UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

Dificuldades, Representações e Métodos de Resolução de Equações do 1º Grau de Alunos do Ensino Médio

Jady Ogioni Coelho

Vitória - ES

2021

Jady Ogioni Coelho

Dificuldades, Representações e Métodos de Resolução de Equações do 1º Grau de Alunos do Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

Vitória - ES

2021

Jady Ogioni Coelho

Dificuldades, Representações e Métodos de Resolução de Equações do 1º Grau de Alunos do Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

Vitória, 18 de novembro de 2021

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

____
Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer

____
Prof. Dr. Pedro Matos da Silva

Vitória – ES
2021

AGRADECIMENTOS

Aos meus amigos e familiares, por todo apoio.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina”

Cora Coralina

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar dificuldades, representações e métodos de resolução de equações do primeiro grau de alunos do Ensino Médio, para que, com o reconhecimento dessas dificuldades, professores possam melhor abordar na tentativa de evitá-las. Os dados foram coletados e analisados com base em diversos estudiosos da área de Álgebra. A pesquisa utilizou a aplicação de um questionário e cinco atividades, onde seguem uma linha de desenvolvimento na resolução de equações, nas quais os alunos fazem referência da relação de equações com algumas metodologias como a representação em balança. Nessa aplicação foram utilizados quatro métodos de resolução de equações: Gerar e avaliar, Esconder, Desfazer e Equações equivalentes. Foram feitas análises das atividades feitas por alunos, que geraram reflexão sobre seu desenvolvimento algébrico. Os resultados analisados mostraram a importância de se trabalhar em sala de aula mais de um método para desenvolver os conteúdos, tendo em vista que cada indivíduo tem seu modo.

Palavras-chave: Equações. Dificuldades em álgebra. Representações. Métodos de resolução. Pensamento algébrico.

ABSTRACT

The goal of this research is analyze the difficulties, representation and methods of solving equations in the first grade of high school students, so that, with the recognition of these difficulties, teachers can better address them in an attempt to avoid them. The data was collected and analyzed based in a fill Algebras researchers. This research was developed based on the application of a questionnaire and five activities, which follow a line of development in solving equations, in which students make reference to the relationship of equations with some methodologies such as representation on a scale. In this application, four methods of solving equations were used: Generate and Evaluate, Hide, Undo and Equivalent Equations. Analyzes were made of the activities carried out by students, which generated reflection on their algebraic development. The analyzed results showed the importance of working in the classroom with more than one method to develop the contents, considering that each student has its own way.

Keywords: Equations. Difficulties in Algebra. Representations. Resolution Methods. Algebraic Thinking.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Observei desde a época da escola, quando ainda aprendia equações, que muitos colegas apresentavam mais dificuldades com a inserção desse conteúdo. Isso se estendeu a quando comecei a dar aulas particulares. Eu percebia que os alunos não avançavam no conteúdo até que as dificuldades eram sanadas. A partir daí desenvolviam esses e os demais conteúdos de uma forma bem melhor.

Trabalhei durante um ano no KUMON, que é um curso com metodologia individualizada, que treina o pensamento rápido e o raciocínio lógico, na tentativa de formar pessoas autodidatas e disciplinadas. Lá pude observar que com a realização do material pelo aluno, a partir do momento em que superava sua dificuldade, ele melhorava consideravelmente na escola. Quase sempre essa dificuldade estava relacionada a conteúdos anteriores ao que estavam estudando no momento na escola. Essas observações foram me aproximando cada vez mais da escolha do tema desta pesquisa.

No Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), onde participei como bolsista de 2012 a 2015, observei a mesma realidade com relação ao conteúdo de álgebra, que àquela observada na minha época de escola.

Já como Professora efetiva na Secretaria de Educação do Estado, os relatos e observações não mudaram. Mesmo sendo um conteúdo de grande relevância, durante toda essa trajetória, percebi que o estudo de equações é encarado pelos alunos como uma barreira. Foi dessa forma que cheguei ao tema dessa dissertação.

A dificuldade dos alunos na aprendizagem de equações pode estar ligada à chegada de grandeza desconhecida. Até então os alunos lidavam com questões mais claras, concretas, com resultados mais explícitos. Com o início do estudo das equações, eles passam a ter informações abstratas. Nesse novo processo, não conseguem perceber o sentido dos caminhos percorridos e, logo, a importância da aprendizagem desse conteúdo não lhes fica clara. Porém, não podemos esquecer que além desse empecilho prévio, há também outras dificuldades encontradas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem.

Acredito ser imprescindível conhecermos melhor onde estão as principais dificuldades dos alunos nos processos de aprendizagem. Se já tivermos essa informação previamente nós, professores, podemos evitar que muitos alunos criem um bloqueio e deixem passar algo sem que seja compreendido.

O meu foco inicial foi identificar as principais dificuldades dos alunos ao aprender equações de 1º grau. Para que, com o reconhecimento dessas dificuldades, professores possam planejar a apresentação do conteúdo tentando evitá-las.

Estando em 2021 atuando no Ensino Médio, tive a oportunidade de realizar essa pesquisa com alunos já dessa etapa, e verificar se carregavam dificuldades nessa área para até então.

Equações é um dos conteúdos base para os alunos realizarem um Ensino Médio com mais proveito. Então, observar se já tinham ou ajudá-los a ter o domínio do tema Equações foi o que nos propomos a fazer para que sigam o caminho dos estudos com mais firmeza e conhecimento.

Deste modo, definimos como questão central de investigação: Que dificuldades, alunos de uma turma de Ensino Médio, apresentam ao resolverem equações do 1º grau ao final de uma sequência de atividades sobre esse conteúdo?

Para tentar responder a esse questionamento traçamos os seguintes objetivos:

Objetivo geral

Analisar dificuldades, representações e métodos de resolução de alunos de uma turma de Ensino Médio ao estudarem problemas envolvendo equações de 1º grau.

Objetivos específicos

- Verificar conhecimentos anteriores sobre equações do 1º grau de alunos do Ensino Médio.
- Identificar resoluções de alunos do Ensino Médio e os métodos utilizados nas atividades de equações de 1º grau;
- Verificar modificações no processo de resolução de equações do 1º grau a partir da intervenção proposta;

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Ao tratar de equações neste trabalho tratarei de equações do primeiro grau com uma incógnita.

No capítulo 1 fiz uma introdução, onde conta toda a trajetória até o presente trabalho e o porquê da escolha desse tema. Além de traçar os objetivos, que a pesquisa teve que alcançar.

Já no capítulo 2, apresentei uma revisão de literatura na qual me baseei para a realização da pesquisa e para a análise dos materiais. Para tal, permeei por álgebra escolar, tratando também nela a parte histórica da álgebra, até chegar no pensamento algébrico. Depois analisei trabalhos de pesquisadores que tratam das dificuldades em álgebra, observando inclusive, aqueles que analisaram erros em álgebra.

No capítulo 3, descrevi toda a metodologia utilizada para a realização deste trabalho, onde apresentei o contexto da pesquisa e seus sujeitos, além de apresentar cada etapa utilizada na pesquisa.

Em seguida, no capítulo 4, realizei as análises dos dados, e pude ter ciência do desenvolvimento dos alunos durante a pesquisa, e do cumprimento dos objetivos.

Por fim, no capítulo 5, estruturei uma Sequência Didática como sugestão para o ensino de Equações.

2 REVISÃO DE LITERATURA E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Para realizar essa pesquisa fiz leituras para ter ciência do que falam os pesquisadores do assunto e quais trabalhos já existem na mesma linha, para conhecer quais recursos utilizaram e quais resultados alcançaram. Com isso, construí um embasamento teórico e metodológico para tentar responder à problemática da pesquisa.

Apresento a seguir uma revisão de literatura referente aos seguintes eixos: álgebra escolar, dificuldades em álgebra e análise de erros em álgebra.

2.1 ÁLGEBRA ESCOLAR

A álgebra não foi sempre como conhecemos hoje. No início, era mais textual e não simbólica como agora a usamos e as descobertas vieram aos poucos, sendo complementadas por vários estudiosos, até ser como a conhecemos atualmente.

“Frequentemente voltamo-nos para registros do passado em busca de inspiração para decisões quanto ao futuro. Muitas vezes o futuro que projetamos consiste em grande parte num rearranjo de elementos do passado.” Coxford e Shulte (1994).

Segundo Fernandes (2011, p.6)

> […] o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios:
>
> i) Retórico (verbal), caracterizado pela ausência de simbologia e pela descrição de problemas por texto;
> ii) Sincopado (no qual eram utilizadas abreviações de palavras). Nesta fase iniciada por Diofanto, as incógnitas são substituídas por letras mas não existe a procura de um método convergente.
> iii) Simbólico (desenvolvido a partir dos trabalhos de Viète). A Álgebra é dotada de um simbolismo próprio e deixa de ser uma ferramenta para resolver problemas. O objeto de estudo da álgebra passa a ser a sua própria estrutura e não apenas os procedimentos. As letras passam a designar incógnitas e variáveis e desenvolve-se a noção de relação e função.

Como afirma Fernandes (2011) a Álgebra surgiu no Egito quase ao mesmo tempo que na Babilônia. Os egípcios usavam o método de resolução que mais tarde foi apelidado de falsa proposição. No Egito, assim como na Babilônia, a álgebra era retórica. Já a Álgebra grega formulada pelos pitagóricos e por Euclides era geométrica.

Diofanto (c. 200-c. 284) é considerado por alguns o fundador da Álgebra, onde utilizava o estilo de linguagem chamado “sincopado”, onde passa a aparecer abreviações. Mas é no trabalho de al-Khwarizmi (790-840), que o termo “Álgebra” surge, ainda não como a entendemos.

Sinais do simbolismo se deu com o aparecimento do símbolo de igual, que segundo Baumgart (1992, p.13) o sinal “=” foi introduzido por Robert Record em 1557 por entender que não havia coisas tão iguais quanto duas retas paralelas.

Com François Viète (1540-1603) chega a Álgebra simbólica e ele indica resposta para a grande questão da teoria das equações, que era saber a quantidade de soluções que podia ter uma equação de grau *n*. Mas Albert Girard (1595-1632), em seu livro *Invention nouvelle en l’Agèbre* de 1629, afirma ter sempre *n* soluções,

Atualmente está afirmação é um teorema, conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra, e segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p.6)

> […] tem diversas propostas de demonstração, todas elas refutadas, numa história muito interessante em que intervêm matemáticos famosos como Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783), d’Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813). Finalmente, a demonstração é feita de modo considerado satisfatório por Argand (1768-1822) e por Gauss (1777-1855).

Depois de tanto estudo e pesquisa, temos a missão de compartilhar com nossos alunos nas escolas todo esse conhecimento que adquirimos. Para isso, existem muitas vertentes de estudos do que seria necessário abordar na educação básica e de que maneira.

Afinal, devido a Álgebra ser entendida hoje como um campo bem mais amplo, tem-se dificuldade de tratá-la apenas como expressões e equações. Já que trata também de assuntos mais profundos e bem mais abstratos, sendo esses muito importantes para o desenvolvimento e compreensão da Matemática.

Alguns autores tratam os símbolos como o centro da Álgebra. Ponte, Branco e Matos (2009, p.8) afirmam que

> Este campo da Matemática seria então definido pelo uso que faz de uma linguagem própria – a linguagem algébrica. Deste modo, faz sentido encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas.

A importância dos símbolos, como nos conta Ponte, Branco e Matos (2009, p.8), é reconhecida por Keith Devlin, quando afirma que “sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria.” Ponte, Branco e Matos (2009, p. 8) ainda defendem que

> [...] A linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas.
>
> No entanto, esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno.

E aí está a grande questão desta pesquisa, essa possibilidade da utilização dos símbolos se tornar uma barreira para o aluno. Para Fernandes (2011, p.8) “as dificuldades dos alunos de diferentes escolas estão de certa forma relacionadas à forma como se introduz a Álgebra escolar”.

Durante o *Movimento da Matemática Moderna* isso acontecia muito, já que se utilizava a simbologia de modo abstrato. Para mudar essa perspectiva veio a corrente da Educação Matemática Realista, onde pelo menos na fase inicial os símbolos deveriam ter algum significado. Hans Freudenthal fundador da corrente “Compara a linguagem corrente com a linguagem algébrica e sublinha a complexidade desta e a quantidade de interpretações incorretas que podem surgir na sua aprendizagem” (FREUDENTHAL, 1983, apud PONTE, BRANCO E MATOS, 2009, p. 9)

Para Stacey, Chick e Kendal

> se a Álgebra é interpretada somente como uma manipulação simbólica, então terá pouca relevância no dia-a-dia. Este fato pode representar um motivo de alienação por parte dos alunos na aprendizagem da Matemática. Há necessidade de tornar relevante para os alunos o significado da Álgebra e para os professores, o desenvolvimento de ideias claras sobre o que

> realmente significa a Álgebra, para além da manipulação simbólica. Este tem sido o mote para várias investigações e para a evolução dos currículos. (STACEY, CHICK E KENDAL, 2004, apud FERNANDES, 2011, p. 8)

Para mudar esse cenário, surgiu a ideia do pensamento algébrico, e segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9)

> um dos autores que escreveu sobre esta ideia foi o americano James Kaput, para quem o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais.

Para Ponte, Branco e Matos (2009) este processo de generalização pode ocorrer com base em qualquer conceito matemático lecionado desde os primeiros anos de escolaridade. E ainda nos contam que

> Kaput identifica, em 1999, cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 9).

Esses mesmos autores também nos mostram que em um texto mais recente de Kaput ele se refere de novo a estes cinco aspectos, integrando os dois primeiros (simbolismo e generalização), que designa como “aspectos nucleares” da Álgebra, e considerando os três últimos como ‘ramos’ deste domínio com expressão na Matemática escolar. Com isso eles concluem: “Podemos então dizer que o grande objetivo do estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p.9).”.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10) dizem que

> Aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas uma das suas facetas.

O quadro a seguir foi retirado de Ponte, Branco e Matos (2009) onde dizem que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas.

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar • Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar • Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações • Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Ponte, Branco e Matos, 2009, p. 11

Desta forma, compreendemos a importância do pensamento algébrico, e principalmente a importância de ser trabalhado desde o início dos anos escolares, tornando-o natural aos alunos.

Como argumento para defender a inclusão do pensamento algébrico no currículo de Matemática dos primeiros anos pode-se evocar, não apenas o seu caráter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores, mas também o seu contributo para o aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber. Canavarro (2007, p.92)

Sobre essa inserção prévia Tinoco (2015, p.10) também ressalta

> [...] a necessidade de valorizar mais, em sala de aula, as oportunidades de o aluno ter contato significativo com o pensamento e a linguagem algébricos, antes que ele seja apresentado aos métodos de resolução de equações, o que nem sempre é observado.

2.2 DIFICULDADES EM ÁLGEBRA

A álgebra abrange várias áreas assim como nos diz Tinoco (2015) quando afirma que "educadores matemáticos explicitam quatro dimensões para o ensino de álgebra em nível elementar: álgebra generalizadora da aritmética, <u>álgebra das equações</u>, álgebra estrutural e álgebra funcional."(p. 2). E é da álgebra das equações como bem destacado por ela que irei tratar.

Tinoco (2015) ainda ressalta a importância da leitura significativa das equações para a real compreensão por parte dos alunos e sugere concluir com os alunos a noção do que é equação sem a preocupação de apresentar uma definição, com isso sugere as seguintes ideias que determina como essenciais

> - a existência de uma igualdade;
>
> - a presença de uma variável;
>
> - a existência de um único valor da variável, em certo conjunto numérico, que satisfaz a igualdade (solução), ou a inexistência de valores que a satisfaçam.(TINOCO, 2015, p. 26)

Tinoco (2015) com relação a noção de raiz ou solução de uma equação permanece com a mesma ideia de não defini-la para os alunos, os levando à sistematização. Ressalta a importância de evitar a confusão da palavra “raiz” com as outras utilidades dela na Matemática. Para a sistematização da ideia de solução da equação ela afirma que: - é um número racional (considerando que nessa fase o aluno ainda não tem a noção de número real); - torna a igualdade verdadeira, se substituído no lugar da variável.

Tinoco (2015) apresenta métodos para os quais se baseou em Bernard e Cohen (1994), os métodos são por ela considerados evolutivos, onde cada um supre o que o anterior não supriu. O primeiro método é

> I) <u>Gerar e avaliar</u>
>
> Após a leitura significativa da equação, os alunos devem ser orientados a pensar em vários valores para ser testados na equação dada, tentando descobrir a raiz por tentativa e erro e usando seu conhecimento das operações.(TINOCO, 2015, p. 35)

Esse método que utiliza a tentativa e o erro, não supre todas as necessidades dos alunos, e com isso ela sugere que sejam apresentadas equações onde não consigam encontrar a solução apenas com esse método, para que surja o interesse pelo próximo, que para mim foi o mais impressionante, e é o seguinte

> II) <u>Esconder</u>
>
> Este método consiste em “esconder” uma parte da equação, considerando-a como incógnita, e recorrendo ao método anterior “gerar e avaliar”, para determinar seu valor na equação.(TINOCO, 2015, p. 36)

Achei muito interessante esse método, pois abrange algumas equações que apresentam frações e parênteses por exemplo, que normalmente são encaradas pelos alunos como monstros, e poderiam dessa forma ser desmistificadas.

Em seguida ela apresenta o terceiro método

> III) Desfazer
>
> Esse método geralmente é bastante utilizado, por ser baseado nas operações inversas. As equações que podem ser resolvidas pelo método de esconder podem também ser resolvidas pelas operações inversas.(TINOCO, 2015, p. 37)

Para esse método a ideia de operação inversa tem que estar bem clara para os alunos para que realmente compreendam o que estão fazendo ao resolverem utilizando-o. Por fim, apresenta o quarto método, o de Equações equivalentes. Para a resolução por esse método, Tinoco (2015) diz que trata-se de transformar a equação em uma mais simples, que tenha a mesma raiz, ou seja, equivalente a ela. E ainda nos diz que "para a apresentação deste método, utiliza-se uma analogia entre as equações e as balanças de dois pratos em equilíbrio."(TINOCO, 2015, p. 39).

Tinoco (2015) finaliza suas sugestões de métodos nos dizendo sabiamente que

> Os métodos sugeridos nesta proposta, para resolver equações do primeiro grau, têm uma ordem crescente de complexidade, sendo o método das equações equivalentes suficiente para resolver qualquer equação desse tipo. No entanto, todos podem e devem ser usados, dependendo da equação.
>
> O conjunto de ideias que eles envolvem substitui com vantagens em termos de significado, os métodos mecânicos usualmente ensinados, como por exemplo, a transposição automática de termos de um membro para outro da equação. (TINOCO, 2015, p.54)

Esses métodos apresentados por Tinoco (2015), se tornam ainda mais importantes quando pensamos como Coxford e Shulte (1994, p.7) quando nos diz que "os professores procuram respostas a questões sobre a eficácia do ensino e informações sobre novos métodos e materiais didáticos."

Afirmam ainda, que

> [...] embora as respostas definitivas aos problemas educacionais talvez permaneçam para sempre além de nosso alcance, é somente através de uma avaliação honesta e de uma troca aberta que poderemos ter esperanças de promover as condições de ensino necessárias para mostrar a nossos alunos

> que alguém, de fato, se preocupa com a questão. (COXFORD E SHULTE, 1994, p.8)

Já Veloso e Ferrera (2010) estabelecem reflexões a partir de um diálogo entre as experiências docentes de uma das pesquisadoras e a literatura. Baseando-se em vários autores elas procuram entender a origem das dificuldades prévias e também daquelas que surgem durante o ensino da álgebra. As autoras acreditam que a introdução da álgebra deve se basear na noção de que os símbolos algébricos podem ser manipulados de uma maneira que corresponda a aspectos do mundo real.

Ainda apontam para a importância do simbolismo na Matemática, mas alertam para os cuidados a serem tomados quando se adentra nesse campo. Se priorizada a manipulação desses símbolos, perde-se de vista seu significado, correndo o risco de cair no formalismo sem sentido. Elas acreditam que a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos pode ser desenvolvida nos alunos pela descrição de situações e pela resolução de problemas algébricos, afastando o abuso do uso simbólico e preocupando-se em trabalhar a compreensão dessa simbologia, procurando esclarecer seu significado. Dessa forma, cabe aos professores, buscar continuamente levantamentos sobre quais aspectos envolvem o aprendizado da Álgebra, acompanhar e analisar erros cometidos pelos alunos e suas causas, e, assim, proporcionar instrumentos úteis para decidir sobre os meios de ajudar as crianças a melhorarem sua compreensão matemática (VELOSO; FERRERA, 2010).

