UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS – CCE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

GILBERTO CAETANO JÚNIOR

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM SOBRE DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA

VITÓRIA - ES

OUTUBRO 2021

GILBERTO CAETANO JÚNIOR

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM SOBRE DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

VITÓRIA - ES

OUTUBRO 2021

GILBERTO CAETANO JÚNIOR

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM SOBRE DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em _____ de _______________ de 2021.

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
(Orientador)
UFES

Prof. Dr. Moacir do Rosado Filho
UFES

Prof. Dr. José de Arimatéia
UFCG

Este trabalho é dedicado à minha esposa, aos meus filhos e aos meus pais. De modo especial, à memória do meu pai, Gilberto Caetano, que nunca mediu esforços para que eu concluísse meus estudos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido chegar até aqui.

Agradeço a minha esposa, Roberta Vanini, que sempre me apoiou e me incentivou, que não me permitiu desanimar ao longo do caminho, que compartilhou comigo os momentos difíceis e também os momentos felizes, sem ela eu não teria conseguido chegar até o final . Agradeço aos meus filhos, minha fonte de inspiração, e que por muitas vezes tiveram que abrir mão de mais tempo comigo a fim de que eu pudesse me dedicar aos estudos.

Agradeço aos amigos do PROFMAT-UENF e PROFMAT-UFES. De maneira especial, agradeço aos amigos Douglas Eiriz, Guilherme Coelho, Eduardo Corrêa, Humberto Filho e Helder Dalvi, grandes companheiros de estudo e de viagem, com os quais tive a oportunidade de compartilhar excelentes momentos durante as longas viagens de carro até a Universidade.

Aos meus professores, da UENF e da UFES, de maneira especial ao meu orientador, prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, e ao coordenador do PROFMAT-UFES, Prof. Dr. Moacir do Rosado Filho, grandes mestres que me inspiram a trilhar o caminho do conhecimento e da Educação. Ao prof. Dr. José de Arimatéia, que se dispôs a compor a banca deste trabalho.

Agradeço ao prof. Dr. Jorge Henrique Gualandi, grande mestre com o qual aprendi muito e pelo qual tenho grande respeito e admiração.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original." (Albert Einstein)

Resumo

O ensino da Matemática, ainda hoje, é um dos grandes desafios da Educação. Seu ensino, durante muitos anos, priorizou o caráter abstrato e deixou a parte prática em segundo plano. Tal fato, fez com que grande parte dos alunos passasse a enxergar a Matemática como uma ciência desconexa da realidade e sem utilidade prática. Felizmente, nos últimos anos, as discussões acerca do tema e a busca por novas metodologias de ensino, têm resgatado o interesse dos estudantes por estudar e aprender Matemática. Nessa perspectiva, a Resolução de Problemas como metodologia para o ensino da Matemática vem se mostrando uma ferramenta extremamente eficaz, podendo ser utilizada para o ensino de praticamente todos os conteúdos matemáticos. Especificamente, neste trabalho, o objetivo é trabalhar as ideias acerca de Divisibilidade e Congruência Modular utilizando a Resolução de Problemas como metodologia para a introdução dos referidos conteúdos. O trabalho foi dividido em duas partes, sendo a primeira a pesquisa do referencial teórico e, a segunda, uma abordagem de campo, na qual participaram os alunos de 8° e 9° ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública. Para essa segunda parte do trabalho, foi aplicada uma lista de questões com problemas envolvendo Divisibilidade e Congruência e os alunos tiveram um tempo pré-determinado para resolvê-la. Após a análise e tabulação dos resultados, a lista foi comentada e resolvida juntamente com os alunos, que tiveram a oportunidade de ter contato com conteúdos, até então desconhecidos para os mesmos, de uma maneira diferente. A análise dos resultados revelou a importância da utilização da Resolução de Problemas como ferramenta de ensino, motivando a aprendizagem dos alunos e tornando-os protagonistas na construção do seu próprio conhecimento.

Palavras-chaves: Resolução de Problemas. Divisibilidade. Congruência Modular. Metodologia de ensino.

Abstract

The teaching of Mathematics, even today, is one of the great challenges of Education. Its teaching, for many years, prioritized the abstract character and the practical part was left in the background. Because of that, a great part of the students started seeing Mathematics as a disconnected science from reality and with no practical use. Fortunately, in recent years, discussions about this topic and the search for new teaching methodologies have rescued students' interest in studying and learning Mathematics. From this perspective, Problem Solving as a methodology for teaching Mathematics has proven to be an extremely effective tool and it can be used for teaching practically all mathematical content. Specifically, in this paper, the objective is to work the ideas about Divisibility and Modular Congruence using Problem Solving as a methodology for the introduction of the referred contentes The paper was divided into three parts, the first one is the research of the theoretical framework, the second one a field approach, in which students from the 8th and 9th grade of Elementary School of a Public School took part, and the third part, the analysis and discussion of results. For the second part of the work, a list of issues with mathematical problems involving Divisibility and Congruence was applied and the students had a predetermined time to solve it. After analyzing and tabulating the results, the list was commented and solved together with the students, who had the opportunity of getting in touch with the contents that were unknown to them, in a different way. The analysis of the results revealed the importance of using Problem Solving as a teaching tool, motivating students' learning and making them protagonists in the construction of their own knowledge.

Key-words: Problem Solving. Divisibility. Modular Congruence. Teaching Methodology.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

PAEBES	Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Lista de símbolos

$\in$	Pertence
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}^*$	Conjunto dos números inteiros, exceto o zero.
$>$	Maior
$<$	Menor
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual
$\equiv$	Congruente

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa

A Matemática, desde o inicio da humanidade, sempre se apresentou como uma das mais importantes ciências e, ao longo da história, constituiu-se na principal ferramenta para o desenvolvimento técnico e científico que acompanhou a sociedade até os dias atuais. De acordo com Borba e Skovsmose (2001), a matemática é relevante e confiável, porque pode ser aplicada a todos os tipos de problemas reais. A aplicação da matemática não tem limite, já que é sempre possível matematizar (p.130 e 131). Dessa forma, pode-se afirmar que ela é a base fundamental para o desenvolvimento de muitas outras ciências e, por esse motivo, seu ensino se estende aos mais variados cursos de graduação. Assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997).

> A Matemática, surgida na Antiguidade por necessidades da vida cotidiana, converteu-se em um imenso sistema de variadas e extensas disciplinas. Como as demais ciências, reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e domínio da natureza (BRASIL, 1997, p. 23).

Devido à sua grande importância, a Matemática ocupa papel de destaque em todos os níveis de ensino e os resultados obtidos pelos alunos, tanto em provas internas quanto externas, são utilizados como parâmetros de medida da qualidade do ensino. Entre as principais provas externas usadas para avaliar o desempenho dos alunos destacam-se a Prova de Avaliação da Educação Básica do Estado do Espírito Santo (PAEBES), a Prova Brasil, a Prova Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), entre outras. De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o Saeb,

> permite que as escolas e as redes municipais e estaduais de ensino avaliem a qualidade da educação oferecida aos estudantes. O resultado da avaliação é um indicativo da qualidade do ensino brasileiro e oferece subsídios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas educacionais com base em evidências (BRASIL, 2019, p. 1).

Num contexto mais amplo, aprender matemática é uma necessidade de todo ser humano, visto que, mesmo as situações mais simples do dia a dia estão carregadas de significado matemático.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, os conceitos e resultados matemáticos têm origem no mundo real e encontram aplicações em inúmeros aspectos práticos da vida diária (BRASIL, 1997). Destacamos que tais aspectos estão relacionados às aplicações nas indústrias, na tecnologia e no comércio, dentre outros.

De acordo com Fuchs et al. (2014), o ensino de Matemática preocupava-se com um estudo formal, partindo de elementos primitivos e definições para prosseguir com a teoria e com os exercícios, deixando a aplicação do conteúdo para segundo plano. Durante muitos anos, dentro do contexto da sala de aula, a matemática assumiu um caráter de exclusão; o aluno que tinha facilidade para aprender os conteúdos matemáticos era considerado um aluno "inteligente" e apto a ter sucesso em sua vida profissional, enquanto aquele estudante que tinha mais dificuldade para aprender, geralmente, era visto como alguém sem futuro, provavelmente fadado ao fracasso.

> Além dos índices que indicam o baixo desempenho dos alunos na área de Matemática em testes de rendimento, também são muitas as evidências que mostram que ela funciona como filtro para selecionar alunos que concluem, ou não, o ensino fundamental. Frequentemente, a Matemática tem sido apontada como disciplina que contribui significativamente para elevação das taxas de retenção (BRASIL, 1997, p.24).

Felizmente, essa visão mudou e, hoje, são levadas em consideração as outras inteligências e aptidões que o aluno possui. Assim, de acordo com os PCNs,

> Os alunos trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições, construídos através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural. Eles chegam à sala de aula com diferenciadas ferramentas básicas para, por exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Além disso, aprendem a atuar de acordo com os recursos, dependências e restrições de seu meio (BRASIL, 1997, p. 30).

Hoje, entende-se que cada aluno possui seu próprio tempo de aprendizagem e que, em muitos casos, devem-se adotar estratégias de ensino diferentes. Os PCNs (BRASIL, 1997) destacam a importância da matemática para a vivência plena da cidadania e, ao mesmo tempo, evidenciam a necessidade de estratégias diferenciadas de ensino que possibilitem a apropriação do saber matemático por parte de todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

> "Novas competências demandam novos conhecimentos: o mundo do trabalho requer pessoas preparadas para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita), instalando novos ritmos de produção, de assimilação rápida de informações, resolvendo e propondo problemas em equipe. Para tanto, o ensino da Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios" (Brasil, 1997, p. 31).

Além dos PCNs, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) enfatiza a grande importância do saber matemático. Segundo o documento, a necessidade de o conhecimento matemático contemplar todos os alunos se deve tanto pela sua aplicabilidade em situações cotidianas quanto pela importância na formação de cidadãos comprometidos com os aspectos sociais inerentes ao meio no qual estão inseridos.

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2018, p. 1).

O ensino de Matemática deve ser capaz de proporcionar aos alunos um saber que incentive a autonomia e a iniciativa frente às inúmeras situações que permeiam o cotidiano e que exigem tomadas de decisões e raciocínio lógico. Nesse sentido, utilizar estratégias de ensino os quais possibilitem uma aprendizagem mais significativa e que desenvolva, de forma abrangente, todas as competências e habilidades de cada indivíduo é uma necessidade constante dentro do âmbito escolar.

A BNCC, com o objetivo de aproximar a Matemática da realidade dos alunos, trouxe uma reformulação dos conteúdos aplicados em todos os níveis da Educação Básica. O documento enfatiza, ainda, sobre a necessidade de o professor buscar, na resolução de problemas, uma metodologia para o ensino da Matemática que seja capaz de tornar o aluno um indivíduo questionador, apto a pensar e repensar situações que fogem do modelo convencional e que exigem uma capacidade de raciocínio mais autônoma por parte dos estudantes Desse modo, a BNCC (BRASIL, 2018), enfatiza que

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: "resolver e elaborar problemas envolvendo...". Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada (BRASIL, 2018, p. 8).

Nessa perspectiva, a Resolução de Problemas vem se destacando como uma excelente metodologia no que tange ao ensino e à aprendizagem de Matemática, de forma a proporcionar aos alunos momentos de discussões acerca dos conteúdos trabalhados. Assim, a resolução de problemas pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de situações matemáticas sem, no entanto, memorizar fórmulas e algoritmos, pois o processo de memorização pode reduzir a essência do saber matemático a uma repetição mecânica de exercícios cujos resultados eram previsíveis. Dessa forma, todo o processo de aprendizagem resumia-se apenas a se chegar à resposta desejada pelo professor e entendida como única e indiscutível. Muitos questionamentos por parte dos alunos eram ignorados, visto que fugiam do padrão esperado como correto, o que é enfatizado pelos PCNs:

> O conhecimento matemático é fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contraexemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos. Mas ele é apresentado de forma descontextualizada, atemporal e geral, porque é preocupação do matemático comunicar resultados e não o processo pelo qual os produziu (BRASIL, 1997, p. 28).

Hoje, entende-se que esses questionamentos são parte fundamental do processo de aprendizagem, pois são eles que desencadeiam a busca pelas respostas para um determinado problema. Grandes descobertas da humanidade foram feitas a partir de simples perguntas. Nesse contexto envolvendo a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, destaca-se o matemático George Polya, nascido na Hungria, em 13 de dezembro de 1887. Foi ele o primeiro a sistematizar a ideia da resolução de problemas como uma metodologia de ensino de Matemática. Segundo o autor, para uma boa resolução de um problema, é interessante que esse processo seja realizado em quatro etapas, a saber: 1ª) a compreensão do problema; 2ª) a elaboração de um plano; 3ª) a execução do plano; 4ª) a verificação da resposta.

Apresenta-se, no quadro 1, um resumo acerca das etapas que Polya sugere para a compreensão e resolução de problemas.

Quadro 1 – Resumo das etapas de resolução de problemas segundo Polya

Etapas	O que fazer?
Compreender o problema	Ler e entender o problema, identificar a incógnita e a condicionante, analisar os dados oferecidos pelo problema e verificar se eles são suficientes para satisfazer a condicionante.
Elaboração de um plano	Para a elaboração de um plano, é necessário procurar um problema parecido, cuja resolução seja conhecida, e verificar se o método utilizado pode ser usado na resolução do problema em questão. Também é necessário analisar se o problema pode ser resolvido por partes e se há mais de um caminho que possa levar à solução.
Execução do plano	Seguir, passo a passo, o roteiro traçado para a resolução do problema, utilizando para isso os conhecimentos já adquiridos, verificando se é possível demonstrar cada um desses passos.
Verificação da resposta	Verificar se o resultado obtido satisfaz a condicionante, verificar se existe outro caminho que leve à mesma resposta, verificar se o método utilizado pode ser usado na resolução de outro problema.

Fonte: Elaborado pelo autor, a partir de Polya (2006)

Segundo Polya (2006), a última etapa é a mais importante, porque por meio da análise da sua própria resposta o aluno poderá ser capaz de se questionar se o resultado obtido é o desejado, bem como fazer várias reflexões sobre o caminho percorrido, podendo, nesse processo, encontrar outros caminhos que levem à solução desejada. Os estudos de Polya acerca do tema abriram caminho para que outros pesquisadores pudessem se aprofundar mais no assunto, culminando numa série de publicações de artigos e livros que embasam o ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Destacam-se, nesse sentido, autores como Lester (1983), Pozo (1998) e Onuchic (1999).

Nas aulas tradicionais[1] de Matemática, ao iniciarem o estudo de um determinado conteúdo, os professores apresentam toda a teoria e, após isso, resolvem alguns exemplos no quadro. Após esse processo, preparam uma lista de problemas com situações parecidas com as que foram resolvidas como exemplo. Esse processo de repetição de exercícios reduz, consideravelmente, a capacidade de os alunos de se tornarem autossuficientes, questionadores e, consequentemente, protagonistas na construção do seu próprio conhecimento. O professor, ao dar um modelo a ser seguido, deixa muito pouco, ou quase nada, para o aluno descobrir. Afinal, um problema deixa de ser problema quando se tem um modelo a ser seguido. Dessa forma, uma parte importante do processo de construção do conhecimento acaba se perdendo, tornando o ensino de Matemática cansativo e desinteressante para os alunos.

Polya (2006), em seu livro “A Arte de Resolver Problemas” (1945), defende justamente o caminho inverso, ou seja, ao iniciar um novo conteúdo, o professor deve primeiro oferecer o problema e permitir que o aluno pense e reflita sobre ele. Nesse sentido, o professor assume o papel de mediador na construção do conhecimento. O conteúdo deve ser usado como uma ferramenta para a solução do problema e não o contrário. Oferecer problemas atrativos, que instiguem a curiosidade e que sejam, ao mesmo tempo, ligados à realidade, é fundamental para despertar no aluno o interesse pela aprendizagem de Matemática. Problemas sem conexão com a realidade e sem utilidade prática devem ser evitados pelos professores.

O trabalho a seguir foi desenvolvido a partir da ideia de que a Resolução de Problemas constitui-se numa excelente metodologia de ensino de Matemática, promovendo uma aprendizagem mais significativa para os alunos, ao mesmo tempo em os torna protagonistas na construção do seu próprio conhecimento.

1.2 Objetivo

Utilizar a resolução de problemas como metodologia para o ensino de divisibilidade e congruências, visando às suas aplicações na educação básica.

Como objetivos específicos podemos citar:

- Apresentar definições de divisibilidade e congruência;
- Estabelecer relações entre o conteúdo de divisibilidade com o conteúdo de congruências;

[1] Neste trabalho, entendemos como tradicional a aula que consiste, basicamente, na explicação oral do conteúdo por parte do professor, seguida de exemplos e exercícios como forma de fixação desse conteúdo, conforme afirmam os PCN’s (BRASIL, 1997, p.39).

- Utilizar as questões da OBMEP como parâmetro para provocar as discussões acerca dos conteúdos de divisibilidade e de congruência na educação básica.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho foi organizado seguindo-se uma sequência, articulada entre o referencial bibliográfico pesquisado relacionado à Resolução de Problemas como metodologia para o ensino e aprendizagem de Matemática e os conteúdos que foram objeto de investigação dessa pesquisa. As etapas deste trabalho foram divididas em: Discussões teóricas acerca das divisibilidades e suas aplicações, discussões acerca das congruências e suas aplicações, articulação entre as temáticas sobre divisibilidade e congruência, bem como as descrições sobre as produções e análise de dados e as considerações finais.

Capítulo 2

Divisibilidade

A Divisão Euclidiana é o tema do próximo capítulo deste trabalho. No entanto, antes de abordar o algoritmo da divisão e suas implicações, é necessário entender o conceito de divisibilidade. Segundo a definição dada por Hefez (2015).

> "Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c.a$. Nesse caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a ou que b é divisível por a."

É importante ressaltar que a notação $a|b$ não indica nenhuma operação e também não representa uma fração, expressando apenas que a é um divisor de b.

Exemplos:

1. $2|8 \rightarrow$ dizemos que 2 divide 8, o que significa que existe um número o qual, multiplicado por 2, dá como resultado 8. Esse número é o 4, pois $8 = 4.2$.

2. $3|15 \rightarrow$ dizemos que 3 divide 15, o que significa que existe um número o qual, multiplicado por 3, dá como resultado 15. Esse número é o 5, pois $15 = 5.3$.

3. $6| - 42 \rightarrow$ dizemos que 6 divide (-42), o que significa que existe um número o qual, multiplicado por 6, dá como resultado (-42). Esse número é o (-7), pois $-42 = 6.(-7)$.

4. $-5|80 \rightarrow$ dizemos que (-5) divide 80, o que significa que existe um número o qual, multiplicado por (-5), dá como resultado 80. Esse número é o (-16), pois $80 = (-5).(-16)$.

