)*, permite alterar uma propriedade do material em um determinado ponto, de acordo com a variação contínua da densidade nessa região, por meio de uma relação proposta na Equação 2.42.

$$C(x) = \kappa(\alpha)C_0 \quad (2.42)$$

Em que $C(x)$ e C_0 estão relacionadas às propriedades efetivas do material, considerando-se a pseudodensidade e a propriedade base, respectivamente.

A partir da ideia de modelo de material é possível verificar que as propriedades de cada

elemento estão diretamente relacionadas a sua pseudodensidade.

Para o problema fluído, é importante destacar que o conceito de modelo material é utilizado a fim de anular a velocidade do escoamento em contato com as paredes das superfícies e controlar a permeabilidade nos elementos fluídos.

Borrvall e Petersson (2003) utilizam o conceito de escoamento de Couette completamente desenvolvido para definir o modelo de material entre duas placas planas, com o perfil de velocidade parabólica entre elas. É, então, obtido um modelo bidimensional simplificado devido à característica desse tipo de escoamento baseado no fluxo de Stokes, no qual a distância entre as placas é muito menor que o comprimento característico. Esse conceito é aplicado para controlar a passagem do fluxo entre as placas, o modelo material é aplicado para restringir ou aumentar a passagem de fluxo entres paredes com uma distância qualquer entre elas.

2.3.5 Penalização

É desejado que o resultado final do problema de otimização seja constituído de regiões sólidas ou vazias (fluidas), porém, a solução utilizando os algoritmos de otimização apresenta diversos valores com pseudodensidades intermediárias entre fluído e sólido, ou seja, regiões “porosas”, também conhecidas como regiões cinzas, o que não é factível do ponto de vista de manufatura.

Uma forma de contornar o problema apresentado é penalizar as pseudodensidades intermediárias, forçando-as a assumir valores extremos de 0 ou 1. Em contrapartida, ao forçar as pseudodensidades para valores extremos, numericamente pode haver uma “degradação” da solução ótima, no sentido de que uma transição mais gradativa e contínua da solução poderia apresentar melhor desempenho quando comparada à solução penalizada, porém, é necessário tal intervenção para realizar um projeto factível do ponto de vista de engenharia.

No modelo SIMP, proposto por Bendsøe (1989), é utilizada a Equação 2.43 para evitar as regiões cinzas, na qual q representa o coeficiente de penalização.

$$C(x) = \kappa(\alpha)^q C_0 \quad (2.43)$$

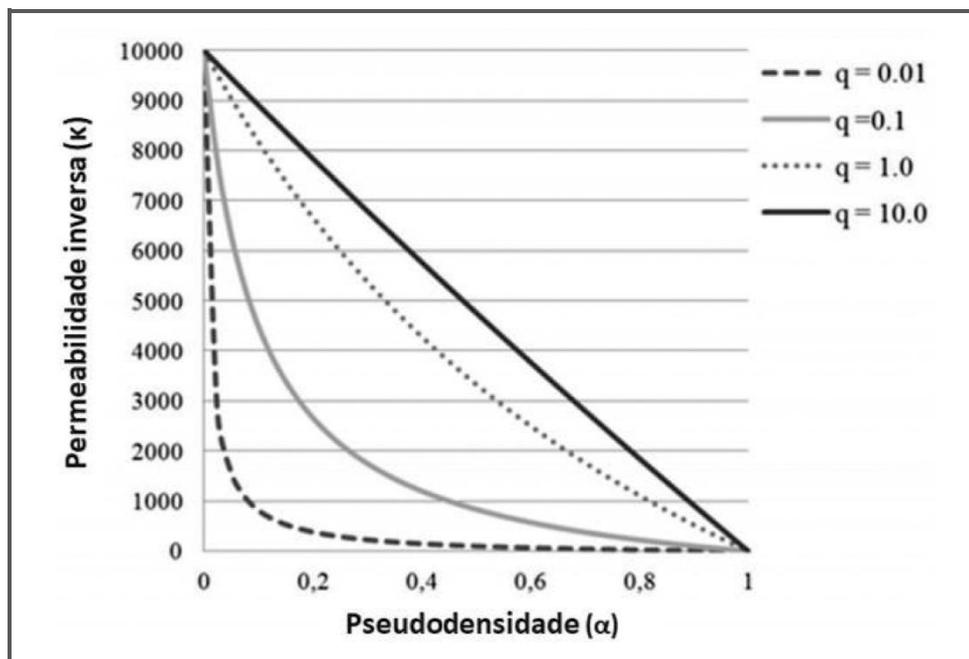
Para o problema fluído, o modelo de material adotado foi apresentado por Borrvall e Petersson (2003), no qual é aplicada a relaxação permitindo a variação contínua das variáveis de projeto

no domínio ($0 \leq \alpha(x) \leq 1$), levando à variação na permeabilidade de cada elemento; consequentemente, a velocidade do escoamento em cada elemento é alterado, obtendo-se as diferenças entre um material sólido e fluido. Nesse caso, a penalidade é baseada na relação entre a pseudodensidade α e a permeabilidade inversa κ dada na Equação 2.44:

$$\kappa(\alpha) = \kappa_{max} + (\kappa_{min} - \kappa_{max})\alpha \frac{1+q}{\alpha+q} \quad (2.44)$$

Como pode ser visto na Figura 6, valores baixos do coeficiente de penalização formam um “degrau” nos resultados das variáveis de projeto, o que gera problemas característicos de uma aproximação discreta, devido à otimização excessiva, isto é, quanto maior o valor do termo de penalização, mais regiões cinzas aparecem na solução ótima; por outro lado, valores baixos de q fazem com que a solução não convirja para os resultados ótimos, em razão das grandes modificações que são empregadas nas propriedades dos elementos em cada iteração do processo.

Figura 6 – Aplicação de diferentes valores de penalização aplicadas à permeabilidade inversa



Fonte: Adaptado de Olason e Tidman (2010).

Conforme conceito demonstrado por Angot, Bruneau e Fabrie (1999) para o modelo Brinkman, a permeabilidade inversa é compreendida como a resistência ao escoamento do meio poroso, ou seja, quanto maior o valor de κ , menor será o fluxo por meio desse ponto e vice-versa, constituindo, assim, um escoamento somente por dissipações viscosas nos limites dos

contornos. Nos pontos com valores de pseudodensidades $\alpha \simeq 0$, compreendida como material sólido, os valores de permeabilidade inversa são muito altos, de modo que quando a pseudodensidade assume valores próximos a 1 o κ se torna desprezível, dessa maneira, o conceito de escoamento de Stokes puro pode ser empregado. De forma resumida, a aplicação do conceito de modelo Brinkman no processo de otimização topológica está na adoção de velocidades nulas em regiões sólidas, enquanto as regiões fluídas são modeladas por meio da formulação do escoamento de Stokes.

Uma importante aplicação do modelo Brinkman está na possibilidade de inclusão de “obstáculos virtuais” e de reprodução dos conceitos de velocidade de interface com as paredes sólidas do domínio fixo estendido, em que esses obstáculos são mantidos constantes no processo de otimização e interferem no resultado final. Por exemplo, a criação de regiões sólidas fixas no centro de canais sem que seja necessário impor condições de contorno extras, tornando mais versáteis a mudança do domínio de projeto e a emulação de obstáculos.

2.3.6 Restrições

O principal tipo de restrição imposta no método de otimização topológica é a limitação do material utilizado no projeto, no qual é definida a fração máxima de volume que pode ser utilizada. A fração de volume é uma variável que controla a quantidade de material que vai estar presente na solução final em relação ao domínio fixo inicial.

A restrição de material possui uma grande importância para a área de mecânica dos sólidos, devido à utilização do método de otimização para maximizar a rigidez de uma estrutura, obtendo-se, assim, menores pesos, o que contribui para a redução significativa de custo de um projeto.

Na área da mecânica dos fluídos, a restrição de material é importante para a comparação entre soluções ótimas com diferentes frações de material; assim, é selecionada a melhor solução para o projeto proposto, dentro das soluções de diferentes quantidades de materiais. Outro fator importante para a utilização dessa restrição é a comparação dos resultados com a literatura, com a finalidade de validação do método em diferentes frações de volume.

A equação básica de representação da restrição de fração de material é proposta por Bendsøe (1989) e representada pelas Equações 2.45 e 2.46.

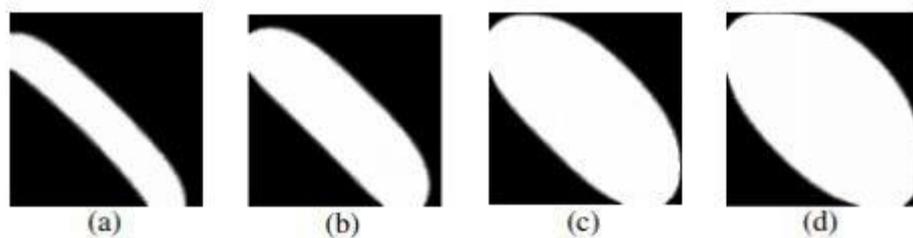
$$\int_{\Omega} \alpha d\Omega \leq V_f |\Omega| \quad (2.45)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.46)$$

Em que α representa o valor das pseudodensidades em cada ponto do domínio e V_f é a fração de material fluído da geometria final da otimização no domínio Ω .

A Figura 7 representa o resultado final de um mesmo domínio, considerando-se diferentes valores de restrição para o volume final do exemplo.

Figura 7 – Frações de volume: (a) $V_f=0,25$; (b) $V_f = 0,4$; (c) $V_f = 0,6$; (d) $V_f = 0,7$



Fonte: Koga (2010, p. 62).

2.3.7 Método das Assíntotas Móveis

Geralmente, há um grande número de variáveis de projeto em problemas de otimização topológica, já que para uma adequada representação de uma geometria é necessário trabalhar com malhas refinadas, com números expressivos de elementos para análise, em que para cada elemento há, pelo menos, uma variável de design a ser otimizada. O método de assíntotas móveis tem se mostrado um algoritmo otimizador muito eficiente, sendo adotado no ambiente acadêmico e industrial devido ao seu funcionamento baseado na sequência de aproximações simplificadas de subproblemas.

No uso do MAM é possível observar três grandes vantagens, sendo estas: modelos de aproximação convexos; separáveis; e que requerem apenas uma função de avaliação de gradiente em cada ponto de iteração. A convexidade significa que os métodos de programação

dual ou primal-dual podem ser usados para a solução dos subproblemas, os quais são métodos que buscam, respectivamente, maximizar ou minimizar um objetivo em um problema de otimização. Separabilidade é a definição de que as condições de otimalidade necessárias do subproblema não acoplem as variáveis de projeto, ou seja, em vez de um problema n -dimensional, é preciso resolver n problemas unidimensionais, o que reduz, expressivamente, o custo computacional da otimização.

O algoritmo desenvolvido por Svanberg (1987) trata somente de restrições de desigualdades, logo, a função objetivo e as restrições são apresentadas na Equação 2.47.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f_0(\mathbf{a}) \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{R}^1) \\ \text{Sujeito a } & f_i(\mathbf{a}) \leq \hat{f}_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2.47}$$

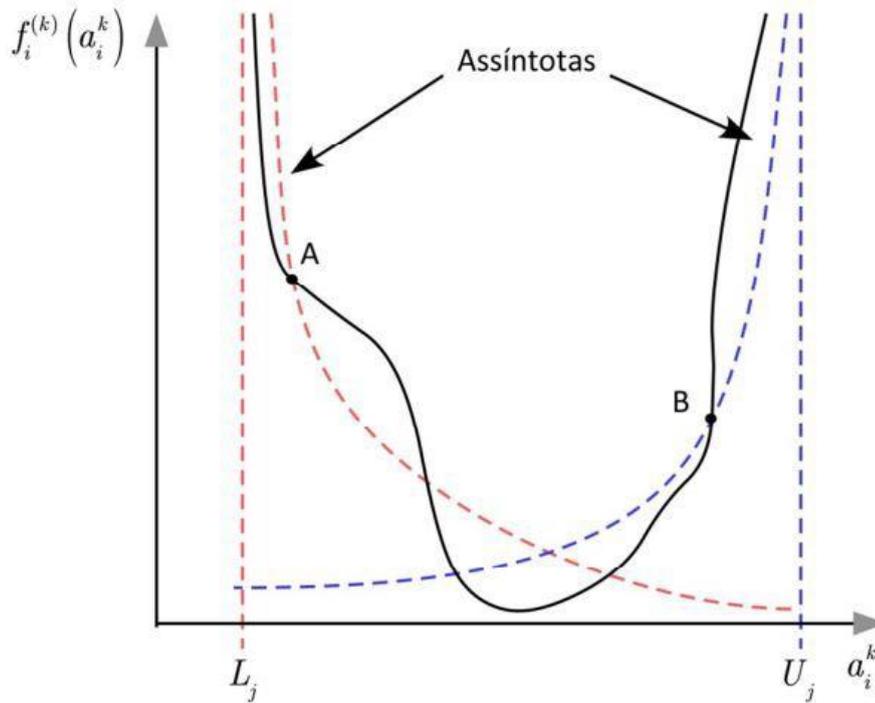
Em que $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ é o vetor de variáveis de projeto, $f_0(\mathbf{a})$ é a função objetivo e $f_i(\mathbf{a}) \leq \hat{f}_i$ são as restrições de projeto. A função objetivo e as restrições são linearizadas, mas para isto são introduzidas variáveis intermediárias, conhecidas como assíntotas móveis.

Considerando o vetor das variáveis no processo iterativo, os valores dos parâmetros das assíntotas móveis estão restritos por uma desigualdade, conforme demonstra a Figura 8, nos quais são controlados os limites inferiores e superiores como mostra a Equação 2.48.

$$L_j^{(k)} < a_j^{(k)} < U_j^{(k)} \tag{2.48}$$

Em que L e U são os limites inferiores e superiores e j é referente a posição vetorial da variável.