2.3 ANÁLISE DE ERROS EM ÁLGEBRA

Observando erros de alunos do nível superior em Cálculo, Cury e Konzen (2006) identificaram que esses eram decorrentes de problemas com álgebra adquiridos na Educação Básica. Para entender a origem desses erros, os autores realizaram uma investigação com alunos da 8ª série do ensino fundamental, aplicando um teste envolvendo porcentagem, valor numérico e operações com expressões algébricas. Ao analisarem as respostas obtidas, separaram e categorizaram os erros, chegando à conclusão que os alunos não dominavam os conteúdos abordados. Uma hipótese para esse fato era de que os alunos tinham decorado regras sem entender seu significado. Os autores sugerem que a partir dos erros podem ser feitas entrevistas com os alunos para se compreender a forma deles de pensar e utilizar material manipulativo para que possam entender os significados.

Vale, Ferreira e Santos (2011) analisaram erros cometidos por uma aluna do 7º ano no estudo de Equações. Ao identificarem os erros, fizeram um quadro de sistematização de erros, no qual eles foram separados por categoria. Os autores investigaram como o retorno dos registros podia contribuir para a aluna perceber e tentar ultrapassar seus próprios erros. Com o estudo verificou-se que o retorno do registro contribui no reconhecimento de alguns erros, mas nem sempre surtiu efeito na melhoria da aprendizagem. Souberam quais os erros mais frequentes da aluna estudada e, com isso, alguns possíveis motivos. Os autores deixam, para possíveis análises futuras, a questão: por que retornos iguais a erros idênticos na visão da professora nem sempre têm a mesma eficácia?

Vale (2010) analisou erros cometidos por três alunos de perfis diferentes do 7º ano de escolaridade em álgebra, nos temas sequências e regularidades e equações. E investigou até onde o feedback escrito e o questionamento oral contribuem para os alunos perceberem e ultrapassarem seus erros. A pesquisa foi feita uma sala de aula onde ela mesma lecionava.

Utilizou diversas estratégias para recolhimento de dados, e durante a análise dos mesmos, evidenciou o encontro de erros estabelecidos na literatura. Por fim, diz ter confirmado o que intuía, que os alunos com desempenho inferior apresentam maiores dificuldades, porém houve erros em comum aos três alunos. Pode concluir também que o questionamento oral foi mais eficiente (VALE, 2010).

Esses estudos foram tomados como parâmetros, e forneceram base suficiente para a realização da pesquisa, e para que as questões fossem respondidas.

3 METODOLOGIA

Essa é uma pesquisa de ordem qualitativa de natureza exploratória, que segundo Fiorentini (2006) se dá quando o pesquisador, diante de uma problemática ou temática ainda pouco definida ou conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela. Utilizamos a modalidade de pesquisa de campo que acontece quando os dados do estudo são coletados diariamente “no campo”, porém esse local de campo foi online.

Para a coleta de dados, foram utilizados os seguintes instrumentos de investigação:

- Questionário;
- Lista avaliativa de atividades;
- Imagens das resoluções das atividades;

Identificamos os alunos com nomes fictícios e não vamos publicar imagens que identifiquem os mesmos atendendo as exigências da ética em pesquisa.

3.1 CONTEXTO DA PESQUISA

Conforme presente no Regimento do PROFMAT “Art. 2º O PROFMAT tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática.”, o mesmo é voltado à Professores de Matemática da Educação Básica, com o objetivo de que toda a formação seja refletida na Educação Básica.

Trabalho na Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo com a Educação Básica como Regente de Classe desde 2016, com turmas de 1ª a 3ª séries do Ensino Médio, e com esse contato pude observar grandes dificuldades em conteúdos bases. Além de escutar relatos de origens de dificuldades, sendo a mais citada “a entrada da letra” na Matemática.

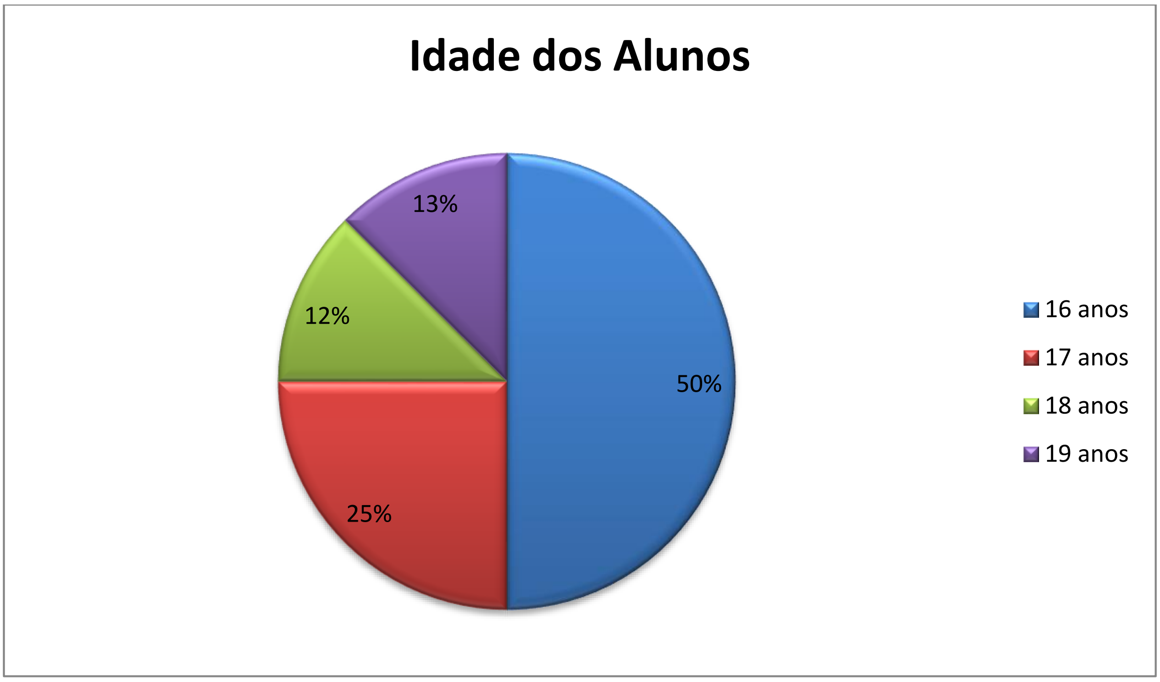
Sendo assim, surgiu a ideia de trabalhar equações com alunos da 3ª série do Ensino Médio, para verificarmos essa defasagem já no fim da Educação Básica e ao mesmo tempo tentar sanar, para que finalizem sem esse empecilho.

A ideia inicial seria uma pesquisa presencial, com contato direto com os alunos, mas a pandemia impediu que isso ocorresse, e por esse motivo a pesquisa se tornou online, utilizando recursos como Google Formulários e Meet. Como todas as atividades escolares dos alunos já estavam ocorrendo dessa forma, participaram da pesquisa os que se interessaram pela mesma.

3.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Com base no questionário realizado no primeiro momento, pude ter uma melhor configuração do perfil da turma, chegando ao seguinte quadro com relação às idades dos alunos.

Gráfico 1 – Idade dos Alunos

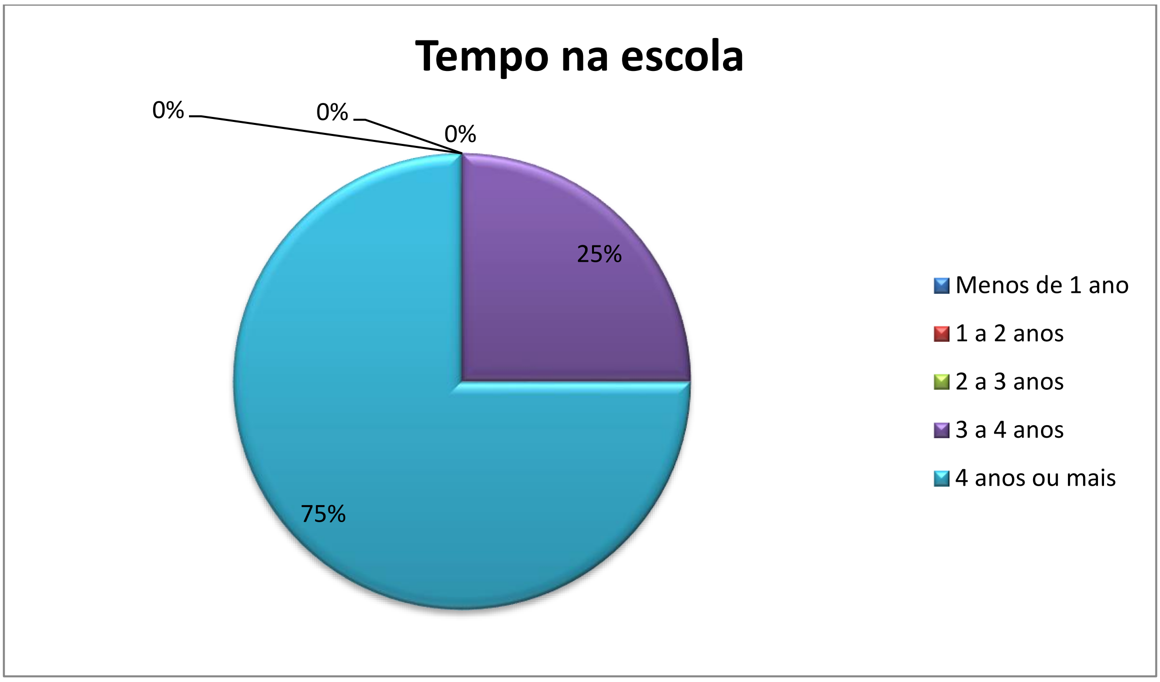


Fonte: acervo da autora, 2021.

Os alunos pesquisados estavam no intervalo de 16 a 19 anos, sendo que três quartos deles apresentavam idades de 16 e 17 anos, o que indica não terem defasagem idade série.

Analisei também a quantidade de tempo que estudaram na escola, para ter um melhor conhecimento do tempo que desfrutaram daquele ambiente escolar, das regras da escola e das metodologias de ensino aprendizagem, para ajudar a compreender o que os falta.

Gráfico 2 – Tempo na escola

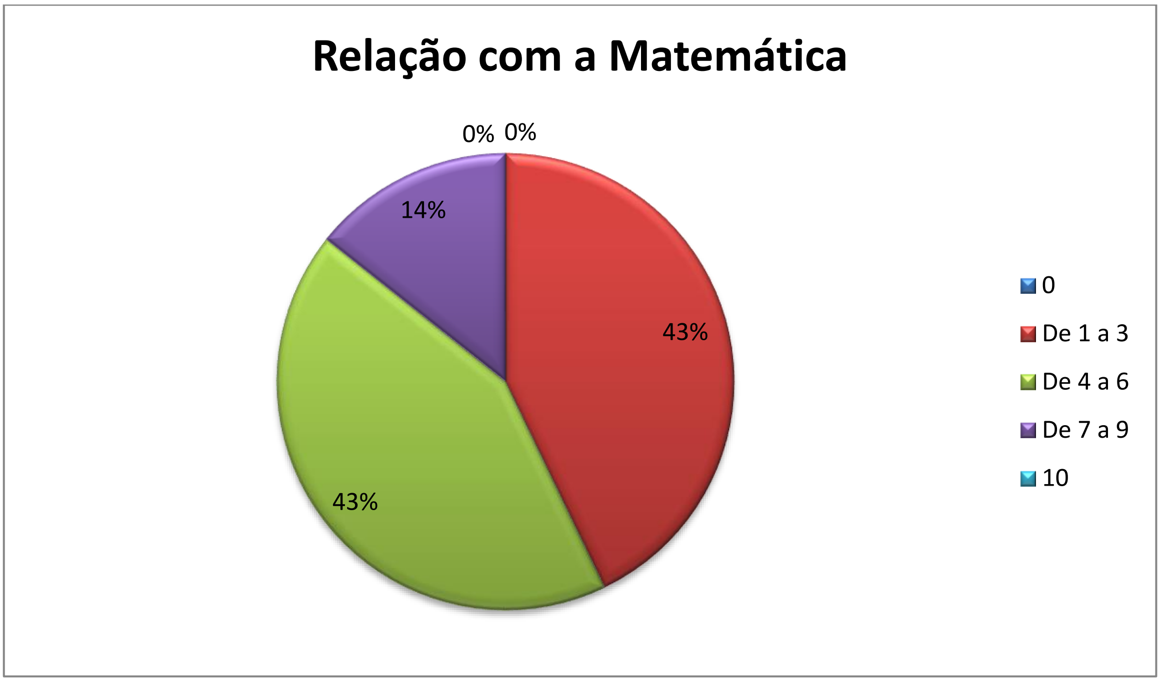


Fonte: acervo da autora, 2021.

Podemos perceber que não há alunos com menos de três anos de permanência na escola, o que pode ser encarado como algo positivo, uma vez que nesse caso, a escola tem um conhecimento mais profundo a respeito de cada um deles.

Outro questionamento feito foi a respeito da relação de cada um com a Matemática. Onde cada aluno avaliou sua relação com a Matemática de 0 a 10, onde 0 significa uma relação ruim, e 10 ótima.

Gráfico 3 – Relação com a Matemática

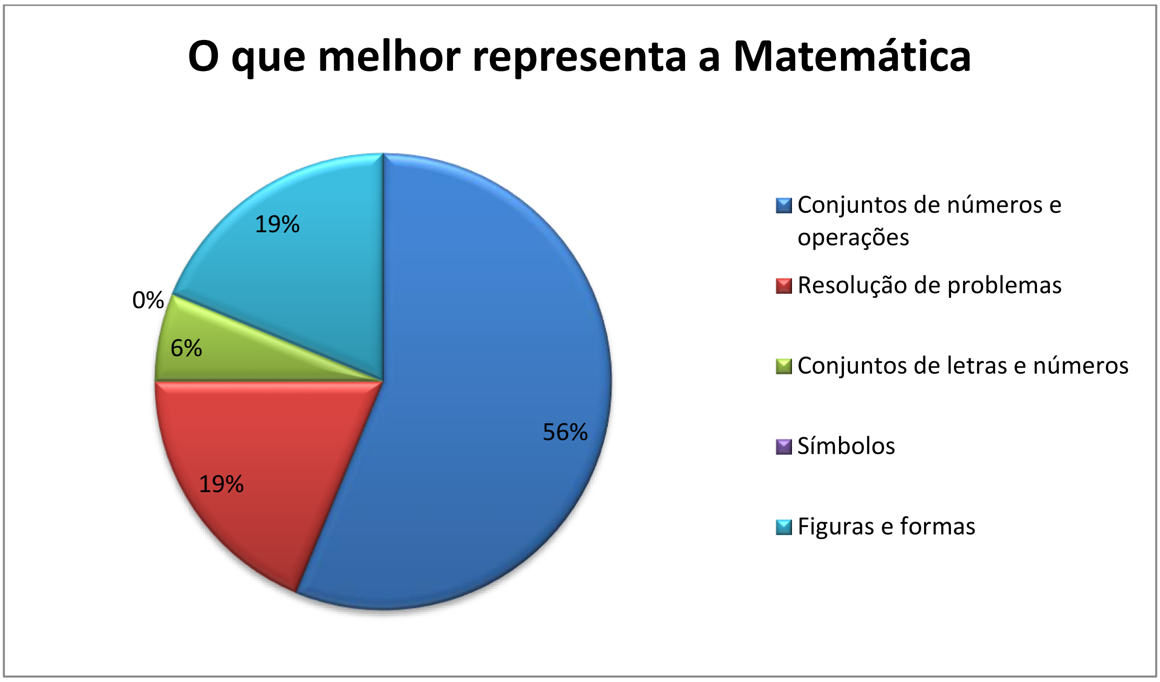


Fonte: acervo da autora, 2021.

Observando as respostas, percebe-se que nenhum aluno colocou zero, e ao mesmo tempo também nenhum selecionou dez. O que nos indica nenhum total desapreço ou apego. A grande quantidade de 1 a 3, pode nos indicar um bloqueio com a disciplina, e ao mesmo tempo as demais escolhidas uma vontade de compreender. Levando em consideração que todos os alunos que participaram da pesquisa relataram que consideram ter muita dificuldade em Matemática.

Para ter uma dimensão do que compreendiam por Matemática, perguntei o que para eles melhor representava, podendo eles escolher duas dentre cinco alternativas. Para produção do gráfico contabilizei como 100% o total de respostas dadas pelos alunos.

Gráfico 4 – O que melhor representa a Matemática



Fonte: acervo da autora, 2021.

A opção “Conjuntos de números e operações” ficou em grande destaque na opinião dos alunos, o que não surpreende. Seguido pela opção “Resolução de problemas”, que já surpreende e a opção “Figuras e formas” que era minha segunda aposta.

A opção “Conjunto de letras e números” foi pouco escolhida, enquanto a opção “Símbolos” não foi considerada por nenhum aluno. Essa diversidade de respostas é bem interessante, e pode significar uma pequena mudança na concepção da Matemática por parte dos alunos. Mas vemos que ainda temos um caminho a percorrer. Em sala de aula existem momentos em que observamos uma visão bem restrita de tudo que a Matemática é, o que esses 56% podem demonstrar.

Quando questionados se já haviam estudado equações anteriormente todos os alunos responderam que sim, o que confirmou a expectativa já que se trata de alunos do Ensino Médio.

As atividades foram feitas com 8 alunos, mas a pesquisa só analisou as atividades e os resultados de 5 alunos devido à circunstância em que toda população se encontrava.

3.3 ETAPAS DA PESQUISA

3.2.1 Organização do questionário e atividades

O questionário foi elaborado baseado nas necessidades que apresentavam para responder às questões. As informações apresentadas anteriormente, para apresentar os sujeitos da pesquisa foram retiradas desse questionário (apêndice A).

As atividades foram elaboradas com base na dissertação de Maria Luísa de Sousa Vale (2010), que investigou o erro como ponte para a aprendizagem em Matemática. Algumas atividades foram retiradas na íntegra e outras adaptadas. Todas as atividades aplicadas estão nos apêndices.

Destaco que descreverei as etapas já realizando uma primeira análise.

3.2.2 Aplicação do questionário e atividades

A pesquisa foi iniciada no dia 21 de maio de 2021 e realizada durante aproximadamente dois meses, perfazendo um total de 3 reunião/aulas no Meet de 1 hora, e 6 Formulários. A seguir, descrevemos o desenvolvimento da pesquisa com os alunos.

3.2.3 Análise das atividades com os alunos

Os momentos de reunião no Meet foram utilizados para que analisássemos juntos os acertos e os erros dos alunos, para que, com isso, entendessem onde teriam que ter maior atenção ao realizar as próximas, fazendo com que compreendessem melhor o processo e para que fizéssemos uma avaliação diagnóstica durante a interação.

3.2.4 Análise dos dados

Por se tratar de uma Pesquisa feita de forma online, as reações durante a resolução dos Formulários não puderam ser observadas, sendo assim foi feita a análise das atividades, onde analisei os formulários respondidos e as fotografias dos rascunhos produzidos.

Durante essa pesquisa, os alunos foram identificados por nomes fictícios. Os nomes são os seguintes: Fernanda, Lívia, Aurora, Gio, Ari, Ivi e Geni.

4 ANÁLISE DOS DADOS

4.1 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Nesse capítulo, tratamos de como se deu a aplicação das atividades, mas principalmente eventuais acontecimentos que ocorreram durante as reuniões pelo Meet, importante passo da pesquisa. Utilizei uma descrição reflexiva, na qual, em alguns momentos, já realizei uma análise do acontecido. A distinção foi feita por reuniões, levando em conta que ocorreram em três dias não consecutivos.

1ª Reunião – 21/05/2021

Inicialmente ocorreu toda a explicação do que se trata uma pesquisa, e os passos que iriam ocorrer. Esse foi um momento para relatarem sua vivência com a Matemática, onde todos deixaram claro que consideram ter muita dificuldade em Matemática. Apesar de essa autoclassificação ser relativa, já indica um bloqueio para com a disciplina.

A esperança de que essa dificuldade seja superada, pelo menos parcialmente, era perceptível em todos os participantes, e é o que impulsiona o Professor a seguir.

Essa Reunião foi realizada em dois horários diferentes, para que fosse possível atender a todos os participantes, já que estamos falando de alunos que têm a realidade de além de estudar, também terem que trabalhar.

Ao final de ambas as reuniões foi disponibilizado o Questionário (apêndice A) no Google Formulários para que se tivesse uma noção mais aprofundada do campo de pesquisa. Como se tratavam de alunos do Ensino Médio, acreditei que já tinham visto o conteúdo Equações em algum momento de suas vidas escolares. Por esse motivo, inseri perguntas referentes ao conhecimento sobre o assunto.

Em seguida disponibilizei a 1ª Atividade (apêndice B), também pelo Google Formulários, uma atividade investigativa, onde organizei questões que buscavam saber: se os alunos conseguiriam descobrir o valor da incógnita, que nos exercícios, por estar relacionado a balanças, eram pesos; e se conseguiriam passar a situação para uma linguagem matemática.

