UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O ESTUDO DE FRAÇÕES A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA CONCEITUAL – PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Sueli Cruz Pereira

Orientador: Dr. Etereldes Gonçalves Junior

Vitória - Espírito Santo
Dezembro de 2021

Sueli Cruz Pereira

O ESTUDO DE FRAÇÕES A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA CONCEITUAL – PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Etereldes Gonçalves Junior.

Vitória - Espírito Santo
Dezembro de 2021

Sueli Cruz Pereira

O ESTUDO DE FRAÇÕES A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA CONCEITUAL – PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática, aprovada em 20 de dezembro de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Junior (Orientador)
UFES

Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro
UFES

Prof. Dr. Paulo Roberto Prezotti Filho
IFES

Ao Rei eterno, o único Deus Verdadeiro, imortal e invisível, o Deus Vivo, Yahweh Triúno, ao Pai, ao Senhor Jesus Cristo, ao sempre bendito Espírito Santo, que é, que era e que virá - a ele sejam dadas toda a honra, toda a glória, todo o louvor e adoração para todo o sempre. Amém. (I Timóteo 1.17)

Agradecimentos

Gratidão eterna ao que me dá o fôlego e a consciência da vida a cada momento (Atos 3.15; 17.28), fonte de toda a verdadeira sabedoria e conhecimento (Romanos 11.33-36).

Muito obrigada a todos que estiveram comigo nesta caminhada, incentivando-me e torcendo por mim, principalmente nos momentos mais improváveis. Obrigada pela companhia, obrigada pelas palavras, obrigada pelas ações, obrigada pelas orações, obrigada pelas pequenas e pelas grandes coisas que, com certeza, fazem parte da realização deste sonho.

Sendo assim, quero agradecer ao meu pai, minha mãe (In Memorian) e meus queridos irmãos, em especial minha duplamente irmã Selminha, que dedicou muitas horas lendo e criticando o texto desta pesquisa, além de ouvir os meus desabafos.

Muito obrigada a toda a grande família do Deus Vivo (Efésios 3.15), em especial, Rute e Rubemar, eu não teria chegado até aqui sem vocês.

Sou grata a toda a comunidade escolar, desde meu primeiro momento no PROFMAT:

Companheiros de Rio Lampê, ainda em 2017, Angelita, Noemia e companhia.

Minha confidente matemática: professora Vanez, a quem muito admiro e quero bem.

Equipe da Escola Estadual Nossa Senhora da Saúde, representada muitíssimo bem por nossa diretora Keila Piol; obrigada por tudo, pelos livros, pelo espaço aberto para a pesquisa com os alunos, pelo apoio.

Rede Municipal de Aracruz, em especial a equipe da EMEF Ezequiel Fraga Rocha. Obrigada, Penha Flores, exemplo de dedicação e entusiasmo tanto como professora de matemática quanto como diretora, personifica a escola como ninguém; também sou grata pelo espaço e apoio para a pesquisa com nossos alunos.

Aos companheiros de caminhada no PROFMAT não sei o que dizer. Ao iniciar sabia que não seria fácil, no entanto, não fazia a mínima ideia das inúmeras vezes que pensaria em desistir, ou de que o tempo do curso não seria suficiente para que eu o concluísse. Não fosse por vocês, desde o início, não haveria este final.

Aline, obrigada por ter adotado a todos que precisavam de ajuda, mesmo vindo de tão longe, dividiu seu pouco tempo para multiplicar o seu conhecimento matemático e a sua sabedoria de vida. Obrigada porque além de me ensinar matemática e abrir literalmente a porta da sua casa para mim, você sempre me incentivou, junto com as amadas Clariana, Jady e Talita. Muitíssimo obrigada por tão graciosamente me receberem em suas casas, em suas vidas e me apoiarem não poucas vezes. Clariana, obrigada por me possibilitar acordar mais tarde, ao lado da UFES, durante o curso de verão, esta acolhida foi maravilhosa. Quando eu achava que não conseguiria, não poucas vezes, vocês sempre me animavam, e agora, as lágrimas continuam marejando meus olhos, mas são de satisfação, um sentimento de que valeu a pena.

Obrigada aos demais colegas que sempre compartilharam o material prontamente, as dicas, as caronas, as angústias, obrigada pelas palavras de incentivo, por dedicarem tempo para ensinar, abrirem o caminho, pois estavam à frente. Gratidão: Jarde, Michele, Felipe, Jheimys e todos os demais companheiros de turma. Muito obrigada, Mariana, você tem me ajudado muitíssimo.

Gratidão, Cybelle Lara, para quem não tenho palavras, uma pernambucana muito querida, que ama a matemática e sempre abre portas para novas possibilidades de conhecimento matemático na minha vida. Obrigada pela parceria, obrigada pelos conselhos, obrigada pelos ouvidos atentos. Obrigada por me socorrer. E obrigada a todos os colegas do PROFMAT turma 2018, com os quais estudei para o ENQ: obrigada, Vinícius, ajudou-me muitíssimo.

Finalmente, obrigada a todos os professores que fazem parte do PROFMAT, que nos guiaram por este caminho, dando-nos o suporte para prosseguir. Em especial, agradeço ao professor Florêncio por sua dupla paixão: lecionar e a arte de fazer matemática; obrigada pelos sábados preparatórios para o ENQ. Em toda esta jornada aprendi o suficiente para saber que sei muito mais agora, mas que ainda existe muito mais por conhecer do maravilhoso mundo da matemática e de ensinar matemática.

Gratidão ao professor Etereldes, que tem me orientado, paciente e compreensivamente, diante dos desafios, apontado um caminho e se colocado à disposição sempre.

"Só termina quando acaba".
(Yogi Berra)

Resumo

O ensino e a aprendizagem das frações apresentam-se como um dos maiores desafios do professor de matemática na educação básica. Segundo pesquisadores como Walle (2009) e Boaler (2018), além de ser uma temática muito importante, é essencial que o assunto seja tratado de uma perspectiva conceitual. Os estudantes precisam construir o conceito de fração, num processo lento e gradativo, em que o uso de algoritmos resulte das descobertas dos alunos ao manipular os conceitos trabalhados, com a mediação devida do professor. Os problemas na aprendizagem de frações refletem ao longo da vida acadêmica dos estudantes, trazendo grandes prejuízos para a formação matemática do indivíduo. Tudo isso evidencia a necessidade de as frações serem estudadas de modo consistente, com base nas ideias fundamentais, estimulando o desenvolvimento do senso numérico, principalmente a partir do uso das estimativas e comparações, estratégias que auxiliam a percepção de fração como número e sua aplicação em diversos contextos. Quando as frações são compreendidas, passam a fazer sentido e podem ser manipuladas com segurança, como uma ferramenta eficaz da linguagem matemática, sem que a pessoa se torne refém de regras decoradas que não se conectam com a realidade. Justamente por isso, a partir do tema pesquisado, este trabalho propõe uma sequência didática para o estudo das frações numa abordagem conceitual, baseada na resolução de problemas, com propostas variadas, utilizando jogos, desafios e as novas tecnologias, por exemplo. Diante dos desafios do próprio tema e do contexto da Pandemia atual, essa sequência didática será bastante proveitosa, principalmente para professores que trabalham com o 7º ano do Ensino Fundamental, pois, nesta série, o tema seria aprofundado, após amplo trabalho nos anos anteriores, conforme prevê a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e, no entanto, observa-se, cada vez mais, que a maioria dos alunos chega a este nível com pouca ou nenhuma familiaridade com a ideia de fração.

Palavras-chave: Fração, conceito, estimativa, comparação, senso numérico, sequência didática, resolução de problemas, pandemia, novas tecnologias.

Abstract

The teaching and learning of fractions are presented as one of the greatest challenges for the mathematics teacher in primary and secondary schools. According to researchers such as Walle (2009) and Boaler (2018), in addition of being a very important topic, it is essential the subject is treated from a conceptual perspective. Students need to build the concept of fraction, slowly and gradually, then the use of algorithms will result from the students' discoveries while manipulating the worked concepts, with due mediation from the teacher. Unfortunately, the problems in learning fractions have been reflected throughout the academic life of students, bringing great harm to the individual's mathematical education. Overall, it highlights the need for fractions to be studied consistently, based on fundamental ideas, encouraging the development of the numerical sense mainly from the use of estimates and comparisons, strategies that help the perception of fraction as a number and its application in different contexts. When fractions are understood, they make sense and can be safely manipulated, as an effective tool of mathematical language, without the person becoming hostage to memorize rules without connecting to reality. Precisely for this reason, based on the research paper topic, this paper proposes a didactic sequence for the study of fractions in a conceptual approach, based on problem solving, with varied proposals, using games, challenges and new technologies, for example. Given the challenges of the fractions learning itself and the context of the current Pandemic, this didactic sequence will be very fruitful, especially for teachers who work with grade 7 students, as in this grade the fractions are supposed to be studied with more depth, after extensive study in previous years, as foreseen the Common National Curriculum Base (BNCC), however, it has been observed most students reach this grade with little or no familiarity about fractions.

Keywords: Fraction, concept, estimation, comparison, number sense, didactic sequence, problem solving, pandemic, new technologies

Lista de Figuras

2.1 Osso Ishango 24

2.2 Papiro de Rhind 26

2.3 Notação egípcia para frações 27

2.4 Forma fracionária de $1,5$ 31

2.5 Representações da fração $\frac{1}{4}$ 32

2.6 Representação da fração como razão 32

2.7 Divisão de maçãs em 3 partes 33

2.8 Divisão de laranjas 34

2.9 Fração mista 36

2.10 Frações equivalentes 37

2.11 Comparação de frações com o mesmo numerador 39

2.12 Comparação de figuras com o mesmo denominador 39

2.13 Adição de frações com denominadores iguais 41

2.14 Subtração de frações com denominadores iguais 42

2.15 Adição de frações com denominadores diferentes 42

2.16 Multiplicação de frações 43

2.17 Divisão de fração por fração associada à ideia de "medida" 44

3.1 Zona híbrida do ensino 65

3.2 Resultados da pesquisa em comparação com o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) de 2019 e 2017, para Língua Portuguesa e Matemática 69

5.1 Avaliação Diagnóstica - Questão 1 85

5.2 Avaliação Diagnóstica - Questão 2 86

5.3 Avaliação Diagnóstica - Questão 3 87

5.4 Avaliação Diagnóstica - Questão 4 88

5.5 Avaliação Diagnóstica - Questão 5 88

5.6 Avaliação Diagnóstica - Questão 6 90

5.7 Avaliação Diagnóstica - Questão 7 91

5.8 Avaliação Diagnóstica - Questão 8 92
5.9 Resolução Aluno 9 96
5.10 Resolução Aluno 1 97
5.11 Resolução Aluno 6 98
5.12 Resolução Aluno 1 99
5.13 Resolução Aluno 5 99
5.14 Modelo das peças do dominó 103
5.15 Dominó virtual Coquinhos 104
5.16 Disco representando a fração $\frac{0}{1}$ 106
5.17 Discos representando a fração $\frac{72}{24}$ 106
5.18 Adivinhar a fração representada pela parte vermelha da barra 108
5.19 Estimar a fração da barra de chocolate 109
5.20 Comparando frações com linhas 111
5.21 Comparando frações com círculos 112
5.22 Representação das frações equivalentes $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ 113
5.23 Representação da fração $\frac{6}{8}$ e sua forma simplificada 114
5.24 Como é possível contar as partes fracionárias sem visualizar todas? 115
5.25 Tabela com tiras de frações unitárias comparadas ao inteiro 117
5.26 Modelo das cartas para o baralho do jogo 117
5.27 Representando frações no projeto PhET Interactive Simulations 119
5.28 Aplicativo Representar por Frações 120
5.29 Associe Frações 121
5.30 Comparando números racionais representados por frações 122
5.31 Qual fração é a menor? 124
5.32 Obras de Pintura - I 125
5.33 Obras de Pintura - II 126
5.34 Obras de Pintura - III 126
5.35 Obras de Pintura - IV 127
5.36 Malha quadriculada quadrada 128
5.37 Investigando a possibilidade de divisão por zero 134
5.38 Foto dos alunos durante as simulações 136
5.39 Peças disponíveis para representar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ no jogo do PhET e a solução encontrada 137
5.40 Resposta da aluna M 138
5.41 Resposta do aluno G 139
5.42 Resposta da aluna K 139

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

MEC - Ministério da Educação

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SEDU-ES - Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo

Sumário

1 Introdução **15**

1.1 Justificativa . . . 15

1.2 Objetivos . . . 20

1.3 Organização da pesquisa . . . 21

2 As Frações **22**

2.1 Um pouco da história das frações . . . 22

2.2 O conceito de fração e seus significados . . . 29

2.2.1 Definição de fração . . . 29

2.2.2 As diversas interpretações de fração . . . 31

2.2.2.1 Relação parte-todo . . . 31

2.2.2.2 Razão entre duas partes de um mesmo tipo . . . 32

2.2.2.3 Operador multiplicativo (fração de uma quantidade) . . . 33

2.2.2.4 Quociente entre dois números inteiros . . . 33

2.2.3 Tópicos do ensino de fração no livro didático . . . 34

2.2.3.1 Nomeando frações . . . 34

2.2.3.2 Classificação de frações . . . 35

2.2.3.3 Simplificação de fração . . . 37

2.2.3.4 Comparação entre frações . . . 38

2.2.3.5 Adição e subtração de frações . . . 41

2.2.3.6 Multiplicação de frações . . . 43

2.2.3.7 Divisão de frações . . . 44

2.3 O estudo de frações de acordo com documentos oficiais da educação . . . 45

2.3.1 PCN . . . 45

2.3.2 BNCC . . . 47

2.3.3 As dificuldades na aprendizagem de fração a partir dos documentos oficiais . . . 51

2.4 Relação entre numerador e denominador: uma ideia fundamental na aprendizagem de frações . . . 54

2.4.1 O desenvolvimento do conceito de fração e o senso numérico 56
2.4.1.1 Importância da estimativa para comparação e compreensão das frações 57
2.4.2 “Conceito X Regras” – uma inversão na ordem 59

3 O desafio da aprendizagem em um contexto de Pandemia 62
3.1 O Ensino Híbrido 64
3.1.1 Definição de ensino híbrido 64
3.1.2 A realidade do Ensino Híbrido na Escola Pública de Ensino Fundamental 67

4 Metodologias Alternativas para o Estudo de Frações 72
4.1 Metodologia de resolução de problemas 72
4.2 Jogos como recursos facilitadores da aprendizagem matemática 76
4.3 Ferramentas tecnológicas 77

5 A Pesquisa de Campo e a Proposta de Sequência Didática 82
5.1 A Diagnose 82
5.1.1 Caracterização da pesquisa 82
5.1.2 Caracterização dos sujeitos 83
5.1.3 Metodologia 84
5.1.4 Avaliação diagnóstica 84
5.1.4.1 Sobre cada questão proposta 85
5.1.4.2 Análise dos resultados da avaliação diagnóstica 92
5.2 A Sequência Didática 100
5.2.1 Dominó de frações 102
5.2.2 Frações em applets do Geogebra 105
5.2.2.1 Representação e estimativa de frações 105
5.2.2.2 Comparação de frações 109
5.2.3 Jogo papa todas de frações 115
5.2.4 Frações em sites educativos 118
5.2.5 Associe frações 121
5.2.6 Jogo “Qual fração é a menor?” 123
5.2.7 Possibilidades para exploração dos conceitos trabalhados 124
5.2.7.1 Frações em Obras de Arte 124
5.2.7.2 A partilha dos 35 camelos 128
5.3 Atividades da sequência didática e a prática pedagógica em 2021 131

6 Considerações Finais 140

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa

A Matemática é tão abrangente e presente no cotidiano das mais diversas pessoas e nas mais variadas circunstâncias que é reconhecida como uma maneira de se perceber o mundo e nele atuar (BRASIL, 1998, p. 24). Os conhecimentos matemáticos são necessários para a vida em sociedade, constituem uma linguagem essencial à convivência no mundo, considerando-se os distintos contextos, pessoas e lugares envolvidos (BRASIL, 2018, p. 266). De modo geral, ainda que não se saiba definir o que é ou como fazer matemática, a sociedade compreende sua importância e a relaciona a situações triviais como contar cédulas de dinheiro, manter a proporção em uma receita culinária ou observar as horas marcadas em um relógio, por exemplo. Por outro lado, as pessoas também associam os avanços tecnológicos e os de outras ciências ao conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p. 24).

É comum ouvir-se a pergunta: "Quem inventou a matemática?", mas ao tentar respondê-la, percebe-se que a matemática pode ser vista mais como um conjunto de respostas ou ainda uma linguagem para compreender e atuar no mundo, pois "o mundo está cheio de padrões e de ordem" (WALLE, 2009, p. 32). Assim, a matemática não foi inventada e ela não criou a ordem e os padrões na natureza. A matemática percebe esta ordem, a traduz de modo significativo para as necessidades e desejos do homem e a utiliza de diversos modos, conferindo melhor qualidade de vida e maior conhecimento à sociedade. Sendo assim, observar os campos de atuação da matemática é uma maneira de constatar sua importância.

Uma vez que a matemática lida com padrões e ordem, o que dizer sobre a relevância da matemática para a vida humana, ao identificar ordem e padrões: na natureza, desde o que é micro (invisível a olho nu) ao que é macro (a vastidão do Universo), passando pela fauna, flora, pela arte, edificações, pelo comércio, e em especial a complexidade do corpo humano? Desta forma, a matemática pode ser vista como uma ferramenta multifuncional que é usada em várias áreas da Ciência e da vida de modo geral (WALLE, 2009, p. 32).

Por outro lado, é importante perceber que a matemática busca respostas a questionamentos gerados a partir da sua própria abstração, sem a preocupação de uma aplicação prática, mas que se harmoniza firmemente sobre seus fundamentos devidamente interligados e demonstrados, revelando sua beleza própria: fazer matemática para servir à matemática. Sendo assim, além de servir ao cotidiano dos cidadãos e à produção de centros de pesquisas e universidades, a matemática tem seu valor intrínseco, produzindo conhecimento para atender seus questionamentos internos (BRASIL, 1998, p. 24).

Outro ponto de destaque da matemática é seu caráter de jogo intelectual, provocando a necessidade de escolhas, estratégia, proatividade, criatividade, facilitando e estimulando o desenvolvimento do raciocínio lógico, a investigação, o que pode significar uma combinação enriquecedora composta de progresso intelectual e prazer, haja vista o engajamento por conta do caráter de jogo, em que a pessoa se envolve espontaneamente e aceita o desafio proposto com satisfação (BRASIL, 2018, p. 266). Enfim, a matemática possui um valor incalculável para a humanidade e seus conhecimentos precisam ser disseminados para o avanço da sociedade.

Apesar de sua reconhecida importância, as dificuldades na aprendizagem da matemática têm sido amplamente registradas em levantamentos estatísticos ao longo de décadas e confirmadas no cotidiano escolar. Essa dificuldade de aprendizagem é uma temática preocupante em diversos países, especialmente no Brasil que está entre os países com piores índices relacionados à proficiência em matemática (INEP, 2019).

Indo além das estatísticas, observa-se que a matemática é percebida pela maioria das pessoas como fundamental, mas, ao mesmo tempo, extremamente difícil por envolver muita abstração e simbolismo. “Possui, por tudo isso, uma imagem forte, suscitando medos e admirações” (PONTE, 1992, p. 1). A concepção de matemática para alguns está associada ao seu aspecto mecânico (PONTE, 1992, p. 1), para os quais a matemática diz respeito a um amontoado de regras rígidas e desconexas, que funcionam de forma independente, produzindo resultados aleatórios (WALLE, 2009, p. 31). Nesse tipo de concepção, resta ao aluno esforçar-se para decorar mecanismos e aprender como usá-los, em geral, por repetição. No entanto, fazer matemática vai muito além disso (WALLE, 2009, p. 32).

Em contrapartida, esses indicadores (estatísticos, culturais e factuais) fornecem pistas importantes para nortear a discussão acerca da necessidade da aprendizagem efetiva. É imprescindível que a matemática deixe de ser considerada como uma ciência seletiva, inalcançável para algumas pessoas e, igualmente, deixe de ser desprezada devido ao estigma de ser rígida, fria, sem interações e discussões, o que corrobora com um dos objetivos da Educação Básica que é fazer com que o aluno exerça plenamente sua cidadania, produzindo conhecimentos, resolvendo problemas de forma crítica e significativa na vida pessoal ou coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

O Ensino Fundamental é a etapa de maior duração da Educação Básica (BRASIL, 2018, p. 57) e, como o próprio nome enuncia, é a base da qual depende a formação matemática do estudante, na qual este deve investir o tempo necessário na construção de conhecimento, valorizando as ideias principais.

Os documentos oficiais da Educação no Brasil destacam que as ideias matemáticas estão conectadas e, portanto, a aprendizagem matemática depende de toda a trajetória estudantil. As estatísticas registradas nestes documentos apontam uma redução no desempenho dos alunos a cada ano de escolaridade, além de indicar que os maiores obstáculos se apresentam nas questões relativas à aplicação de ideias e à resolução de problemas (BRASIL, 1998, p. 24). Grande parte dos alunos termina o Ensino Fundamental sem ter desenvolvido o letramento matemático (BRASIL, 2018, p. 266), sendo que o déficit da aprendizagem em séries anteriores constitui-se em grande empecilho para a construção de conhecimentos propostos nas séries posteriores de ensino.

Tratando-se da etapa do Ensino Fundamental na formação do aluno, uma área da matemática se destaca: números e operações. É ao longo do Ensino Fundamental que esses conceitos são construídos e compreendidos pelos alunos, por meio de um processo gradativo no qual os números surgem como ferramenta eficaz para a resolução de determinadas situações (BRASIL, 1998, p. 50).

Este ramo da matemática é o mais antigo e elementar na história da humanidade (LORENSATTI, 2012, p. 2). Foi a partir do desenvolvimento histórico e cultural da ideia de número e as problemáticas associadas a ele, que foi edificada a base da matemática, hoje conhecida e sistematizada como Aritmética. No entanto, mesmo sendo elementar, o conceito de número, as características do sistema de numeração decimal e as operações aritméticas possuem uma complexidade que vai muito além da identificação de símbolos e operacionalização de algoritmos. Não por acaso, a história dos números está entrelaçada à história da própria humanidade, passando por um longo processo de formação em todas as civilizações, de modo que os números são considerados uma das grandes invenções da humanidade (IFRAH, 1985, p. 09).

Na prática, constata-se que a atenção dada ao estudo de números e operações no Ensino Fundamental está voltada para a manipulação de dados e execução de exercícios, confundindo o sucesso na aplicação de métodos e obtenção de respostas corretas com a real compreensão do sentido dos conteúdos trabalhados. Por vezes, seguem-se modelos sem uma reflexão acerca das ideias que estão por trás. Contudo, deixar de trabalhar a matemática de modo conceitual desde o Ensino Fundamental, além de ser desperdício de um tempo precioso na formação desses estudantes, resulta normalmente em bloqueios para o desenvolvimento do pensamento matemático pelo resto da vida acadêmica (WALLE, 2009, p. 144). Muitos alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades para entender o processo de fazer conjecturas, ampliando um pensamento até a demonstração de um teorema qualquer. Fazer matemática para eles sempre se tratou da memorização de métodos, nada tendo a ver com reflexões profundas acerca de ideias conectadas (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 3).

Falando sobre as dificuldades dos estudantes na aprendizagem de números e operações, as frações têm um lugar de destaque, sendo um dos temas mais desafiadores para o ensino e a aprendizagem na matemática da educação básica (RIPOLL et al., 2017, p. iii). Apesar da ideia de fração ser trabalhada praticamente ao longo de todo o Ensino Fundamental, uma grande parte dos estudantes enfrenta problemas em sua compreensão por não conhecerem aspectos essenciais da ideia de número racional e isso dificulta a assimilação de outros conceitos matemáticos. Percebe-se então que o sucesso da aprendizagem não se trata apenas de quanto tempo se dedica à abordagem de um conteúdo, mas também de como isso é feito (CAMPOS e RODRIGUES, 2007, p. 70).

Um dos grandes obstáculos na compreensão de fração é a linguagem utilizada. É possível perceber que, por vezes, o aluno compreende o conceito trabalhado, mas não consegue manipular corretamente os símbolos que expressam tais ideias. Por outro lado, é possível que manipule corretamente a linguagem, mas, de modo automático, sem entender o seu significado (BRASIL, 2004, p. 7). Uma razão para essas dificuldades provavelmente deriva do seguinte fato: ao estudar os números racionais presume-se uma ruptura do raciocínio aplicado às concepções de números naturais (BRASIL, 1998, p. 101). Quando o estudante não assimila o conceito de número racional e tenta aplicar arbitrariamente algoritmos válidos para os números naturais ao trabalhar com frações, depara-se com o fracasso e acaba evitando o tema, favorecendo a perpetuação das dificuldades com a temática.

Como as frações são base para outros conceitos matemáticos, como proporções, equações e cálculo algébrico, sua incompreensão pode comprometer o desenvolvimento matemático do aluno (BRASIL, 1998, p. 103).

Portanto, é importante olhar para a sala de aula, repensar práticas, combinar estratégias e investir para que essas percepções sejam efetivas, tornem-se realidade nas vivências da rotina escolar, promovendo a aprendizagem significativa. Contudo, somada aos desafios anteriormente descritos, há uma situação totalmente nova, desafiadora e urgente: com a Pandemia covid-19, o ensino híbrido que é uma modalidade bastante incipiente no Brasil, normalmente restrita a alguns segmentos do Ensino Técnico e Superior, é a alternativa para as Escolas de Educação Básica funcionarem respeitando as medidas sanitárias. Desta forma, apesar do despreparo dos profissionais para esta modalidade de ensino, a falta de estrutura das instituições escolares e as dificuldades (econômicas e sociais) dos próprios alunos e suas famílias nesse processo, o ensino híbrido pode fazer parte da nova realidade escolar.

Restringindo as questões ao debate pedagógico, no qual o objetivo da educação é garantir ao estudante condições de aprendizagem efetiva, cabe à comunidade escolar abrir-se para esta nova realidade, em cooperação, somando esforços para promover uma educação de qualidade mesmo diante de circunstâncias extremamente desfavoráveis. Nesse quadro, compete ao professor uma das maiores parcelas de contribuição, enquanto mediador do processo de ensino e aprendizagem (BULGRAEN, 2010, p. 31). Por mais que todos os agentes em questão estejam engajados em prol do sucesso escolar, é o professor a ponte que garante a operacionalização das ações pedagógicas, comunicando-se diretamente com o estudante. Assim, as escolhas e estratégias metodológicas do educador compõem uma temática que merece atenção especial, uma vez que a maneira como os conceitos são apresentados ao aluno constitui-se fator decisivo para a promoção da aprendizagem efetiva.

Desta forma, levando-se em consideração o contexto provocado pela pandemia e diante da relevância do estudo de fração para o conhecimento matemático do aluno, tendo em vista os impactos da formação escolar na vida em sociedade e observando-se as sérias dificuldades de aprendizagem quanto à compreensão dos números racionais, considerou-se investigar mais detalhadamente o conceito de fração, com um olhar voltado para a sala de aula destes dias: Como tem sido ensinado o conceito de fração? Quais ideias os alunos apresentam nos anos finais do Ensino Fundamental sobre este conceito? Quais são as vantagens de uma abordagem conceitual de fração, tanto para introduzir quanto para retomar este conteúdo? Quais metodologias podem ser ferramentas eficazes para esse estudo, contemplando também as dificuldades oriundas da Pandemia? Desse modo, o tema da presente pesquisa surgiu de demandas vividas em sala de aula ao longo de anos, inquietações e questionamentos acerca do saber e do "saber fazer" (BRASIL, 2018, p. 13) que implica na construção de estratégias e procedimentos, de modo significativo, compreendendo as ideias envolvidas (BRASIL, 1998, p. 50).

Esta pesquisa destina-se, especialmente, aos professores de matemática que trabalham com os anos finais do Ensino Fundamental, pois procura investigar o entendimento que alunos de 7º ano possuem sobre fração, a partir de uma pesquisa qualitativa realizada em escolas públicas do Espírito Santo, no período da Pandemia covid-19. A partir disso, será feita uma análise dos dados obtidos, bem como do que preconizam os documentos oficiais quanto aos objetivos de aprendizagem de fração nestas séries, tendo como ênfase a importância de uma abordagem conceitual para que ocorra uma aprendizagem significativa (SOARES, 2009, p. 53).

Finalmente, a partir dessa análise, será proposta uma sequência didática como ferramenta para auxiliar o professor tanto no enfrentamento das dificuldades de aprendizagem com fração, quanto com a introdução e/ou retomada desta temática em sala de aula, de modo acessível, mesmo durante a realidade da Pandemia e situações afins. Assim, as atividades propostas foram elaboradas pensando na necessidade de flexibilização do currículo, devido ao déficit de aprendizagem e também às mudanças abruptas que podem ocorrer durante o período planejado para implementar determinada prática didática. Com isso, a ideia é promover o protagonismo do aluno, conferindo maior autonomia, lançando mão de metodologias ativas (BACICH, TANZI Neto, TREVISANI, 2015, p. 82), considerando os diversos contextos. Portanto, ainda que a diagnose seja com alunos do 7º ano, o trabalho pode ser desenvolvido com diferentes séries de escolaridade, uma vez que o foco da sequência didática está nos conceitos e não nas séries. Logo, a proposta pode ser utilizada onde fizer sentido para o público alvo.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é identificar elementos que justifiquem a dificuldade dos estudantes, dos anos finais do Ensino Fundamental, no estudo de frações e propor uma sequência didática como ferramenta para auxiliar o professor no trabalho com frações no 7º ano do Ensino Fundamental, tendo em vista o contexto agravante da Pandemia e seus desdobramentos no ambiente escolar.

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Conceituar fração e seus significados;
- Analisar o estudo de frações, no Ensino Fundamental, de acordo com documentos oficiais: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN);
- Examinar o desempenho de alunos, dos anos finais do Ensino Fundamental, em questões que envolvam frações, analisando a importância do ensino a partir da construção dos conceitos, com a utilização de metodologias alternativas, ao invés de priorizar a apresentação e memorização de algoritmos e regras;
- Propor uma sequência didática sobre frações, para os anos finais do Ensino Fundamental, enfatizando a relação entre numerador e denominador como sendo a ideia mais importante no estudo de fração, levando em consideração as mudanças obrigatórias e abruptas na Educação a partir da Pandemia de Covid-19.

1.3 Organização da pesquisa

Esta pesquisa está dividida em seis capítulos. No primeiro capítulo é apresentada uma introdução do tema com a justificativa para sua escrita, a motivação, o objetivo geral, os objetivos específicos e a forma como o trabalho está estruturado.

O segundo capítulo traz o contexto histórico do surgimento das frações, sua definição e interpretações, além de uma análise do tema a partir dos documentos oficiais e uma discussão quanto à importância da abordagem das ideias centrais da fração na sala de aula.

No terceiro capítulo é exposto o desafio da aprendizagem num contexto de Pandemia: fragilidades e possibilidades para o ensino, ou seja, apresenta-se as dificuldades enfrentadas com as mudanças repentinas e o despreparo da comunidade escolar, bem como formas alternativas e adaptações sugeridas, a partir da definição de Ensino Híbrido.

O quarto capítulo enumera e discute a importância de metodologias alternativas para o ensino de frações, levando em consideração as problemáticas do ensino e aprendizagem de frações, agravadas pelo contexto da Pandemia. As metodologias apresentadas são: a resolução de problemas, os jogos, e as ferramentas tecnológicas.

O quinto capítulo é dedicado à apresentação de pesquisa qualitativa realizada para diagnosticar dificuldades no ensino e aprendizagem de frações, no 7º ano do Ensino Fundamental. Tomando como base esta análise, apoiada pelos referenciais teóricos, sugere-se uma sequência didática para auxiliar o trabalho do professor.

O último capítulo traz a conclusão deste trabalho, com as considerações finais, ressaltando aspectos mais relevantes da pesquisa e sugestões para a continuação do projeto.

Capítulo 2

As Frações

Neste capítulo será apresentado o conceito de fração a partir de diferentes perspectivas. Inicia-se com uma investigação sobre o surgimento histórico da fração e a importância da compreensão desse processo de formação para o entendimento das ideias envolvidas nessa temática, observando a natureza prática das frações para a solução de problemas do cotidiano ao longo da História da humanidade. A partir desse conhecimento, o assunto será explorado de acordo com o que preconizam os documentos oficiais da Educação no Brasil, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no que se refere ao sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental quanto às expectativas de aprendizagem de fração e as principais problemáticas encontradas.

Finalmente, a relação entre numerador e denominador é apresentada como ideia fundamental na aprendizagem de fração, priorizando uma abordagem conceitual em vez de trabalhar frações privilegiando os procedimentos e a memorização de algoritmos. É feita uma reflexão quanto à importância do desenvolvimento do senso numérico para a formação matemática do aluno.

2.1 Um pouco da história das frações

A história da matemática é uma abordagem fundamental para a formação do aluno, cuja relevância é reforçada por uma das competências específicas de matemática da BNCC para o Ensino Fundamental que trata da importância do estudante reconhecer a matemática como ciência humana, decorrente das "necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos" (BRASIL, 2018, p. 267). Ou seja, a história da matemática, vista desse prisma, é um "instrumento de resgate da própria identidade cultural" (BRASIL, 1998, p. 42). Sob essa perspectiva serão tratados, a seguir, alguns tópicos da vasta história dessa ciência.

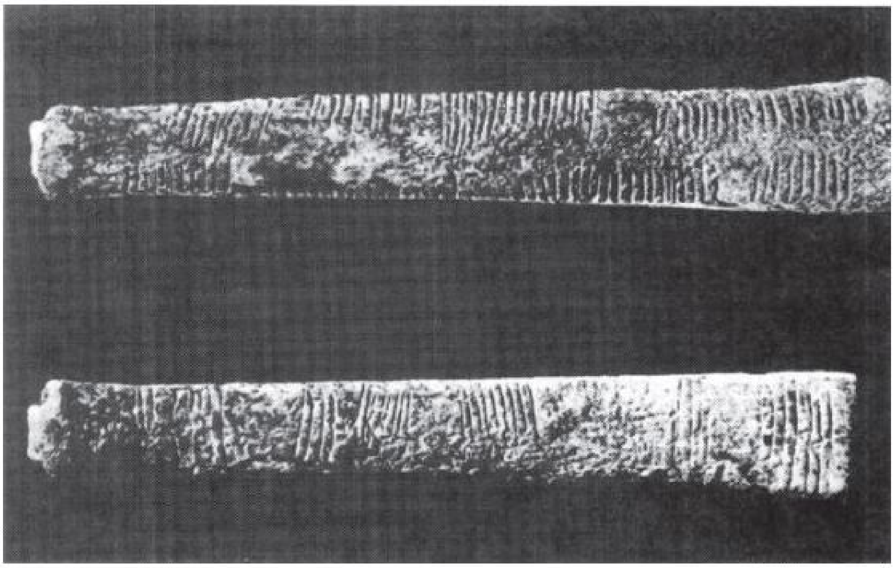
A matemática está tão arraigada à vida humana que, para Platão, ela sempre existiu, mas apenas estava aguardando sua descoberta (EVES, 2011, p. 25). O fato é que, os padrões de que se ocupa a matemática realmente já existiam na natureza, no entanto, o homem não havia desenvolvido uma ciência para reconhecer, classificar e explorar esses padrões. Da observação dos padrões até sua sistematização há uma longa e diversificada história, pois, o desenvolvimento da matemática não é linear, tampouco uma conquista restrita a um único povo ou período da humanidade.

As ideias matemáticas podem ter coberto milhares de milênios, mas foi somente nesses seis últimos que o homem registrou seus pensamentos em forma escrita. Assim, para obter dados sobre a Pré-história, depende-se de entendimentos baseados nos poucos artefatos que restaram, de comprovação provida pela antropologia moderna, e de extrapolação referente aos acontecimentos pregressos, fazendo-se conjecturas a partir dos documentos que subsistiram (BOYER, 2012, p. 26). E assim, pode-se inferir quanto à motivação dos homens da Idade da Pedra para contar, medir e desenhar. Pois é evidente que as origens da matemática são mais antigas que as mais antigas civilizações. No entanto, ir além e indicar categoricamente um início preciso no tempo e no espaço, é dizer equivocadamente que conjectura constitui-se em história, necessariamente (BOYER, 2012, p. 27). Dessa forma, é necessário que haja cautela ao investigar as origens históricas da matemática.

Seguramente, a ideia de número é a mais antiga na matemática (BOYER, 1974, p. 4). De forma que, a trajetória dos números está tão entrelaçada à História da humanidade que ao procurar-se indícios dessa grande invenção (IFRAH, 1989) inevitavelmente depara-se com as necessidades do homem em seu cotidiano de resolver problemas: desde as tarefas mais básicas como contar a quantidade de animais (IFRAH, 1989, p. 21) até as questões mais elaboradas como divisão da terra e a elaboração de um calendário utilizável (EVES, 2011, p. 57). Logo, a origem do pensamento matemático é estritamente de ordem prática, bem como antiquíssima. Mesmo nos tempos mais remotos lidou-se com o conceito de número, ainda que, para esse homem primitivo a contagem dos elementos de um conjunto fosse feita apenas até dois e quantidades maiores designadas por “muitos” (BOYER, 2012, p. 25).

Assim, é importante ressaltar que, embora a ideia de número seja tão intuitiva e os algarismos indo-arábicos, utilizados no Sistema de Numeração Decimal, sejam tão familiares, ninguém nasce sabendo manipular os números e, além disso, foi muito longo o processo de evolução deles (CELESTINO, 2017, p. 3). Durante muito tempo eram apenas falados ou representados por meio do movimento dos dedos - números digitais (EVES, 2011, p. 29) e não havia o conceito abstrato (CELESTINO, 2017, p. 3). Entende-se que o desenvolvimento da linguagem foi fundamental para o surgimento do raciocínio abstrato da matemática, contudo, palavras para ideias de números surgiram lentamente, pois símbolos são mais facilmente elaborados e grafados que uma sentença bem modulada para definir um número (BOYER, 2012, p. 26). Possivelmente, o modo mais antigo de contar baseou-se em um procedimento de inscrição simples, utilizando a ideia da correspondência biunívoca (EVES, 2011, p. 26).

Figura 2.1: Osso Ishango



Fonte: EVES (2011, p. 26).[1]

Com os avanços quanto às ideias de contagem, a partir de vários povos e costumes, gradativamente originaram-se os primeiros sistemas de numeração, sem que uns tivessem interferência ou conhecimento dos outros (CELESTINO, 2017, p. 3). Os babilônios, por exemplo, usavam o sistema sexagesimal, que hoje é empregado para medir ângulos e na medida do tempo (EVES, 2011, p. 29). Foram identificados nos registros históricos, sistemas com diversas bases, além daqueles que subsistem em tribos contemporâneas na América do Sul e na África (EVES, 2011, p. 28). O sistema de base 5 foi o primeiro a ser utilizado amplamente (EVES, 2011, p. 28), como era de se esperar, pela facilidade de observação da quantidade dos dedos das mãos. Analogamente, dez foi outra base que se destacou grandemente. Segundo Boyer, Aristóteles teria observado já em seu tempo, que o uso difundido do sistema de base dez resulta unicamente do fato de quase todas as pessoas nascerem com 10 dedos nas mãos e nos pés (BOYER, 2012, p. 25).

Apesar da antiguidade do conceito de número inteiro, "a noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros" (BOYER, 1974, p. 4). Ainda segundo Boyer, aparentemente não houve necessidade de usar frações entre as tribos primitivas e, em vez disso, eram usadas unidades suficientemente pequenas resultantes das subdivisões do inteiro. Con-

[1] "Duas vistas do osso Ishango, com mais de 8000 anos de idade, encontrado em Ishango, às margens do lago Edward, no Zaire, mostrando números preservados por meio de entalhes no osso (Dr. de Heinzelin)" (EVES, 2011, p. 26)

sequentemente, não ocorreu um progresso ordenado de frações binárias para quinárias e posteriormente para as decimais. As frações decimais foram fundamentalmente um fruto da idade moderna e do pensamento matemático e não de seu estágio inicial.

Primeiramente desenvolveram-se conceitos relacionados ao processo de contar grupamentos finitos de objetos; os números inteiros são abstrações que se originam desse processo. Mas as necessidades do dia a dia exigiam, além da contagem de quantidades discretas, a medição de diversas grandezas, como comprimento, tempo e peso. Como dificilmente essas medições são expressas por números inteiros, necessitou-se de frações para representá-las (EVES, 2011, p. 104). Assim, pode-se dizer, bastante resumidamente, que os números naturais foram criados para contar e os números racionais para medir. Porém, não é possível determinar exatamente quando isso ocorreu ou quem teria sido o primeiro a pensar nisso pela falta de registros da época e também porque cada povo criou sua maneira de contar e medir de forma independente (CELESTINO, 2017, p. 4).