Figura 8 – Curva de aproximação convexa pelo Método das Assíntotas Móveis



Fonte: Lahuerta (2012, p. 57).

2.3.8 Formulação MOT para Escoamento

No problema de otimização topológica deve ser definido uma função objetivo, que representa o valor da propriedade do escoamento a ser otimizado. A análise também precisa satisfazer as condições de contorno, domínio de projeto e restrições para que seja considerada uma solução ótima.

A formulação de otimização proposta neste trabalho, para escoamento transiente é definida pela Equação 2.49, demonstrada inicialmente por Kreissl, Pingen e Maute (2011).

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar } & \phi(\mathbf{z}^0, \dots, \mathbf{z}^{N_t}, \alpha) = \Gamma\left(\sum_{n=0}^{N_t} \phi^n(t^n, \mathbf{z}^n, \alpha)\right) \\
 \text{Sujeito a } & L_j(\mathbf{z}^0, \dots, \mathbf{z}^{N_t}, \alpha) = L_j\left(\sum_{n=0}^{N_t} h_j^n(t^n, \mathbf{z}^n, \alpha)\right) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_h, \\
 & U_j(\mathbf{z}^0, \dots, \mathbf{z}^{N_t}, \alpha) = U_j\left(\sum_{n=0}^{N_t} g_j^n(t^n, \mathbf{z}^n, \alpha)\right) \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_g,
 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Em que α é o vetor de variáveis de projeto e \mathbf{z}^n é o vetor de variáveis de estado fluido, que satisfazem as equações governantes discretizadas nos intervalos de tempo $n = 0, \dots, N_t$. O objetivo ϕ , conforme detalhado na seção seguinte, é uma função diferenciável Γ que depende

da soma das contribuições, \mathbf{z}^n , de todas as etapas de tempo. As restrições de igualdade e desigualdade são denotadas, respectivamente, por L_j e U_j e têm a mesma forma funcional de ϕ , onde h_j^n é a representação das equações governantes indicada na Equação 2.12 e g_j^n é a restrição de volume indicada pelas Equações 2.45 e 2.46. O problema de otimização de parâmetros indicado pela Equação 2.49 é resolvido pelo Método das Assíntotas Móveis, no qual os gradientes de objetivo e as restrições são calculados pelo método adjunto.

2.3.8.1 Função objetivo

Uma das principais características que se deseja otimizar no escoamento de fluídos por meio de um canal é a dissipação de energia ao longo do dispositivo, que ocorre devido a perdas de carga no escoamento.

A minimização da dissipação da energia potencial total do sistema é conhecida como uma função objetivo do problema de otimização. A função da energia é obtida pelo princípio de trabalho virtual, do qual se origina a solução do equilíbrio do escoamento. Quando há forças aplicadas no sistema, a minimização da energia potencial total está relacionada à maximização das velocidades na região de aplicação das forças, juntamente com a minimização da energia potencial total dissipada, porém, quando não há forças aplicadas, essa minimização está diretamente relacionada à dissipação da energia do fluído.

A função objetivo para o caso de velocidades prescritas nos contornos de entrada e saída foi introduzida por Borrvall e Petersson (2003), demonstrada na Equação 2.50, para a solução de Stokes permanente.

$$\phi = \frac{1}{2}\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.50)$$

São vistos três termos nessa equação: o primeiro corresponde à dissipação, devido aos efeitos dissipativos viscosos no plano de escoamento; o segundo termo é referente à dissipação de energia por causa da porosidade do meio; e o terceiro termo é somente utilizado quando há força aplicada em algum ponto do escoamento, pois é referente à maximização das velocidades.

Na forma discreta, a função objetivo para a minimização da dissipação da energia pode ser representada pela Equação 2.51.

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{K}}_d + \bar{\mathbf{K}}_\kappa) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} \quad (2.51)$$

Em que os termos \mathbf{z} e \mathbf{C} estão representados nas Equações 2.33 e 2.52, respectivamente.

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_d + \bar{\mathbf{K}}_\kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Os componentes da matriz simétrica \mathbf{C} são representados pelas Equações 2.53 e 2.54.

$$\bar{\mathbf{K}}_d = \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\kappa & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_\kappa \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

A equação-objetivo para escoamentos transientes, conforme evidenciaram Yamaleev, Diskin e Nielsen (2010), é expressa pela somatória das funções objetivos em cada intervalo de tempo n , calculada por meio da Equação 2.50, essa relação é representada pela Equação 2.55.

$$\Gamma \left(\sum_{n=0}^{N_t} \phi^n (t^n, \mathbf{z}^n, \boldsymbol{\alpha}) \right) = \sum_{n=0}^{N_L} \phi^n \quad (2.55)$$

2.3.9 Análise de Sensibilidade

Segundo Hasund (2017), para a execução da otimização de geometrias em problemas de escoamentos são necessários os cálculos dos gradientes da função objetivo φ em relação à variável de projeto α , em que esse método é conhecido como análise de sensibilidade.

De acordo com Kreissl, Pingen e Maute (2011), devido à grande quantidade de parâmetros na otimização do fluxo para o problema de otimização topológica transiente, os gradientes da função objetivo em relação às variáveis de projeto para cada elemento são calculados por meio de uma análise adjunta, a qual tem como característica a propriedade de que o número de cálculos é independente da quantidade de parâmetros para os quais se deseja calcular os gradientes; logo, ao incorporar a solução adjunta à análise de sensibilidade, os custos computacionais são reduzidos significativamente.

Inicialmente na aplicação do método adjunto, são organizados em forma de vetores todos os valores de funções objetivos, vetor resíduo e variáveis de estado do fluxo para todos instantes de tempo, conforme a Equação 2.56.

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= [\phi^0, \dots, \phi^{N_t}]^T \\ \bar{\mathbf{R}}_{dyn} &= [\mathbf{R}_{dyn}^0, \dots, \mathbf{R}_{dyn}^{N_t}]^T \\ \bar{\mathbf{z}} &= [\mathbf{z}^0, \dots, \mathbf{z}^{N_t}]^T\end{aligned}\quad (2.56)$$

Derivando a Equação 2.55 em relação à variável de projeto α para o elemento i do domínio, tem-se a Equação 2.57.

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_i} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha_i} + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\bar{\phi}}\right)^T \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\alpha_i} + \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{\mathbf{z}}}\right) \frac{d\bar{\mathbf{z}}}{d\alpha_i} \right) \quad (2.57)$$

É utilizada a derivada total da equação residual para o cálculo da derivada do estado do escoamento em relação às variáveis de projeto, conforme a Equação 2.58.

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}_{dyn}}{d\alpha_i} = \frac{\partial\bar{\mathbf{R}}_{dyn}}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial\bar{\mathbf{R}}_{dyn}}{\partial\bar{\mathbf{z}}} \frac{d\bar{\mathbf{z}}}{d\alpha_i} = 0 \quad (2.58)$$

Resolvendo a Equação 2.57 para $\frac{d\bar{\mathbf{z}}}{d\alpha_i}$ e substituindo na relação 2.58, se chega à Equação 2.59.

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_i} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha_i} + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\bar{\phi}}\right)^T \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\alpha_i} - \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{\mathbf{z}}}\right) \left(\frac{\partial\bar{\mathbf{R}}_{dyn}}{\partial\bar{\mathbf{z}}}\right)^{-1} \frac{\partial\bar{\mathbf{R}}_{dyn}}{\partial\alpha_i} \right) \quad (2.59)$$

Atribuindo as variáveis em relação a $\bar{\mathbf{z}}$ a uma nova variável $\bar{\lambda}$, chamada de multiplicador lagrangiano ou variável adjunta, resulta na Equação 2.60.

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_i} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha_i} + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\bar{\phi}}\right)^T \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\alpha_i} + \bar{\lambda}^T \frac{\partial\bar{\mathbf{R}}_{dyn}}{\partial\alpha_i} \right) \quad (2.60)$$

A variável adjunta $\bar{\lambda}$ é obtida por meio da Equação 2.61.

$$\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{R}}_{dyn}}{\partial\bar{\mathbf{z}}}\right)^T \bar{\lambda} = \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{\mathbf{z}}}\right)^T \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\bar{\phi}}\right) \quad (2.61)$$

Para o instante inicial $n = 0$, as derivadas do vetor residual em relação aos vetores de estado $\frac{\partial \mathbf{R}_{dyn}^0}{\partial \mathbf{z}^j}$ são identificadas na Equação 2.62.

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{R}}_{dyn}^0}{\partial \bar{\mathbf{z}}^j} = \begin{cases} \mathbf{I} & \forall j = 0, \\ 0 & \forall j = 1, \dots, N_t \end{cases} \quad (2.62)$$

Nos instantes de tempo $n > 0$ as derivadas $\frac{\partial \mathbf{R}_{dyn}^n}{\partial \mathbf{z}^j}$ são representadas na Equação 2.63.

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{R}}_{dyn}^n}{\partial \bar{\mathbf{z}}^j} = \begin{cases} -\mathbf{M}^n \equiv \mathbf{C}^n & \forall j = n - 1, \\ \mathbf{M}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{R}^n}{\partial \mathbf{z}^n} \equiv \mathbf{D}^n & \forall j = n, \\ 0 & \forall j \in \{1, \dots, N_t\} \setminus \{n - 1, n\} \end{cases} \quad (2.63)$$

Para a representação tensorial do problema transiente, é necessário reescrever as Equações 2.61, 2.62 e 2.63 em um sistema demonstrado na Equação 2.64.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & [\mathbf{C}^0]^T \\ [\mathbf{D}^1]^T & [\mathbf{C}^1]^T \\ & [\mathbf{D}^2]^T \quad \ddots \\ & & \ddots & [\mathbf{C}^{N_t-1}]^T \\ & & & & [\mathbf{D}^{N_t}]^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{N_t} \end{pmatrix}}_{\bar{\lambda}} = - \begin{pmatrix} (\partial \phi^0 / \partial \mathbf{z}^0)^T (\partial \Gamma / \partial \phi^0) \\ (\partial \phi^1 / \partial \mathbf{z}^1)^T (\partial \Gamma / \partial \phi^1) \\ (\partial \phi^2 / \partial \mathbf{z}^2)^T (\partial \Gamma / \partial \phi^2) \\ \vdots \\ (\partial \phi^{N_t} / \partial \mathbf{z}^{N_t})^T (\partial \Gamma / \partial \phi^{N_t}) \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Conforme proposto por Farrell *et al.* (2013), esse sistema deve ser resolvido para trás no tempo, ou seja, iniciando no último intervalo de tempo até se chegar ao tempo N_0 . Dada a solução adjunta $\bar{\lambda}$, a derivada da função objetivo em relação à variável de projeto α_i é determinada na Equação 2.65.

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_i} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_i} + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} \right)^T \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \alpha_i} + \bar{\lambda}^T \frac{\partial \overline{\mathbf{R}}_{dyn}}{\partial \alpha_i} \quad (2.65)$$

Outro método de representação do sistema adjunto em problemas transientes foi proposto por Ntanakas e Meyer (2015), no qual são utilizados dois instantes de tempo futuro para o cálculo dos tempos de interesse em cada interação do processo.

Para a utilização desse método, o termo $(\partial \Gamma / \partial \phi^0)$ presente no sistema demonstrado na Equação

2.64 deve ser adotado como uma matriz de identidade; essa relação é representada na Equação 2.66.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial \phi^3}{\partial \alpha^1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi^2}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial \phi^3}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial \phi^4}{\partial \alpha^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \frac{\partial \phi^N}{\partial \alpha^{N-2}} & \\ 0 & & & & & \frac{\partial \phi^N}{\partial \alpha^{N-1}} & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{\partial \phi^N}{\partial \alpha^N} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial z^1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi^2}{\partial z^2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \frac{\partial \phi^N}{\partial z^N} \end{bmatrix} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial z^1} \\ \frac{\partial \phi^2}{\partial z^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi^N}{\partial z^N} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Utilizando-se as técnicas de cálculo ao longo do tempo para o sistema demonstrado na Equação 2.66, é possível verificar três relações, sendo a Equação 2.67 para o tempo N , 2.68 para o tempo $N - 1$ e 2.69 para os demais passos no tempo.

$$\left(\lambda^N\right)^T \frac{\partial \phi^N}{\partial \alpha^N} = \frac{\partial \phi^N}{\partial z^N} \quad (2.67)$$

$$\left(\lambda^n\right)^T \frac{\partial \phi^n}{\partial \alpha^n} + \left(\lambda^{n+1}\right)^T \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial \phi^n}{\partial z^n} \quad (2.68)$$

$$\left(\lambda^n\right)^T \frac{\partial \phi^n}{\partial \alpha^n} + \left(\lambda^{n+1}\right)^T \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \alpha^n} + \left(\lambda^{n+2}\right)^T \frac{\partial \phi^{n+2}}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial \phi^n}{\partial z^n} \quad (2.69)$$

Pode-se verificar que a equação adjunta instável precisa ser resolvida para trás no tempo, em que em cada etapa de tempo a solução primária é necessária. Por outro lado, a solução primária é obtida por integração de tempo progressivo. O seguinte processo é empregado: as soluções primárias são resolvidas para todo o período de tempo e armazenadas, em seguida, o adjunto é resolvido para trás no tempo, lendo a solução primária correspondente a cada etapa de tempo.

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O método de elementos finitos e algoritmo de otimização são combinados de maneira iterativa para determinar a distribuição de material no domínio de projeto. Neste trabalho, um algoritmo baseado em gradiente é utilizado, em que são avaliadas as informações de derivadas relacionadas à função objetivo e fornecidas as direções de atualização das variáveis de projeto em cada iteração.

Primeiramente, são definidas as informações iniciais do sistema, sendo o domínio de projeto, as restrições e as condições de contorno. Em seguida, as equações do sistema Navier-Stokes-Darcy são resolvidas a partir do método dos elementos finitos, utilizando-se o esquema de Euler, apresentada na Equação 2.26 para a solução do problema transiente.