2ª Reunião – 27/05/2021

Nesse segundo momento fizemos uma recapitulação do que já haviam feito, para analisar os erros e assim que descobertas as dificuldades, solucioná-las.

Conversamos sobre a não identificação de uma equação, principalmente pelo fato do desconhecimento da necessidade da existência da igualdade. Visualizando as imagens e compreendendo a situação tiveram mais facilidade para descobrir qual era o peso dos objetos, mas escrever uma expressão matemática que representasse a situação ainda era por vezes dificultoso.

Então durante a intervenção vimos a questão da balança estar equilibrada, e sua relação com o sinal de igual. E como expressá-la em forma de equação. Nesse momento ficou clara a maior facilidade dos alunos para encontrarem o valor da incógnita pela representação ilustrativa, ao invés da representação algébrica.

Fomos então tentar amenizar essa dificuldade e/ou bloqueio com a expressão em si, e ver outros métodos de resolução para explorarem. Expus as quatro diferentes maneiras de resolução de equações apresentadas por Tinoco (2015).

Um método que eles não conheciam, e que aprovaram, foi o caso do método de esconder. Um exemplo utilizado com eles da Atividade realizada, foi a equação 2x + 50 = 200, onde podemos pensar em esconder o 2x e perguntar oralmente: Que número preciso somar ao 50 para obter 200? Com isso os alunos já sabiam que era 150. Isso inclusive minimiza erros ocasionados pela troca de sinais. Finalizando a questão retornando ao termo escondido, que no caso foi 2x, e perguntamos: Que número preciso multiplicar por 2 para obter resultado 150, que foi encontrado anteriormente? Com isso os alunos já encontravam o resultado 75.

Com isso pude perceber, mesmo através da tela a empolgação deles, onde estavam percebendo que aquilo era possível. Fazendo com que a inibição fosse diminuindo e relatos de grandes dificuldades, em conteúdos julgados muitas vezes por fáceis, por serem básicos para os demais, mas que para eles foram empecilhos durante bom tempo. E ao mesmo tempo muito agradecimento e gratidão por lembrar deles, e não desistir por não saberem o básico.

Ao dar prosseguimento, pude perceber que se a equação apresentasse qualquer tipo de fração a dificuldade aumentava muito, e literalmente relatavam não saberem nem começar. Como foi o caso do seguinte exemplo que trabalhei com eles: $\frac{2x+3}{5} = 3$. Mesmo com eles relatando que já tinha complicado demais e que não daria, convidei-os a olhar para a questão com o método que haviam acabado de aprender.

Escondendo o 2x+3, perguntamos: Que número preciso dividir por 5 para obter resultado 3? Encontrando o resultado 15. Escondendo então o termo 2x, seguimos com a pergunta: Que número preciso somar ao 3 para obter o resultado 15? Encontrando então o resultado 12. E por fim: Que número preciso multiplicar o 2 para obter resultado 12? E encontramos a resposta 6.

Eles verem essa questão resolvida dessa maneira, fez com que finalmente julgassem como uma questão possível, algo que até então julgavam inalcançável.

Para dar prosseguimento, após essa reunião foram disponibilizadas as 3 próximas atividades, uma de cada vez.

3ª Reunião – 25/06/2021

Iniciei a reunião pontuando os quatro métodos de resolução apontados por Tinoco (2015) e frisando a questão de serem complementares, onde quando um método não é suficiente, temos o outro como ferramenta. Retornei aos pontos principais observados nas atividades anteriores.

Primeiro refizemos a 2ª atividade (apêndice C), de encontrar os erros e corrigi-los utilizando mais de um método. Fizemos representando com balança (equações equivalentes), fizemos com operações inversas (desfazer) e também pelo método de esconder, sanando todas as dúvidas. As alunas foram fazendo em seus respectivos cadernos, para acompanhar e treinar.

Pontuei também o preenchimento da definição de equação, contida na 3ª atividade (apêndice D), e foquei na resolução da 4ª atividade (apêndice E), onde nenhuma aluna conseguiu desvendar a palavra escondida.

Relataram sobre essa questão não só dificuldade na resolução matemática da questão, mas principalmente dificuldade na interpretação de texto, na hora de entender o que o enunciado pedia na questão. E mesmo quem chegou próximo ao entendimento do enunciado, ao errar a resolução de alguma equação, e atrapalhar o andamento da formação de uma palavra, ao invés de rever sua resolução e tentar corrigi-la, julgou ter interpretado erroneamente.

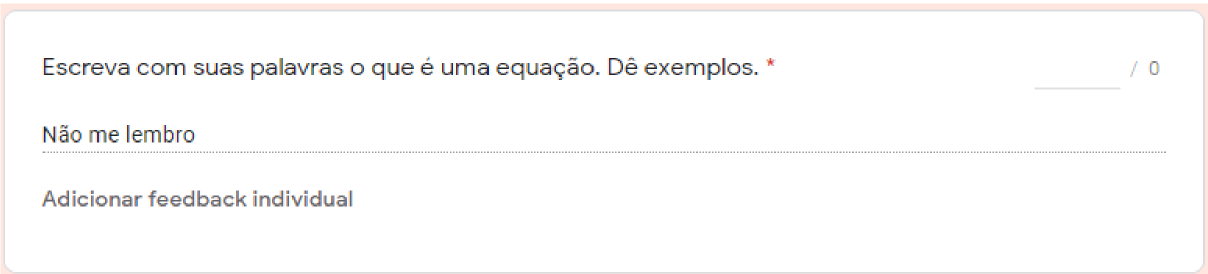
Revisei algumas vezes os métodos, principalmente o de esconder, que estava sendo utilizado de forma incorreta em algumas atividades, como pudemos observar. E foquei também nas equações com fração, tão temidas pelas alunas.

É perceptível que mesmo já tendo trabalhado algumas equações com fração, as alunas continuam sempre muito receosas com as mesmas. Mas durante a reunião, após ser explicado novamente elas conseguiram realizar. Assim como conseguiram todos os métodos que trabalhamos após serem novamente explicados, e todas as equações que fizemos durante a reunião.

4.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Durante o preenchimento do questionário (apêndice A), os alunos puderam expor o que recordavam sobre equações. Ao serem solicitados a dizerem o que era equação com as próprias palavras, Ari disse não lembrar (como mostra a figura 1), e os demais tentaram expor cada um à sua maneira sua ideia. Lívia (figura 2) aparentemente colocou nomenclaturas que sabe pertencer à disciplina e se baseou nas alternativas da questão anterior.

Figura 1 – Resposta Ari



Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 2 – Resposta Lívia

Escreva com suas palavras o que é uma equação. Dê exemplos. * / 0

Conjuntos numéricos e problemas.

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 3 - Fernanda

Escreva com suas palavras o que é uma equação. Dê exemplos. * / 0

Equações são números iguais a um valor.

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

Já Fernanda (figura 3) parece ter a noção de valor escondido, o que é um aspecto positivo. Assim como Aurora (figura 4), que relata sobre gerar um resultado.

Figura 4 – Resposta Aurora

Escreva com suas palavras o que é uma equação. Dê exemplos. * / 0

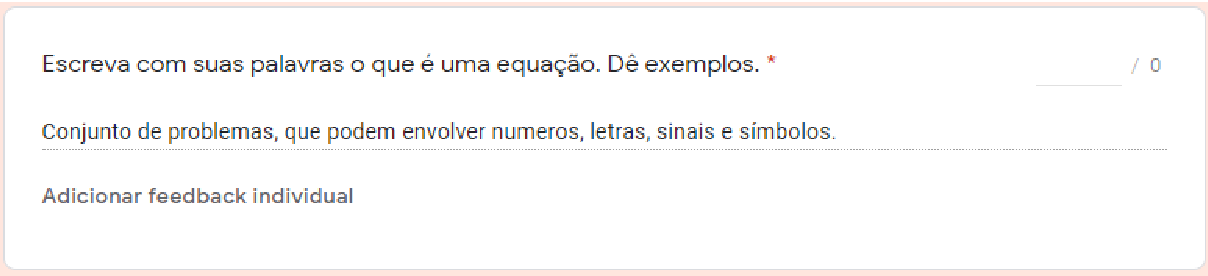
São conjuntos de letras e números que geram um resultado. 10x=4 + 2 ou +7 -23=2x

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

Os alunos foram orientados a caso não conseguissem digitar as equações como queriam, escrevê-las em papel, e enviar foto. Foi o que fez Gio, que apesar de, como apresenta na explicação da figura 5, saber da presença de vários itens, não se atenta para a necessidade da presença da igualdade. Como podemos novamente constatar na figura 6, nos exemplos apresentados.

Figura 5 – Resposta Gio


Escreva com suas palavras o que é uma equação. Dê exemplos. *

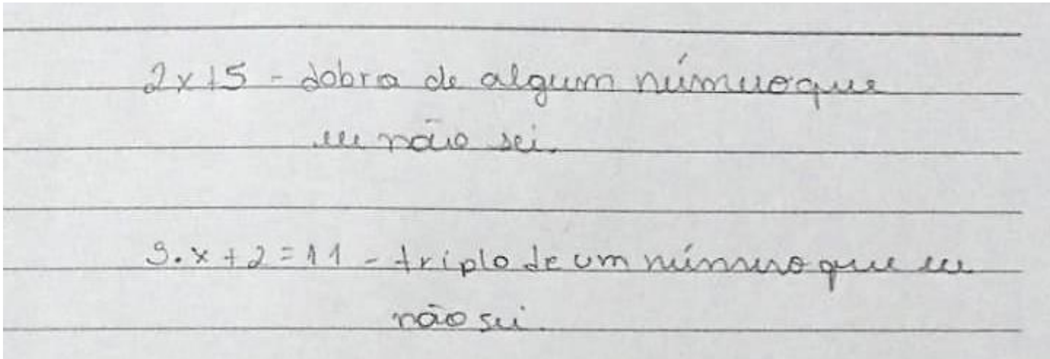
/ 0

Conjunto de problemas, que podem envolver numeros, letras, sinais e símbolos.

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

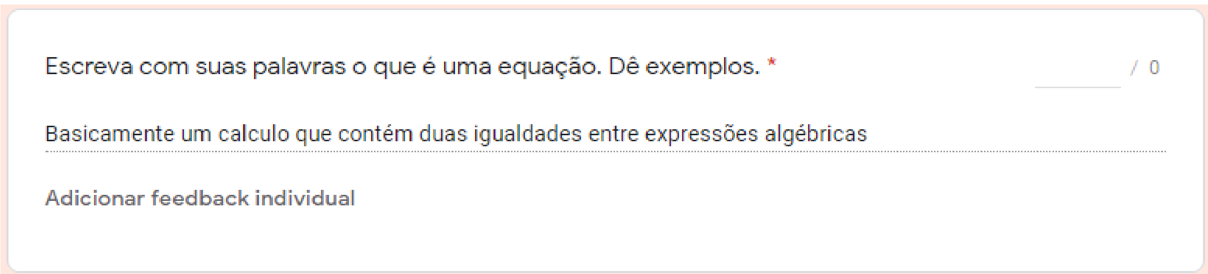
Figura 6 – Resposta Gio


2x15 - dobro de algum número que eu não sei.

3.x+2=11 - triplo de um número que eu não sei.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 7 – Resposta Geni


Escreva com suas palavras o que é uma equação. Dê exemplos. *

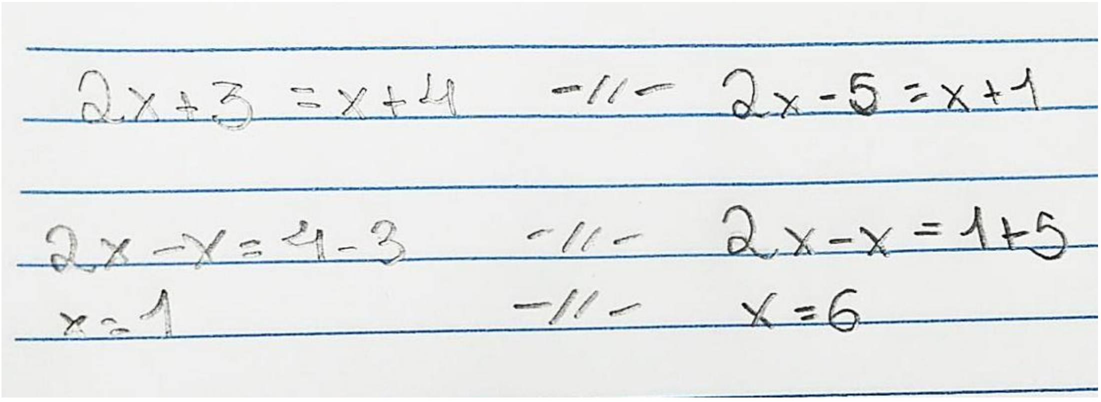
/ 0

Basicamente um calculo que contém duas igualdades entre expressões algébricas

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

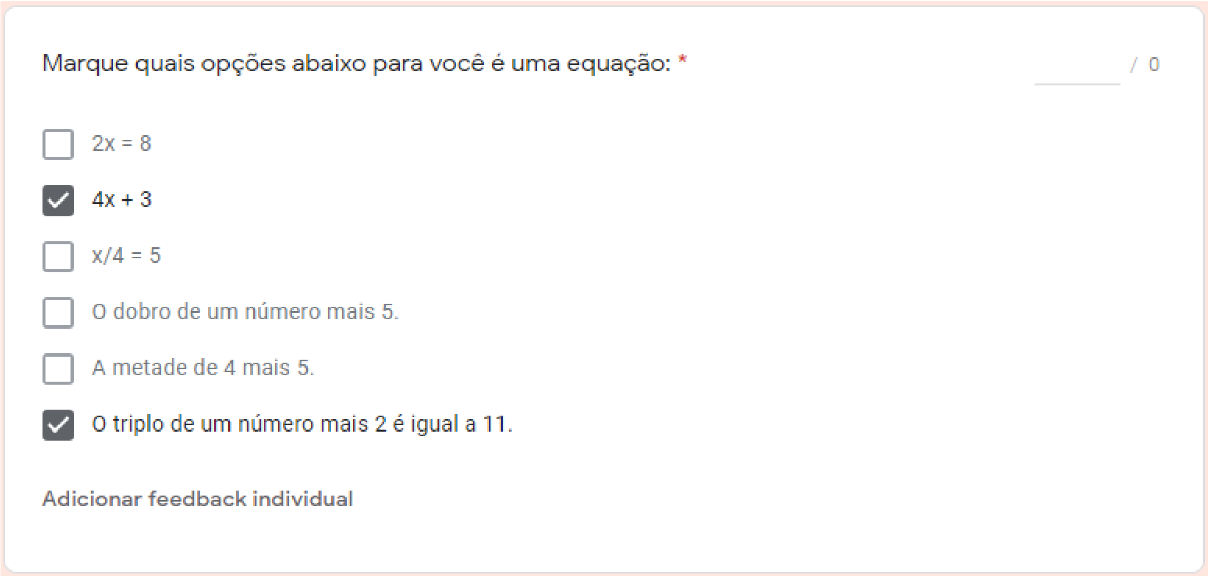
Figura 8 – Resposta Geni



Fonte: acervo da autora, 2021.

O fato de o aluno perceber que além das expressões também existe a necessidade de conter igualdade, como fez Geni na figura 5, é muito interessante, mesmo que tenha sido colocado duas, pois é essa percepção da necessidade da igualdade que falta a muitos alunos para terem firmeza de que se trata de uma equação. Porém, ao responder à próxima questão (figura 6), na qual queríamos saber o julgamento do que seria ou não equação por meio de exemplos apresentados, não foram selecionadas as alternativas com igualdade. O que reforça esse não conhecimento da necessidade da igualdade por três alunos (Geni, Ari e Lívia). Essa observação remete ao que nos diz Tinoco (2010), que diz ser “possível concluir com os alunos a noção de equação do primeiro grau, em uma incógnita, sem a preocupação de apresentar-lhe uma definição”. O aluno mostra saber alguns elementos importantes de uma equação, sem necessariamente definir formalmente.

Figura 9 – Resposta Geni



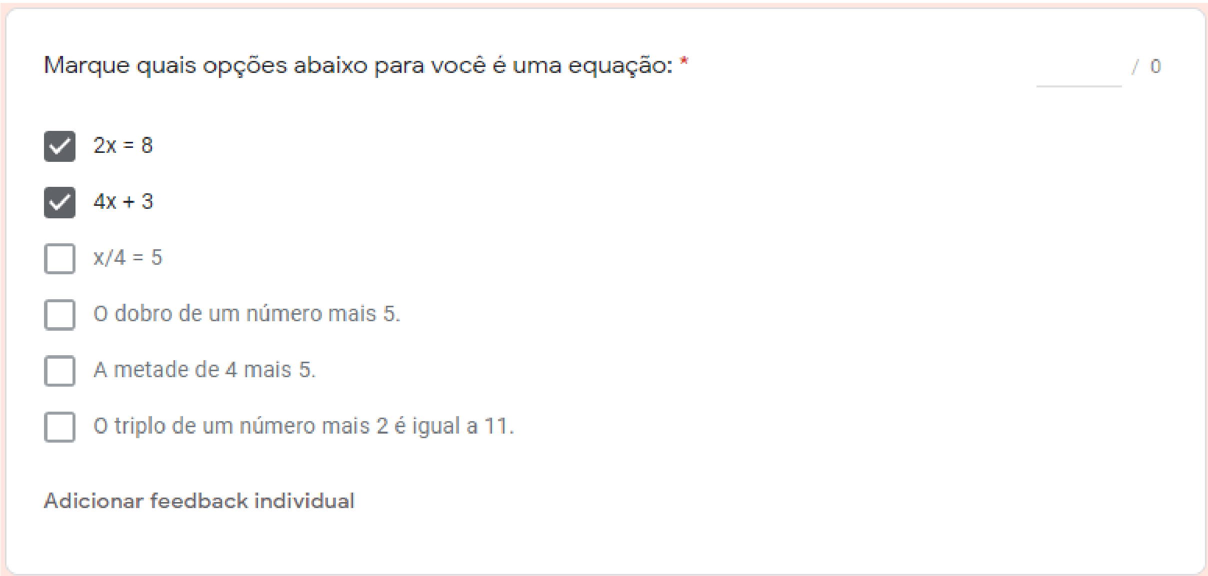
Marque quais opções abaixo para você é uma equação: * / 0

- [ ] 2x = 8
- [x] 4x + 3
- [ ] x/4 = 5
- [ ] O dobro de um número mais 5.
- [ ] A metade de 4 mais 5.
- [x] O triplo de um número mais 2 é igual a 11.

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 10 – Resposta Ivi



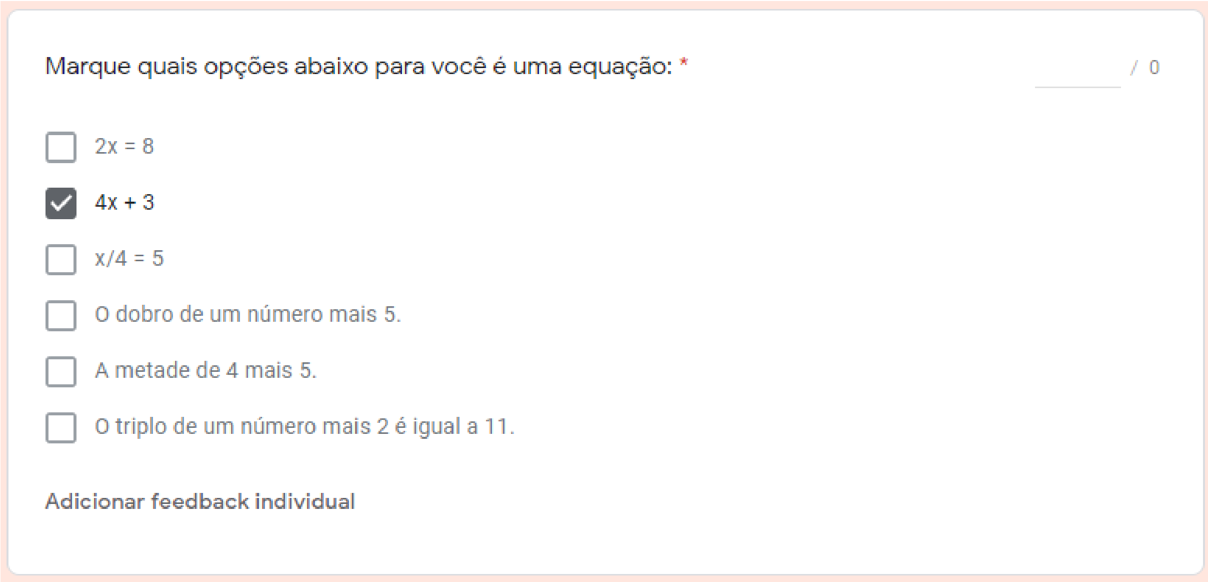
Marque quais opções abaixo para você é uma equação: * / 0

- [x] 2x = 8
- [x] 4x + 3
- [ ] x/4 = 5
- [ ] O dobro de um número mais 5.
- [ ] A metade de 4 mais 5.
- [ ] O triplo de um número mais 2 é igual a 11.