De qualquer forma, devido à preservação de documentos e estudo dos registros neles contidos, o antigo Egito é tomado como referência para o estudo da origem de frações. Segundo Boyer, durante a idade do Bronze, com o aparecimento de culturas mais evoluídas, aparentemente surgiu a necessidade tanto da ideia quanto da notação para frações (BOYER, 1974, p. 9).

Com as cheias do Nilo e o desaparecimento das marcações de terra, havia a necessidade dos mensuradores, conhecidos como "esticadores de corda egípcios", demarcarem as terras (BOYER, 1974, p. 13). Assim, periodicamente, esses funcionários do faraó traçavam os limites da terra a ser ocupada por cada habitante, usando uma corda esticada com uma unidade de medida previamente marcada. Nesse processo verificavam a quantidade de vezes que aquela unidade cabia nas extremidades do terreno, mas normalmente o resultado não era de unidades inteiras (CELESTINO, 2017, p. 4).

O Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes - escriba que o copiou por volta de 1650 a. C. (BOYER, 1974, p. 9) é uma fonte original abundante sobre a matemática egípcia antiga, na forma de manual prático contendo 85 problemas em escrita hierática que, entre outras coisas, descreve o uso que aquele povo fazia das frações unitárias com muitas aplicações em situações do cotidiano (EVES, 2011, p. 70). Apesar de ser o documento matemático mais famoso do antigo Egito existem também outras fontes, como o Papiro Kahun e o Papiro de Berlim. Este último de cerca de 2000 a. C., um rolo de couro com listas de frações unitárias (BOYER, 1974, p. 14).

Figura 2.2: Papiro de Rhind

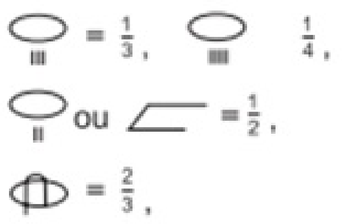
Fonte: EVES (2011, p. 74).

Um aspecto que dificulta apreender totalmente a matemática contida em documentos como esse é que, em geral, o aspecto prático tende a comunicar procedimentos e cálculos, não havendo preocupação em explicar como ou por que deve ser feito determinado procedimento para chegar aos resultados. Assim, pode-se dizer que tão importante quanto a descoberta e preservação dessas fontes primárias é a interpretação correta das mensagens nelas gravadas, que, por sua vez, precisam ser entendidas à luz do contexto histórico e cultural da época. Muitos dos problemas do papiro de Rhind, por exemplo, lidam com questões sobre o caráter substancial do pão e da cerveja, sobre doses de ração para animais domésticos e sobre armazenamento de grãos (EVES, 2011, p. 73).

Segundo Eves, os egípcios empenharam-se para escapar de determinadas dificuldades computacionais com frações, fazendo a representação delas como uma soma de frações unitárias (com numerador 1), exceto pela fração $\frac{2}{3}$, que tinha uma notação especial. Essa redução era possibilitada pelo uso de tábuas contendo a representação pretendida para frações do tipo $\frac{2}{3n}$, que eram suficientes pela natureza da multiplicação egípcia baseada em duplicações.

Os egípcios foram extremamente bem-sucedidos nas multiplicações de combinações de frações unitárias, fato evidente pelos cálculos do Papiro de Rhind (BOYER, 1974, p. 11). Uma dessas tábuas de decomposição de frações precede os problemas do Papiro de Rhind, contendo todos os ímpares n de 5 a 101. A fração $\frac{2}{7}$ é expressa por $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ e $\frac{2}{97}$ como $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$, sendo que cada fração é decomposta de apenas uma maneira. Na notação hieroglífica egípcia, as frações unitárias eram indicadas colocando-se um símbolo ovalado sobre o número do denominador, além da notação diferenciada da fração $\frac{2}{3}$, às vezes, a fração $\frac{1}{2}$ também era representada, de modo especial, como mostrado na figura a seguir (EVES, 2011, p. 73).

Figura 2.3: Notação egípcia para frações



Fonte: EVES (2011, p. 73).

Também na Mesopotâmia, o conhecimento matemático dos babilônicos merece destaque, sendo este muito mais elevado que o egípcio (EVES, 2011, p. 67), além de ser um dos mais antigos, pois “documentos cuneiformes tinham grande durabilidade. Por isso, muitos milhares de tais tabletas sobreviveram até nossos dias, muitos datando de cerca de 4 000 anos” (BOYER, 1974, p.8). Apesar de serem registros antiquíssimos, somente a partir do século XIX os escritos cuneiformes começaram a ser decifrados, posteriormente aos hieróglifos egípcios.

Uma importante contribuição dessa civilização foi a notação posicional para os números inteiros que também foi estendida à notação de frações. Esse método possibilitou cálculos com tamanha precisão que não poderiam ser superados até o período da Renascença, conforme registros arqueológicos (BOYER, 1974, p. 21). Ainda mais relevante pode ser considerado esse fato, ao lembrar-se que inicialmente as frações não eram consideradas como números, nem havia a ideia geral de fração: $\frac{m}{n}$, como m vezes o inverso de n (IFRAH, 2010, p. 326). Apesar da superioridade do sistema babilônico, a antiga preferência egípcia por frações unitárias prosseguiu na Europa por muitos séculos ainda (BOYER, 1974, p. 126).

No Egito, número tratava-se do domínio dos números naturais e frações unitárias; entre os babilônios o corpo das frações racionais. Enquanto na Grécia, a palavra número referia-se apenas a números inteiros. Para os gregos, uma fração não era pensada como um único ente, mas como "uma razão ou relação entre inteiros" (BOYER, 1974, p. 39). Os gregos também usavam frações unitárias, escreviam o denominador seguido de um sinal para fazer a distinção com o número inteiro correspondente. A escrita da fração $\frac{1}{32}$ seria $\lambda\beta$', por exemplo. As frações comuns gerais e sexagesimais começaram a ser usadas em séculos posteriores (BOYER, 1974, p. 44).

As civilizações da China antiga provavelmente são posteriores ao Egito antigo e à Babilônia, contudo, pouquíssimo material de natureza primária foi preservado. Um dos principais motivos é o tipo de material em que os registros foram feitos e o clima da região. Enquanto os escritos egípcios foram escritos em papiros e preservados em clima seco, o bambu, além de ser mais frágil, não resistiu em um clima úmido (EVES, 2011, p. 241). O trabalho matemático chinês mais antigo conhecido foi descoberto em janeiro de 1984, um livro de aritmética escrito em tiras de bambu. Trata-se de uma coleção de mais de 90 problemas contendo as quatro operações matemáticas fundamentais, incluindo frações, além dos números inteiros e outros conceitos (EVES, 2011, p. 244).

A matemática da China passou a figurar entre as mais criativas do mundo após o declínio da matemática grega, produzindo resultados que somente seriam redescobertos pela Europa durante ou após a Renascença (EVES, 2011, p. 246). Segundo Boyer, nenhuma apresentação da numeração chinesa seria completa sem referir-se ao uso que fizeram de frações. Os chineses dominavam as operações envolvendo frações comuns, usando o recurso de encontrar o mínimo denominador comum das frações em questão (BOYER, 1974, p. 146).

Os chineses foram os primeiros a desenvolver frações decimais (EVES, 2011, p. 246). A utilização da base dez em unidades de massa e comprimento resultou em um hábito decimal no tratamento de frações – "artifícios decimais na computação eram às vezes adotados para facilitar a manipulação de frações" (BOYER, 1974, p. 147). Yang Hui, trabalhou normalmente com frações decimais; seu método era praticamente o mesmo que se usa atualmente (EVES, 2011, p. 246).

Avançando à Europa da Idade Média, o matemático Fibonacci, em 1202, publicou sua obra famosa intitulada Liber Abaci, que foi fundamental na propagação do uso que árabes e orientais fazem das frações (EVES, 2011, p. 292). O traço horizontal era usado por Fibonacci normalmente na notação de frações (BOYER, 1974, p. 185). Apesar do uso do sistema indo-arábico que é posicional, Fibonacci não aplica essa vantagem ao uso de frações, pois "usou três tipos de frações – comuns, sexagesimais e unitárias – mas não frações decimais" (BOYER, 1974, p. 186).

Tal qual ocorre atualmente, as demandas da sociedade daquela época incentivaram o progresso do conhecimento matemático; quatro significativas invenções atenderam sucessivamente essas necessidades crescentes: "a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores" (EVES, 2011, p. 341). Ao ressaltar o lugar fundamental ocupado pelas frações para o avanço da matemática e consequentemente para a humanidade, encerra-se este breve relato sobre tópicos importantes da história das descobertas e da evolução do pensamento fracionário.

2.2 O conceito de fração e seus significados

Neste tópico será apresentada a definição de fração, a partir da caracterização do Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$) e também diversas interpretações para o número fracionário.

2.2.1 Definição de fração

As necessidades do cotidiano conduziram à introdução de frações no universo dos números, que recebem o nome de racionais por serem razões de números inteiros. Os números racionais são uma ampliação do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) que, por sua vez, é uma ampliação do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$). Mais precisamente, um número racional é aquele que pode ser descrito na forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in Z$ e $n \neq 0$ (NIVEN, 1984, p. 30). Niven (1984) faz observações que merecem destaque:

1- Apesar de os termos número racional e fração ordinária serem ocasionalmente usados como sinônimos, a palavra fração diferencia-se de número racional pelo seguinte fato: fração designa qualquer expressão algébrica com numerador e denominador, enquanto número racional pode ser expresso como fração se, e somente se, numerador e denominador são números inteiros, sendo o denominador não nulo (NIVEN, 1984, p. 31). Contudo, aqui neste estudo somente será feita referência a frações que também são números racionais.

2. O significado da palavra "pode" (não restritivo) na definição de número racional deve ser evidenciado, pois garante a possibilidade de o mesmo número racional apresentar infinitas representações. Assim, a definição de número racional não depende de uma maneira particular para representá-lo. Logo, uma fração é definida de tal modo que: $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, com n, $n' \neq 0$ se, e somente se, $mn' = m'n$ (NIVEN, 1984, p. 32).

3. Pela definição, se $z \in \mathbb{Z}$, então $z \in \mathbb{Q}$, bastando para isso tomar $m = z$ e $n = 1$ (NIVEN, 1984, p.32).

4. Dentre os números racionais $\frac{m}{n}$, distinguem-se dois tipos:

- Aqueles para os quais o inteiro n não tem nenhum fator primo além de 2 e 5, com $(m, n) = 1$, que possuem representações decimais finitas e infinitas; por exemplo: $\frac{1}{5} = 0,2 = 0,1999...$

- O segundo tipo é caracterizado pelos números que possuem apenas a representação decimal infinita; por exemplo: $\frac{2}{3} = 0,666...$

Isso posto, os números racionais apresentam-se das seguintes formas:

- Números naturais ($\mathbb{N}$);

- Números inteiros ($\mathbb{Z}$);

- Números decimais exatos (admitem representação finita);

- Dízimas periódicas (apenas representação infinita);

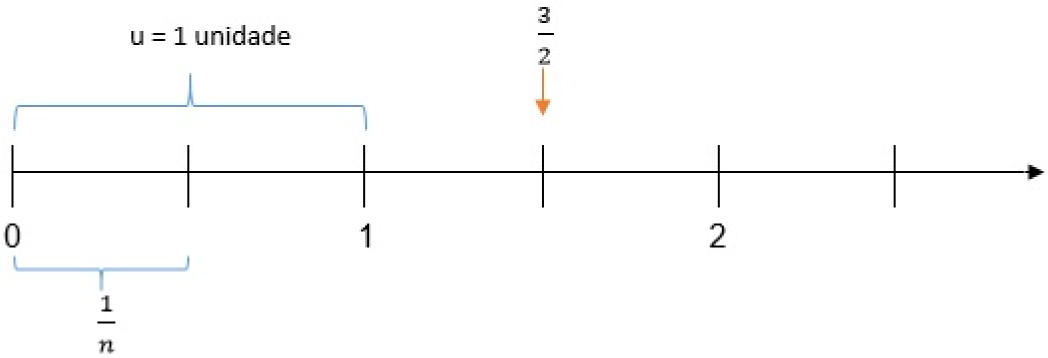
- Frações.

Uma fração, representada genericamente como $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$, designa a unidade dividida em n partes iguais, das quais utiliza-se o número m de partes. Assim, cada parte corresponde ao inverso de n, ou seja, $\frac{1}{n}$ e a fração pode ser expressa pelo produto $m \cdot \frac{1}{n}$. Nesse caso, m corresponde ao numerador da fração, do Latim *numerator*, "aquele que conta", de *numerus*, "número"; n corresponde ao denominador da fração, do Latim *denominator*, "aquele que nomeia, que atribui um nome". O numerador e o denominador são chamados de termos da fração.

Assim, toda fração, como é a representação de um número, pode ser localizada na reta numérica, associada a um único ponto que lhe corresponde, mesmo que possua diversas interpretações a depender do contexto em que aparece. Importante a esta altura lembrar que, matematicamente, número é uma ideia, uma propriedade abstrata que concretamente não existe, mas antes representa uma classe de elementos que apresentam uma mesma característica em comum (GARCEZ, 2013, p. 12). Não se deve confundir os objetos ou quaisquer entes identificados por determinado número comum às quantidades representadas por esses conjuntos com o próprio número. Pois o número não pode ser visto, sentido, sequer ouvido no mundo concreto, apenas se pode abstraí-lo como propriedade abstrata compartilhada por certos conjuntos (GARCEZ, 2013, p. 30). Ainda é conveniente notar que enquanto a ideia de contagem leva aos números naturais, a noção de medida conduz aos números racionais (RIPOLL, GIRALDO, RANGEL, 2016, p. 29).

Segue abaixo a representação de um número racional sob a forma fracionária, tomando-se a medida $u = 1$ unidade, $m = 3$ e $n = 2$, ou seja, a fração é uma das formas para representar o número racional $1,5$.

Figura 2.4: Forma fracionária de $1,5$



Fonte: A própria autora.

A presente pesquisa restringe-se ao estudo das frações do tipo $\frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}; m \geq 0$ e $n > 0$.

2.2.2 As diversas interpretações de fração

O estudo dos números racionais, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), nas suas representações fracionária e decimal, requer especial atenção no 3º ciclo (6º e 7º ano do Ensino Fundamental), "partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte-todo, quociente, razão e operador" (BRASIL, 1998, p. 66). Conquanto seja essencial, é consenso entre os professores de que há uma grande dificuldade dos alunos na aprendizagem de frações, e que um dos motivos para isso é a diversidade de significados dos números racionais (GARCEZ, 2013, p. 21). Os múltiplos significados associados à fração são denominados subconstrutos da noção de número racional (MOREIRA, FERREIRA, 2008, p. 105).

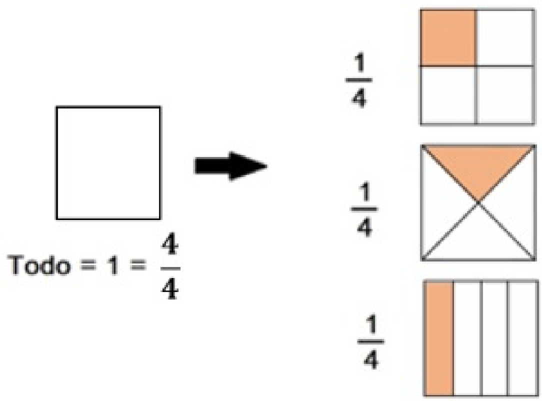
A seguir, são apresentadas quatro interpretações para fração, de acordo com as orientações dos PCN, utilizando-se como referência a coleção Teláris de Luiz Roberto Dante para os Anos Finais do Ensino Fundamental (2018).

2.2.2.1 Relação parte-todo

Em geral, este é o significado mais conhecido pelos alunos e o primeiro a ser trabalhado logo nas séries iniciais, sempre associado à representação geométrica. Neste contexto, a unidade é o todo que deve ser dividido em partes congruentes. Assim fica estabelecida a relação entre a parte e o todo, em que as partes consideradas constituem o numerador e o total de partes em que a unidade foi dividida é o denominador. É importante que os alunos tenham consciência de que a igualdade das partes se deve ao mesmo tamanho, não necessariamente à forma (WALLE, 2009, p. 324).

A unidade tomada pode ser referente a uma grandeza contínua ou discreta, uma folha de papel ou uma caixa de lápis de cor, por exemplo. Abaixo é apresentado o exemplo de três possíveis representações da fração $\frac{1}{4}$ como ideia de parte-todo a partir de diferentes modos de dobrar um guardanapo quadrado.

Figura 2.5: Representações da fração $\frac{1}{4}$



Fonte: A própria autora.

2.2.2.2 Razão entre duas partes de um mesmo tipo

Outra ideia associada à fração é a razão entre duas partes de um mesmo todo. Trata-se de uma relação de comparação entre duas quantidades ou medidas de uma mesma grandeza. Pode-se exemplificar este significado como: Carol ganhou um buquê com uma dúzia de flores coloridas, das quais, 5 eram vermelhas. Logo, 5 em 12 flores são vermelhas, ou seja, $\frac{5}{12}$ das flores são vermelhas. Outro modo de representar fração como razão envolve o cálculo de probabilidade. Ao se considerar o lançamento de uma moeda, a probabilidade de se obter a face cara voltada para cima é de 1 em 2 possibilidades, logo a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda é de $\frac{1}{2}$.

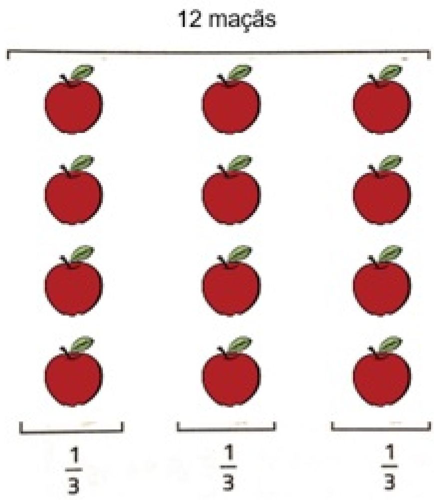
Figura 2.6: Representação da fração como razão

Fonte: A própria autora.

2.2.2.3 Operador multiplicativo (fração de uma quantidade)

Nesta situação a fração é empregada para representar parte de uma quantidade. Assume o significado de operador multiplicativo, transformando uma quantidade em outra. Pode-se exemplificar essa situação da seguinte forma: será utilizado $\frac{1}{3}$ de uma dúzia de maçãs para uma salada de frutas; para determinar quantas maçãs serão utilizadas basta calcular $\frac{1}{3}$ de 12 maçãs. Para isso, divide-se as 12 maçãs em 3 partes e considera-se apenas uma parte. Portanto, $\frac{1}{3}$ de $12 = 4$, pois $12 : 3 = 4$. Consequentemente, sobrarão $\frac{2}{3}$ de 12 maçãs, ou seja, sobrarão $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ maçãs.

Figura 2.7: Divisão de maçãs em 3 partes

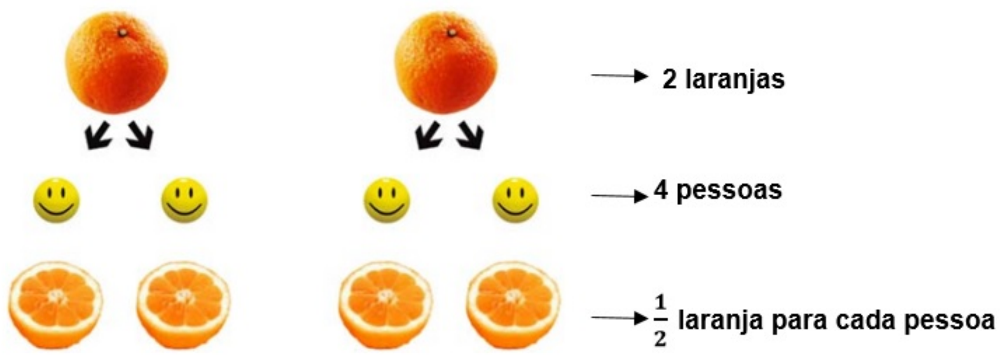


Fonte: A própria autora.

2.2.2.4 Quociente entre dois números inteiros

Nesta ideia, a fração representa uma divisão entre dois números inteiros. Um objeto, ou mais, devem ser repartidos igualmente a um grupo de receptores. Por exemplo, tomando-se duas laranjas a serem divididas entre quatro crianças, tem-se que a quantidade de laranjas é representada pelo numerador e o número de crianças pelo denominador. A relação entre a quantidade de laranjas e o número de crianças é representada pelo quociente. Além disso, o quociente também indica o resultado da divisão das laranjas para as crianças. Ou seja, $2 : 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou $0,5$.

Figura 2.8: Divisão de laranjas



Fonte: BERTONI (2009, p. 38).

2.2.3 Tópicos do ensino de fração no livro didático

Nesta seção serão apresentados outros aspectos do estudo de frações conforme são abordados nos livros didáticos, tais como comparação, equivalência e operações aritméticas com fração. Para tanto também se tomou como referência a coleção Teláris de Luiz Roberto Dante para os Anos Finais do Ensino Fundamental (2018).

2.2.3.1 Nomeando frações

A leitura de uma fração é feita de acordo com o seu denominador, pois este é o termo que indica o tamanho de cada parte em que a unidade foi dividida. Deve-se começar a leitura pelo numerador, que é pronunciado como número cardinal, seguida pela leitura do denominador. De acordo com a leitura do denominador pode-se dividir as frações em três categorias:

I) Denominadores de 2 a 9:

$\frac{1}{2}$: um meio $\frac{1}{5}$: um quinto $\frac{5}{8}$: cinco oitavos

$\frac{2}{3}$: dois terços $\frac{5}{6}$: cinco sextos $\frac{2}{9}$: dois nonos

$\frac{3}{4}$: três quartos $\frac{4}{7}$: quatro sétimos

II) Denominadores 10, 100, 1000 ou qualquer outra potência de 10

As frações com denominadores 10, 100, 1000, ou qualquer outra potência de 10, são chamadas de frações decimais.

$\frac{7}{10}$: sete décimos $\frac{3}{100}$: três centésimos $\frac{1}{1000}$: um milésimo

III) Denominadores diferentes das categorias I e II

Neste caso, lê-se o numerador e o denominador apenas como número cardinal, e após isso acrescenta-se a palavra avos (que significa "divisão em partes iguais").

$\frac{1}{12}$: um doze avos $\frac{3}{20}$: três vinte avos $\frac{2}{35}$: dois trinta e cinco avos

2.2.3.2 Classificação de frações

A seguir é apresentada a classificação de frações considerando-se a forma como são representadas e a relação estabelecida entre numerador e denominador de cada uma delas. Importante observar que nem sempre uma classificação exclui outra, ou seja, uma única fração pode se enquadrar em mais de uma dessas caracterizações.

I) Frações Próprias

As frações próprias representam um número maior que zero e menor que 1 unidade, o que corresponde à ideia intuitiva de fração como parte de um inteiro.

Exemplos: $\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{5}{49}, ...$

II) Frações Impróprias

Diferentemente das frações próprias, as impróprias extrapolam a ideia intuitiva de fração como sendo parte de um inteiro. Portanto, as frações que não são próprias estão classificadas como impróprias: valem zero, 1 unidade ou mais de uma unidade. Logo, o numerador pode ser: zero, um número igual ou maior que o denominador.

Exemplos: $\frac{2}{2}, \frac{0}{7}, \frac{50}{49}, \frac{100}{50}, ...$

III) Frações Aparentes

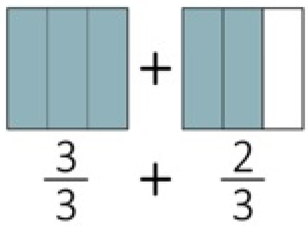
Frações aparentes são aquelas em que o numerador é múltiplo do denominador. Logo, essas frações equivalem a um número inteiro. Deve-se observar ainda que frações aparentes são um caso particular das frações impróprias. Ao indicar que uma fração é aparente significa dizer também que ela é imprópria.

Exemplos: $\dfrac{2}{2}, \dfrac{0}{7}, \dfrac{25}{5}, ...$

IV) Frações Mistas

Fração na forma mista ou número misto é outra maneira de representar uma fração imprópria não aparente. Essa representação é constituída por um número inteiro e uma fração própria. A figura a seguir ajuda a exemplificar essa possibilidade: $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, que é fração imprópria; por outro lado, $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$, que é fração mista (ou número misto).

Figura 2.9: Fração mista



Fonte: Própria autora.

Também são exemplos de fração na forma mista:

$$1\frac{2}{5},\ 3\frac{4}{7}, ...$$

V) Frações Unitárias

Quando uma fração própria tem o numerador igual a 1, recebe o nome de fração unitária.

Exemplos: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{17}, \dfrac{1}{52}, ...$

VI) Frações Decimais

São chamadas frações decimais aquelas cujo denominador corresponde a uma potência de 10. Portanto, estas frações possuem uma representação correspondente em números decimais formados justamente pelos mesmos algarismos que compõem o numerador. O valor relativo de cada algarismo, na representação decimal, dependerá da potência de 10, que irá determinar a posição da vírgula.

Exemplos: $\dfrac{12}{10} = 1,2;$ $\dfrac{3}{10} = 0,3;$ $\dfrac{13}{100} = 0,13, ...$

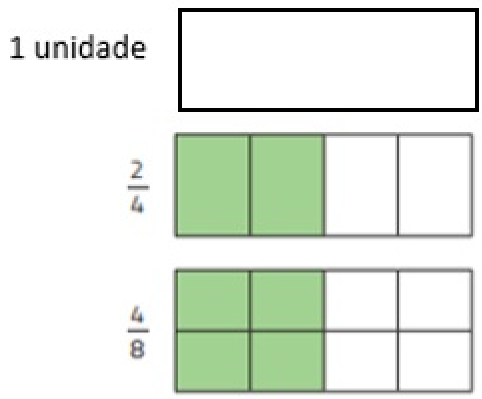
VII) Frações Equivalentes

Um único número racional pode ser representado na forma fracionária de infinitas maneiras. Todas as frações que representam um mesmo número racional são consideradas frações equivalentes, pois correspondem a um único valor em relação à mesma unidade.

Deve-se multiplicar, dividir ou multiplicar e dividir numerador e denominador por um mesmo número (não nulo) a fim de obter-se uma fração equivalente.

Exemplo: A figura mostra o inteiro considerado e, na sequência, a região colorida representando as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$. O número de partes é diferente, mas a região destacada em relação ao todo é a mesma nas duas figuras. Portanto, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes, pois multiplicando-se numerador e denominador da primeira fração por 2 obtém-se a segunda.

Figura 2.10: Frações equivalentes



Fonte: Própria autora.

Observação: Ao multiplicar-se o numerador de uma fração pelo denominador da outra, de forma cruzada, pode-se verificar se um par de frações é equivalente. Por exemplo, ao tomar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ tem-se que $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$, então $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

2.2.3.3 Simplificação de fração

Quando uma fração está representada de tal modo que numerador e denominador são primos entre si diz-se que a fração está na sua forma simplificada, ou ainda, na sua forma irredutível, porque não é possível obter nenhuma fração equivalente dividindo numerador e denominador por um único número.

Para simplificar uma fração basta realizar sucessivas divisões simultâneas de numerador e denominador pelo mesmo número até que não seja possível continuar o processo, isto é, até que o MDC (Máximo Divisor Comum) do numerador e do denominador seja 1.

Para obter-se uma fração irredutível de maneira mais rápida divide-se numerador e denominador pelo MDC de ambos, fazendo-se apenas essa divisão para chegar ao resultado desejado.

Exemplos:

- Como os termos da fração $\frac{10}{14}$ possuem o 2 como divisor comum, pode-se obter a forma simplificada da fração fazendo a divisão de cada termo por 2:

$$\frac{10^{\div 2}}{14_{\div 2}} = \frac{5}{7}$$

- Os termos do resultado obtido não possuem divisor comum maior que 1. Logo, conclui-se que $\frac{5}{7}$ é a forma irredutível de $\frac{10}{14}$.

- Já a fração $\frac{12}{18}$ apresenta 2 e 3 como divisores primos de seus termos. Neste caso pode-se fazer as sucessivas divisões para simplificar a fração:

$$\frac{12^{\div 2}}{18_{\div 2}} = \frac{6^{\div 3}}{9_{\div 3}} = \frac{2}{3}$$

Por outro lado, como $mdc(12, 18) = 6$, pode-se obter a forma irredutível realizando-se apenas a divisão dos termos por este número:

$$\frac{12^{\div 6}}{18_{\div 6}} = \frac{2}{3}$$

Portanto, $\frac{2}{3}$ é a forma mais simplificada da fração $\frac{12}{18}$.

2.2.3.4 Comparação entre frações

A comparação entre frações consiste em identificar a relação entre os números racionais por elas representados, estabelecendo uma igualdade ou uma desigualdade. Ocorre a igualdade entre as frações equivalentes e, caso contrário determina-se qual é a maior; em todos os casos, levando-se em consideração uma mesma unidade estabelecida.

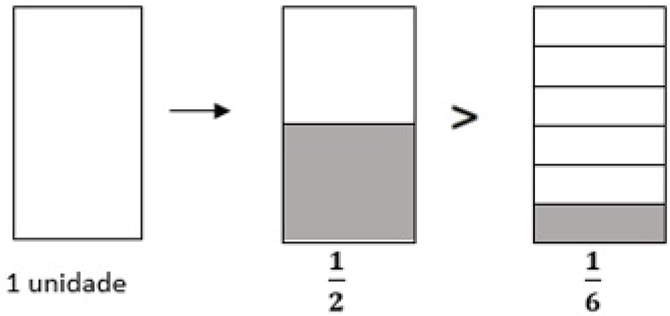
Para comparar frações pode-se dividir em três casos:

I) Frações com numeradores iguais

Neste caso, quanto maior o denominador menor a fração representada.

Exemplo: Dadas as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$, como $2 < 6$, então $\frac{1}{2} > \frac{1}{6}$.

Figura 2.11: Comparação de frações com o mesmo numerador



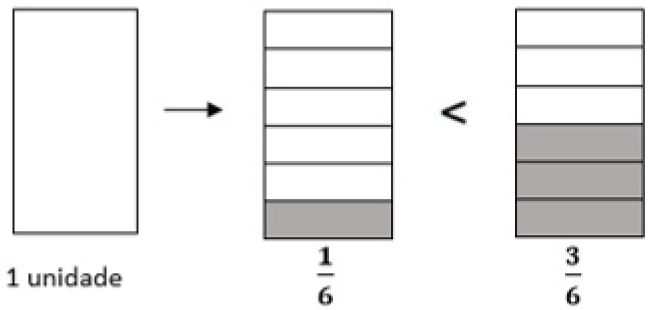
Fonte: Própria autora.

II) Frações com denominadores iguais

Quando os denominadores são iguais, como indicam partes do inteiro do mesmo tamanho, a maior fração é a que possui maior numerador.

Exemplo: Dadas as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{6}$, como $1 < 3$ então $\frac{1}{6} < \frac{3}{6}$.

Figura 2.12: Comparação de figuras com o mesmo denominador



Fonte: Própria autora.

III) Frações com numeradores diferentes e denominadores diferentes

Pode-se comparar frações com ambos os termos diferentes de duas maneiras: encontrando-se frações com denominador comum ou utilizando-se a propriedade fundamental das proporções.

a) Utilização do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) para encontrar o denominador comum

Neste caso, dadas duas frações a serem comparadas precisa-se obter frações equivalentes a essas com denominador comum. Este denominador é um múltiplo comum dos dois denominadores iniciais, sendo mais conveniente tomar-se o menor desses múltiplos, o MMC. Por exemplo, ao comparar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, tem-se que $mmc(3, 5) = 15$, que é o novo denominador.

As frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ com denominador 15 são respectivamente $\frac{5}{15}$ e $\frac{6}{15}$.

Como o denominador é comum e $5 < 6$, então $\frac{5}{15} < \frac{6}{15}$. Portanto, $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$.

b) Utilização da propriedade fundamental das proporções

A propriedade fundamental das proporções é conhecida como produto dos meios pelos extremos. Ao aplicá-la, multiplica-se os termos das frações de forma cruzada (o numerador da primeira pelo denominador da segunda e o numerador da segunda pelo denominador da primeira fração).

Devido a esta propriedade, dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com a, b, c, d > 0, tem-se:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c.$$

Demonstração: Sejam a, b, c, d > 0. Suponha que $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$. Assim,

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d > \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$$

Então

$$a \cdot d > b \cdot c$$

Por outro lado, suponha que $a \cdot d > b \cdot c$.

Logo,

$$\frac{a \cdot d}{d \cdot b} > \frac{b \cdot c}{d \cdot b}$$

Então,

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Se os produtos dos meios pelos extremos são iguais, ou seja, $a \cdot d = b \cdot c$, significa que as frações comparadas são equivalentes.

Exemplo: Consideradas as frações $\frac{11}{12}$ e $\frac{13}{15}$, tem-se que

$$11 \cdot 15 = 165 \text{ e } 13 \cdot 12 = 156.$$

Como $165 > 156$, então

$$\frac{11}{12} > \frac{13}{15}.$$

2.2.3.5 Adição e subtração de frações

Para adicionar ou subtrair frações os denominadores devem ser iguais. A partir disso, conserva-se o denominador e adiciona-se (ou subtrai-se) os numeradores, conforme a operação indicada.

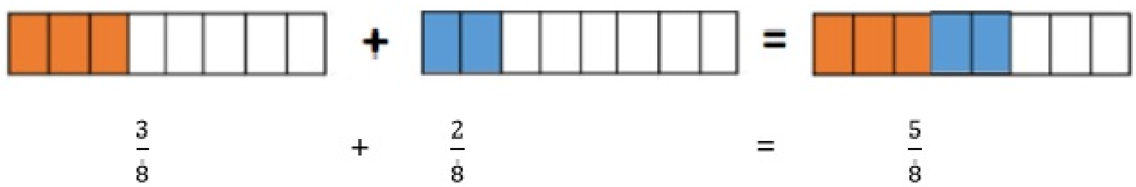
Assim, quando os denominadores são diferentes deve-se primeiramente obter-se frações equivalentes de mesmo denominador, como detalhado anteriormente, para então realizar a operação solicitada.

Exemplos:

a) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$.

Como mostra a figura a seguir, basta adicionar os numeradores e conservar os denominadores, pois os denominadores indicam que o inteiro foi dividido em partes do mesmo tamanho.

Figura 2.13: Adição de frações com denominadores iguais

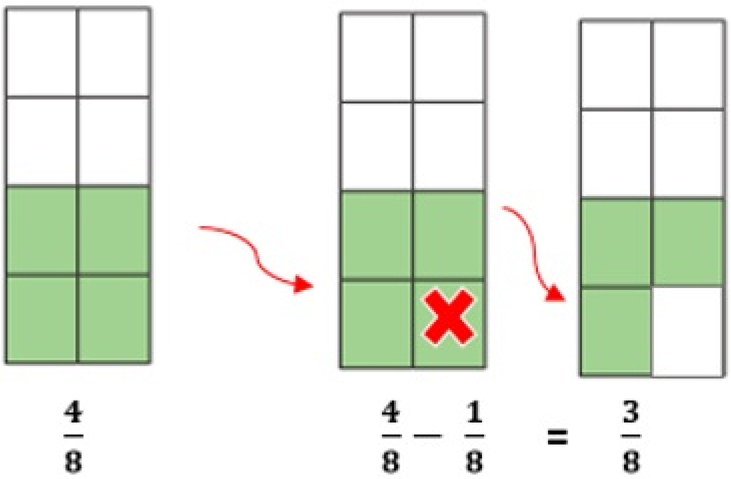


Fonte: Própria autora.

b) $\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}$.

De maneira análoga ao exemplo anterior, basta subtrair os numeradores, conservando os denominadores.

Figura 2.14: Subtração de frações com denominadores iguais

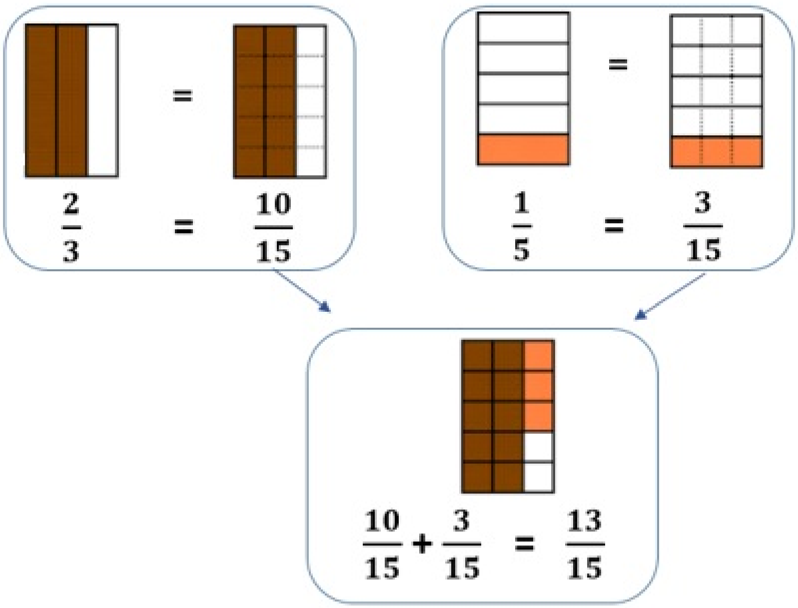


Fonte: Própria autora.

c) Para somar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$ deve-se antes encontrar as frações equivalentes $\frac{10}{15}$ e $\frac{3}{15}$ respectivamente, com denominadores iguais, pois $mmc(3,5) = 15$. Os passos seguintes ocorrem de modo semelhante ao exemplificado no item b. Logo,

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15}.$$

Figura 2.15: Adição de frações com denominadores diferentes



Fonte: Própria autora.

d) Para calcular a subtração entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$ deve-se antes encontrar as frações equivalentes $\frac{10}{15}$ e $\frac{3}{15}$, como no item anterior. Portanto, a diferença é dada por:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}.$$

2.2.3.6 Multiplicação de frações

Para encontrar o produto de duas frações basta multiplicar-se numerador por numerador e denominador por denominador. Ou seja, dados a, b, c, d números naturais, com b e d não nulos, tem-se que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Observações:

- Quando o produto entre duas frações é 1, uma fração é o inverso da outra, pois o numerador de uma é o denominador da outra e vice-versa. Por exemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = 1.$$

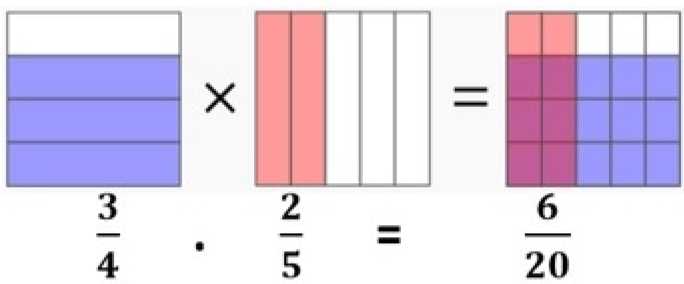
  Logo, $\frac{2}{3}$ é o inverso de $\frac{3}{2}$.

- Quando uma das frações a serem multiplicadas representa um número natural, pode-se pensar nessa operação como uma adição de parcelas iguais. Por exemplo:

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{1}{5} = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

- É possível representar geometricamente a multiplicação de frações. No exemplo abaixo, observa-se o resultado de $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$. Toma-se a unidade em formato retangular e a subdivide-se, destacando-se a primeira fração com segmentos paralelos a um par de lados. De maneira análoga, representa-se a segunda fração, mas fazendo as subdivisões em outro sentido (vertical). Ao sobrepor as duas frações representadas pelas figuras obtém-se a intersecção, que indica o produto desejado:

Figura 2.16: Multiplicação de frações



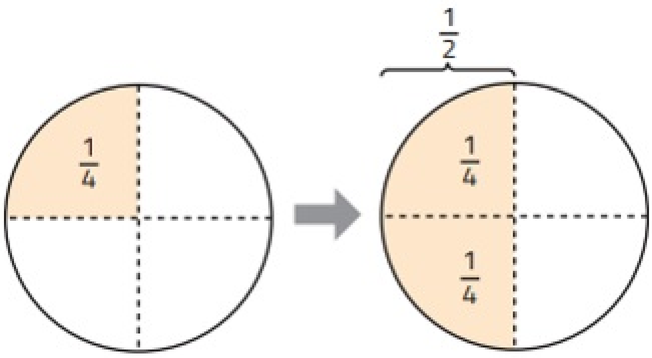
Fonte: Própria autora.

2.2.3.7 Divisão de frações

No desenvolvimento do cálculo da divisão de frações trabalha-se com a ideia de medida. Tomando-se a fração que é o divisor como uma medida, determina-se quantas vezes esta cabe na fração que é o dividendo. Essa quantidade de vezes será o quociente desejado. Por exemplo, ao dividir-se a metade de uma pizza por um quarto, obtém-se dois pedaços. Logo, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$.

Observação: O número dois é o resultado encontrado ao multiplicar-se $\frac{1}{2}$ pelo inverso de $\frac{1}{4}$.