Na divisibilidade, devem ser observadas as seguintes propriedades:

I. $a|0$:

Tem-se que qualquer número sempre divide 0, com $a \neq 0$. De fato, tem-se que $0 = a.0$.

II. $1|a$:

O número 1 é divisor universal, é o elemento neutro da multiplicação. Desse modo, sempre existirá $a = 1.a$.

III. $a|a$:

De fato, para qualquer valor de a, com $a \neq 0$, sempre existirá um número que, multiplicado por a, resultará no próprio número a. Assim, $a = a.1$.

IV. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$:

Para provar essa propriedade, podem-se adotar as seguintes notações:

1. $b = a.q_1$, no qual q_1 é um inteiro que, multiplicado por a, tem como resultado b.

2. $c = b.q_2$, no qual q_2 é um inteiro que, multiplicado por b, tem como resultado c.

Substituindo a primeira equação na segunda, tem-se que $c = a.q_1.q_2$ ou, $c = a.(q_1.q_2)$.

Assim, conclui-se que a é um fator de c e, portanto, c é divisível por a.

V. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(b+c)$:

Para provar essa propriedade, pode-se usar o mesmo artifício utilizado para a propriedade IV. Desse modo,

1. $b = a.q_1$, em que q_1 é um inteiro que, multiplicado por a, tem como resultado b.

2. $c = a.q_2$, em que q_2 é um inteiro que, multiplicado por a, tem como resultado c.

Somando-se as duas equações, tem-se que

$b + c = a.q_1 + a.q_2$

$b + c = a(q_1 + q_2) \rightarrow$ colocando-se o fator a em evidência.

Desse modo, tem-se que a é um fator de $b + c$ e, portanto, $b + c$ é divisível por a.

Essa mesma propriedade vale para a diferença, ou seja, se $a|b$ e $a|c$, então $a|(b - c)$ e a prova é análoga.

A seguir, têm-se alguns problemas sobre divisibilidade e suas respectivas soluções.

2.1 Exemplos de Aplicação de Divisibilidade

1. (Canal Portal da Matemática OBMEP – professor Cristiano Marcell) Mostre que $21|5^8 - 2^8$.

Solução: Para a resolução desse problema será utilizada a definição dos produtos notáveis, nesse caso, a diferença de dois quadrados. Utilizando-se essa definição, pode-se escrever a diferença $5^8 - 2^8$ na forma $(5^4 + 2^4).(5^4 - 2^4)$. Continuando com a mesma definição, tem-se que $5^4 - 2^4 = (5^2 + 2^2).(5^2 - 2^2)$. Resolvendo a expressão $5^2 - 2^2$, teremos $25 - 4 = 21$. Dessa forma, temos que $5^8 - 2^8 = (5^4 + 2^4).(5^2 + 2^2).21$. Ou seja, como 21 é um fator de $5^8 - 2^8$, tem-se que $21|5^8 - 2^8$.

2. (Canal Portal da Matemática OBMEP – professor Cristiano Marcell) Mostre que $10|11^6 - 1$.

Solução: Para a resolução desse problema, novamente pode-se usar a definição de produtos notáveis. A expressão $11^6 - 1$ pode ser escrita como $(11^2)^3 - 1^3$, o que nos dá a diferença de dois cubos. Sabe-se que $a^3 - b^3 = (a - b).(a^2 + ab + b^2)$. Dessa maneira, pode-se escrever $(11^2)^3 - 1^3$ como $(11^2 - 1).[(11^2)^2 + 11^2.1 + 1^2]$. A expressão $11^2 - 1$ representa a diferença de dois quadrados, podendo ser escrita na forma $(11 - 1).(11 + 1) = 10.12$. Desse modo, a expressão $11^6 - 1$ equivale a $10.12.[(11^2)^2 + 11^2.1 + 1^2]$. Como 10 é um fator da expressão, tem-se que $10|11^6 - 1$.

2.2 Problemas Envolvendo Divisibilidade

A seleção dos problemas sugeridos neste capítulo baseou-se, principalmente, no banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com ênfase no material didático do POT (Polo Olímpico de Treinamento), do Módulo Curso de Teoria dos Números - Nível 2, de autoria do professor Samuel Feitosa, e no livro "Círculos Matemáticos, a Experiência Russa", dos autores Fomin, Genkin e Itenberg.

Apresentam-se a seguir os problemas selecionados e uma sugestão de resolução para cada um deles.

1. (Portal da OBMEP) Mostre que se $3|a + 7b$ então $3|a + b$.

Sugestão de resolução: Para a resolução desse problema, pode-se reescrever a expressão $3|a+7b$ na forma $3|a + b + 6b$. Como $6b$ é divisível por 3, segue que $3|a + b$.

2. (Portal da OBMEP) Mostre que se $7|a + 3b$ então $7|13a + 11b$.

Sugestão de resolução: A expressão $a + 3b$ é divisível por 7, então $13.(a + 3b)$ também é divisível por 7. Portanto,

$$7|a + 3b$$

$$7|13.(a + 3b)$$

$$7|13a + 39b$$

$$7|13a + 11b + 28b$$

Como $28b$ é divisível por 7, tem-se que $13a + 11b$ é divisível por 7.

3. (Portal da OBMEP) Mostre que se $19|3x + 7y$ então $19|43x + 75y$.

Sugestão de resolução: Como $19|3x + 7y$, então $19|27.(3x + 7y)$. Dessa forma,

$$19|81x + 189y$$

$$19|38x + 43x + 114y + 75y$$

$$19|38x + 114y + 43x + 75y$$

$$19|19.(2x + 6y) + 43x + 75y$$

Como a expressão $19.(2x + 6y)$ é divisível por 19, segue que $43x + 75y$ é divisível por 19.

4. (Portal da OBMEP) Mostre que se $17|3a + 2b$ então $17|10a + b$.

Sugestão de resolução: A expressão $3a + 2b$ é divisível por 17, então $9.(3a + 2b)$ também é divisível por 17. Dessa forma, tem-se que:

$$17|9.(3a + 2b)$$

$$17|27a + 18b$$

$$17|17a + 10a + 17b + b$$

$$17|17a + 17b + 10a + b$$

$$17|17.(a + b) + 10a + b$$

Como a expressão $17.(a + b)$ é divisível por 17, segue que $10a + b$ é divisível por 17.

5. (FOMIN; ITENBERG, 2010) Encontre todas as soluções de números naturais das equações:

a) $x^2 - y^2 = 31$

b) $x^2 - y^2 = 303$

Sugestão de resolução:

a) Para a resolução desse problema, pode-se recorrer, novamente, à definição dos produtos notáveis. Assim, a expressão $x^2 - y^2$, que é a diferença de dois quadrados, pode ser escrita como $(x - y).(x + y)$. Além disso, o número 31 é primo e, portanto, pode ser escrito como o produto de dois primos. No caso, 1 e 31. Dessa forma, tem-se que $(x - y).(x + y) = 31$. Os fatores $x - y$ e $x + y$ só podem assumir os valores 1 e 31, o que resulta no sistema de equações do 1° grau:

$$\begin{cases} x - y = & 1 \\ x + y = & 31 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y = & 31 \\ x + y = & 1 \end{cases}$$

Resolvendo-se os dois sistemas, encontraremos como soluções os pares ordenados $(16, 15)$ e $(16, -15)$, respectivamente. Como o enunciado pede apenas as soluções de números naturais, tem-se que $S = \{(16, 15)\}$.

b) Para a resolução do item b, pode-se utilizar a mesma estratégia que foi usada para resolver o item a, ou seja, decompõe-se o número 303 em fatores primos. Assim, ao realizar essa decomposição, verifica-se que 303 também é um número primo e pode ser escrito como 3 e 101. Dessa forma, podem-se escrever os sistemas:

$$\begin{cases} x - y = & 3 \\ x + y = & 101 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y = & 101 \\ x + y = & 3 \end{cases}$$

Resolvendo-se os dois sistemas, obtém-se como soluções os pares ordenados $(52, 49)$ e $(52, -49)$. Como o problema busca as soluções formadas por números naturais, teremos como solução $S = \{(52, -49)\}$.

Capítulo 3

Divisão Euclidiana

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, é muito comum ouvir falar nas quatro operações fundamentais. De modo geral, é grande a preocupação por parte dos professores que lecionam na educação básica que o aluno termine essa etapa de sua formação sabendo utilizar corretamente os algoritmos de cada uma dessas operações. No entanto, quando trabalhamos com o conjunto dos números naturais, que é o primeiro conjunto com o qual os alunos dessa etapa têm contato, nem sempre teremos todas as operações bem definidas. Segundo Ripoll et al. (2015) só podemos definir uma operação em $\mathbb{N}$ quando, invertendo a ordem dos elementos, e realizando novamente a operação, o resultado continuar em $\mathbb{N}$. Se considerarmos a operação da adição, por exemplo, teremos que $8 + 4 = 12$ e $4 + 8 = 12$, ou seja, independentemente da ordem dos elementos, o resultado pertence ao conjunto $\mathbb{N}$. Do mesmo modo, se analisarmos a operação da multiplicação, teremos que $8.4 = 32$ e $4.8 = 32$. Já na subtração, teremos $8 - 4 = 4$ e $4 - 8 = -4$, ou seja, se invertermos a ordem dos elementos o resultado não pertence a $\mathbb{N}$. Considerando a divisão, teremos $8 \div 4 = 2$, mas se fizermos $4 \div 8$, teremos um resultado que não pertence a $\mathbb{N}$. Assim;

> A subtração e a divisão não são operações em $\mathbb{N}$, no sentido estritamente matemático do termo, pois não fornecem um resultado em $\mathbb{N}$ quando dois elementos de $\mathbb{N}$ quaisquer são operados (Ripoll et al., 2015, p. 105).

É evidente que explicar tais definições para os alunos dessa etapa, os quais estão apenas iniciando a formação de conceitos básicos de matemática, torna-se inviável e, dessa forma, usar o termo “operação” para definir subtração e divisão em $\mathbb{N}$ é apenas uma comodidade para o professor, visto que esses conceitos serão revistos à medida que o aluno avançar para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

Realizadas as devidas observações sobre o conceito de operação em $\mathbb{N}$, vamos nos ater ao algoritmo da divisão. Para Ripoll et al. (2015),

> A divisão é, entre as operações básicas, a mais complexa e a que determina maiores desafios para o ensino e para a aprendizagem (p.105).

Como já dito, aqui o autor utiliza o termo operação não no seu sentido estritamente matemático, mas apenas por uma questão de conveniência. De fato, o algoritmo da divisão tem vasta aplicabilidade numa série de problemas e em inúmeras situações do cotidiano [2].

Consideremos dois números a e b tais que $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Como estamos tratando do conjunto dos números naturais, vamos dividi-los em subconjuntos, todos contendo a números, da seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., a-1\} \cup \{a, a+1, a+2, ..., 2a-1\} \cup \{2a, 2a+1, 2a+2, ..., 3a-1\}$$

$$\cup\{qa, qa+1, qa+2, ..., (q+1)a-1\}$$

Observemos que cada subconjunto começa com um múltiplo de a e, além disso, como cada um deles começa com o sucessor do último elemento do subconjunto anterior, todos os subconjuntos são disjuntos, ou seja, nenhum deles possui elementos comuns. Suponhamos agora, que exista um número $b \in \mathbb{N}$. Portanto, b está em um, e apenas um, dos subconjuntos de $\mathbb{N}$. Tomando a forma geral da representação dos subconjuntos de $\mathbb{N}$, teremos que $b \in \{qa, qa+1, qa+2, ..., (q+1)a-1\}$, ou seja, $qa \leq b \leq (q+1)a-1$.

Escrevendo $b = qa + r$, poderemos representar o intervalo ao qual b pertence como $qa \leq qa + r \leq (q+1)a - 1$. Efetuemos, agora, a distributiva:

$$qa \leq qa + r \leq qa + a - 1$$

$$qa - qa \leq qa + r - qa \leq qa + a - 1 - qa$$

Subtraindo qa em cada uma das desigualdades,

$$0 \leq r \leq a - 1$$

Portanto, estabelecemos um intervalo para r.

Vejamos alguns exemplos:

Se tomarmos $a = 4$ e $b = 30$, podemos escrever o número b em função de a de várias maneiras:

a) $30 = 4.7 + 2$

b) $30 = 4.6 + 6$

c) $30 = 4.5 + 10$

d) $30 = 4.4 + 14$

[2] Para enunciar o conceito de divisão euclidiana, baseamo-nos nas ideias do professor Fábio Henrique Souza, disponibilizadas em suas aulas do Projeto de Iniciação Científica (PIC).

No entanto, apenas o item “a” respeita o intervalo $0 \leq r \leq a-1$. O que nos resta agora é provar a unicidade, ou seja, mostrar que existe apenas um par q e r que satisfaz a condição $0 \leq r \leq a-1$.

Para provarmos que existe um único par de números q e r que satisfaça a condição $b = qa + r$, com $0 \leq r \leq a-1$, vamos considerar a existência de outro par de números, que chamaremos de q' e r', com $0 \leq r\text{'} \leq a-1$. Assim, teremos:

$$\begin{cases} b = & qa + r \\ b = & q\text{'}a + r\text{'} \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, e fazendo as operações adequadas,

$$b - b = qa + r - (q\text{'}a + r\text{'})$$

$$0 = qa + r - q\text{'}a - r\text{'}$$

$$0 = a.(q - q\text{'}) + r - r\text{'}$$

$$-a.(q - q\text{'}) = r - r\text{'}$$

$$a.(q\text{'} - q) = r - r\text{'}$$

Assim, $r - r\text{'}$ é um múltiplo de a. Como $0 \leq r\text{'} \leq a-1$ e $0 \leq r\text{'} \leq a-1$, temos que a expressão $r - r\text{'}$ admite valor máximo e valor mínimo. O valor máximo se dará quando r assumir o maior valor possível dentro do intervalo estabelecido, no caso, $a-1$ e r' assumir o menor valor, ou seja, 0. Considerando esses valores, teremos $r - r\text{'} = a - 1 - 0 = a - 1$. Da mesma forma, o valor mínimo se dará quando r assumir o menor valor dentro do intervalo, ou seja, 0 e r' assumir o maior valor possível, ou seja, $a-1$. Assim, $r - r\text{'} = 0 - (a-1) = 1 - a$.

Portanto, o valor mínimo e o valor máximo de $r - r\text{'}$ são, respectivamente, $1 - a$ e $a - 1$. Dessa forma, a diferença $r - r\text{'}$ assume valores inteiros que estão no conjunto $1 - a, ..., 0, ..., a - 1$ e, como $r - r\text{'}$, é múltiplo de a, concluímos que $r - r\text{'} = 0$, visto que zero é o único múltiplo de a dentro do conjunto considerado. Como $r - r\text{'} = 0$, temos que $r = r\text{'}$. Do mesmo modo, sabendo que $a > 0$ e que $a.(q\text{'} - q) = 0$, concluímos que $q\text{'} - q = 0$ e que, portanto, $q\text{'} = q$.

Desse modo, provamos que existe um, e apenas um, par de números q e r tais que $0 \leq r \leq a-1$. Com base nisso, podemos enunciar o algoritmo da divisão euclidiana:

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, existe um único par de números (q, r), tal que $b = qa + r$, com $0 \leq r \leq a-1$, no qual q é o quociente da divisão de b por a e r é o resto dessa divisão.

3.1 Exemplos de Aplicação de Divisão Euclidiana

1. Encontre um número natural n que quando dividido por 6 resulta num quociente 5 e resto maior possível [3].

Solução: Podemos escrever n na forma $n = 6q + r$, onde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Como o resto tem que ser o maior possível, temos que $n = 6.5 + 5$ e, portanto, o número procurado é 35.

2. Encontre os números naturais que, quando divididos por 7 deixam resto igual ao dobro do quociente.

Solução: Usando a definição de divisão euclidiana, podemos escrever os números procurados na forma $n = 7q + r$. Como o resto tem que ser o dobro do quociente, temos que $r = 2q$ e $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Assim, $n = 7q + 2q$, logo $n = 9q$. Portanto, os números procurados são da forma $9q$. Mas como $q = r/2$ e $q \in \mathbb{N}$, temos que r só pode ser 0, 2, 4 ou 6. Substituindo os valores de r, teremos $q = 0, 1, 2, 3$. Como os números procurados são da forma $n = 9q$, teremos que $n = 0, 9, 18, 27$.

3.2 Problemas Envolvendo Divisão Euclidiana

Para a seleção dos problemas deste capítulo fez-se uma busca no banco de dados da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), mais precisamente no Portal da Matemática [4], no Módulo de Números Naturais, divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana, 8º ano do Ensino Fundamental. Além disso, aprofundamos nossa pesquisa no livro Círculos Matemáticos: A Experiência Russa de Fomin e Itenberg (2010). Após essas pesquisas, selecionamos alguns problemas que consideramos interessantes e que podem ser resolvidos com auxílio do algoritmo da divisão euclidiana.

Apresentam-se, a seguir, os problemas selecionados, bem como uma sugestão de resolução. Vale ressaltar que as soluções aqui indicadas foram elaboradas e/ou adaptadas pelo pesquisador.

1. (MIRANDA; ASSIS, 2017) Em um número natural N de 9 algarismos, tem-se que os algarismos das unidades simples, das unidades de milhar e das unidades de milhão são iguais a X; os algarismos das dezenas simples, das dezenas de milhar e das dezenas de milhão são iguais a Y; os algarismos das centenas simples, das centenas de milhar e das centenas de milhão são iguais a Z. Pode-se afirmar que N sempre será divisível por:

a) 333664 b) 333665 c) 333666 d) 333667 e) 333668

Sugestão de resolução: Pelo enunciado do problema temos que o número N pode ser escrito

[3] Os problemas 1 e 2 foram elaborados pelo autor.

[4] <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/54kyp0vmxwwsg.pdf> acessado em 17 de outubro de 2019.

como $N = ZYXZYXZYX$. Fazendo a decomposição do número teremos,

$$N = Z.10^8 + Y.10^7 + X.10^6 + Z.10^5 + Y.10^4 + X.10^3 + Z.10^2 + Y.10^1 + X.10^0$$

$$\Rightarrow N = Z.10^8 + Z.10^5 + Z.10^2 + Y.10^7 + Y.10^4 + Y.10^1 + X.10^6 + X.10^3 + X.10^0$$

$$\Rightarrow N = Z.10^2.(10^6 + 10^3 + 1) + Y.10^1.(10^6 + 10^3 + 1) + X.(10^6 + 10^3 + 1)$$

$$\Rightarrow N = (10^6 + 10^3 + 1).(Z.10^2 + Y.10^1 + X)$$

$$\Rightarrow N = (1000000 + 1000 + 1).(Z.10^2 + Y.10^1 + X)$$

$$\Rightarrow N = (1001001).(Z.10^2 + Y.10^1 + X)$$

Como o número 1001001 é divisível por 3, podemos reescrever a expressão como $N = 3.333667.(Z.10^2 + Y.10^1 + X)$. Assim, concluímos que o número N sempre será divisível por 333667. Portanto, a alternativa correta é a letra d.