A função objetivo e as restrições são calculadas com base na distribuição atual da iteração das variáveis de projeto e velocidades. Em seguida, são resolvidas as análises de sensibilidade para todas as etapas de tempo de maneira inversa, iniciando pela última etapa, conforme demonstrado na Equação 2.64. Depois do cálculo das sensibilidades para todas as etapas do intervalo de tempo analisado, são atualizadas as direções de otimização, utilizando-se o algoritmo baseado no Método das Assíntotas Móveis.

Esse processo iterativo é repetido até que a convergência seja alcançada, resultando na distribuição de pseudodensidades da geometria ótima. A Figura 9 apresenta o fluxograma simplificado para a implementação do método de otimização da topologia em escoamentos.

O critério de convergência é descrito pela relação dada na Equação 3.1.

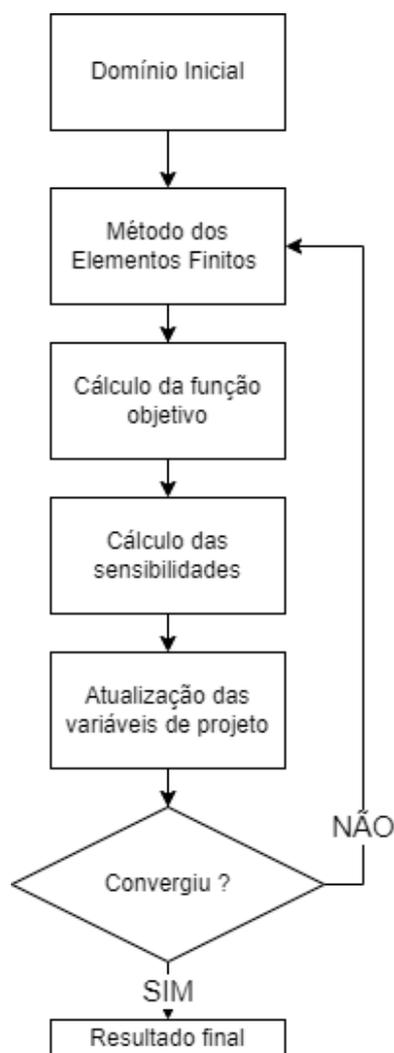
$$\left\| \alpha^k - \alpha^{k-1} \right\|_{\infty} \ll 1 \times 10^{-3} \quad (3.1)$$

Em que α é a distribuição da variável de projeto ao longo do domínio, e k é o número da iteração.

A restrição de volume é representada pela Equação 3.2, onde V representa o volume total do domínio, a_i é a área de cada elemento i e V_f é o coeficiente de fração de volume fluido, assumindo valores entre 0 e 1.

$$\sum_{i=1}^{ne} \alpha_i a_i \leq V_f V \quad (3.2)$$

Figura 9 – Fluxograma de implementação da otimização topológica



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a Equação 2.49, é utilizado um problema de design contínuo, assumindo um material poroso e permeável, com isso é permitido o uso de métodos matemáticos e de programação eficientes para problemas de otimização. Para esse trabalho, é utilizado o Método das Assíntotas Móveis (MAM), um popular método projetado para problemas com um grande número de graus de liberdade, portanto, adequado para a otimização topológica, conforme demonstrado por Bendsøe (1989).

Como pode ser observado na seção 2.3.9, é utilizado um método adjunto para resolver os gradientes da sensibilidade, visto que é impraticável avaliar essa derivada diretamente.

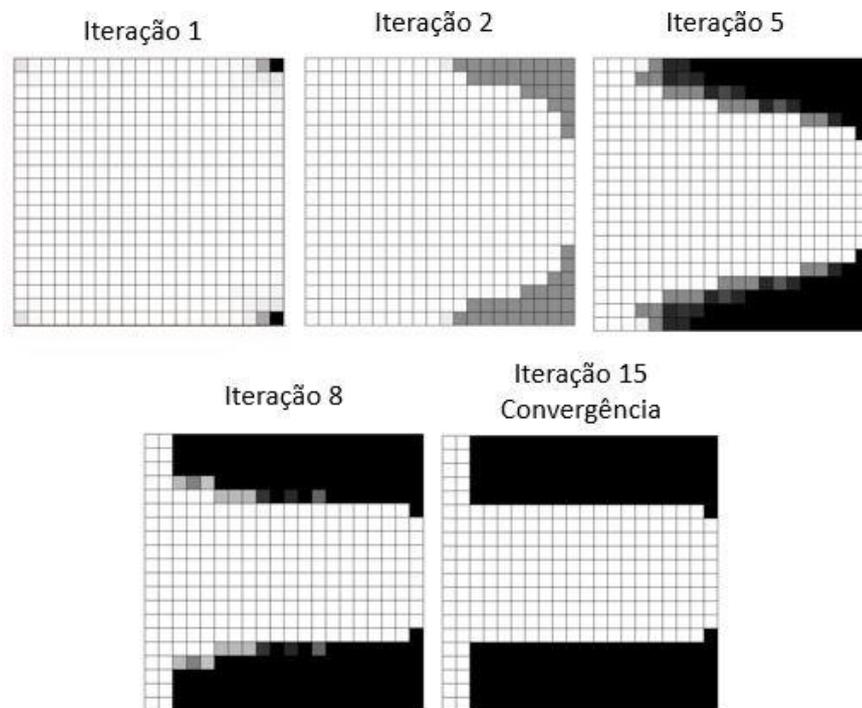
O processo de otimização considerando o avanço do tempo é iterativo e consiste nas seguintes etapas:

- Dada uma estimativa (k) para a distribuição de material ideal, primeiro são resolvidas as Equações do sistema Navier-Stokes-Darcy, utilizando-se o método de interpolação de Euler para todo o intervalo de tempo, no qual é realizada a solução partindo do instante inicial para a frente no tempo até o instante final a ser analisado. São armazenados os valores dos estados do escoamento, do resíduo e do objetivo para todas os passos de tempo, conforme isso foi visto na equação 2.56.
- Em seguida, a análise de sensibilidade é realizada, na qual o gradiente do objetivo em relação às variáveis de projeto e as restrições são avaliados, e os adjuntos são utilizados para permitir essa solução. Nessa etapa são empregados os valores armazenados no primeiro passo do processo de otimização. A solução dos adjuntos são feitas para trás do tempo, iniciando no último instante de tempo avaliado e finalizado no primeiro, conforme pode ser visualizado na equação 2.64.
- Com o apoio do método adjunto, são calculados os gradientes de otimização, conforme apresenta a Equação 2.65.
- Com os gradientes e objetivos calculados, é utilizado o MAM para obter-se uma nova estimativa ($k + 1$) para o projeto ótimo, com base nas informações do gradiente e do histórico de iterações anteriores.
- O resultado do MAM indica quais elementos devem sofrer modificações em suas variáveis de projeto, gerando, assim, uma nova topologia, na qual, posteriormente, é analisada a nova distribuição de pseudodensidades com a restrição de volume imposta na Equação 3.2.
- A partir da nova distribuição de pseudodensidades é calculado o critério de convergência identificado na Equação 3.1; caso a mudança da distribuição de material ao longo do domínio total tenha sido menor que 1×10^{-3} ou o limite máximo de iterações tenha sido alcançado, o processo de otimização é interrompido, e o resultado final de topologia é gerado.
- Caso não se tenha alcançado a convergência, são calculados novos valores de velocidade, objetivo e gradientes para a nova distribuição de materiais, sendo esse processo repetido até que a convergência seja alcançada.

A Figura 10 exemplifica como é feita a distribuição de materiais ao longo do processo de otimização. Também se vê que, ao passar pelas iterações, as regiões cinzas diminuem, devido ao efeito dos coeficientes de penalização empregados sobre os modelos de materiais, deixando

o resultado final composto apenas por regiões sólidas e fluídas.

Figura 10 – Exemplificação da distribuição de material no domínio ao longo do processo iterativo



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados de exemplos de otimização topológica aplicada a escoamento transiente, utilizando-se o método de elemento finitos. Os resultados são comparados a exemplos propostos por Kreissl, Pingen e Maute (2011) e Deng *et al.* (2011).

Em todos os exemplos são utilizados canais bidimensionais, baseados em escoamento de fluídos newtonianos com valores de Reynolds, quantidade de passos no tempo e o tamanho da variação temporal, de acordo com cada proposta de otimização apresentada na literatura.

No Apêndice A, é realizada a verificação da solução de Navier-Stokes e do método de elementos finitos implementado para o problema de escoamento transiente.

Inicialmente, são adotadas as configurações de parâmetros do algoritmo otimizador MAM, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros MAM

Parâmetro	Valor
Tamanho do passo (Δs)	0,1
Adaptação das assíntotas iniciais	0,5
Fator de escala para a violação de restrição	10^2
Número máximo de subciclos	1
Mudança relativa nas variáveis de otimização	10^{-5}

4.1 RESULTADO OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

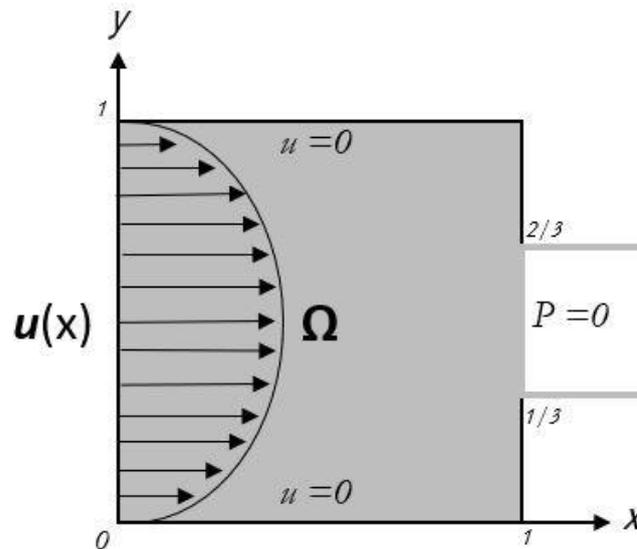
4.1.1 Difusor

O problema de otimização de difusor é um exemplo comumente encontrado nos estudos relacionados à mecânica dos fluídos. Na otimização topológica, esse modelo foi apresentado, inicialmente, por Borrvall e Petersson (2003) para escoamento permanente e, posteriormente, foi apresentada por Kreissl, Pingen e Maute (2011) uma solução de otimização considerando o escoamento transiente.

O problema pode ser compreendido em um domínio bidimensional contendo uma entrada e uma saída, é verificada a diferença entre as dimensões de entrada e saída do fluxo dentro do domínio.

O domínio fixo utilizado no exemplo e suas condições de contorno são apresentados na Figura 11.

Figura 11 – Domínio fixo e condições de contorno para o difusor



Fonte: Adaptada de Borrvall e Petersson (2003).

O perfil de velocidade adotado nas condições de entrada do domínio é parabólico. Tem-se que $P = 0$ representa a saída do escoamento, condição de tração livre. Os valores identificados como $u = 0$ são referentes às velocidades nulas impostas nos contornos, ou seja, condição de não deslizamento, devido a características viscosas.

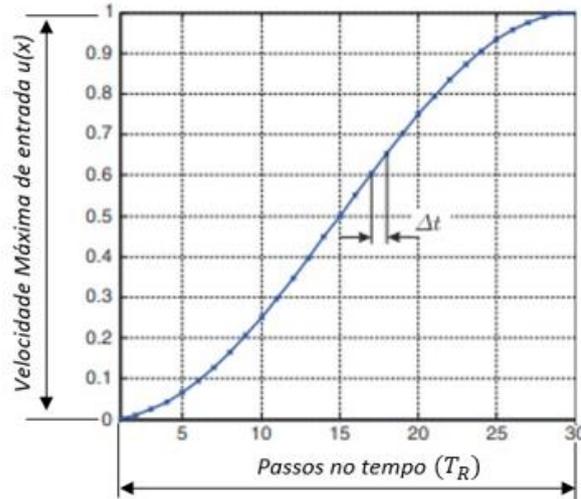
A variação da velocidade de entrada acontece em cada instante de tempo da análise referente ao escoamento transiente, que é composto por uma variação senoidal, a qual é representada pela Equação 4.1.

$$u(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2T_R}t_n\right)^2 \quad (4.1)$$

Em que t_n é o valor referente ao instante de tempo que está sendo analisado, e T_R é representado pelo número total de variações no tempo do escoamento instável, ou seja, em quantas frações de tempo será realizada a análise do problema. A Figura 12 representa um gráfico do valor de

T_R relacionado à velocidade máxima de entrada de fluxo no domínio.

Figura 12 – Relação entre a velocidade máxima de entrada e os passos de tempo



Fonte: Adaptada de Kreissl, Pingen e Maute (2011).

Valores baixos de T_R aumentam o estado de instabilidade do fluxo, devido às maiores variações do escoamento em cada tempo analisado. Em contrapartida, valores altos mantêm as alterações menos abruptas no escoamento em cada análise de avanço temporal, porém, o custo computacional aumenta expressivamente com a ampliação da quantidade de passos no tempo.

Para a análise do problema do difusor, são adotados parâmetros de escoamento propostos por Kreissl (2011) e Borrvall e Petersson (2003), os quais podem ser observados na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros adimensionais – Exemplos MOT transientes

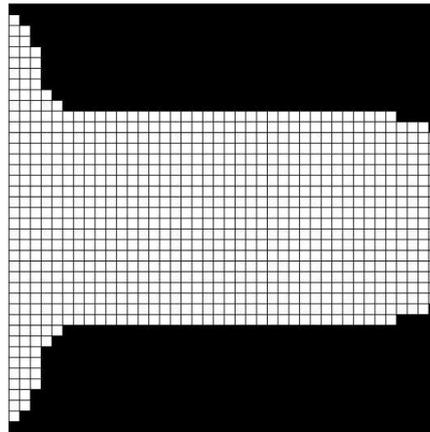
Parâmetro	Valor
Velocidade Máxima de Entrada	1 cm/s
Viscosidade Dinâmica (μ)	0,01 cm^2/s
Densidade (ρ)	1 g/cm^3
Passo no tempo para análise transiente (Δt)	0,0001 s

A Figura 13 representa o resultado obtido para a fração de volume igual a 50% do domínio fluído no problema do difusor apresentado, no qual foi adotado o escoamento transiente com número de Reynolds máximo igual a 100. Para a solução foram utilizados elementos finitos com 9 pontos de integração para a velocidade e 4 pontos para a variável de pressão. Todos os

resultados foram originados a partir de uma malha com 1.600 elementos, utilizando-se um fator de penalização $q = 0.1$. O escoamento transiente foi dividido em 15 passos no tempo para a análise do problema.