Figura 2.17: Divisão de fração por fração associada à ideia de "medida"



Fonte: DANTE (2018, p. 71).

De modo geral, dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, para dividi-las basta multiplicar-se ambas pelo inverso da fração que é o divisor, obtendo-se uma fração convenientemente equivalente. Desse modo, o denominador (divisor) será o número um, que é elemento neutro na divisão.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Na prática, pode-se usar o seguinte algoritmo para a divisão de frações (com divisor diferente de zero): multiplica-se a primeira fração pelo inverso da segunda.

Exemplo: $\dfrac{7}{3} : \dfrac{4}{5} = \dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{35}{12}$.

2.3 O estudo de frações de acordo com documentos oficiais da educação

Nesta seção o estudo de frações no Ensino Fundamental será abordado a partir do que é proposto pelos documentos oficiais da educação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), destacando-se as dificuldades na aprendizagem de frações com base nesses registros.

2.3.1 PCN

Os PCN não são uma instrução normativa, mas orientações para o ensino na Educação Básica, portanto, ainda que tenham sido publicados em 1998, de lá para cá, vêm influenciando diretamente a elaboração dos currículos, bem como a construção da BNCC, constituindo-se, portanto, em uma fonte de pesquisa relevante para se entender como está estruturada a educação no Brasil. Os PCN de Matemática exibem os objetivos de aprendizagem com uma abordagem em termos das capacidades a serem desenvolvidas e os conteúdos contemplados para esse desenvolvimento, não especificando o que deve ser estudado em cada ano de escolaridade (BRASIL, 1998, p. 16), pois a sua organização se dá em ciclos: 6º e 7º anos do Ensino Fundamental correspondem ao 3º ciclo, 8º e 9º ano ao 4º ciclo (BRASIL, 1998, p. 9).

O estudo de frações aparece durante todo o Ensino Fundamental, numa proposta de aprendizagem gradual e em diferentes níveis de aprofundamento, assim supõe-se "o estabelecimento de relações com conceitos anteriores" (BRASIL, 1998, p. 49). Essa abordagem pretende conduzir os estudantes a perceberem que os números naturais não são suficientes para resolver certas situações-problema nas quais o resultado não é expresso por um número inteiro, como situações que envolvem o quociente de medidas, por exemplo (BRASIL, 1998, p. 101). Sob essa perspectiva, sugere-se o uso de problemas históricos que envolvem medidas e originaram a ideia de frações (BRASIL, 1998, p. 101). Nos Anos Finais do Ensino Fundamental espera-se que o conceito de fração seja consolidado (BRASIL, 1998, p. 49).

Segundo os PCN, deve-se proporcionar o reconhecimento de números racionais em diferentes contextos e formas, explorando situações-problema em que há indicação de parte/todo, quociente, razão ou operador multiplicativo (BRASIL, 1998, p. 71). Também recomenda-se trabalhar com a localização desses números na reta numérica, reconhecendo a possibilidade de expressá-los na forma fracionária e decimal, fazendo-se conexões entre essas representações (BRASIL, 1998, p. 71). O aluno deve ser capaz de lidar com esses números, comparando-os, ordenando-os, efetuando cálculos para resolver problemas em contextos sociais, matemáticos ou dos demais campos de conhecimento (BRASIL, 1998,

p. 76).

Quanto ao estudo de fração como parte/todo, o aluno deve ser capaz de identificar a unidade que indica o todo, sabendo realizar divisões com grandezas discretas ou contínuas (BRASIL, 1998, p. 102). Interessante notar que a interpretação de número racional como quociente entre dois números inteiros diferencia-se, para o aluno, da relação parte/todo, ainda que o resultado seja dado pelo mesmo número. Pois dividir uma unidade em 5 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é necessário dividir 2 unidades em 5 partes iguais (BRASIL, 1998, p. 102).

Uma fração com significado de razão é empregada quando desempenha a função de índice comparativo entre duas quantidades. Isso ocorre, por exemplo, em situações que envolvem probabilidades, escalas em plantas e mapas, ou ainda, ao trabalhar com porcentagem (BRASIL, 1998, p. 102). Por outro lado, a fração apresenta-se como operador quando desempenha um papel de transformação (BRASIL, 1998, p. 102), como quando há problemas do tipo: que número deve-se multiplicar por 3 para obter-se 2 (BRASIL, 1998, p. 103).

Os PCN ainda destacam que na abordagem dos números racionais, em seu reconhecimento em situações cotidianas, deve-se notar que a ocorrência é muito mais frequente na forma decimal do que na forma fracionária, mas que o estudo das frações "se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico)" (BRASIL, 1998, p. 103). Outra vantagem para o uso das frações é quando se tratam de contextos envolvendo cálculos com dízimas periódicas, pois facilita a obtenção mais precisa dos resultados, evitando as aproximações necessárias na forma decimal (BRASIL, 1998, p. 103).

A ideia de equivalência bem como a construção de procedimentos para a determinação de frações equivalentes são apontadas como essenciais para a resolução de problemas que contenham a comparação de números apresentados na forma de fração e para efetuar cálculos com esses números, principalmente adicionar e subtrair (BRASIL, 1998, p. 103). No cálculo de multiplicações destaca-se a compreensão desta operação com frações pensando-se como "partes do total", não se apoiando, neste caso, na ideia de adição reiterada (BRASIL, 1998, p. 104). Ao efetuar uma divisão entre frações é possível interpretá-las como "partes que cabem em partes" (BRASIL, 1998, p. 105). Contudo, nem sempre esse tipo de representação permite a visualização do resultado, portanto, deve-se usar outras estratégias (BRASIL, 1998, p. 105). A essa altura toma-se, por exemplo, a propriedade da invariância do quociente ao multiplicar-se ambos os termos de uma fração por um mesmo número para dividir-se duas frações multiplicando-se ambas pelo inverso da segunda fração, ou ainda, ao dividir duas frações basta multiplicar-se a primeira pelo inverso da segunda (BRASIL, 1998, p. 105). Neste contexto é destacada a importância do procedimento associado a significados, ou seja, o aluno não irá lançar mão de estratégias sem que essas façam parte do conhecimento construído significativamente. Logo, os procedimentos não são esquecidos tão facilmente (BRASIL, 1998, p. 50).

2.3.2 BNCC

Diferentemente dos PCN, a BNCC possui caráter normativo e é um documento bastante recente que define as "aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2018, p. 7). Nesse sentido, são definidos os conteúdos fundamentais (objetos de conhecimento) bem como as habilidades a serem desenvolvidas relacionadas a esses conteúdos, que estão distribuídos em cada componente curricular (disciplinas), subdivididos em unidades temáticas. A forma como foi elaborada a BNCC visa o desenvolvimento da educação por competências (BRASIL, 2018, p. 7), sendo importante ressaltar que a organização das habilidades em seu texto expressa um arranjo possível, não uma estrutura rígida de como os conteúdos devem ser trabalhados (BRASIL, 2018, p. 275). Uma das competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacitação para construir argumentação convincente, "recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (BRASIL, 2018, p. 267).

A área de Matemática está dividida em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018, p. 268). Estas unidades permeiam todas as séries, tendo seus conhecimentos aprofundados ano a ano. Os objetos de conhecimento relacionados ao estudo de frações fazem parte da unidade "Números". Desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais espera-se que os alunos resolvam problemas com frações, envolvendo diferentes significados das operações, sendo capazes de argumentar e justificar os procedimentos utilizados para a resolução, criticando os resultados encontrados. Com relação aos cálculos, a expectativa é que o estudante construa estratégias diversificadas para a obtenção de resultados, além de desenvolver habilidades relacionadas à leitura e comparação de frações (BRASIL, 2018, p. 268).

As habilidades, conforme definidas na BNCC e dito anteriormente, são desenvolvidas numa progressão (BRASIL, 2018, p. 275), de modo que "as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes" (BRASIL, 2018, p. 298), portanto, é conveniente comparar as habilidades de um assunto a serem efetivadas em determinado ano escolar, relacionando-as com a maneira que são contempladas nos anos anteriores e posteriores (BRASIL, 2018, p. 298). No texto da BNCC cada habilidade é identificada por um código alfanumérico (BRASIL, 2018, p. 30). Para que se tenha essa perspectiva vertical, de como as habilidades de cada unidade temática estão conectadas, a seguir são apresentados os objetos de conhecimento e as respectivas habilidades relacionadas ao estudo de frações no Ensino Fundamental de acordo com o ano de escolaridade (o primeiro par de algarismos no código alfanumérico indica a série escolar e o último par indica a posição da habilidade na numeração sequencial; o primeiro par de letras significa "Ensino Fundamental" e o último indica o componente curricular "Matemática") (BRASIL, 2018, p. 30).

Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.
Números racionais: frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$)	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.

Cálculo de porcentagens e representação fracionária	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
Porcentagens	(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
Dízimas periódicas: fração geratriz	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
Potências com expoentes negativos e fracionários	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Tabela 2.1: BNCC - Objetos de Conhecimento e Habilidades.

Observa-se que essa tabela contém desde as primeiras ideias sobre fração, ainda implicitamente, com a abordagem da concepção de metade e terça parte, no 2º ano do Ensino Fundamental, até conceitos mais elaborados e abstratos envolvendo fração geratriz e potência com expoente fracionário no 8º e 9º ano, respectivamente (BRASIL, 2018, p. 284-317). Nesta progressão percebe-se a introdução da ideia de fração mais associada ao entendimento de que uma unidade pode ser fracionada em partes menores e aos nomes que estas partes recebem, sem necessariamente estarem associadas a números. No 4º ano os alunos entram em contato com a representação simbólica da fração para representar as partes já conhecidas, as frações unitárias. E ao concluir os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, no 5º ano, são incluídas as demais frações que também são relacionadas com outras representações: forma decimal e porcentagem. A fração é vista com o significado de resultado de uma divisão e também como parte de um todo, além da identificação de frações equivalentes e a comparação de números racionais.

No 6º ano amplia-se e aprofunda-se a ideia de fração a partir do que já foi trabalhado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. E junto ao estudo de equivalência trabalha-se os conceitos de adição e subtração de frações; os estudantes aprendem a calcular a fração de um número, além de estudar fração como parte/todo e como quociente. Espera-se que esses estudantes sejam capazes de solucionar problemas envolvendo frações utilizando diversas estratégias.

No 7º ano são estudados significados de fração como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador; também são introduzidas as operações de multiplicação, divisão e potenciação. A expectativa quanto ao estudo de frações é que os alunos, de modo cumulativo, tenham o conceito consolidado, resolvam problemas com frações que envolvam as operações fundamentais, contemplando seus diferentes significados, com a utilização de diversas estratégias, compreendendo os processos envolvidos, sendo capazes de argumentar e justificar o raciocínio utilizado (BRASIL, 2018, p. 268).

A maior parte das habilidades envolvendo frações são abordadas do 5º ao 7º ano, portanto é fundamental que se dê a devida importância ao estudo deste tema, principalmente nestas séries, objetivando-se o desenvolvimento das competências relacionadas a estas habilidades, consolidando o conceito de fração que é seguramente um dos temas mais desafiadores para o ensino e a aprendizagem matemática na educação básica (RIPOLL et al., 2017, p. iii).

É conveniente salientar que o estudo do pensamento numérico não se completa na unidade Números, mas é ampliado e aprofundado quando se estudam as outras unidades temáticas, desenvolvendo-se conteúdos que se inter-relacionam, portanto, o conceito de frações é necessário e ampliado quando associado a outras unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018, p. 269).

2.3.3 As dificuldades na aprendizagem de fração a partir dos documentos oficiais

A dificuldade na aprendizagem de frações não se restringe aos estudantes do Ensino Fundamental, Médio e até mesmo do Superior (CELESTINO, 2017, p. 2). Historicamente, no princípio dos sistemas de numeração antigos sequer havia a ideia de número fracionário e a maior parte desses sistemas tinha como base os números naturais (CELESTINO, 2017, p. 2). Parte dessa problemática com as frações deve-se às características inerentes ao seu conceito e representação, bastante distintas quando se compara com os números naturais (SIEGLER, 2017). O fato é que "frações têm sido um assunto temido, mal compreendido, mal aprendido"(BERTONI, 2009, p. 12).

Educadores matemáticos concordam que não só a aprendizagem, mas também o ensino dos conceitos relacionados a frações permanecem sendo um obstáculo para o desenvolvimento matemático dos alunos (ONUCHIC, ALLEVATO, 2008, p. 81). Pesquisas vêm apontando essa dificuldade principalmente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em que os professores são regentes de classe e, portanto, lecionam os conteúdos de todas as áreas de conhecimento. Por não apresentarem a formação específica em matemática, não possuem compreensão ampla e profunda sobre números racionais e as diversas interpretações de fração (CAMPOS, MAGINA, NUNES, 2006).

Na maioria das vezes o ensino de fração fica reduzido a informações de nomes e símbolos ou representações com formas geométricas divididas e parcialmente pintadas num exercício de dupla contagem (o número de partes em que se dividiu o inteiro e o número de partes pintadas) (BERTONI, 2009, p. 16). Essa abordagem tem seus resultados repercutidos nas séries subsequentes. Isso acentua a necessidade de uma atenção especial do professor de matemática quando o aluno chega ao 6º ano do Ensino Fundamental quanto ao ensino de frações.

Uma das aprendizagens relacionadas à fração, no 6º ano, de acordo com a BNCC é a capacidade de resolver e elaborar problemas com números racionais. Segundo os PCN o trabalho com situações-problema envolvendo números racionais proporciona a ampliação do entendimento operacional, desenvolvendo a compreensão dos significados de números. Apesar disso, os PCN também salientam que a resolução de questões envolvendo diferentes tipos de número é pouco trabalhada no 6º e 7º anos (BRASIL, 1998, p. 66).

Percebe-se um certo desconforto em utilizar números que apresentem dificuldades para serem manipulados em contextos variados. Assim, os números racionais na forma de fração são evitados e ficam restritos a conteúdos específicos, tanto que o aluno pensa que algo está errado quando o resultado encontrado para determinado problema é uma fração. Isso acaba criando um círculo vicioso, pois o aluno apresenta dificuldade em entender e manipular a fração como número, que é reforçada ao se evitar trabalhar com esse formato, inclusive nas atividades propostas nos livros didáticos em geral. Mesmo quando é necessário o uso de um número fracionário, a tendência é efetuar a divisão e utilizar a forma decimal, ainda que para isso seja preciso empregar um valor aproximado - em caso de dízimas periódicas (BRASIL, 1998, p. 103).

Outro obstáculo enfrentado nos Anos Finais do Ensino Fundamental quanto ao trabalho com frações é que apesar de ser objeto de estudo desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, percebe-se que os estudantes chegam ao 6º ano sem compreenderem as diferentes interpretações do número fracionário, tampouco os procedimentos de cálculo (BRASIL, 1998, p. 100). Como a "aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais" (BRASIL, 1998, p. 101), os alunos acabam enfrentando vários obstáculos, conforme destacam os PCN:

- Infinitas frações podem representar um único número racional (BRASIL, 1998, p. 101). Essa equivalência de frações não é uma ideia simples quanto a sua representação numérica, pois o aluno está acostumado a relacionar cada signo a uma quantidade correspondente no trato de números naturais. Por exemplo: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, utiliza algarismos diferentes para referir-se ao mesmo número racional. Em geral, os alunos têm dificuldades em identificar o número racional indicado, alguns deles enxergam apenas números naturais separados por um traço, e não a forma como numerador e denominador estão relacionados.

- A comparação entre racionais não é tão imediata (visual) quanto com números naturais (BRASIL, 1998, p. 101). A maioria dos alunos compara números naturais com facilidade, pois além de cada número possuir representação única, basta observar o que possui mais algarismos; e em caso de igualdade, é suficiente comparar da esquerda para a direita os algarismos das ordens correspondentes um a um. No entanto, acostumados com a relação $5 > 4$, precisarão entender que $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$. E quando numeradores e denominadores são diferentes, a dificuldade aumenta; por vezes observa-se critérios aleatórios sendo utilizados, que variam de atividade para atividade, mostrando o quanto o estudante não entendeu, mas apenas está tentando dar a resposta esperada para algo que não lhe parece fazer sentido.

- Quanto à multiplicação de números naturais o aluno está acostumado com a ideia de aumento (a não ser quando um dos fatores é 1 ou 0). No entanto, ao multiplicar o 15 por $\frac{1}{5}$ o resultado será 3, bem menor que 15 (BRASIL, 1998, p. 101). Por outro lado, ao efetuar uma divisão o aluno habitualmente espera encontrar um resultado menor que o dividendo. No entanto, ao dividir o 15 por $\frac{1}{5}$ obtém-se $15 \cdot 5 = 75$. O estudante continua não conseguindo fazer analogias do seu conhecimento sobre números naturais aplicando-o ao estudo de frações. O que segue a isso, muitas vezes, é um esforço para memorizar fórmulas e regras, sem entender por que funcionam. Além de penoso e confuso, pode ser eficiente apenas para procedimentos mecânicos, mas não favorece a ampliação e conexão de ideias que servirão de suporte para aprendizagens fundamentais, inclusive de outros campos de conhecimento.

- Outra mudança brusca ao se comparar o conjunto dos números naturais com o conjunto dos números racionais é que neste último não faz sentido pensar em antecessor e sucessor, pois entre quaisquer dois números racionais sempre é possível determinar outro número racional (BRASIL, 1998, p. 101). Por exemplo, ao trabalhar as frações decimais: $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ..., $\frac{9}{10}$, não é simples para o aluno dar exemplos de outras frações que possam ser colocadas entre essas sem que tenha assimilado a ideia de equivalência.

Conceituar equivalência bem como construir procedimentos a serem aplicados para obter-se frações equivalentes são essenciais para resolver problemas envolvendo comparação e efetuar cálculos com números fracionários (BRASIL, 1998, p. 103). Ou seja, poucas ideias fundamentais sendo construídas, com uma sustentação consistente e coerente para o aluno, são ferramentas essenciais para o desenvolvimento do letramento matemático (BRASIL, 2018, p. 266).

Junto a isso, também é fundamental que o estudante seja exposto à fração em diversos contextos, de modo que sejam trabalhadas várias interpretações, como parte-todo, razão, quociente e operador (BRASIL, 1998, p. 102). Porém, não é recomendável lidar isoladamente com cada um desses significados (BRASIL, 1998, p. 103), que devem ser trabalhados ao longo do Ensino Fundamental, conforme as habilidades especificadas na BNCC referentes à cada período, e consolidadas no 7º ano (BRASIL, 2018, p. 284-317).

Considerando-se esses obstáculos diante das habilidades a serem desenvolvidas a partir dos objetos de conhecimento sobre frações, principalmente para o 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, percebe-se a necessidade de uma abordagem conceitual do estudo de frações, pois assim como as ideias de número natural são concebidas lenta e gradativamente, desde as aprendizagens anteriores ao contato com o ambiente escolar (BERTONI, 2009, p. 31), a compreensão de fração é um processo que necessita de tempo e investimento adequados, em que a construção de ideias conectadas não deve ser substituída por um treinamento de memorização mecânica (WALLE, 2009, p. 144).

2.4 Relação entre numerador e denominador: uma ideia fundamental na aprendizagem de frações

A compreensão de frações, nas séries finais do Ensino Fundamental tem sido um assunto complicado, tanto para a aprendizagem quanto para o ensino. Dentre os fatores que contribuem para isso, pode-se destacar: o tempo insuficiente que é dedicado à construção desse conhecimento, desde as séries iniciais (BERTONI, 2009, p. 31); a forma como o assunto costuma ser abordado, priorizando os processos e os resultados dos cálculos, obscurecendo o que realmente é fração (BERTONI, 2009, p. 12). Assim o assunto fica estigmatizado, tendendo a ser evitado tanto por estudantes quanto por professores: o que tanto aparenta ter sido ensinado e tanto aparenta ter sido aprendido é um domínio superficial de regras que é perdido em curto prazo (WALLE, 2009, p. 346). Essa frustração poderia ser evitada ao desenvolver o conteúdo priorizando as ideias fundamentais, pois "uma ideia matemática compreendida por completo é estendida com maior facilidade à aprendizagem de uma nova ideia" (WALLE, 2009, p. 47).

Uma abordagem adequada da relação fundamental entre numerador e denominador (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 97) é suficiente para que o estudante atribua os demais significados às frações, de maneira lógica, a partir da mediação do professor. Muitos alunos fazem confusão com fração porque o tema lhes é apresentado como "conjuntos de regras e métodos" (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 97). A ideia mais importante para os alunos aprenderem quanto às frações é a de relação (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 97). É essencial a percepção de que numerador e denominador estão relacionados e que nada se pode afirmar sobre a fração sem conhecer qual é essa ligação (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 97). Devendo ficar bem claro que a fração não indica o tamanho da unidade ou das partes envolvidas, mas essa dependência entre seus termos (WALLE, 2009, p. 335).

Uma fração é grande apenas quando o numerador representa uma grande proporção do denominador: essa ideia deve ser assimilada antes que se mostre as regras que permitem operacionalizar frações. De outro modo, quando são ensinados os procedimentos para trocar numerador e denominador, os alunos começam a ver frações como números separados e perdem a ideia básica da relação (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 97).

Normalmente, o aluno pensa que fração tem a ver com figuras geométricas divididas e parcialmente pintadas (BERTONI, 2009, p. 16), essa é outra razão para os estudantes ficarem confusos. Os modelos visuais são essenciais para os alunos, mas quando as frações são vistas apenas como parte de uma torta ou de uma tira retangular, entendem que uma fração é uma porção de um todo (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 97). Portanto, frequentemente os estudantes não enxergam uma fração como um número, mas, ao serem ensinados que fração é a representação de um número, começam a perceber a relação expressa por ele (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 98). Tomando como ponto de partida a ideia de uma relação é mais fácil para o aluno perceber a necessidade de equivalência (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 98). Ou seja, os conceitos são construídos a partir das ideias apresentadas inicialmente, não sendo expostos numa sequência de procedimentos sem justificativa e ligação entre si (WALLE, 2009, p. 47).

É importante ressaltar que ao introduzir a ideia de fração deve-se enfatizar o conceito de numerador e denominador, mas não necessariamente utilizar esta nomenclatura a princípio, pois esses termos "não têm referente comum para as crianças" (WALLE, 2009, p. 327). Sendo utilizadas ou não, são palavras que por si próprias não ajudarão os estudantes a aprenderem os seus significados (WALLE, 2009, p. 327). Seria interessante que estes termos surgissem de modo natural, após a assimilação dos seus significados, sendo apresentados pelo professor e reconhecidos pelos alunos por sua caracterização como termos da fração. Diferentemente disso, segundo Bertoni, as frações são apresentadas a partir de figuras junto à notação de numerador e denominador separados por um traço, nomeando-se os termos ; mas a criança precisa de mais tempo para a construção desse conceito (BERTONI, 2009, p. 21; 31).

2.4.1 O desenvolvimento do conceito de fração e o senso numérico

Para o desenvolvimento do conceito de fração como uma relação entre numerador e denominador, o senso numérico é um fator determinante, pois "dá vida aos números que usamos e às relações entre eles" (CORSO, DORNELES, 2010, p. 300). Ainda de acordo com Corso e Dorneles, crianças com o senso numérico desenvolvido realmente compreendem o significado dos números (CORSO, DORNELES, 2010, p. 300).

Senso numérico é uma característica primitiva do ser humano, haja vista que até alguns animais são dotados desse senso, sendo capazes de perceber quando se tiram ou acrescentam-se quantidades a uma pequena coleção (EVES, 2011, p. 25). Contudo, essa sensibilidade precisa ser estimulada e desenvolvida. Senso numérico é descrito como uma "boa intuição sobre números e suas relações. Ele se desenvolve gradualmente como resultado da exploração de números, visualizando-os em uma variedade de contextos e relacionando-os de modos que não sejam limitados aos algoritmos tradicionais" (HOWDEN, 1989 apud WALLE, 2009).

O desenvolvimento do senso numérico é considerado essencial para se entender as dificuldades de aprendizagem na matemática (CORSO, DORNELES, 2010, p. 298). Ao apresentar problemas quanto a esse desempenho, o estudante não interage de forma significativa com as temáticas envolvendo números (como quantificação, relação e comparação), o que acentua seus bloqueios iniciais (CORSO, DORNELES, 2010, p. 299). Este fato merece atenção, pois essa percepção é crucial para desenvolver a competência em matemática (CORSO, DORNELES, 2010, p. 307).

É o senso numérico que possibilita ao indivíduo, além de compreender o significado de número, desenvolver estratégias para a resolução de problemas: comparações, estimativas, invenção de procedimentos para efetuar operações, cálculo mental, percepção da plausibilidade de um resultado, métodos quantitativos para indicar, processar e entender um dado (CORSO, DORNELES, 2010, p. 299). O enfoque é dado aos números e não aos dígitos (CORSO, DORNELES, 2010, p. 299), pois trata-se de ideias e não simplesmente das representações.

Ao perceber a fração como número, que surgiu a partir da necessidade da ampliação do conjunto dos números naturais, o aluno conseguirá mais facilmente aplicar aquilo que já sabe sobre números para esta nova categoria, apesar das especificidades das frações. Neste sentido, o pensamento flexível e intuitivo sobre os números precisa continuar a ser trabalhado no decorrer dos anos escolares à medida que as frações e as demais formas dos números racionais são acrescentadas ao repertório dos alunos (WALLE, 2009, p. 148).

De acordo com Walle (2009), iniciar o estudo de frações enfatizando as partes fracionárias é importante. Contudo, quanto a isso ainda diz:

> [...] o senso numérico de frações ou senso fracionário exige algo mais – exige que os alunos tenham alguma sensibilidade intuitiva para frações. Eles devem saber "sobre" o quão grande é uma fração particular e poder dizer facilmente qual de duas frações é a maior. (WALLE, 2009, p. 332).

Ou seja, são fundamentais o desenvolvimento do senso numérico da dimensão da fração e a habilidade de comparar duas frações (WALLE, 2009, p. 337). Avançar no conteúdo, apresentando as operações entre frações, sem que os estudantes tenham uma boa compreensão do tamanho de uma fração é um equívoco que certamente será traduzido em retrocesso ao invés do real avanço no conteúdo (WALLE, 2009, p. 337). Assim, a aprendizagem não será efetiva e a dificuldade será agravada pela confusão de conceitos que não farão sentido para o aluno até porque "o cálculo com frações é construído sobre uma compreensão das operações e do senso numérico fracionário" (WALLE, 2009, p. 345). Se não houve a compreensão efetiva do conceito de fração, tampouco haverá o aprendizado quanto às operações envolvendo frações.

2.4.1.1 Importância da estimativa para comparação e compreensão das frações

No processo da construção e consolidação do conhecimento de fração como uma relação fundamental entre numerador e denominador e os respectivos desdobramentos disso, as estratégias de estimativa e comparação são ferramentas essenciais, que auxiliam no pensamento proporcional. Portanto, as atividades propostas devem intencionalmente incentivar esse tipo de raciocínio, mostrando sempre ao aluno que há múltiplos caminhos corretos para chegar a um determinado resultado. E mais, é preciso que o estudante entenda a importância da reflexão, das estratégias, da crítica dos resultados, muitas vezes até mais relevantes para a aprendizagem que as próprias respostas obtidas em si mesmas.

O aluno que compreende o significado dos números trabalhados, diante do problema de somar as frações $\frac{10}{11}$ e $\frac{5}{6}$, por exemplo, de antemão pode estimar que se tratam de dois números entre $\frac{1}{2}$ e 1, pois o primeiro é igual a uma unidade diminuída de um onze avos e o segundo, analogamente, uma unidade menos um sexto; e como $\frac{1}{11} < \frac{1}{6}$, sabe que a primeira fração representa um número maior que a segunda e que ambas somam um número entre 1 e 2. Contudo, normalmente é observado um comportamento diferente dos alunos: ou não sabem responder esse tipo de questão e acabam somando numeradores e denominadores, sem criticar o resultado $\frac{11}{16}$ que é menor que um; ou tentam fazer a divisão para trabalhar com a forma decimal, chegando à dízima e não obtendo o resultado preciso; ou ainda, uma pequena parcela dos estudantes, conhecem e lembram-se do processo convencional, que foi memorizado, no entanto ao obterem o resultado correto $\frac{115}{66}$ não conseguem estimar a dimensão do número representado.

A própria BNCC, com respeito ao cálculo, orienta que é preciso acrescentar à execução dos algoritmos operacionais a habilidade de calcular mentalmente, fazendo estimativas, de modo que o aluno consiga decidir quais são os procedimentos adequados de cálculo (BRASIL, 2018, p. 276). O primeiro estímulo deve ser sempre ao pensamento lógico, significativo, não à produção de registros de forma mecânica, sem compreensão (WALLE, 2009, p. 322).

Fazer estimativas ao calcular com frações está ligado quase totalmente às ideias das operações e de frações. Não há necessidade de um algoritmo de cálculo para estimar determinado resultado. Assim, a estimativa precisa fazer parte do desenvolvimento do cálculo, garantindo a atenção dos estudantes quanto aos significados das operações e o tamanho previsto dos resultados (WALLE, 2009, p. 345). Estimar "encoraja o pensamento reflexivo e ajuda a construir o senso numérico informal com frações" (WALLE, 2009, p. 346).

Além disso, cabe ressaltar que o cálculo com frações está conectado de modo especial com duas áreas: Decimais e Porcentagens e o Raciocínio Proporcional. A representação fracionária geralmente pode contribuir com a fluência computacional, principalmente na área de estimativa. Por exemplo, $2,447 \times 0,509$ é aproximadamente $\left(2\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}$ ou $1\frac{1}{4} = 1,25$; e 25% de R$124, 00 pode ser encontrado com mais facilidade ao pensar em $\frac{1}{4}$ de 124. Já a multiplicação de frações ajuda a pensar em frações como operadores, o que está relacionado aos conceitos de razão e proporção, especialmente aos conceitos de escala e aos fatores de escala (WALLE, 2009, p. 345).

A importância fundamental da estimativa também é reconhecida para a vida cotidiana, em situações práticas, no mundo do trabalho, conforme apontado por pesquisa (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2020, p. 43). Apesar de desempenhar um papel ínfimo na preparação matemática dos estudantes, a habilidade de fazer estimativas é amplamente utilizada pelo comércio e indústria, sendo destacada em dois aspectos: possuir a aptidão e a iniciativa de julgar se determinado resultado é plausível; e, ser capaz de fornecer uma ideia aproximada de um resultado, em lugar de calcular com exatidão (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2020, p. 43).

Boaler, também relata em sua experiência, em diversas salas de aula, durante muitos anos de trabalho com educação matemática, que os alunos se mostram receosos em fazer estimativas, mesmo quando são convidados. Os estudantes não percebem a estimativa como uma atividade matemática, chegando ao ponto de usarem os processos habituais de algoritmos memorizados, calculando exatamente a resposta e depois fazendo um arredondamento para dar a impressão de que fizeram uma estimativa (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2020, p. 43). Essa experiência é bastante recorrente nas salas de aula e evidenciada, por exemplo, ao trabalhar a comparação de frações.

Em várias situações propostas durante as aulas não há necessidade de exatidão quanto ao valor de determinada fração para uma resposta adequada como, por exemplo, ao comparar duas frações. Mas, em geral, não é primeiramente sugerido que o aluno pense sobre o tamanho das frações, antes, são ensinados procedimentos, frases prontas, para que o estudante utilize na decisão sobre qual é a fração maior, ou se essas frações são equivalentes (WALLE, 2009, p. 333).

O trabalho com comparação e estimativa também é interessante pela possibilidade de ser utilizado em vários níveis de dificuldade. Segundo Walle, entender por que uma fração está mais próxima de um décimo ou 1 é um bom começo para desenvolver o senso numérico de fração, enfatizando o tamanho das frações de maneira importante, mas com simplicidade (WALLE, 2009, p. 332). Essa habilidade de dizer qual de duas frações é maior é construída em torno de ideias fracionárias, não em torno de uma destreza com algoritmos ou macetes com símbolos (WALLE, 2009, p. 333).

2.4.2 "Conceito X Regras" – uma inversão na ordem

Por ser uma disciplina conceitual é necessário que os estudantes reflitam lenta e profundamente sobre as ideias matemáticas, sem a pressa em usar métodos que procuram memorizar como sinônimo de estar fazendo matemática (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 4). Os procedimentos são importantes na sistematização do raciocínio, sendo uma ferramenta facilitadora, no entanto, não devem ser apresentados de maneira formal até que o aluno os tenha construído, saiba explicá-los (WALLE, 2009, p. 337). Ainda de acordo com Walle, um erro educacional grave, que acontece com a maior parte dos algoritmos "é correr muito depressa para a regra" (WALLE, 2009, p. 338). Os PCN ressaltam que o ensino no Brasil é marcado pela formalização precoce de conteúdos, excessiva preocupação com o exercício de aptidões e mecanização de procedimentos sem compreensão (BRASIL, 1998, p. 103).

Para Walle, é fundamental promover ampla oportunidade para os alunos desenvolverem o senso numérico fracionário e "não começar imediatamente a falar sobre denominadores comuns e outras regras de cálculo". Faz sentido adiar as computações e trabalhar os conceitos se os alunos não estiverem conceitualmente prontos", até o 8º ou 9º ano (WALLE, 2009, p. 345). De outro modo, a abordagem focada nas regras pode estar impedindo os estudantes de pensarem (WALLE, 2009, p. 345).

No trabalho com frações a partir de uma perspectiva conceitual, o professor deve ter em mente que há múltiplas possibilidades, inclusive aquelas que ele ainda não conhece. O livro didático não deve ser usado como um conjunto de ditames a serem fielmente seguidos, mas como uma das ferramentas disponíveis nesse processo de estimular o desenvolvimento do senso numérico e mediar a aprendizagem. O aluno deve entender que o principal não é o método usado, mas a sustentação matemática para o raciocínio que o fundamenta. Quando há a compreensão das ideias fundamentais, os métodos e as regras se harmonizam perfeitamente (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 8).

De acordo com a BNCC, os algoritmos podem ser objetos de estudo nas aulas de matemática, junto ao pensamento computacional. A Base define um algoritmo como "uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema" (BRASIL, 2018, p. 271) . Nesse sentido, ao lidar com generalizações sobre as frações, simultaneamente o aluno estará sendo preparado para a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável (BRASIL, 2018, p. 271), enquanto compreende as ideias relacionadas a esta representação do número racional. Ou seja, o problema não está no uso de algoritmos e regras, mas em apresentá-los ao aluno sem conexão significativa com o conceito de fração.

De acordo com os PCN, no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental é importante estimular a diversidade e o aperfeiçoamento dos cálculos aritméticos, mas superando a mera memorização, como "("divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima", "inverte a segunda e multiplica")"; exemplificando com o tradicional procedimento para obtenção de frações equivalentes, ainda destaca que essas técnicas mecânicas limitam desastrosamente o ensino do cálculo (BRASIL, 1998, p. 67).

Walle faz uma crítica parecida ao tratar da transformação de número misto em fração imprópria, dizendo que não existe motivo para fornecer uma regra como calcular o produto do número inteiro pelo denominador e somar com o numerador; e para fazer o processo inverso dividir o numerador pelo denominador, usar o quociente como parte inteira do número misto e o resto da divisão como numerador (WALLE, 2009, p. 327). É importante destacar que, neste contexto o aluno precisa memorizar vários processos e caso se esqueça de algo, ou cometa algum erro, não terá a possibilidade de conferir, pois não entende o que as regras significam, somente as utiliza de forma superficial, ainda que o professor tenha fornecido uma explicação ao expor o conteúdo para a classe.

Boaler aponta a dificuldade de ensino e aprendizagem ao tratar sobre a divisão de frações. Segundo a autora, ao apresentar a situação como "1 dividido por $\frac{1}{3}$, muitas pessoas interpretarão como $1 \times \frac{1}{3}$" (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2020, p. 153). Diversas pessoas referem-se à multiplicação e divisão de frações como sendo as mais fáceis, em comparação com adição e subtração. No entanto, isso é dito levando-se em conta apenas os procedimentos utilizados: enquanto a adição e subtração exigem a obtenção de frações equivalentes, multiplicação e divisão são efetuadas de maneira bastante semelhante e direta (para obter o produto de frações multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador; para dividir, basta multiplicar a primeira pelo inverso da segunda). Contudo, poucas pessoas saberiam explicar o significado obtido, ou seja, a relação entre o algoritmo e a fração obtida.

Diante de toda esta problemática é fundamental salientar que ao pensarem sobre frações como uma relação, os alunos terão a possibilidade de entender equivalência de frações mais facilmente. E essa equivalência é o centro de todo trabalho com frações (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2020, p. 65). Um dos erros mais comuns que os alunos cometem com frações é somá-las termo a termo (os numeradores e os denominadores). Isso faz sentido quando as frações são aprendidas como um conjunto de regras (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2020, p. 65).

Capítulo 3

O desafio da aprendizagem em um contexto de Pandemia

Em 2020 o mundo vivenciou uma realidade totalmente inesperada, que vem se alterando dia a dia, sem previsão de retorno ao normal. O conjunto de adaptações impostas à vida em sociedade, desde então, vem sendo denominado "novo normal" (SILVA, NERY, NOGUEIRA, 2020, p. 100). Em 11 de março de 2020 a Organização Mundial da Saúde (OMS), declarou a pandemia decorrente do aumento dos casos de covid-19 (FERREIRA, et al., 2020, p. 7). Diante deste panorama com impactos na saúde, sociais e econômicos, a pandemia gera incertezas quanto ao futuro (OLIVEIRA, CARREIRO, 2020, p. 2).

No cenário educacional, com as medidas de isolamento, as escolas precisaram suspender as atividades presenciais de maneira abrupta e pensar em estratégias de ensino e aprendizagem alternativas (SILVA, NERY, NOGUEIRA, 2020, p. 111), que permitissem a interação com os estudantes, reduzindo os prejuízos à aprendizagem (FERREIRA, et al., 2020, p. 11). Professores, junto de toda a comunidade escolar precisaram se reinventar, passando a utilizar diversas ferramentas tecnológicas (SILVA, NERY, NOGUEIRA, 2020, p. 100).

No entanto, devido a aspectos socioeconômicos, estas metodologias tecnológicas não contemplaram todos os alunos, principalmente os matriculados na rede pública. Nota-se, frequentemente, a dificuldade de interação entre professor e aluno, mediada pelas tecnologias neste "novo normal". Quanto a isso, destaca-se os seguintes fatores:

- Falta de equipamentos tecnológicos (smartphone, computador, tablet ou similar);
- Falta de acesso à Internet;
- Falta de acompanhamento e monitoramento por parte da família;
- Falta de engajamento do aluno com as atividades escolares, mostrando desinteresse durante o período de ensino remoto.

Nesse sentido, observa-se que a Pandemia ajudou a evidenciar fragilidades anteriores a 2020, mas agravadas desde então. É desafiador pensar em desenvolver um ensino de matemática que possa contemplar a todos, em todas as suas especificidades, de maneira remota, mas que ainda faça sentido (SILVA, NERY, NOGUEIRA, 2020, p. 101). Buscando-se atender às necessidades relacionadas ao ensino e aprendizagem, dentro das possibilidades existentes, as escolas brasileiras também vêm trabalhando com apostilas impressas, contendo orientações e atividades, numa proposta de estudo dirigido. Neste formato a comunicação não é dinâmica e praticamente apenas o professor envia material para o aluno, não há uma interação. Muitos estudantes tiveram apenas este tipo de contato com a escola neste período, o que suscita a necessidade de formulação e implementação de propostas de trabalho mais eficazes.

Com relação às dificuldades neste ensino remoto improvisado, é importante ressaltar a falta de infraestrutura das escolas para a formação tecnológica do professor e prática junto aos alunos (SILVA, NERY, NOGUEIRA, 2020, p. 105). Contudo, com os desdobramentos da Pandemia, o uso das tecnologias digitais para a mediação do ensino de forma sistematizada, em meses, passou a ser uma realidade. Neste aspecto, o ensino híbrido deve ser visto como uma nova oportunidade (OLIVEIRA, CARREIRO, 2020, p. 2).

Oliveira e Carreiro destacam que muitos professores ainda são resistentes em incluir a tecnologia na educação presencial e, quanto aos estudantes, o desafio envolve autodisciplina, para manter uma rotina de estudos, e dificuldades em usar a tecnologia (OLIVEIRA, CARREIRO, 2020, p. 2).

Desde os PCN encontra-se a orientação para o uso das tecnologias disponíveis na mediação da aprendizagem, de modo que se aproveite ao máximo os recursos tecnológicos, "tanto pela sua receptividade social como para melhorar a linguagem expressiva e comunicativa dos alunos" (BRASIL, 1998, p. 46). A BNCC ratifica esse pensamento e declara nas competências da educação básica que as tecnologias digitais de informação e comunicação devem ser amplamente utilizadas, compreendidas e até mesmo criadas pelos estudantes; favorecendo a comunicação, acesso e disseminação de informações, produzindo conhecimentos de maneira individual e colaborativa (BRASIL, 2018, p. 9).