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 11 – Resposta Lívia



Marque quais opções abaixo para você é uma equação: * / 0

- [ ] 2x = 8
- [x] 4x + 3
- [ ] x/4 = 5
- [ ] O dobro de um número mais 5.
- [ ] A metade de 4 mais 5.
- [ ] O triplo de um número mais 2 é igual a 11.

Adicionar feedback individual

Fonte: acervo da autora, 2021.

Apenas um aluno marcou as três alternativas que realmente correspondem a equações. Já os demais marcaram apenas uma das alternativas, sendo uma das correspondentes a equações. O que indica que muitos têm uma ideia do que é uma equação, mas poucos sabem identificar com firmeza.

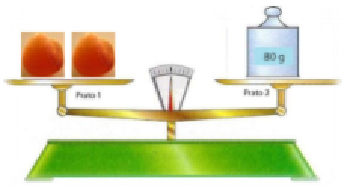
Todas essas respostas obtidas foram muito importantes para termos uma noção do que sabiam sobre o assunto. Pude perceber que alguns alunos tinham alguma base sobre o conteúdo, enquanto outros tinham um conhecimento bem limitado, existindo também alunos no meio termo.

Com essa percepção estabelecida, dei início à aplicação das atividades programadas, disponibilizando a atividade do apêndice B. A atividade tinha por objetivo mostrar aos alunos a relação da ideia de equação com a balança de dois pratos, onde partindo de algo prático e já conhecido pelos alunos chegaríamos à resolução da equação. Assim como fez Vale (2010) que tinha por objetivo estabelecer um paralelismo entre a noção de equação e a situação de uma balança.

As perguntas da 1ª atividade (figura 12) tinham dois objetivos: incentivar os alunos a descobrirem os valores desconhecidos apenas observando a imagem dada para depois conseguirem relacionar o que fizeram com as equações e o outro era fazê-los representar situações apresentadas com expressões matemáticas, que no caso seriam equações. A analogia à balança condiz com o que Veloso e Ferrera (2010) destacam sobre como os símbolos algébricos podem ser manipulados de uma maneira que corresponda a aspectos do mundo real.

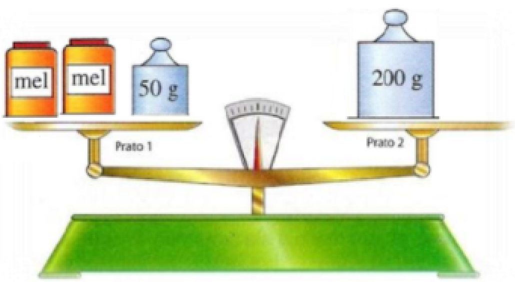
Figura 12 – Resposta Aurora

1. Colocamos duas laranjas no prato esquerdo (prato 1) e 80g no prato direito (prato 2) da balança de modo que esta fique em equilíbrio. a) Quanto pesa cada laranja? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *



A- 40g B-2=80g.

2. Colocamos 2 frascos de mel e um peso de 50g no prato esquerdo da balança (prato 1) e um peso de 200 g no prato direito (prato 2). a) Quanto pesa cada frasco de mel? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *



A-75g B- 2x+50=200.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Dois alunos responderam as duas perguntas de cada questão completamente, o que demonstra domínio. Enquanto obtivemos respostas interessantes nos demais preenchimentos, nas quais identifiquei conhecimentos que podem ser bem desenvolvidos.

Na resposta de Aurora vista na figura 12, percebemos a ausência da incógnita na primeira questão, por ter colocado na segunda pode representar um esquecimento, mas como percebido em reunião, na presença de apenas um termo no membro, por vezes é julgado desnecessária a utilização da incógnita, o que é um equívoco.

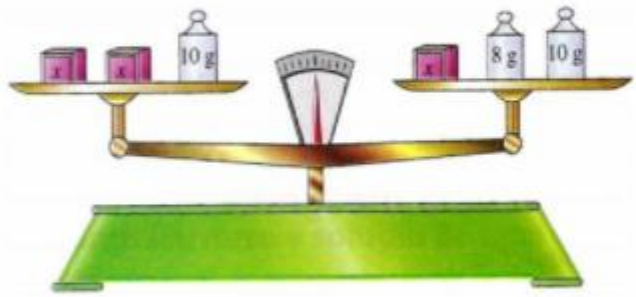
Já na figura 13 vemos que a dificuldade de Aurora na representação é recorrente, como apresentado na quarta e quinta questões.

Figura 13 - Resposta Aurora

3. Represente uma balança em equilíbrio que tem um saco de maçãs e um peso de 50g no prato esquerdo e no prato direito um peso de 130g. Como pode determinar o peso do saco de maçãs? Traduza em linguagem matemática a situação anterior. *

1x+50=130.

4. Observe a figura. a) Como pode determinar o peso de cada cubo? b) Traduza em linguagem matemática a situação anterior. *



Pode ter um equilíbrio exato se os tiverem dois cubos de cada prato com o mesmo valor, porém se não tiver, o equilíbrio não é exato. 3x+10=8+10.

5. Coloque 4 caixas de pastilhas num dos pratos da balança. No outro coloque 2 caixas de pastilhas e um peso de 80g. Traduza por uma expressão matemática a situação descrita. *

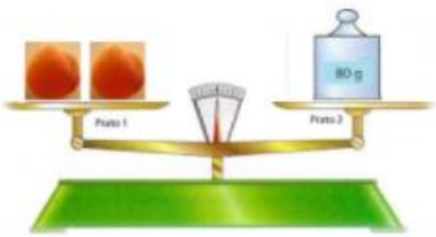
4x+80=2.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Alguns alunos alcançaram o primeiro objetivo da questão, o de encontrar o valor desconhecido, porém não conseguiram fazer a representação em uma expressão matemática. Como é o caso de Ivi (figuras 14 e 15) e Geni (figuras 16 e 17).

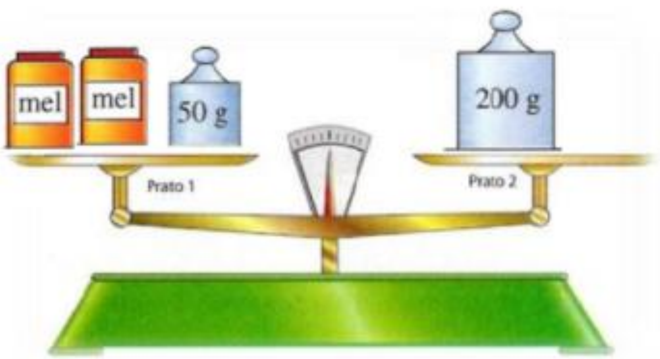
Figura 14 – Resposta Ivi

1. Colocamos duas laranjas no prato esquerdo (prato 1) e 80g no prato direito (prato 2) da balança de modo que esta fique em equilíbrio. a) Quanto pesa cada laranja? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *



80G dividido por 2 que é 40G CADA 1

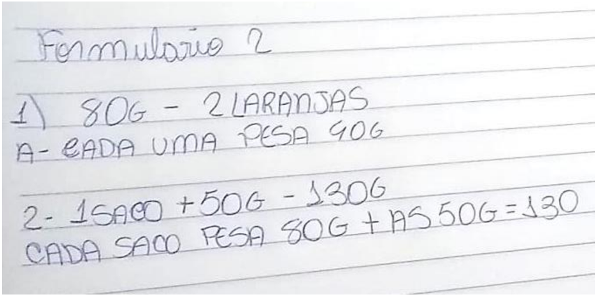
2. Colocamos 2 frascos de mel e um peso de 50g no prato esquerdo da balança (prato 1) e um peso de 200 g no prato direito (prato 2). a) Quanto pesa cada frasco de mel? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *



PESA 75G CADA FRASCO, NO CASO FICARIA 150 DIVIDIDO POR 2 QUE É 75 MAIS 50G 200

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 15 - Resposta Ivi



Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 16 – Resposta Geni

1. Colocamos duas laranjas no prato esquerdo (prato 1) e 80g no prato direito (prato 2) da balança de modo que esta fique em equilíbrio. a) Quanto pesa cada laranja? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *

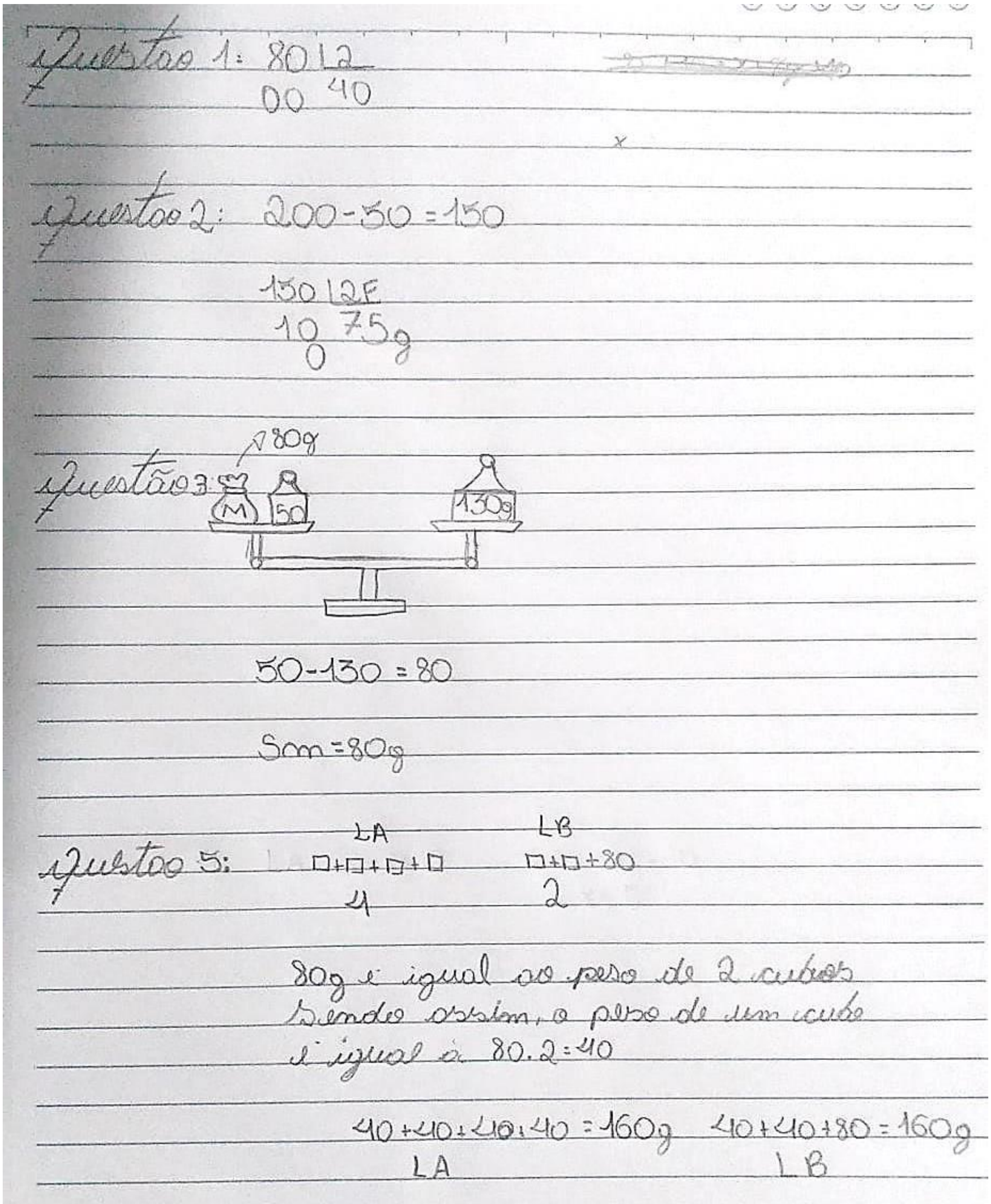
Cada laranja pesa 40 g

2. Colocamos 2 frascos de mel e um peso de 50g no prato esquerdo da balança (prato 1) e um peso de 200 g no prato direito (prato 2). a) Quanto pesa cada frasco de mel? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *

Cada frasco de mel equivale à 75g

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 17 - Resposta Geni



Fonte: acervo da autora, 2021.

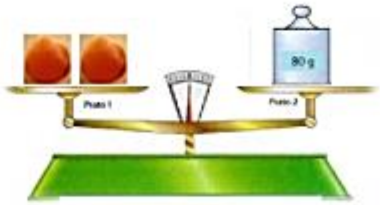
Esses desenvolvimentos demonstram que instintivamente eles sabem resolver, porém as formalidades eles ainda não absorveram, e principalmente se vissem a relação da representação lúdica com a representação matemática, a compreensão e fixação se daria melhor.

Eles verbalizaram as repetidas vezes que acabam errando por se confundirem ao utilizar os passos decorados e não compreendidos. O que pude observar na resolução de Gio (figura 18), onde busca o peso pela resolução da expressão matemática, como pode se observar na segunda questão, ao invés de se analisando a imagem, o que levou ao erro.

O erro está logo no início da resolução, a representação está colocada de forma correta “2.x+50=200”, mas a próxima etapa já foi colocada “x=200:2-50”, demonstrando os erros relatados por eles e observados por mim várias vezes no decorrer dos anos de trabalho. Podemos observar novamente nas outras questões de Gio (figura 19).

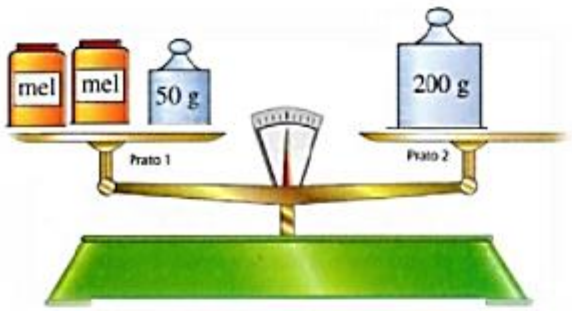
Figura 18 – Resposta Gio

1. Colocamos duas laranjas no prato esquerdo (prato 1) e 80g no prato direito (prato 2) da balança de modo que esta fique em equilibrio. a) Quanto pesa cada laranja? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *



a) Cada laranja pesa 40g, por que, para estar em equilíbrio com o peso, o total tem que ser 80g
B) 2.x=80
X=80:2
X=40g

2. Colocamos 2 frascos de mel e um peso de 50g no prato esquerdo da balança (prato 1) e um peso de 200 g no prato direito (prato 2). a) Quanto pesa cada frasco de mel? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *

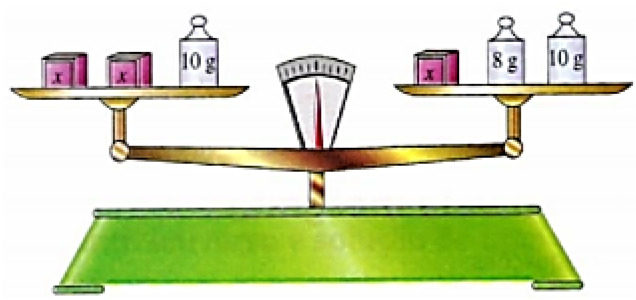


a) Cada frasco pesa 50g
b) 2.x+50=200
X=200:2-50
X=100-50
X=50

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 19 – Resposta Gio

4. Observe a figura. a) Como pode determinar o peso de cada cubo? b) Traduza em linguagem matemática a situação anterior. *



2.x+10=x+8+10
2x=8+10-10-2
2x=8-2
2x=4
X=4:2
X=2

5. Coloque 4 caixas de pastilhas num dos pratos da balança. No outro coloque 2 caixas de pastilhas e um peso de 80g. Traduza por uma expressão matemática a situação descrita. *

4.x=2.x+80
2x=2+80-4
2x=2+76
2x=78
X=78:2
X=18

Fonte: acervo da autora, 2021.

Tendo como base as dificuldades apresentadas, tivemos nossa reunião pelo Meet, onde retornei em todos os erros observados, possíveis dificuldades identificadas, e sanei as dúvidas. E foi nesse momento que também apresentei pela primeira vez o “método de esconder” apresentado por Tinoco (2015).

Durante a primeira resolução pelo método de esconder eles já tiveram grande desenvoltura e demonstraram surpresa por não saberem disso antes. Até então apenas tinham tido contato com o terceiro método apresentado pela Tinoco (2015, p.37) o de Desfazer, “esse método geralmente é bastante utilizado, por ser baseado nas operações inversas”, porém como observado e relatado pelos próprios alunos, eles se confundiam.

Com isso, nas questões onde o método de esconder não era suficiente, já que as balanças já haviam sido apresentadas a eles, o quarto método era o ideal, ou seja, o de Equações Equivalentes onde “Para a apresentação deste método, utiliza-se uma analogia Entre as equações e as balanças de dois pratos em equilíbrio” (TINOCO, 2015, p. 39).

Durante minha experiência anterior com equações representadas com balanças em equilíbrio, já me vi em situação de poder demonstrar na balança apenas equações que não tinham termos negativos. Entretanto, diante da necessidade de fazer os alunos entender tive que buscar uma forma de representar esses números negativos na balança. Ao pensar que para representar os números negativos precisaria de algo que ao invés de pesar o prato da balança, puxaria ele para cima, me veio a utilização de um balão que flutua.

Com os métodos apresentados, tinham novas ferramentas para utilizarem e superarem suas dificuldades. Mas um obstáculo era para eles grande demais, a fração. Quando viam equações com fração, já declaravam não saber nem começar, e o método de esconder os ajudou bastante, a vê-las com novos olhos.

Como dito anteriormente, eles julgam o início de suas dificuldades com a Matemática no momento da “inserção da letra”, porém vemos diariamente que a dificuldade da maioria já estava iniciada desde a apresentação da fração. E essa dificuldade se arrasta por anos, até a finalização da Educação Básica, infelizmente.

Após essa reunião, disponibilizei as três próximas atividades, uma de cada vez. Elas têm abordagens bem diferentes, como se cada uma desse indícios de um método.

Na 2ª atividade (apêndice C) continham 3 equações, com respectivas soluções, onde cada aluno deveria dizer se a resolução estava correta, e caso não estivesse, informar o erro e mostrar como deveria ser a solução.

Na primeira solução apresentada, letra a, que continha erro na resolução, 3 alunos disseram estar correta a resolução (Gio, Aurora e Geni) como mostra a figura 20, ou seja, não conseguiram identificar o erro presente na resolução. Mesmo afirmando estar correta, Aurora (figura 21) compartilhou sua resolução, e nela podemos observar que o erro já apresentado na resolução exposta é um erro recorrente cometido pelos alunos, mesmo que não feito expondo todos os detalhes dos passos como na questão.

Figura 20 – Resposta Geni

*

a) $4x - 6 = 22$

$4x - 6 + 6 = 22 - 6$

$4x = 16$

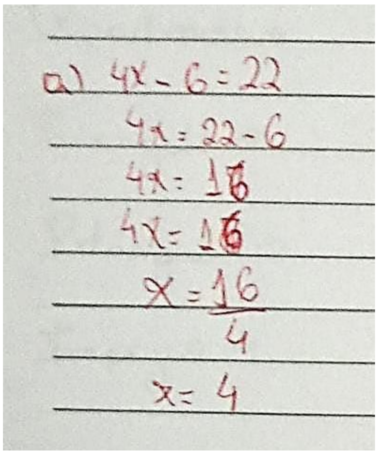
$x = \frac{16}{4}$

$x = 4$

Correto

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 21 - Resposta Aurora



Fonte: acervo da autora, 2021.

Dentre os que disseram conter erros, temos a resposta de Ivi (figura 22 e 23), onde é possível observar que o erro foi corrigido, porém apresentou outro ao final. Percebe-se que a aluna multiplicou o 28 pelo 4, e ainda sim o 4 permaneceu acompanhando o x. Não sabemos o que ela realmente pensou ao desenvolver dessa forma, só conseguiria ter certeza se tivesse perguntado ao aluno sobre esse assunto, isso mostra a importância do professor investigar, inclusive com perguntas orais, o pensamento dos alunos ao realizarem as atividades (VALE 2010). O que a pesquisa online por vezes acaba não permitindo.