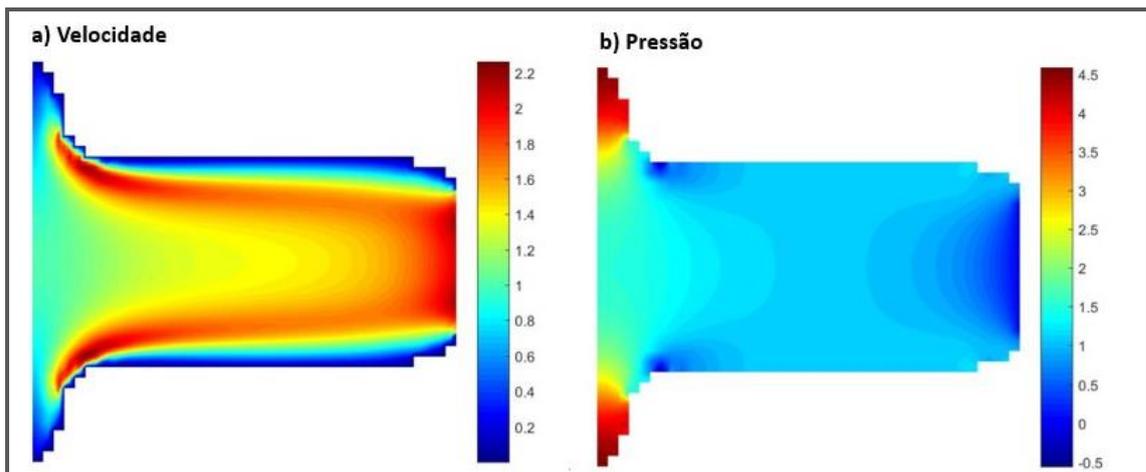
A análise da velocidade e pressão para a topologia otimizada pode ser verificada na Figura 14, em que é aproximada a solução da equação de Navier-Stokes na geometria ótima, por meio do MEF.

Figura 13 – Topologia otimizada do difusor considerando o escoamento transiente



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Resultado na análise do MEF para a geometria ótima; a) Velocidade; b) Pressão



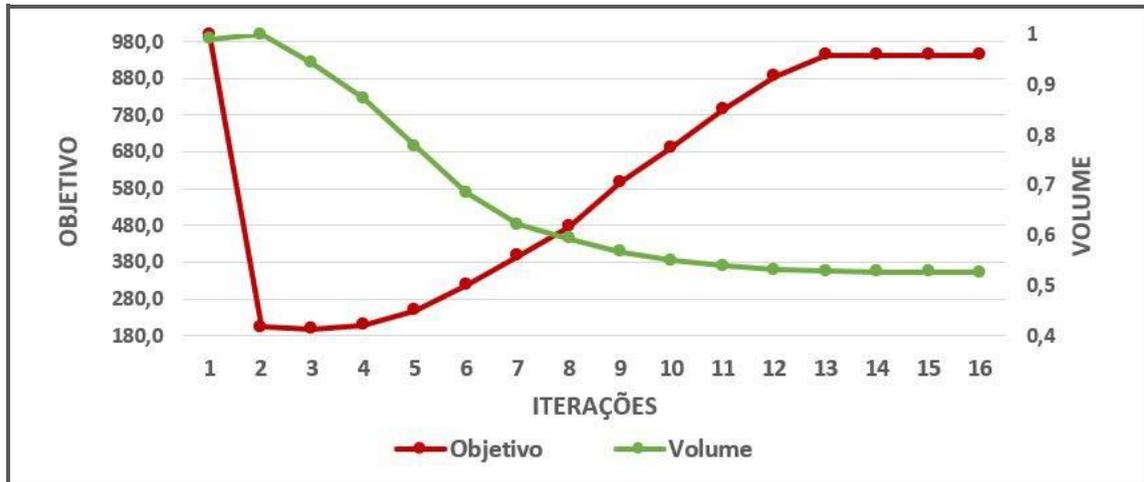
Fonte: Elaborada pelo autor.

A convergência da otimização foi alcançada na iteração 16; foi desenvolvido um gráfico para a análise da modificação do objetivo e a relação de volume sólido/fluído em cada iteração do processo de otimização; é visto o aumento do valor do objetivo, o qual é característico da

restrição do canal no qual está ocorrendo o escoamento.

A otimização topológica no exemplo busca suavizar a inclinação da curva do objetivo, fenômeno que pode ser verificado na Figura 15.

Figura 15 – Relação objetivo e volume em cada iteração do processo de otimização

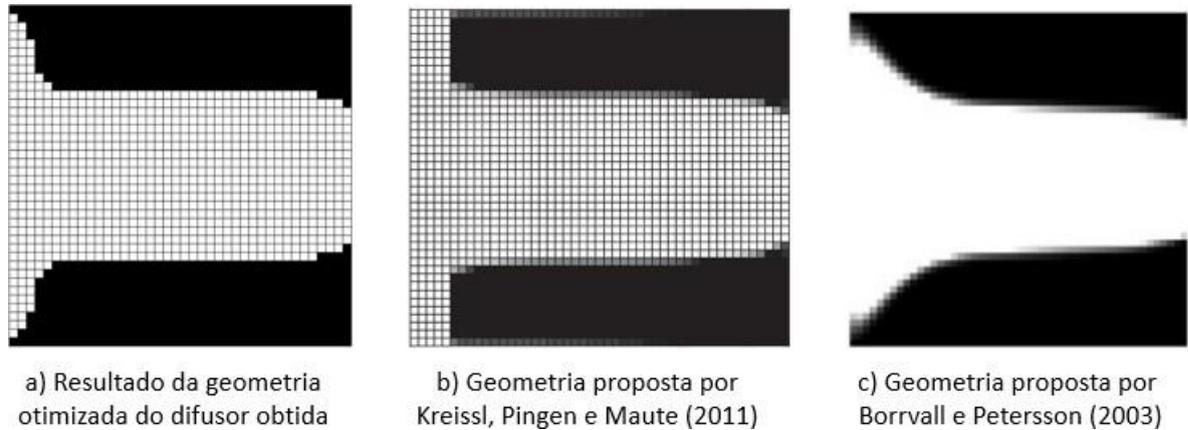


Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível comparar o resultado obtido na otimização do difusor utilizando-se a metodologia proposta neste trabalho, no qual são adotadas as condições de contornos propostas por Borrvall e Petersson (2003), com o resultado apresentado por Kreissl, Pingen e Maute (2011). É observada uma diferença da geometria de entrada do escoamento no dispositivo, essa divergência é verificada no exemplo proposto por Kreissl, Pingen e Maute (2011). As cinco colunas do contorno esquerdo do domínio são pré-configuradas para manter todos os elementos no estado fluido durante o processo de otimização. Já nas condições de contornos adotadas neste trabalho, propostas por Borrvall e Petersson (2003), não há restrição nas pseudodensidades em nenhum dos elementos do domínio fixo.

A comparação da geometria otimizada é verificada na Figura 16.

Figura 16 – Geometrias ótimas para o problema do difusor, sendo a) e b) designs obtidos considerando escoamento transiente e c) fluxo permanente



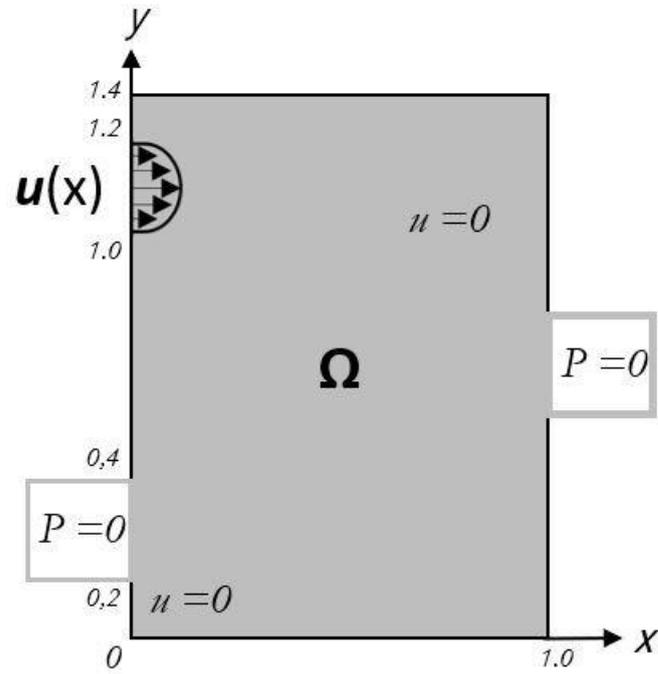
Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado proposto por Kreissl, Pingen e Maute (2011) considera escoamento transiente aquele com o tempo de análise dividido em 15 passos no tempo; o algoritmo de otimização utilizado é o *Globally Convergent Method of Moving Asymptotes (GCMMA)* e são utilizadas funções bilineares para velocidade e pressão nas análises do MEF; as variáveis do escoamento são as mesmas apresentadas na Tabela 2. A geometria proposta por Borrvall e Petersson (2003) considera o fluxo permanente para valores baixos de Reynolds, em que a avaliação da geometria por meio do MEF é realizada utilizando-se funções quadráticas para velocidades e bilineares para as pressões; o algoritmo otimizador utilizado é o MAM.

4.1.2 Dispositivos multissaiadas

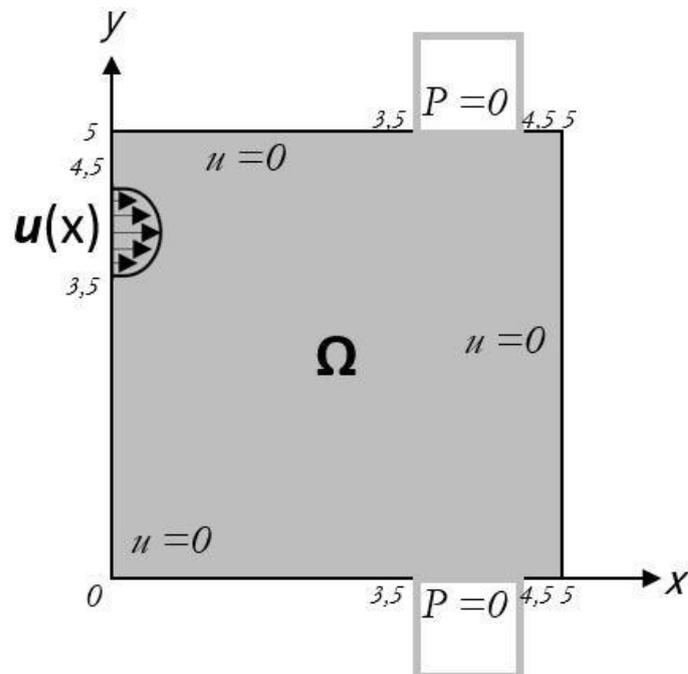
É realizada a análise dos exemplos de otimização topológica adotando-se dispositivos multissaiadas propostos por Deng *et al.* (2011). As condições de contorno propostas para os dois exemplos podem ser verificadas nas Figuras 17 e 18.

Figura 17 – Primeiro exemplo de escoamento com 1 entrada e 2 saídas



Fonte: Adaptado de Deng *et al.* (2011).

Figura 18 – Segundo exemplo de escoamento com 1 entrada e 2 saídas



Fonte: Adaptado de Deng *et al.* (2011).

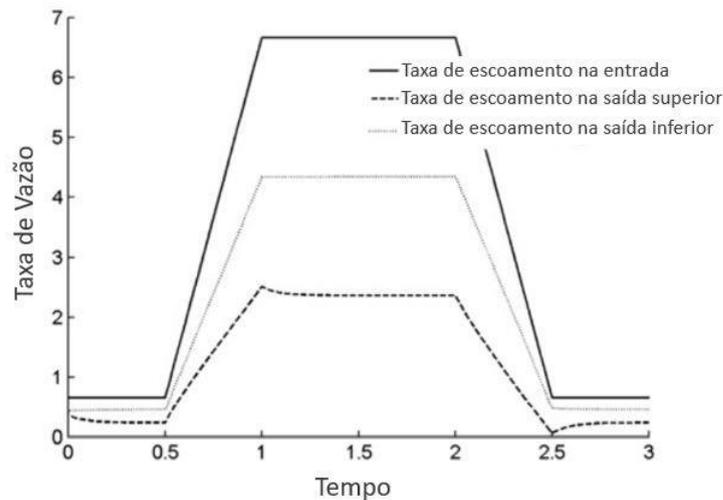
Para os modelos apresentados, o objetivo consiste na realização de dois exemplos de dispositivos multissaídas e compará-los com os exemplos já propostos por Deng *et al.* (2011); para isso, são adotados a viscosidade dinâmica igual a $1 \text{ cm}^2/\text{s}$, densidade 1 g/cm^3 , e os valores de penalização utilizados nos dois exemplos são $q = 0.1$.

No primeiro exemplo, é empregado o avanço em 15 etapas de tempo, com a função senoidal da velocidade de entrada iniciando a partir do instante zero, conforme visto na Equação 4.1, com o tempo máximo de 1s , considerando cada avanço no tempo em $0,0667\text{s}$.