Tendo em vista todas essas demandas, nas seções seguintes será feita uma apresentação e discussão breve sobre o ensino híbrido, mostrando como vem ocorrendo essa inovação na realidade do Ensino Fundamental na rede pública, os desafios e os impactos decorrentes percebidos na aprendizagem.

3.1 O Ensino Híbrido

3.1.1 Definição de ensino híbrido

Híbrido quer dizer misturado, mesclado, blended (em inglês). Neste sentido, é possível observar que a educação sempre foi híbrida, pois sempre conciliou diversos espaços, tempos, metodologias, atividades e pessoas. Com a mobilidade e a conectividade, em constante crescimento, isso é muito mais perceptível e significativo atualmente. O ambiente de ensino e aprendizagem é proporcionado de inúmeras maneiras, a qualquer momento e em múltiplos espaços (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 41).

Nesta pesquisa será utilizada a definição de ensino híbrido do Clayton Christensen Institute, dos Estados Unidos:

> O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um aluno aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino on-line, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, lugar, modo e/ou ritmo do estudo, e pelo menos em parte em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência (CHRISTENSEN, HORN, STAKER, 2013, p. 7).

Dessa forma, é preciso ter cuidado para não cometer o equívoco de simplesmente dizer que com a Pandemia o modelo de ensino passou a ser híbrido. Pois o que vem ocorrendo na maior parte das escolas brasileiras, desde então, quando tanto, é o ensino remoto. O fato de as aulas serem transmitidas on-line (aula síncrona, transmitida ao vivo) não caracteriza o ensino híbrido, pois neste programa o aluno tem, em algum momento, a mediação do professor de forma presencial.

Contudo, o ensino híbrido pode inspirar e fornecer várias ferramentas para o ensino remoto, neste contexto emergencial, combinando metodologias ativas, com destaque para os recursos digitais e a vantagem fornecida pela personalização do ensino.

A figura a seguir mostra um esquema do ensino híbrido, com a divisão entre uma forma sustentada, que pode ser adotada dentro do formato tradicional, que já é praticado, e a forma disruptiva, que necessita de mudanças maiores, rompendo com a forma convencional da dinâmica de ensino.

Figura 3.1: Zona híbrida do ensino

Fonte: CHRISTENSEN, HORN, STAKER (2013, p. 28).

Esses modelos são identificados de acordo com as seguintes características, expostas por BACICH, TANZI e TREVISANI (2015) em obra que tomou como ponto de partida os resultados da pesquisa realizada pelo Clayton Christensen Institute (2013) sobre o tema:

I) Modelo de rotação: os alunos se revezam nas tarefas propostas, de acordo com um horário previamente fixado ou orientação do professor. As atividades podem conter discussões em grupo, com ou sem o acompanhamento do professor, tarefas escritas, leituras e, sempre, uma atividade on-line. Esse modelo pode se apresentar sob as seguintes propostas:

- **Rotação por estações:** os estudantes são organizados em grupos (estações de aprendizagem) para desenvolver tarefas diferenciadas, de acordo com a estação. As atividades propostas são independentes, mas funcionam de forma integrada, objetivando promover a intencionalidade pedagógica para a qual foi formulada a aula. Os estudantes se revezam por todas as estações, até que tenham passado por todos os grupos. Essa prática favorece à personalização do ensino, permitindo ao professor preparar atividades diversificadas de acordo com a necessidade do aluno, além de dar atenção mais direcionada ao atender a um grupo por vez.

- **Laboratório rotacional:** neste modelo a turma é dividida em dois grupos, um permanece na sala e outro vai para um laboratório de aprendizado, para desenvolver tarefas estabelecidas pelo professor, mas de maneira autônoma. Enquanto isso, o professor pode dar mais atenção ao grupo que ficou na sala, sanando dúvidas, trabalhando conceitos e orientando a execução das tarefas. O modelo não elimina as propostas desenvolvidas de forma presencial em sala de aula, mas utiliza o ensino on-line como uma inovação sustentada para auxiliar a metodologia tradicional a responder melhor às necessidades dos estudantes.

- **Sala de aula invertida:** como a palavra sugere, há uma inversão da aula expositiva tradicional: o aluno estuda o conteúdo antecipadamente, de maneira autônoma, a partir de material encaminhado pelo professor. Assim, quando o conteúdo é abordado em classe o professor fará um diagnóstico do que o aluno já entendeu, o que ainda precisa ser trabalhado e a melhor maneira para esta mediação, utilizando estratégias diversificadas para contemplar os diferentes níveis de aprendizagem alcançados pelos discentes. Assim, o que seria feito em casa, aplicação e atividades propostas sobre o conteúdo, agora é feito em classe.

- **Rotação individual:** neste modelo o enfoque é voltado para as necessidades individuais dos alunos. Cada estudante possui um roteiro do que deve cumprir em sua rotina para os conteúdos a serem estudados. Esse tipo de rotação se diferencia dos demais porque os alunos não passam necessariamente por todas as estações ou modalidades propostas. Também é importante ressaltar que não existe uma proposta de rotação individual que seja o único tipo de estratégia utilizado em todo o tempo. Essa é uma das estratégias para a personalização do ensino, porém pode ocorrer combinada a outras.

II) Modelo flex: nesta modalidade os estudantes também possuem uma lista a ser cumprida, com foco no ensino on-line. O andamento de cada aluno é personalizado, e o educador fica disponível para esclarecer questionamentos. Esse modelo é considerado disruptivo e propõe uma organização escolar incomum no Brasil. Apesar de ser semelhante ao processo de rotação individual, a organização dos alunos não se dá por anos de escolaridade. Neste caso, alunos do 6º ano poderiam desenvolver atividades junto a outros do 7º ou 8º ano, por exemplo.

III) Modelo *à la carte*: este modelo estimula bastante o protagonismo do estudante, pois é dele a responsabilidade de organizar seus estudos, conforme os objetivos gerais a serem alcançados, que foram organizados previamente em conjunto com o professor. Nesse modelo, ao menos um curso é realizado totalmente on-line, embora o professor acompanhe, dando o devido suporte. O período on-line pode acontecer no ambiente escolar, em casa ou em outros lugares.

IV) Modelo virtual enriquecido: é uma experiência vivida por toda a escola, de modo que, em cada disciplina o tempo é dividido entre a aprendizagem on-line e a presencial. O aluno tem todas as disciplinas ofertadas on-line e frequenta a escola apenas uma vez por semana. Portanto, assim como o modelo *à la carte*, o modelo virtual enriquecido é considerado disruptivo, visto que a organização proposta não é comum no Brasil.

Dito isso, é importante ressaltar que não existe uma ordem determinada para a aplicação e o desenvolvimento desses modelos em classe, sequer uma hierarquia entre eles (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 83). Outro destaque importante é que "as metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos" (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 50). Assim, deve-se ter cuidado em não restringir o ensino híbrido a metodologias ativas, a alternância entre presencial e on-line, sala de aula e outros ambientes. Antes, o Ensino Híbrido, por um lado, mostra que "ensinar e aprender nunca foi tão fascinante, pelas inúmeras oportunidades oferecidas", mas, por outro lado, mostra a frustração pelas "dificuldades em conseguir que todos desenvolvam seu potencial e se mobilizem de verdade para evoluir sempre mais" (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 43).

3.1.2 A realidade do Ensino Híbrido na Escola Pública de Ensino Fundamental

Em 2015, Morán já apontava para a presença de elementos do Ensino Híbrido na educação formal, de maneira cada vez mais evidentes, como a implementação de metodologias ativas, com o modelo on-line, numa mistura de colaboração e personalização, e maior flexibilização da dinâmica de ensino e aprendizagem (MORÁN, 2015, p. 27). Nesse sentido, Morán indica a necessidade de que cada escola defina um plano estratégico de como fará estas mudanças inevitáveis. Ainda que inicialmente isso aconteça pela troca de experiências, dando suporte a professores, gestores e alunos que estão mais motivados e possuem experiências em unir o presencial e o virtual, é preciso ir além e lidar com esta questão de modo estrutural, para mudanças em um ou dois anos (MORÁN, 2015, p. 27). O avanço, à época, ainda era considerado muito pouco em relação à necessidade (MORÁN, 2015, p. 28).

O fato é que, enquanto o Ensino Híbrido era vislumbrado como uma possibilidade interessante para o Ensino Superior, por exemplo, unindo o formato de Educação a Distância (EaD) a encontros presenciais (MORÁN, 2015, p. 30), isso seria pouco provável para alunos bem mais jovens, cursando o Ensino Fundamental regular. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases (LDB), o ensino fundamental deve ser presencial, com a possibilidade de ensino a distância apenas para complementar a aprendizagem ou em situações emergenciais (BRASIL, 1996, [n.p.]).

Com a Pandemia, o ensino remoto foi autorizado em caráter emergencial (LEIVAS et al., 2021, p. 90). Devido ao longo tempo em que os alunos se mantiveram afastados das atividades presenciais e o contínuo avanço dos casos de Covid-19, permanece a orientação para o ensino a distância, além da retomada gradual ao formato presencial. Neste sentido, os sistemas educacionais vêm se organizando e implementando também o ensino híbrido: possibilitando um número menor de alunos em classe (cumprindo o protocolo de distanciamento) a partir de um revezamento dos alunos na escola. Assim, os alunos cumprem a carga horária com parte presencial e parte remota. Contudo, devido a toda problemática envolvida, ainda há situações em que os alunos estão com o ensino no formato totalmente remoto: ou porque as famílias optaram, ou porque o ensino híbrido ainda não foi adotado (ou autorizado pelos órgãos competentes locais). Toda a reorganização da dinâmica educacional no Brasil, nesse "novo normal", observa as regulamentações federais (BRASIL, 2020).

Nesse contexto, no Espírito Santo, a Secretaria de Estado da Educação (SEDU) começou a oferecer o Ensino Híbrido para os alunos do Ensino Fundamental, por meio das escolas estaduais em 26 de outubro de 2020 (ESPÍRITO SANTO, 2020), enquanto a maioria das escolas municipais permaneceram fechadas (atendendo apenas remotamente).

Considerando-se todas as dificuldades pontuadas nesse processo, já existe pesquisa apontando o prejuízo na aprendizagem dos educandos brasileiros (CAeD/UFJF, 2021), o que confirma a percepção de toda a comunidade escolar: os efeitos da Pandemia impactam diretamente a aprendizagem dos estudantes, com repercussão a longo prazo, estendendo-se aos próximos anos. A partir dos dados apresentados, na figura a seguir, pode-se observar como o letramento matemático do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental destaca-se como fator ainda mais preocupante, pelo menos, nos anos imediatamente posteriores ao início da pandemia, pois as aprendizagens construídas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental são essenciais para a compreensão dos objetos de conhecimento das séries seguintes.

Figura 3.2: Resultados da pesquisa em comparação com o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) de 2019 e 2017, para Língua Portuguesa e Matemática

Etapa	Proficiência SAEB 2017 (final do ano letivo)	Proficiência SAEB 2019 (final do ano letivo)	Proficiência Pesquisa Amostral 2021 (início do ano letivo)	Diferença de Proficiência (Amostral 2021 – SAEB 2019)
Língua Portuguesa				
5º EF	225,8	223,4	193,8	-29,6
9º EF	256,6	261,6	250,4	-11,2
3º EM	266,0	279,1	268,2	-10,9
Matemática				
5º EF	238,8	242,6	196,4	-46,3
9º EF	253,6	261,7	247,9	-13,8
3º EM	263,2	273,5	255,3	-18,2

Fonte: CAeD/UFJF (2021).

Desse modo, o estudo de frações, que já era um dos pontos sensíveis do Ensino Fundamental quanto ao ensino e a aprendizagem (WALLE, 2009, p. 322), tem esse quadro agravado. Isso faz com que o trabalho com frações seja ainda mais desafiador. Durante o tempo em que esta pesquisa é realizada, observam-se vários elementos que dificultam a abordagem do tema "frações", em particular.

Para que se entenda melhor o contexto em que se dá esta pesquisa é importante destacar: a pesquisadora é professora, atuante na Educação Básica, ininterruptamente, desde 2002, sempre na função de professora, trabalhando com alunos de todas as faixas etárias e séries escolares. Nesta trajetória, a maior experiência concentra-se nos Anos Finais do Ensino Fundamental, segmento em que atua hoje, fazendo parte do quadro de docentes, servidores públicos, do Estado do Espírito Santo e também da Prefeitura de Aracruz, no mesmo estado.

Neste período, o estudo de frações, bem como os demais conteúdos foram trabalhados com a mediação do Google Sala de Aula Institucional e seus recursos, principalmente o Google Forms e vídeos do Youtube. Contudo, os instrumentos tecnológicos mais democráticos, acessíveis a um maior número de alunos, como em todo o Brasil, foram as redes sociais, com destaque para o WhatsApp. Outra mediação para o estudo de frações é o material impresso disponibilizado às famílias. Com este trabalho remoto com 6º e 7º anos, além das dificuldades costumeiras, pontua-se as seguintes, junto ao que foi apontado anteriormente:

- A falta dos encontros presenciais impossibilitou a construção do conhecimento a partir da manipulação de material concreto, de forma colaborativa, a partir da mediação do professor. Assim, não foi possível perceber as dúvidas, incertezas, concepções dos estudantes no momento de estudo e fazer as devidas intervenções, promovendo o debate enriquecedor de ideias. Com certeza, a interação com a turma, de modo constante, é uma das grandes dificuldades encontradas.

- Como esses alunos são bastante jovens não apresentam autonomia e maturidade suficiente para desenvolver as atividades. Além das problemáticas de acesso às atividades, até mesmo no formato impresso, vários alunos não conseguiram ler e entender os roteiros de estudo, ou seja, as Atividades Pedagógicas Não Presenciais (APNPs). Esse fato é observado tanto com estudantes que não possuem o acompanhamento e ajuda da família quanto com os que possuem. Alguns relatos constantes de pais, quando em contato com a escola, são sobre a dificuldade para auxiliar os filhos com as tarefas a distância (LEIVAS et al., 2021, p. 79), principalmente quando são de matemática. Pais e professores querem ajudar, mas muitas vezes sentem-se impotentes.

- Neste período, pode-se dizer, de certo modo, que cada domicílio tornou-se uma escola: professores trabalharam um grande período de casa, para atender as necessidades pedagógicas, mas o mais problemático foi que as casas dos alunos também transformaram-se no ambiente escolar do estudante (LEIVAS et al., 2021, p. 32). E, na maioria dos casos, o espaço, os recursos humanos e materiais não são adequados (LEIVAS et al., 2021, p. 73). Vários desses alunos ficam sozinhos enquanto os responsáveis trabalham, na maioria dos casos não possuem computadores ou tablets, precisam esperar até o período da noite para ter algum contato com internet (muitas vezes restrita), pelo aparelho celular de um adulto.

- Ainda com relação ao acesso à internet, além das dificuldades de ordem financeira, vários alunos residem em área rural e por isso não possuem conexão, ficando ainda mais restritos sob este aspecto. Para suprir essa demanda, o governo do estado do Espírito Santo contratou a programação de videoaulas, produzidas pelo estado do Amazonas, para serem transmitidas via TV aberta. No entanto, no município de Ibiraçu, onde ocorre esta pesquisa, não foi possível sintonizar os canais, assim como em vários outros locais.

- Dessa forma, o ensino-aprendizagem de frações ficou bastante comprometido neste período, pois as formas disponíveis para o ensino-aprendizagem não supriram as necessidades, além de não estarem ao alcance de todos.

- Com tudo isso, à medida que o tempo transcorre, ficam cada vez mais evidentes os diferentes níveis de aprendizagem dos alunos de uma mesma série, principalmente após o retorno gradual ao formato presencial. Enquanto alguns alunos mantiveram-se engajados, participando das atividades propostas, interagindo nos formatos digitais, uma parte deles apenas fez as APNPs, de maneira precária, ou simplesmente evadiram. Dentre os alunos que se afastaram da escola, alguns foram resgatados para o atendimento presencial. Logo, dentro de uma mesma sala, virtual ou presencial, há necessidades pedagógicas muito diversificadas para o ensino e a aprendizagem de frações, por exemplo.

- Até mesmo após este retorno as dificuldades persistem, pois no período em que os alunos não estão na escola é difícil mantê-los engajados. Antes da pandemia já era difícil que os estudantes tivessem uma rotina de estudos em casa, fazendo atividades extraclasse, e agora este quadro é acentuado. Os alunos ainda não voltaram ao ritmo escolar, e quando começam a desenvolver ideias sobre o conceito de frações, por exemplo, logo a semana presencial termina interrompendo esse processo de aprendizagem. Percebe-se que a maioria dos alunos não retoma as atividades em casa, estudando somente na semana em que frequentam a escola.

Dito isso, e diante da realidade que se impõe, o ensino híbrido, com a personalização do ensino, desenvolvido a partir de metodologias ativas, com ou sem o uso de tecnologias, mostra-se necessário ao enfrentamento dessas dificuldades. Esse momento ajuda a perceber que a aprendizagem matemática não está confinada às séries de escolaridade, mas ao desenvolvimento das habilidades e competências relacionadas aos conteúdos trabalhados. Portanto, serão analisadas, no próximo capítulo, metodologias alternativas para o estudo de frações.

Capítulo 4

Metodologias Alternativas para o Estudo de Frações

Considerando os desafios específicos encontrados nas relações de ensino e aprendizagem de frações, unidos às dificuldades decorrentes da operacionalização do ensino no contexto da pandemia vivenciada neste tempo, planejar e utilizar metodologias alternativas para o estudo de frações é uma tarefa imprescindível.

Nesse sentido é importante lembrar que os PCN preconizam a utilização de metodologias que foquem "a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios" (BRASIL, 1998, p. 27). Essa indicação é reforçada pela BNCC ao orientar a tomada de decisões que assegurem as aprendizagens essenciais do educando (BRASIL, 2018, p. 16), como por exemplo, "selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas" (BRASIL, 2018, p. 17), flexibilizando o ritmo de trabalho e o conteúdo, para lidar com as necessidades de diversos grupos de estudantes, famílias e culturas, comunidades, grupos sociais etc. (BRASIL, 2018, p. 17).

Portanto, as seções deste capítulo irão tratar sobre a utilização de metodologias alternativas, tais como resolução de problemas, jogos e ferramentas tecnológicas, que possam auxiliar no ensino e aprendizagem de frações. É importante ressaltar que essas e outras metodologias acabam ocorrendo simultaneamente, de modo que a abordagem em tópicos separados se deve apenas a uma questão de ênfase.

4.1 Metodologia de resolução de problemas

A utilização da metodologia de resolução de problemas no ensino de matemática vai ao encontro de uma educação integral, em que o aluno é protagonista da própria aprendizagem. De acordo com os PCN, a Resolução de Problemas é apontada como "ponto de partida da atividade matemática"(BRASIL, 1998, p. 16).

Contudo, é necessário deixar claro o que não seria, de fato, um trabalho com a Resolução de problemas: abordar o tema como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação do que teria sido aprendido, utilizando-se "listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos" (BRASIL, 1998, p. 22).

É preciso bastante cuidado ao selecionar os problemas a serem propostos, considerando-se a necessidade de desenvolvimento de ideias fundamentais, "levando em conta sua potencialidade, quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento de formas de pensar" (BRASIL, 1998, p. 22). Assim, o professor deixa de ser um simples transmissor de um conhecimento pronto e acabado, assumindo o papel de organizador, facilitador, mediador, orientador (BRASIL, 1998, p. 38), intervindo sempre que necessário, permitindo ao aluno o prazer da autonomia e da descoberta.

A BNCC também expressa a importância da resolução de problemas na formação do aluno, ao enunciar a segunda competência geral da educação básica:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

O desenvolvimento de conteúdos a partir da resolução de problemas deve ocorrer desde o Ensino Fundamental, por meio da articulação dos diversos campos da matemática (BRASIL, 2018, p. 265). As aprendizagens relacionadas à resolução de problemas são potencialmente ricas para o progresso de competências essenciais para o letramento matemático e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 266).

Com relação ao Ensino Fundamental - Anos Finais, espera-se que os alunos sejam capazes de resolver problemas com números naturais, inteiros e racionais, com as operações fundamentais e seus diferentes significados, estratégias diversificadas e compreensão dos processos envolvidos (BRASIL, 2018, p. 269). Analisando-se os objetos de conhecimento relacionados a frações, para 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, encontram-se cinco habilidades diretamente ligadas à resolução de problemas na BNCC, ratificando assim a relevância dessa metodologia.

Walle (2009), um dos estudiosos que defende o ensino de matemática a partir da resolução de problemas, entende que o raciocínio é o pensamento lógico que ajuda o estudante a decidir se as respostas fazem sentido e por qual motivo. O hábito de apresentar uma argumentação lógica como parte de uma resposta deve ser desenvolvido, isso aumenta a compreensão conceitual (WALLE, 2009, p. 23). Segundo Walle (2009), um problema constitui-se numa tarefa desafiadora, para a qual os estudantes não possuem um método memorizado e nem a ideia de que exista tal método específico que precisaria ser descoberto para resolver determinado problema.

De acordo com Onuchic e Allevato, problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p. 81). Assim, há uma diversidade de temáticas que podem ser abordadas a partir da resolução de problemas. Portanto, vale ressaltar que a ideia principal aqui é a utilização da resolução de problemas para a construção do conhecimento matemático, mais especificamente, a compreensão significativa do conteúdo relacionado a frações.

Nesta metodologia, os problemas são propostos aos estudantes antes mesmo de os respectivos conteúdos serem apresentados formalmente. Assim, o ensino-aprendizagem de um tema matemático começa com um problema que aborda aspectos centrais desse tópico, e estratégias devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema trabalhado (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p. 85). Ao final da resolução de um problema, as conclusões são organizadas de forma sequencial, de modo que a apresentação do conteúdo ocorra de maneira significativa, uma vez que o aluno participou de todo o processo de descoberta.

Ao longo dos anos, o trabalho do professor húngaro, George Pólya (1987) é referência no tema Resolução de problemas. Em seu método, Pólya (1995) mostra, entre outras coisas, a importância de se fazer perguntas, de se pensar demoradamente sobre uma situação. Muitas vezes há uma certa euforia e precipitação diante dos problemas propostos, assim, na busca das respostas acaba-se suprimindo esta etapa fundamental: perguntar para entender melhor a pergunta, perguntar para pensar sobre a resposta. Sem dúvida, os questionamentos fazem parte da reflexão em busca de respostas.

Pólya (1995) não desenvolveu uma técnica, para a qual cumprindo-se determinados passos obtém-se a solução do problema. Antes, este método baseado em fazer perguntas instiga o aluno a pensar, usando criatividade e imaginação. Dessa forma, o professor precisa pensar do ponto de vista do aluno ao preparar as perguntas, que devem fazer sentido para o estudante ao longo de todo o processo de resolução do problema. Para agrupar adequadamente os questionamentos e sugestões, Pólya (1995) distingue quatro fases de trabalho ao descrever seu método, que são listadas de modo resumido a seguir:

- **1ª etapa:** Compreender o problema. O estudante precisa perceber claramente o que é solicitado; ler e saber contar a história que leu, expressar com as próprias palavras qual é a intenção no problema, interpretando o enunciado. É necessário determinar a incógnita do problema. Essa habilidade precisa ser construída e treinada desde as séries iniciais. O problema escolhido deve ser atraente, portanto, não deve ser muito fácil e nem muito difícil para o estudante.

- **2ª etapa:** Perceber como os diversos itens relacionam-se; como a incógnita está associada aos dados, para que se tenha a ideia da resolução. O aluno precisa ter um tempo para pensar e elaborar um plano que responda ao problema. Criar o plano significa descrever etapas para alcançar o objetivo.

- **3ª etapa:** Execução do plano que foi previsto. Ao colocar o planejamento em prática é preciso verificar cada passo, certificando-se de que cada etapa está realmente correta.

- **4ª etapa:** Examinar a solução obtida. Nesta etapa é feito um retrospecto de toda a resolução, revendo-a e discutindo-a. Assim, executadas as etapas anteriores, o aluno chega a uma possível resposta, que ainda deve ser verificada, se realmente faz sentido e atende a todos os requisitos do problema.

É difícil ter uma boa ideia sobre o problema se há pouco conhecimento sobre o assunto, e ainda, se o tema é totalmente desconhecido será impossível ter-se uma boa ideia. Dessa forma, as boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos construídos previamente. Para uma boa ideia não basta a simples lembrança, porém, também não é possível uma boa ideia sem relembrar alguns fatos pertinentes. Assim, muitas vezes, um bom começo para a resolução de um problema seria a pergunta: Você conhece um problema parecido, semelhante, que tenha relação com este? (PÓLYA, 1995, p. 6).

No entanto, é possível que a lembrança de vários problemas correlatos possa constituir-se em um fator de dificuldade, por não se saber quais devem ser selecionados de modo que realmente ajudem na solução do problema em questão. Neste caso seria interessante levar em conta a resposta à pergunta: "Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante." (PÓLYA, 1995, p. 6).

Além de atraentes, os problemas precisam aparecer numa ordem que favoreça a construção do conhecimento do aluno. Para desenvolver a inteligência é preciso garantir que primeiramente o trabalho seja baseado em problemas concretos, uma vez que resolver esse tipo de situação é mais natural do que construir estruturas conceituais, abstratas. Logo, o aluno deve familiarizar-se inicialmente com o concreto e posteriormente com a generalização e unificação dos conceitos (PÓLYA, 1985, p. 13).

Pólya (1985) ainda ressalta que além da escolha do problema sua apresentação é muito importante, pois quando bem feita evidencia conexões com situações familiares, tornando compreensível o objetivo da questão. O professor pode utilizar uma estratégia de apresentação do enunciado por partes, com sugestões apropriadas, deixando aos educandos a tarefa de uma formulação definitiva.

A metodologia de resolução de problemas é, de fato, uma importante ferramenta para a formação matemática do aluno, que ao ser utilizada para a aprendizagem de objetos de conhecimento matemáticos vêm mostrando, em pesquisas com estudantes, avanços significativos (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p. 95). O caráter investigativo é interessante tanto pelo foco nas perguntas como pela liberdade que o aluno tem de não precisar saber a resposta ou um plano desde o início. Os erros podem ser úteis e as discordâncias também: é preciso favorecer o debate e a defesa das ideias (WALLE, 2009, p. 65). O mais desafiador, enfim, é manter o interesse do aluno no problema proposto.

4.2 Jogos como recursos facilitadores da aprendizagem matemática

De acordo com Huizinga (1971), o conceito de jogo é tão amplo quanto antigo, acompanhando toda a História da humanidade. Huizinga caracteriza o jogo como uma atividade voluntária praticada dentro de tempo e espaço determinados, de acordo com regras acordadas, mas totalmente obrigatórias, com uma finalidade em si mesmo, seguido de tensão e alegria da parte dos jogadores, que têm a consciência de tratar-se de uma atividade distinta da vida cotidiana (HUIZINGA, 1971, p. 33).

Como metodologia para o ensino da matemática, o jogo, por si só pode ser uma ferramenta que proporciona o desenvolvimento de habilidades necessárias ao raciocínio matemático pois, pela natureza lúdica, jogar "desenvolve o espírito construtivo, a imaginação, a capacidade de sistematizar e abstrair e a capacidade de interagir socialmente" (SMOLE, DINIZ, MILLANI, 200, p. 10). Isso ocorre porque o caráter lúdico do jogo promove um contexto em que naturalmente surgem situações-problema, exigindo que o jogador se empenhe em busca de solução, com alguma aprendizagem. Nesse processo o jogador movimenta-se a partir de desafios, de surpresas, de um ambiente em que é possível repetir jogadas para melhorar resultados incômodos, que não se pode controlar por completo (SMOLE, DINIZ, MILLANI, 200, p. 10).

A BNCC destaca o papel essencial dos jogos, como recurso didático, para a assimilação e aplicação das noções matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. Mas ressalta que, para isso, o jogo precisa estar associado a "situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos" (BRASIL, 2018, p. 298).

Os PCN também defendem a possibilidade de diversificação do trabalho do professor de matemática por meio de jogos, que podem viabilizar "os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução" (BRASIL, 1998, p. 42). O jogo, por sua própria natureza muda a atmosfera da sala de aula, trazendo agitação e barulho a um ambiente onde normalmente entram livros, cadernos, lápis e borracha (SMOLE, DINIZ, MILLANI, 200, p. 10): esse ar de novidade e descontração pode favorecer o engajamento e interesse do aluno em resolver os problemas apresentados através dos jogos (BRASIL, 1998, p. 46) . Numa situação de competição, a decisão do critério de certo ou errado, por exemplo, muitas vezes é tomada pelo grupo. Essa prática do debate possibilita a organização do pensamento e o exercício da argumentação (BRASIL, 1998, p. 46).

O jogo passa a ser considerado um material de ensino quando funciona como ferramenta para a promoção da aprendizagem. Portanto, é preciso que haja um planejamento criterioso ao selecionar os jogos a serem utilizados em sala de aula. O objetivo desta pesquisa é indicar o uso específico do jogo como metodologia voltada à construção de conhecimentos e habilidades específicos da matemática para determinado ano de escolaridade (mais propriamente, jogos envolvendo as ideias de fração, a serem trabalhados no 7º ano do Ensino Fundamental).

Nesse sentido, é preciso ter em mente que "nenhum material é válido por si só" (FIORENTINI, MIORIM, 1990), ou seja, o professor não pode submeter sua metodologia a determinado tipo de jogo simplesmente por ser atraente ou lúdico (FIORENTINI, MIORIM, 1990). Isso também inclui o formato, o material e a apresentação do jogo: podem ser jogos que utilizam muita ou pouca tecnologia, materiais simples ou sofisticados, industrializados ou confeccionados pelos próprios alunos. A escolha deve ser feita priorizando as necessidades de aprendizagem dos alunos no período a que se destina.

4.3 Ferramentas tecnológicas

Na sociedade contemporânea, ao se pensar em ferramentas úteis ao ensino, é praticamente inevitável lembrar de tecnologia. Contudo, apesar de computadores, vídeos, softwares e internet serem componentes mais prontamente relacionados ao elemento tecnológico, a conceituação de tecnologia é muito mais ampla (MORAN, 2003, p. 1). As tecnologias empregadas no ambiente escolar são os instrumentos, os suportes, as ferramentas utilizadas para que os estudantes aprendam (MORAN, 2003, p. 2), até mesmo a lousa e o giz (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 211).

Ainda que seja uma temática bastante controversa, há um consenso quanto à necessidade do uso das tecnologias eletrônicas e digitais no ambiente escolar. Isso decorre da presença cada vez maior e intensa desses elementos no estilo de vida da sociedade, de modo que não se pode mais separar a prática pedagógica do uso desses recursos, ainda que haja discussão quanto ao "como" deve ocorrer.

Em geral, as dificuldades estão relacionadas ao despreparo do professor para lidar com tanta diversidade e celeridade das inovações (PAIVA, 2016, p. 29), além dos problemas de infraestrutura tecnológica dos espaços escolares e também a falta de acesso para o uso doméstico por parte dos alunos.

Há relativamente pouco tempo, falar de uso da tecnologia na escola estava relacionado ao uso de equipamentos como calculadora simples, gravador, retroprojetor, televisão e vídeo (MORAN, 2003, p. 1). Atualmente, "a tecnologia digital aparece como parte essencial da cultura escolar" (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 263), influenciando direta ou indiretamente a vida de todos. A naturalidade com que os estudantes costumam lidar com o ambiente tecnológico é uma justificativa para o uso desse tipo de ferramenta nas aulas de matemática, sempre que possível (PAIVA, 2016, p. 28).

Como esses alunos já nasceram nesta era digital (CARVALHO et al., 2021, p. 3156), um ambiente escolar com tantos estímulos audiovisuais, em que tudo ocorre com rapidez, costuma ser mais atraente a eles. No entanto, o uso de tecnologias apenas é legítimo quando tem por finalidade a construção do conhecimento, sempre atendendo a um objetivo de aprendizagem bem determinado (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 220).

Nesse sentido, como a educação escolar deve "vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social" (BRASIL, 1996) bem como as atividades educativas são primeiramente uma manifestação cultural (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 257), é essencial que os processos de ensino e aprendizagem sejam mediados por recursos tecnológicos, como computadores, softwares educacionais ou até calculadoras (PAIVA, 2016, p. 22).

Essa orientação é observada nos PCN de matemática do ensino fundamental (BRASIL, 1998), que recomendam, por exemplo, o uso da calculadora nas aulas de matemática, possibilitando atividades e enfoques diferenciados, explorando problemas com situações do cotidiano que demandem cálculos mais complexos (BRASIL, 1998, p. 67), de modo a priorizar novas estratégias e não o cálculo mecânico e a simples manipulação de símbolos (BRASIL, 1998, p. 43).

A seguir são apresentados exemplos de ferramentas tecnológicas que podem ser utilizadas com os alunos do anos finais do ensino fundamental nas aulas de matemática:

I - GEOGEBRA

É um software de matemática dinâmica muito popular, pois reúne várias características favoráveis dentre as quais pode-se destacar: software livre e gratuito disponibilizado na internet; destinado a todos os níveis de ensino, alunos e professores; "agrega recursos de geometria dinâmica, álgebra e cálculo em um mesmo programa, e com o mesmo grau de importância" (GIRALDO, CAETANO, MATTOS, 2012, p. 124); interface bastante intuitiva e agradável.

Pelas propriedades do Geogebra, vários professores vêm lançando mão de suas ferramentas ao planejar suas aulas de matemática, para todas as idades e objetos de conhecimento. Uma opção interessante no trabalho com frações é o uso e criação de applets, uma vez que dispensa a necessidade de conhecimentos na área de programação. Além disso, como são acessíveis tanto em computadores, quanto em tablets e celulares, permitem maior interatividade, simulando várias situações (GAMBERA, VITAL, 2016). Conforme destacam Gambera e Vital (2016), ao criarem um applet no Geogebra para a visualização e manipulação de conceitos no estudo de frações, usando este tipo de recurso o estudante pode aprender enquanto acompanha o que o professor está dizendo e mostrando, mas também quando ele próprio repete o procedimento, desfaz, refaz, experimenta de outra maneira - algo inviável com a lousa tradicional, lápis e papel.

II - GOOGLE FOR EDUCATION

Trata-se de uma plataforma virtual, criada especificamente para fins educacionais (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 223). Essa ferramenta tecnológica reúne um conjunto de soluções específicas para o ambiente escolar, principalmente a atividade pedagógica, permitindo um trabalho colaborativo entre professores e alunos, por meio de qualquer dispositivo (celular, tablet, computador) conectado à internet.

Entre as vantagens do Google for Education destaca-se a disponibilidade de acesso, pois diversos tipos de materiais podem ser armazenados (documentos, planilhas, vídeos, apresentações, formulários) e salvos automaticamente em nuvem. Assim, esses materiais permanecem disponíveis, em quaisquer dispositivos, desde que haja conexão de internet.

Enquanto o Google Docs, por exemplo, é uma ferramenta do Google for Education que permite um trabalho colaborativo em um mesmo documento de texto, de maneira síncrona ou assíncrona, o aplicativo Google Forms é excelente para receber um feedback dos alunos (de cada estudante e de toda a turma) de maneira dinâmica. Isso se dá porque o Google Forms é um aplicativo que possibilita a elaboração de questionários on-line que são disponibilizados para os alunos na própria plataforma, no Google Sala de Aula, ou via link, por Whatsapp, por exemplo. As respostas são organizadas e podem ser analisadas também por meio de gráficos, ou convertidas em uma planilha do Google Sheets.

Para esta pesquisa, o aplicativo Google Forms foi escolhido como uma das estratégias para identificar o conhecimento e dificuldades dos alunos com o conceito de fração, a fim de preparar atividades que auxiliassem na solução desses problemas de ensino e aprendizagem. Além da praticidade para a correção das atividades nesse formato, também foi levada em consideração a facilidade para a disponibilização das atividades, uma vez que não há barreiras geográficas, nem gasto com papel e impressão de cópias, além deste formato favorecer o cumprimento do protocolo sanitário ao não se compartilhar material físico neste período da Pandemia de covid-19.

III - PLATAFORMAS ADAPTATIVAS

Com a criação das ferramentas voltadas para a interatividade, surgiram as plataformas adaptativas, que "são softwares especialmente desenvolvidos para analisar o comportamento de seus usuários e propor atividades personalizadas" (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 222). Nesses ambientes, com roteiros semiestruturados e sob a supervisão do professor (MORÁN, 2015, p. 27), os alunos têm várias experiências de aprendizagem ao seu alcance, tais como textos, dicas, vídeos, exercícios e games, por exemplo (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 222). Além disso, tanto educadores quanto estudantes podem ter um feedback ao receber relatórios de desempenho simultaneamente. Exemplos de plataformas adaptativas: Mangahigh (www.mangahigh.com/pt-br), Geekie (www.geekiegames.com.br), Khan Academy (https://pt.khanacademy.org) e SmartSparrow (www.smartsparrow.com) (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 222).

A Khan Academy, criada para atender estudantes em diferentes níveis de ensino, com diversos componentes curriculares, tem como proposta oferecer "educação gratuita de nível internacional para qualquer um, em qualquer lugar" (KHAN, 2013, p. 11). No Brasil, a plataforma é bastante utilizada em escolas particulares e públicas. Além de poderem ser organizados em classes virtuais, os alunos são motivados pela competitividade através de um sistema de pontuação e medalhas entre eles (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 222).

Uma interessante maneira para explorar essa plataforma é a partir da identificação de dificuldades dos alunos relacionadas a habilidades específicas da matemática. Isso porque uma das apresentações do conteúdo na Khan Academy é por ano de escolaridade e habilidade, seguindo a mesma disposição da BNCC: são atividades verificáveis, corrigidas em tempo real e acompanhadas de vídeos de apoio com explicação que dá suporte para resolver os problemas propostos.

A Mangahigh é uma plataforma inteligente com base em games e quizzes de matemática. Esta plataforma também apresenta seu conteúdo de acordo com a BNCC e oferece feedback em tempo real, possibilitando um diagnóstico dos estudantes (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 223). Idealizada para o ensino-aprendizagem baseado em jogos, a Mangahigh apresenta desafios para a educação básica, desde o ensino fundamental. Sempre com o suporte de orientações específicas, possui atividades com diversos graus de complexidade, baseadas na resolução de problemas (BACICH, TANZI, TREVISANI, 2015, p. 223). Dessa maneira, os alunos são estimulados a estudar de maneira prazerosa, não pela obrigação, o que favorece resultados mais consistentes e agradáveis em si mesmos, pois os alunos mostram bastante satisfação e desejo de estudar quando percebem que estão entendendo o que lhes é ensinado.

Capítulo 5

A Pesquisa de Campo e a Proposta de Sequência Didática

Este capítulo está dividido em três seções principais. Na seção inicial, apresenta-se a descrição da pesquisa e dos elementos envolvidos, a metodologia utilizada e uma análise dos resultados obtidos.

A segunda seção é dedicada à apresentação de uma proposta de sequência didática baseada nas dificuldades do ensino e aprendizagem de fração retratadas tanto pela pesquisa de campo quanto nos referenciais teóricos exibidos neste estudo. Esta proposta de sequência didática está voltada para a construção do conceito de fração, de modo a estimular o desenvolvimento do senso numérico do aluno.

A seção final apresenta um relato de experiência com algumas das atividades da sequência didática na prática pedagógica de 2021.

5.1 A Diagnose

5.1.1 Caracterização da pesquisa

Com o objetivo de analisar o comportamento dos alunos diante das frações, suas percepções, dificuldades e estratégias para resolver problemas envolvendo esse conhecimento, neste estudo optou-se pelo modelo de pesquisa qualitativa. Isso porque, neste formato de pesquisa, conforme a concepção de Bogdan e Biklen (1994) "a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal". Além disso, "a investigação qualitativa é descritiva" e o interesse é maior pelo processo do que unicamente pelos dados obtidos (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 48; 49).

Com este olhar voltado para a importância fundamental do significado para toda a abordagem qualitativa (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 50) buscou-se fazer uma pesquisa diretamente na escola, de modo que foram observados resultados de questionários escritos, cujos significados foram complementados com um posterior momento de escuta dos estudantes e socialização dos questionários em diálogo com a turma e troca de ideias a partir dessa mediação do professor pesquisador.

Assim, a pesquisa foi dividida em três estágios: elaboração de avaliação diagnóstica, observando-se ideias básicas sobre o conceito de fração, conforme trabalhado principalmente desde o 5º ano do Ensino Fundamental, de acordo com os PCN e a BNCC; aplicação desta avaliação diagnóstica nas escolas e análise dos resultados.

5.1.2 Caracterização dos sujeitos

Este estudo teve início no ano de 2020 e, portanto, sofreu adaptações para que fosse possível a aplicação da avaliação diagnóstica a partir do "novo normal", com o surgimento da Pandemia de Covid-19. Dessa maneira, foram escolhidos estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental para participarem da pesquisa, uma vez que as ideias de fração são bastante trabalhadas, de acordo com a BNCC e os PCN, nas séries imediatamente anteriores a esta; sendo retomadas e aprofundadas na série em questão. Ou seja, pretendeu-se garantir assim que, mesmo em circunstâncias adversas, o tema seria familiar aos alunos, por ser recorrente.