2. (MIRANDA; ASSIS, 2017) Qual o resto da divisão por 9 do número $\sqrt{1111111111 - 22222}$?

Sugestão de resolução:

Reescrevendo a expressão numa forma fatorada teremos $\sqrt{1111111111 - 2.(11111)}$. Colocando novamente o fator comum em evidência obteremos $\sqrt{11111.(100001 - 2)}$. Resolvendo a diferença dentro do parênteses chegaremos a $\sqrt{11111.99999}$. Mais uma vez podemos fatorar a expressão, obtendo assim $\sqrt{11111.9.11111}$. Efetuando a multiplicação dos termos semelhantes teremos $\sqrt{11111^2.9}$, o que nos dará $11111.3 = 33333$. Por fim, efetuando a divisão de 33333 por 9, obteremos resto 6.

3. (MIRANDA; ASSIS, 2017) Quais os possíveis restos de um número quadrado perfeito na divisão por 4?

Sugestão de resolução: Os possíveis restos na divisão de um número n por 4 são 0, 1, 2 ou 3. Assim, o número n pode ser da forma $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ou $4q + 3$. Analisando o quadrado de n, teremos:

$$n = 4q \Rightarrow n^2 = 16q^2 \Rightarrow n^2 = 4.(4q^2)$$

$$n = 4q + 1 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 8q + 1 \Rightarrow n^2 = 4.(4q^2 + 2q) + 1$$

$$n = 4q + 2 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 16q + 4 \Rightarrow n^2 = 4.(4q^2 + 4q + 1)$$

$$n = 4q + 3 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 24q + 9 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 24q + 8 + 1 \Rightarrow n^2 = 4$$

$$(4q^2 + 6q + 2) + 1$$

Portanto, o resto de um número quadrado perfeito na divisão por 4 só pode ser 0 ou 1.

4. (MIRANDA; ASSIS, 2017) Dados três números naturais a, b e c tais que $a + b + c$ é divisível por 6, prove que $a^3 + b^3 + c^3$ também é divisível por 6.

Sugestão de resolução:

Como a expressão $a+b+c$ é divisível por 6, podemos escrevê-la na forma $a+b+c=6k$. Precisamos provar que $a^3+b^3+c^3$ é divisível por 6. Partindo da informação dada pelo enunciado, teremos:

$$a+b+c=6k$$
$$a+b=6k-c$$
$$(a+b)^3=(6k-c)^3$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=216k^3-108k^2c+18kc^2-c^3$$

Analisando a equação, temos que a expressão é divisível por 6 e, assim, podemos substituí-la por $6k'$. Portanto,

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=6k'-c^3$$
$$a^3+b^3+c^3=6k'-3a^2b-3ab^2$$
$$a^3+b^3+c^3=6k'-3ab.(a+b)$$

Assim, temos as seguintes possibilidades:

I) a ou b são pares e, nesse caso, $6k'-3ab.(a+b)$ será divisível por 6;

II) a e b são ímpares e, nesse caso $a+b$ será par e a expressão $6k'-3ab.(a+b)$ será divisível por 6;

III) Se a e b possuem paridades diferentes, então $a.b$ será par e a expressão $3ab$ será divisível por 6.

Portanto, se $a+b+c$ for divisível por 6, então $a^3+b^3+c^3$ sempre será divisível por 6.

5. (MIRANDA; ASSIS, 2017) Determine o menor inteiro positivo que dividido por 9 gera resto 3 e dividido por 11 gera resto 4.

Sugestão de resolução: Seja n o número procurado. Como n deixa resto 3 ao ser dividido por 9, podemos escrevê-lo na forma $n=9q+3$. Do mesmo modo, como n deixa resto 4 quando dividido por 11, ele também pode ser escrito na forma $n=11q'+4$. Igualando as equações, teremos:

$$9q+3=11q'+4$$
$$9q=11q'+4-3$$
$$9q=11q'+1$$
$$q=\frac{11q'+1}{9}$$

A partir disso, concluímos que 9 divide $11q'+1$. Substituindo os valores de q' do conjunto $n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, concluímos que o único valor possível para q' é 4. Portanto, $q=5$ e $n=9.5+3=48$.

6. (MIRANDA; ASSIS, 2017) Um número inteiro positivo k deixa resto 4 quando dividido por 7.

a) Determine o resto da divisão de $k^2 + k + 1$ por 7.

b) Qual é o menor múltiplo positivo de k que devemos somar a k^2 para obter um múltiplo de 7?

Sugestão de resolução:

a) Pelo enunciado do problema, temos que $k = 7q + 4$. Fazendo as intervenções necessárias teremos

$k^2 = (7q + 4)^2 \rightarrow$ elevando ambos os membros ao quadrado

$k^2 + k = (7q + 4)^2 + k \rightarrow$ somando ka ambos os membros

$k^2 + k + 1 = (7q + 4)^2 + k + 1 \rightarrow$ somando 1 a ambos os membros

Como $k = 7q + 4$, teremos

$$k^2 + k + 1 = (7q + 4)^2 + (7q + 4) + 1$$

$$k^2 + k + 1 = 49q^2 + 56q + 16 + 7q + 4 + 1$$
$$k^2 + k + 1 = 49q^2 + 63q + 21$$
$$k^2 + k + 1 = 7.(7q^2 + 9q + 3)$$

Como $k^2 + k + 1$ é múltiplo de 7, temos que o resto de sua divisão por 7 é igual a zero.

b) Consideremos nk um múltiplo de k que devemos somar a k^2 para obtermos um múltiplo de 7. Assim,

$$k^2 = (7q + 4)^2$$
$$k^2 + nk = (7q + 4)^2 + nk$$
$$k^2 + nk = (7q + 4)^2 + n.(7q + 4)$$
$$k^2 + nk = 49q^2 + 56q + 16 + 7nq + 4n$$
$$k^2 + nk = 49q^2 + 56q + 7nq + 14 + 2 + 4n$$
$$k^2 + nk = 7.(7q^2 + 8q + nq + 2) + 2 + 4n$$

Como $7.(7q^2 + 8q + nq + 2)$ já é múltiplo de 7, só resta saber para quais valores de n, tomados do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a expressão $2 + 4n$ também será um múltiplo de 7. Substituindo, teremos que o menor valor será $n = 3$ para o qual $2 + 4.3 = 14$. Portanto, o menor múltiplo será $3k$.

7. (MIRANDA; ASSIS, 2017) Um número inteiro n deixa restos respectivamente iguais a 4 e 6 quando dividido por 7 e 8. Determine o resto da divisão de n por 56.

Sugestão de resolução: De acordo com o enunciado do problema temos que

$$\begin{cases} n = 7q + 4 & (1) \\ n = 8q' + 6 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando (1) por 8 e (2) por 7 teremos

$$\begin{cases} 8n = & 56q + 32 \\ 7n = & 56q' + 42 \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1),

$$8n - 7n = 56q - 56q' + 32 - 42$$

$$n = 56.(q - q') - 10$$

Temos aqui um resto negativo. Podemos, então, resolver o problema adicionando 56 ao segundo membro da equação e, logo em seguida, subtraindo o mesmo valor, de modo a balancear a equação. Desse modo,

$$n = 56.(q - q') - 10 + 56 - 56$$

$$n = 56.(q - q') - 56 + 46$$

$$n = 56.(q - q' - 1) + 46$$

Portanto, o resto da divisão de n por 56 é igual a 46.

8. (FOMIN; ITENBERG, 2010) Prove que o produto de três números naturais consecutivos quaisquer é divisível por 6.

Sugestão de resolução: Podemos representar três números naturais consecutivos por n, $n + 1$ e $\sqrt{25}$. Do mesmo modo, seu produto será representado por $n.(n + 1).(n + 2)$. Já sabemos, por meio das regras de divisibilidade, que um número é divisível por 6 quando ele for divisível por 2 e por 3 simultaneamente. Primeiramente, vamos provar a divisibilidade por 2. Ora, como se trata de três números consecutivos, pelo menos um deles é par, garantindo, assim, a divisibilidade por 2. Agora, provaremos a divisibilidade por 3. Já sabemos que, na divisão por 3, os possíveis restos são 0, 1 ou 2. Assim, n pode ser da forma $n = 3q$, $n = 3q + 1$ ou $n = 3q + 2$ e, nesse caso, analisaremos as três possibilidades:

1º Se n for da forma $3q$, teremos $n.(n + 1).(n + 2) = 3q.(3q + 1).(3q + 2)$. Ou seja, o produto é divisível por 3.

2º Se n for da forma $3q + 1$, teremos $n.(n + 1).(n + 2) = (3q + 1).(3q + 1 + 1).3q + 1 + 2) = (3q + 1).(3q + 2).(3q + 3) = (3q + 1).(3q + 2).3.(q + 1)$. Ou seja, o produto é divisível por 3.

3º Se n for da forma $\sqrt{25}$, teremos $n.(n+1).(n+2) = (3q+2).(3q+2+1).(3q+2+2) = (3q+2).(3q+3).(3q+4) = (3q+2).3.(q+1).(3q+4)$. Ou seja, o produto é divisível por 3.

Com isso, provamos que o produto de três números naturais consecutivos sempre será divisível por 2 e por 3, simultaneamente, e portanto, será divisível por 6.

Em Matemática, quando falamos em números congruentes, estamos nos referindo a números que, quando divididos por um mesmo divisor, deixam sempre o mesmo resto. Por exemplo, os números 12, 17 e 22 deixam resto 2 quando são divididos por 5. Dizemos que esses números são congruentes, pois pertencem a uma mesma classe de equivalência.

Apresentam-se, no capítulo 4, algumas ideias acerca das congruências e suas aplicações.

Capítulo 4

Congruência

Quando trabalhamos com a ideia de divisibilidade, é interessante analisar os restos das divisões, visto que são a chave para se resolver uma série de problemas que, aparentemente, não teriam solução. A partir da análise desses restos, Gauss introduziu, em 1801, em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, a teoria das Congruências. Gauss percebeu que era muito mais vantajoso olhar para o resto de uma conta do que olhar para a conta propriamente dita. Segundo Hefez (2015), essa é uma das noções mais fecundas da aritmética. De fato, o estudo dos restos das divisões euclidianas possibilitou a resolução dos mais variados problemas, principalmente aqueles relacionados às potenciações e às divisões.

A definição de congruência, segundo Hefez (2015), diz que dois números naturais a e b são congruentes módulo m quando possuem o mesmo resto na divisão euclidiana por m, e representa-se por: $a \equiv b \; mod \; m$ (a é congruente a b módulo m).

Se tomarmos como exemplo a divisão dos números 20 e 17 por 3, teremos que $20 = 6.3 + 2$ e $17 = 5.3 + 2$. Nota-se que tanto o número 20 quanto o número 17 deixam o mesmo resto 2 quando divididos por 3. Portanto, dizemos que $20 \equiv 17 \; mod \; 3$.

Consideremos agora as divisões de 21, 17 e 13 por 4. Temos que,

$$21 = 5.4 + 1$$

$$17 = 4.4 + 1$$

$$13 = 3.4 + 1$$

Ou seja, todos eles deixam resto 1 quando são divididos por 4. Portanto, 21, 17 e 13 possuem a mesma classe de equivalência módulo 1.

É interessante ressaltar que, por se tratar de divisão euclidiana, consideraremos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ e o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. No entanto, considerando que todo número dividido por 1 sempre deixará resto zero, não é interessante trabalhar com as congruências módulo 1, visto que todos os números são congruentes entre si módulo 1. Portanto, consideraremos $m > 1$. Além disso, considerando que, dentro do campo dos números reais, não existe divisão por zero e, ainda, que zero dividido por qualquer número é zero, adotaremos como notação para este trabalho os conjuntos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Da teoria das Congruências, temos as seguintes proposições:

Proposição 1: Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que:

I. $a \equiv a \, mod \, m$;

II. Se $a \equiv b \, mod \, m$, então $b \equiv a \, mod \, m$;

III. Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $b \equiv c \, mod \, m$, então $a \equiv c \, mod \, m$.

Para se verificar se dois números são congruentes entre si módulo m, não é necessário efetuar a divisão desses números por m; basta que a diferença entre eles seja divisível por m. Por exemplo, os números 98 e 32 são congruentes módulo 6. Observemos que $98 - 32 = 66$ e 66 é divisível por 6. Assim, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2: Supondo que $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \geq a$, tem-se que $a \equiv b \, mod \, m$ se, e somente se, a diferença $b - a$ for divisível por m, ou seja, $m | b - a$.

Demonstração: Fazendo a divisão euclidiana de a por m, teremos $a = mq + r$, com $0 \leq r < m$. Do mesmo modo, fazendo a divisão euclidiana de b por m, teremos $b = mq' + r'$, com $0 \leq r' < m$. Subtraindo a primeira da segunda, teremos,

$$b - a = mq + r - (mq' + r')$$

$$b - a = mq + r - mq' - r'$$

$$b - a = mq - mq' + r - r'$$

$$b - a = m.(q - q') + r - r'$$

Como estamos partindo do pressuposto de que $a \equiv b$, então $r = r'$. Logo, $r - r' = 0$.

$$b - a = m.(q - q')$$

Assim, provamos que $b - a$ é múltiplo de m e, consequentemente, tem que ser divisível por m.

A prova da volta dessa proposição pode ser feita do seguinte modo: Já sabemos que $b - a = m.(q - q') + r - r'$. Dividindo todos os membros por m, teremos $\frac{b-a}{m} = q - q' + \frac{r-r'}{m}$. Portanto, $r - r'$ deve ser divisível por m e $-m < r - r' < m$. No intervalo entre $-m$ e m, o único número divisível por m é o 0. Logo, $r - r' = 0 \Rightarrow r - r'$.

Preposição 3: Consideremos os números $a, b, c, d, m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$.

I. Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $c \equiv d \, mod \, m$, então $a + c \equiv b + d \, mod \, m$;

II. Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $c \equiv d \, mod \, m$, então $ac \equiv bd \, mod \, m$.

Demonstração: Suponhamos que $a \equiv b \, mod \, m$ e $c \equiv d \, mod \, m$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $b \geq a$ e $d \geq c$. Logo, temos que $m|b-a$ e $m|d-c$.

I. Basta observar que $m|(b-a)+(d-c)$ e, portanto, $m|(b+d)-(a+c)$, o que essa parte do resultado;

II. Basta notar que $bd - ac = d.(b-a) + a.(d-c)$ e concluir que $m|bd - ac$.

4.1 Aplicações da Congruência

São muitos os problemas que podem ser resolvidos utilizando-se a ideia de congruência. Após uma busca no banco de questões da OBMEP e em alguns sites que trazem provas de processos seletivos para admissão em colégios militares, selecionamos alguns problemas os quais julgamos interessantes e que podem ser resolvidos usando-se o conceito de congruência. A seguir, são apresentados alguns desses problemas.

1. Determine o resto da divisão de 2^{32} por 5 [5].

Sugestão de resolução: A primeira observação acerca desse problema é que o resultado da potência é um número muito grande. Uma pessoa que não conhecesse o conceito de congruência, ao tentar resolver esse problema, certamente, ficaria tentada a desenvolver a potenciação e, em seguida, efetuar a divisão. O uso de uma calculadora também seria de pouca validade, uma vez que ela efetuaria a conta considerando as casas decimais, e o problema quer o resto. Para solucionar o problema, vamos analisar os possíveis restos na divisão por 5. Na divisão euclidiana por 5, os possíveis restos são 0, 1, 2, 3 ou 4. Assim, efetuando a divisão das primeiras potências de 2 por 5, teremos

$$2 = 0.5 + 2$$

$$2^2 = 4 = 0.5 + 4$$

$$2^3 = 8 = 1.5 + 3$$

$$2^4 = 16 = 3.5 + 1$$

$$2^5 = 32 = 6.5 + 2$$

$$2^6 = 64 = 12.5 + 4$$

$$2^7 = 128 = 25.5 + 3$$

$$2^8 = 256 = 51.5 + 1$$

Assim, os restos das divisões das potências de 2 por 5 são 2, 4, 3 ou 1 e formam um ciclo. Desse modo, ao dividirmos 32 por 4, teremos oito ciclos completos e o resto será 1.

2. (Colégio Naval, 2003) O resto da divisão de $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131}$ por 12 é igual a:

[5] O problema foi elaborado pelo autor.

a) 0 b) 2 c) 7 d) 9 e) 11

Sugestão de resolução: Para a resolução desse problema, podemos utilizar o lema dos restos e suas generalizações. É possível, então, substituir cada potência pelo respectivo resto da base na divisão por 12. Analisando o padrão de resto de cada potência por 12 teremos

$$5^1 \equiv 5 \, mod \, 12$$

$$5^2 = 25 \equiv 1 \, mod \, 12$$

$$5^3 = 125 \equiv 5 \, mod \, 12$$

$$5^4 = 625 \equiv 1 \, mod \, 12$$

$$5^5 = 3125 \equiv 5 \, mod \, 12$$

Assim, percebemos que existe um padrão nos restos das divisões das potências de 5 por 12. Se o expoente é ímpar, então o resto é 5, e se o expoente é par, o resto é 1.

Do mesmo modo, analisando os restos das divisões das potências de 7 por 12, teremos que

$$7^1 \equiv 7 \, mod \, 12$$

$$7^2 = 49 \equiv 1 \, mod \, 12$$

$$7^3 = 343 \equiv 7 \, mod \, 12$$

$$7^4 = 2401 \equiv 1 \, mod \, 12$$

$$7^5 = 16807 \equiv 7 \, mod \, 12$$

Novamente, observamos que existe um padrão nos restos. As potências de 7, com expoente ímpar, deixam resto 7 quando divididas por 12, enquanto que as potências de 7, com expoente par, deixam resto 1.

Analisando os restos das divisões das potências de 9 por 12, teremos

$$9^1 \equiv 9 \, mod \, 12$$

$$9^2 = 81 \equiv 9 \, mod \, 12$$

$$9^3 = 729 \equiv 9 \, mod \, 12$$

$$9^4 = 6561 \equiv 9 \, mod \, 12$$

$$9^5 = 59049 \equiv 9 \, mod \, 12$$

Assim, percebemos que todas as potências de 9 deixam resto 9 quando divididas por 12.

Finalmente, analisando os restos das divisões das potências de 15 por 12, teremos:

$$15^1 \equiv 3 \, mod \, 12$$

$$15^2 = 225 \equiv 9 \, mod \, 12$$

$$15^3 = 3375 \equiv 3 \, mod \, 12$$

$$15^4 = 50625 \equiv 9 \, mod \, 12$$

$$15^5 = 759375 \equiv 3 \, mod \, 12$$

Concluímos que as potências de 15, elevadas a expoente ímpar, deixam resto 3 quando divididas por 12, enquanto que as potências de 15, elevadas a expoente par, deixam resto 9 na divisão por 12.