No segundo exemplo, é considerada uma diferença de vazão entre as saídas, em que a saída superior é responsável pela passagem de $1/3$ da vazão de entrada. A Figura 19 representa o gráfico da taxa de vazão na entrada e saídas, a equação da variação de entrada de velocidade é descrita na Equação 4.2, na qual o tempo analisado é relativo ao instante 0 até 3 segundos, considerando 30 avanços no tempo de $0,1\text{s}$ cada.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} = & -[4(y - 3.5)(4.5 - y)(t \leq 0.5) \\
 & + 4(y - 3.5)(4.5 - y)(18t - 8)(0.5 < t \leq 1) \\
 & + 40(y - 3.5)(4.5 - y)(1 < t \leq 2) \\
 & + 4(y - 3.5)(4.5 - y)(-18t + 46)(2 < t \leq 2.5) \\
 & + 4(y - 3.5)(4.5 - y)(t > 2.5)]\mathbf{n}, \quad t \in [0, 3]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Figura 19 – Taxas de entrada e saídas de velocidades em função do tempo



Fonte: Adaptado de Deng *et al.* (2011).

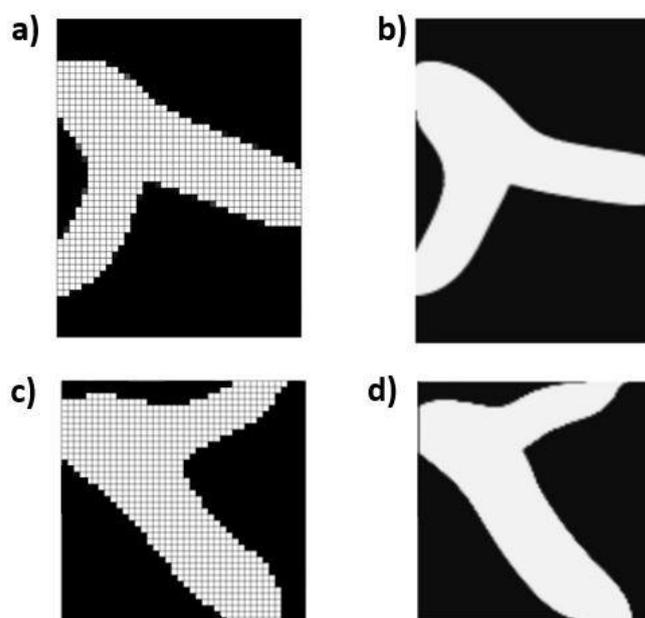
Para o primeiro exemplo, é considerada a restrição de volume de 30% do domínio como fluido; o segundo problema considera 45% do domínio compreendido como fluido. Em ambos os casos, a convergência é adquirida a partir da variação nula das pseudodensidades dos elementos entre interações, ou seja, quando os valores dos gradientes de otimização são nulos.

Os resultados das geometrias ótimas dos exemplos propostos podem ser identificados na Figura 20, que demonstra a comparação dos resultados já obtidos previamente na literatura para as mesmas condições de contorno.

Os campos de velocidades para os exemplos podem ser verificados na Figura 21, na qual é possível observar a distribuição da velocidade ao longo da geometria como forma de obtenção da máxima redução de pressão para as condições de contorno impostas.

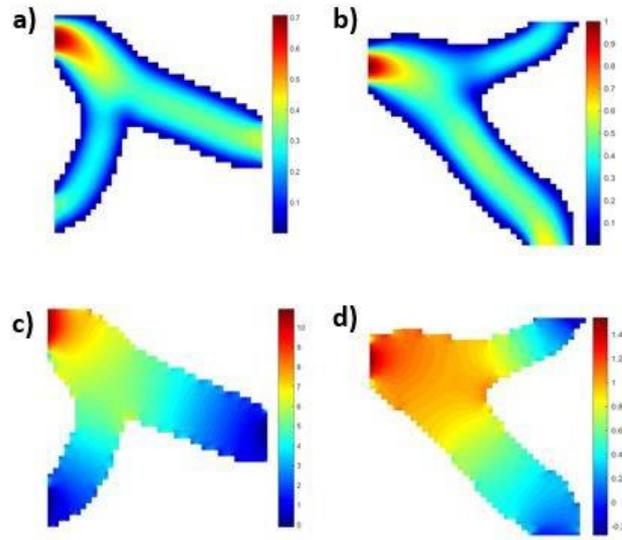
É observada a semelhança de geometria final do dispositivo com a literatura, porém, é importante destacar a diferença de malhas utilizadas, em que, no exemplo proposto por Deng *et al.* (2011), é observada a utilização de elementos triangulares, com maior nível de refinamento de malha e utilização e métodos de pós-processamento, enquanto nos resultados obtidos neste trabalho é realizada a utilização de malhas Taylor-Hood, com 9 pontos de interpolação para a velocidade e 4 para as pressões; logo, é visto que o resultado final da geometria é independente da malha utilizada.

Figura 20 – a) e c) Geometrias ótimas obtidas pelo autor; b) e d) Geometria ótima apresentada por Deng *et al.* (2011)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – a) e b) Campos de velocidade para os exemplos de dispositivo de 1 entrada e 2 saídas de velocidades; c) e d) Campos de pressões para os exemplos

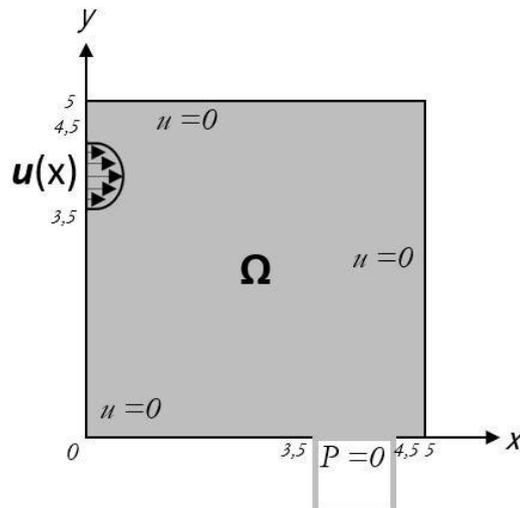


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.3 Variação no Número de Reynolds

O domínio computacional utilizado para representar o exemplo com variação do número de Reynolds foi adotado por Deng *et al.* (2011), no qual é visto um modelo de entrada e 1 saída do escoamento no domínio fixo, conforme representado na Figura 22. O perfil de velocidade utilizado no exemplo é definido na Equação 4.3.

Figura 22 – Domínio fixo para o exemplo de escoamento de 1 entrada e 1 saída com valores de número de Reynolds variáveis



Fonte: Adaptado de Deng *et al.* (2011).

$$\mathbf{u} = U_{\max}(y - 3.5)(4.5 - y)t\mathbf{n} \quad (4.3)$$

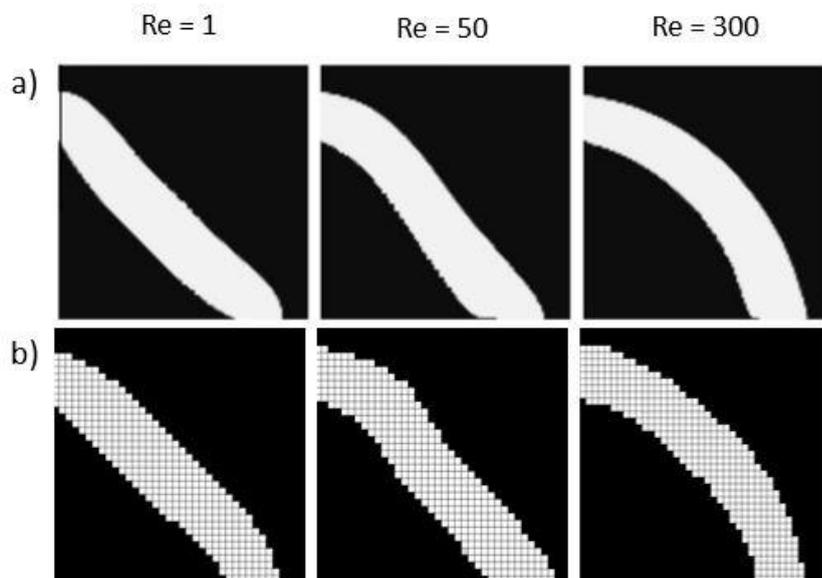
Em que U_{\max} é a velocidade máxima, a qual varia entre 1,50 e 300, t é o espaço de tempo analisado, variando de 0 a 1, nesse caso. A análise de tempo é dividida em 20 intervalos, compreendido como 0,05s cada etapa do tempo, em que a restrição de volume empregada é 25% do domínio fluído, a viscosidade dinâmica é adotada assumindo o valor de $1/\text{Re} \text{ cm}^2/\text{s}$ e a densidade 1 g/cm^3 . São realizadas as análises para os valores de número de Reynolds igual a 1, 50 e 300, adotando o valor de penalização $q = 0, 1$.

A Figura 23 representa as geometrias ótimas do problema apresentado com diferentes números de Reynolds, em que também é apresentado os resultados obtidos por meio do método desenvolvido nesse trabalho.

A partir dos resultados apresentados na Figura 23 é possível verificar que o canal considerando baixos números de Reynolds possuem cantos agudos, enquanto nos exemplos de elevados Reynolds os cantos se tornam arredondados, ou seja, os perfis ideais para o exemplo em análise são canais retos para baixos Reynolds e curvos para número de Reynolds maiores.

O mesmo resultado também foi observado por Gersborg-Hansen, Sigmund e Haber (2005), para o mesmo problema, considerando o escoamento permanente.

Figura 23 – Geometria ótima no exemplo considerando o número de Reynolds variável, em que representa os resultados obtidos por Deng *et al.* (2011) e b) os resultados obtidos pelo autor



Fonte: Elaborada pelo autor.

É feita a comparação do percentual de otimização em cada exemplo, na qual para a análise é considerado o valor do objetivo na primeira iteração, sendo que o valor do volume total alcança a restrição adotada para os exemplos (25% de fluido no domínio), e o valor do objetivo na última iteração, no qual é observada a convergência do problema. Os valores de otimização dos modelos podem ser vistos na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores da otimização para o exemplo de variação de número de Reynolds

	<i>Valor do objetivo na restrição</i>	<i>Valor do objetivo na convergência</i>	<i>Porcentagem de otimização</i>
<i>Nº Reynolds = 1</i>	$6,39 \times 10^1$	$5,85 \times 10^1$	8,45%
<i>Nº Reynolds = 50</i>	$1,38 \times 10^3$	$1,29 \times 10^3$	6,52%
<i>Nº Reynolds = 300</i>	$3,20 \times 10^3$	$3,04 \times 10^3$	5,00%

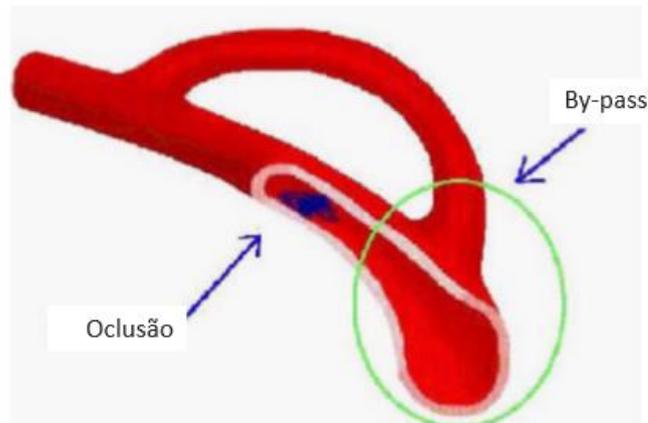
A partir da Tabela 3 é possível verificar que a curva de otimização é menor nos exemplos com número de Reynolds maiores. Esse fenômeno ocorre em razão da maior perda de carga presente em escoamento de elevados número de Reynolds, dificultando a redução da dissipação de energia no processo de otimização topológica depois de alcançado o valor de restrição de volume.

4.1.4 Bypass Arterial

Um importante exemplo da aplicação da otimização topológica em casos transientes está na utilização de *bypasses* arteriais em escoamentos sanguíneos, que são modelados considerando o fluxo variável no tempo, devido ao ritmo cardíaco.

Um modelo simplificado de *bypass* arterial, devido à obstrução no escoamento sanguíneo, foi apresentado por Quarteroni e Rozza (2003) e pode ser visto na Figura 24.

Figura 24 – Modelo simplificado de *bypass* arterial



Fonte: Quarteroni e Rozza, 2003, p. 1802).

Doenças vasculares, como a aterosclerose, estão relacionadas ao acúmulo de gordura nas paredes de artérias, causando o espessamento do diâmetro do vaso, formando a estenose, que é a restrição responsável pela redução do fluxo sanguíneo, fenômeno que pode causar diversas consequências à saúde. É comum a utilização de desvios arteriais para a restauração do fluxo sanguíneo, conhecidos também como pontes de safena. A geometria do dispositivo a ser utilizado possui forte influência no sucesso do tratamento, pois essa pode contribuir para a ocorrência de complicações pós-cirúrgicas, como os fenômenos de recirculação e a criação de zonas de estagnação correlacionadas com reestenose.