Assim, buscou-se diagnosticar dificuldades básicas relacionadas à aprendizagem de frações em duas escolas públicas do Espírito Santo. A primeira escola, "Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Nossa Senhora da Saúde", localizada no centro do município de Ibiraçu; a segunda escola pertencente à rede municipal de Aracruz, situada no Bairro Bela Vista: "Escola Municipal Ezequiel Fraga Rocha".

Importante ressaltar que a pesquisadora atua em ambas as escolas em que foi realizado este diagnóstico, ocorrido no período de 2020 a 2021, com pequenos grupos, de acordo com a possibilidade, devido às alterações na rotina escolar ocasionadas pela Pandemia. Deste modo, foram 138 alunos participantes ao todo.

Neste período extremamente atípico, as atividades escolares, em meados de março de 2020, foram totalmente suspensas inicialmente, seguidas de férias antecipadas que finalizaram com o retorno das atividades, porém em formato totalmente novo para o Ensino Fundamental regular até então. Assim, iniciou o período de ensino remoto, com muitas novidades e incertezas, no ensino público do Espírito Santo.

A rede estadual retomou as atividades presenciais no Ensino Fundamental, anos finais, no final de outubro de 2020, de modo não obrigatório, com revezamento semanal dos alunos e várias alterações de acordo com as oscilações e atualizações dos números da Pandemia em cada município. Assim, mesmo com o retorno, muitas famílias permaneceram temerosas e não enviaram seus filhos para escola. Já em vários outros momentos a própria escola fechava as portas e retornava ao atendimento totalmente remoto, como parte das medidas de contenção do avanço da Pandemia.

A rede municipal de Aracruz, a exemplo de muitas outras prefeituras, voltou a receber alunos nas salas de aula apenas no final do mês de maio de 2021, também observando o mesmo formato da rede estadual.

5.1.3 Metodologia

Esta pesquisa tem o intuito de investigar as dificuldades dos alunos do 7º ano na aprendizagem de frações, e as possíveis motivações para isso, ou seja, como os estudantes percebem e relacionam-se com o tema. Para isso, foi desenvolvida uma avaliação diagnóstica levando-se em consideração os objetos de conhecimento e as respectivas habilidades apresentadas pela BNCC relacionadas ao assunto. Junto a isso, procurou-se contemplar questões voltadas para o conceito de fração, cuja resolução não dependesse da manipulação de um método algorítmico ou respostas puramente mecânicas.

Na escolha das questões pretendeu-se utilizar uma gradação no nível de complexidade, de acordo com o observado comumente no trabalho com alunos deste nível de escolaridade, de modo que inicialmente há opções para resposta (tendo sido deixado livre ao aluno a possibilidade de apresentar por escrito a justificativa para aquela resposta) e posteriormente são apresentadas questões abertas.

Foi necessária uma hora-aula para a resposta dos questionários impressos e mais uma hora-aula para a socialização e escuta, como exposto no tópico anterior. Ao todo, 80 alunos do 7º ano participaram da pesquisa respondendo ao questionário no formato impresso.

Devido à dificuldade de contato presencial com os alunos, neste período, uma alternativa metodológica foi o Google Forms para aplicação da diagnose. O questionário impresso foi adaptado para o formato on-line cujo link foi enviado por whatsapp para os estudantes do 7º ano que tinham acesso ao aplicativo, no próprio aparelho ou ainda no de algum membro da família. Participaram da pesquisa pelo Google Forms 58 estudantes. A escuta e demais interações com esses ocorreu por whatsapp também.

5.1.4 Avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica é composta por 8 questões, cuja seleção levou em consideração as ideias discutidas nesta dissertação, com ênfase ao conceito de fração e seus diversos significados. Ou seja, ainda que nos anos finais do Ensino Fundamental os objetos de conhecimento sejam de maior grau de dificuldade, entende-se que é imprescindível a construção do conceito de fração para que o aluno alcance êxito nos objetivos posteriores da aprendizagem; não apenas operacionalizando algoritmos, com um entendimento fragmentado e desconexo, mas utilizando todo o conhecimento construído como base para um aprendizado integrado e significativo nas séries seguintes e na vida (WALLE, 2009, p. 47), (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 8). De todo modo, o conceito de fração compõe todas as habilidades relacionadas ao tema, o que justifica esse tipo de abordagem.

5.1.4.1 Sobre cada questão proposta

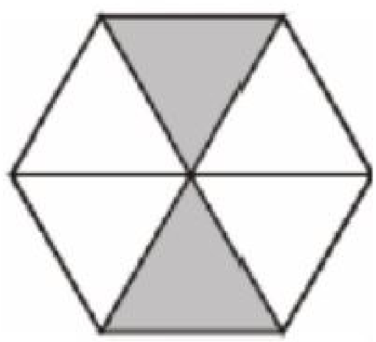
Neste tópico a avaliação diagnóstica será apresentada de maneira mais detalhada: cada questão da diagnose junto a observações importantes relacionadas à motivação para a seleção, o grau de complexidade envolvido, as possíveis respostas dos estudantes, tomando como referência os autores estudados bem como a experiência da pesquisadora nos últimos 17 anos lecionando matemática no Ensino Fundamental.

Importante salientar, para que se entenda a dinâmica da escrita, que o seguinte texto foi redigido antes que o questionário fosse aplicado. Além disso, ideias discutidas em questões anteriores foram suprimidas para evitar a repetição exaustiva na sequência.

Figura 5.1: Avaliação Diagnóstica - Questão 1

QUESTÃO 01

(Ubajara – CE). As partes sombreadas na figura abaixo representam que fração do todo?



(A) $\frac{2}{6}$ (B) $\frac{2}{4}$ (C) $\frac{4}{2}$ (D) $\frac{6}{2}$

A primeira questão é considerada "fácil" por tratar-se de um modelo contínuo de parte-todo, em que o aluno deve identificar a fração representada. No entanto, costuma-se observar em sala de aula que alunos que não entenderam bem o conceito de fração poderiam apresentar dificuldade, porque:

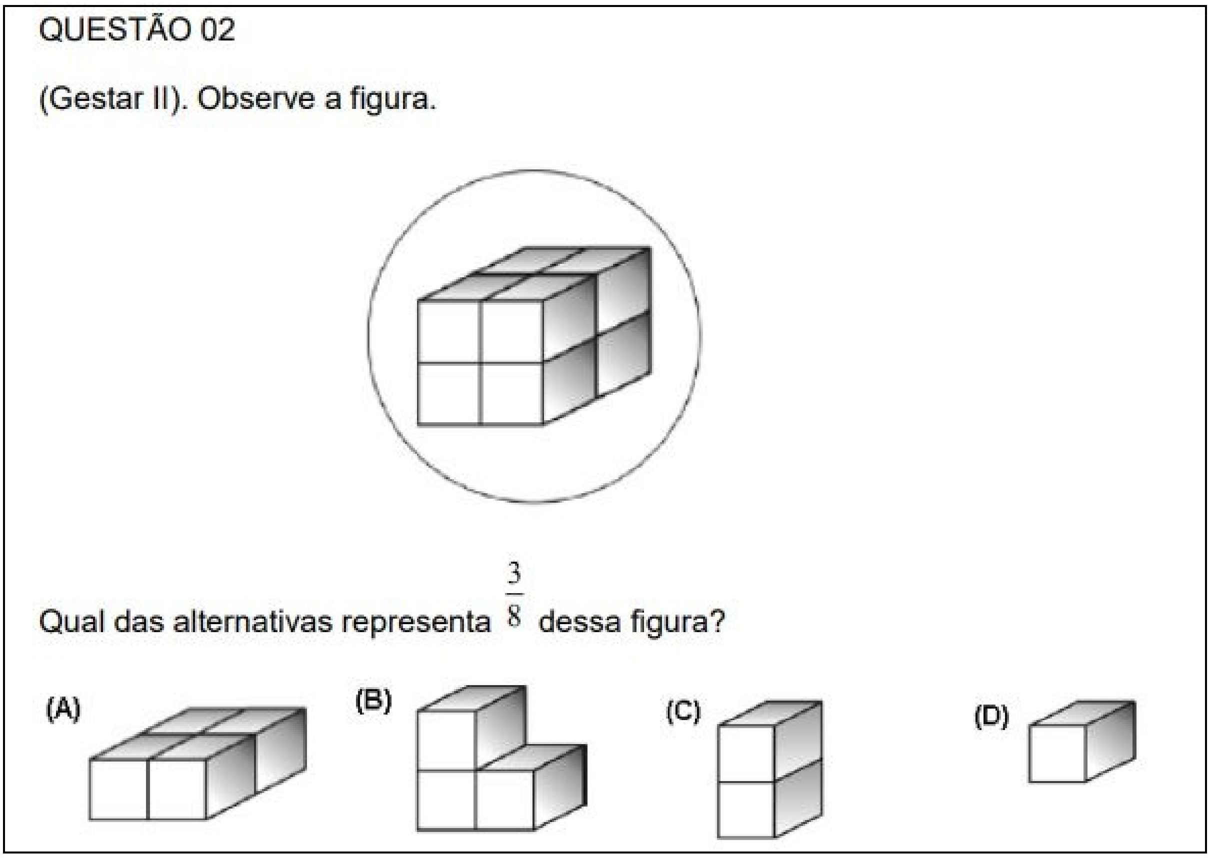
- A região sombreada está intercalada (ou seja, as regiões triangulares sombreadas não são adjacentes), diferentemente de várias figuras de parte-todo que costumam ser trabalhadas em sala de aula.

- O aluno sabe que precisa relacionar as quantidades destacadas e não destacadas, mas inverte as posições: numerador e denominador. Ou ainda, conta as sombreadas e as brancas, relacionando-as de modo equivocado, respondendo como no item B.

Assim, percebe-se a dificuldade em entender que o total de partes em que a unidade foi dividida determina o tipo de fração (neste caso, sextos, pois o hexágono foi dividido em 6 partes) e cada parte sombreada é um sexto da unidade, o hexágono.

Outro fato a ser observado, é que mesmo alunos que relacionam corretamente a representação numérica e a pictórica, podem não saber identificar uma a uma, cada parte sombreada (sabe dizer que a resposta é $\frac{2}{6}$, mas não identifica uma única parte sombreada como $\frac{1}{6}$, ao ser apontada aleatoriamente). Ou seja, o estudante até é eficiente quanto a resultados de testes, mas isso não garante que ele tenha compreendido a ideia fundamental acerca do que é avaliado.

Figura 5.2: Avaliação Diagnóstica - Questão 2



Esta questão é semelhante à primeira no que se refere a identificar a parte de um todo e representar como fração.

Diferenças em relação à 1ª:

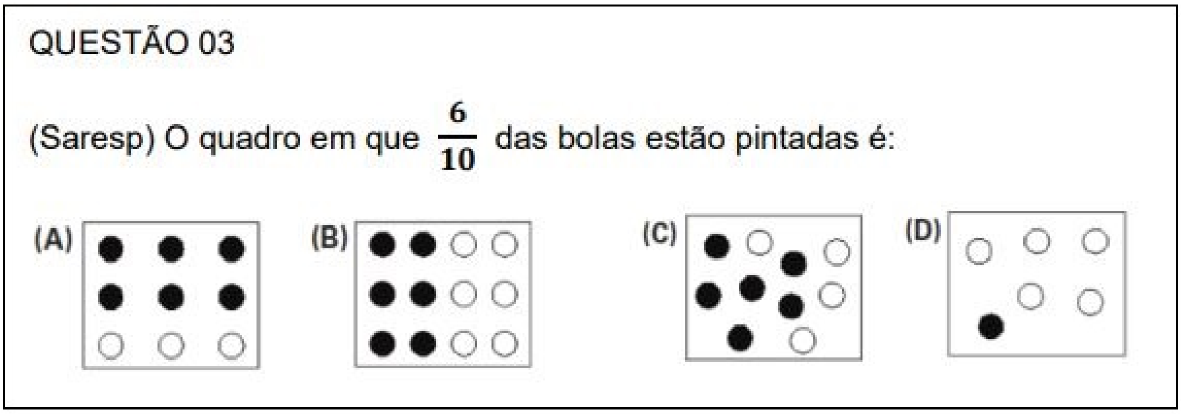
- Nesta questão é apresentada primeiramente a unidade (o todo) e em seguida a fração da unidade que deve ser representada.

- A unidade é uma forma geométrica espacial (ou, um conjunto de 4 formas geométricas espaciais).

- A resposta não é dada apenas destacando (sombreando) a fração solicitada. Desta vez o desenho mostra apenas a parte que representa a fração solicitada.

Com relação às dificuldades encontradas pelos alunos ainda pode-se acrescentar a incompreensão da figura por representar uma forma tridimensional, somada à pouca familiaridade dos estudantes com as formas geométricas tridimensionais, em geral. Assim, esta questão foi escolhida também para mostrar a importância de se trabalhar com diferentes modelos.

Figura 5.3: Avaliação Diagnóstica - Questão 3



A terceira ainda é uma questão de identificação da parte-todo. Desta vez a fração é um subconjunto da unidade considerada.

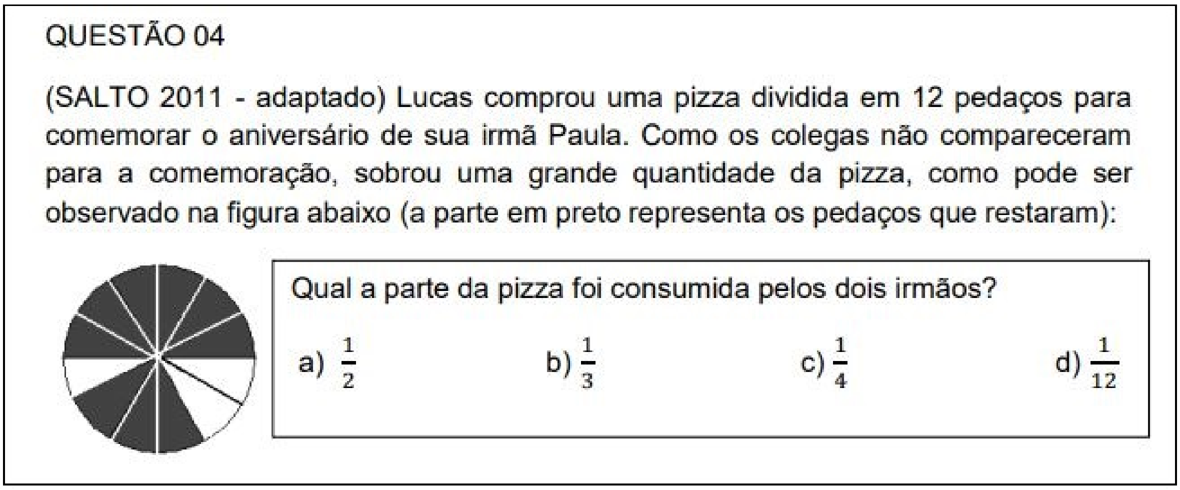
Dificuldades que podem ser apresentadas:

- Quando o aluno está acostumado apenas com situações de natureza contínua pode apresentar dificuldade.

- Outra possível dificuldade é a posição dos objetos: nota-se que os itens A e B apresentam organização em linhas e colunas, diferentemente dos itens C e D. Neste caso, alguns estudantes não se sentiriam à vontade para escolher as opções C ou D simplesmente por causa da posição dos objetos desenhados dentro do retângulo.

Observação: Propositalmente foram selecionadas 3 questões apenas de identificação da fração como parte-todo a partir do desenho, ou vice-versa, que é normalmente como a fração é apresentada e trabalhada com os alunos na maioria dos livros didáticos (e salas de aula) logo nos primeiros contatos com a ideia de fração. Desse modo, buscou-se aferir até mesmo as noções mais elementares de fração, levando-se em consideração o que seria mais familiar ao estudante.

Figura 5.4: Avaliação Diagnóstica - Questão 4


QUESTÃO 04

(SALTO 2011 - adaptado) Lucas comprou uma pizza dividida em 12 pedaços para comemorar o aniversário de sua irmã Paula. Como os colegas não compareceram para a comemoração, sobrou uma grande quantidade da pizza, como pode ser observado na figura abaixo (a parte em preto representa os pedaços que restaram):

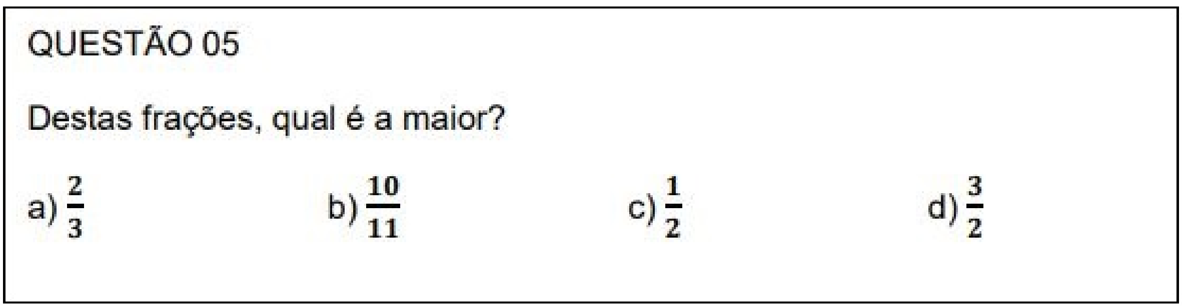
Qual a parte da pizza foi consumida pelos dois irmãos?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{12}$

Aqui, além dos aspectos apontados anteriormente, há:

- maior grau de dificuldade quanto à situação apresentada, com relação à leitura e interpretação do enunciado.
- o conceito de fração equivalente, pois uma possível resposta, $\frac{3}{12}$ não aparece nas alternativas, de modo que o aluno precisa usar a ideia de equivalência de frações para encontrar uma resposta satisfatória.
- seria possível que vários alunos errassem a questão por não simplificar a fração $\frac{3}{12}$, obtendo a fração equivalente $\frac{1}{4}$. Neste caso, talvez acertassem se o enunciado da questão fosse: "simplifique a fração $\frac{3}{12}$". Ou seja, observa-se que, muitas vezes, os alunos são treinados para usar algoritmos, mas sem que entendam os conceitos envolvidos.

Figura 5.5: Avaliação Diagnóstica - Questão 5


QUESTÃO 05

Destas frações, qual é a maior?

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{10}{11}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

Um erro comum neste tipo de questão é o aluno escolher a segunda alternativa (numerador 10 e denominador 11), porque considerando-se separadamente cada termo das frações apresentadas, 10 e 11 são os maiores números naturais que aparecem listados. Ou seja, esse aluno não teria entendido que a principal ideia de fração é a relação entre numerador e denominador, como disse Boaler:

> Descobri, em minha prática docente e no trabalho com alunos, que a ideia mais importante para eles ao aprenderem frações é a de relação. Costumo ensinar que o que há de especial em uma fração é que o numerador está relacionado com o denominador e que não sabemos nada sobre a fração sem saber o que é essa relação. Uma fração é grande somente se o numerador for uma grande proporção do denominador porque numerador e denominador estão relacionados. Quando são ensinadas as regras sobre como trocar o numerador e trocar o denominador, eles começam a ver frações como números separados e perdem a ideia essencial da relação. (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2018, p. 97).

A ideia aqui foi perceber se o aluno conseguiria usar o que aprendeu da maneira mais prática. Nota-se que não há necessidade de colocar em ordem todas as frações, bastando perceber qual é a maior e, propositalmente, apenas uma das opções apresenta uma fração imprópria que é a maior fração e a resposta da questão.

É interessante perceber que muitos dos alunos que costumam errar esta questão, acertariam se a pergunta fosse: "Qual fração é imprópria e quais são próprias". Neste caso, verifica-se, mais uma vez, que o estudante pode memorizar processos, mas não necessariamente conseguir inferir os significados quanto aos conceitos abordados. Em situações assim é comum ouvir-se dos alunos: "A fração é própria quando o numerador é menor que o denominador; a fração é imprópria quando o numerador é maior que o denominador", e ainda assim verificar-se que apresentam dificuldade em determinar quais frações representam um número maior que 1, por exemplo.

A estratégia de muitos alunos, sempre que precisam saber o valor da fração, é encontrar a sua forma decimal, fazendo a divisão do numerador pelo denominador. Normalmente os estudantes associam a forma fracionária à representação pictórica, em modelos contínuos. Portanto, ao fazer comparações com frações de denominadores diferentes, usam a forma decimal da fração.

Mesmo os alunos que usam a equivalência de frações, encontrando denominadores iguais para fazer a comparação e determinar qual é a maior fração, deixam de considerar se há outra estratégia de resolução, como é o caso desta questão. Ou seja, muitas vezes, o aluno habitua-se a processos repetitivos que o leva a certos resultados positivos, ao mesmo tempo em que o limita, privando-o de uma aprendizagem mais ampla, significativa e eficaz.

Figura 5.6: Avaliação Diagnóstica - Questão 6

QUESTÃO 06

O resultado da adição $\frac{10}{11} + \frac{5}{6}$ é:

a) um número menor que 1.

b) um número maior que 2 e menor que 15.

c) um número entre 1 e 2.

d) um número entre 15 e 17.

A ideia aqui é analisar como o raciocínio do aluno comporta-se com relação à estimativa, pois, pelo modo que a questão foi formulada, não é necessário calcular exatamente o número que resulta da adição. Por outro lado, mesmo que o aluno calcule e obtenha corretamente o resultado $\frac{115}{66}$, ele ainda precisará determinar o posicionamento deste número na reta numérica, de acordo com as alternativas.

Os alunos que assinalam o item d, ao justificarem seu raciocínio mostram que não entenderam a ideia de fração, pois acabam somando os numeradores e denominadores, como se fossem números naturais em questão e fazem uma relação arbitrária com os números que aparecem na sugestão de resposta do item d.

Outras possibilidades de raciocínio são semelhantes às abordadas na questão 5.

Observe que, se o estudante apresentar um entendimento mais consistente sobre fração e considerar não só o enunciado da questão, mas também as alternativas, poderá utilizar a estimativa e concluir a atividade com sucesso e de forma bem mais eficiente. Note que a primeira fração pode ser representada por $1 - \frac{1}{11}$ e a segunda fração por $1 - \frac{1}{6}$. Então, temos a seguinte representação para a soma dessas frações:

$$2 - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{6}\right)$$

E como $0 < \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{6}\right) < 1$, temos:

$$1 < \frac{10}{11} + \frac{5}{6} < 2$$

A importância desse tipo de abordagem, estimulando o uso de estimativas para desenvolver o senso numérico de fração, inclusive antes da introdução dos algoritmos, é ressaltada por Walle ao afirmar que: "O desenvolvimento do senso numérico fracionário deve certamente incluir a estimativa de somas e diferenças de fração – até antes de estratégias computacionais serem introduzidas" (WALLE, 2009, p. 335).

Figura 5.7: Avaliação Diagnóstica - Questão 7

QUESTÃO 07

Escreva as seguintes frações em ordem crescente (da menor até a maior):

$\frac{9}{10}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}$

RESPOSTA:

Mostre como você pensou para chegar a sua resposta:

As duas últimas questões são abertas e devem ser justificadas. Deste modo, além de observar a maneira de pensar a partir das justificativas apresentadas nas questões discursivas, será possível comparar as respostas das 6 questões objetivas ao raciocínio apresentado nas resoluções das questões 7 e 8.

Na questão 7 o aluno deve comparar as frações para escrevê-las em ordem crescente. Assim, os conceitos envolvidos já foram pontuados nas questões anteriores.

Normalmente, quando os alunos encontram a resposta correta, utilizam-se de frações equivalentes com denominador comum, ou fazem a divisão para comparar a partir da representação decimal dessas frações.

Ainda pensando sobre a importância do senso numérico, estimativa e tudo que pode compor a ideia de fração, uma possível estratégia de solução seria: tomar um número inteiro como parâmetro e a partir disso fazer conexões para organizar as frações dadas. Observe as frações dadas: uma é maior que a unidade e as outras três são menores que a unidade.

As três, menores que a unidade (frações próprias), podem ser representadas, tomando uma unidade como parâmetro, assim:

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, \; n = 2, 3, 10.$$

Ou seja,

Para $n = 2$: $\dfrac{2-1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}$

Para $n = 3$: $\dfrac{3-1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3}$

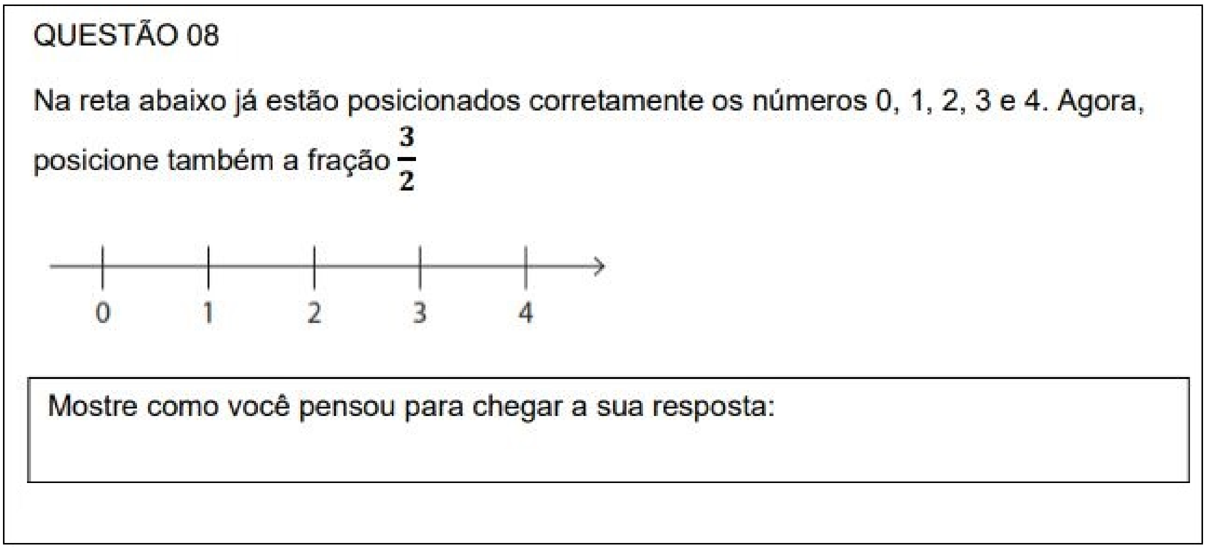
Para $n = 10$: $\dfrac{10-1}{10} = 1 - \dfrac{1}{10}$

A fração imprópria $\frac{3}{2}$, representada tendo o número 1 como referência, fica assim:

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Desse modo, $\frac{3}{2}$ é confirmada como a maior fração e retomando às três frações próprias podemos compará-las pela medida que falta a cada uma para chegar à unidade. Como essa diferença é de frações unitárias, sabemos que quanto maior o denominador menor é a fração. Sendo assim, $\frac{9}{10}$ é a maior destas três frações, pois falta apenas 1 parte de 10 para chegar a 1, enquanto 1 parte de 3 corresponde a uma medida bem maior. De maneira análoga, temos que $\frac{1}{2}$ é a menor das frações apresentadas no enunciado.

Figura 5.8: Avaliação Diagnóstica - Questão 8


QUESTÃO 08

Na reta abaixo já estão posicionados corretamente os números 0, 1, 2, 3 e 4. Agora, posicione também a fração $\frac{3}{2}$

Mostre como você pensou para chegar a sua resposta:

A novidade aqui trata-se da reta numérica apresentada de modo explícito, ainda que nas demais questões a ideia de comparação tenha sido recorrente.

Alguns alunos que costumam confundir os conceitos de números naturais com números fracionários acabariam localizando o $\frac{3}{2}$ entre 2 e 3 ou entre 3 e 4.

É uma questão considerada simples, porém é possível que muitos alunos errem por não conseguirem relacionar aquilo que aprenderam sobre frações com o que o enunciado pretende. Vários alunos que acertariam se fosse solicitado pintar uma região correspondente a $\frac{3}{2}$ em um modelo de tira, ou ainda, dividir 3 por 2, errariam este tipo de questão. Ou seja, os alunos, às vezes, até operacionalizam os algoritmos, usam o pensamento computacional, mas não conseguem tecer uma rede de ideias conectadas, o que dá sentido ao saber matemático e vida às conexões de ideias, conforme afirmam Boaler (2018) e Walle (2009) reiteradas vezes.

5.1.4.2 Análise dos resultados da avaliação diagnóstica

Antes da aplicação do questionário foi explicado aos alunos que se tratava de uma pesquisa com o objetivo de entender melhor qual a percepção dos estudantes sobre o conteúdo de frações, identificando possíveis dificuldades e os respectivos motivos para isso. Em um segundo momento, quando os alunos já haviam respondido às questões por escrito, foi proporcionada uma conversa com o grupo, mediada pela professora pesquisadora, com o mesmo propósito: identificar a forma de pensar ao solucionar as atividades propostas, bem como as dúvidas nesse processo. Importante ressaltar que este momento de escuta surgiu após a aplicação dos primeiros questionários, quando observou-se a dificuldade dos alunos em expressar seu raciocínio por escrito (palavras, figuras, etc.), ao passo que, de maneira espontânea, alguns deles conversavam sobre o tema e os questionamentos da diagnose.

De modo geral, notou-se a significativa dificuldade quanto à interpretação do comando das questões e das respectivas alternativas de resposta, com relação à linguagem específica da matemática (símbolos), e também dificuldades de leitura relacionadas à própria língua materna. Tanto que, em alguns momentos, os alunos mudavam de ideia quanto às respostas dadas simplesmente por ouvir a leitura da questão feita pela professora.

Assim sendo, para interferir o mínimo possível na investigação, procurou-se ouvir e perceber ao máximo as impressões dos estudantes antes de fazer a mediação quanto a interpretação e solução de cada atividade proposta, conhecendo-se assim as conjecturas utilizadas pelos discentes para chegar aos seus resultados, de modo que a intervenção foi gradativa. E, ao final, todas as questões foram solucionadas juntamente com a classe.

Outra observação importante é que determinados erros decorriam de esquecimento de um conceito, confusão entre as ideias de fração, ou ainda por desconhecimento do tópico tratado. Nesse sentido, foi possível constatar que as habituais dificuldades dos alunos no tratamento de frações foram agravadas pelos efeitos da Pandemia de Covid-19, uma vez que os discentes tiveram menor contato com as aulas e atividades de matemática e, também, as metodologias disponibilizadas para substituir as aulas presenciais não foram satisfatórias.

Além disso, ainda foi percebida a seguinte estratégia nas questões de múltipla escolha: o aluno observava as opções de resposta e começava a pensar no que teria sido perguntado e qual seria a solução correta a partir das próprias alternativas sugeridas. Tanto que, quando perguntado sobre qual teria sido a resposta caso fosse uma questão aberta, alguns alunos deram respostas bem diferentes das alternativas sugeridas pelo questionário.

Os alunos que responderam às perguntas pelo aplicativo Google Forms, também tiveram a oportunidade de interação, pelo whatsapp. No entanto, o contato foi muito mais significativo no formato presencial, com os pequenos grupos em sala de aula.

Feitas essas considerações gerais, a seguir são apresentadas as observações específicas relacionadas à cada questão, quanto ao ponto de vista do aluno e às conclusões decorrentes disso. Assim como no tópico anterior, aspectos discutidos em questões anteriores poderão ser suprimidos para evitar a repetição exaustiva.

Questão 1:

Neste quesito todos entenderam que seriam relacionados os algarismos 2 (partes sombreadas) e 6 (total de partes). Porém, além de $\frac{2}{6}$ também foi registrada a resposta $\frac{6}{2}$. Isso sugere que o aluno não teria entendido o conceito ou poderia significar um problema de representação, ou seja, entender o conceito mas confundir a posição do numerador com a do denominador. Isso indica uma necessidade de reforçar o conceito da relação entre numerador e denominador, bem como a notação utilizada, tanto para a representação em modelo contínuo quanto com algarismos.

Questão 2:

Nesta questão, quase todos os alunos não haviam entendido a representação do cubo (formado por 8 cubos menores). Após compreender quais eram as formas geométricas representadas pelas figuras, escolheram a alternativa correta. Esse tipo de reação aponta a necessidade de trabalhar-se com uma maior diversidade de modelos para a representação fracionária.

Questão 3:

Após a leitura, não houve dificuldade nesta questão. Este fato pode evidenciar a fragilidade na capacidade de leitura e interpretação dos estudantes, o que interfere diretamente nas aprendizagens de todas as áreas de conhecimento.

Questão 4:

Antes da discussão, a maioria disse que havia optado pelo item b, por ser o único que apresentava o número 3, ainda que no denominador. Mesmo depois que o enunciado foi lido, os alunos não conseguiram responder corretamente, pois não associaram $\frac{3}{12}$ (resposta identificada corretamente por eles) com a fração equivalente $\frac{1}{4}$, que é o gabarito da questão. Quando perguntado sobre qual seria a resposta em caso de questão aberta, quase todos responderam que seria $\frac{3}{12}$. Logo, faltou apenas o conceito e aplicação de fração equivalente para encontrar a solução.

Uma observação importante quanto a esse tipo de questão, nos casos em que não são oferecidas alternativas de resposta, é que se costuma não aceitar como correta uma fração equivalente à pretendida, do tipo $\frac{p}{q}$ tal que $mdc(p,q) \neq 1$. Entende-se que essa atitude é um equívoco, pois há infinitas maneiras corretas de representar-se uma fração e promover este entendimento favorece o conhecimento das ideias fracionárias.

Esta fragilidade mostra que é preciso desenvolver e consolidar o conceito de equivalência de frações, o que auxiliará o aluno a entender que o mesmo número fracionário possui infinitas representações, e que, portanto, o tamanho da fração não está relacionado diretamente ao numerador ou denominador de forma independente, como se fossem números naturais, mas depende totalmente da relação estabelecida entre esses termos.

Questão 5:

Vários alunos consideraram os numeradores como números naturais independentes (não relacionados com os respectivos denominadores) e por isso escolheram $\frac{10}{11}$ como maior fração.

Interessante que houve quem pensasse na resposta correta, mas com a seguinte justificativa: "por observar que nas três primeiras alternativas faltava uma parte para completar o inteiro, a conclusão é de que todas essas alternativas são do mesmo tamanho, e então não podem estar corretas pois seriam três possibilidades quando a questão pede apenas uma das opções como resposta. Assim, por exclusão, a resposta correta seria $\frac{3}{2}$ por não apresentar esse mesmo padrão".

Aqui temos um incentivo para desenvolver o raciocínio comparativo, usando para isso diversas ferramentas, inclusive a estimativa, uma vez que não há necessidade de um cálculo exato para responder corretamente à questão.

Questão 6:

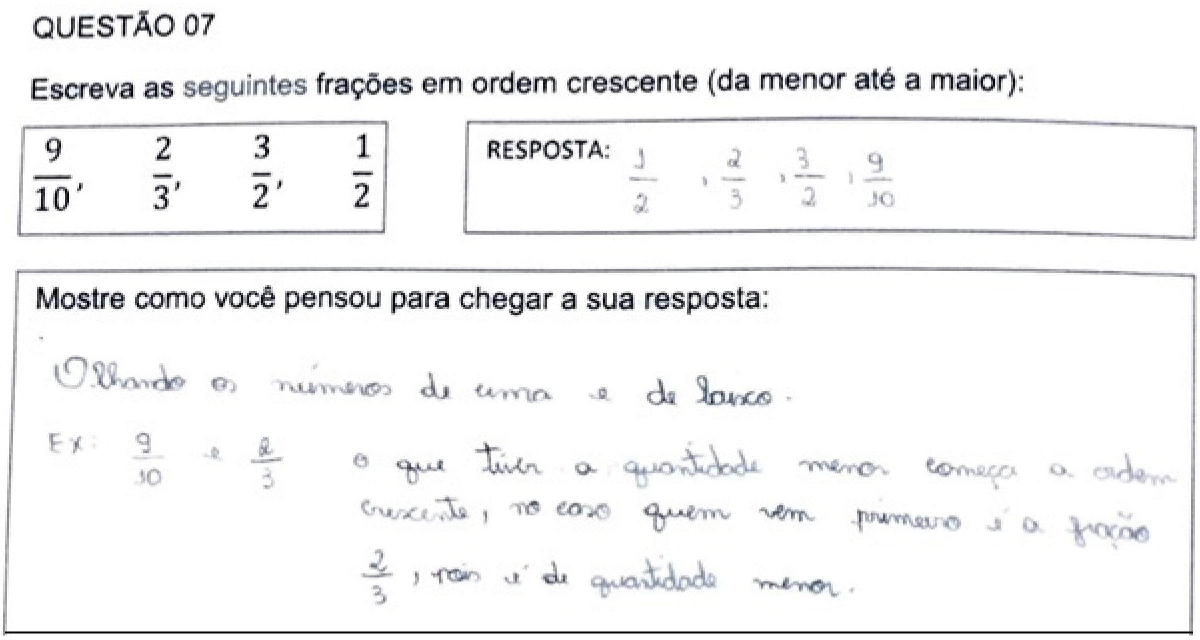
Esta foi uma das questões em que ficou bastante evidente a influência das alternativas ao sugerir as possíveis respostas corretas. Assim, muitos alunos optaram pelo resultado do item d (um número entre 15 e 17), dizendo que somaram os numeradores e denominadores de forma independente e obtiveram os números 15 e 17. Também ficou marcada a dificuldade de leitura, pois houve aluno que respondeu ao enunciado e também a cada item, como se fossem questões separadas. E nesse caso surgiram contagens com as seguintes respostas: 27 e 16, mas os alunos não souberam explicar esses dois últimos resultados, que têm a ver com somas realizadas por eles.

Novamente, comparação e estimativa seriam interessantes para ajudar a resolver esta questão, além da uma abordagem convencional, tomando o conceito de frações equivalentes para trabalhar com denominadores iguais e obter a soma. Isso porque as opções de resposta propositalmente não referem-se a um valor exato, dando liberdade de usar outras ferramentas para solucionar a questão de modo mais intuitivo.

Questão 7:

Ficou bem claro que vários alunos consideraram apenas os numeradores, relacionando-os com os números naturais, e para esses a resposta foi: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$ e $\frac{9}{10}$. Em outros casos o raciocínio foi semelhante, porém, tomando como referência os denominadores. Em ambas as situações fica claro que não há compreensão de frações como números, e diante da necessidade de ordená-las recorre-se a algum tipo de raciocínio familiar. Logo, além de trabalhar a comparação entre frações é necessário promover o entendimento de fração como número. A seguir são apresentadas soluções que ilustram essas dificuldades:

Figura 5.9: Resolução Aluno 9


QUESTÃO 07

Escreva as seguintes frações em ordem crescente (da menor até a maior):

$\frac{9}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$

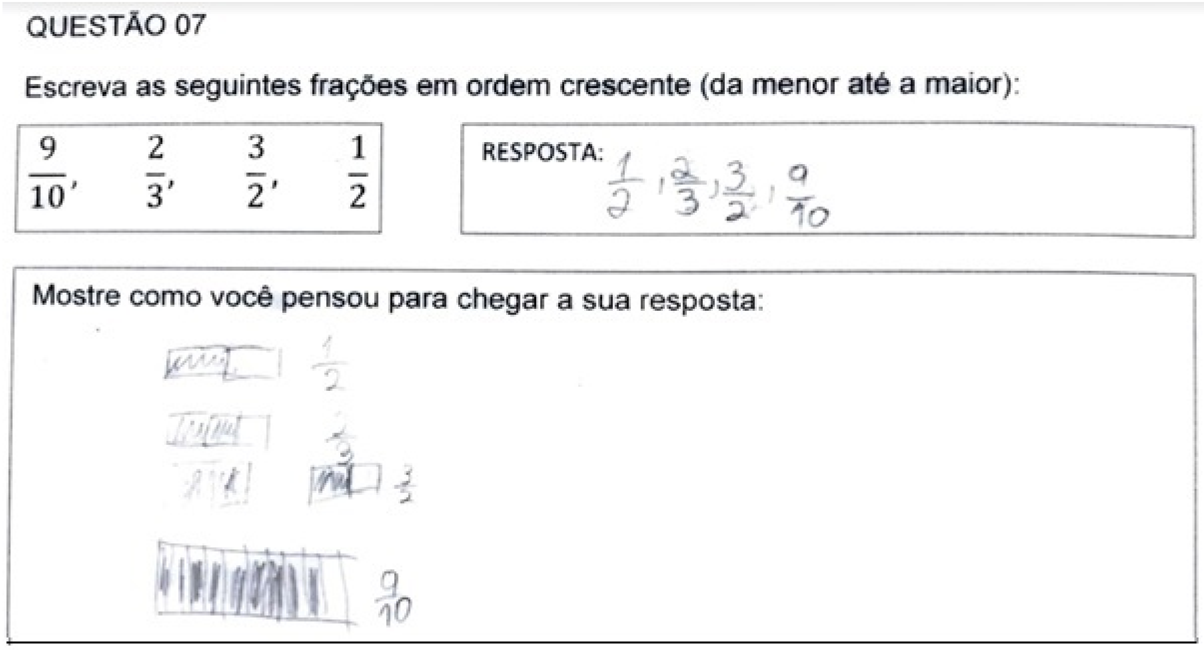
RESPOSTA: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{10}$

Mostre como você pensou para chegar a sua resposta:

Olhando os números de cima e de baixo.