Figura 22 – Resposta Ivi

*

a) $4x - 6 = 22$

$$4x - 6 + 6 = 22 - 6$$

$$4x = 16$$

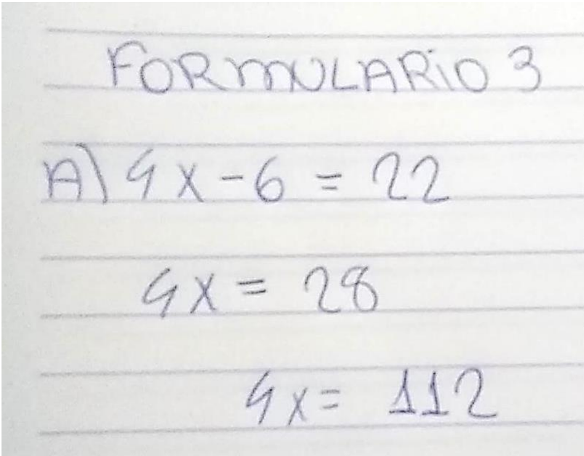
$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

112

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 23 – Resposta Ivi



Fonte: acervo da autora, 2021.

Ari (figura 24) informou estar errada, mas apenas deixou um questionamento, que demonstra parecer realmente ter identificado o erro, mas não saber exatamente o que ocorreu. Ela não deixou um registro de como deveria ser a resolução de forma correta.

Figura 24 – Resposta Ari

*

a) $4x - 6 = 22$

$$4x - 6 + 6 = 22 - 6$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

errada, de onde surgiu o segundo 6

Fonte: acervo da autora, 2021.

Apenas duas alunas (Fernanda e Lívia) responderam a tudo corretamente, identificaram as 2 questões erradas apresentadas, e conseguiram corrigi-las. Fernanda relata com suas palavras onde exatamente identificou o erro e informa qual deveria ser o resultado correto.

Figura 25 - Resposta Fernanda

*

a) $4x - 6 = 22$

$$4x - 6 + 6 = 22 - 6$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

Essa equação possui um erro, onde houve não houve uma toca de sinais no -6 o tornando positivo. O resultado correto é x=7.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 26 – Resposta Fernanda

*

c) $8 + 4x = 6x - 4$

$$8 + 4x - 4x = 6x - 4 - 4x$$

$$8 = 2x - 4$$

$$8 + 4 = 2x - 4 + 4$$

$$12 = 2x$$

$$12 - 2 = x$$

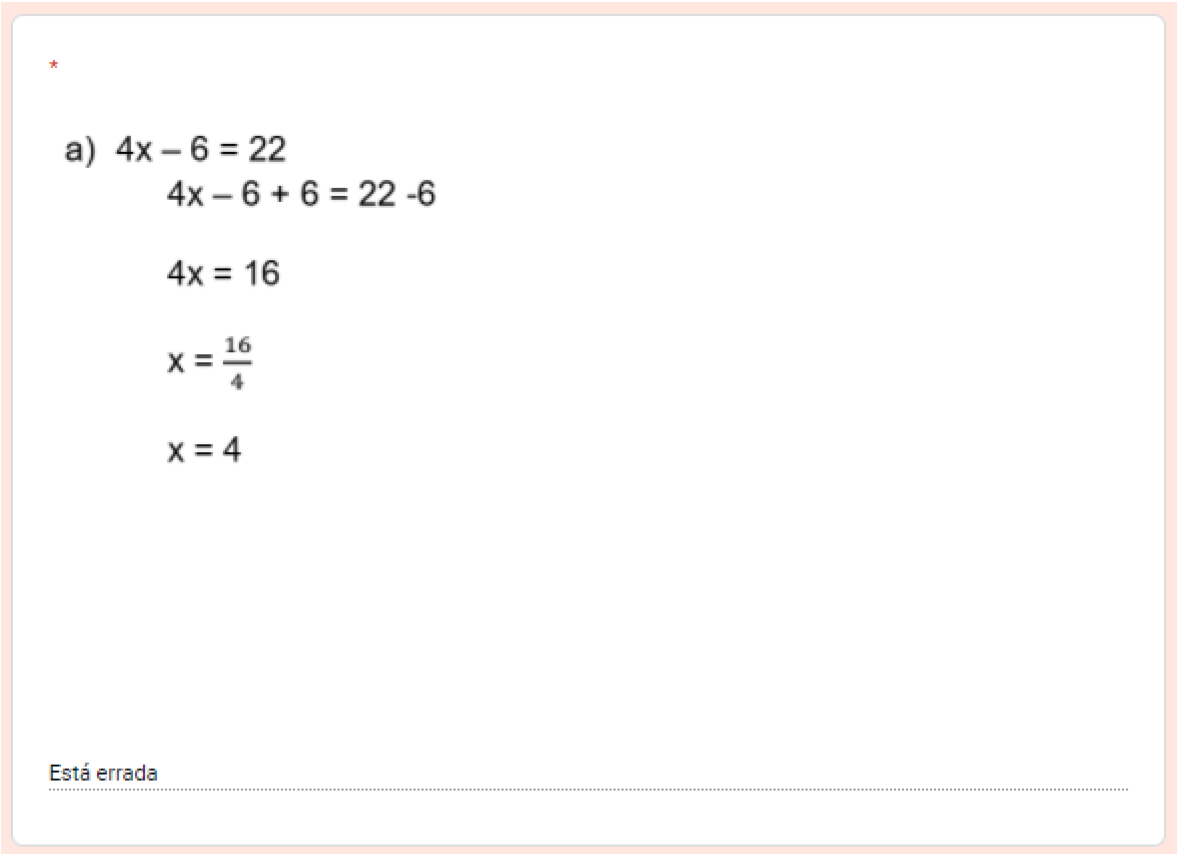
$$10 = x$$

A equação está errada, pois ao invés de dividir 12 por 2 houve uma subtração. O resultado correto é x=6.

Fonte: acervo da autora, 2021.

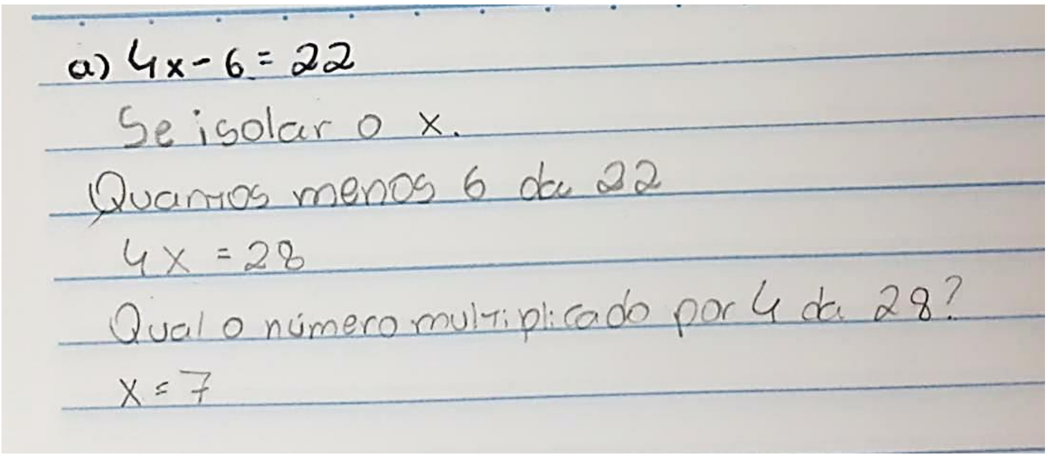
Já na resposta que Lívia apresentou para a primeira questão (figuras 27 e 28) há uma coisa interessante para observar. Onde a resolução apresentada era pelo método de Desfazer, e ao invés de identificar o local do erro da resolução e corrigi-la ela refaz usando o método de esconder.

Figura 27 - Resposta Lívia



Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 28 – Resposta Lívia



Fonte: acervo da autora, 2021.

Isso demonstra que ao se sentir insegura e perceber que poderia cometer erros até como o apresentado, opta por um método no qual se sentiu mais segura.

Na segunda resolução apresentada, letra b, apenas Gio (figura 29) informou não saber, os demais alunos disseram estar correta a resolução. O que é um excelente indício, afinal como nos diz Tinoco (2015) “É totalmente desnecessária a “passagem” da incógnita p para o primeiro membro da equação como é feita usualmente. O aluno deve considerar natural a equivalência entre as igualdades p = 155 e 155 = p.”.

Figura 29 – Resposta Gio

*

b) $9 - x = 2x$

$$9 - x + x = 2x + x$$

$$9 = 3x$$

$$\frac{9}{3} = x$$

$$3 = x$$

Nao sei.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 30 - Resposta Ivi

*

c) $8 + 4x = 6x - 4$

$8 + 4x - 4x = 6x - 4 - 4x$

$8 = 2x - 4$

$8 + 4 = 2x - 4 + 4$

$12 = 2x$

$12 - 2 = x$

$10 = x$

10

Fonte: acervo da autora, 2021.

Já na terceira resolução apenas Ivi (figura 30) apresentou a questão como correta. Os demais disseram estar errada a resolução, assim como Fernanda e Lívia. Nem todos apresentaram o local do erro e uma nova resolução, mas Ari (figura 31) indicou onde achava estar o erro, e é interessante sua resposta, já que ela pensou que o erro estava nos primeiros passos e não ao final.

Figura 31 - Resposta Ari

*

c) $8 + 4x = 6x - 4$

$$8 + 4x - 4x = 6x - 4 - 4x$$

$$8 = 2x - 4$$

$$8 + 4 = 2x - 4 + 4$$

$$12 = 2x$$

$$12 - 2 = x$$

$$10 = x$$

errada, aparenta ter um 4 a mais

Fonte: acervo da autora, 2021.

Enquanto que ao observar Geni (figura 32) é perceptível que percebeu o local do erro, porém realizou a divisão de forma errada. O que independente do pequeno erro, é um grande avanço. Na resolução de Aurora (figura 33), é visível a confusão que relatam fazer com as operações durante o desenvolvimento.

Figura 32 – Resposta Geni

*

c) $8 + 4x = 6x - 4$

$8 + 4x - 4x = 6x - 4 - 4x$

$8 = 2x - 4$

$8 + 4 = 2x - 4 + 4$

$12 = 2x$

$12 - 2 = x$

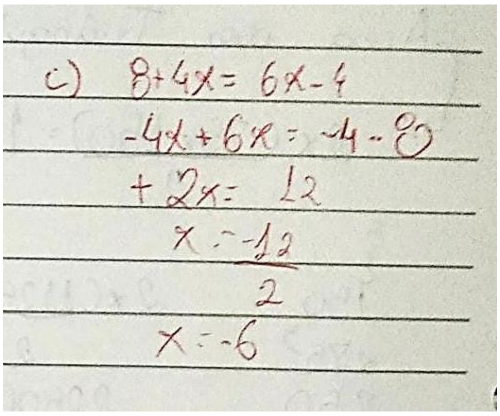
$10 = x$

A letra c ta errada pois não deveria existir (- 4 + 4) eles já foram usados, outra coisa que também ta errada e o 2x sendo subtraído com o 8.

8 + 4x = 6x - 4
8 + 4x - 4x = 6x - 4 - 4x
8 + 4 = 2x
12 = 2x
12/2 = x
4 = x

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 33 – Resposta Aurora



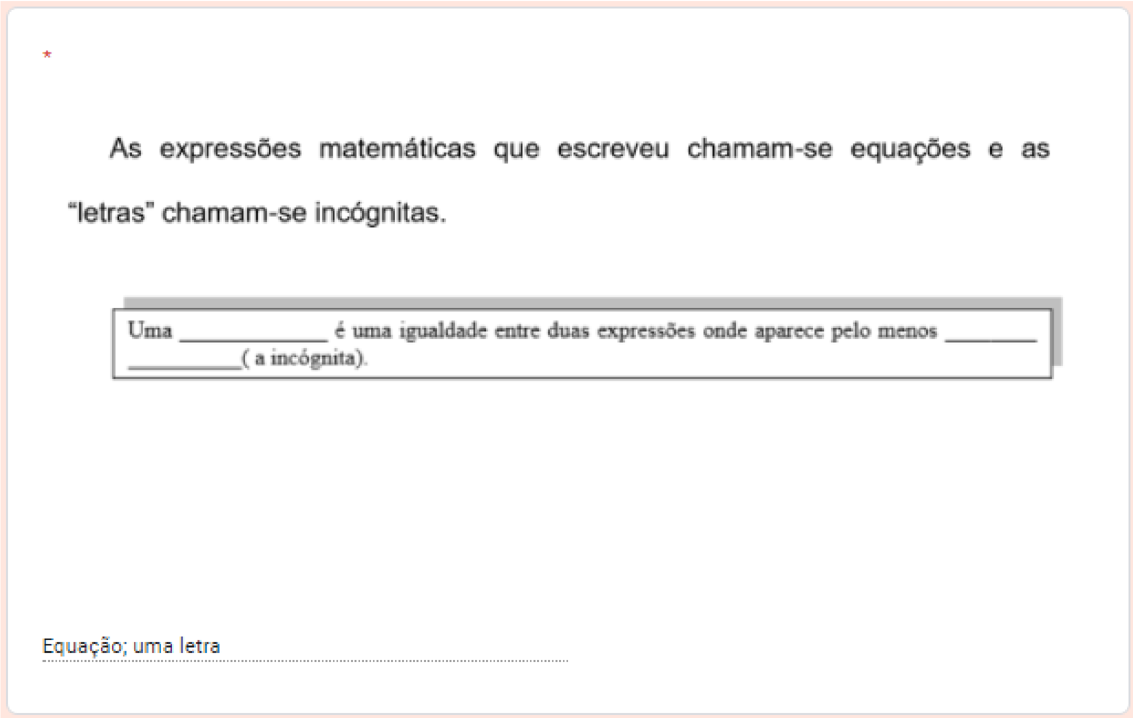
Fonte: acervo da autora, 2021.

Nesse momento da Pesquisa tivemos alguns acontecimentos importantes, infelizmente perdemos a participação de 3 alunos, Ari, Ivi e Geni. Por motivos pessoais sérios, incluindo o vírus que afeta todo o mundo nesse momento. Não podemos esquecer que essa Pesquisa se deu no meio de uma Pandemia, que afetou a praticamente todos de alguma forma.

De qualquer maneira, pretendo em um momento futuro, mais propício, poder ajudá-los a concretizar esse conhecimento.

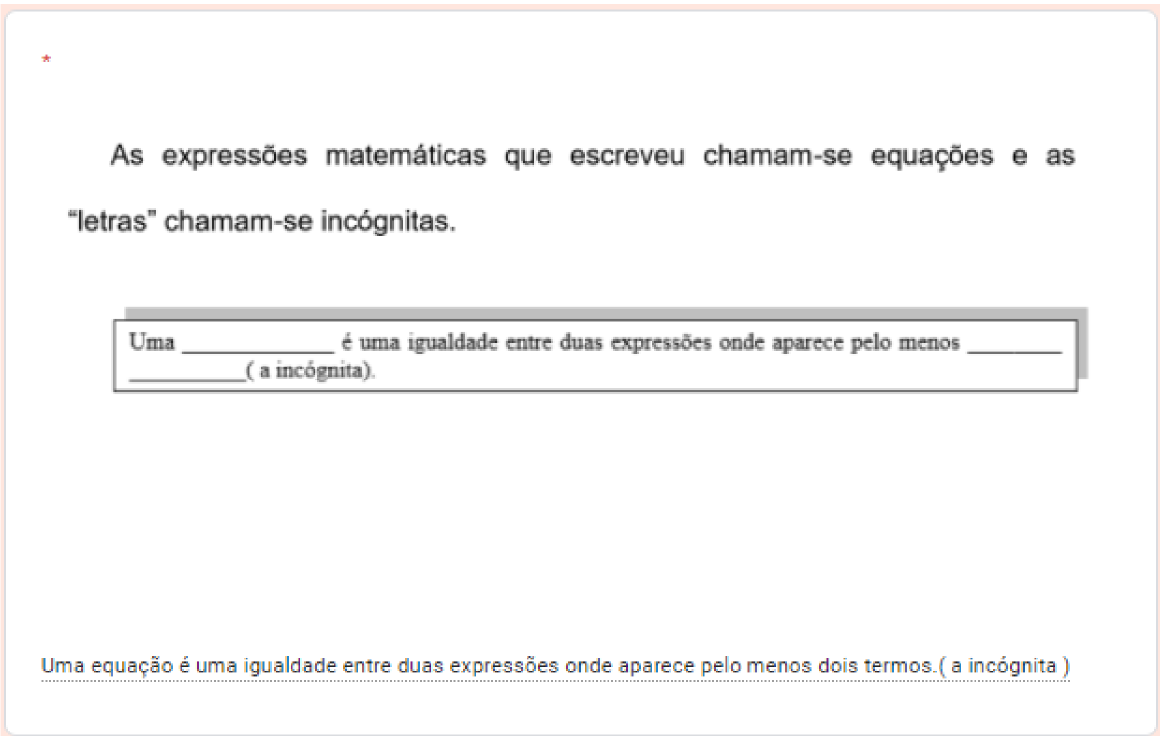
Fomos então à 3ª Atividade, inicialmente apresentei uma explicação seguida de uma frase com lacunas para serem completadas. Para observar se absorveram algo da definição de equação, e as respostas foram muito válidas. Cada uma demonstra ao seu modo ter evoluído.

Figura 34 - Resposta Fernanda



Fonte: acervo da autora, 2021

Figura 35 - Resposta Lívia



Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 36 - Resposta Aurora

*

As expressões matemáticas que escreveu chamam-se equações e as "letras" chamam-se incógnitas.

Uma _____________ é uma igualdade entre duas expressões onde aparece pelo menos ________ __________(a incógnita).

Uma equação é a igualdade entre duas expressões onde aparece pelo menos uma incógnita.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 37 - Resposta Gio

*

As expressões matemáticas que escreveu chamam-se equações e as "letras" chamam-se incógnitas.

Uma _____________ é uma igualdade entre duas expressões onde aparece pelo menos ________ __________(a incógnita).

Equação, letras.

Fonte: acervo da autora, 2021.

As duas questões dessa atividade têm o intuito de analisar a interpretação de texto e o domínio da representação da balança. As respostas de Fernanda (figura 38) e Aurora (figura 39) demonstram terem compreendido bem a ideia da representação com a balança. Fernanda inclusive com um ótimo domínio das palavras para explicar seu raciocínio.

Figura 38 - Resposta Fernanda

Se colocar um peso de 120g no prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas de 40g terá de colocar no prato direito, para que este fique em equilíbrio? E se no prato esquerdo, além de 120g colocar mais 3 caixas de pastilhas, quantas caixas de pastilhas terá de colocar no prato direito para que a balança fique em equilíbrio? Explique o seu raciocínio. *

Para equilibrar a balança, precisa adicionar ao lado direito 3 caixas de 40g. Colocando mais 3 caixas no prato esquerdo além de 120g, ele passa a pesar 240g, pra equilibrar no lado direito precisaria colocar 6 caixas. Para descobrir tudo isso basta dividir o peso do lado esquerdo por 40 que é o valor de cada caixa de pastilha.

Há uma balança em equilíbrio com um peso de 160g no prato esquerdo e 4 caixas de pastilhas de 40g no prato direito. Se duplicar o número de caixas de pastilhas do prato direito, quantos gramas tem que colocar no prato esquerdo para que a balança continue em equilíbrio? E se triplicar o peso do prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas tem que colocar no prato direito para que esta se mantenha em equilíbrio? Explique seu raciocínio. *

Duplicando o número de caixas no lado direito, para equilibrar a balança tem que colocar no prato esquerdo mais 160g. Se triplicar o peso do esquerdo ele passa a pesar 480g, para equilibrar a balança no direito seria necessário adicionar 8 caixas, pois já se possui 4. Para descobrir isso, se no começo a balança está igual e irá duplicar de um lado e vc quer saber quanto será necessário para igualar novamente é só vc dobrar tbm o outro lado. A mesma coisa acontece com o triplo, mas depois q vc obtém o resultado basta vc retirar as 4 caixas q já possuía na balança desse valor e colocar o restante na resposta.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 39 – Resposta Aurora

Se colocar um peso de 120g no prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas de 40g terá de colocar no prato direito, para que este fique em equilíbrio? E se no prato esquerdo, além de 120g colocar mais 3 caixas de pastilhas, quantas caixas de pastilhas terá de colocar no prato direito para que a balança fique em equilíbrio? Explique o seu raciocínio. *

Se 1 uma caixa de pastilha é equivalente a 40g, serão necessários 3 caixas de pastilhas de 40g para igualar ao prato esquerdo.
No caso de mais 3 caixas de pastilhas, colocariamos um peso de mais 120g para igualar cada prato.