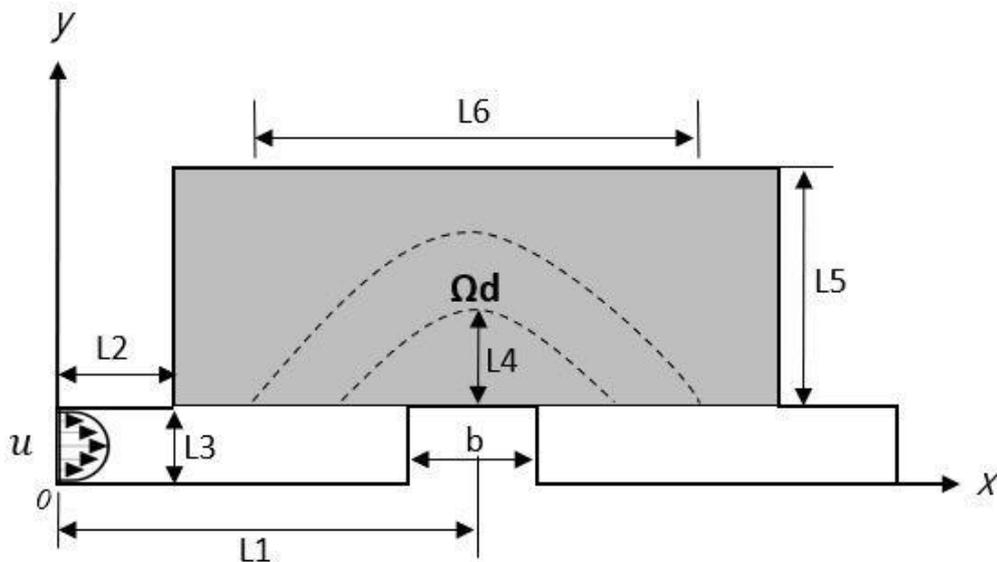
Embora o método de ponte de safena seja amplamente utilizado, são vistas falhas tardias em 50% dos implantes depois de dez anos de instalação, e algumas dessas complicações comuns são a trombose, as infecções e a hiperplasia intimal na anastomose distal – que é compreendida pelo espessamento interno dos vasos na região de conexão entre a ponte e o vaso sanguíneo. A hemodinâmica é um dos principais fatores desencadeantes que levam à reestenose no enxerto, logo, a compreensão do escoamento por meio dos desvios sanguíneos tem sido um problema importante da biomecânica.

Nesses resultados, são analisados dois casos de *bypasses* arteriais, sendo esses de bloqueio total e parcial de fluxo em artérias, sobre os quais no segundo exemplo são vistos subcasos com diferentes níveis de restrição.

4.1.4.1 Fluxo com restrição total

É considerado o problema do projeto do *bypass* arterial, em que um enxerto é implantado a montante da oclusão na artéria como via alternativa para o fluxo sanguíneo. As condições de contorno para o campo de fluxo modelado são: velocidade de entrada parabólica; condições de limite sem escorregamento em todas paredes em análise, incluindo o *bypass*; e uma condição de fluxo paralelo com pressão igual a zero na saída. A Figura 25 representa as condições de contorno e dimensões do modelo adotado para a análise, inicialmente demonstrado por Abraham, Behr e Heinkenschloss (2005).

Figura 25 – Domínio fixo *bypass* arterial



Fonte: Adaptado de Abraham, Behr e Heinkenschloss (2005).

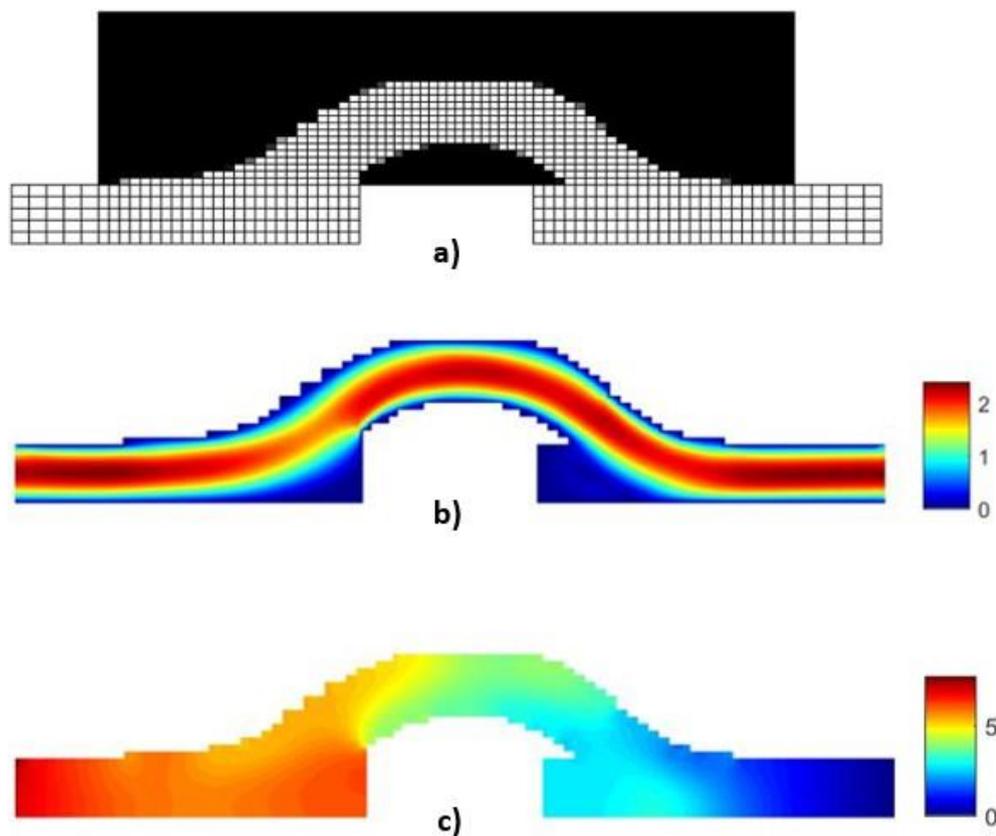
Os parâmetros de geometria fixa são $L1 = 5,0 \text{ cm}$, $L2 = 1,0 \text{ cm}$, $L3 = 0,8 \text{ cm}$, $L4 = 0,2 \text{ cm}$ (mínimo), $L5 = 2,0 \text{ cm}$, $L6 = 8,0 \text{ cm}$ e $b = 2,0 \text{ cm}$. É considerada a velocidade de entrada dependente do tempo, em que são analisados 20 instantes de tempo com o aumento linear da velocidade máxima de entrada, a qual, inicialmente, é nula e no último instante de tempo possui o valor de 20 cm/s , cada etapa de tempo possui $0,05\text{s}$.

Conforme o modelo de enxerto otimizado proposto por Abraham, Behr e Heinkenschloss (2005), a área de fluido do *bypass* escolhida é uma fração igual a 42% do domínio total. Para os parâmetros de otimização, é utilizado o valor de densidade igual a 1 g/cm^3 e viscosidade dinâmica $0,1 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Na Figura 26, é apresentado o resultado da geometria do *bypass* otimizado para a redução da energia dissipativa, para o qual foi utilizada uma malha de 25x70 elementos para o domínio fixo e malhas 5x30 para as entradas de velocidade abaixo do campo de otimização, considerando-se, em ambas, o elemento Taylor-Hood para a análise do método de elementos finitos, o qual considera 9 pontos de interpolação para a velocidade e 4 para as pressões.

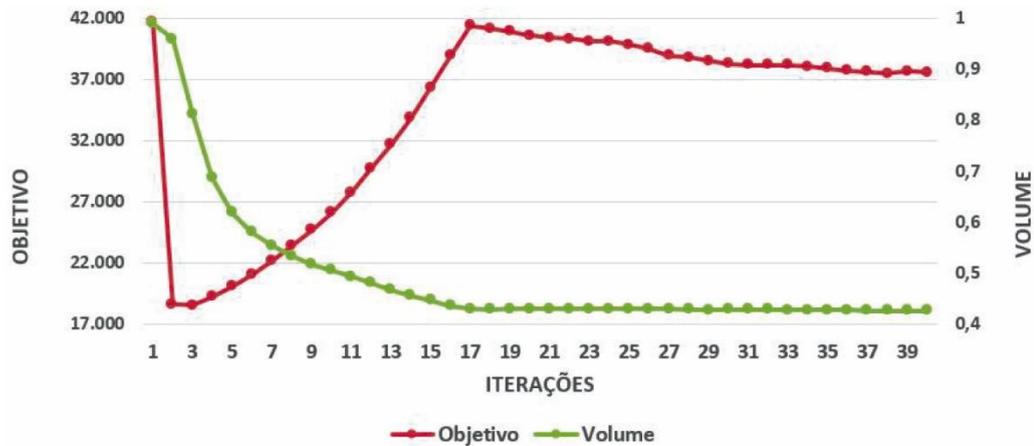
Na Figura 26 ainda é observado o resultado para os campos velocidades e de pressão. Na Figura 27, é apresentado o gráfico de convergência em relação ao volume e objetivo em cada iteração do processo de otimização; a convergência foi alcançada na iteração 40.

Figura 26 – a) Geometria ótima para o *bypass* arterial; b) Campo de velocidades para o tempo 0,04s; c) Campo de pressões para o tempo 0,04s



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Relação entre volume e objetivo em cada iteração do processo de otimização



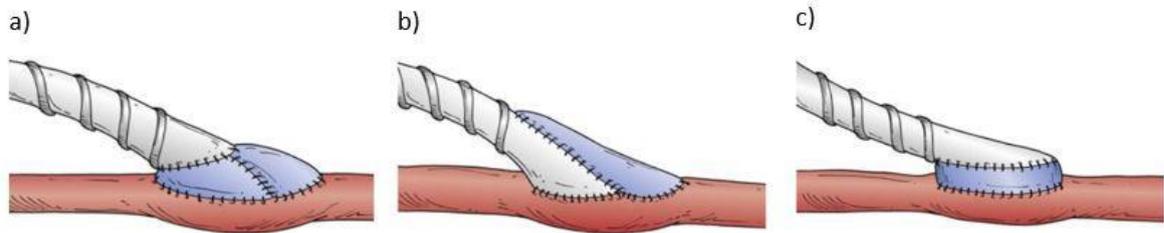
Fonte: Elaborada pelo autor.

No gráfico apresentado na Figura 27 é possível visualizar que o processo de otimização alcança o valor do volume predefinido na iteração 17. Até esse passo é observado o aumento do objetivo (perda de energia por dissipação), que é consequência da redução da área do enxerto, que restringe o fluxo por meio do domínio fixo, causando uma grande perda de pressão, devido à dissipação viscosa. A partir da iteração 17 são vistas uma constância no valor do volume e a redução do objetivo, isto é, a otimização do modelo para um determinado objetivo, considerando o limite de volume fluído do domínio.

4.1.4.2 Fluxo com restrição parcial

O segundo caso do *bypass* arterial consiste na otimização considerando uma artéria parcialmente bloqueada, à qual é anexado um enxerto para suprir a restrição do fluxo. Esse exemplo foi estudado, anteriormente, por Zhang e Liu (2015), para os casos de escoamentos laminares bidimensionais permanentes, em que o domínio de derivação arterial inclui duas entradas, sendo uma delas referente ao *bypass* e a outra, à artéria bloqueada. Também é adotada uma saída referente à continuação da artéria. O objetivo de utilizar esse modelo é determinar o perfil ótimo de conexão entre o *bypass* e a artéria, para cada caso de obstrução parcial avaliada. Na Figura 28 podem ser observados três tipos de técnicas de união entre o *bypass* e a artéria, que serão comparadas aos resultados numéricos.

Figura 28 – a) Técnica de união arterial *St Mary's boot*; b) Técnica de união arterial *Taylor Patch*; c) Técnica de união arterial *Miller Cuff*



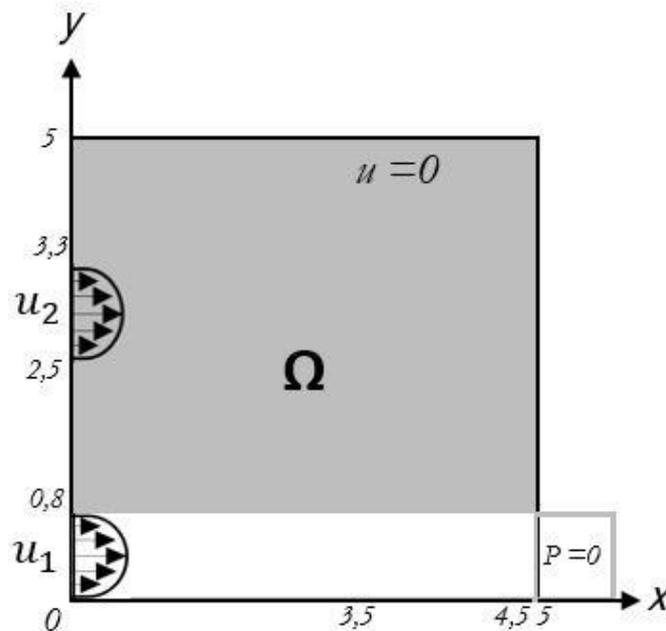
Fonte: Joseph e Mills (2014).

No modelo de união arterial *Taylor Patch* é introduzido um complemento a jusante, com o objetivo de aumentar a área de união entre a artéria obstruída. O modelo *St Mary's boot* consiste no mesmo conceito da técnica *Taylor Patch*, porém, com a finalidade de aumentar a área de conexão a jusante e a montante do ponto de intercessão entre a artéria e o enxerto. A técnica *Miller Cuff* consiste em manter as áreas de contato entre as superfícies do *bypass* e a artéria próxima à área do enxerto, sem aumento expressivo no ponto de conexão.

Segundo Joseph e Mills (2014), não há diferença clínica no emprego dos métodos apresentados, ficando na responsabilidade do cirurgião a avaliação de cada caso e a definição do método de união a ser utilizado.

Para a representação do problema proposto para a otimização são adotados dois perfis de entrada de velocidade parabólica, e as condições de contornos utilizados são representadas na Figura 29. São analisados quatro subcasos, com velocidades diferentes entre as entradas do escoamento, representando níveis de restrição de fluxo na artéria de 25%, 50%, 75% e 90%, respectivamente.

Os valores de velocidades de entrada máximas, para cada caso, são representados na Tabela 4.

Figura 29 – Domínio fixo e condições de contorno *bypass* considerando o bloqueio parcial

Fonte: Zhang e Liu (2015).