Ex: $\frac{9}{10}$ e $\frac{2}{3}$ o que tiver a quantidade menor começa a ordem crescente, no caso quem vem primeiro é a fração $\frac{2}{3}$, pois é de quantidade menor.

Figura 5.10: Resolução Aluno 1

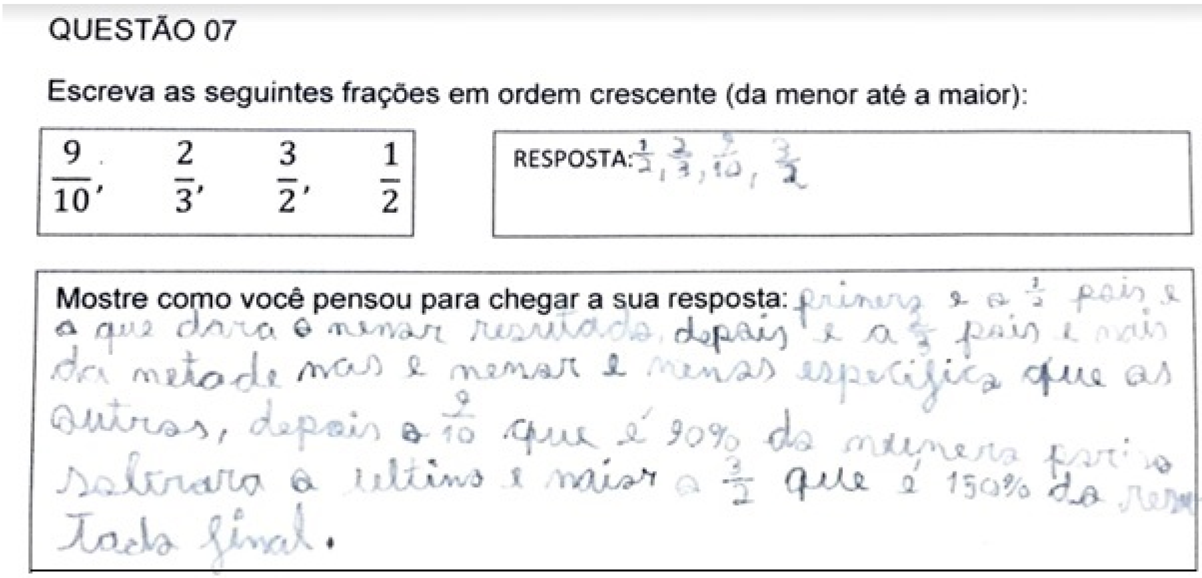


Com justificativas semelhantes, mais de 50% de todos os alunos que responderam a avaliação diagnóstica ordenaram as frações dessa maneira.

Outro ponto observado na solução que utiliza a figura de fração como parte-todo na justificativa é a deficiência na ideia de comparação. Pois é necessário utilizar uma mesma unidade padrão (independente de qual seja) para o inteiro, bem como as subunidades devem possuir o mesmo tamanho para que esta estratégia seja eficiente. Isso possibilita a percepção de que este pode não ser o caminho mais simples, uma vez que as medidas devem ser rigorosamente respeitadas. Essa ideia de comparação de frações não é elementar e intuitiva como costuma ser a comparação de números naturais.

Apenas 5% dos alunos da pesquisa ordenaram corretamente as quatro frações apresentadas na questão 7. Abaixo uma solução correta, cuja justificativa dá pistas da importância do desenvolvimento do senso numérico: o aluno toma uma comparação inicialmente com a metade (representada pela fração $\frac{1}{2}$) e vai posicionando o restante a partir dessa comparação.

Figura 5.11: Resolução Aluno 6



QUESTÃO 07

Escreva as seguintes frações em ordem crescente (da menor até a maior):

$\frac{9}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$

RESPOSTA: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{2}$

Mostre como você pensou para chegar a sua resposta: primeiro é a $\frac{1}{2}$ pois é a que dava o menor resultado, depois é a $\frac{2}{3}$ pois é mais da metade mas é menor e menos específica que as outras, depois a $\frac{9}{10}$ que é 90% do numero e por isso saltaria o ultimo é maior a $\frac{3}{2}$ que é 150% do resultado final.

Questão 8:

Essa questão ajuda na percepção da dificuldade dos alunos em localizar números não naturais na reta numérica. Percebe-se que vários estudantes que saberiam representar uma fração como parte-todo numa tira de papel retangular não conseguem fazê-lo quando se trata de uma distância na reta numérica.

Novamente, para essa solução, a maioria dos discentes olhou para numerador e denominador separadamente e localizou a fração próxima ao número dois ou ao três. Constata-se assim o grande prejuízo em não se priorizar as ideias fundamentais, uma vez que o aluno, em geral, não percebe a ideia essencial de fração como sendo a relação entre numerador e denominador. Seria interessante abordar outras atividades em que a fração precisa ser vista como número, localizada na reta numérica, o que ajudaria a reforçar o conceito de unidade de medida (percebe-se, com frequência que os alunos, mesmo nas séries posteriores, não assimilam a ideia de fração como número e não associam o “todo” a uma unidade qualquer fixada).

Apenas 4% dos alunos localizaram a fração $\frac{3}{2}$ corretamente, sendo que as demais respostas variaram bastante, o que dá a entender, junto aos depoimentos orais, que a maioria, de fato, não conhecia as ideias envolvidas na questão, por isso ficaram procurando algum raciocínio a partir do que lhes foi apresentado, além daqueles que nada conseguiram responder nesta questão.

Vários alunos posicionaram entre 2 e 3 por serem os numerais utilizados para representar a fração $\frac{3}{2}$. Outros marcaram entre 3 e 4 fazendo referência à notação de números decimais, como se três meios fosse o mesmo que 3,2. Ainda outros justificaram com uma figura de parte-todo que representa corretamente a fração, contudo não conseguiram transferir esta representação para o posicionamento do $\frac{3}{2}$ na reta. A seguir, duas soluções que ilustram isso.

Figura 5.12: Resolução Aluno 1

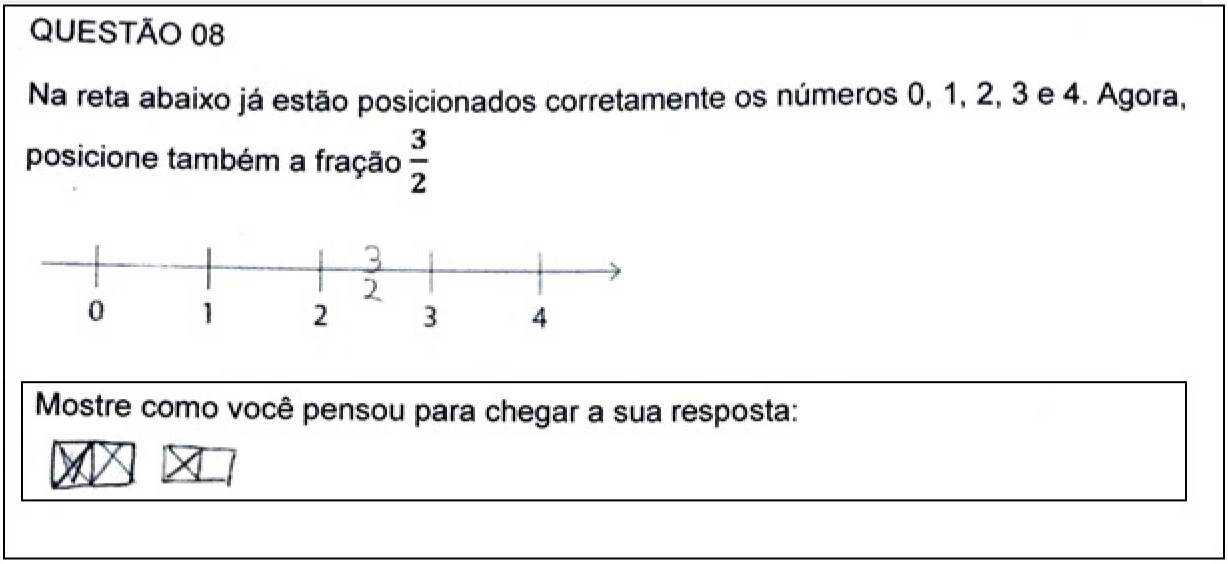
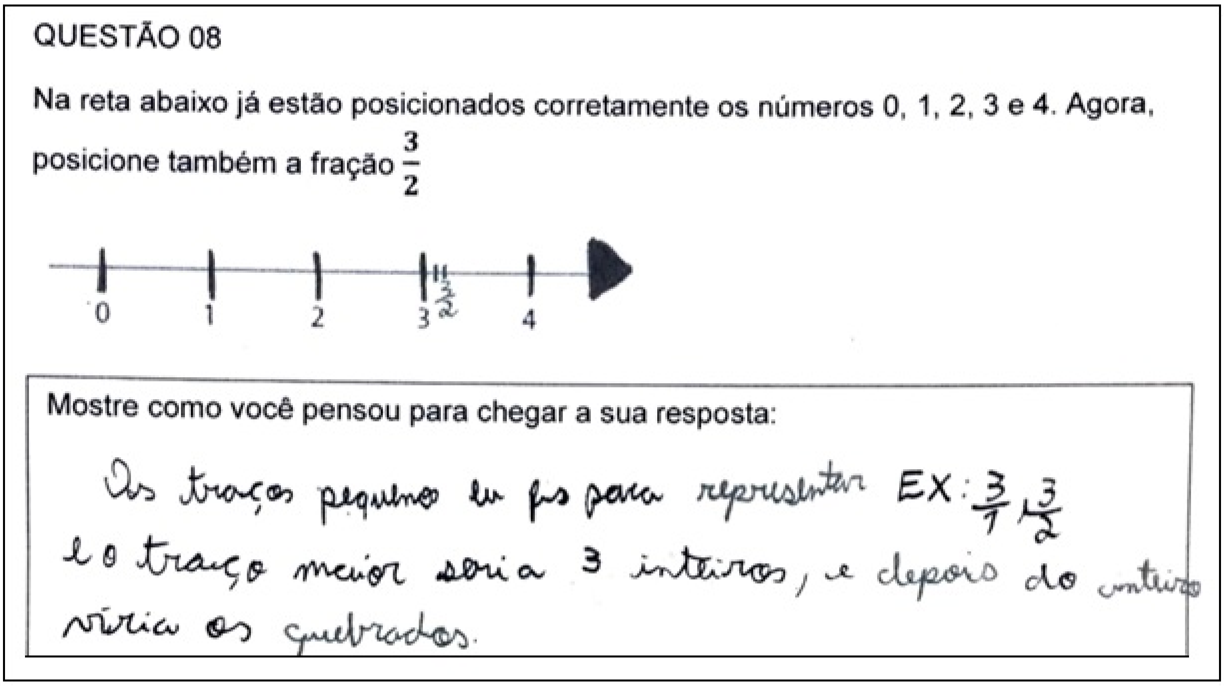


Figura 5.13: Resolução Aluno 5



Indo ao encontro das percepções nos momentos de "escuta", outras observações a partir da correção dos questionários:

- As respostas são bastante semelhantes independentemente do formato (impresso ou

Google Forms). Porém, os alunos que responderam em sala de aula conseguiram expressar melhor as justificativas para as respectivas respostas.

- Nas questões de 1 a 7 a maneira de pensar da maioria é semelhante ao considerar-se as alternativas escolhidas, pois das quatro alternativas, sempre mais de 50% dos alunos escolheram a mesma opção de resposta, independentemente de se tratar da resposta correta ou não.

- Embora essas atividades sejam consideradas de pouca complexidade com relação às habilidades propostas para esta série de escolaridade e o tema tratado, de modo geral, ficou bastante marcada a dificuldade dos estudantes na interpretação de vários enunciados. Isso reforça a necessidade de uma abordagem voltada para a resolução de problemas, no sentido de o aluno ser colocado diante de uma situação nova, que a princípio não sabe como resolver (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p. 81), pois quando são treinados apenas em repetir a aplicação de algoritmos ensinados pelos professores os alunos sentem-se incapazes em resolver problemas, mesmo aqueles cuja solução depende de conhecimentos que esses alunos já construíram.

5.2 A Sequência Didática

Zabala define sequências didáticas como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim, conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18). Ao conceber determinada sequência didática é preciso ter em mente a "complexidade das variáveis que intervêm nos processos educativos"(ZABALA, 1998, p. 14). Ou seja, é preciso considerar que acontecem diversas coisas simultaneamente em uma sala de aula, de maneira rápida e imprevisível, durante muito tempo (ZABALA, 1998, p. 14).

Contudo, ainda que não seja algo fácil, Zabala reforça a necessidade de que os professores disponham e utilizem referenciais que auxiliem na interpretação do que ocorre em sala de aula. Desse modo, esses conhecimentos podem ser utilizados previamente ao planejar, e após, ao avaliar de maneira global o que ocorreu (ZABALA, 1998, p. 15), possibilitando assim maior eficácia das ações didático-pedagógicas.

Com este entendimento de que é preciso perceber o que acontece em sala de aula e planejar a partir disso para uma intervenção estrategicamente pensada, ainda que seja praticamente impossível controlar todas as variáveis do processo a partir dos elementos investigados anteriormente e das dificuldades percebidas, nesta seção será proposta uma sequência didática para apoiar professores e alunos no processo do ensino e aprendizagem de frações. Levando-se em consideração a importância das ideias fundamentais na matemática (WALLE, 2009) o enfoque será principalmente para: o conceito de fração, estimativa e comparação, buscando-se promover situações favoráveis ao desenvolvimento do senso numérico do estudante.

Assim, ao tomar esta sequência didática para utilizar com seus alunos, o professor irá adequá-la à sua realidade, que também passa por constantes mudanças. Logo, as propostas estão distribuídas de acordo com os conhecimentos a serem construídos, consolidados, ou ainda, revisados. Por outro lado, dada a presença inevitável das ferramentas tecnológicas na sala de aula, apesar de não serem acessíveis a todos, como exposto anteriormente, procurou-se apresentar aqui atividades com metodologias diversificadas e flexíveis, de modo a alcançarem o maior público possível.

Como esta sequência é direcionada especificamente aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, tendo em vista as dificuldades no ensino e aprendizagem de frações, agravadas pelo contexto da pandemia da covid-19, para fins de organização, buscou-se uma estrutura baseada em tópicos importantes na aprendizagem de frações e na conexão com outras ideias matemáticas. Isso porque, de acordo com as necessidades de seus alunos, cada professor poderá dosar as atividades, a intensidade e a dinâmica como se dará a sequência com a sua turma.

Mesmo que os alunos já tenham sido apresentados formalmente às frações e aos algoritmos utilizados para a operacionalização, aqui propõe-se uma abordagem de exploração, em que além de respostas, o estudante deve apresentar uma justificativa e criticar cada resultado, questionando sua plausibilidade a partir dos significados construídos sobre frações. Ou seja, é muito importante para a construção e consolidação das ideias matemáticas que o aluno aprenda a justificar seus resultados (WALLE, 2009). Essa postura o ajudará a perceber que a matemática das frações faz sentido, assim como a dos números naturais. Por outro lado, o papel do professor é fundamental ao apoiar os estudantes enquanto exploram as atividades propostas.

Neste ponto é bastante interessante o uso das ferramentas tecnológicas, pois há a possibilidade de se repetir os processos várias vezes, quando necessário, o que pode auxiliar na compreensão dos estudantes. Sempre numa postura de resolução de problemas, a despeito da atividade proposta, é conveniente que o professor auxilie mais através de boas perguntas do que de respostas, que só devem ser dadas à medida que os alunos não conseguirem chegar à conclusão correta acerca de determinada ideia. Os educandos devem ser protagonistas na construção do próprio conhecimento, e nesse processo os erros também são positivos e podem ser excelentes pontos de partida para a intervenção acertada do professor.

Dito isso, são apresentados na sequência os recursos metodológicos a serem utilizados ao longo desta abordagem das frações com os estudantes, bem como as sugestões de como colocá-los em prática. Sabendo que, além das abordagens em sala de aula, a dinâmica de trabalho pode se estender às atividades para casa, remotas, ou ainda como sala de aula invertida, para o modelo híbrido.

Além disso, vale ressaltar que todo o processo de ensino-aprendizagem também faz parte da avaliação, e vice-versa, uma vez que a avaliação não pode ser encarada apenas como um momento pontual, gerador de dados, dissociado da aprendizagem (ONUCHIC, ALLEVATO, 2008, p. 82). Desse modo é imprescindível o olhar atento do professor, desde a primeira atividade, mantendo seus registros atualizados quanto ao desenvolvimento de seus alunos, de modo a replanejar suas ações sempre que necessário. Sob este olhar, a proposta desta sequência didática é de uma avaliação processual, não como um fim em si mesma.

5.2.1 Dominó de frações

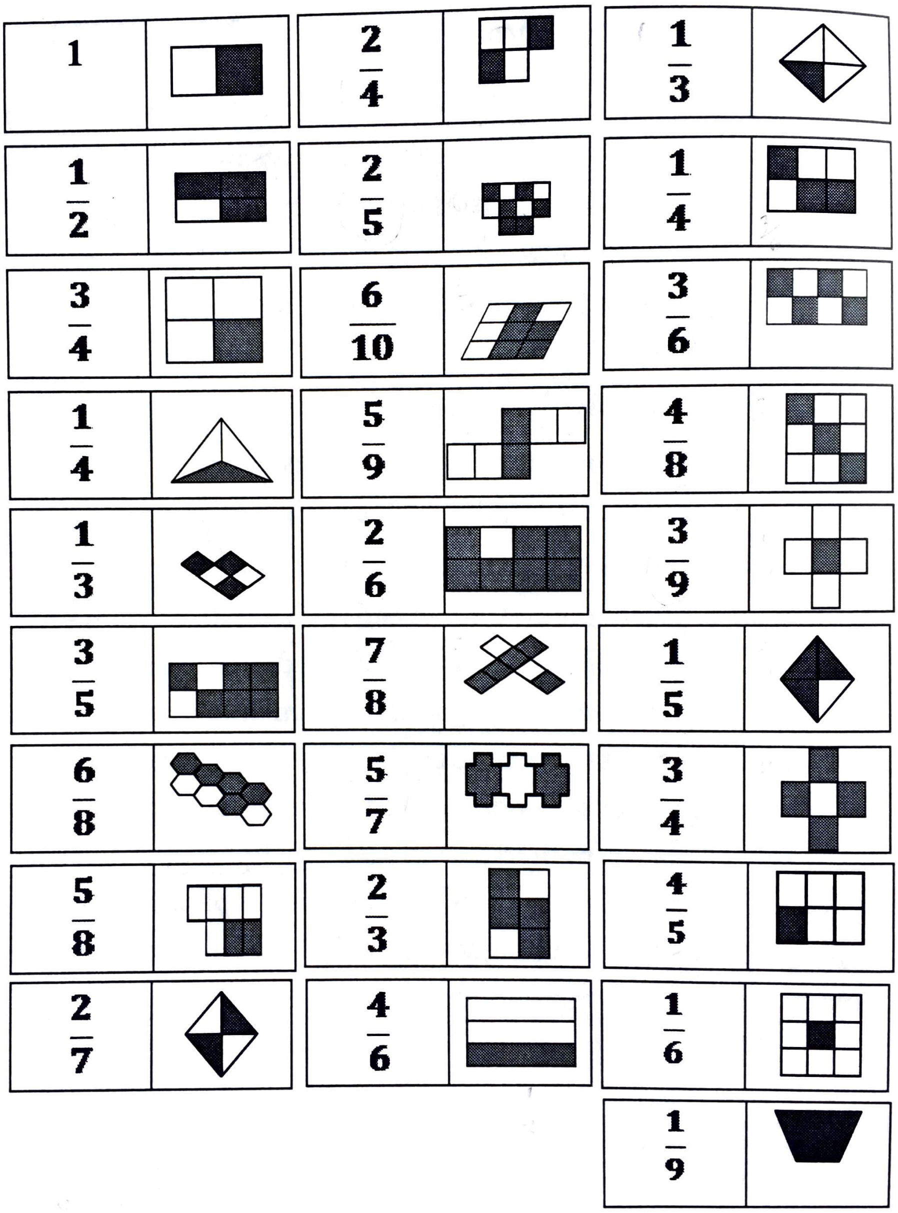
O jogo dominó de frações seria uma forma atrativa de lançar/retomar o tema sem passar por explicações sobre o conteúdo (como uma espécie de "quebra-gelo"), pois é bastante intuitivo. Desse modo, para esta primeira atividade bastaria explicar as regras do dominó convencional, incluindo a adaptação das peças para o tema. Cada peça mostra uma fração de cada lado e o aluno deve associar a representação geométrica à numérica da mesma fração.

De acordo com a percepção dos alunos, pode-se avançar mais na ideia de fração e sua representação como parte de um todo, ou "apenas brincar" com a turma. É importante que o professor esteja atento a este momento, em que a tendência é de que os alunos estejam mais descontraídos e exponham suas ideias e dúvidas de modo mais espontâneo.

I) FORMATO IMPRESSO:

Para o trabalho em grupo, ou individualmente, devem ser reproduzidas as peças. Uma possibilidade interessante seria o modelo apresentado por Bezerra, Macedo e Mendes (2013). Por não se tratar de um único formato para representar a unidade (o inteiro), a diversidade de ideias discutidas poderá ser maior.

Figura 5.14: Modelo das peças do dominó



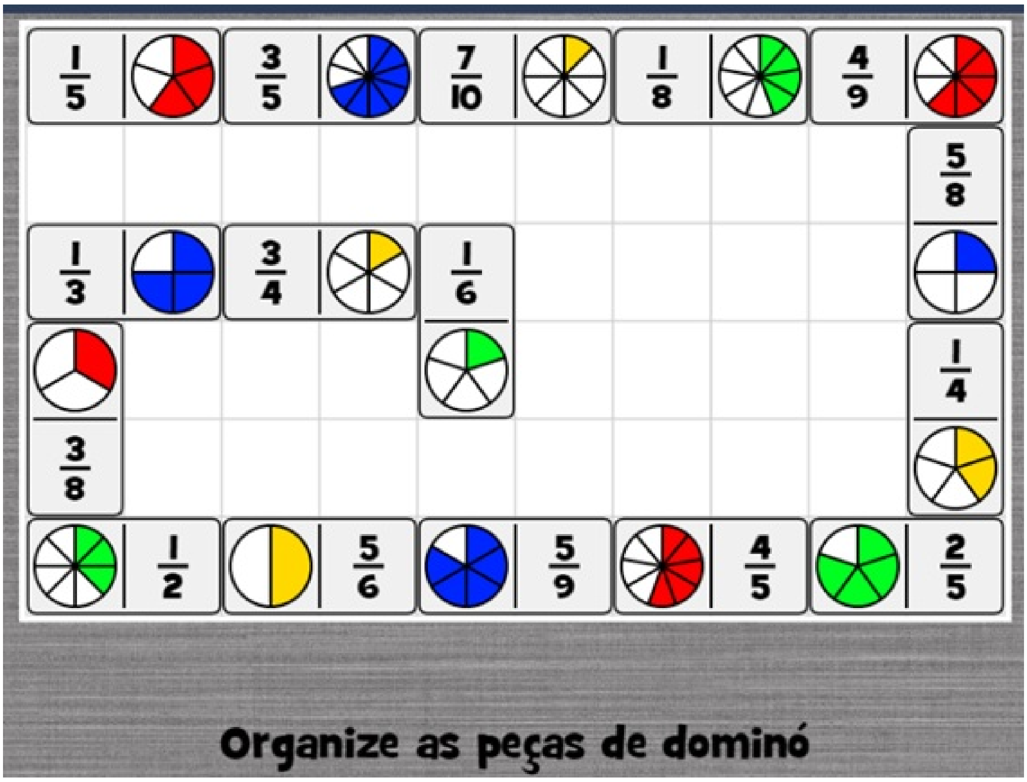
Fonte: BEZERRA, MACEDO, MENDES (2013, p. 74).

II) FORMATO DIGITAL:

Uma adaptação desta mesma atividade pode ser feita no formato digital. O professor seria o mediador apenas para manipular o computador, pois trata-se de um jogo de dominó confeccionado em um aplicativo do Office, o PowerPoint. A apresentação pode ser em aula presencial, utilizando o videoprojetor, ou on-line, remotamente. A orientação para confecção e uso do jogo estão disponíveis para livre reprodução, no canal Studio Office no Youtube (endereço: *https://www.youtube.com/watch?v=i8gi7E336J4*). A manipulação do jogo é simples, pois requer apenas o uso da tecla "enter" após selecionar uma das peças, de acordo com a escolha dos alunos. Importante ressaltar que, como o próprio professor pode confeccionar o jogo, é possível fazer várias adaptações, de acordo com a necessidade pedagógica.

Outra possibilidade é o jogo dominó de frações também disponível no site de jogos educativos Coquinhos (*https://www.coquinhos.com/domino-com-fracoes/play/*).

Figura 5.15: Dominó virtual Coquinhos



Fonte: COQUINHOS (2021)

É importante que os relatos, discussões, dúvidas e ideias que surjam durante o jogo sejam devidamente registrados para exploração em um segundo momento, que poderá ser imediatamente à execução ou não. É interessante que esses registros sejam feitos em conjunto com a própria turma (os estudantes podem anotar e/ou ditar suas percepções em tópicos). De acordo com Walle, “a primeira meta no desenvolvimento de frações deve ser ajudar as crianças a construir a ideia de partes fracionárias do todo” (WALLE, 2009, p. 323), e este jogo pode ser um bom ponto de partida para trabalhar este conceito com alunos do 7º ano.

5.2.2 Frações em applets do Geogebra

5.2.2.1 Representação e estimativa de frações

A partir da exploração da primeira atividade, tomando-se os registros feitos, propõe-se uma exploração mais detalhada e voltada para as ideias próprias de fração, com caráter investigativo. Assim, o aluno deve manipular, perguntar, conjecturar, descobrir, responder, trocar ideias - sempre com a mediação atenta do professor.

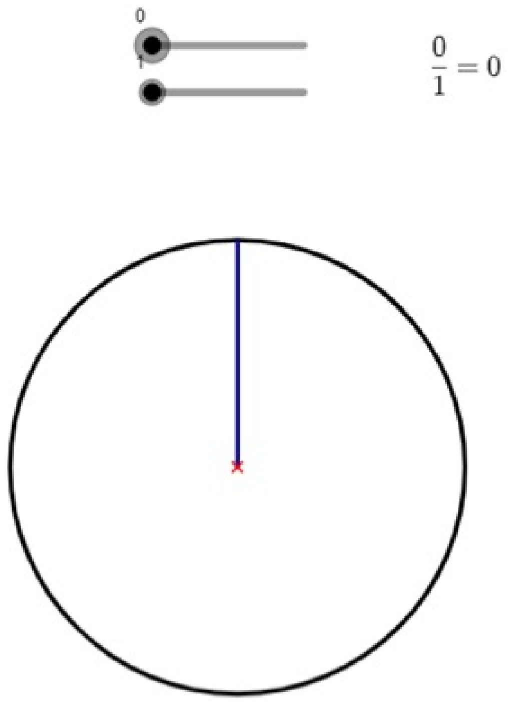
Esta atividade pode ser adaptada em material concreto. Mas o applet, como construção dinâmica, possibilita fazer e desfazer rapidamente várias representações, facilitando na investigação, levantamento de hipóteses e testes. É interessante deixar os alunos explorarem o recurso (com ou sem a mediação do professor), antes de fazer as intervenções, com boas perguntas estratégicas. A sugestão é que isso seja feito novamente com o auxílio do projetor, e também nos aparelhos celulares dos alunos ou nos computadores do laboratório de informática.

Havendo possibilidade, seria interessante dividir a turma em pequenos grupos, de modo que em cada equipe houvesse, pelo menos, um aparelho com acesso ao applet e o professor observasse as interações entre os componentes de cada grupo. Neste caso, anotações poderiam ser feitas para serem compartilhadas quando fosse retomado o momento com toda a classe.

Para esta atividade indica-se a exploração dos applets I, II e III, como segue. Isso porque possibilitam a representação de fração como parte-todo com modelo circular (pizza) e barra. Enquanto o primeiro é para representação apenas, o segundo e o terceiro demandam que se faça uma estimativa para a resposta correta em poucas tentativas. No segundo o aluno precisa responder a qual fração do inteiro a parte vermelha representa, enquanto no terceiro é o inverso: dada uma fração o aluno deverá estimar a qual parte da barra de chocolate corresponderá, marcando este ponto de corte.

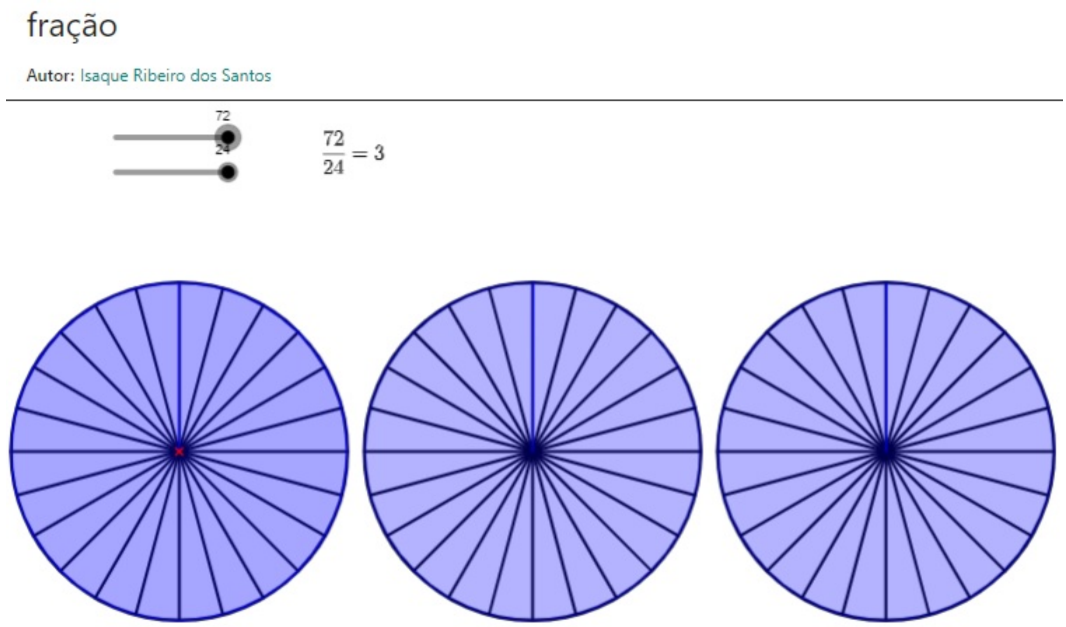
I) Fração do disco: Neste applet (*https://www.geogebra.org/m/HR32cN8E*) a unidade é apresentada em modelo circular (pizza); basta usar o controle deslizante para variar as representações, que começam em $\frac{0}{1} = 0$ e vão até $\frac{72}{24} = 3$, como se pode perceber pelas figuras a seguir.

Figura 5.16: Disco representando a fração $\frac{0}{1}$



Fonte: FRAÇÃO (2021)

Figura 5.17: Discos representando a fração $\frac{72}{24}$



Fonte: FRAÇÃO (2021).[1]

Possíveis perguntas para a exploração deste applet:

[1]FRAÇÃO. Isaque Ribeiro dos Santos. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/HR32cN8E>. Acesso em: 11 de set. 2021.

- O que as figuras têm a ver com os números mostrados nos controles deslizantes? E com os números mostrados ao lado dos controles deslizantes?
- Qual a relação da parte colorida com os números mostrados? O que significa?
- Por que às vezes aparece mais de um círculo? O que isso significa? Quando ocorre?
- Qual controle deslizante é responsável pelo aumento na quantidade de círculos? O que significa?
- Ao fixar um controle e mover o outro, o que é observado? O que pode significar?
- O que a igualdade significa? Por que aparece no segundo membro apenas um número, a mesma representação do primeiro membro ou ainda outra representação? Como os termos dessa igualdade estão relacionados?
- Por que o maior número no segundo membro da igualdade é 3? Por que não é possível um número maior, ou por que é uma limitação do applet?
- Por que os menores números nos controles deslizantes são 0 e 1, respectivamente? São uma limitação do applet? Qual o significado?
- As representações feitas com essas figuras (pizza), poderiam ser indicadas de outras maneiras? Haveria outra maneira de representar o mesmo que estes desenhos estão indicando?

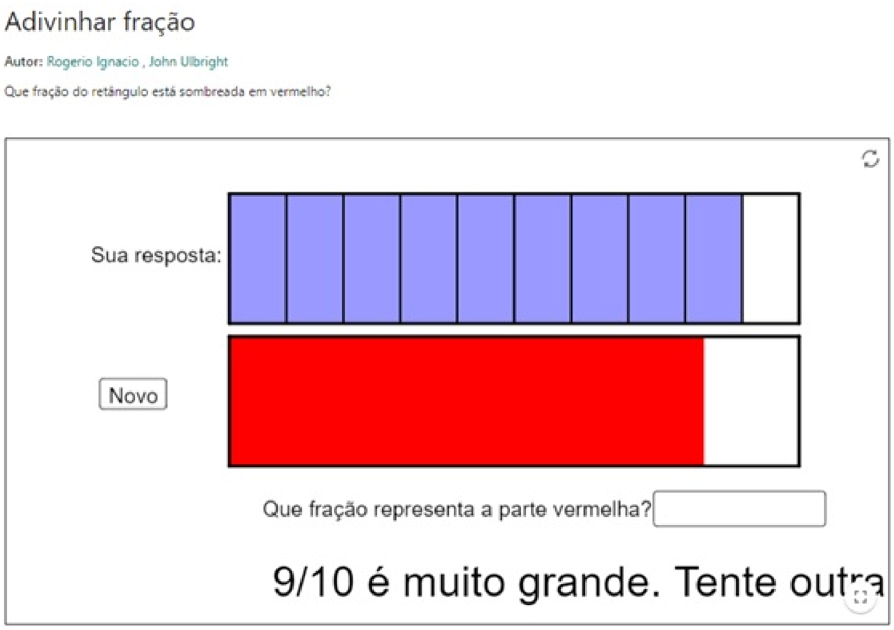
Com essa ferramenta pretende-se trabalhar os conceitos de fração como parte-todo, podendo abranger as ideias de número misto, frações próprias, impróprias, aparentes, frações equivalentes, mas sempre evitando usar nomenclaturas e algoritmos, a não ser que haja necessidade de acordo com as perguntas e colocações feitas pelos próprios estudantes.

Com as últimas perguntas pretende-se provocar o aluno a pensar que há vários modelos para representar uma mesma fração, de modo que a fração seja vinculada a seu significado como relação entre numerador e denominador, que representa um único número racional e não fique restrita à ideia de um desenho dividido com algumas partes pintadas.

Essa exploração acompanhada das respostas, observações, perguntas dos alunos, podem ocorrer com toda a classe ao mesmo tempo e o professor pode anotar as considerações mais importantes. Outra opção seria aproveitar o momento com os grupos menores, ou até pedir respostas individuais. Para facilitar esta coleta e análise, pode-se usar o Google Formulário, ou ainda um aplicativo de bate-papo, como o WhatsApp, ou o próprio chat da plataforma em que a aula esteja sendo transmitida (em caso de ser aula síncrona). Até porque, com o “novo normal” ainda não se pode trabalhar em grupos sem o distanciamento físico, e o WhatsApp pode ser utilizado alternativamente para "aproximar" os alunos e permitir que troquem ideias.

II) Adivinhar a fração representada pela parte vermelha: O próximo applet sugerido mostra a fração com um modelo de barra. Outro fator interessante é que desta vez o aluno deverá adivinhar qual fração representa a parte colorida, mas não há as subdivisões na figura. Isso será muito importante, porque observa-se que o aluno costuma se habituar a contar as partes em que o inteiro é dividido e as partes pintadas, para dar a representação, sem considerar quanto que essas partes realmente representam. Neste caso, o aluno deverá desenvolver alguma estratégia para estimar a fração indicada, que só aparece com as partes delimitadas ao clicar para a verificação da resposta dada.

Figura 5.18: Adivinhar a fração representada pela parte vermelha da barra



Fonte: ADIVINHAR FRAÇÃO (2021).[2]

III) Estimar a fração da barra de chocolate: O terceiro applet também é uma sugestão para a estimativa de uma fração, em que é proposta a divisão de um chocolate representado por um modelo de tira. O estudante deve apontar a localização exata para o corte e o applet indicará se está correto, se deveria ser antes ou depois, o local do corte. Devem ser feitas novas tentativas até o acerto. A ideia é que o estudante melhore suas estimativas e acerte cada vez mais com o menor número de tentativas.

[2]ADIVINHAR FRAÇÃO. Rogério Ignacio; John Ulbright. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/wMTh2YUC>. Acesso em: 18 de out. 2021.

Figura 5.19: Estimar a fração da barra de chocolate

Fonte: ESTIMANDO FRAÇÕES (2021).[3]

5.2.2.2 Comparação de frações

A esta altura espera-se que os estudantes estejam mais familiarizados com a ideia de fração, desenvolvendo estratégias para estimar um número racional na forma fracionária, usando a comparação como um dos recursos para isso. Assim os próximos applets selecionados lidam com essas ideias, de comparação e equivalência de frações. Observe que o intuito é trabalhar com as ideias, de modo intencional e encadeado, mas livre das pré-formatações rígidas, com tantas nomenclaturas e regras, que ainda não fazem sentido para o aluno.

Nesta etapa sugere-se novamente uma divisão da turma em pequenos grupos. Os applets para esta atividade, "Comparando frações com linhas e círculos" e os outros dois sobre frações equivalentes, deverão ser explorados pelos estudantes antes da aula (como tarefa de casa). Cada grupo produzirá uma síntese com suas observações, descobertas e dúvidas relacionadas ao funcionamento dos applets e o assunto de fração. O formato poderá ser por escrito, em tópicos; apresentado à classe oralmente; gravado em vídeo ou áudio. Deve ficar bem claro aos participantes que o interessante não é primeiramente que tenham entendido tudo e expliquem, mas que sejam curiosos, investiguem bastante, o suficiente para chegarem a conclusões ou mesmo a perguntas. O professor precisa ser bastante cuidadoso para valorizar e incentivar as perguntas de seus alunos. É possível que seja necessário, por diversos fatores, permitir que esta parte da atividade seja concluída na escola.

[3]ESTIMANDO FRAÇÕES. Marco A. Manetta. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/wertedgz>. Acesso em: 18 de out. 2021.

Com a exploração investigativa dos applets como tarefa de casa, ganha-se tempo enquanto potencializa-se as chances de maior engajamento e percepção da turma das ideias trabalhadas. A partir das considerações dos grupos, socializadas com a turma, o professor terá maiores indicadores de como abordar a comparação de frações de maneira mais proveitosa.