Substituindo cada potência, pelo seu respectivo resto na divisão por 12, teremos, então, que

$$5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131} =$$

$$5 + 7 + 9 + 3 = 24$$

$$24 \equiv 0 \, mod \, 12$$

Logo, ao dividir $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131}$ por 12, obtemos resto 0 (zero). Portanto, o resto procurado é 0.

3. (FOMIN; ITENBERG, 2010) Prove que $n^3 + 2n$ é divisível por 3 qualquer que seja o número natural n.

Sugestão de resolução: Para a resolução desse problema, iremos analisar os possíveis restos na divisão por 3. Como já sabemos, na divisão euclidiana por um número n, o resto estará sempre no intervalo $0 \leq r \leq n - 1$. Assim, na divisão por 3, os possíveis restos são 0, 1 ou 2. Analisando, separadamente, cada um desses restos, teremos que

I. Se $n = 0$, então $n^3 + 2n = 0^3 + 2.0 = 0$ e $0 \equiv 0 \, mod \, 3$

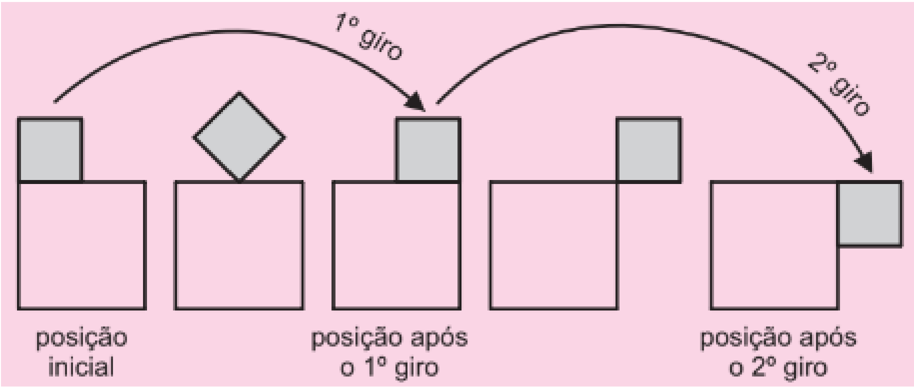
II. Se $n = 1$, então $n^3 + 2n = 1^3 + 2.1 = 3$ e $3 \equiv 0 \, mod \, 3$

III. Se $n = 2$, então $n^3 + 2n = 2^3 + 2.2 = 12$ e $12 \equiv 0 \, mod \, 3$

Assim, provamos que, para qualquer que seja o número natural n, a expressão $n^3 + 2n$ sempre será divisível por 3.

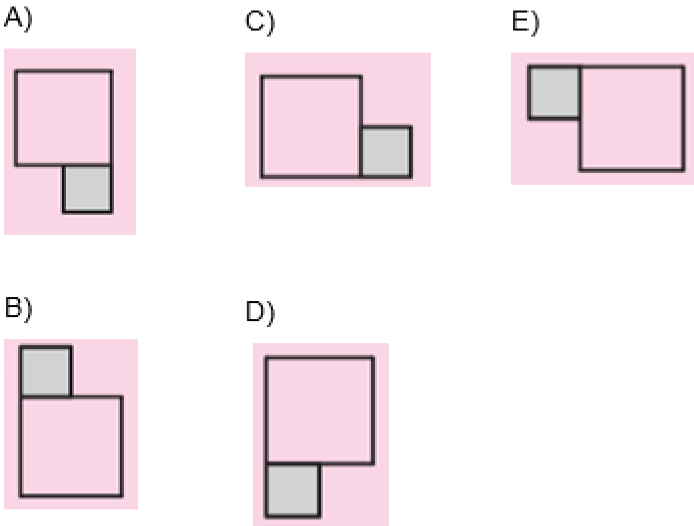
4. (OBMEP, 2012) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

Figura 1 – Questão 4



Fonte: OBMEP (2012)

Figura 2 – Alternativas questão 4

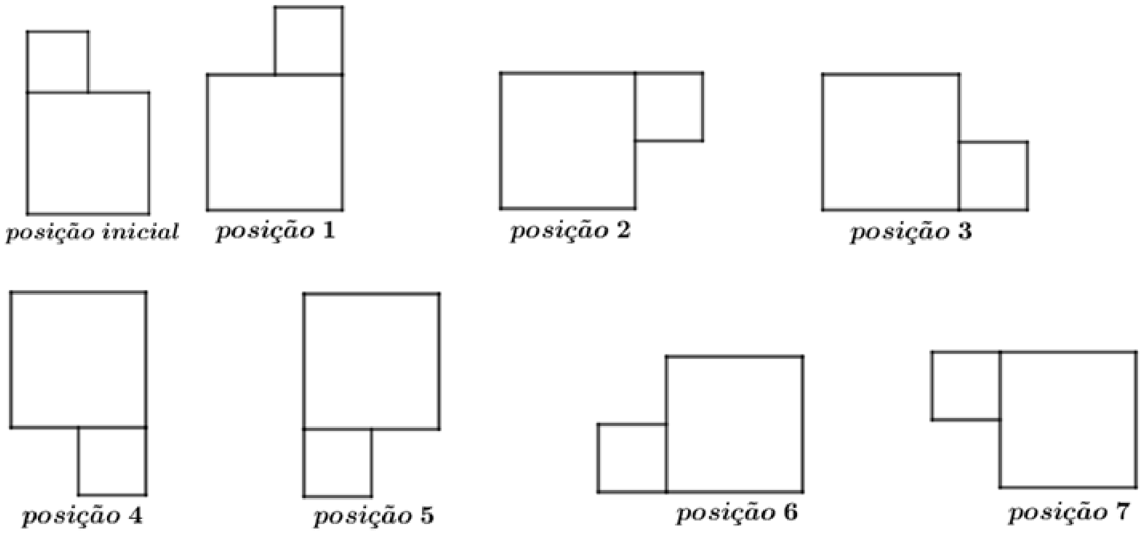


Fonte: OBMEP (2012)

Sugestão de resolução: Inicialmente, vamos analisar as posições do quadrado menor sobre o quadrado maior após cada giro (figura 3).

Assim, percebemos que, depois de 8 giros completos, o quadrado menor volta à posição inicial. Desse modo, nosso problema se reduz a uma congruência $mod\ 8$. Basta, então, dividirmos 2012 por 8, e teremos que $2012 = 251.8 + 4$. Portanto, $2012 \equiv 4\ mod\ 8$ e o quadrado menor, depois de 2012 giros, irá parar na 4ª posição. Assim, a opção correta é a alternativa A.

Figura 3 – Resolução questão 4



Fonte: OBMEP (2012)

5. (OBMEP, 2016) Luciana marcou os números de 1 a 9 em uma circunferência, como na figura 4. A partir do número 1, ela começou a pular de 4 em 4. No primeiro pulo ela foi do 1 ao 5, no segundo, do 5 ao 9, no terceiro, do 9 ao 4 e assim por diante. Depois de pular 1000 vezes, em que número ela parou?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Figura 4 – Questão 5

Fonte: OBMEP (2016)

Sugestão de resolução: Para a resolução desse problema devemos, primeiramente, verificar se há um ciclo. Assim, teremos que

1 - Posição inicial

5 - Primeira posição

9 - Segunda posição

4 - Terceira posição

8 - Quarta posição

3 - Quinta posição

7 - Sexta posição

2 - Sétima posição

6 - Oitava posição

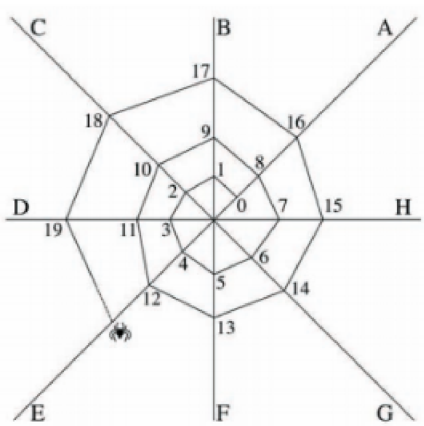
1 - Volta à posição inicial

Ou seja, depois de pular 9 vezes, Luciana voltará à posição inicial. Temos, então, um problema de congruência $mod\ 9$. Assim, devemos dividir 1000 por 9 e verificar o resto. Temos $1000 \equiv 1\ mod\ 9$, o que significa que, depois de pular 1000 vezes, Luciana estará na primeira posição, ou seja, em cima do número 5. A opção correta é a alternativa E.

6. (Banco de questões OBMEP, 2010) A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura 5. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

a) B b) D c) E d) G e) H

Figura 5 – Questão 6



Fonte: OBMEP (2010)

Sugestão de resolução: Existem 8 eixos sobre os quais a aranha constrói a sua teia. Assim, ela retornará ao ponto inicial depois de 8 voltas. Trata-se, portanto, de uma congruência $mod\ 9$. Observemos, ainda, que

- Sobre o eixo A, estão todos os múltiplos de 8;
- Sobre o eixo B, estão todos os múltiplos de 8, mais 1;
- Sobre o eixo C, estão todos os múltiplos de 8, mais 2;
- Sobre o eixo D, estão todos os múltiplos de 8, mais 3;
- Sobre o eixo E, estão todos os múltiplos de 8, mais 4;
- Sobre o eixo F, estão todos os múltiplos de 8, mais 5;
- Sobre o eixo G, estão todos os múltiplos de 8, mais 6;
- Sobre o eixo H, estão todos os múltiplos de 8, mais 7.

Dividindo 118 por 8, teremos que $118 = 14.8 + 6$, ou seja, $118 \equiv 6 \; mod \; 8$. Portanto, após 118 voltas, a aranha estará sobre o eixo G. A alternativa correta é a letra D.

7. (Colégio Naval, 2017) Os números x e y pertencem ao conjunto $C = \{17, 20, 23, 26, ..., 2018\}$ e são tais que $x > y$. Sendo assim, pode-se concluir que $2017.2^x + 8^y$, na divisão por 7, deixa resto:

a) 0 b) 1 c) 3 d) 4 e) 5

Sugestão de resolução: Para a resolução desse problema, novamente recorreremos ao lema dos restos. Inicialmente, vamos calcular o resto da divisão de 2017 por 7. Temos que $2017 = 288.7+1$, ou seja, $2017 \equiv 1 \; mod \; 7$. Vamos analisar agora o comportamento dos restos das divisões das potências de 2 por 7:

$$2^0 \equiv 1 \; mod \; 7$$

$$2^1 \equiv 2 \; mod \; 7$$

$$2^2 \equiv 4 \; mod \; 7$$

$$2^3 = 8 \equiv 1 \; mod \; 7$$

$$2^4 = 16 \equiv 2 \; mod \; 7$$

$$2^5 = 32 \equiv 4 \; mod \; 7$$

Dessa forma, percebemos que existe um ciclo nos restos das divisões das potências de 2 por 7. Como o primeiro elemento do conjunto C é o número 17, e considerando que se x variar de 0 a 17, teremos 18 números naturais, e ainda que o ciclo dos restos das potências de 2 por 7, é 3, teremos $18 \equiv 0 \; mod \; 3$, então $2^{17} \equiv 4 \; mod \; 7$. Como os próximos números do conjunto C são $20, 23, ..., 2018$, ou seja, vão de três em três, assim como o ciclo dos restos das potências de 2 por 7, temos que $2^{17} \equiv 2^{20} \equiv 2^{23} \equiv ... \equiv 2^{2018} \equiv 4 \; mod \; 7$.

Analisando o comportamento dos restos das potências de 8 por 7, teremos

$$8^0 \equiv 1\, mod\, 7$$

$$8^1 = 8 \equiv 1\, mod\, 7$$
$$8^2 = 64 \equiv 1\, mod\, 7$$
$$8^3 = 512 \equiv 1\, mod\, 7$$
$$8^4 = 4096 \equiv 1\, mod\, 7$$
$$8^5 = 32768 \equiv 1\, mod\, 7$$

Com isso, percebemos que toda potência de 8 elevada a um expoente natural sempre deixará resto 0 na divisão por 7. Portanto, teremos que $2017.2^x + 8^y = 1.4 + 1 \equiv 5\, mod\, 7$. A opção correta é a alternativa E.

8. (Colégio Naval, 2019) O número E é obtido pela expressão formada pela soma de todas as potências naturais do número 2, desde 0 até 2019, ou seja, $E = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2018} + 2^{2019}$. O resto da divisão de E por 7 é:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Sugestão de resolução: Vamos analisar o comportamento dos restos das potências de 2 por 7:

$$2^0 \equiv 1\, mod\, 7$$

$$2^1 \equiv 2\, mod\, 7$$
$$2^2 \equiv 4\, mod\, 7$$
$$2^3 = 8 \equiv 1\, mod\, 7$$
$$2^4 = 16 \equiv 2\, mod\, 7$$
$$2^5 = 32 \equiv 4\, mod\, 7$$

Os restos obedecem a um ciclo de tamanho 3. De 2^0 a 2^{2019}, teremos 2020 termos, que podem ser substituídos pelos seus respectivos restos da seguinte forma

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2}_{1+2+4} + \underbrace{2^3 + 2^4 + 2^5}_{1+2+4} + ... + \underbrace{2^{2016} + 2^{2017} + 2^{2018}}_{1+2+4} + \underbrace{2^{2019}}_{1}$$

Como em cada grupo completo a soma dos restos é 7 e $7 \equiv 0\, mod\, 7$, teremos $0+0+0+...+1 \equiv 1\, mod\, 7$. A opção correta é a alternativa E.

Capítulo 5

Experimentação

Este trabalho tem por objetivo discutir a utilização da resolução de problemas de matemática como metodologia de ensino, com foco em divisibilidade e congruência. Para a realização da pesquisa de campo, buscou-se uma escola onde houvesse turmas de 8º e 9º ano, considerando-se que os conteúdos matemáticos citados já foram aplicados para esses alunos em séries anteriores, de acordo com o Currículo Básico Comum das Escolas Estaduais do Estado do Espírito Santo. A unidade escolar escolhida foi a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Professora Inah Werneck", localizada na cidade de Cachoeiro de Itapemirim e que, atualmente, atende turmas do 4º ao 9º ano do Ensino Fundamental e turmas de Educação de Jovens e Adultos – EJA, do 2º segmento e EJA Ensino Médio no turno noturno.

Outro fator decisivo na escolha da unidade foi o fato de atuar na escola como professor desde 2009 e, como gestor da unidade, desde maio de 2019. Isso me propiciou um maior conhecimento de toda a dinâmica da escola, contribuindo, assim, para um ambiente favorável para a realização da pesquisa de campo. De fato, conhecer todas as fragilidades, bem como as potencialidades da unidade onde se dará a experimentação, é um fator fundamental para a análise dos resultados. Conhecendo-se profundamente todas as instâncias da escola, tanto no âmbito administrativo quanto no âmbito pedagógico, é possível traçar um panorama de todo o contexto no qual os alunos estão inseridos e entender melhor as dificuldades existentes na aprendizagem. A proximidade com professores e alunos possibilita, nesse sentido, uma continuidade do processo investigativo, contribuindo de maneira significativa para a melhoria dos resultados no que tange ao processo ensino-aprendizagem.

No turno matutino, existem cinco turmas de 8º ano e três turmas de 9º ano, dentre as quais foram escolhidos, de forma aleatória, dois alunos de cada turma para participarem da pesquisa. No entanto, no dia da aplicação da atividade de campo, compareceram 13 alunos, que participaram como sujeitos desta pesquisa. Os alunos selecionados receberam a explicação sobre o objeto de pesquisa deste trabalho e, após a autorização dos responsáveis, mediante assinatura de um termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE)[6], foram organizados em uma sala reservada para o desenvolvimento da etapa de campo da pesquisa. Os alunos foram dispostos em cinco duplas e

[6] Apêndice A.

um trio, em que cada dupla e o trio foram formados pelos alunos do mesmo ano de escolaridade.

A opção pelo trabalho em duplas fundamenta-se nas ideias de Gualandi (2019), que enumera as vantagens de se promover atividades em grupos

> "Assim, consideramos em nossa pesquisa que as tarefas[7] desenvolvidas em duplas/grupos podem proporcionar momentos de discussões entre os participantes, de forma que os alunos tenham um papel dinâmico, social e participativo na própria aprendizagem, pois entendemos que trabalhos desta natureza aumentam a confiança para enfrentar novos problemas." (GUALANDI, 2019, p.47).

De fato, considerando-se que cada aluno traz consigo uma carga de saber, adquirida através do meio em que está inserido e também de experiências próprias, e propiciar momentos de trocas de conhecimento entre os estudantes colabora, de modo significativo, para que os discentes se tornem protagonistas na construção do seu próprio conhecimento. Além disso, o trabalho em duplas/grupos cria um ambiente no qual o aluno tem a possibilidade de aprender a respeitar opiniões diferentes das suas e lidar com situações de conflito. Enfim, oferecer momentos de interação entre os estudantes ajuda a desenvolver a autoconfiança e promove uma abordagem mais dinâmica do conhecimento matemático.

Após a organização dos grupos, entregou-se uma lista[8] de tarefas, contendo sete problemas sobre divisibilidade e congruências e solicitou-se que os alunos desenvolvessem as atividades, registrando o desenvolvimento de cada problema em uma folha à parte, e que entregassem ao pesquisador. As resoluções das atividades compuseram o material de análise para esta pesquisa.

O tempo previsto para a resolução da lista, contendo sete problemas, foi de duas horas e meia. Destaca-se que, nesse tempo, os alunos iriam resolver as questões sem interferência do pesquisador, uma vez que os sujeitos poderiam usar estratégias diversificadas para a resolução da tarefa proposta.

Como o objetivo da pesquisa é utilizar a resolução de problemas como metodologia para o ensino de divisibilidade e congruências, visando suas aplicações na educação básica, bem como analisar quais estratégias seriam utilizadas para a resolução dos problemas. As duplas foram orientadas a resolver cada questão da maneira que achasse mais conveniente. No caso de não conseguirem encontrar um modelo matemático para a resolução das questões, poderiam explicar através da língua materna como chegaram àquela solução.

Com o intuito de manter o sigilo e preservar a identidade dos estudantes, os sujeitos receberam nomes fictícios, a saber: o grupo A foi composto pelos alunos Ana e Andrea, o grupo B foi composto pelos alunos Bia, Bruna e Breno, o grupo C pelos alunos Carla e Carina, o grupo D foi composto pelos alunos Diana e Daniele, o grupo E foi composto pelos alunos Érica e Eduarda, e o grupo F foi composto pelos alunos Fábia e Fernanda.