Há uma balança em equilíbrio com um peso de 160g no prato esquerdo e 4 caixas de pastilhas de 40g no prato direito. Se duplicar o número de caixas de pastilhas do prato direito, quantos gramas tem que colocar no prato esquerdo para que a balança continue em equilíbrio? E se triplicar o peso do prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas tem que colocar no prato direito para que esta se mantenha em equilíbrio? Explique seu raciocínio. *

Só precisaremos adicionar mais 4 caixas de 40g ou um peso de 160g.
Vamos ter que colocar mais 8 caixas de pastilhas, no total serão 480g de cada lado.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Já Lívia (figura 40) aparenta ter se confundido com os valores durante a interpretação, mas o raciocínio estava no caminho certo. Enquanto que Gio (figura 41) ainda demonstra não ter domínio da interpretação de texto, ou não ter compreendido bem a ideia de domínio. Podemos observar inclusive no rascunho (figura 42) que a mesma compartilhou.

Figura 40 - Resposta Lívia

Se colocar um peso de 120g no prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas de 40g terá de colocar no prato direito, para que este fique em equilíbrio? E se no prato esquerdo, além de 120g colocar mais 3 caixas de pastilhas, quantas caixas de pastilhas terá de colocar no prato direito para que a balança fique em equilíbrio? Explique o seu raciocínio. *

Multiplico o 40 por um valor que será igual o valor do 1° termo. E acrescento a mesma quantidade de caixas de pastilhas dos dois lados.

Há uma balança em equilíbrio com um peso de 160g no prato esquerdo e 4 caixas de pastilhas de 40g no prato direito. Se duplicar o número de caixas de pastilhas do prato direito, quantos gramas tem que colocar no prato esquerdo para que a balança continue em equilíbrio? E se triplicar o peso do prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas tem que colocar no prato direito para que esta se mantenha em equilíbrio? Explique seu raciocínio. *

Somei todas as quatro caixas e multipliquei por dois. Dando o valor de 320g.
Pego o 320 e subtraio pelo 120 para chegar no mesmo valor
320 - 120 = 200
Então, o valor que falta para equilibrar a balança é 200g.

Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 41 - Resposta Gio

Se colocar um peso de 120g no prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas de 40g terá de colocar no prato direito, para que este fique em equilíbrio? E se no prato esquerdo, além de 120g colocar mais 3 caixas de pastilhas, quantas caixas de pastilhas terá de colocar no prato direito para que a balança fique em equilíbrio? Explique o seu raciocínio. *

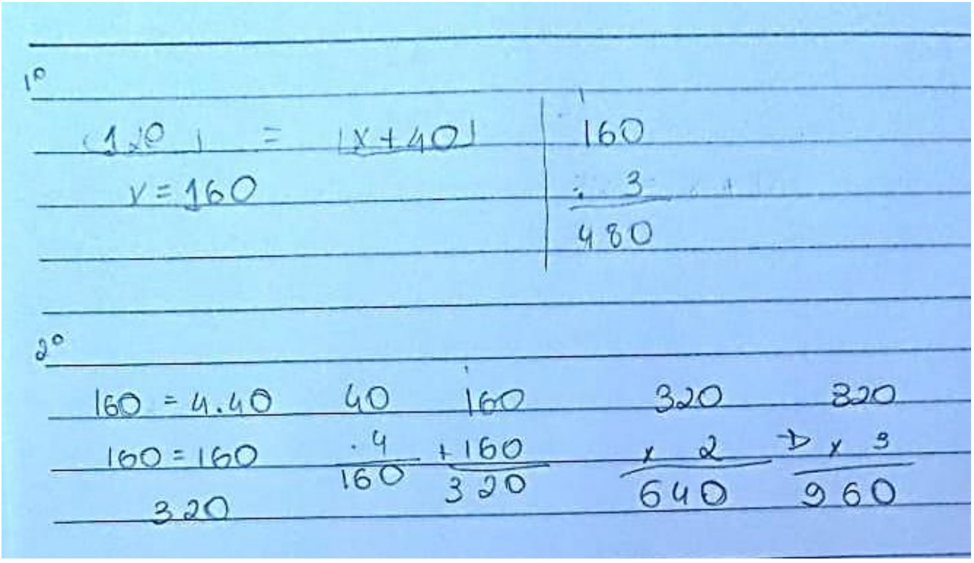
160,

Há uma balança em equilíbrio com um peso de 160g no prato esquerdo e 4 caixas de pastilhas de 40g no prato direito. Se duplicar o número de caixas de pastilhas do prato direito, quantos gramas tem que colocar no prato esquerdo para que a balança continue em equilíbrio? E se triplicar o peso do prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas tem que colocar no prato direito para que esta se mantenha em equilíbrio? Explique seu raciocínio. *

640, 960.

Fonte: acervo da autora, 2021.

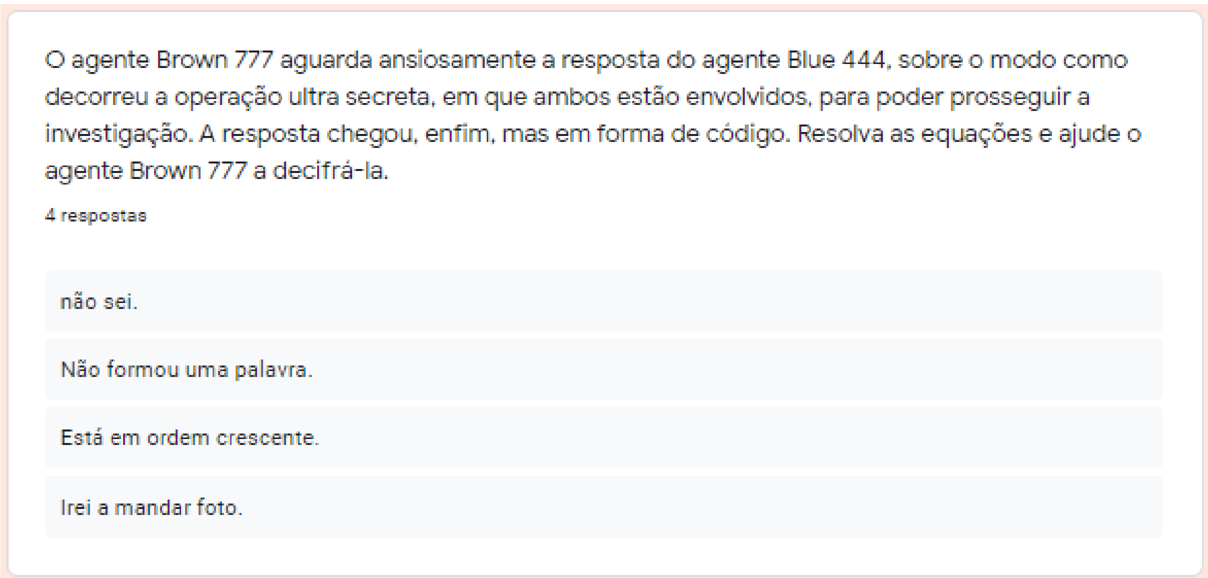
Figura 42 – Resposta Gio



Fonte: acervo da autora, 2021.

Chegamos então na 4ª atividade, e na primeira questão (figura 43) todas apresentaram dificuldade. Nenhuma conseguiu desvendar a palavra escondida.

Figura 43 – Respostas Fernanda, Lívia, Aurora e Gio



O agente Brown 777 aguarda ansiosamente a resposta do agente Blue 444, sobre o modo como decorreu a operação ultra secreta, em que ambos estão envolvidos, para poder prosseguir a investigação. A resposta chegou, enfim, mas em forma de código. Resolva as equações e ajude o agente Brown 777 a decifrá-la.

4 respostas

não sei.

Não formou uma palavra.

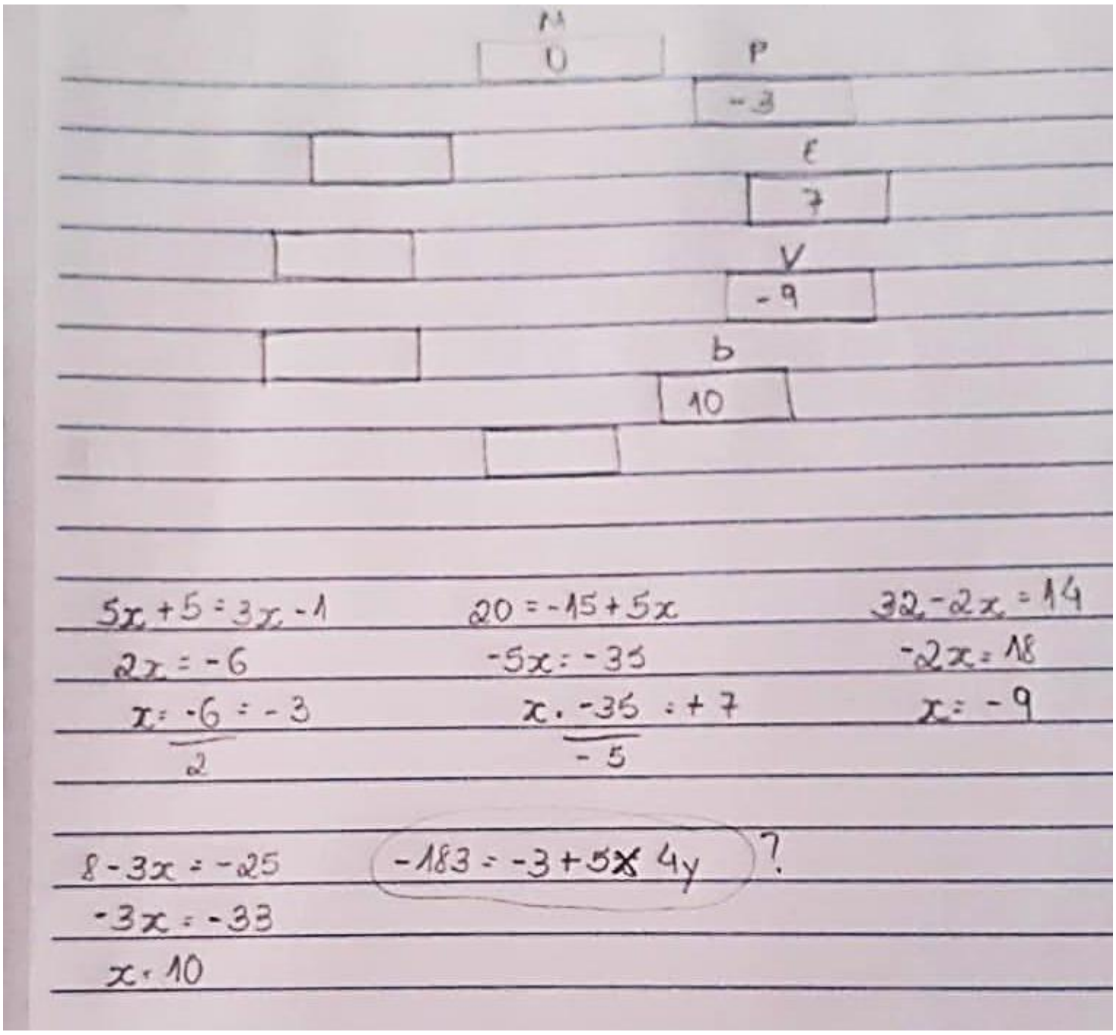
Está em ordem crescente.

Irei a mandar foto.

Fonte: acervo da autora, 2021.

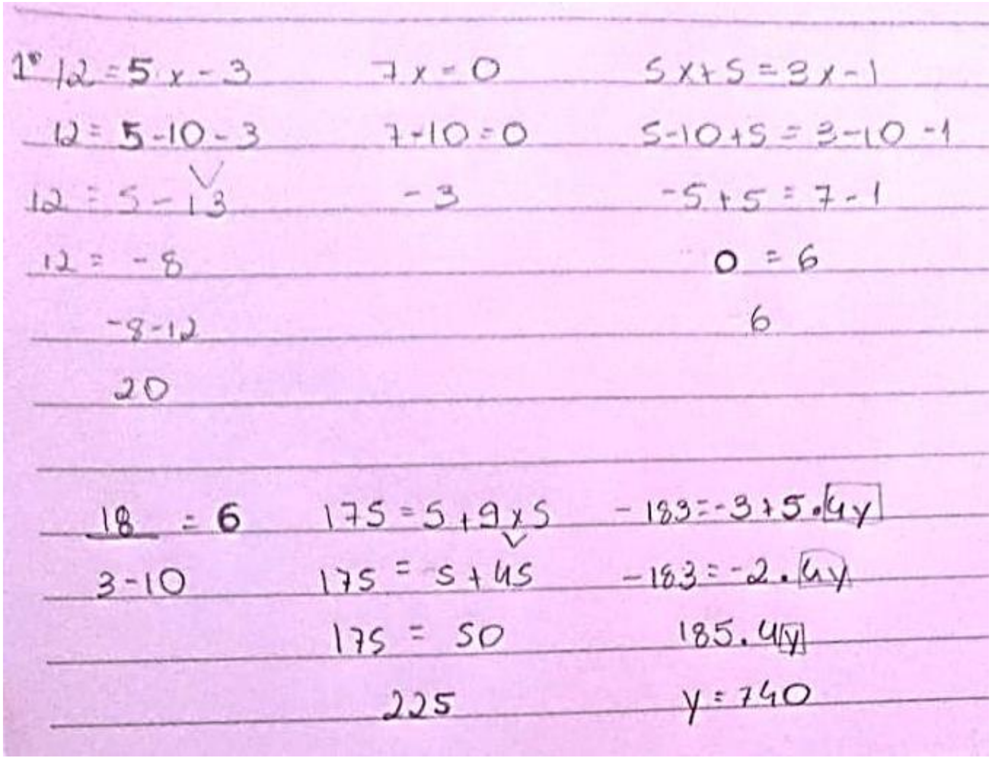
Fernanda e Gio compartilharam os rascunhos. Observando-os é possível perceber que algumas equações não souberam nem iniciar a resolução. Inclusive Fernanda (figura 44), que vinha apresentando um bom domínio, teve dificuldades de concluir. Conseguiu as 3 primeiras, teve dois pequenos erros, nas duas próximas, e depois não conseguiu mais.

Figura 44 - Resposta Fernanda



Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 45 – Resposta Gio



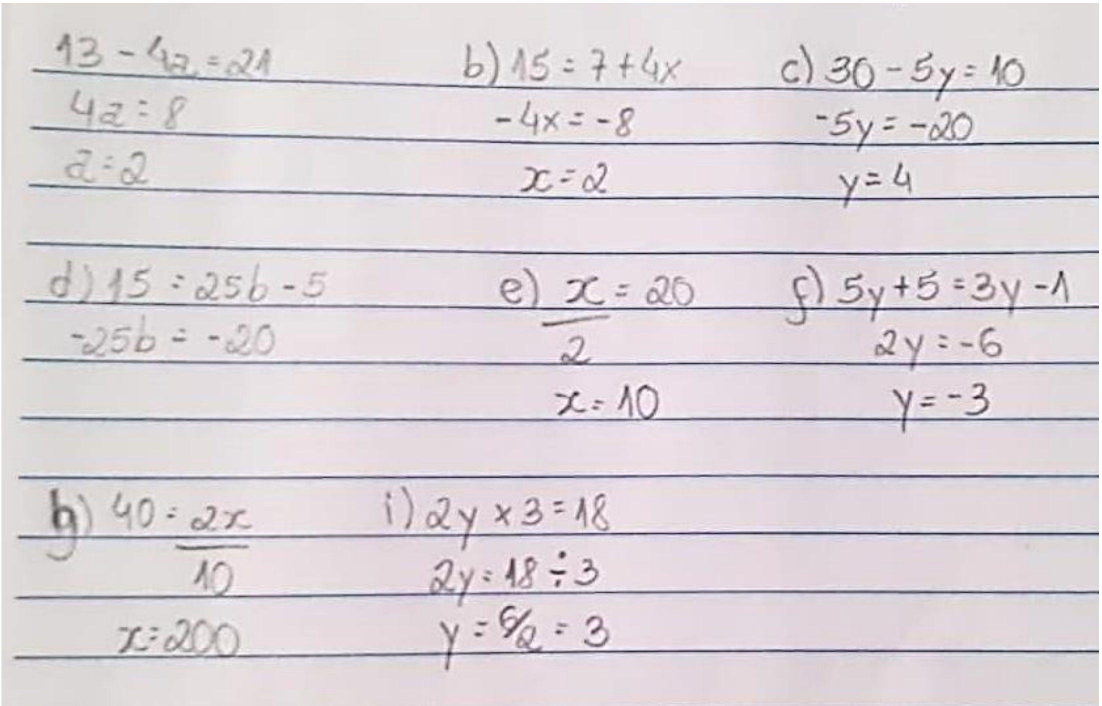
Fonte: acervo da autora, 2021.

Gio continua demonstrando uma dificuldade grande nas resoluções, o que é perceptível em todas do rascunho (figura 45). O que reforça a necessidade de um novo momento para voltar nos erros, solucionar as dúvidas, e aprender para quem ainda não absorveu.

Essa dificuldade permaneceu nas demais equações apresentadas nessa atividade. As quatro alunas compartilharam seus respectivos rascunhos, e neles podemos constatar observações importantes.

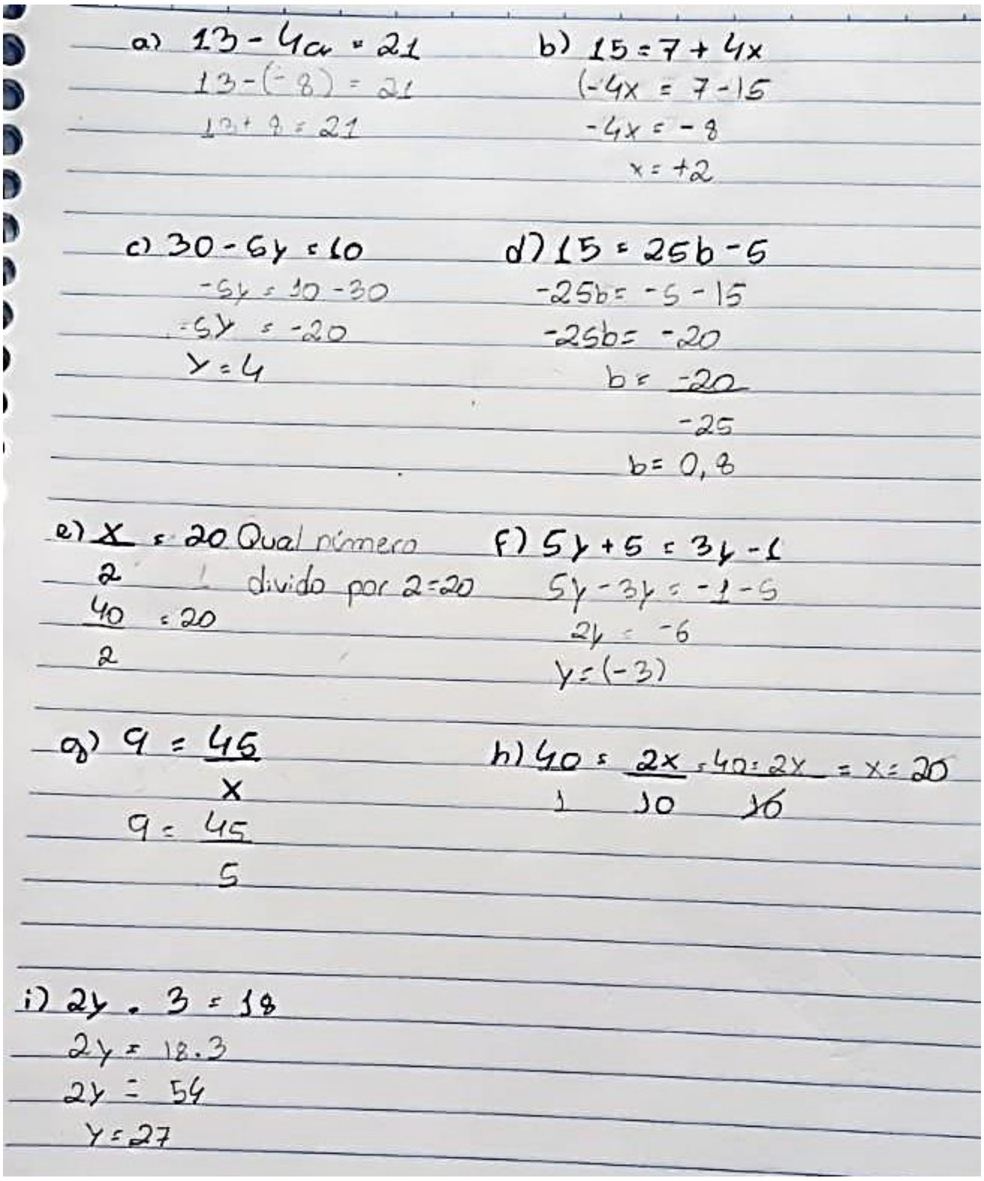
Fernanda (figura 46) permanece demonstrando ter uma base sobre o conteúdo, mas ainda comete erros nas operações e sinais. Enquanto que Lívia (figura 47), que demonstrava ter um pouco mais de dificuldade, evoluiu muito, passou a utilizar o novo método mas que não sabia nem começar, como as questões com fração. Podemos ver nas resoluções dela, que nas questões com fração que eram um ponto de bloqueio, ela conseguiu realizar com êxito utilizando o método de esconder, apresentado durante a pesquisa. O que é um resultado valioso.