Tabela 4 – Casos de entrada de velocidades máximas

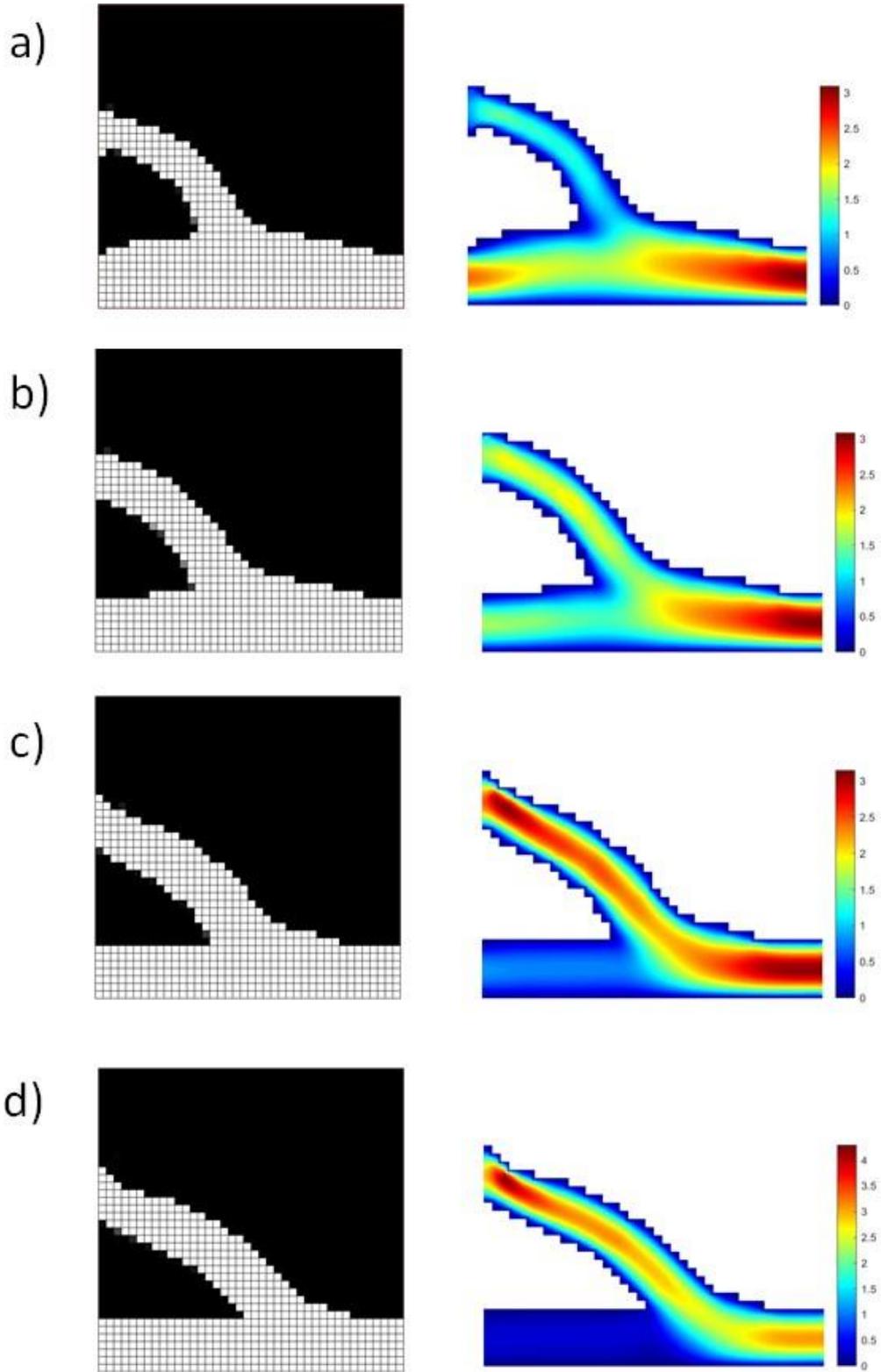
	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
u_1 [cm/s]	15,75	10,50	5,25	2,10
u_2 [cm/s]	5,25	10,50	15,75	18,90

É adotada uma malha de 1.600 elementos *Taylor-Hood*, em que são considerados a viscosidade dinâmica de $0,1 \text{ cm}^2/\text{s}$, a densidade de 1 g/cm^3 e o aumento de velocidade transiente, considerando 20 instantes de tempo com o aumento linear de velocidade, partindo do instante inicial com velocidade nula até o instante final com as velocidades determinadas na Tabela 4. Para esse exemplo também é adotado o valor do termo de penalização $q = 0,01$.

O volume final da otimização dentro do domínio é 30% de fluído, a parcela de domínio entre a entrada de velocidade u_1 e a saída é considerada totalmente fluída, em que é feita a simulação da artéria estenosada.

As geometrias finais obtidas para esses exemplos são apresentadas na Figura 30 e consistem na melhor configuração da união entre o enxerto e a artéria restrita, com o objetivo de minimizar a dissipação de energia.

Figura 30 – Resultado de geometria ótima e perfis de velocidade para os casos: a) Caso 1; b) Caso 2; c) Caso 3; d) Caso 4



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos resultados apresentados na Figura 30, é possível observar que no caso de menor obstrução (Caso 1) o perfil de velocidade no ponto de intercessão possui a distribuição de zonas intermediárias a jusante e a montante da união, logo, o perfil se assemelha ao modelo *St Mary's boot*, que possui a proposta de distribuição de velocidades nessas regiões, conforme se observou na geometria ótima.

Para o Caso 2, é vista uma pequena contribuição das zonas de distribuição de velocidades intermediárias a montante e uma maior distribuição do campo de velocidade a jusante do ponto de intercessão; logo, o perfil de velocidades possui grande semelhança com a técnica de união do *bypass* com a artéria *Taylor Patch*.

Para os Casos 3 e 4, é vista uma pequena zona de distribuição de velocidade a jusante nos pontos de intercessão do *bypass* com a artéria estenosada; é possível conferir que nesses casos extremos de obstrução é verificada uma melhor performance do modelo quando é utilizada a técnica *Miller Cuff* para a união do enxerto.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho são demonstrados os conceitos de desenvolvimento da otimização topológica para determinar geometrias ótimas de escoamentos laminares transientes bidimensionais.

Nos conceitos abordados foi visto que, a partir de um objetivo e restrições predefinidas para um modelo de condições de contorno impostas, é possível obter uma topologia ótima para o problema de escoamento transiente laminar, sem a necessidade de uma forma inicial.

Para a modelagem do escoamento foram utilizadas equações transientes e incompressíveis de Navier-Stokes, sendo realizada a combinação com a equação de Darcy. A inclusão do termo Darcy torna possível determinar a permeabilidade do material no domínio, distinguindo sólido de fluido. A equação de Brinkman é discretizada e resolvida utilizando o método dos elementos finitos com abordagem a partir de software numérico.

A partir dos conceitos demonstrados, um algoritmo de otimização baseado em gradientes da função objetivo em relação às variáveis de projeto é implementado, em que é considerado todo o intervalo de tempo analisado no problema transiente. O algoritmo atualiza os valores de permeabilidade de cada elemento de forma iterativa até o valor de topologia ótima.

Foi utilizada uma função objetivo de redução da dissipação de energia para a equação de Brinkman, considerando o escoamento transiente e comparando com exemplos da literatura, nos quais os resultados são geometrias ótimas semelhantes, mesmo considerando algoritmos de otimização, malhas e elementos diferentes. Com o método desenvolvido foram obtidos resultados de geometrias ótimas para o problema de *bypass* arterial, em situações em que são verificados casos de bloqueio parcial e total.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Como trabalho futuro, o autor sugere considerar modelos de escoamentos turbulentos e análise de fluxos de fluídos não newtonianos para escoamentos transientes. Também é vista como oportunidade de trabalhos futuros a implementação do método de otimização topológica de escoamentos transientes considerando problemas tridimensionais, principalmente para os casos reais de escoamentos sanguíneos em *bypass* arterial.

REFERÊNCIAS

- ABRAHAM, F.; BEHR, M.; HEINKENSCHLOSS, M. Shape optimization in steady blood flow: a numerical study of non-newtonian effects. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, *Taylor & Francis*, v. 8, n. 2, p. 127-137, 2005.
- ANGOT, P.; BRUNEAU, C.-H.; FABRIE, P. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, v. 81, n. 4, p. 497-520, 1999.
- BACK, T. *Evolutionary algorithms in theory and practice: evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms*. [S.l.]: Oxford University Press, 1996.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, Springer-Verlag, v. 1, n. 4, p. 193-202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Optimization of structural topology, shape, and material*. New York: Springer, 1995. v. 414.
- BENEDDINE, S. *Characterization of unsteady flow behavior by linear stability analysis*. 2017. 150 f. Tese (Doutorado em Mécanique des fluides) – Université Paris-Saclay (ComUE), 2017.
- BERTSEKAS, D. P. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. [S.l.]: Academic Press, 2014.
- BITTENCOURT, M. L. *Introdução ao método de elementos finitos aplicado à análise estrutural – exemplos com o programa ansys*. Campinas: Unicamp, 2007.
- BORRVALL, T.; PETERSSON, J. Topology optimization of fluids in stokes flow. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 41, n. 1, p. 77-107, 2003.
- BRINKMAN, H. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, Springer, v. 1, n. 1, p. 27-34, 1949.
- CHOI, S. *et al.* Helicopter rotor design using a time-spectral and adjoint-based method. In: AIAA/ISSMO – MULTIDISCIPLINARY ANALYSIS AND OPTIMIZATION CONFERENCE, 12., 2008. *Anais eletrônicos [...]* São Paulo, 2008. p. 5810.
- ÇLABUK, H.; MODI, V. Optimum plane diffusers in laminar flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 237, p. 373-393, 1992.
- COCKBURN, B.; SHU, C.-W. The local discontinuous galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, [S.l.], v. 35, n. 6, p. 2440–2463, 1998.
- DAVIS, L. *Handbook of genetic algorithms*. New York: CumInCAD, 1991.

DENG, Y. *et al.* Topology optimization of unsteady incompressible Navier-Stokes flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 230, n. 17, p. 6688-6708, 2011.

DHATT, G.; FOMO, B. K.; BOURQUE, C. A ψ - ω finite element formulations for the Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 17, n. 2, p. 199-212, 1981.

FARRELL, P. E. *et al.* Automated derivation of the adjoint of high-level transient finite element programs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, [S.l.], v. 35, n. 4, p. C369-C393, 2013.

FORTUNA, A. de O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluídos*. [S.l.]: Edusp, 2000. v. 30.

FRÝBA, L. *Vibration of solids and structures under moving loads*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 1.

GERSBORG-HANSEN, A.; SIGMUND, O.; HABER, R. B. Topology optimization of channel flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, [S.l.], v. 30, n. 3, p. 181-192, 2005.

HASUND, K. E. S. *Topology optimization for unsteady flow with applications in biomedical flows*. 2017. 97 f. Thesis (Master of Science in Physics and Mathematics) – Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology – NTNU, 2017.

JOSEPH, L.; MILLS, S. Infrainguinal disease: surgical treatment in Cronenwett and Johnston. *Vascular surgery*, Philadelphia, Elsevier Saunders, p. 1758-81, 2014.

KAYA, S.; RIVIÈRE, B. A discontinuous subgrid eddy viscosity method for the time-dependent Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, [S.l.], v. 43, n. 4, p. 1572-1595, 2005.

KOGA, A. A. *Projeto de dispositivos de microcanais utilizando o método de otimização topológica*. 2017. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade de São Paulo, 2010.

KREISSL, S. *Topology optimization of flow problems modeled by the incompressible Navier-Stokes equations*. 2011. 149 p. Thesis (Doctor of Philosophy) – Department of Aerospace Engineering, University of Colorado at Boulder, 2011.

KREISSL, S.; PINGEN, G.; MAUTE, K. Topology optimization for unsteady flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 87, n. 13, p. 1229-1253, 2011.

LAHUERTA, R. D. *Projeto de estruturas considerando o efeito da não linearidade geométrica utilizando o método de otimização topológica*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2012.

MOHAMMADI, B.; PIRONNEAU, O. *Applied shape optimization for fluids*. [S.l.]: Oxford university press, 2010.

NØRGAARD, S.; SIGMUND, O.; LAZAROV, B. Topology optimization of unsteady flow problems using the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 307, p. 291-307, 2016.

NTANAKAS, G.; MEYER, M. *The unsteady discrete adjoint method for turbomachinery applications*. ISUAAAT Scientific Committee, 2015.

OLASON, A.; TIDMAN, D. *Methodology for topology and shape optimization in the design process*. 2010. 74 p. Thesis (Master in Solid and Fluid Mechanics) – Department of Applied Mechanics Division of Dynamics, Goteborg, Sweden, 2010.

OLSHANSKII, M. A.; REBHOLZ, L. Application of barycenter refined meshes in linear elasticity and incompressible fluid dynamics. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Institute of Computational Mathematics, v. 38, p. 258-274, 2011.

PAPOUTSIS-KIACHAGIAS, E. M.; GIANNAKOGLU, K. C. Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: industrial applications. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Springer, v. 23, n. 2, p. 255-299, 2016.

PORTELLA, P. E. *Equações de Navier-Stokes pelo método dos elementos finitos*. 1984. 97 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1984.

QUARTERONI, A.; ROZZA, G. Optimal control and shape optimization of aorto-coronary bypass anastomoses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, World Scientific, v. 13, n. 12, p. 1801-1823, 2003.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The finite element method in heat transfer and fluid dynamics*. [S.l.]: CRC press, 2010.

ROMERO, J.; SILVA, E. A topology optimization approach applied to laminar flow machine rotor design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 279, p. 268-300, 2014.

RYZHAKOV, P.; MARTI, J. A semi-explicit multi-step method for solving incompressible Navier-Stokes equations. *Applied Sciences*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 8, n. 1, p. 119, 2018.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 24, n. 2, p. 359-373, 1987.

THOMÉE, V. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 25.

TSEGA, E. G.; KATIYAR, V. Finite element solution of the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations using matlab. *Applications & Applied Mathematics*, v. 13, n. 1, 2018.

WHITE, F. M.; CORFIELD, I. *Viscous fluid flow*. New York: McGraw-Hill, 2006. v. 3.

YAMALEEV, N. K.; DISKIN, B.; NIELSEN, E. J. Local-in-time adjoint-based method for design optimization of unsteady flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 229, n. 14, p. 5394-5407, 2010.