[7] Entende-se tarefa como "um segmento de atividades da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (STEIN; SMITH, 2009).

[8] Apêndices B e C.

Ressalta-se que ao organizar as duplas, decidiu-se que alunos de mesmo ano ficariam juntos. Destaca-se que para esta primeira etapa da pesquisa, 13 alunos compareceram, sendo sete do 8º ano e seis do 9º ano.

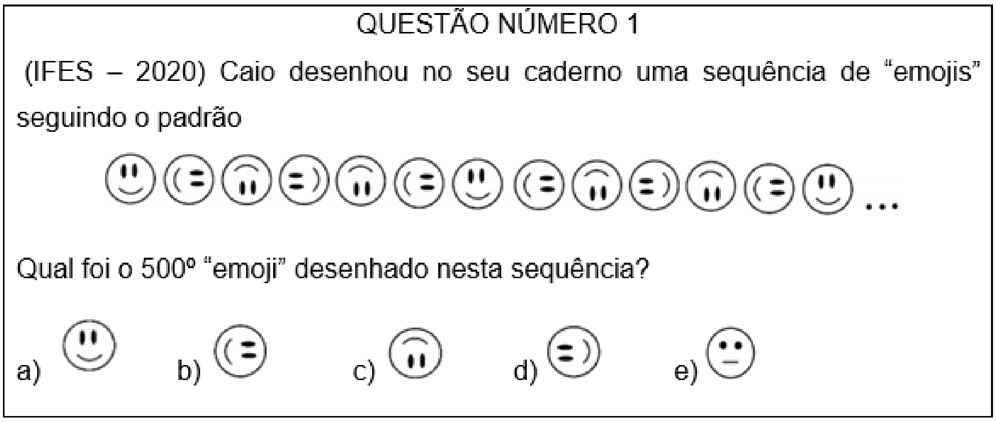
Capítulo 6

Análise da Primeira Lista de Tarefas

Após explicar que se tratava de uma pesquisa de mestrado, entregou-se a 1ª lista de tarefas, contendo sete questões. Salientamos que, neste primeiro momento, não foram explicados conteúdos matemáticos. Solicitou-se que os alunos desenvolvessem as tarefas de acordo com seus entendimentos e conhecimentos matemáticos que apresentavam até o momento.

Apresentam-se a seguir a 1ª questão (figura 6), e no quadro 2 as resoluções desenvolvidas pelos grupos.

Figura 6 – O problema da sequência de "emojis"



QUESTÃO NÚMERO 1

(IFES – 2020) Caio desenhou no seu caderno uma sequência de "emojis" seguindo o padrão

...

Qual foi o 500º "emoji" desenhado nesta sequência?

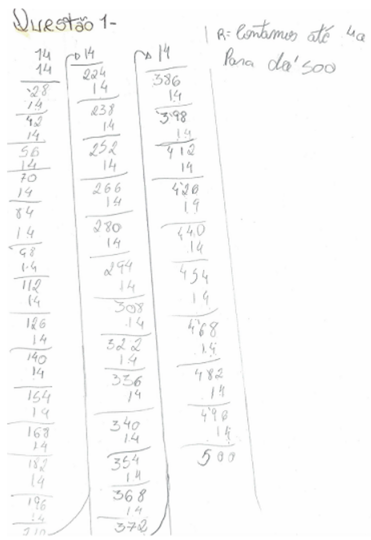
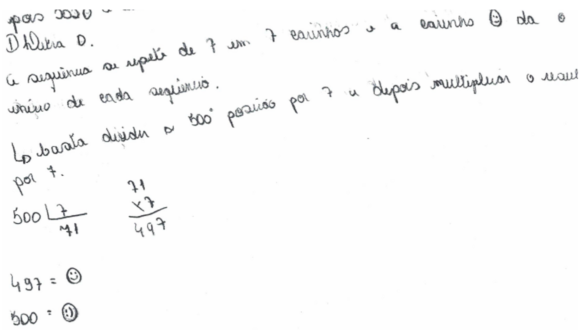
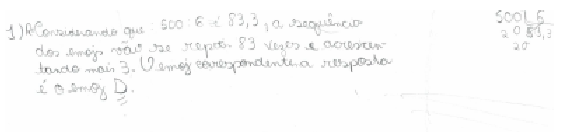
a) b) c) d) e)

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Analisando o quadro 2, podemos observar que a dupla Ana e Andrea não entendeu que poderia usar a ideia de repetição de ciclo para resolver a questão. Contou-se os "emojis" até 500, equivocando-se nos cálculos.

O trio Bia, Bruna e Breno entendeu a ideia de repetição de um ciclo, porém identificou que esse ciclo era composto por 7 elementos. Dessa forma, ao dividir 500 por 7, encontrou-se 71 ciclos e resto 3, sendo que, para a questão proposta, o ciclo é composto por 6 elementos, logo, a divisão de 500 por 6 deixa resto 2.

Quadro 2 – O problema da sequência de “emojis”

<table>
<tr><th>Grupo</th><th>Resolução</th></tr>
<tr><td>Ana e Andrea</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Bia, Bruno e Breno</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Carla e Carina</td><td>Apenas marcou a alternativa, mas não apresentou a resolução</td></tr>
<tr><td>Diana e Danieli</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Erica e Eduarda</td><td>Não apresentou resolução</td></tr>
<tr><td>Fábia e Fernanda</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

A dupla Carla e Carina que, o ciclo possui 6 elementos e, como proposta para resolução da questão, poderia dividir 500 por 6 e analisar o resto. Porém, a dupla não dividiu de forma correta, dificultando, assim, encontrar a resposta para o problema.

A dupla Diana e Danieli reconheceu que, para resolver o problema, era preciso efetuar uma divisão. Porém, não especificou os cálculos para essa divisão.

Observando a resposta da dupla Fábia e Fernanda, é possível identificar que elas entenderam o processo de resolução da questão. Porém, dividiram com número decimal, não interpretando, assim, o resto. Além de especificar que o resultado de $500 : 6 = 83,3$, significa 83 ciclos e sobram 3, confundindo a parte decimal com o resto.

A partir das observações acerca das respostas dos grupos, pode-se inferir que, de maneira geral, os alunos identificaram que a questão poderia ser resolvida usando divisão, porém nenhuma delas conseguiu concluir a ideia acerca do problema de forma satisfatória.

Apresentam-se a seguir a 2ª questão (figura 7), e no quadro 3 as resoluções desenvolvidas pelos grupos.

Figura 7 – O problema da sequência de letras

QUESTÃO NÚMERO 2

Considerando a sequência ABCDEABCDEABC..., qual letra ocupará a 2019ª posição?

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

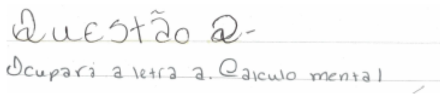
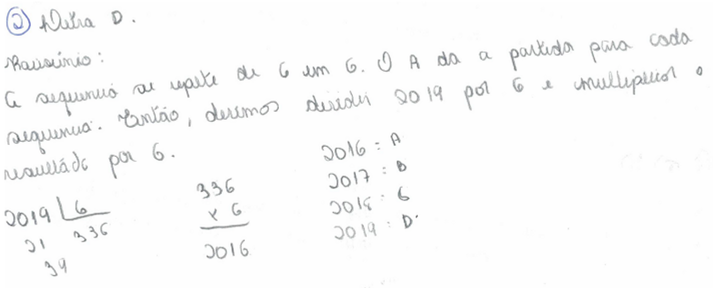
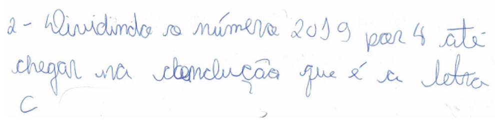
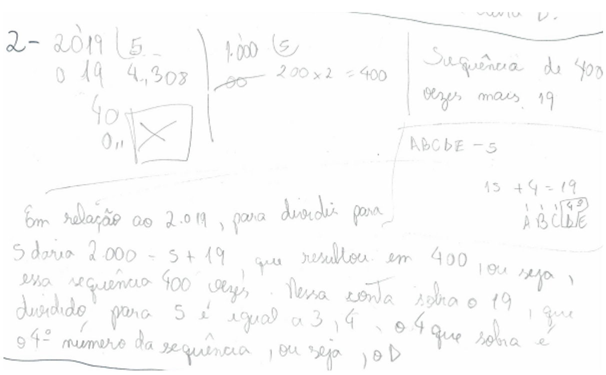
A segunda questão traz, novamente, um problema envolvendo ciclos e que pode ser resolvido usando-se a aritmética dos restos. A dupla Ana e Andrea, conforme vemos no quadro 3, apenas deduziu que a alternativa correta é a letra A, não apresentando a resolução do problema.

O trio Bia, Bruna e Breno acertou a alternativa. No entanto, entendeu que o ciclo era composto por 6 elementos e, assim, efetuou a divisão de 2019 por 6, o que gerou um quociente 336 e resto 3. Fazendo a contagem dos anos a partir de 2016, chegou-se à conclusão de que a letra D ocuparia a 2019ª posição.

A dupla Carla e Carina entendeu que o ciclo era composto por 4 elementos e não por 5, estimando que a resposta correta seria a alternativa C. No entanto, não apresentou os cálculos para a referida questão.

A dupla Fábia e Fernanda entendeu que o ciclo era composto por 5 elementos e efetuou a divisão de 2019 por 5. No entanto, efetuou a divisão considerando os decimais. Posteriormente, tentou-se fazer a divisão novamente, dessa vez com o número 2000 e depois com o número 19. Assim como na questão 1, considerou-se a divisão com decimais e deduziu que a parte decimal de 3,4 indicava a alternativa a ser marcada.

Quadro 3 – O problema da sequência de letras

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	
Bia, Bruno e Breno	
Carla e Carina	
Diana e Danieli	Não apresentou resolução
Erica e Eduarda	Não apresentou resolução
Fábia e Fernanda	

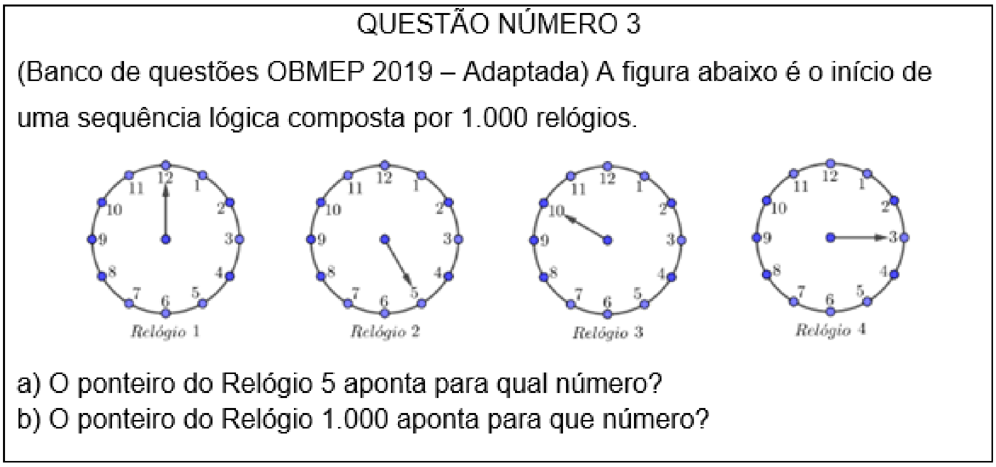
Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Destacam-se a seguir, a questão 3 (figura 8), e no quadro 4, as respectivas resoluções apresentadas pelas duplas.

A dupla Ana e Andrea entendeu que o ponteiro do relógio se desloca de 5 em 5 e concluiu corretamente que o ponteiro do relógio 5 estará apontando para o número 8.

O trio Bia, Bruna e Breno entendeu que o ponteiro se desloca de 5 em 5. No entanto, os alunos não indicaram em qual número o ponteiro de relógio 5 irá parar e, assim, não responderam à pergunta do problema. No item b, o trio concluiu corretamente que, após se deslocar 12 vezes, o ponteiro voltaria à posição inicial, reiniciando o ciclo. Os alunos efetuaram a divisão de 1000 por 12 e multiplicaram o quociente 83 por 12, obtendo, porém, resultado 998, quando, na verdade, o resultado seria 996. Ao realizarem a contagem, iniciaram a partir do 996º relógio e, assim,

Figura 8 – O problema dos relógios



Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

chegaram à resposta correta, que é o número 3.

A dupla Carla e Carina interpretou que o ponteiro se desloca de 5 em 5 e que o ponteiro de relógio 5 estará apontando para o número 8. No entanto, não respondeu ao item b da questão.

A dupla Diana e Daniele observou que o ponteiro sempre se desloca 5 unidades a partir da última posição e que o ponteiro do relógio 5 estará apontando para o número 8. Porém, no item b, também entendeu que o ponteiro tem ciclo 5, quando, na verdade, o ciclo é 12, o que dificultou que os alunos chegassem à resposta deste item.

A dupla Érica e Eduarda não apresentou solução para o problema.

A dupla Fábia e Fernanda entendeu que o deslocamento do ponteiro do relógio é de 5 unidades a partir da última posição. No entanto, ao somar 5 ao último número registrado pelo ponteiro, os alunos obtiveram valores maiores que 12, que é o maior número indicado no relógio. É de se imaginar que os integrantes dessa dupla associaram que $12 + 5 = 17$ equivale a 17 horas, o que no relógio seria representado pelo número 5; que $17 + 5 = 22$ equivale a 22 horas, que seria representado no relógio pelo número 10 e, que $22 + 5 = 27$, seria $10 + 5$. Concluíram, de forma correta, que o ponteiro do relógio 5 estará apontando para o número 8. Porém, ao responderem ao item b da questão, os alunos não identificaram que o ciclo do ponteiro é 12, dificultando, assim, encontrarem a solução para o problema.

Quadro 4 – O problema dos relógios

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	Questão 3- a) 8 pois os relógios estão marcados como: 12-5-10-3. Todos tem estão em uma sequência de 5 em 5 horas.
Bia, Bruno e Breno	3) a) 8. Raciocínio: O ponteiro marca de 5 em 5. b) 3. Raciocínio: A sequência se repete de 12 em 12. Nisso dividimos 1000 por 12, em seguida, multiplicamos o resultado por 12. 1000 | 12 → 83 83 × 12 = 166 + 83× = 996 996 : 7 997 : 12 998 : 5 999 : 10 1000 : 3 R: 3.
Carla e Carina	3-a) Aponta para o número 8 pois está indo de 5 em 5.
Diana e Danieli	3-a) Aponta para o número 8 pois está indo de 5 em 5 b) Dividindo os números 1000 por 5 até chegar na conclusão que o ponteiro aponta para o número 1
Erica e Eduarda	Não apresentou resolução
Fábia e Fernanda	3- Seq. de 5 em 5 | 12 | 17 / 22 | 27 (3) +5 +5 +5 a) O relógio aponta para o número 8. b) O relógio aponta para o número 12 (7+5=12) ×2 ×2 ×2 2 4 8 16

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Ao observar o quadro 5, que contém as resoluções da questão 4 (figura 9), percebemos, que ao resolver o item a da quarta questão, a dupla Ana e Andrea multiplicou a base 2 pelos expoentes 7, 10 e 13, obtendo como resultados os valores 14, 20 e 26, respectivamente. Assim, entendemos que a dupla associou o expoente ao número que será multiplicado pela base, quando, na verdade, esse expoente indica o número de fatores iguais que serão multiplicados. No item b, as alunas apresentaram dificuldades para entender o padrão dos restos das divisões das potências de 2 por 20. Tal dificuldade fica evidente na resposta dada pelas alunas no item c, quando afirmam não terem estudado o conteúdo em questão.

O trio Bia, Bruna e Breno respondeu apenas ao item b, sem apresentar os cálculos ou uma explicação mais precisa para a solução dada.

A dupla Carla e Carina tentou seguir o modelo proposto pelo problema para resolver o item a,

Figura 9 – O problema dos restos das divisões por 20

QUESTÃO NÚMERO 4

(Banco de questões OBMEP – 2016) Qual o resto da divisão de 2^{2015} por 20? Bom, é difícil fazer esta divisão diretamente usando apenas papel e caneta. Vamos procurar uma maneira de obter tal resposta analisando os restos de potências de 2 por 20 com a esperança de encontrar algum padrão neles. Qual o resto que 2^5 deixa por 20?

$$2^5 = 32 = 1.20 + 12$$

Sabendo disto, fica fácil saber o resto de 2^6 por 20, pois

$$2^6 = 2.2^5 = 2.(1.20 + 12) = 2.20 + 24$$

Dado que 24 é maior que 20 e não pode ser um resto, devemos escrever

$$2^6 = 3.20 + 4$$

Podemos estender o argumento anterior concluindo que, para saber o resto de 2^{i+1} por 20, basta saber o resto do produto do resto de 2^i por 20. Desse modo, podemos construir a sequência de potências e restos na divisão por 20.

n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
Resto por 20	2	4	8	16	12	4

a) Determine os restos que os números 2^7, 2^{10} e 2^{13} deixam na divisão por 20.

b) Sabendo que os restos se repetem de forma periódica, determine o período de repetição, ou seja, o número de restos distintos que ficam se repetindo.

c) Voltamos à pergunta do começo do problema. Qual o resto que 2^{2015} deixa na divisão por 20?

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

mas apresentou dificuldade em entender o raciocínio, e apenas repetiu, de forma incompleta, o que estava exemplificado no início da questão. Na resolução do item b, a dupla teve dificuldade para reconhecer os restos distintos que aparecem no problema de forma periódica, indicando apenas dois desses restos de forma correta. No item c tentou, novamente, seguir o exemplo de resolução apresentado pela questão, porém não chegou à solução do problema.

A dupla Diana e Danieli não detalhou as resoluções apresentadas para os itens do problema, tentando seguir o exemplo dado no início da questão para resolver o item a e apresentando como resposta para o item b os três primeiros restos indicados na tabela da questão. Observamos que, para o item b, as alunas não especificaram o ciclo formado pelos restos das divisões das potências de 2 por 20. No item c, apresentaram o número 10 como solução, porém não descreveram o processo que as fez chegar a essa conclusão.

A dupla Érica e Eduarda não apresentou solução para o problema.