Após a manipulação dos applets de maneira conjunta, com o auxílio do projetor, pontuando todos os registros produzidos pelos alunos na tarefa extraclasse, o professor poderá apresentar frações aos alunos para serem comparadas com o desafio de tentarem fazê-lo sem o auxílio desses recursos. Essas frações devem ser cuidadosamente escolhidas, tendo em vista detectar diferentes estratégias utilizadas pelos estudantes. Caso necessário, deve-se retomar o uso dos applets como apoio pedagógico, mas incentivando os alunos a observarem os padrões e conseguirem comparar as frações criando suas estratégias. A seguir, uma breve descrição do funcionamento desses applets e de como é possível explorá-los com a turma:

I) Comparando frações com linhas e círculos:[4]

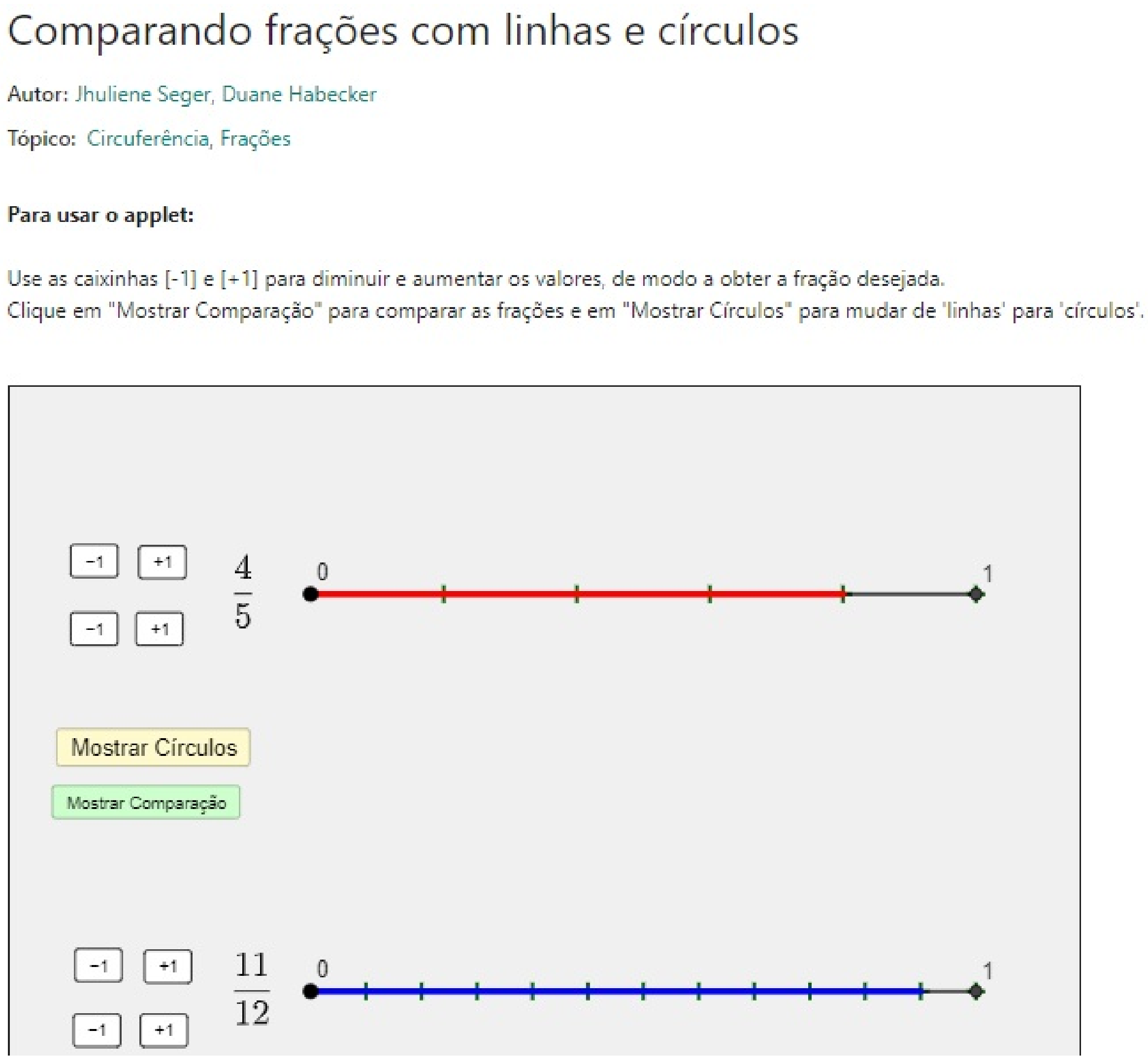
Representa duas frações, como mostrado nas figuras seguintes, e as compara em dois modelos. Essa exploração do conceito e representação de fração deve ser feita até que o aluno consiga pensar em frações de maneira correta e com mais naturalidade.

Este applet não usa controles deslizantes, em vez disso, acrescenta-se ou subtrai-se 1 para alterar os valores de cada termo. É interessante perguntar o que este 1 significa neste caso.

Como a função "Comparação" pode ser ocultada, a partir deste applet podem ser estimuladas e desenvolvidas variadas estratégias para comparação entre frações. O professor pode pedir que os alunos comparem algumas frações, ou resolvam situações problema com a ideia de comparar, antes de usar este applet. Uma das possíveis conclusões para a comparação entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{11}{12}$, é que como ambas as frações estão a uma parte da unidade e um quinto é maior que um doze avo, $\frac{11}{12}$ é maior, ou seja, $\frac{12}{12} - \frac{1}{12} > \frac{5}{5} - \frac{1}{5}$.

[4]Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/c4mfveca>. Acesso em: 18 de out. 2021.

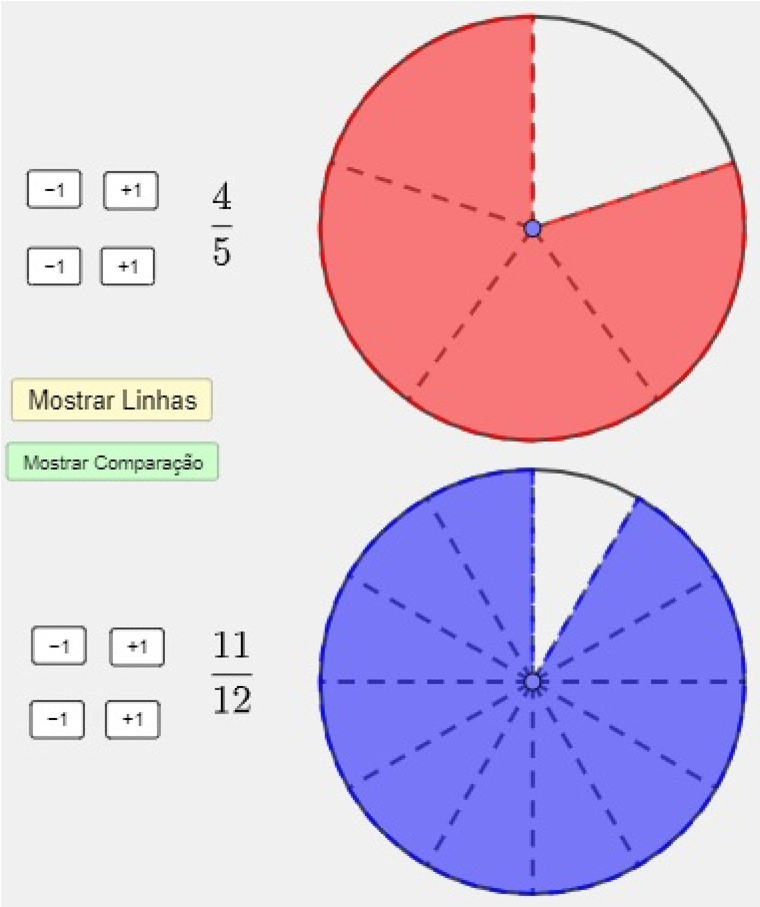
Figura 5.20: Comparando frações com linhas



Fonte: COMPARANDO FRAÇÕES COM LINHAS E CÍRCULOS (2021).[5]

[5]COMPARANDO FRAÇÕES COM LINHAS E CÍRCULOS. Jhuliene Seger ; Duane Habecker. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/c4mfveca>. Acesso em: 18 de out. 2021.

Figura 5.21: Comparando frações com círculos



Fonte: COMPARANDO FRAÇÕES COM LINHAS E CÍRCULOS (2021).

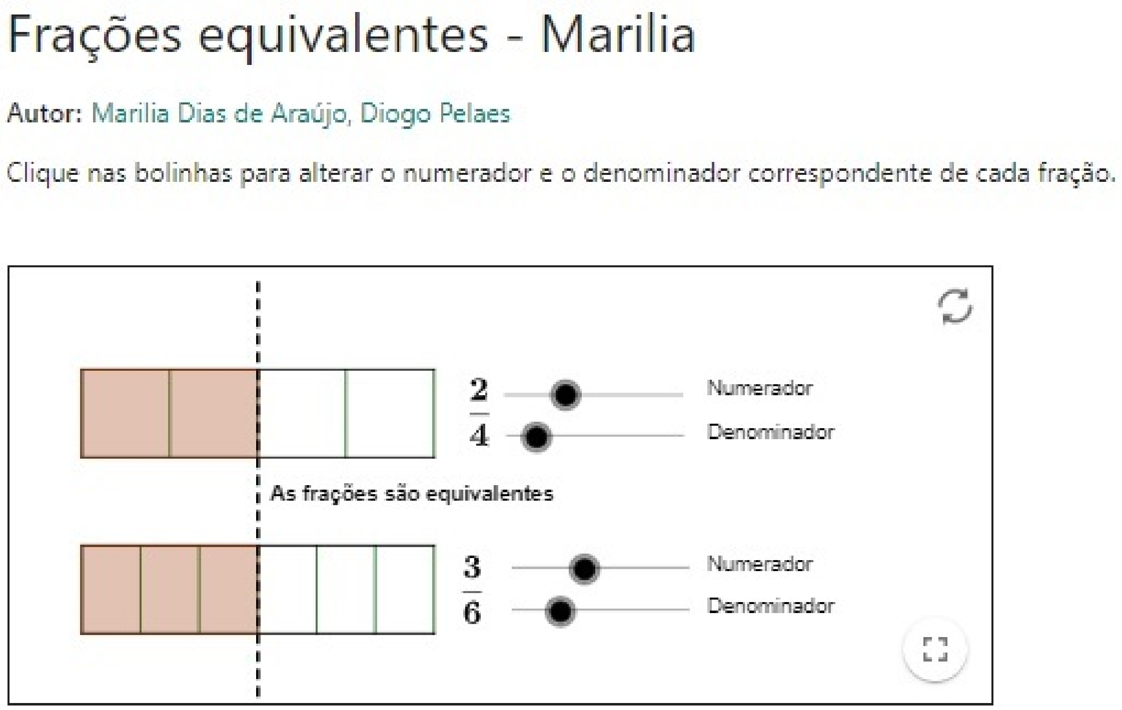
II) Comparação entre duas frações, em modelo de barras:[6]

Cada fração é determinada de modo independente, mas o próprio applet faz a indicação de quando ocorre a equivalência.

Neste caso é interessante que a ideia de frações equivalentes já tenha aparecido nas atividades desenvolvidas anteriormente, de modo que aqui o estudante seja capaz de indicar por qual motivo aparece ou não esta afirmação: "As frações são equivalentes".

[6]Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/d84Me6Gz>. Acesso em: 18 de out. 2021.

Figura 5.22: Representação das frações equivalentes $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$



Fonte: FRAÇÕES EQUIVALENTES (2021).[7]

III) Frações equivalentes:[8]

Este applet também é sobre frações equivalentes, mas as alterações nas frações são simultâneas, mantendo-as sempre equivalentes. A comparação ocorre entre duas frações equivalentes, de modo que em uma delas numerador e denominador são primos entre si (a chamada fração irredutível).

[7]FRAÇÕES EQUIVALENTES. Marilia Dias de Araújo ; Diogo Pelaes. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/d84Me6Gz>. Acesso em: 18 de out. 2021.

[8]Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/pEAGRC6Z>. Acesso em: 18 de out. 2021.

Figura 5.23: Representação da fração $\frac{6}{8}$ e sua forma simplificada

Fonte: FRAÇÕES EQUIVALENTES (2021).[9]

Ideias importantes para ressaltar a esta altura: "uma fração não diz nada sobre o tamanho do todo ou o tamanho das partes. Uma fração nos diz apenas sobre a relação entre a parte e o todo" e "as comparações com qualquer modelo podem ser feitas apenas se ambas as frações forem partes do mesmo todo" (WALLE, 2009, p. 335).

Observação: Caso o professor ache necessário, poderá fazer adaptação do material para trabalhar com um modelo impresso, utilizando folhas de papel A4. Cada aluno (ou grupo), fará a confecção de dobraduras com a orientação do professor, representando frações da folha (inteiro). Durante esta confecção é interessante que sejam feitas perguntas que levem o estudante a pensar sobre as ideias relacionadas à equivalência de frações.

É importante que neste primeiro momento haja a manipulação suficiente do material, antes de tentar formalizar as conclusões por meio dos algoritmos tradicionais. Sugestão de dobradura:

1) Tomar duas folhas A4 e dobrá-las ao meio. Colorir a metade. Considerar cada folha como unidade e pedir ao aluno que indique a fração que representa a parte pintada da folha, no caderno.

[9] FRAÇÕES EQUIVALENTES. Maria Aparecida Mendes da Silva Camacho Blanco; Marco A. Manetta. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/pEAGRC6Z>. Acesso em: 18 de out. 2021.

2) Dobrar apenas uma das folhas em quatro partes e usar uma caneta para marcar as linhas que surgiram. No caderno, seguir anotando também esta fração.

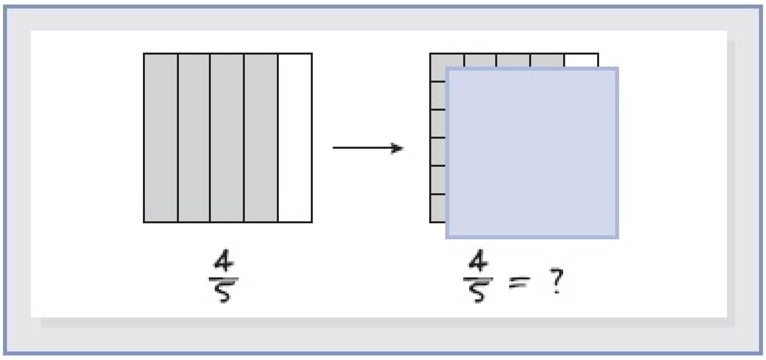
Neste processo, sempre deve-se perguntar o que significa cada passo; pedir aos alunos que comparem a região colorida nas duas folhas. As comparações e anotações devem continuar o quanto for necessário. As discussões são bem-vindas, bem como as dúvidas.

A subdivisão pode ser feita sempre ao meio, envolvendo formatos diferentes para que os alunos entendam que o importante é a relação entre numerador e denominador e não o formato em si. A atividade pode ser repetida e nesta ocasião seria interessante tentar dobrar em uma quantidade ímpar, como três partes.

Outra possibilidade seria trabalhar com a dobradura de um quadrado, que abriria para mais opções ao dobrar ao meio: linhas diagonais.

Um problema ao usar figuras para ilustrar a equivalência de frações é que alguns alunos sempre contam uma a uma as partes do todo e não conseguem perceber o padrão, que a equivalência é obtida ao multiplicar numerador e denominador por um mesmo número. Assim, após algumas figuras (dobraduras) produzidas pelos alunos, seria interessante propor a pergunta que segue ao expor a seguinte imagem à classe: “Qual é o novo nome para meus $\frac{4}{5}$?” (WALLE, 2009, p. 341).

Figura 5.24: Como é possível contar as partes fracionárias sem visualizar todas?



Fonte: WALLE (2009, p. 341).

5.2.3 Jogo papa todas de frações

Com este jogo pode-se trabalhar um pouco mais a comparação de frações e também avaliar a aprendizagem de maneira lúdica, pois a vontade de vencer naturalmente faz com que os estudantes estejam mais atentos às jogadas de todos os participantes e às regras evidentemente.

Trata-se de um jogo disponível no site do Grupo Mathema *(https://mathema.com.*

br/jogos-e-atividades/papa-todas-de-fracoes/), que consiste em um baralho com 32 cartas, uma tabela contendo tiras de frações e as regras do jogo que devem ser distribuídas para cada grupo de alunos. É possível fazer várias adaptações de acordo com a situação e objetivos específicos com o jogo. Por isso é importante tomar o formato original sempre considerando alterações bem-vindas.

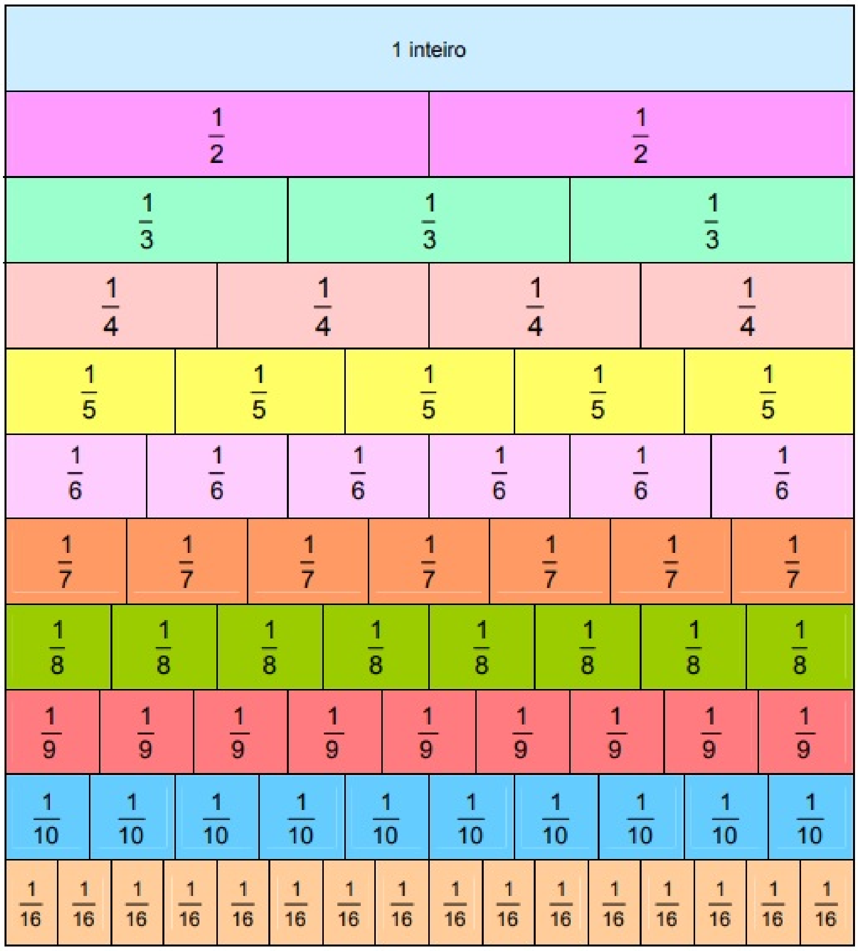
As cartas devem ser totalmente distribuídas entre os jogadores (viradas para baixo) e ao combinarem um sinal cada um coloca uma carta no centro da mesa. Vence a rodada quem colocou a carta que representa a maior fração do todo. O vencedor fica com todas as cartas do centro da mesa (papa todas). Em caso de empate o processo é repetido. O jogo termina quando acabam as cartas e o vencedor será aquele com a maior quantidade de cartas.

A tabela de frações poderá ficar no centro da mesa para consultas, comparando o tamanho das frações (SMOLE, 2021).

A proposta visa o engajamento dos alunos com o tema, pois dentre as estratégias vencedoras estarão as habilidades de comparar frações e reconhecer a equivalência entre elas. De acordo com a receptividade da turma, o professor poderá orientar os alunos a confeccionarem o próprio baralho, por exemplo.

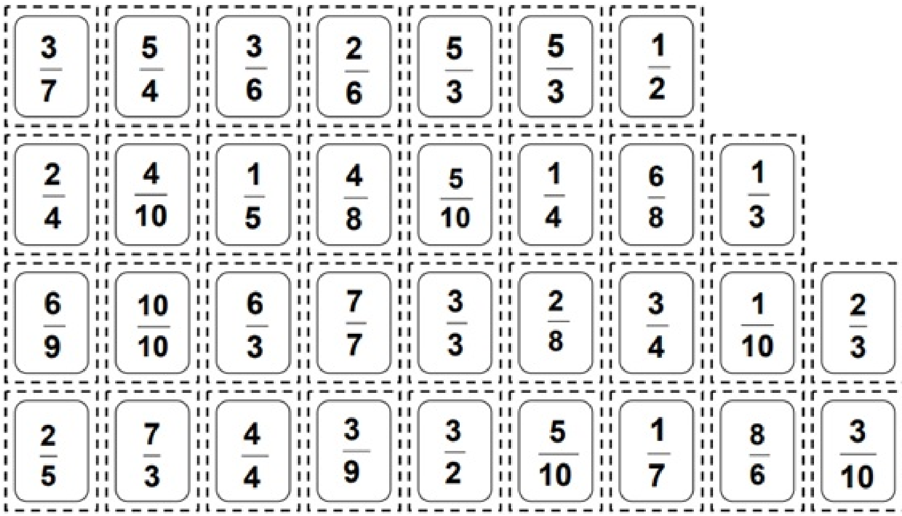
Com esta atividade pode-se desenvolver e avaliar a compreensão: do conceito de fração como parte-todo de um mesmo inteiro; da noção de equivalência e comparação de frações (denominadores iguais e distintos); da leitura e representação de frações; da resolução de problemas, com a realização de cálculo mental com frações (SMOLE, 2021).

Figura 5.25: Tabela com tiras de frações unitárias comparadas ao inteiro



Fonte: SMOLE (2021).[10]

Figura 5.26: Modelo das cartas para o baralho do jogo



Fonte: SMOLE (2021).

[10]Disponível em: <https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/papa-todas-de-fracoes/>. Acesso em: 18 de out. 2021.

5.2.4 Frações em sites educativos

Antes das sugestões para as próximas atividades desta sequência é importante evidenciar que existem vários sites voltados para a aprendizagem, dos quais foram selecionados três, devido ao caráter extremamente lúdico, diversificado e intuitivo, o que facilita uma abordagem flexível, voltada para a resolução de problemas, de maneira interativa, facilitando a personalização do ensino. Além disso, essas ferramentas são gratuitas.

O site da Universidade do Colorado desenvolve o projeto PhET Interactive Simulations *(https://phet.colorado.edu/)*, fundado em 2002 por Nobel Carl Wieman. A partir de extensa pesquisa educacional esse projeto cria simulações interativas e gratuitas, com conteúdos de matemática e ciências para a Educação, sendo acessível a todas as idades, desde alunos da Educação Infantil, até alunos do Ensino Superior.

As simulações são projetadas com o mínimo de texto, o que facilita na integração com o que está sendo trabalhado, cansando menos o estudante que em geral é extremamente visual e gosta de partir para a prática. Assim, potencialmente é uma excelente ferramenta para acompanhar as aulas que seriam expositivas, de apresentação de conceitos, propiciando uma construção conjunta, com a simulação de situações reais antes da abordagem de total abstração dos números em si. Assim, os alunos aprendem pela exploração e descoberta. Um dos primeiros problemas propostos poderia ser o desafio de se descobrir as regras de um dos jogos, por exemplo.

São várias simulações voltadas para o ensino de frações, além de haver colaboração constante dos usuários para criação de novos jogos (PEDROSA et. al, 2016, p. 5). Essas ferramentas são acessadas pela internet, ou ainda no modo off-line fazendo-se download para um computador (PEDROSA et. al, 2016, p. 5).

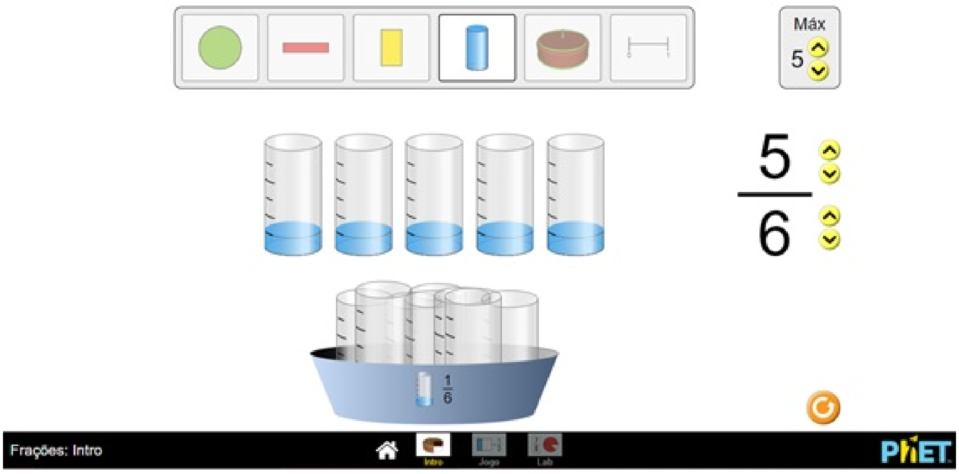
Ao pesquisar no site pelo tema frações, surgem cinco páginas que ainda estão subdivididas a partir de seus temas:

- Frações: Introdução;
- Construir uma Fração;
- Associe Frações;
- Frações: Igualdade;
- Frações: Números Mistos.

Em geral, as subdivisões tratam do tema em si, com comandos a serem executados, um jogo e um laboratório. O laboratório é a parte mais livre, pois não há pontuação, indicação de certo ou errado. Logo, é imprescindível a intencionalidade do professor ao trabalhar com esta ferramenta, ainda que faça parecer ao aluno algo totalmente espontâneo e acidental. O educador precisa saber antecipadamente qual a finalidade pedagógica, ainda que haja surpresas neste percurso.

Interessante também nesse aspecto é promover a exploração da dúvida dos estudantes por mais tempo, estimulando-se a discussão sobre resultados certos e errados, permitindo que concluam corretamente, de modo colaborativo, usando suas próprias palavras e descobertas. De modo semelhante, observa-se que a divisão dos temas é somente para fins de organização, uma vez que as ideias centrais são as mesmas e várias ferramentas são retomadas em simulações diversas. Outro fator positivo deste material são os variados formatos de representação e comparação: reta numérica, parte-todo com modelos contínuos de formas: planas em diversos formatos, recipiente contendo líquido, bolo de chocolate, como mostra a figura.

Figura 5.27: Representando frações no projeto PhET Interactive Simulations



Fonte: PHET INTERACTIVE SIMULATIONS (2021).[11]

Além dessas simulações diretamente relacionadas às frações existem outras possibilidades de exploração do tema, associando-o a outras ideias, como simulações sobre área e proporção, por exemplo.

Já o Cokitos (ou Coquinhos, na versão em Português), agrupa vários jogos educativos e interativos *(https://www.coquinhos.com/)*. Neste site, que tem o propósito de tornar acessível em um só lugar jogos educativos de diferentes entidades, é possível aprender, rever conteúdos, desenvolver as habilidades digitais, etc.

Coquinhos apresenta vários materiais relacionados ao estudo de frações: atividades para colorir, dominó, corrida, quebra-cabeça e outros. É possível pesquisar por idade, por componente curricular, ou ainda mais especificamente o tópico frações *(https://www.coquinhos.com/tag/jogos-de-fracoes/)*, no qual são disponibilizados mais de 30 jogos, alguns deles provenientes do próprio PhET.

[11]Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/fractions-intro/latest/fractions-intro_pt_BR.html> . Acesso em: 18 de out. 2021.

O terceiro projeto, Hypatiamat *(www.hypatiamat.com)*, foi desenvolvido por pesquisadores das Universidades do Minho e Coimbra, para mapear os problemas no ensino e aprendizagem de matemática e a partir disso cooperar com o sucesso escolar dos estudantes da Educação Básica. Para isso são apresentadas várias ferramentas interativas. Ainda há conteúdos em PDF, que podem ser impressos, como o jogo dominó de frações (HYPATIAMAT, 2021).

Nesta pesquisa pretende-se destacar o aplicativo “Representar por Frações”, que pode ser utilizado on-line ou off-line. O aplicativo é baixado gratuitamente para aparelhos celulares e este é um fator determinante, pois a maioria das famílias, que são o público-alvo deste trabalho, possuem contato com a Internet através desses aparelhos e de modo limitado, usando um pacote de dados móveis. Ou seja, em geral, ou os alunos não possuem acesso à Internet ou, quando conseguem, a conexão é limitada e por meio de aparelhos celulares, tendo contato com computadores ou notebooks apenas na escola, quando tanto.

Inicialmente o aplicativo apresenta uma tela com as quatro etapas em que está dividido. A exploração pode ser aleatória, mas está organizada a partir de uma revisão com os termos e significados de fração, com a utilização de exemplos; indo até a representação de frações e a resolução de problemas, que é a última parte a ser explorada. O módulo problemas apresenta uma coleção diversificada de questões adaptadas de avaliações externas de países como Espanha, Inglaterra e Portugal. A variedade de formas e questões em que as frações são trabalhadas tornam o aplicativo uma ferramenta bastante democrática, atendendo alunos em diferentes níveis de compreensão quanto ao tema.

Além disso, na tela inicial, no canto esquerdo inferior, há os ícones que direcionam para a página do Hypatiamat no facebook, para o site e para outros aplicativos deste projeto, além do botão que mostra os créditos do aplicativo (PIERINI, 2018, p. 9).

Figura 5.28: Aplicativo Representar por Frações

Fonte: HYPATIAMAT (2021).

Essas ferramentas devem ser socializadas, caso os alunos disponham de equipamentos que possam suportá-las. Em geral, não são ferramentas acessíveis a todos os estudantes. Ainda assim, este uso deve ser incentivado, uma vez que toda a turma ganha quando, pelo menos, um aluno aprende mais sobre como "fazer matemática", pois o conhecimento é compartilhado.

5.2.5 Associe frações

A próxima atividade sugerida para toda a turma é composta pelas simulações do "Associe Frações", ou "Fraction Matcher", do PhET, que estão subdivididas em: Frações e Números Mistos. Em cada tópico são 8 níveis, como mostra a figura, que podem ser concluídos em ordem ou aleatoriamente. O tempo gasto em cada nível é cronometrado e registrado, se a opção estiver ativada. Assim, ao final de uma etapa, ou várias, é possível acompanhar o progresso.

Figura 5.29: Associe Frações

Fonte: PHET INTERACTIVE SIMULATIONS (2021).[12]

Para marcar pontos é preciso associar frações correspondentes utilizando imagens e números. Ao clicar em "conferir" a pontuação é marcada se a resposta estiver correta e a igualdade é registrada. Em caso de erros consecutivos (duas vezes), aparece a opção para ver a resposta correta e não há pontuação.

A cada jogada, ao clicar em "conferir a resposta" aparece uma reta numerada em que cada fração é representada e abaixo aparece o sinal para compará-las ($<$, $=$ ou $>$).

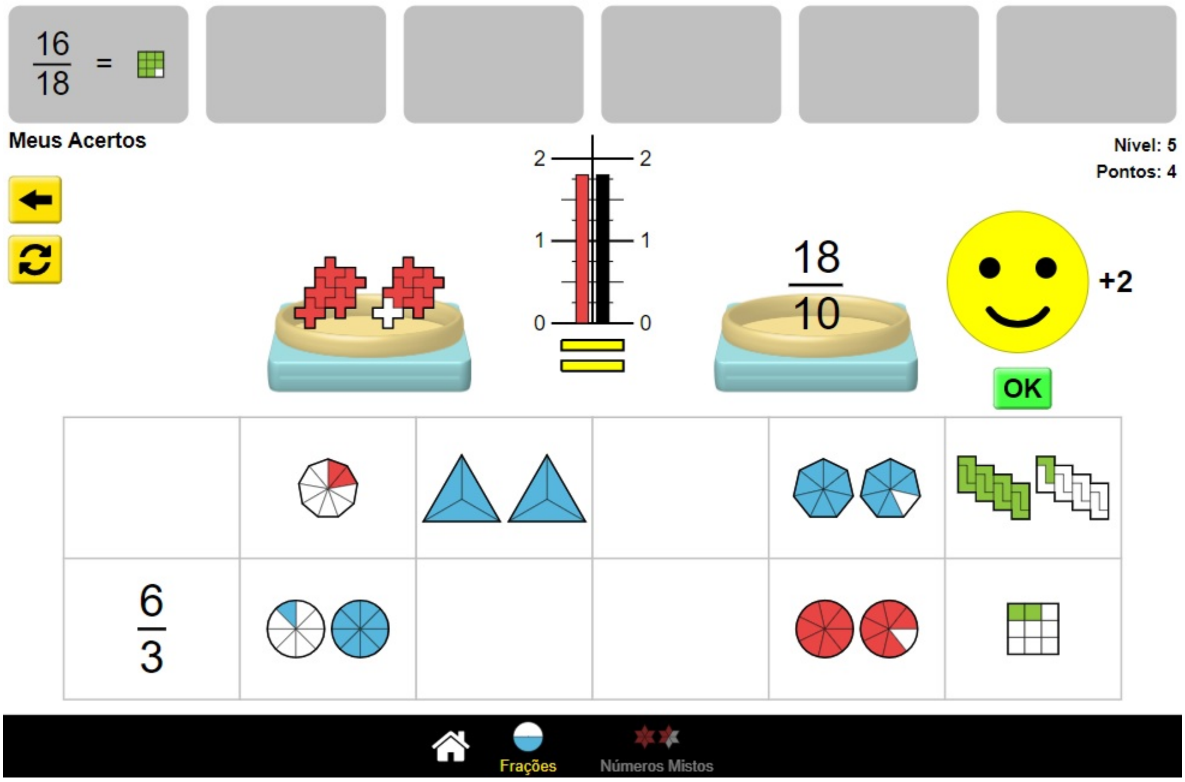
Aspectos interessantes quanto à aprendizagem e avaliação a serem observados ao aplicar este jogo:

[12]Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/fraction-matcher/latest/fraction-matcher_en.html> . Acesso em: 18 de out. 2021.

- compreensão de frações equivalentes;
- compreensão de frações maiores que a unidade e suas representações numéricas;
- percepção de que a comparação tem a ver com o número representado e não com o formato, cor, padrão da figura. E que, da mesma forma, nada pode-se dizer sobre esse número tomando apenas um dos termos, antes é preciso compreender como numerador e denominador estão relacionados;
- percepção de que toda fração está associada a um número que tem sua localização na reta numérica, assim como os números naturais. Até porque várias frações representam números naturais.

Um complemento importante quanto a este último aspecto seria, por exemplo, ao final da atividade solicitar aos alunos que escolham, pelo menos 5 das frações representadas e registrem-nas em uma folha. Após, os alunos devem desenhar a reta numérica, estimando a posição para cada uma das frações escolhidas e identificando-as.

Figura 5.30: Comparando números racionais representados por frações



Fonte: PHET INTERACTIVE SIMULATIONS (2021).

Esta atividade pode ser realizada de forma conjunta, com o auxílio do projetor e a mediação do professor, ou em laboratório de informática (em duplas ou individualmente), ou ainda pode ser utilizado o próprio telefone celular do aluno. De qualquer forma, é importante que haja tanto o momento coletivo, pontuando questões relevantes para esta aprendizagem, quanto o incentivo ao jogo, com a finalidade de aprendizagem e consolidação do conteúdo ao cumprir todos os níveis do "Associe Frações". Esse segundo momento pode ocorrer em atividade extraclasse.

Outra observação importante é que, caso o professor perceba a necessidade poderá retornar a conceitos mais básicos da construção de fração utilizando as próprias simulações do PhET.

5.2.6 Jogo "Qual fração é a menor?"

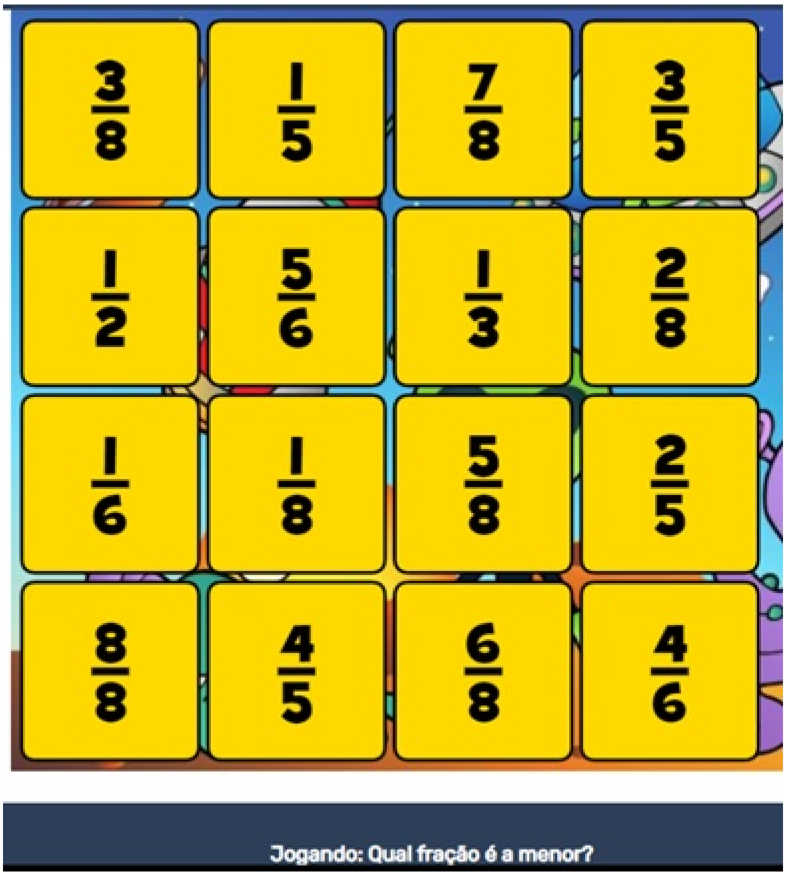
Com este jogo, disponível no site Coquinhos *(https://www.coquinhos.com/qual-fracao-e-a-menor/play/)* é possível desenvolver/avaliar a habilidade de comparar e ordenar frações utilizando-se estratégias mentais, como a estimativa. Isso também porque o jogo é cronometrado, o que desestimula o cálculo com o algoritmo tradicional, pois gastaria muito tempo. Os jogadores são estimulados a concluir em um tempo cada vez menor, "quebrar recordes".

Conforme mostra a figura, aparecem 16 frações no início do jogo, que vão sumindo à medida que o participante clica na menor. A partida termina quando todas as frações desaparecem. Ao cometer um erro a fração permanece na tela e o jogo continua.

Este é um exemplo de atividade que pode ser adaptada para o formato impresso, pois é de fácil confecção, abrindo possibilidade para alterações nas frações e quantidade de cartas apresentadas. O professor poderá cronometrar o tempo ou ainda dois ou mais alunos poderão disputar simultaneamente, de modo que comecem juntos e o primeiro a terminar o seu jogo seja o vencedor. Para esta adaptação todas as frações devem ser colocadas em ordem crescente para o término da partida.

Será relevante solicitar a escrita das estratégias, cálculos e ideias utilizadas para o jogo. Observa-se que como são 16 frações diferentes, mesmo o aluno que prefere usar o algoritmo tradicional terá mais trabalho e sentirá a necessidade de combinar uma outra estratégia, pelo menos, para conseguir ordenar todas.

Figura 5.31: Qual fração é a menor?



Fonte: COQUINHOS (2021).

5.2.7 Possibilidades para exploração dos conceitos trabalhados

A partir do trabalho quanto ao conceito de fração, as seguintes propostas são sugestões para reforçar, consolidar, avaliar a aprendizagem e ampliar essas ideias conectando-as a outros conceitos matemáticos, estimulando assim o desenvolvimento do senso numérico fracionário.

Desse modo, de acordo com a conveniência, os recursos apresentados anteriormente podem ser utilizados conjuntamente para a exploração das atividades seguintes.

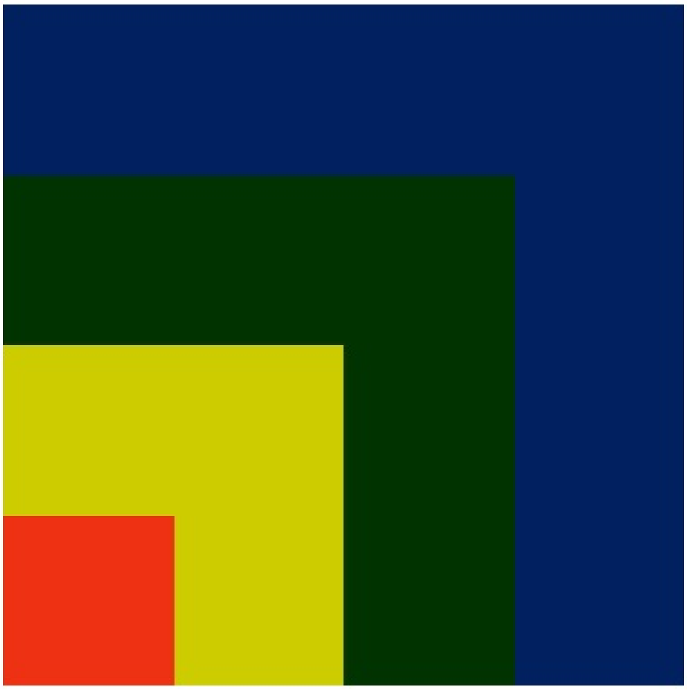
5.2.7.1 Frações em Obras de Arte

Para esta atividade o professor deverá apresentar aos alunos as figuras das seguintes obras de pintura em tamanho ampliado, informando-lhes que possuem formato quadrado. Em uma primeira etapa a apresentação deve ser breve e o professor pedirá que os alunos registrem rapidamente a primeira resposta que lhes vem à mente diante da pergunta: Que fração da figura cada cor representa? Ou seja, eles irão estimar um valor correspondente a cada uma.