Figura 46 – Resposta Fernanda



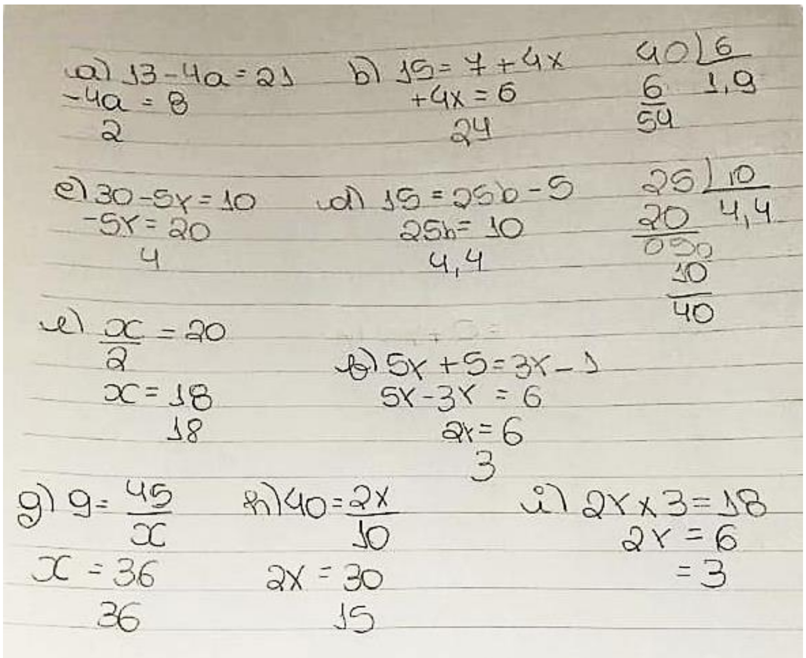
Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 47 – Resposta Lívia



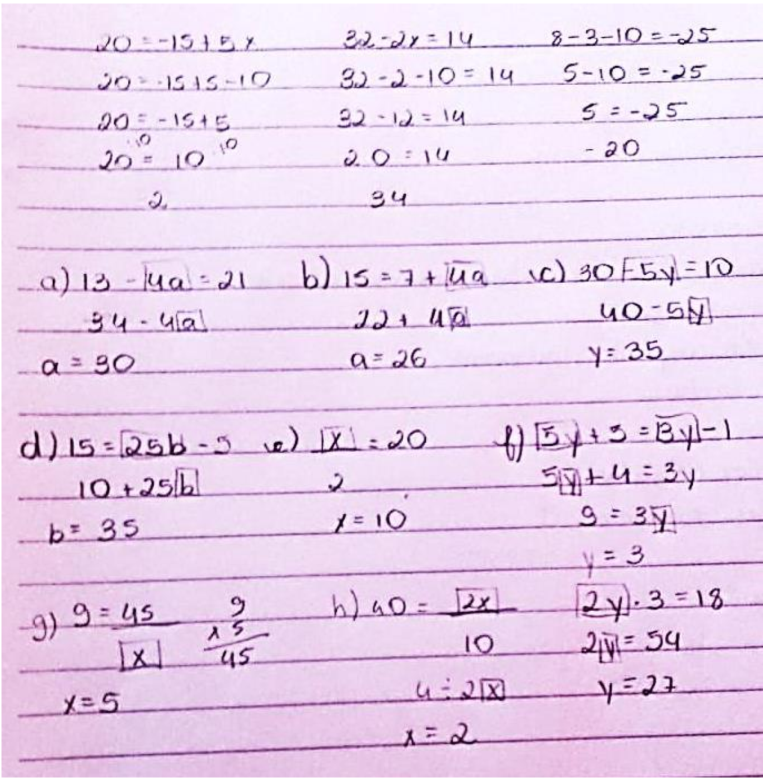
Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 48 - Resposta Aurora



Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 49 - Resposta Gio



Fonte: acervo da autora, 2021.

Uma evolução também foi perceptível nas resoluções de Aurora (figura 48), que permanece com dificuldade nas equações com fração, e ainda comete erros básicos que já analisei anteriormente, mas conseguiu evoluir em muitas e teve conquistas. Porém Gio (figura 49) não teve ainda uma boa evolução. Ao perceber que o método utilizado por ela anteriormente não lhe atendia, passou a tentar utilizar o novo método em todas, porém sem analisar em qual era possível a utilização do método, além de não ter o compreendido ainda.

Com isso, fiz com elas novamente uma Reunião pelo Meet, infelizmente como já mencionado, o momento da pesquisa se deu em um período complicado. Com isso, nossa reunião iniciou com três participantes, Fernanda, Gio e Aurora, porém no decorrer Aurora teve problemas com internet que permaneceu até o fim da pesquisa. Posteriormente fiz uma nova reunião resumida, com Lívia, já que a mesma não pôde no dia oficial.

Mesmo sendo solicitado que fizessem quanto antes a nossa 5ª e última atividade, preferencialmente logo após a reunião, todas demoraram muitos dias para então pararem para fazê-la, e a consequência disso é perceptível na questão que tanto assusta elas, com fração.

Figura 50 Respostas Gio, Fernanda e Lívia

3 respostas

100+500=3x
X=200

Equação: 100+500=3x. Cada pacote pesa 200g.

200g

3 respostas

3x+2=8
X=2

Equação: 3x+2=8. Cada caixa pesa 2kg.

2kg

3 respostas

2x+500+100=x+250+500
X=1350

Equação: 2x+500+100=x+250+500. Cada caixa pesa 150g.

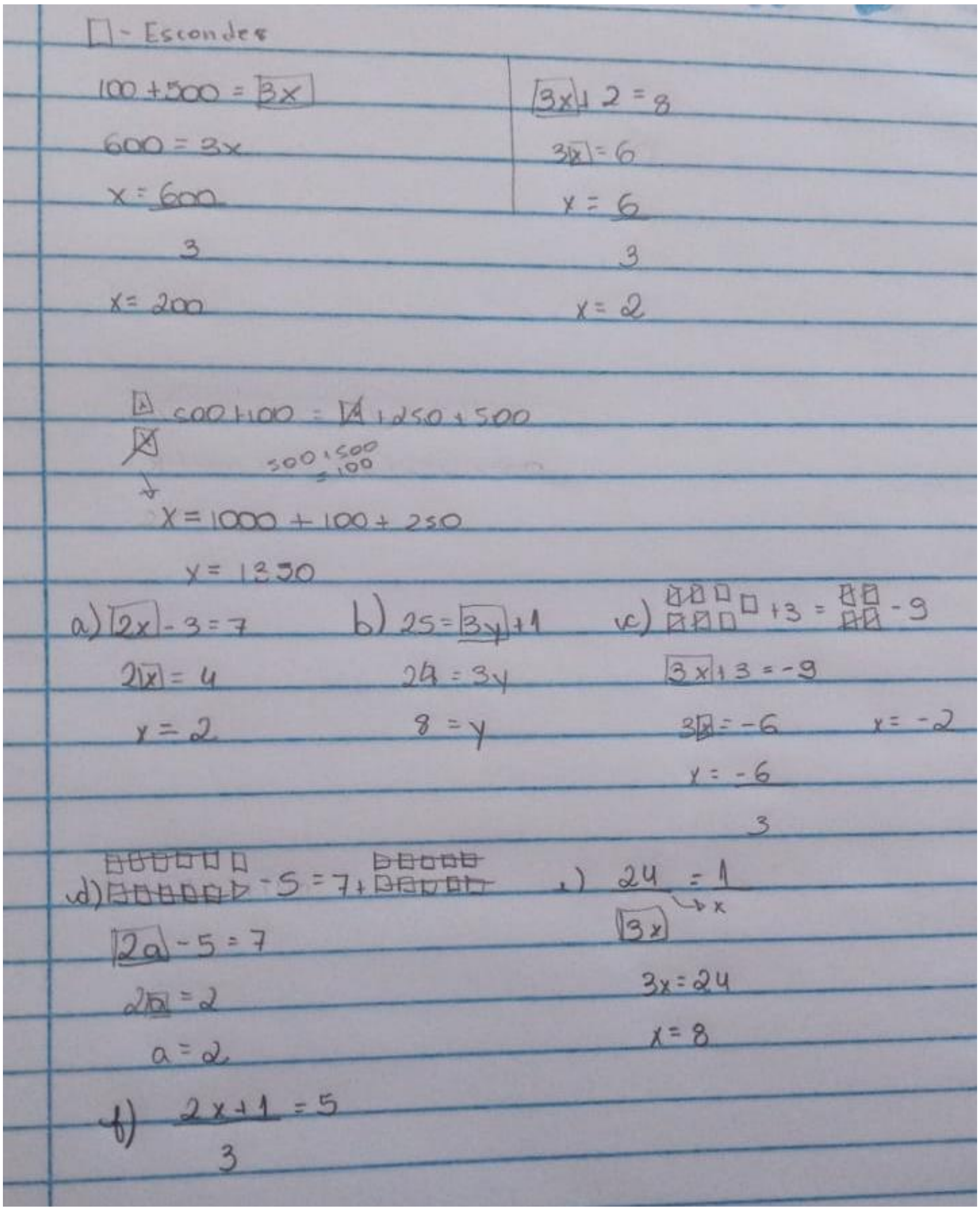
150g

Fonte: acervo da autora, 2021.

Na questão que continham representações de balança (figura 50), elas foram muito bem. É perceptível uma grande evolução, o que é recompensador. É muito interessante observar o rascunho de Gio (figura 51), onde ela demonstra ter evoluído muito com o método de esconder. Até então ela não conseguia utilizá-lo, e também não tinha domínio prévio de outro método, e deu esse grande passo. Apesar de Gio ter se confundido na resolução da terceira balança, mas nas demais fez com domínio.

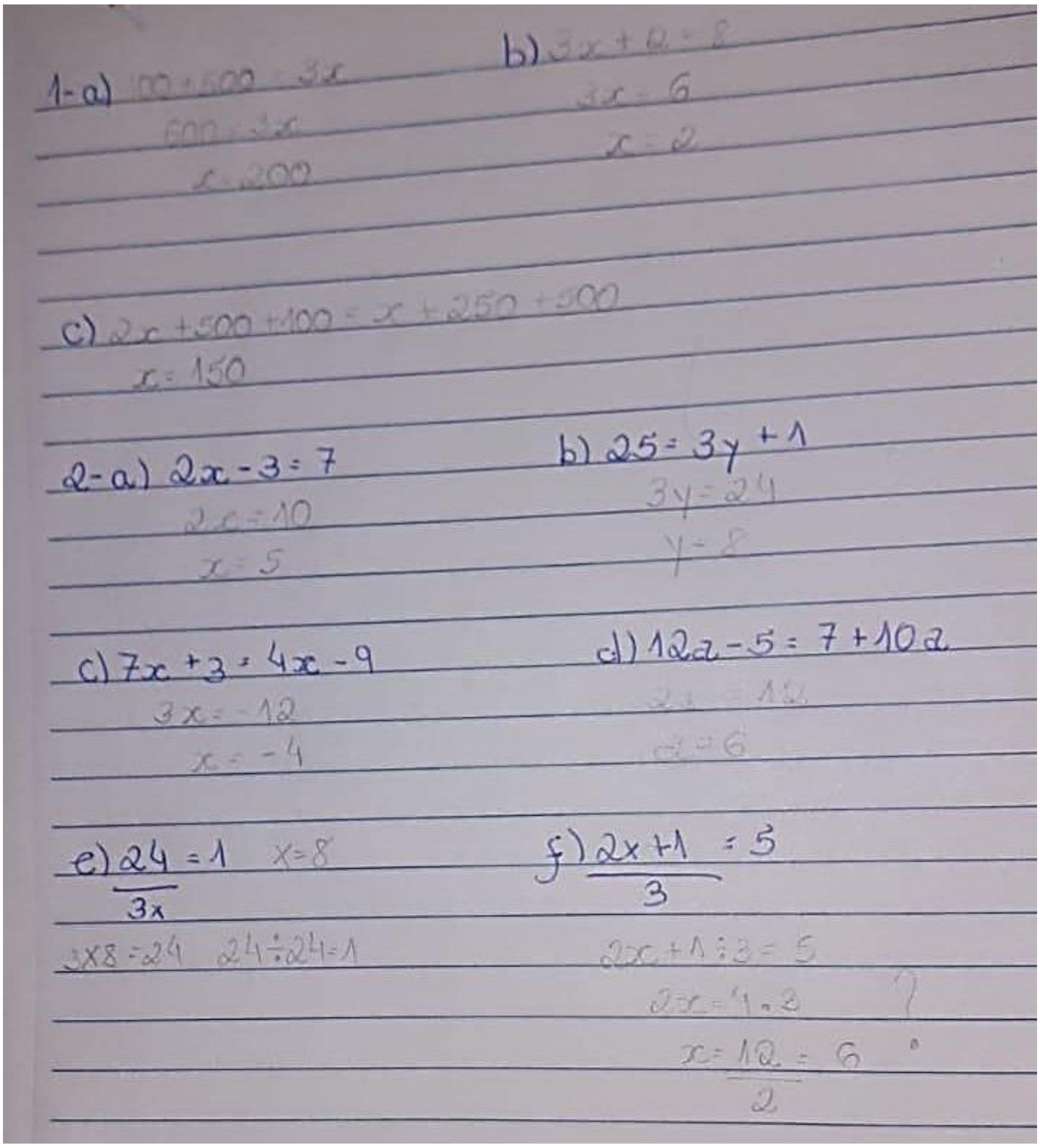
Na resolução das equações da segunda questão, ainda é perceptível a evolução de Gio, e nelas é perceptível verificar a dificuldade que ela encontra com números negativos, que foi onde permaneceu cometendo erros.

Figura 51 – Resposta Gio



Fonte: acervo da autora, 2021.

Figura 52 – Resposta Fernanda

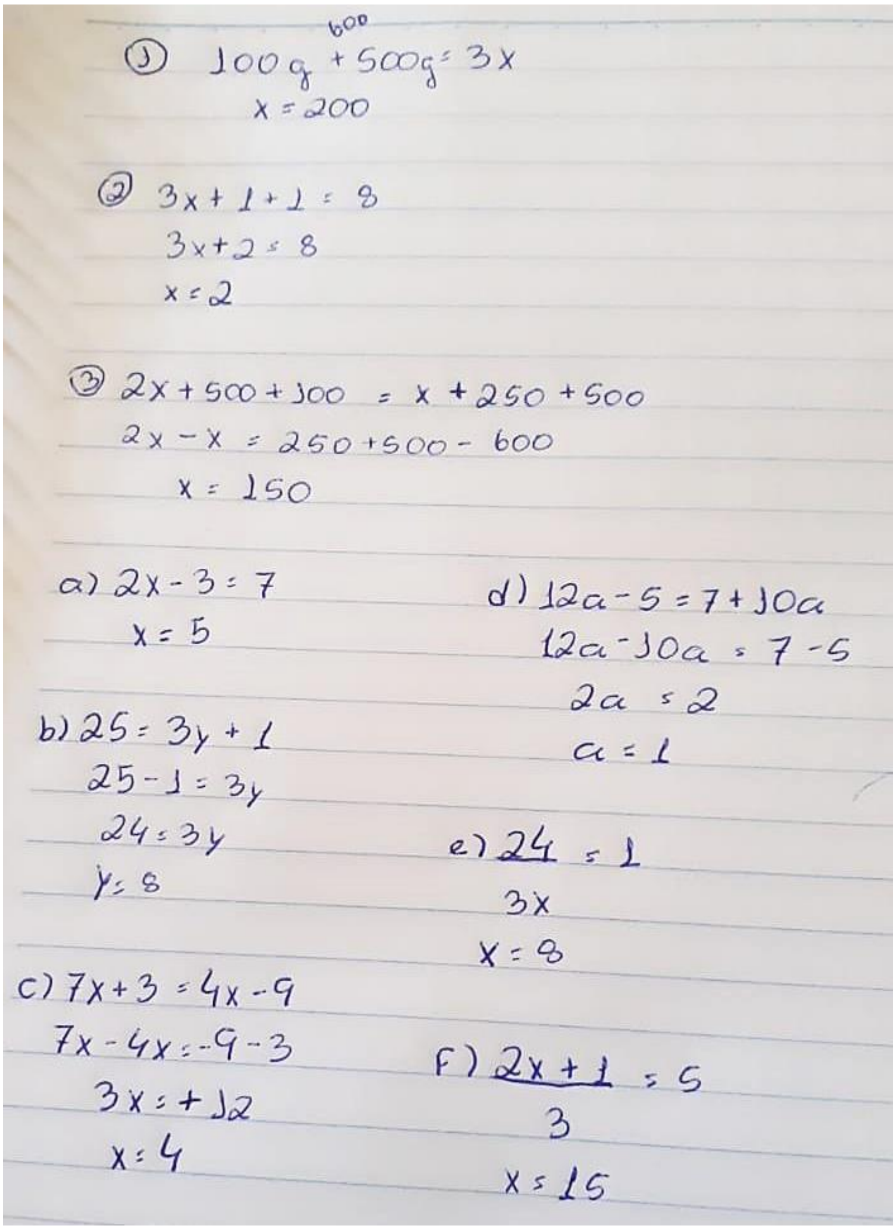


Fonte: acervo da autora, 2021.

Na resolução de Fernanda (figura 52) é possível observar a questão do bloqueio com fração, que tanto foi dito. Apesar de agora apresentar total domínio em todas as demais questões propostas. Na fração apresentada sem operação no numerador ou no denominador, que foi bastante trabalhada, a barreira foi quebrada, porém se a operação aparece, o bloqueio não permite resolver. O que demonstra que quando um bloqueio chega a ser criado, é mais custoso a se quebrar.

E com relação a essa questão especificamente, é interessante observar o que ocorreu com Lívia (figura 53). Que como fizemos a reunião resumida posteriormente, realizou a atividade em sequência.

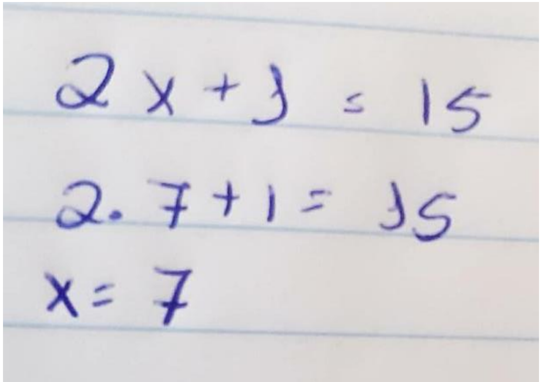
Figura 53 – Resposta Lívia



Fonte: acervo da autora, 2021.

A última questão que trabalhamos na reunião foi exatamente com fração contendo operação na fração, e ainda sim ela errou. Observei a resolução dela na mesma hora, e solicitei que observasse se realmente era “x” que valia 15 naquela questão, foi então que ela percebeu que havia errado, corrigiu e me enviou na mesma hora a nova resolução (figura 54).

Figura 54 - Resposta Lívia



Fonte: acervo da autora, 2021.

Algo que pode parecer pequeno, mas é um exemplo de como todas as demais, com mais tempo de dedicação, também conseguem desenvolver ainda mais.

Vemos com a análise das atividades que todos os alunos tiveram avanços. Fernanda, que já possuía conhecimentos anteriores sobre o conteúdo aprendeu novos métodos e inseriu em suas resoluções.

Lívia, que não recordava o que se tratava mas tinha uma base do assunto, teve grandes avanços começando a inserir novos métodos em suas resoluções.

Gio, que não apresentava base sobre o assunto, se identificou com o método de esconder, e com ele passou a conseguir encontrar as soluções de várias equações, e também compreendeu bem o esquema das balanças.

Válido ressaltar também o avanço percebido nos demais participantes, que por motivos particulares não puderam ir até o final da pesquisa, mas que até onde foram, evoluíram.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A seguir apresento uma Sequência Didática, como sugestão para uso em Sala de Aula. Lembrando, que cada turma tem suas especificidades e com isso necessidades diferentes podendo, portanto, haver a necessidade de alterações tanto de etapas, como de tempo.