A dupla Fábia e Fernanda tentou chegar à resposta do item a multiplicando os restos, indicados

Quadro 5 – O problema dos restos das divisões por 20

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	Questão 4- a) $2^7 = 2.2.2.2.2.2.2 = 14$ $2^{10} = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 20$ $2^{13} = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 26$ b) $2^7 = 2.2^6 = 2.(120-6) = 2.20-14$ $2^{10} = 2.2^9 = 2.(1.20) = 2.20$ $2^{13} = 2.2^{12} = 2(1.20+6) = 2.20+26$ c) Não sabemos pois ainda não aprendemos isso
Bia, Bruno e Breno	(4) a) b) 1, 2 e 4. Raciocínio: Realizando a divisão chegamos ao resultado que os números que se repetem em forma periódica (não necessariamente nesse ordem) são 1, 2, e 4.
Carla e Carina	4 a) $2^7 = 2.26 = 2(1.20+12$ b) 2, 4, 8 c) $2^{2015} = 2\,2^{2014} = (2.1.20+12)$
Diana e Danieli	$4 - 2^7 = 2.2^6 = 2.1$ c) 10 b) 2,4,8
Erica e Eduarda	Não apresentou resolução
Fábia e Fernanda	4- $2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16$ | -2 12 $-2(+2)=-4$ -4 $X \cdot 20 + (\text{Expoente} - 2)$ $\boxed{\text{ímpar}}$ $\text{Expoente} \div 2 \cdot 20 + \text{Expoente} - 2$ $\boxed{\text{par}}$ $7 \cdot 20 + (7-2)$ $(140 + (7-2)$ $140 + 5 = 145$ $2\,2 \quad 2\,2 \quad 2 \cdot 2\,2$ $4 \cdot 4 \cdot \quad 4 \cdot 2$ $16 \cdot 8$ $128 \div 2 \div 2 \ldots = 2$ $128 \div (2^5 7$ $7-2=5$ $\{= 2$ $128 \times (2.2.2)$ $1008 \div (2^3)$ (Nulo (ABC))

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

na tabela presente no enunciado da questão, por 2; observamos que as alunas identificaram que o resto estava dobrando. Porém, ao se depararem com a quinta coluna da tabela, perceberam que esse padrão de valores dobrados não aparecia mais e, com isso, não chegaram a uma conclusão para o problema. Também apresentaram dificuldades para resolver os itens b e c e não conseguiram especificar uma solução para o problema.

Apresentam-se a seguir a questão 5 (figura 10), e no quadro 6 as resoluções indicadas pelos grupos.

Figura 10 – O problema dos dias da semana

QUESTÃO NÚMERO 5

5) Sabendo que o dia 1º de janeiro de 2019 caiu numa terça-feira, em que dia da semana cairá o dia 31 de dezembro de 2019?

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Ao analisar o quadro 6, observamos que a dupla Ana e Andrea chegou à resposta correta para o problema proposto. No entanto, as alunas não especificaram qual foi o procedimento matemático utilizado para que chegassem a essa solução.

O trio Bia, Bruno e Breno tentou chegar à solução do problema analisando o dia anterior ao primeiro dia do ano de 2019. Concluiu que, se 1º de janeiro de 2019 foi uma terça-feira, então 31/12/2018 foi numa segunda-feira. Assim, utilizaram-se da ideia de que no ano seguinte esse dia do mês avançaria um dia na semana e que, portanto, o dia 31/12/2019 seria numa quarta-feira, visto que o ano de 2018 foi bissexto e que, nesse caso, segundo eles, esse dia do mês avançaria dois dias na semana. Porém, como a data de 31/12/2018 foi no final ano, essa lógica não se aplica, somente se a data fosse anterior a 29/02/2018. Embora o raciocínio utilizado pelos alunos esteja correto, esse detalhe do ano bissexto utilizado por eles impediu que chegassem à conclusão correta do problema.

A dupla Carla e Carina tentou resolver o problema utilizando divisão, associando que a terça-feira é o terceiro dia da semana e que, como 31 dividido por 3 deixa resto 1, seria o primeiro dia da semana, no caso, domingo. Essa visão equivocada das alunas sobre a associação dos restos com o dia da semana contribuiu para que as não chegassem à resposta correta para o problema.

A dupla Diana e Danieli utilizou a mesma lógica da dupla anterior, dividindo 31 por 3 e associando o resto 1 ao primeiro dia da semana.

A dupla Érica e Eduarda se baseou no mês de fevereiro, que possui 28 dias, e nos meses que possuem 30 e 31 dias, para tentar fazer a contagem até chegar à data de 31/12/2019. Porém, não identificou um padrão que proporcionasse concluir a questão de forma correta.

A dupla Fábia e Fernanda, embora tenha concluído corretamente que o dia 31/12/2019 cairá numa terça-feira, equivocou-se ao considerar que o dia 31/12/2018 caiu numa terça-feira, visto que esse dia foi numa segunda-feira. No entanto, utilizou corretamente o raciocínio de que o dia 31/12/2019 avançaria um dia na semana em relação ao dia 31/12/2018.

Quadro 6 – O problema dos dias da semana

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	Questão 5- a) R= Terça-feira, nós pensamos muito para chega à esse resultado.
Bia, Bruno e Breno	5) Quinta-feira. Raciocínio: pois 01/01/2019 caiu numa terça, o dia anterior foi 31 de dez. de 2018 cada ano que passa, é um dia da semana a frente. então como 31/12/18 caiu em uma seg.-feira, 31/12/19 cairá em uma quarta, pois 2020 é um ano BISSEXTO
Carla e Carina	5- Domingo, pois dividindo pelo dia 31 por três (pois terça-feira é o terceiro dia da semana) da 1 com isso domingo e dia 1 logo dia 31 vai cair em um domingo.
Diana e Danieli	5- Domingo pois dividindo dia 31 três (pois terça é o terceiro da semana) da 1 com isso domingo é dia primeiro vai cair no domingo
Erica e Eduarda	5- Em base nos dias da semana (7 dias), nos meses (28, 30 e 31) contando do dia 1 de janeiro de 2019 até 31 de dezembro di 3 que vai cair no Sábado
Fábia e Fernanda	5- 1 jan - 3º /2019 31 dezembro - 2º (2018) 2 Considerando que ao passar do ano o dia vai avançando pela semana, se 31 de Dezembro de 2018 caiu numa terça, dia 31 de Dezembro de 2019 vai cair em uma terça

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Apresentam-se a seguir a questão 6 (figura 11), e no quadro 7 as resoluções dadas pelos sujeitos.

Ao observar o quadro 7, verificamos que a dupla Ana e Andrea baseou-se no ano anterior para responder a essa questão. Porém, entendeu que o dia 31/12/2020 cairá no mesmo dia da semana em que caiu 31/12/2019, não levando em consideração que, cada dia do mês, avança um dia da semana no ano seguinte e, nos casos dos anos bissextos, alteram-se dois dias a partir do dia 1º de março.

O trio Bia, Bruna e Breno utilizou corretamente a ideia de que o ano começa e termina no mesmo dia da semana e, que no caso dos anos bissextos, o ano começa e termina em dias consecutivos da semana.

Figura 11 – Segundo problema sobre os dias da semana

QUESTÃO NÚMERO 06

No ano de 2020 o dia 1º de janeiro caiu numa quarta-feira. Em que dia da semana irá cair o dia 31 de dezembro de 2020?

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Quadro 7 – Segundo problema sobre os dias da semana

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	6_ Quarta-feira, nós pensamos nos ano passado.
Bia, Bruno e Breno	6 Quinta-feira. Raciocínio: Se 01/01/2020 caiu numa quarta-feira, 31/12/2019 caiu em uma terça, 31/12/2020 cairá em uma quinta pois cada ano que passa, é um dia da semana a frente e o ano de 2020 é ano BISSEXTO.
Carla e Carina	6- Sábado, pois dividindo pelo 31 por 4 (pois quarta-feira é o quarto dia da semana) da 7 com isso Sábado e com isso todo 31 vai cair em um Sábado
Diana e Danieli	6 - sábado dia, pois dividindo pelo 31 por 4 (pois quarta-feira é o quarto
Erica e Eduarda	6_ Em base nos dias da semana (7 dias), nos mêses (29,30 e 31) pois o ano é bissexto, irá cair na Segunda-feira
Fábia e Fernanda	6 - Considerando que dia 1 de janeiro (2020) caiu numa quarta, e 2020 é ano bissexto, dia 31 de Dezembro (2020) deveria cair em uma quarta, mas como é ano bissexto = 4ª f + 2 = 6ª f, irá cair numa sexta.

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

A dupla Carla e Carina entendeu que, como quarta-feira é o quarto dia da semana, deveria dividir 31, que é o número de dias do mês de janeiro, por 4. Como o quociente dessa divisão é 7, associou-se que a resposta seria o sétimo dia da semana, ou seja, sábado.

A dupla Diana e Danieli, assim como a dupla anterior, tentou associar o resto da divisão de 31 por 4 à solução procurada, encontrando o sábado como resposta.

A dupla Érica e Eduarda tentou se basear no número de dias do ano, incluindo os 29 dias do mês de fevereiro para tentar fazer a contagem. No entanto, não conseguiu encontrar a solução de forma correta.

A dupla Fábia e Fernanda utilizou o raciocínio de forma correta, indicando que os anos começam e terminam no mesmo dia da semana. No entanto, equivocou-se ao concluir que, no caso dos anos bissextos, o ano começa num determinado dia da semana e termina dois dias depois, quando, na verdade, os anos bissextos começam e terminam em dias consecutivos da semana.

Apresentam-se a seguir a questão 7 (figura 12), e no quadro 8 as resoluções que as duplas propuseram.

Figura 12 – Terceiro problema sobre os dias da semana

QUESTÃO NÚMERO 07

O dia 02 de março de 2020 caiu numa segunda-feira. Em que dia da semana cairá o dia 17 de novembro de 2020?

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Ao observar o quadro 8, verificamos que a dupla Ana e Andrea não apresentou solução para essa questão, apenas especificou que a resposta foi dada depois de conversarem entre si.

O trio Bia, Bruno e Breno chegou à solução do problema, concluindo corretamente que o dia 17 de novembro de 2020 cairá numa terça-feira. No entanto, os alunos chegaram a essa resposta fazendo a contagem dos dias; não utilizaram, portanto, a ideia de congruência para solucionar a questão.

A dupla Carla e Carina tentou resolver a questão dividindo o número de semanas por 17, entendendo que a data inicial para a contagem deveria ser o divisor. Além disso, considerou apenas duas semanas, o que dificultou que os alunos concluíssem, de forma satisfatória, a questão.

A dupla Diana e Danieli não apresentou solução para o problema.

A dupla Érica e Eduarda tentou fazer a contagem dos dias, considerando os meses com 30 e 31 dias, e o mês de fevereiro, que no ano de 2020, por ser bissexto, terá 29 dias. No entanto, como 17 de março será depois do mês de fevereiro, esse fato não interfere na solução do problema. Além disso, as alunas não apresentaram nenhum mecanismo de resolução para essa questão.

A dupla Fábia e Fernanda fez a contagem dos dias. No entanto, concluiu que cada dia do mês avança três dias da semana para o mês seguinte. Essa conclusão equivocada dificultou que as alunas chegassem à resposta correta para o problema.

Quadro 8 – Terceiro problema sobre os dias da semana

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	7- Domingo, pensamos bem e esse é o resultado.
Bia, Bruno e Breno	7) Terça - feira. Raciocínio: Sabemos que 2 de março cai numa segunda - feira, então, se contarmos todos os dias, chegamos a conclusão que 17 de novembro cai em uma terça - feira.
Carla e Carina	7- ~~sábado~~ domingo, pois dividindo o número de semana (2) por 17 dá 8, com isso sabemos que é domingo.
Diana e Danieli	Não apresentou resolução
Erica e Eduarda	7- Em base nos dias da semana. 17 dias, nos meses (29, 30 e 31) pois o ano é Bissexto, irá cair no domingo.
Fábia e Fernanda	7- 17, março = terça 17, abril = sexta^{a} +3 (8) 5 - 2ª 6 - 5ª 7 - domingo 8 - 4ª 9 - sábado 10 - 3ª 11 - 6ª Só vai cair em uma sexta (a cada mês, o mesmo dia vai somar + 3 aos dias da semana)

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Ao final da análise das soluções apresentadas pelos alunos, percebeu-se que a grande maioria deles apresentou certa dificuldade para compreender e resolver os problemas. Praticamente todos os estudantes que participaram da pesquisa relataram que nunca tiveram contato com esse tipo de problema. A grande dificuldade encontrada por eles foi por onde começar, visto que, de modo geral, o aluno está acostumado a receber fórmulas prontas para serem aplicadas. Os alunos tentaram, ao seu modo, resolver cada uma das questões apresentadas.

Capítulo 7

Segundo Encontro e Análise do Segundo Encontro

No dia 09 de novembro de 2020, foram convidados os mesmos 13 alunos que participaram da aplicação da primeira lista de questões em março do referido ano. Destaca-se, aqui que, devido à pandemia do novo Coronavírus, as aulas presenciais foram suspensas em 17 de março, logo após a aplicação da primeira lista de questões, e só foram retomadas a partir de 26 de outubro. No entanto, o retorno para os alunos foi facultativo, e aqueles que desejaram, puderam optar por permanecer com atividades remotas. Entre os alunos que participaram da fase inicial da pesquisa, dois deles não retornaram, fazendo a opção pelo ensino remoto, e, portanto, não participaram dessa etapa da pesquisa.

Foi realizada uma socialização com os alunos que compareceram e, na oportunidade, o pesquisador foi comentando as questões e instigando os alunos a interpretarem os problemas de forma a entender a importância e aplicabilidade de situações dessa natureza para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Após os comentários e discussões acerca dos problemas, uma nova lista, com cinco questões, foi aplicada para os alunos presentes, que permaneceram com as mesmas duplas da primeira aplicação. Comparecerem cinco alunos do 8º ano e 6 alunos do 9º ano.

Apresentam-se a seguir a questão de número 1 da 2ª lista de questões (figura 13), "O problema da música", e no quadro 9 as resoluções dadas pelos alunos para esse problema.

Figura 13 – O problema da música

QUESTÃO NÚMERO 01

(Matemática Rio) Um estudante decidiu chutar todas as questões do ENEM, que tem alternativas (A), (B), (C), (D) e (E), usando a música *"Mamãe mandou eu escolher essa daqui, mas como sou teimoso vou escolher essa daqui!"*, na qual a cada sílaba ele trocava a alternativa. Ele logo percebeu que esta não seria uma boa tática, pois sempre dava a mesma resposta quando ele começava a cantar a música a partir da alternativa (A). Em qual alternativa estava caindo sempre? Por quê?

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Quadro 9 – O problema da música

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	① 27 | 5 2 5 R= Letra B, se dividimos vinte e sete por cinco o resultado dará 2.
Bia, Bruno e Breno	① 27 | 5 2 5 R= O estudante muda de letra a cada 1 sílaba que deu 27 vezes, ao dividirmos 27 por 5 (numero de opções) Teremos o resultado 5 com resto 2, ou seja letra (B)
Carla e Carina	Resposta: na alternativa (B). Porque o número de sílabas são 27 e se dividirmos por 5, ou seja, pelo número de alternativas, sempre vai dar resto 2 e consequentemente a letra (B). Então sempre que ele usar "mamãe mandou eu escolher essa daqui, mas como sou teimoso vou escolher essa daqui", vai acabar caindo na alternativa (B).
Diana e Danieli	1- 27 | 5 A B C D E 2 5 Resposta: na alternativa (B). Porque o número de sílaba são 27 e se dividi por 5 ou seja pelo numero de alternativa sempre vai dar resto 2 e consequentemente a letra B. que ele use "mamãe mandou eu escolher essa daqui etc..." vai cair no B
Erica e Eduarda	1. ma mãe man dou eu es co lher es se da qui A B C D E A B C D E A B mas co mo eu sou tei mo so vou es co C D E A B C D E A B C lher es se da qui D E A B C R: C, porque contamos o número de sílabas, e colocando na ordem (A,B,C,D,E) parou na letra C.

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Ao analisarmos a resolução da questão da dupla Ana e Andrea, percebemos que, de fato, chegou-se à conclusão correta para o problema, pois entenderam que o trecho da música seria dividido em 27 sílabas e, como a questão possui 5 alternativas, deveria dividir 27 por 5. Encontrou 2 como resto e concluiu que, ao começar a música a partir da alternativa A, sempre dariam cinco ciclos completos e pararia no segundo elemento de cada ciclo, ou seja, cairia sempre na alternativa B. No entanto, a dupla se equivocou na explicação da resolução, visto que admitiu 2 como resposta. Na realidade, o resto da divisão é 2, a resposta seria "vai cair sempre na letra B, pois o resto da divisão é 2.".

O trio Bia, Bruno e Breno também chegou à resposta correta para questão, entendendo que o procedimento deveria ser a divisão do número de sílabas pelo número de alternativas e, posteriormente, a análise do resto. No entanto, assim como ocorreu com os integrantes da dupla A, os alunos poderiam ter explicado de forma mais clara a relação entre os restos e as alternativas.

A dupla Carla e Carina concluiu, corretamente, que a alternativa correta seria a letra B. Explicou com suas palavras que o procedimento deveria ser a divisão do número de sílabas da música por 5, mas, assim como os alunos dos grupos anteriores, não explicou a relação existente entre os restos e as alternativas, ou seja, que na divisão de 27 por 5, o resto sempre será 2 e, por isso, utilizando-se essa música para marcar as alternativas, sempre irá cair na letra B.

A dupla Diana e Danieli também concluiu, corretamente, que o número de sílabas da música é 27 e que o procedimento a ser adotado deveria ser a divisão desse quantitativo de sílabas por 5. Os alunos dessa dupla também tentaram descrever em palavras como chegaram à resposta do problema, mas também não evidenciaram, de forma clara, a relação existente entre os restos da divisão e as alternativas.

A dupla Érica e Eduarda tentou resolver a questão separando as sílabas e fazendo a associação das alternativas a cada uma dessas sílabas. No entanto, no trecho da música "mas como sou teimoso", a dupla escreveu, equivocadamente, "mas como eu sou teimoso", o que gerou uma sílaba a mais, dificultando que os alunos chegassem à resposta correta.

Apresentam-se a seguir a questão de número 2 da 2ª lista de questões (figura 14), "O problema dos restos das divisões das potências de 2 por 7", e no quadro 10 as resoluções indicadas pelos alunos para esse problema.

Figura 14 – O problema dos restos das divisões das potências de 2 por 7

QUESTÃO NÚMERO 02

Qual o resto da divisão de 2^{150} por 7?