ZHANG, B.; LIU, X. Topology optimization study of arterial bypass configurations using the level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 51, n. 3, p. 773-798, 2015.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*. [S.l.]: Elsevier, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Verificação do Método de Elementos Finitos

Nas soluções numéricas de problemas considerando escoamento incompressível é possível verificar divergências entre uma solução exata e o resultado obtido por meio de métodos numéricos, as variações podem apresentar valores diferentes quando aplicados métodos de discretização, tipos de elementos ou malhas distintas.

Neste trabalho, a implementação das equações transientes de Navier-Stokes foi testada comparando com um caso *benchmark*, em que os resultados exatos e a pressão e velocidade são conhecidos.

O exemplo utilizado foi proposto por Kaya e Rivière (2005) e, posteriormente, aplicado em um caso semelhante a este trabalho por Olshanskii e Rebholz (2011), que foi usado para comparar a precisão e a estabilidade de diferentes métodos de análise temporal. Nesse exemplo, resolvem-se as equações de Navier-Stokes em um domínio quadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, com unidades de velocidades homogêneas, e ajusta-se a força do corpo de forma que a solução exata de velocidades e pressões no domínio são dadas pelas Equações A.1 e A.2.

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{bmatrix} \pi \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \sin(t) \\ -\pi \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \sin(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$p(x, y, t) = \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(t) \quad (\text{A.2})$$

Para o cálculo das soluções numéricas a partir do MEF, são verificadas as equações da continuidade na Equação A.3.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \pi^2 \sin(2\pi y) \sin(2\pi x) \sin(t); \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(t) \quad (\text{A.3})$$

Adotando os valores adimensionais $\rho = 1$ e $\mu = 1$, tem-se que a força do corpo para o problema do MEF será dada pelas Equações A.4 e A.5.

$$f_x = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$f_y = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.5})$$

Em que cada termo das equações de força do corpo é demonstrado nas equações A.6 a A.10.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(t); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) \sin(t) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \pi \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \cos(t); \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\pi \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \cos(t) \quad (\text{A.7})$$

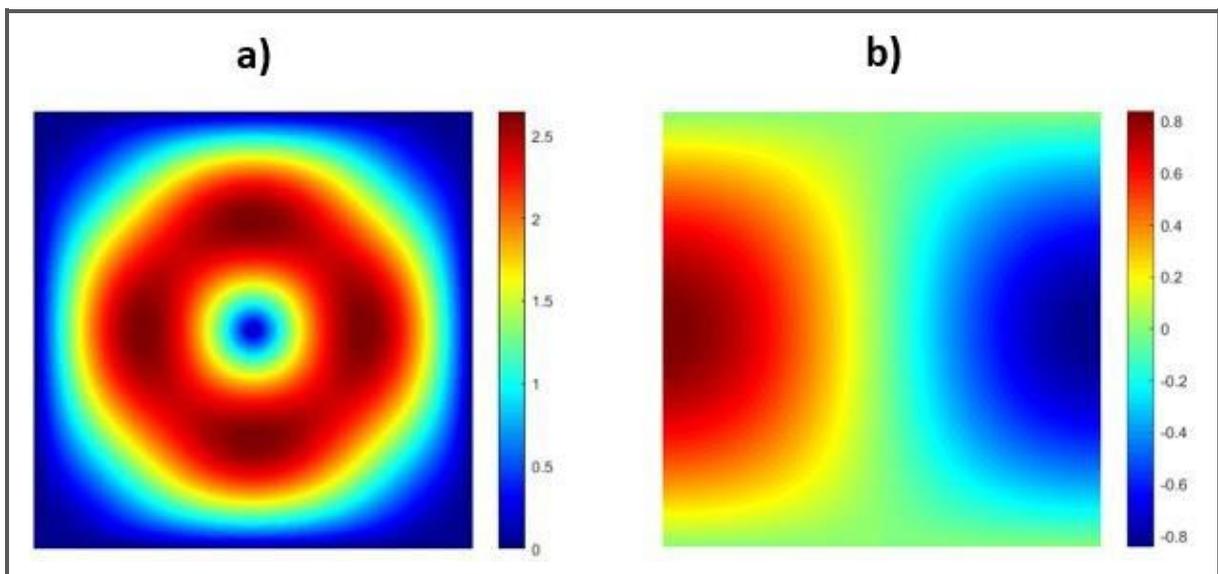
$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 2\pi^2 \cos(2\pi y) \sin^2(\pi x) \sin(t); \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = -2\pi^2 \cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) \sin(t) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 2\pi^3 \sin(2\pi y) \cos(2\pi x) \sin(t); \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 4\pi^3 \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \sin(t) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -4\pi^3 \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \sin(t); \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -2\pi^3 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(t) \quad (\text{A.10})$$

São comparados os resultados do problema numérico e analítico para o caso *benchmark* proposto, e visto que as regiões máximas e mínimas e escalas de velocidades e pressões foram semelhantes e de acordo com o apresentado na literatura, conforme identifica a Figura 31.

Figura 31 – Para o instante de tempo 1s: a) Resultado do campo de velocidades para os casos analítico e numérico; b) Resultado do campo de pressões para os casos analítico e numérico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os resultados demonstrados na Figura 31, foi considerado o fluido incompressível, com valores de ρ e μ adimensionais e igual a 1, fluxo com variações em 100 instantes de tempo, considerando cada passo no tempo em 0,05s, sendo analisado o problema do instante de 0 a 5 segundos.

Foi adotada para os resultados obtidos uma malha 50x50 elementos Taylor-Hood, em que são considerados 9 pontos de interpolação para as velocidades e 4 para as pressões, em cada elemento.

É ainda necessário verificar o erro associado ao problema numérico em comparação ao analítico. O erro para esse exemplo é calculado seguindo o exemplo semelhante avaliado por Ryzhakov e Marti (2018), no qual é avaliado o campo velocidade do ponto (0, 75; 0, 75) do domínio; nesse ponto, os valores de velocidades das direções u_1 e u_2 possuem os mesmos módulos, logo, é possível comparar o erro em cada direção.

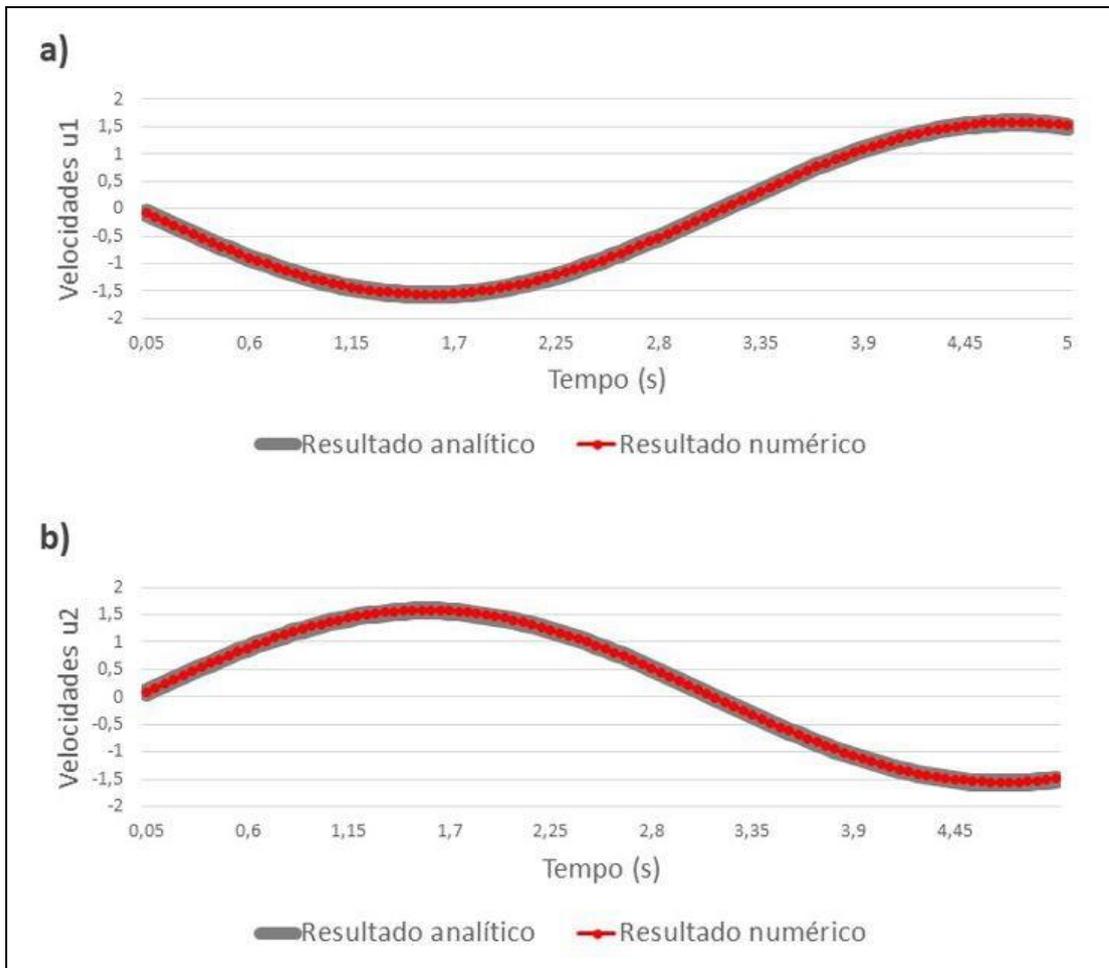
Somente é avaliado o campo de velocidade, pois, conforme demonstrado por Gersborg-Hansen, Sigmund e Haber (2005), a função objetivo de redução da dissipação de energia não depende do campo de pressões, sendo apenas dependente do campo de velocidade, além disso, nos campos de pressões foram obtidos resultados semelhantes e conforme apresenta a literatura, em ambos os casos.

A verificação do erro é realizada no campo de velocidades para o ponto (0,75; 0,75), para as duas velocidades u_1 e u_2 , em que o erro relativo de cada caso é calculado pela Equação A.11.

$$\text{Erro Relativo} = \frac{\text{Valor Analítico} - \text{Valor Numérico}}{\text{Valor Numérico}} \quad (\text{A.11})$$

Na Figura 32 é feita a comparação entre os valores de velocidades para os casos numérico e analítico, no ponto (0, 75; 0, 75).

Figura 32 – a) Resultado de velocidade u_1 em função do tempo; b) Resultado de velocidade u_2 em função do tempo

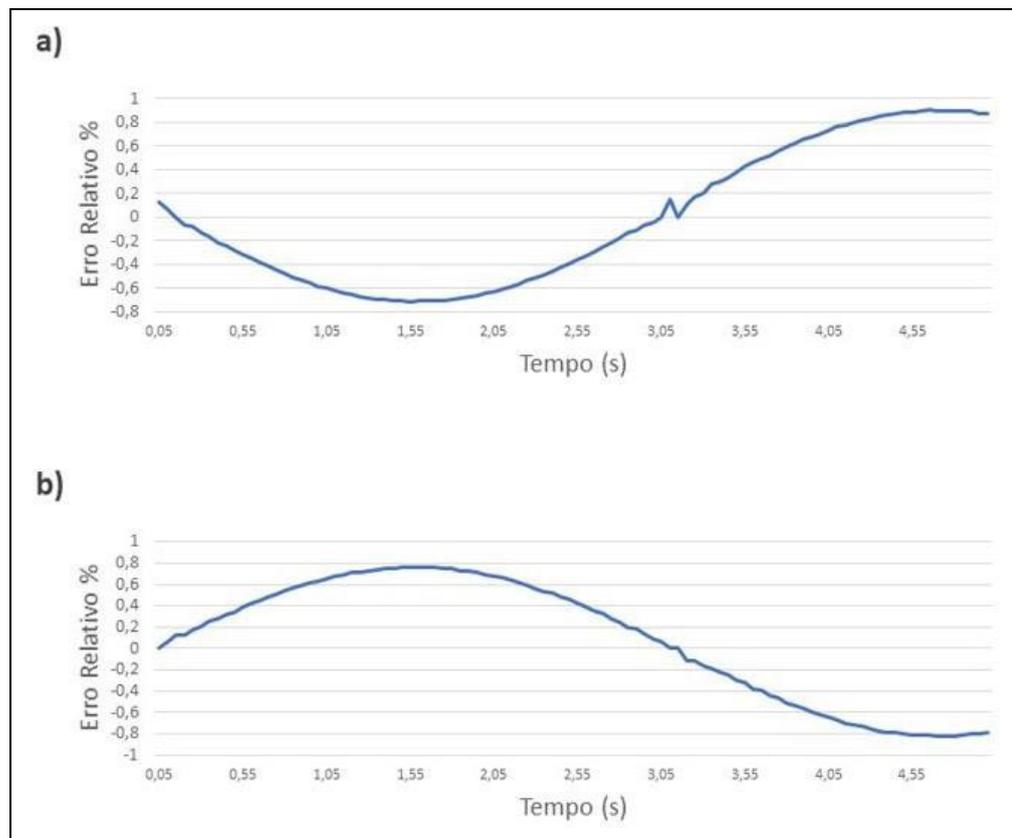


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 32 observa-se que os valores numéricos e analíticos de velocidades nos dois eixos analisados possuem grande proximidade, com variações não perceptíveis na escala avaliada.

É feita a análise dos erros relativos entre os resultados observados na Figura 32, na qual pode ser visto que o erro relativo é diretamente proporcional à velocidade, ou seja, nos pontos de maior velocidade o erro relativo é maior. Os valores são apresentados na Figura 33, na qual se nota que o módulo de erro máximo para as velocidades u_1 é 0,906% no tempo 4,65s, enquanto na velocidade u_2 o erro máximo é 0,822% no tempo 4,75s.

Figura 33 – a) Erro relativo para as velocidades u_1 em função do tempo; b) Erro relativo para as velocidades u_2 em função do tempo



Fonte: Elaborada pelo autor.