DISCIPLINA: Matemática
TEMA: Equações
Tempo da sequência didática:
AULA 1
Aplicação 1ª Atividade – Apêndice B
Duração: 1 aula – 50 minutos
Objetivo: Os alunos resolverem as questões com seus conhecimentos prévios, baseados na imaginação da situação existente.
AULA 2
Análise das resoluções em conjunto.
Duração: 1 aula – 50 minutos
Objetivo: Identificar os conhecimentos prévios, da noção intuitiva de equação dos alunos. Provocando uma discussão sobre cada situação, e compartilharem a forma de pensar.
AULA 3
Trabalho da questão Algébrica / Trabalho do que é uma equação.
Duração: 1 aula - 25 minutos / 25 minutos
Objetivo: Mostrar aos alunos como transcrever cada situação resolvida na forma de expressão algébrica. / Mostrar o que é uma equação, e trabalhar a identificação de uma equação.
AULA 4
Exposição dos Métodos de Resolução de Equações.
Duração: 1 aula – 50 minutos
Objetivo: Mostrar aos alunos os diferentes métodos existentes. - O ideal é trabalhar com muitos exemplos. - Deixar como exercício para resolução sozinhos a segunda parte da 4ª Atividade – Apêndice E.
AULA 5
Aplicação 2ª Atividade - Apêndice C
Duração: 1 aula – 20 minutos / 30 minutos
Objetivo: Desenvolver o olhar crítico às resoluções nos alunos, tanto para treiná-los para o desenvolvimento correto, tanto para saberem se auto corrigirem. Questões desse tipo mostram também como o erro pode contribuir para a aprendizagem. - Tempo inicial para resoluções individuais. - No momento da correção, gerar interação com votações de certo ou errado e justificativas.
AULA 6

Aplicação 3ª Atividade – Apêndice D
Duração: 1 aula – 50 minutos.
Objetivo: Atividade para retornar às questões concretas e trabalhar as diferentes mudanças de situações. Momento de se trabalhar bem os nomes “membro” e “termo”.
AULA 7
Aplicação 4ª Atividade – Apêndice E (primeira parte)
Duração: 1 aula – 50 minutos
Objetivo: Atividade investigativa. Treinar as resoluções de forma lúdica e instigante. - Interessante para ser realizada em grupos (de 3 a 4 alunos).
AULA 8
Aplicação 5ª Atividade – Apêndice F
Duração: 1 aula – 50 minutos
Objetivo: Busca de dúvidas restantes. - O ideal é que seja feita uma questão por vez. Com tempo para realização individual, e correção em seguida.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho procurou analisar atividades de alunos do Ensino Médio sobre equações. Com isso iniciei uma compreensão de como pode ser feita uma abordagem à álgebra para que atinja os alunos de forma positiva e contribua para o pensamento algébrico. Com esta intenção é que após um convite e o voluntariado de alunos que se auto intitulavam com dificuldades em Matemática apresentei uma proposta de atividades para abordar o tema equações do primeiro grau.

As atividades se basearam em atividades de balança, e equações já descritas matematicamente, focando nos quatro tipos de resoluções expostos por Tinoco (2015). A análise buscou responder a seguinte questão: Que dificuldades alunos do Ensino Médio apresentam ao resolverem equações do 1º grau ao final de uma sequência de atividades sobre esse conteúdo?

Analisando a última atividade realizada pelos alunos, penso que a apresentação de novos métodos contribuiu de forma significativa, levando os alunos que não conseguiam nem tentar fazer a acertar. O que nos mostra a importância de se apresentar diferentes métodos ao ensinar um conteúdo, tendo em vista que cada indivíduo é único e tem seu próprio modo.

Consegui identificar com essa atividade também, que apesar de ter apresentado os quatro métodos propostos por Tinoco (2015), quem não tinha bagagem anterior consolidada, compreendeu melhor e se adaptou com o segundo método, o de “Esconder”, utilizando-o na maioria das resoluções, talvez pela possibilidade de resolver mentalmente. Esses, por se identificarem mais com esse método, e ele não ser suficiente para todas as equações, as que necessitam de outras maneiras de solução, recorreram por vezes à ideia de balança, mas ainda permaneceu sendo dificuldade. Já os que conseguiram compreender os quatro métodos, superaram suas dificuldades. As dificuldades que continuaram apresentando, foram nas operações, e principalmente na questão da fração, o que demonstra dificuldades na base.

Para responder ao objetivo geral, tracei três objetivos específicos, os quais cumpri. Verificar conhecimentos anteriores sobre equações dos alunos do Ensino Médio ao realizar o questionário (apêndice A), onde observei quais alunos sabiam o que era equação. Observando que a necessidade da igualdade não era de conhecimento de todos.

Identifiquei resoluções dos alunos do Ensino Médio e os métodos utilizados nas atividades de equação do 1º grau. Antes das atividades aplicadas na pesquisa, os alunos que já conseguiam achar a solução de equações utilizavam o método que haviam visto em aulas na escola, que é chamado por Tinoco (2015) por método de Desfazer, no qual utiliza a operação inversa. Esse fato merece destaque, pois em outras experiências notamos que os alunos decoram regras e neste caso utilizavam um método correto.

Mas após a realização da pesquisa, o método que os alunos mais utilizaram foi o de Esconder, quem não sabia nenhum passou a usá-lo, e quem já utilizava o de Desfazer, passou a utilizá-lo também, principalmente em questões que antes não conseguia, com as com fração, permanecendo da sua maneira nas demais.

Para os alunos que antes não conseguiam, o método de Desfazer era encarado com mais dificuldade. Acredito que pelo falo de possuírem dificuldades com as operações.

A reação ao conhecerem os métodos que não conheciam, foi interessante, e acho importante ressaltar, pois as falas deles eram: “Porque não aprendi isso antes?”. E acredito que seja uma reação positiva, afinal expressa o entendimento deles por meio dos novos métodos, e a vontade de já terem sido apresentados a eles desde o primeiro contato com equações.

Outras falas que significaram muito para mim foram: “Obrigada professora. Obrigada por essa pesquisa, e por não desistir de nós.”. Como dito, esses alunos se voluntariaram para participar da pesquisa, onde foi perguntado quem julgava ter muita dificuldade em Matemática e queria participar de uma pesquisa que os ajudaria. Eles nem sabiam de qual conteúdo iria se tratar, para não pesquisarem algo antes e alterar os resultados.

Esses alunos ao me verem do outro lado da tela, me dedicando a eles, pensam que a pessoa que está ali para ensinar, mas na verdade eu estava ali aprendendo muito mais que ensinando.

Para a realização desta pesquisa ocorreram muitos contratempos, já que seria feita toda presencialmente, em contato com os alunos, estando presente nas resoluções, com debates mais vivos das questões, mas a Pandemia impediu. O que no fim levou a essa pesquisa à distância, com esses alunos, e com essa demonstração deles de querer melhorar. E mesmo eles estando vivendo a mais de ano o ensino remoto, se disporem a participar de uma pesquisa online e realizar mais atividades. Para uma aprendizagem deveria ser adotado esse tipo de ação por mais tempo e mais trocas, mas tentei fazer o melhor com os recursos que tivemos.

Foi uma oportunidade de ver de perto como o autojulgamento pode atrapalhar o aprendizado, criando obstáculos que nem existem. Assim como ocorreu com eles, que achavam não serem capazes, por se considerarem com muita dificuldade em Matemática. Se consideravam piores e menos capazes, pelo menos nessa disciplina.

Essa visão deles mesmos era apenas um bloqueio, que precisava ser quebrado. E sem dúvidas existem vários outros para serem quebrados ainda. E mesmo que minhas palavras possam não ter amenizado a sensação deles, ao dizer-lhes que estavam apenas bloqueados, espero que tenham se sentido mais capazes, ao verem no fim da pesquisa, que estavam conseguindo realizar as atividades e que tinham capacidade para tal. Afinal, Coxford e Shulte (1994, p. 7) nos diz que “a álgebra muitas vezes é um ponto crítico na decisão tomada pelo aluno de continuar ou não estudando matemática. A qualidade do ensino dessa matéria pode influir decisivamente na escolha do aluno”.

REFERÊNCIAS

BAUMGART, John K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula álgebra**. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, XVI (2), 2007, p. 81-118.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

CURY, Helena Noronha; KONZEN, Beatriz. Classificação e análise de erros em álgebra. **Anais** IX EGEM - Encontro Gaúcho de Educação Matemática –Caxias do Sul: Ed. UCS, 2006, p. 1 - 9.

FERNANDES, Carlos F.. **Equações de 1º Grau** Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações de 1º grau. Relatório da Prática de Ensino Supervisionada. Universidade de Lisboa, 2011. Disponível no site: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5173/1/ulfpie039739_tm.pdf. Acesso em: 25/09/2020.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. DGIDC, Ministério da Educação, 2009.

REGIMENTO Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/. Acesso em:14/06/2021.

TINOCO, Lucia A. de A.. **Equações**: ler, escrever, resolver, utilizar.... Rio de Janeiro: Projeto Fundão IM-UFRJ, 2015

VALE, Maria Luísa de Souza. **O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática:** um estudo com alunos do 7º ano do ensino básico, 2010. Dissertação – Universidade de Lisboa, 2010.

VALE, Luísa; FERREIRA, Rosa Antónia; SANTOS, Leonor. O erro como ponte para a aprendizagem das equações: o caso de Maria. **Anais** do Encontro de Investigação em Educação Matemática Ensino e aprendizagem da álgebra, 2011, p. 1-19.

VELOSO, Débora S.; FERREIRA, Ana Cristina. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra. **Anais X Semana da Matemática e II Semana da Estatística**, 2010, Ouro Preto: Editora da UFOP, 2010. p.59-65. Disponível em: http://www.redumat.ufop.br/2011/C9.pdf. Acesso em: 10/09/2020.

APÊNDICE A - Questionário

Questionário

PROJETO DE DISSERTAÇÃO
Título: Análise da Aprendizagem de Equações do Primeiro Grau.
Pesquisadora: Jady Ogioni Coelho
Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

Nome (Nome e Sobrenome para não confundir entre os demais. Escrever em todos da mesma forma.) *

Sua resposta

Idade *

Sua resposta

A quanto tempo estuda nessa escola? *

- ◯ Menos de 1 ano
- ◯ 1 a 2 anos
- ◯ 2 a 3 anos
- ◯ 3 a 4 anos
- ◯ 4 anos ou mais

Qual nota você daria para a sua relação com a Matemática? *

- ◯ 0
- ◯ Entre 1 e 3
- ◯ Entre 4 e 6
- ◯ Entre 7 e 9
- ◯ 10

O que você acha que melhor representa a Matemática? (Escolha duas alternativas) *

- ☐ Conjuntos de números e operações
- ☐ Resolução de problemas
- ☐ Conjunto de letras e números
- ☐ Símbolos
- ☐ Figuras e formas

Já estudou equações anteriormente? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

Escreva com suas palavras o que é uma equação. Dê exemplos. *

Sua resposta

Marque quais opções abaixo para você é uma equação: *

- [ ] 2x = 8
- [ ] 4x + 3
- [ ] x/4 = 5
- [ ] O dobro de um número mais 5.
- [ ] A metade de 4 mais 5.
- [ ] O triplo de um número mais 2 é igual a 11.

APÊNDICE B – 1ª Atividade

Atividade 1

PROJETO DE DISSERTAÇÃO
Título: Análise da Aprendizagem de Equações do Primeiro Grau.
Pesquisadora: Jady Ogioni Coelho
Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

*Obrigatório

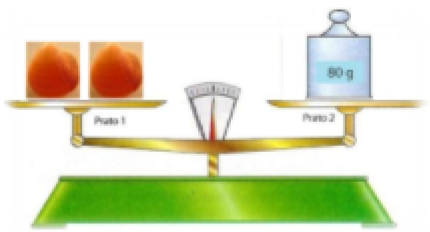
E-mail *

Seu e-mail

Nome (Nome e Sobrenome para não confundir entre os demais. Escrever em todos da mesma forma.) *

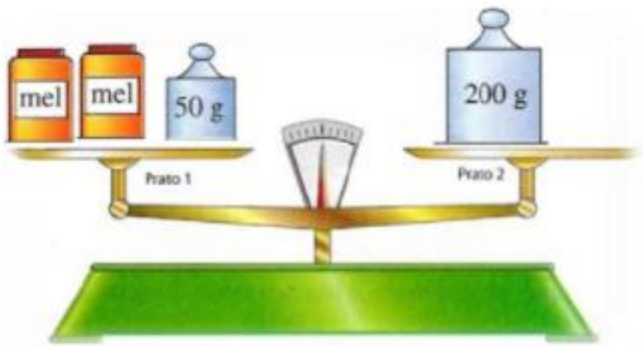
Sua resposta

1. Colocamos duas laranjas no prato esquerdo (prato 1) e 80g no prato direito (prato 2) da balança de modo que esta fique em equilíbrio. a) Quanto pesa cada laranja? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *



Sua resposta

2. Colocamos 2 frascos de mel e um peso de 50g no prato esquerdo da balança (prato 1) e um peso de 200 g no prato direito (prato 2). a) Quanto pesa cada frasco de mel? b) Escreva uma expressão matemática que represente a situação. *

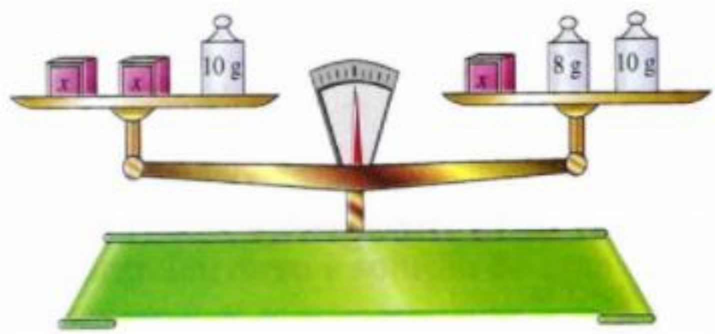


Sua resposta

3. Represente uma balança em equilíbrio que tem um saco de maçãs e um peso de 50g no prato esquerdo e no prato direito um peso de 130g. Como pode determinar o peso do saco de maçãs? Traduza em linguagem matemática a situação anterior. *

Sua resposta

4. Observe a figura. a) Como pode determinar o peso de cada cubo? b) Traduza em linguagem matemática a situação anterior. *



Sua resposta

5. Coloque 4 caixas de pastilhas num dos pratos da balança. No outro coloque 2 caixas de pastilhas e um peso de 80g. Traduza por uma expressão matemática a situação descrita. *

Sua resposta

APÊNDICE C – 2ª Atividade

Atividade 2

PROJETO DE DISSERTAÇÃO
Título: Análise da Aprendizagem de Equações do Primeiro Grau.
Pesquisadora: Jady Ogioni Coelho
Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

Nome (Nome e Sobrenome para não confundir entre os demais. Escrever em todos da mesma forma.) *

Sua resposta

Diga se as resoluções das equações abaixo estão corretas, se encontrar algum erro identifique e mostre como deveria ser.

*

a) $4x - 6 = 22$

$4x - 6 + 6 = 22 - 6$

$4x = 16$

$x = \frac{16}{4}$

$x = 4$

Sua resposta

*

b) $9 - x = 2x$

$9 - x + x = 2x + x$

$9 = 3x$

$\frac{9}{3} = x$

$3 = x$

Sua resposta

*

c) $8 + 4x = 6x - 4$

$8 + 4x - 4x = 6x - 4 - 4x$

$8 = 2x - 4$

$8 + 4 = 2x - 4 + 4$

$12 = 2x$

$12 - 2 = x$

$10 = x$

Sua resposta

APÊNDICE D – 3ª Atividade

Atividade 3

PROJETO DE DISSERTAÇÃO
Título: Análise da Aprendizagem de Equações do Primeiro Grau.
Pesquisadora: Jady Ogioni Coelho
Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

Nome (Nome e Sobrenome para não confundir entre os demais. Escrever em todos da mesma forma.) *

Sua resposta

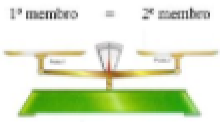
*

As expressões matemáticas que escreveu chamam-se equações e as "letras" chamam-se incógnitas.

Uma ____________ é uma igualdade entre duas expressões onde aparece pelo menos ________ _________(a incógnita).

Sua resposta

À expressão correspondente ao primeiro prato da balança chamamos 1.º membro da equação. À expressão relativa ao segundo prato da balança chamamos 2.º membro da equação.



Na equação, $2x = x - 18$
1º membro: $2x$
2º membro: $x - 18$
Termo do 1º membro: $2x$ (neste caso, só existe um termo)
Termos do 2º membro: x ; -18

Se colocar um peso de 120g no prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas de 40g terá de colocar no prato direito, para que este fique em equilíbrio? E se no prato esquerdo, além de 120g colocar mais 3 caixas de pastilhas, quantas caixas de pastilhas terá de colocar no prato direito para que a balança fique em equilíbrio? Explique o seu raciocínio. *

Sua resposta

Há uma balança em equilíbrio com um peso de 160g no prato esquerdo e 4 caixas de pastilhas de 40g no prato direito. Se duplicar o número de caixas de pastilhas do prato direito, quantos gramas tem que colocar no prato esquerdo para que a balança continue em equilíbrio? E se triplicar o peso do prato esquerdo da balança, quantas caixas de pastilhas tem que colocar no prato direito para que esta se mantenha em equilíbrio? Explique seu raciocínio. *

Sua resposta

APÊNDICE E – 4ª Atividade

Atividade 4

PROJETO DE DISSERTAÇÃO
Título: Análise da Aprendizagem de Equações do Primeiro Grau.
Pesquisadora: Jady Ogioni Coelho
Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

Nome (Nome e Sobrenome para não confundir entre os demais. Escrever em todos da mesma forma.) *

Sua resposta

1º Princípio de Equivalência

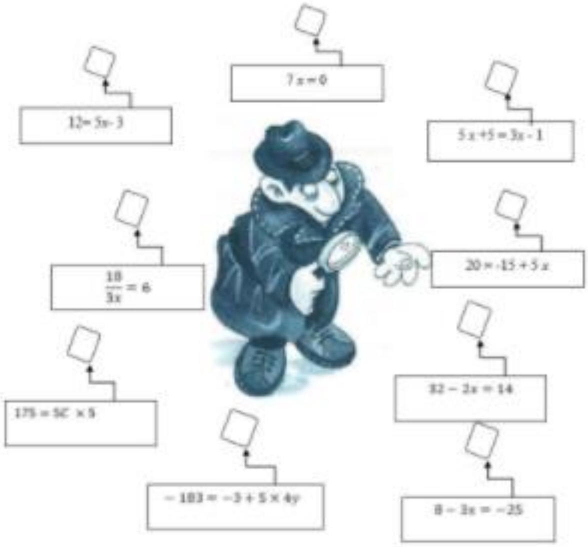
Quando somamos ou subtraímos o mesmo número a ambos os membros de uma equação ficamos com uma equação equivalente.

Deste princípio de equivalência surge a seguinte regra prática: Numa equação, podemos mudar um termo de um membro para outro trocando-lhe o sinal.

2º Princípio de Equivalência

Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número ficamos com uma equação equivalente.

O agente Brown 777 aguarda ansiosamente a resposta do agente Blue 444, sobre o modo como decorreu a operação ultra secreta, em que ambos estão envolvidos, para poder prosseguir a investigação. A resposta chegou, enfim, mas em forma de código. Resolva as equações e ajude o agente Brown 777 a decifrá-la. *



Código no micro filme

Sua resposta

Resolva as seguintes equações:

a) 13 - 4a = 21 *

Sua resposta

b) 15 = 7 + 4x *

Sua resposta

c) 30 - 5y = 10 *

Sua resposta

d) 15 = 25b - 5 *

Sua resposta

*

e) $\frac{x}{2} = 20$

Sua resposta

f) 5y + 5 = 3y – 1 *

Sua resposta

*

g) $9 = \frac{45}{x}$

Sua resposta

*

h) $40 = \frac{2x}{10}$

Sua resposta

i) $2y \times 3 = 18$ *

Sua resposta

APÊNDICE F – 5ª Atividade

Atividade 5

PROJETO DE DISSERTAÇÃO
Título: Análise da Aprendizagem de Equações do Primeiro Grau.
Pesquisadora: Jady Ogioni Coelho
Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

Nome (Nome e Sobrenome para não confundir entre os demais. Escrever em todos da mesma forma.) *

Sua resposta

1. Observando as balanças a baixo, que estão em equilíbrio, responda:

I. Que equação representa cada situação?

II. Quanto pesa cada pacote ou caixa?

*

Sua resposta

*

Sua resposta

*

Sua resposta

Qual o valor da incógnita das equações abaixo? (colocar o desenvolvimento, por favor)

a) $2x - 3 = 7$ *

Sua resposta

b) $25 = 3y + 1$ *

Sua resposta

c) $7x + 3 = 4x - 9$ *

Sua resposta

d) $12a - 5 = 7 + 10a$ *

Sua resposta

e) *

$$\frac{24}{3x} = 1$$

Sua resposta

f) *

$$\frac{2x + 1}{3} = 5$$

Sua resposta