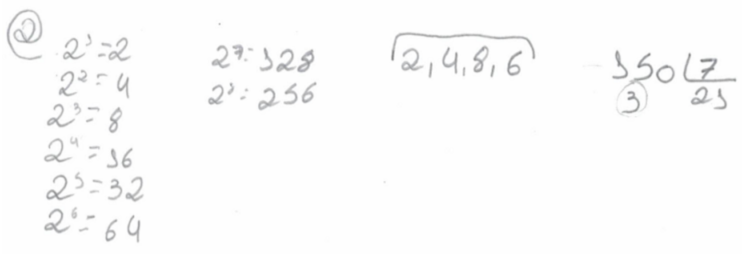
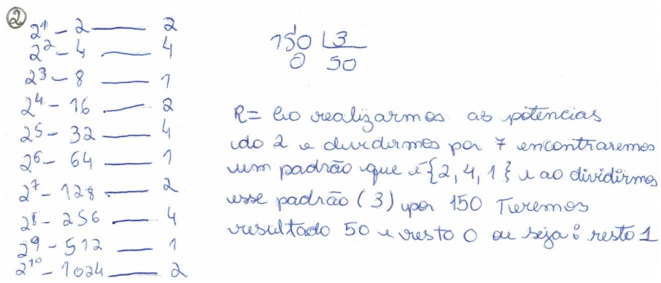
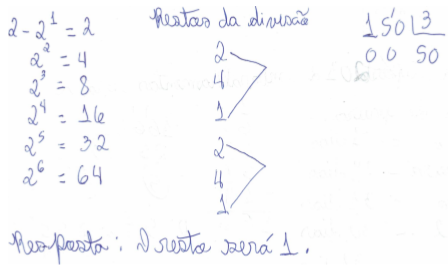
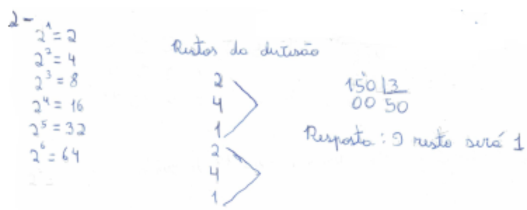
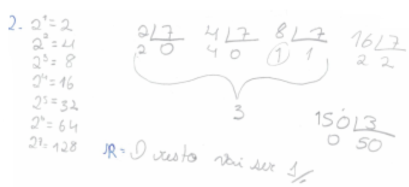
Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

A dupla Ana e Andrea tentou resolver a questão calculando as potências de 2 e analisando os resultados. No entanto, os alunos se confundiram, pois, em vez de analisar os restos das divisões dessas potências por 7, escreveram a sequência dos últimos algarismos das potências de 2. Além disso, efetuaram a divisão de 150 por 7, quando, na verdade, deveriam ter escrito o ciclo dos restos das divisões das potências de 2 por 7 e, após isso, efetuado a divisão de 150 pelo número de elementos que compõem esse ciclo.

O trio Bia, Bruno Breno realizou os procedimentos corretamente, calculando as potências de 2 e, após, escrevendo os restos das divisões dessas potências por 7. Concluiu que os restos dessas divisões eram sempre 2, 4 e 1, formando um ciclo, dividiu 150 por 3, obtendo quociente 50 e resto 0. Assim, entendeu-se que haveria 50 ciclos completos e, como o resto 1 é o último elemento de cada ciclo, essa seria a resposta. No entanto, não especificou-se, de forma correta, a relação existente entre os restos das divisões das potências de 2 por 7 com os elementos dos ciclos 2, 4 e 1.

A dupla Carla e Carina também resolveu a questão calculando as potências de 2 e analisando os

Quadro 10 – O problema dos restos das divisões das potências de 2 por 7

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	
Bia, Bruno e Breno	
Carla e Carina	
Diana e Danieli	
Erica e Eduarda	

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

restos das divisões dessas potências por 7. Após entender que esses restos formavam um ciclo, efetuou-se a divisão de 150 por 3 e concluíram, corretamente, que a resposta seria 1. A dupla Diana e Danieli, assim como a dupla anterior, efetuou os cálculos de forma correta, entendendo que se tratava de um problema relacionado a ciclos, dando a resposta para o problema de forma satisfatória.

A dupla Érica e Eduarda calculou, corretamente, as potências de 2 e efetuou a divisão dos resultados dessas potências por 7. Embora a dupla tenha efetuado as divisões desses resultados por 7 somente até a quarta potência de 2, concluiu que os restos dessas divisões formavam um ciclo composto por três elementos, e que o resto, considerando que as primeiras cento e cinquenta potências de 2 formam cinquenta ciclos completos, e que, portanto, o resto da divisão de 2^{150} por 7 será 1.

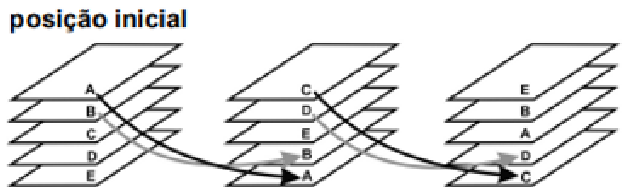
Ressalta-se que nessa questão, com exceção da dupla Ana e Andrea, todos os grupos entenderam sua ideia principal e a resolveram de forma correta.

Apresentam-se, a questão de número 3 (figura 15), “O problema das cartas marcadas”, e no quadro 11 as resoluções sugeridas pelos alunos para esse problema.

Figura 15 – O problema das cartas marcadas

QUESTÃO NÚMERO 03

(OBMEP – 2008) Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas. Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?



a) A b) B c) C d) D e) E

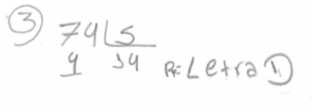
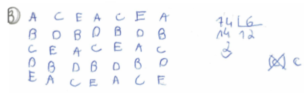
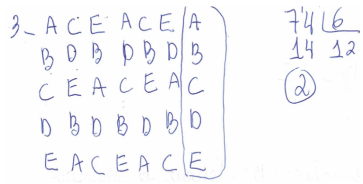
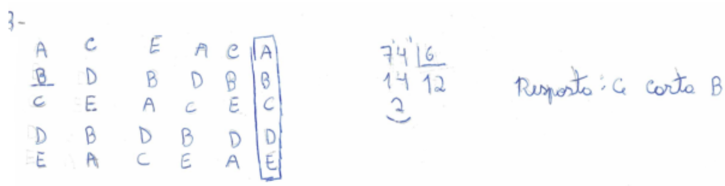
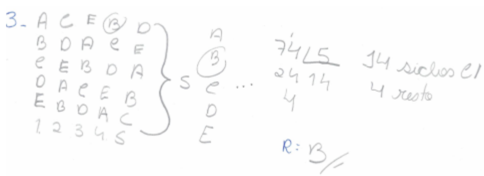
Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

A dupla Ana e Andrea entendeu que o problema deveria ser resolvido usando-se a ideia de ciclos. No entanto, os alunos dessa dupla analisaram que as cartas voltariam à posição inicial após cinco embaralhamentos, quando, na verdade, isso ocorrerá após as cartas serem embaralhadas seis vezes. Tal fato, dificultou que os alunos chegassem à resposta correta para o problema.

O trio Bia, Bruno e Breno entendeu que as cartas, após serem embaralhadas conforme as instruções dadas no problema, voltariam à posição inicial após seis embaralhamentos. Assim, após efetuar a divisão de 74 por 6, encontrou quociente 12 e resto 2, ou seja, após as cartas serem embaralhadas 74 vezes, ter-se-iam 12 ciclos completos e mais dois embaralhamentos, tendo-se a carta E no topo da pilha. No entanto, os alunos marcaram a alternativa C.

A dupla Carla e Carina entendeu que problema estava relacionado a ciclos. Os alunos dessa dupla esquematizaram o que aconteceria com as cartas nos primeiros embaralhamentos, entendendo que as cartas voltariam à posição inicial depois de serem embaralhadas seis vezes. Efetuaram a

Quadro 11 – O problema das cartas marcadas

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	
Bia, Bruno e Breno	
Carla e Carina	
Diana e Danieli	
Erica e Eduarda	

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

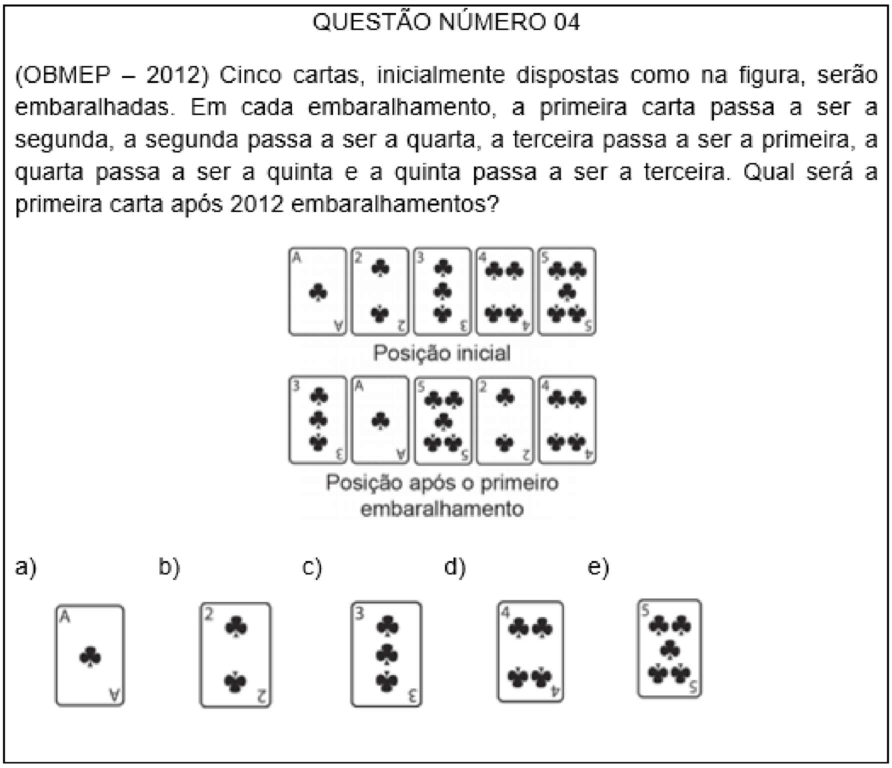
divisão corretamente, mas tiveram dificuldade para entender que, depois de 74 embaralhamentos, as cartas teriam voltado à posição inicial por doze vezes e deveriam ser embaralhadas mais duas vezes, estando a carta E no topo da pilha, e não a carta B, como foi marcado pela dupla.

A dupla Diana e Danieli, assim como a dupla anterior, observou o comportamento das cartas durante os primeiros embaralhamentos, concluindo que elas formavam um ciclo. Também efetuou-se a divisão corretamente, mas não associou que, após serem embaralhadas 74 vezes, as cartas formariam doze ciclos completos, mais dois embaralhamentos, e marcaram, equivocadamente, a alternativa B.

Os alunos Érica e Eduarda também simularam o comportamento das cartas. Porém, confundiram-se ao escrever a sequência do segundo embaralhamento, trocando a posição das cartas A e B, o que fez com que todas as outras cartas voltassem à posição inicial após cinco embaralhamentos e não seis, como deveria ser. Mesmo se equivocando com a ordem das cartas, a dupla entendeu que se tratava de um problema relacionado a ciclos, e que poderia resolvê-lo utilizando a ideia dos restos.

Apresentam-se, a questão de número 4 da 2ª lista de questões (figura 16), com “O problema das cartas de baralho”, e no quadro 12 as resoluções dadas pelos alunos.

Figura 16 – O problema das cartas de baralho


QUESTÃO NÚMERO 04

(OBMEP – 2012) Cinco cartas, inicialmente dispostas como na figura, serão embaralhadas. Em cada embaralhamento, a primeira carta passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a quarta, a terceira passa a ser a primeira, a quarta passa a ser a quinta e a quinta passa a ser a terceira. Qual será a primeira carta após 2012 embaralhamentos?

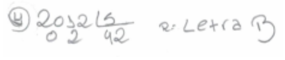
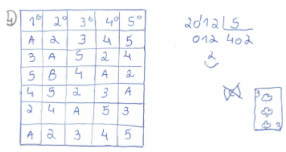
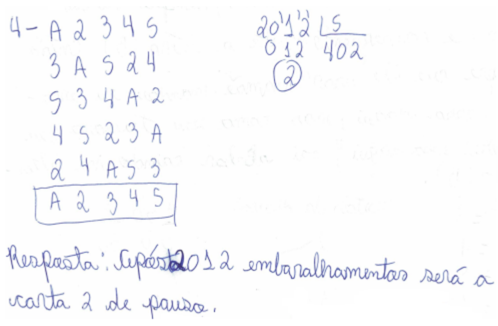
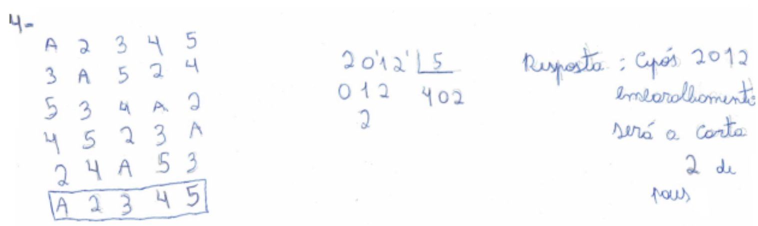
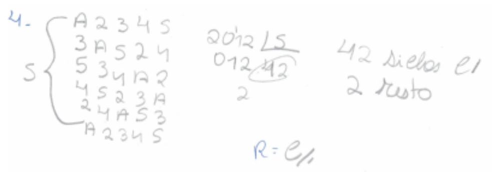
Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

A dupla Ana e Andrea não escreveu o sequenciamento das cartas durante os primeiros embaralhamentos. Porém, entendeu que as cartas voltariam à posição inicial após serem embaralhadas cinco vezes. Os alunos efetuaram a divisão corretamente e entenderam que, após 2012 embaralhamentos, teriam 402 ciclos completos e embaralhariam as cartas mais duas vezes, mas se confundiram ao marcar a alternativa, pois contaram a partir da posição inicial em que as cartas se encontravam, e não a partir do primeiro embaralhamento, no qual a carta que ocupa a primeira posição é a de número 5.

O trio Bia, Bruno e Breno escreveu o sequenciamento correto das cartas durante os primeiros cinco embaralhamentos , apenas se equivocando na hora de escrever a carta que ocupa a segunda posição do segundo embaralhamento, pois, em vez de escrever o número 3, escreveram a letra B. Tal fato não prejudicaria a resposta final do problema, visto que os alunos entenderam corretamente que se travava de uma situação que poderia ser resolvida por congruência, analisando-se o resto da divisão de 2012 por 5. No entanto, assim como os alunos da dupla anterior, o trio começou a contagem pela configuração inicial das cartas, e não pelo primeiro embaralhamento, o que impossibilitou que os alunos chegassem à resposta correta para o problema.

A dupla Carla e Carina escreveu de forma correta os cinco primeiros embaralhamentos das

Quadro 12 – O problema das cartas de baralho

Grupo	Resolução
Ana e Andrea	
Bia, Bruno e Breno	
Carla e Carina	
Diana e Danieli	
Erica e Eduarda	

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

cartas e entendeu que se travava de um problema relacionado a ciclos, efetuou a divisão de forma correta, mas não conseguiu concluir corretamente o problema, pois, provavelmente, os alunos confundiram o resto 2, da divisão de 2012 por 5, com a carta número 2, associando equivocadamente o resto à resposta.

Os alunos da dupla Diana e Danieli também escreveram, corretamente, a configuração das cartas nos primeiros cinco embaralhamentos, entendendo que após isso, voltariam à posição inicial. Efetuaram a divisão, também de forma correta, mas, assim como a dupla Carla e Carina, associaram o resto 2 à carta número 2, marcando a alternativa de maneira equivocada.

A dupla Érica e Eduarda também escreveu as primeiras sequências dos embaralhamentos das cartas, concluindo que elas voltariam à posição inicial após serem embaralhadas cinco vezes.

Ao realizar a divisão de 2012 por 5, os alunos representaram o quociente de forma equivocada, escrevendo 42 em vez de 402. Também se equivocaram ao dar a resposta do problema, pois começaram a contar a partir da posição inicial, quando deveriam ter começado a partir do primeiro embaralhamento.

Apresentam-se, a questão de número 5 da 2ª lista de questões (figura 17), com "O problema dos dias da semana", e no quadro 13 as resoluções indicadas pelos alunos para esse problema.

Figura 17 – O problema dos dias da semana

> QUESTÃO NÚMERO 05
>
> Se o dia 1º de janeiro de 2020 caiu numa quarta-feira, em que dia da semana irá cair o dia 14 de junho de 2020, sabendo que 2020 é um ano bissexto?

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

A dupla Ana e Andrea tentou resolver a questão fazendo o esboço do calendário. No entanto, não contou-se o total de dias existentes, de 1º de janeiro a 14 de junho, apenas deduziu, equivocadamente, que o número total de dias no referido período seria 180. A dupla entendeu que deveria dividir o quantitativo de dias por 7, porém não conseguiu encontrar a resposta correta para o problema.

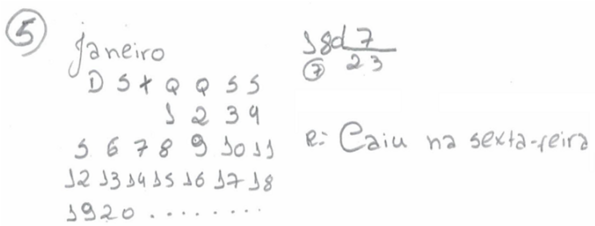
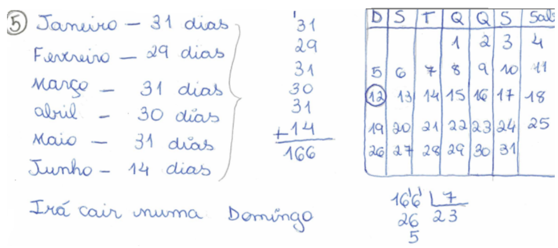
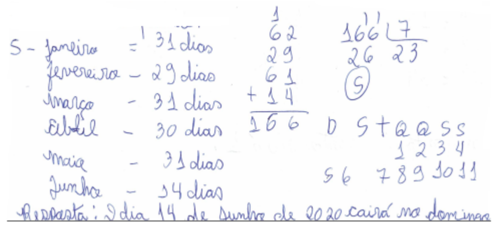
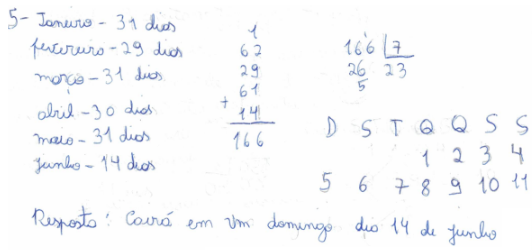
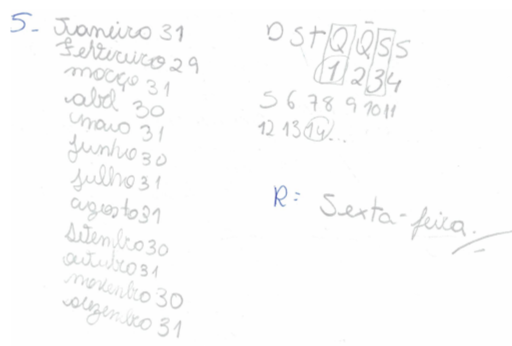
O trio Bia, Bruno e Breno fez, corretamente, a contagem do número de dias que existem do dia 1º de janeiro ao dia 14 de junho e, após isso, dividiu o total de dias por 7, encontrando 23 semanas completas e mais 5 dias. Os alunos do trio ainda esquematizaram o calendário e concluíram, corretamente, que o dia 14 de junho de 2020 cairia num domingo. No entanto, o esquema feito pelos alunos seria referente ao mês de janeiro, visto que os alunos marcaram o dia 12 de janeiro no desenho. Embora o trio tenha se confundindo apenas no esboço do calendário, chegou de forma satisfatória à conclusão do problema.

A dupla Carla e Carina realizou a contagem dos dias existentes, de 1º de janeiro a 14 de junho, num total de 166 dias, entendendo que deveria dividir esse total por 7. Ao realizar a divisão, as alunas encontraram quociente 23 e resto 5, analisando, corretamente, que isso seria o equivalente a 23 semanas completas e mais 5 dias. A dupla também entendeu que uma semana completa, contada a partir de quarta-feira, sempre cairia na terça-feira. A partir daí, contou-se mais 5 dias e concluiu, corretamente, que o dia 14 de junho de 2020 seria no domingo.

A dupla Diana e Danieli, assim como Carla e Carina, fez a contagem do total de dias corretamente, efetuou a divisão desse quantitativo por 7 e analisou o resto, concluindo que o dia 14 de junho de 2020 cairia em um domingo.

Os alunos da dupla Érica e Eduarda anotaram o quantitativo de dias existentes em cada um dos meses do ano e tentaram fazer a contagem a partir do dia 1º de janeiro. No entanto, não entenderam que deveriam contar o total de dias existentes no período descrito pelo problema e

Quadro 13 – O problema dos dias da semana

<table>
<tr><th>Grupo</th><th>Resolução</th></tr>
<tr><td>Ana e Andrea</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Bia, Bruno e Breno</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Carla e Carina</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Diana e Danieli</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Erica e Eduarda</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

dividir por 7, para, então, analisarem o resto e fazerem a contagem a partir dessa situação. Além disso, a dupla marcou o dia 14 de janeiro no calendário e escreveu, como resposta, sexta-feira.

Após a análise das resoluções da segunda lista de questões, fez-se um comparativo com os resultados obtidos na primeira lista. Apresentam-se na tabela 1 o número de questões, o número de erros e o número de acertos dos grupos nas duas listas de questões que foram aplicadas.

Tabela 1 – Tabela comparativa

Grupos	Sujeitos	1ª lista de questões				2ª lista de questões			
		Número de questões	Número de acertos	Número de erros	Porcentagem de acertos (%)	Número de questões	Número de acertos	Número de erros	Porcentagem de acertos (%)
A	Ana e Andrea	7	2	6	28,57	5	1	4	20
B	Bia, Bruno e Breno	7	4	5	57,14	5	3	2	60
C	Carla e Carina	7	1	9	14,28	5	3	2	60
D	Diana e Danieli	7	1	9	14,28	5	3	2	60
E	Erica e Eduarda	7	1	9	14,28	5	1	4	20
F	Fábia e Fernanda	7	4	6	57,14	5	-	-	-

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2020)

Em relação ao aprendizado dos alunos, observou-se que houve evolução. Embora alguns tenham marcado a resposta final de forma equivocada, ao considerarmos o quantitativo de aulas que foi usado para a intervenção, verificamos que o caminho percorrido pelos alunos apontou para uma compreensão geral do conteúdo. Isso significa que, provavelmente, um tempo maior dispensado ao ensino desses conteúdos promoverá uma melhor assimilação por parte dos alunos. Considerando-se, ainda, que o quantitativo de questões de cada uma das listas não foi o mesmo, optou-se por comparar o percentual de acertos dos grupos. É possível observar, na tabela 1, que apenas a dupla A obteve um percentual de acertos menor na segunda lista de questões, enquanto todos os outros grupos apresentaram um aproveitamento melhor.

Capítulo 8

Considerações Finais

O presente trabalho é fruto de uma pesquisa realizada com um grupo de alunos das turmas de 8° e 9° anos da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Professora Inah Werneck", localizada no município de Cachoeiro de Itapemirim – ES, e que teve como objetivo principal utilizar a resolução de problemas como metodologia para o ensino da Matemática. Especificamente neste trabalho, optou-se por dar ênfase aos conteúdos de Divisibilidade e Congruência.

A pesquisa foi dividida, basicamente, em três etapas. A primeira constituiu-se num levantamento bibliográfico, com o estudo de alguns autores que versam sobre a temática da Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de Matemática. A segunda etapa do trabalho destinou-se à aplicação de uma lista de questões para um grupo de alunos, selecionados aleatoriamente entre os estudantes da escola onde foi realizada a pesquisa.

Nessa etapa, os alunos tiveram um tempo pré-determinado para resolver, sem a intervenção do pesquisador, alguns problemas sobre Divisibilidade e Congruência. Não houve, nesse primeiro momento, explicação por parte do pesquisador acerca dos conteúdos abordados nas listas de questões, visto que o objetivo principal era analisar o comportamento dos alunos frente aos problemas propostos, bem como os mecanismos que seriam utilizados pelos mesmos para resolver as questões. Depois disso, todos os dados coletados foram tabulados e analisados pelo pesquisador. Visando a um trabalho mais colaborativo entre os próprios alunos, optou-se por dividi-los em duplas, a fim que pudessem trocar ideias e compartilhar conhecimentos. Porém, como no dia da aplicação das questões compareceu um número ímpar de participantes, houve a necessidade de se fazer também um trio.

De modo geral, ficou evidente a dificuldade apresentada pelos alunos para resolver as questões que lhes foram propostas. Embora os estudantes que participaram da pesquisa sejam alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II e, em tese, devessem saber as regras básicas da multiplicação e divisão, além de outros conceitos básicos de matemática, apresentaram grande dificuldade em relação à tabuada e ao uso do algoritmo da divisão, bem como também apresentaram muitas dúvidas em relação à interpretação dos problemas.

Na terceira etapa da pesquisa, as atividades foram devolvidas para os alunos e foi realizada uma socialização entre eles, momento no qual o pesquisador fez uma discussão das questões.

Durante essa intervenção, o pesquisador introduziu, por meio da correção dos problemas, os conceitos acerca dos conteúdos de Divisibilidade e Congruência. Dessa forma, os alunos tiveram a oportunidade de fazer uma autoavaliação sobre o seu próprio conhecimento matemático. Ainda durante essa intervenção, uma segunda lista de questões, com novos problemas, foi aplicada para o grupo de alunos. Dessa vez, com base nas observações feitas pelo pesquisador e de posse dos conceitos básicos sobre os conteúdos Divisibilidade e Congruência, o grupo apresentou menos dificuldade e insegurança em relação à primeira lista de questões.

Após a análise dos resultados obtidos pelos estudantes nessa última etapa, foi possível perceber uma evolução significativa no processo de aprendizagem. A grande maioria deles resolveu os problemas de forma satisfatória e, embora alguns não tenham chegado à resposta final, conseguiram desenvolver uma estratégia de resolução adequada para a situação proposta em cada uma das questões. Considerando-se, ainda, o tempo mínimo que foi destinado para a intervenção e correção da primeira lista de questões, quando os alunos puderam aprender sobre os conteúdos abordados aqui, pode-se dizer que o objetivo principal do trabalho, que é a aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, foi alcançado.

No entanto, ainda há um longo caminho a ser percorrido no que tange ao uso da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino para a Matemática. Observou-se, entre o grupo pesquisado, e durante a aplicação da primeira lista de questões, uma grande dependência por fórmulas ou modelos matemáticos "prontos", que pudessem ser usados na resolução dos problemas que foram propostos. A grande maioria dos alunos relatou nunca ter visto esse tipo de problema. Com base nos anos de experiências dedicados ao magistério, percebo que ainda é muito comum, entre a grande maioria dos professores de Matemática, a metodologia de introduzir um conteúdo com conceitos e fórmulas, o que torna o processo de aprendizagem mecanizado e cria essa dependência no aluno. Nesse sentido, exercitar o espírito investigativo, utilizando situações novas e desafiadoras, como as que foram usadas neste trabalho, é essencial para promover uma aprendizagem sólida e significativa, tornando-os protagonistas na construção do seu próprio conhecimento. Além disso, apresentar um conteúdo por meio da resolução de problemas permite que o próprio aluno possa desenvolver os conceitos envolvidos e necessários para a abordagem dos problemas propostos.

Dessa forma, baseado nos resultados obtidos durante a última etapa da pesquisa, é possível afirmar que uma quantidade maior de aulas destinadas ao ensino, não somente dos conteúdos que foram objeto deste trabalho, mas também de muitos outros conteúdos matemáticos, através da resolução de problemas, iria melhorar, consideravelmente, os índices de aprendizagem. A matemática é uma ciência de relevante importância para toda a sociedade, está presente em nosso dia a dia e seu ensino é fundamental para a compreensão do mundo em que vivemos. A busca por novas metodologias de ensino e aprendizagem, bem como o aperfeiçoamento das metodologias já existentes, deve ser um processo contínuo. Espero que este trabalho possa contribuir, de alguma forma, para auxiliar outros professores no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Referências

BORBA, M. de C.; SKOVSMOSE, O. *Ideologia da Certeza em Educação Matemática, In: SKOVSMOSE, O. Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. 2. ed. Campinas: Papirus, 2001. 127-148 p. Citado na página 14.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. secretaria de educação fundamental. *MEC/Secretaria de Educação Fundamental*, Brasília, v. 3, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

BRASIL. Mec - base nacional comum curricular. *Acesso em 23/11/2019*, Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenaciobalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCC_publicacao.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

BRASIL. Inep: Instituto nacional de estudos e pesquisas educacionais anísio teixeira. *Acesso em 07/11/2019*, Brasília, 2019. Disponível em: <http://inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb>.

FOMIN, S. G. D.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos: a Experiência Russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 23, 28, 32 e 38.

FUCHS, M. J. et al. *A História do Ensino da Matemática: Contribuições na Formação de Futuros Professores de Matemática*. [S.l.]: Revista Contexto Educação, 2014. v. 29. 45-71 p. Citado na página 15.

GUALANDI, J. H. Os reflexos de uma formação continuada na prática profissional de professores que ensinam matemática. *Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, São Paulo, 2019. Citado na página 45.

HEFEZ, A. *Iniciação à aritmética*. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 34.

LESTER, F. K. Trends and issues in mathematical problem solving reserch", in: Lesh, r.; landau, m. (eds.) acquisition mathematical concepts and processes. *Academic Press*, New York, 1983. Citado na página 18.

MIRANDA, T.; ASSIS, C. Portal da matemática - obmep: Módulo de números naturais. divisibilidade e teorema da divisão euclidiana. *Acesso em 05/10/2019*, 2017. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/54kyp0vmxwwsg.pdf>. Citado 5 vezes nas páginas 28, 29, 30, 31 e 32.

ONUCHIC, L. de la R. *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. 199-218 p. Citado na página 18.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

POZO, J. I. *A Solução de Problemas. Aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998. Citado na página 18.

RIPOLL, C. et al. *Livro de Professor de Matemática volume I: números naturais*. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado na página 25.

SOUZA, F. H. T. de. Aritmética - aula 32 - algoritmo da divisão euclidiana. *Acesso em 05/10/2019*, 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gB0nRZHI4Wg>.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. *Educação e Matemática*, n. 105, 2009. Citado na página 45.

APÊNDICE A

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em autorizar o menor de idade pelo qual o (a) senhor (a) é responsável a participar da pesquisa de campo referente ao trabalho de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática – Profmat da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), intitulado **“A Resolução de Problemas como Metodologia para o Ensino de Congruências e Divisibilidade na Educação Básica”** desenvolvido por Gilberto Caetano Júnior, no dia 16 de março de 2020. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é orientada pelo Professor Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário através do telefone nº (27) 99942-0176.

Afirmo que o autorizo a participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos da pesquisa, que, em linhas gerais **é investigar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino da Matemática**

A colaboração se fará de forma anônima, a qual o aluno responderá uma bateria de problemas. O acesso e a análise dos dados coletados se farão pelo pesquisador e o seu orientador.

Fui ainda informado (a) de que, o menor de idade pelo qual senhor (a) é responsável, pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem prejuízo ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos. Atesto, por fim, o recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Eu,____ (nome do responsável ou representante legal), portador do RG nº:__________________________, confirmo que Gilberto Caetano Júnior explicou-me os objetivos desta pesquisa, bem como, a forma de participação. Assim, autorizo a participação de ____ (nome do participante da pesquisa menor de idade) nesta pesquisa. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento, portanto, eu concordo em dar meu consentimento para o menor participar como voluntário desta pesquisa.

Assinatura do responsável: ___________________________

Assinatura do pesquisador: ____________________________

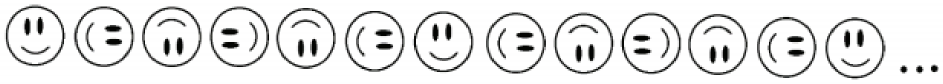
Cachoeiro de Itapemirim, 12 de Março de 2020.

APÊNDICE B

Primeira Lista de Problemas

Primeira lista de problemas

1) (IFES – 2020) Caio desenhou no seu caderno uma sequência de “emojis” seguindo o padrão

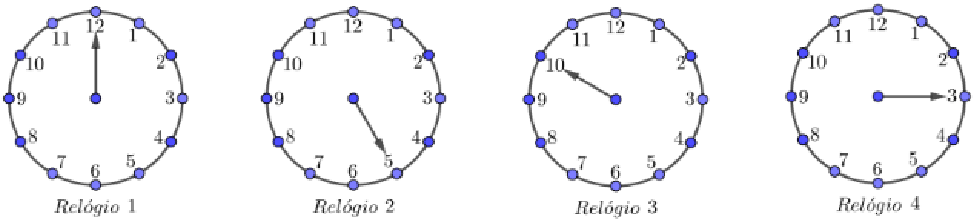


Qual foi o 500º “emoji” desenhado nesta sequência?

a)  b)  c)  d)  e) 

2) Considerando a sequência ABCDEABCDEABC..., qual letra ocupará a 2019ª posição?

3) (Banco de questões OBMEP 2019 – Adaptada) A figura abaixo é o início de uma sequência lógica composta por 1.000 relógios.



a) O ponteiro do Relógio 5 aponta para qual número?
b) O ponteiro do Relógio 1.000 aponta para que número?

4) (Banco de questões OBMEP – 2016) Qual o resto da divisão de 2^{2015} por 20? Bom, é difícil fazer esta divisão diretamente usando apenas papel e caneta. Vamos procurar uma maneira de obter tal resposta analisando os restos de potências de 2 por 20 com a esperança de encontrar algum padrão neles. Qual o resto que 2^5 deixa por 20?

$$2^5 = 32 = 1.20 + 12$$

Sabendo disto, fica fácil saber o resto de 2^6 por 20, pois

$$2^6 = 2.2^5 = 2.(1.20 + 12) = 2.20 + 24$$

Dado que 24 é maior que 20 e não pode ser um resto, devemos escrever

$$2^6 = 3.20 + 4$$

Podemos estender o argumento anterior concluindo que, para saber o resto de 2^{i+1} por 20, basta saber o resto do produto do resto de 2^{i} por 20. Desse modo, podemos construir a sequência de potências e restos na divisão por 20.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{2^1}$	$\boldsymbol{2^2}$	$\boldsymbol{2^3}$	$\boldsymbol{2^4}$	$\boldsymbol{2^5}$	$\boldsymbol{2^6}$
Resto por 20	2	4	8	16	32	64

a) Determine os restos que os números 2^7, 2^{10} e 2^{13} deixam na divisão por 20.

b) Sabendo que os restos se repetem de forma periódica, determine o período de repetição, ou seja, o número de restos distintos que ficam se repetindo.

c) Voltamos à pergunta do começo do problema. Qual o resto que 2^{2015} deixa na divisão por 20?

5) Sabendo que o dia 1º de janeiro de 2019 caiu numa terça-feira, em que dia da semana cairá o dia 31 de dezembro de 2019?

6) No ano de 2020 o dia 1º de janeiro caiu numa quarta-feira. Em que dia da semana irá cair o dia 31 de dezembro de 2020?

7) O dia 2 de março de 2020 caiu numa segunda-feira. Em que dia da semana cairá o dia 17 de novembro de 2020?

APÊNDICE C

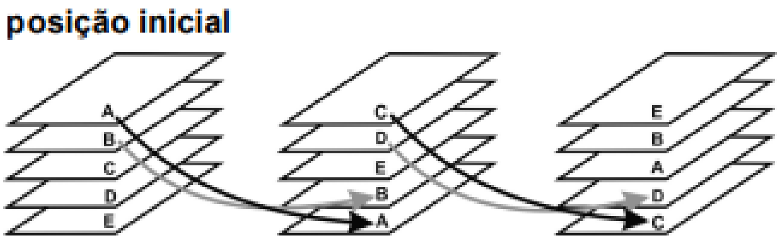
Segunda Lista de Problemas

Segunda lista de problemas

1) (Matemática Rio) Um estudante decidiu chutar todas as questões do ENEM, que tem alternativas (A), (B), (C), (D) e (E), usando a música *“Mamãe mandou eu escolher essa daqui, mas como sou teimoso vou escolher essa daqui!”*, na qual a cada sílaba ele trocava a alternativa. Ele logo percebeu que esta não seria uma boa tática, pois sempre dava a mesma resposta quando ele começava a cantar a música a partir da alternativa (A). Em qual alternativa estava caindo sempre? Por quê?

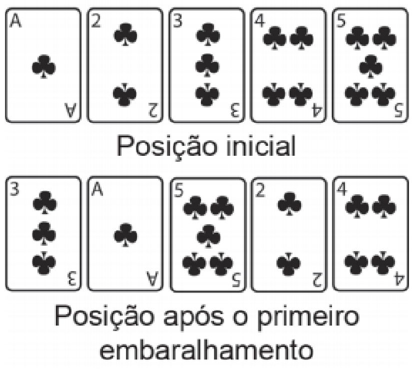
2) Qual o resto da divisão de 2^{150} por 7?

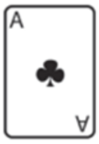
3) (OBMEP – 2008) Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas. Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

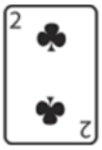


a) A b) B c) C d) D e) E

4) (OBMEP – 2012) Cinco cartas, inicialmente dispostas como na figura, serão embaralhadas. Em cada embaralhamento, a primeira carta passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a quarta, a terceira passa a ser a primeira, a quarta passa a ser a quinta e a quinta passa a ser a terceira. Qual será a primeira carta após 2012 embaralhamentos?



a)


b)


c)


d)


e)


5) Se o dia 1º de janeiro de 2020 caiu numa quarta-feira, em que dia da semana irá cair o dia 14 de junho de 2020, sabendo que 2020 é um ano bissexto?