Na segunda etapa, as obras serão novamente apresentadas e permanecerão diante dos alunos. Caso julgue necessário, o professor poderá providenciar cópias, de modo que cada aluno possa manipular as imagens. E agora, as perguntas serão ampliadas:

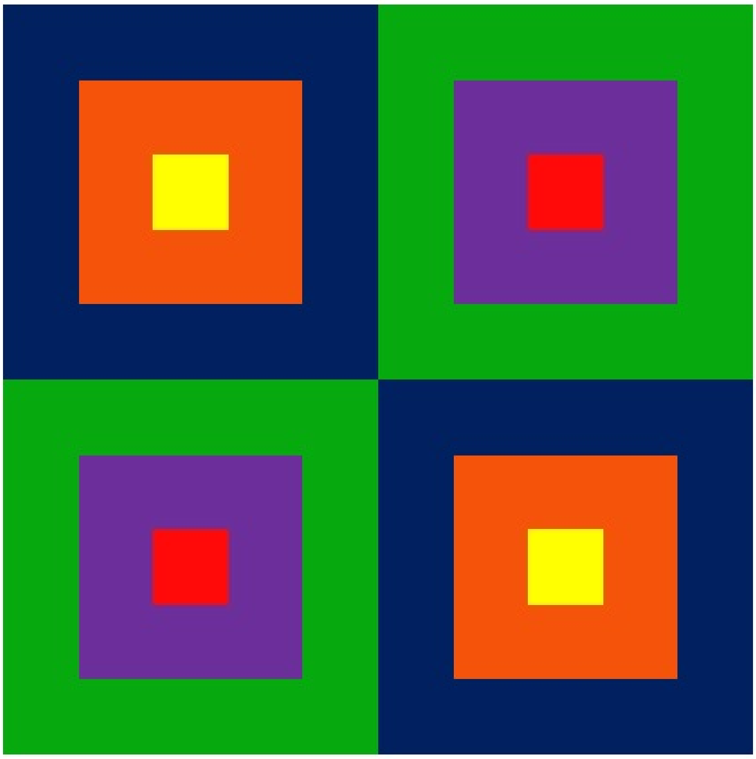
- Caso você tivesse que reproduzir esta obra colorindo com lápis de cor, provavelmente iria precisar mais de qual lápis?
- Que fração da figura cada cor representa?
- Qual é a maior fração?
- E a menor?
- Compare estas frações e organize-as começando pela maior.
- É correto afirmar que $\frac{3}{4}$ desta coleção é de quadros coloridos?
- Como encontrou esses resultados? Registre seu raciocínio de modo organizado e convença um colega.

Figura 5.32: Obras de Pintura - I



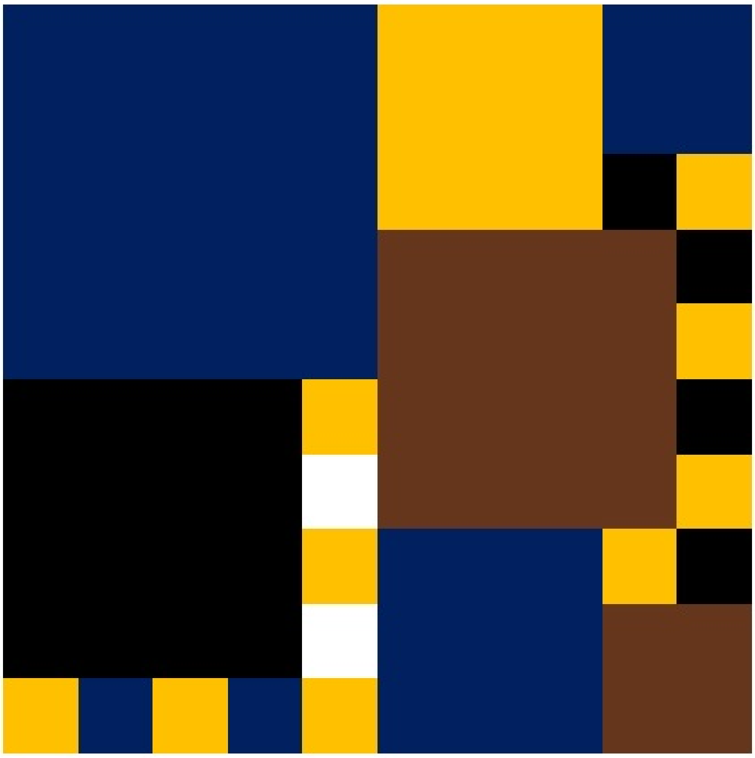
Fonte: BOALER, MUNSON, WILLIAMS (2018, p. 125).

Figura 5.33: Obras de Pintura - II



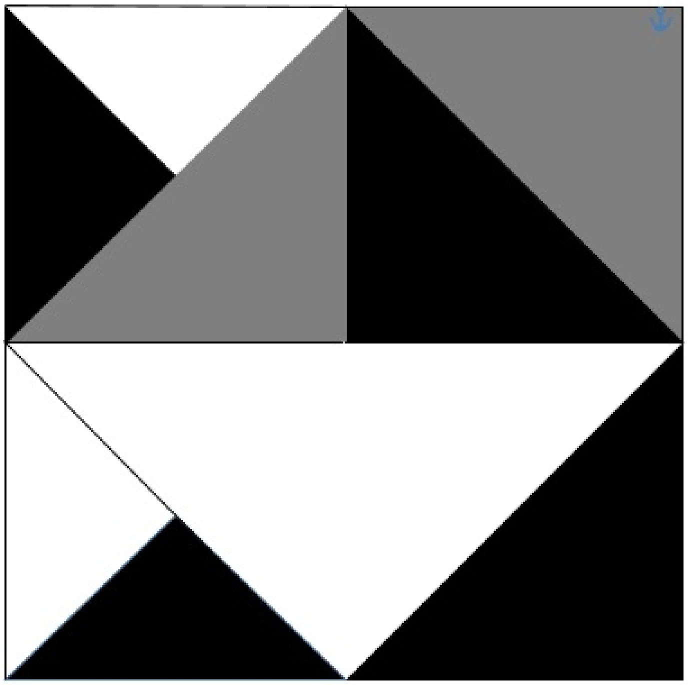
Fonte: BOALER, MUNSON, WILLIAMS (2018, p. 127).

Figura 5.34: Obras de Pintura - III



Fonte: BOALER, MUNSON, WILLIAMS (2018, p. 129).

Figura 5.35: Obras de Pintura - IV



Fonte: BOALER, MUNSON, WILLIAMS (2018, p. 131).

Com esta atividade o estudante tem mais uma forma de olhar para as frações, pois mesmo trabalhando um modelo contínuo, com figuras, a divisão das partes de modo padronizado não está tão evidente. Assim, há um estímulo ao pensamento conceitual, junto à busca de novas estratégias para associar às que já conhece.

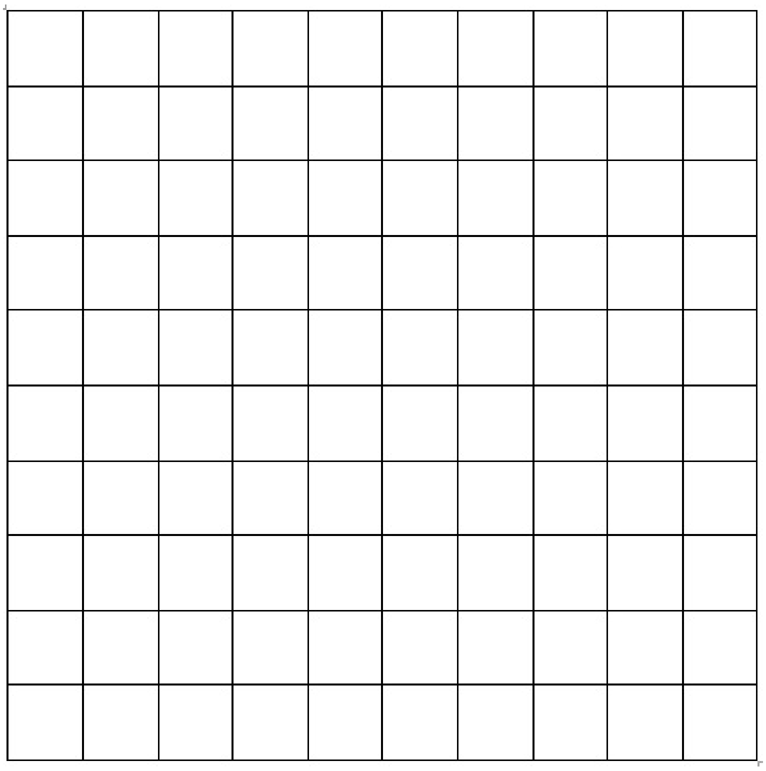
Quando todas as respostas forem expostas, pode ser sugerido ao aluno que crie outras telas, usando estes padrões "escondidos" ou ainda outros. Uma das estratégias seria dividir o papel convenientemente e depois colorir os espaços criados. Ao final, as linhas divisórias são removidas. A pintura IV, além de quadrados, também apresenta triângulos.

Uma segunda rodada desta atividade poderá ser proposta utilizando as obras criadas pelos próprios alunos. É possível a abordagem de outros objetos de conhecimento como área, polígonos, linhas, ângulos, proporção, etc.

Logo, esta atividade permite avaliar e estimular o desenvolvimento do senso numérico de fração, a representação de uma fração numericamente e vice-versa, a generalização dos conceitos de fração.

Indo além, pode-se estimular a criatividade dos alunos em ousar ainda mais no modelo, mantendo padrões que permitam continuar a representação de frações em novas telas quadradas. A esta altura poderão aparecer linhas curvas e outras discussões interessantes para compor a aprendizagem das frações e conectar ideias importantes da matemática.

Figura 5.36: Malha quadriculada quadrada



Fonte: A própria autora.

5.2.7.2 A partilha dos 35 camelos

Trata-se de um dos famosos problemas do livro "O Homem que Calculava", em que a matemática é apresentada por meio de histórias fictícias, encantadoras e intrigantes, na antiga Arábia. Beremiz Samir é o calculista persa, herói da história, pois acaba com uma briga familiar, deixando todos contentes, e ainda leva um belo camelo como pagamento. Este problema foi escolhido para compor a última atividade devido aos objetivos deste estudo, voltados para uma abordagem conceitual do estudo de frações. De maneira implícita, várias propriedades das frações são empregadas aqui, mas muitos alunos eficientes em procedimentos algorítmicos com frações não conseguem entender a trama do problema e o uso da matemática feito por Beremiz. Por outro lado, estudantes que tenham um conhecimento conceitual de fração, podem tecer estratégias consistentes e eficientes para sua resolução, desvendando as ideias do "homem que calculava".

Neste problema, ocorre que a herança (35 camelos) deixada pelo pai a três irmãos seria distribuída da seguinte forma: $\frac{1}{2}$ ao mais velho, $\frac{1}{9}$ ao mais novo e $\frac{1}{3}$ ao do meio. Como não faria sentido fracionar um camelo, os irmãos brigavam por não saber como cumprir a vontade do pai sem que ninguém abrisse mão do que era seu por direito, uma vez que nenhuma dessas frações de 35 representam um número inteiro (TAHAN, 2009, p. 21).

Beremiz, com a permissão dos irmãos, resolve o problema adicionando o camelo do amigo de viagem e recalculando as frações, mas relativas ao total de 36 camelos. Assim:

$$36 - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 36 + \tfrac{1}{3} \cdot 36 + \tfrac{1}{9} \cdot 36\right) = 2$$

Finalmente, Beremiz e o amigo seguem viagem, cada um em um camelo (TAHAN, 2009, p. 23).

Para a abordagem com a turma este problema pode ser contado com o auxílio de uma animação *(https://www.youtube.com/watch?v=W2dFs9sQMpM)*, ou entregue por escrito, por exemplo. O professor pode dividi-lo e apresentar primeiramente até a briga dos irmãos, perguntando se haveria uma solução. Ou ainda poderia ir avançando e fazendo perguntas: Qual teria sido a solução oferecida por Beremiz? Por que Beremiz acrescentou um camelo à quantidade inicial? Como isso poderia ajudar? O objetivo de Beremiz era puramente ajudar e ainda doando o camelo do amigo? Qual seria a ideia escondida neste enigma?

Após a solução do problema, dada por Beremiz, os alunos deverão responder: Como foi possível a solução encontrada por Beremiz?

É importante que os alunos sejam incentivados a registrar suas ideias, escrevendo, desenhando, esquematizando o raciocínio. E ainda, como disse Boaler (2018), o estudante deve procurar convencer: a si mesmo, a um amigo e a um cético, de maneira gradativa. Ou seja, é preciso fundamentar as conclusões. E ainda que busque suporte numa simulação de frações ou em material manipulativo é interessante que se avance mais, buscando generalizações próprias do raciocínio abstrato.

Ao construir/avaliar a solução do problema junto aos alunos, existem pontos interessantes quanto à aprendizagem das frações a serem observados:

- reforçar a ideia de que o conceito de fração envolve sempre a divisão em partes iguais e que não pode haver resto;
- criticar resultados de acordo com o sentido: nem sempre faz sentido fracionar uma grandeza, por exemplo, os camelos;
- perceber que o fato de a soma das três frações em questão resultarem em um número menor que 1, ou seja, $\frac{17}{18}$, indica que a herança estava mal dividida para quaisquer quantidades de camelos. Muito provavelmente o matemático Beremiz já havia percebido isso quando ofereceu-se para ajudar e ainda acrescentou o camelo do amigo de viagem;
- Beremiz também deve ter percebido que 35 não era um número conveniente por não ser divisível por nenhum dos denominadores em questão. Mas que, por outro lado,

36 encaixava-se perfeitamente à situação, sendo $\frac{1}{2} \cdot 36 = 18$, $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ e $\frac{1}{9} \cdot 36 = 4$. Assim, os irmãos ficariam com 34 camelos;

- perceber que o valor correspondente a cada fração varia de acordo com o todo considerado. E por isso todos os herdeiros ficaram contentes, recebendo mais do que lhes cabia originalmente. E como $\frac{1}{18}$ de 36 é 2, Beremiz teve direito a dois camelos: restituiu o do colega e escolheu outro para si;

- apesar de ser praticamente automático recorrer aos números decimais para facilitar o raciocínio e comparação dos números, este é um exemplo de que além de dar trabalho, os valores encontrados são dízimas periódicas e podem desencaminhar o raciocínio, o que ocorre muitas vezes pela necessidade de aproximação, gerando erro no resultado final. Veja que originalmente seria $\frac{1}{2} \cdot 35 = 17,5$; $\frac{1}{3} \cdot 35 = 11,666...$, $\frac{1}{9} \cdot 35 = 3,888...$ É preciso estimular o desenvolvimento do senso numérico de fração.

Após explorar bastante o problema da partilha dos camelos, o professor poderá desafiar os alunos a criarem um problema parecido, pensando em números convenientes. Isso os ajudará a pensar nos padrões, conjecturar, levando-os a generalizações. As frações e o número de camelos foi uma combinação perfeita para Beremiz prosseguir viagem com mais conforto, montado em seu próprio camelo. Com essa inspiração os estudantes poderão redigir em grupo, um problema contemporâneo com frações de uma quantidade conveniente e um novo herói matemático.

Seria interessante trabalhar as duas últimas atividades desta sequência didática de forma interdisciplinar, num trabalho cooperativo com as outras áreas de conhecimento, como preconiza a BNCC (BRASIL, 2018).

Ao final desta sequência didática, ainda que se tenha um roteiro de trabalho voltado especificamente para o estudo das frações, é importante ressaltar que a fração faz parte do cotidiano escolar assim como os números naturais e as demais ideias fundamentais. Não é necessário, e nem possível, isolar um conteúdo para estudá-lo, pois as ideias estão conectadas. Logo, é importante que o número racional seja inserido com mais frequência e naturalidade no planejamento do professor. Portanto, mesmo após desenvolver uma sequência didática com as ideias de fração, é fundamental retomar o tema e integrá-lo aos demais.

5.3 Atividades da sequência didática e a prática pedagógica em 2021

Como esta é uma proposta conceitual de formação de significados a partir de uma exploração investigativa, o ideal seria separar um tempo adequado para o planejamento da execução desta sequência didática, de maneira gradativa e progressiva junto aos alunos, observando resultados e replanejando a rota sempre que necessário. No entanto, como isso ainda não foi possível, enquanto esta pesquisa era feita, algumas atividades foram executadas de forma experimental para verificação da viabilidade de forma prática: a receptividade dos alunos, os obstáculos relacionados à dificuldade quanto aos recursos pedagógicos, sinalizando assim ajustes necessários.

Dessa forma, os relatos a seguir referem-se a essas experiências com alunos do 7° ano da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Nossa Senhora da Saúde e da Escola Municipal de Ensino Fundamental Ezequiel Fraga Rocha (referidas anteriormente nesta pesquisa) durante as aulas de matemática. Esses momentos ocorreram de modo totalmente presencial, com 3 turmas, envolvendo 65 estudantes.

1ª Atividade: Dominó de Frações

Considerando que o conteúdo de frações já havia sido trabalhado com esses alunos, a retomada ocorreu a partir do jogo Dominó de Frações, disponível no site de jogos educativos Coquinhos. O jogo foi acessado com a mediação da professora, em projetor da sala multimídia da escola, em horário normal da aula de matemática, tal como ocorreu com as demais atividades desenvolvidas.

Os alunos, inicialmente, ficaram surpresos por ser uma aula com jogo on-line, curiosos sobre como seria e o que deveriam fazer. Isso foi visto como fator positivo, pois vários estudantes que tendem a não participar começaram a "brincar", expressando suas ideias oralmente, de forma mais descontraída, e acabaram discutindo conceitos relacionados às frações sem a sensação de estar fazendo uma "atividade de matemática", que costuma ser vista até como uma obrigação apenas. Ainda sob este aspecto, percebeu-se uma certa inversão no protagonismo dos alunos: vários daqueles que procuram apresentar as tarefas por escrito corretamente, com presteza, estiveram mais quietos, enquanto outros, daqueles que apresentam dificuldades e/ou desinteresse nas atividades tradicionais, entusiasmaram-se em responder e até mesmo argumentar e ajudar os colegas no entendimento. Nem sempre as ideias faziam sentido matematicamente, mas a fala do aluno era ouvida e incentivada, pois havia interesse e participação de forma integrada e prazerosa, algo essencial na construção significativa do conhecimento. A colocação do aluno era tomada como ponto de partida para estabelecimento de ideias corretas sobre o significado das frações.

Seguindo a proposta da sequência didática, procurou-se interferir o menos possível na execução do jogo. De modo que apenas foi indicado que seria um dominó e perguntado se os alunos conheciam as regras; e que se tratava de uma adaptação do modelo convencional. De modo geral, os estudantes ficaram eufóricos e ávidos por responder. Nesse ponto percebeu-se que vários não haviam entendido como funcionava o jogo, então foi aberto o espaço para que cada um colocasse seu entendimento, até que se chegou a uma conclusão, com a ajuda da mediação da professora.

Por tudo isso, durante o jogo havia bastante ruído na sala, pois vários falavam ao mesmo tempo ou tinham dificuldade em esperar que o colega terminasse para fazer suas colocações. Assim, do mesmo modo que a participação ativa de vários foi muito positiva, percebeu-se também os aspectos negativos: alguns alunos, menos comunicativos, não tinham suas respostas ouvidas, outros estavam bastante distraídos, não engajados na atividade. A partir disso, foi combinado com a turma que o aluno iria levantar a mão antes de falar e que, por vezes, a própria professora iria indicar qual aluno deveria escolher a próxima peça a ser encaixada no dominó. Isso ajudou porque os alunos se aquietaram mais, prestando atenção ao que o colega fazia e às argumentações dos outros, enquanto outros que estavam alheios tiveram a atenção despertada, pois poderiam ser chamados a responder também.

Outro fator negativo é o uso da máscara, que dificulta bastante a comunicação, tanto para os alunos ouvirem de maneira clara o professor como para serem ouvidos, o que é cansativo para todos. Teve aluno que se levantou para mostrar diretamente na imagem projetada, com gestos, o que estava sugerindo em determinado momento para a solução do jogo.

De modo geral, esta atividade foi bastante satisfatória, a partir do objetivo proposto, pois, inicialmente, os alunos participaram de forma espontânea e, posteriormente, de maneira mais direcionada, sendo que o assunto foi retomado de modo bastante simples e de forma atraente aos estudantes. Enquanto os alunos sugeriam as peças a serem encaixadas percebeu-se quais deles liam corretamente as representações fracionárias e aqueles que sequer lembravam-se de como relaciona-se a representação numérica e geométrica das frações como parte-todo.

2ª Atividade: Frações em *applets* do Geogebra

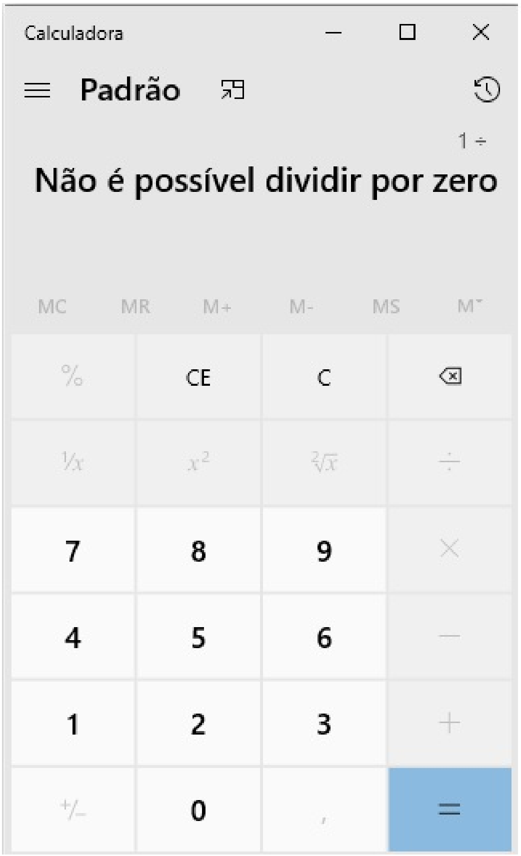
Após o despertar de vários questionamentos, dúvidas e argumentações, neste mesmo ambiente, foi apresentada aos alunos a animação de frações com discos em *applet* do Geogebra. Em todo o tempo notou-se a busca do aluno pela aprovação do professor, hesitando em fazer suas ponderações, e ao fazê-las esperava que o professor dissesse se era isso mesmo. Conforme a proposta desta pesquisa, além da apresentação da animação, fez-se perguntas para estimular e orientar o raciocínio dos estudantes quanto aos conceitos e representação de fração, sempre buscando interferir o mínimo possível de forma impositiva ou dando respostas prontas.

Os alunos puderam observar melhor a relação entre a representação geométrica e a notação de fração com algarismos ao acompanhar os movimentos nos controles deslizantes, de maneira pausada, junto às perguntas feitas e as respectivas alterações no *applet*. Interessante registrar que durante essa interação alguns alunos destacaram-se apresentando ideias bastante coerentes que ajudaram o restante da turma a participar dessa discussão. Por exemplo:

- Quando perguntado por que ao aumentar o algarismo mostrado no denominador, o número de discos diminuía, fixado o numerador, a Aluna V respondeu que seria porque o resultado da divisão (entre numerador e denominador) não chegava a uma unidade, logo, não havia necessidade de outro disco para representar (no caso da fração própria). Outros alunos entenderam que seria porque a parte considerada era menor que o total de partes do inteiro. Mesmo sendo ambos entendimentos corretos, os estudantes desconfiaram disso e aguardavam que a professora dissesse quem acertou. Foi um momento bastante proveitoso para trabalhar, de forma espontânea, as várias interpretações de fração: quociente entre dois números e relação entre parte-todo, por exemplo.

- Ao mostrar o funcionamento dos controles deslizantes foi perguntado por qual motivo o menor número possível para o numerador é o zero enquanto para o denominador é o 1. O Aluno R respondeu dizendo que é por não ser possível uma divisão por zero. Vários alunos surpreenderam-se tentando entender essa relação, uma vez que não é natural para todos os alunos enxergarem a fração como quociente. Aproveitou-se essa oportunidade para explorar o significado de fração e a possibilidade da divisão por zero. Ao projetar a calculadora do computador no telão os alunos sugeriram várias divisões e viram com surpresa o resultado para o divisor zero. Ficaram empolgados e queriam testar por eles próprios na calculadora do celular.

Figura 5.37: Investigando a possibilidade de divisão por zero



Fonte: A própria autora.

Ainda nessa segunda atividade com o Geogebra, na etapa seguinte, foram usados *applets* para que o aluno estimasse a fração apresentada como parte-todo: adivinhar a fração representada pela parte vermelha e estimar a fração da barra de chocolate. Como foi uma atividade em grupo houve um desafio por parte da professora, para estimulá-los, de modo que a turma deveria unir-se, concentrando-se para tentar adivinhar a fração desejada no menor número de tentativas possível, valendo-se assim de uma boa estimativa.

Em uma das turmas, em especial, os alunos ficaram muito empolgados porque conseguiram acertar algumas frações na primeira tentativa e a comemoração era como se um gol tivesse sido marcado pelo time, foi uma sensação muito boa para todos. Animados pelos resultados, com as primeiras estimativas certeiras, prosseguiram com novas frações a serem descobertas. Também foi positivo quando erravam, pois, todos queriam saber por que daquela vez não teria dado certo. Alguns não concordavam a princípio com a resposta verificada, o que propiciava um ótimo momento para discussões em que os próprios colegas auxiliavam na elucidação das dúvidas, com as devidas intervenções atentas do professor.

Outras observações sobre o uso desses *applets* para a estimativa de frações:

- Como a representação da fração era apenas de uma barra dividida em duas partes com uma delas colorida, vários alunos responderam que a fração representada seria um meio, não percebendo a proporção da parte colorida em relação a todo o inteiro considerado. Foi um momento propício para tratar a questão em que os próprios colegas ajudaram, dizendo que não estava dividido ao meio, então $\frac{1}{2}$ não poderia ser a resposta correta.

- As estimativas mais acertadas foram referentes às frações unitárias. Ao conversar sobre isso com a turma, foi abordada a importância de se estabelecer comparação com frações mais "fáceis" de serem estimadas e observar a equivalência entre frações; alguns comentários relacionados a isso eram trazidos pelos próprios estudantes.

- Para estimar a representação da fração do chocolate a ser cortado, os alunos se empolgaram bastante, pois tinham de dizer se o corte seria mais à direita ou à esquerda. Em alguns momentos não havia consenso sobre o local exato do corte e para resolver este impasse fazia-se uma votação rápida, desse modo havia uma tensão maior para saber a resposta certa. Isso foi muito positivo pois prendeu a atenção da classe num momento bastante significativo. À medida que era constatado erro ao verificar se o corte estava no lugar certo os alunos ficavam mais cuidadosos e criteriosos quanto à precisão do corte.

3ª Atividade: Simulações com frações no PhET

Para esta atividade foi utilizado o projeto PhET Interactive Simulations, do site da Universidade do Colorado. Como os alunos ainda apresentavam dificuldade de compreensão da relação entre numerador e denominador, primeiramente foram trabalhadas as simulações na parte introdutória, "Frações: Intro", de maneira semelhante ao exposto anteriormente (*https://phet.colorado.edu/sims/html/fractions-intro/latest/fractions-intro_pt_BR.html*). Vale lembrar que o trabalho com o PhET enriqueceu bastante a experiência, uma vez que a mesma fração pode ser apresentada por vários modelos, mais familiares ao cotidiano do aluno: recipiente com água, bolo, além dos modelos geométricos (círculo e retângulos) e ainda a reta numérica.

Figura 5.38: Foto dos alunos durante as simulações

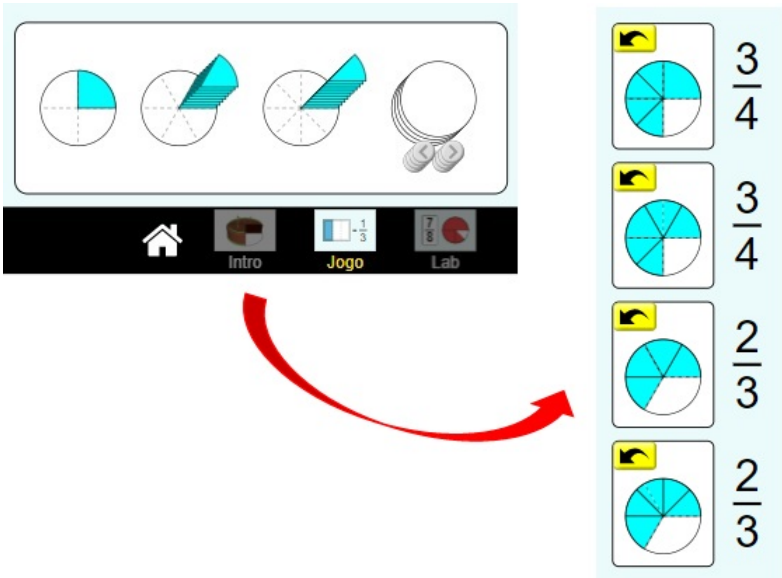
Fonte: A própria autora.

Vários estudantes que ainda não conseguiam associar a representação de fração como parte do todo a um número racional localizado na reta numérica começaram a enxergar isso. Outro fator construtivo está relacionado à compreensão de fração própria e imprópria, que envolve conceitos os quais normalmente oferecem dificuldades para o ensino e para a aprendizagem, uma vez que o aluno vê uma representação usando os algarismos 2 e 3, por exemplo, que significam um número menor que 1, ou seja, $\frac{2}{3} < 1$, enquanto $\frac{3}{2} > 1$, mas menor que 2. Nesse sentido, o uso das simulações foi bastante esclarecedor, enquanto a ideia de fração como divisão tornava-se mais presente e bem-vinda para a assimilação dos conceitos apresentados.

Aproveitando o ensejo, foi proposta uma atividade escrita de comparação de frações. Primeiro, era necessário determinar quais frações dadas eram maiores ou menores que 1, justificando a resposta com a estratégia escolhida (frações utilizadas: $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{3}{4}$ e $\frac{13}{30}$). Segundo, de maneira semelhante, os alunos deveriam escolher a maior fração em cada par apresentado e justificar sua escolha com a estratégia de resolução que preferisse (estes foram os pares de frações: $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{2}$).

Ainda no "Frações: Intro", a segunda parte explorada foi o jogo, apenas os primeiros níveis, para representar a fração indicada. A fim de completar um nível devem ser tomadas as peças, uma a uma, que correspondam corretamente à fração dada. Aqui surgiram discussões interessantes quanto à equivalência de frações, pois algumas peças não estavam disponíveis, obrigando os estudantes a escolher peças que as substituíssem devidamente. Os alunos animavam-se com a descoberta de que outras peças poderiam ser combinadas satisfatoriamente, como mostrado nas figuras a seguir:

Figura 5.39: Peças disponíveis para representar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ no jogo do PhET e a solução encontrada



Fonte: A própria autora.

Para finalizar a atividade no PhET foi utilizado o simulador "Associe Frações". No início os alunos viram com estranheza o fato de haver mais figuras que números, pois achavam que sempre deveria ser um número para corresponder a uma figura para valer a equivalência. Mas com a ajuda da professora perceberam que a comparação era entre os números racionais representados, seja pela notação fracionária, seja pela figura.

Também houve bastante empolgação porque o tempo estava sendo cronometrado, e isso os ajudou a manter o espírito de equipe, uma vez que discutiam rapidamente as ideias antes de definir quais seriam as soluções corretas e as peças que seriam movidas.

A princípio este jogo seria proposto para que cada aluno acessasse do seu próprio smartphone, ou no máximo em dupla, estimulando a competição entre os estudantes (uma vez que as escolas envolvidas não dispõem de laboratório de informática). No entanto, houve problemas com acesso à internet, e também quanto ao real número de aparelhos celulares em cada turma. Logo, todas essas atividades foram feitas usando o projetor conectado a um único computador e o espírito de competição ficou por conta de "todos contra a máquina", que deixa registrados os tempos de cada nível concluído. Ainda assim, os alunos mantiveram-se bastante engajados, apesar de algumas distrações e a agitação que por vezes os fazia perder o foco e tumultuava a aula.

Durante essas simulações também se percebeu que a necessidade de os alunos se referirem às peças fez com que houvesse um exercício e discussão da leitura e significado das representações das frações. E um aluno ficava "vigiando" o outro para que não perdessem tempo e pontos. Vários ficaram com as mãos levantadas porque queriam responder, argumentar. Mas havia também os quietos, que gostaram das atividades mas não se posicionaram oralmente. Por exemplo, a Aluna L disse: "melhorou minha compreensão de fração, mesmo que eu não participei muito eu resolvi na minha mente".

Conforme relatos dos próprios alunos, essa experiência foi bastante proveitosa por tudo que foi exposto acima, bem como pela constatação em uma pesquisa realizada ao final das atividades, relacionada a essa prática. E devido à falta de suporte tecnológico, em vez do Google Formulário optou-se por um questionário impresso.

Sobre os resultados da sondagem, quanto às atividades desenvolvidas nessas aulas, destacam-se os seguintes dados:

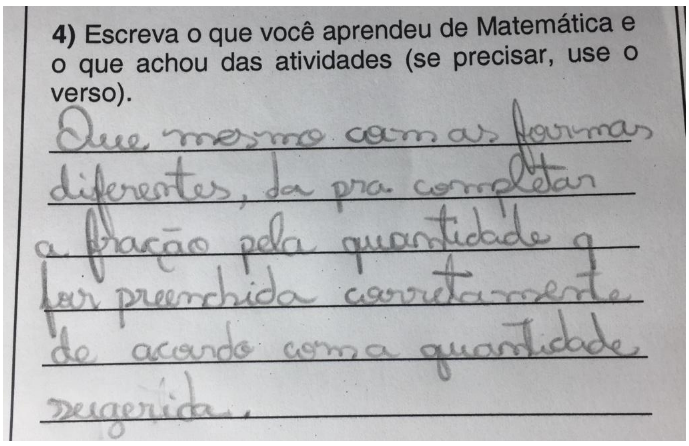
1. Mais de 95% responderam que as atividades auxiliaram em sua compreensão do que é uma fração e de como ela é representada.

2. As atividades alcançaram satisfatoriamente a maioria dos estudantes, pois mais de 58% não tiveram grandes dificuldades para resolver as tarefas propostas. Lembrando que, nestas aulas foi feito um resgate das ideias básicas de fração, por isso ainda é necessário prosseguir desenvolvendo o tema para, gradativamente, trabalhar ideias consideradas mais complexas.

3. A empolgação dos alunos nas aulas também foi refletida no questionário, uma vez que 85% dos estudantes gostaram das atividades envolvendo frações. Os outros 15% não se posicionaram nem positiva nem negativamente quanto a isso.

As figuras seguintes são exemplos do depoimento dos alunos na pesquisa:

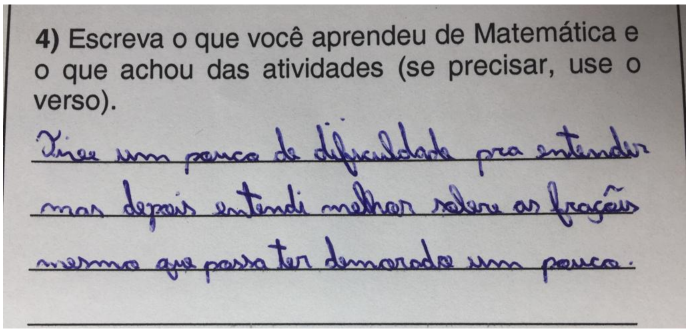
Figura 5.40: Resposta da aluna M


4) Escreva o que você aprendeu de Matemática e o que achou das atividades (se precisar, use o verso).

Que mesmo com as formas diferentes, da pra completar a fração pela quantidade q for preenchida corretamente de acordo com a quantidade sugerida.

Fonte: A própria autora.

Figura 5.41: Resposta do aluno G

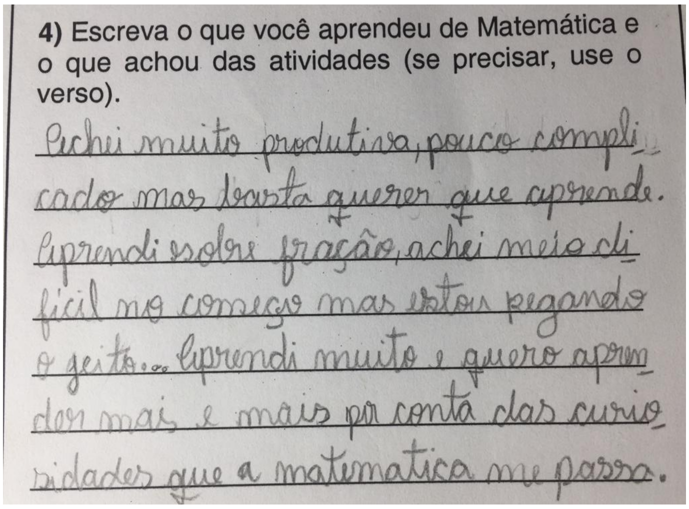


4) Escreva o que você aprendeu de Matemática e o que achou das atividades (se precisar, use o verso).

Tive um pouco de dificuldade pra entender mas depois entendi melhor sobre as frações mesmo que possa ter demorado um pouco.

Fonte: A própria autora.

Figura 5.42: Resposta da aluna K



4) Escreva o que você aprendeu de Matemática e o que achou das atividades (se precisar, use o verso).

Achei muito produtiva, pouco compli cado mas basta querer que aprende. Aprendi sobre fração, achei meio di fícil no começo mas estou pegando o jeito... Aprendi muito e quero apren der mais e mais por conta das curio sidades que a matematica me passa.

Fonte: A própria autora.

Portanto, apesar das dificuldades encontradas, foi uma prática exitosa e os alunos pediram outras aulas como essas. Isso é bastante animador levando em consideração também que no atual contexto os alunos estão desacostumados com a rotina de sala de aula, cansam-se ainda mais rapidamente e é difícil para o professor prender a atenção da classe por muito tempo. Até mesmo alunos com laudo de déficit de atenção e/ou que fazem atividades diferenciadas do restante da turma participaram com entusiasmo, de maneira integrada.

Capítulo 6

Considerações Finais

Ao longo desta pesquisa procurou-se investigar as ideias centrais relacionadas às frações, as problemáticas do ensino e aprendizagem desse tema, principalmente nas primeiras séries dos Anos Finais do Ensino Fundamental, buscando identificar as razões para essas demandas e oferecer uma ferramenta de apoio ao trabalho do professor neste sentido.

A grande variedade de autores que escrevem sobre frações reforça a relevância e complexidade desta temática. Conforme afirma Ripoll *et al.* (2017), o conceito de fração é seguramente um dos temas mais desafiadores para o ensino e a aprendizagem matemática na educação básica. Walle (2009), concorda com esse pensamento de Ripoll e chama a atenção para a aprendizagem conceitual, de modo que os procedimentos e algoritmos sejam construções dos estudantes, não simplesmente métodos para encontrar resultados que não façam sentido.

Segundo Boaler (2018), a matemática "é composta de poucas ideias fundamentais e interligadas" e o aluno bem-sucedido é aquele que pensa profundamente sobre essas ideias. Em contrapartida, o estudo das frações tem se mostrado tão frustrante para a maioria dos alunos justamente por ser visto como um amontoado de números desconexos, que só fazem algum sentido quando são identificados por figuras divididas e parcialmente coloridas (BERTONI, 2009).

A pesquisa realizada com alunos do 7º ano auxiliou no diagnóstico das dificuldades de aprendizagem dos estudantes relacionadas aos conceitos de fração desde as ideias básicas. Desse modo buscou-se aplicar atividades com princípios elementares, conforme são apresentadas aos estudantes, desde as séries iniciais, gradativamente, com questões contemplando aspectos como: conceito de fração e suas diversas interpretações, ideia de equivalência, estimativa e comparação.

Com o surgimento da Pandemia antes da aplicação dos questionários diagnósticos, algumas adaptações ocorreram para que fosse possível concluir a pesquisa. Apesar de todo o esforço para o sucesso na coleta do material, sabe-se que o resultado poderia ter sido mais abrangente sob outras circunstâncias, pois entre vários fatores negativos, foram longos períodos sem o ensino presencial, e ainda hoje o número de alunos na escola é limitado pelo revezamento, sendo que alguns deles evadiram, vários são infrequentes e quase todos ainda não se adaptaram à nova rotina escolar.

Como as atividades do diagnóstico foram preparadas levando em conta ideias básicas de fração, contemplando desde as atividades consideradas "mais fáceis", mesmo quando relacionadas às habilidades a serem desenvolvidas desde o 5º ano do Ensino Fundamental, ficou bastante evidente o déficit de aprendizagem, bem como a necessidade de uma intervenção baseada em conceitos, pois se o aluno não entende que fração é uma relação entre numerador e denominador (BOALER, 2018), não poderá construir ideias mais complexas sobre o tema e chegar a corresponder aos objetivos de aprendizagem do 7º ano do Ensino Fundamental, por exemplo.

Assim, sabe-se que há a necessidade dessa intervenção pedagógica para trabalhar as ideias básicas de fração, ainda que seja com alunos de 7º ano, por tratar-se de um assunto essencial, que dá base à construção de outras ideias fundamentais. Ou seja, não há como avançar significativamente com o desenvolvimento de outros conteúdos sem a ideia de fração construída. No entanto, o tempo é escasso, os recursos limitados, entre outras adversidades do contexto.

Logo, uma sequência didática baseada na resolução de problemas e jogos, lançando mão de ferramentas tecnológicas foi proposta justamente por reunir características como: ênfase ao raciocínio e argumentação de ideias, presença do elemento lúdico, personalização do ensino, flexibilização de tarefas e otimização do tempo. Dessa forma pretende-se: possibilitar o atendimento de um público diverso, pois uma mesma classe é bastante heterogênea com relação aos níveis de conhecimento; apresentar um conteúdo que já foi visto de modo mais espontâneo e intuitivo, enfatizando a construção de significado; atrair a atenção do estudante e ampliar o acesso ao utilizar jogos, desafios e recursos virtuais.

Apesar das dificuldades para a aplicação dessas ideias com os alunos, devido à limitação de acesso a aparelhos eletrônicos com Internet, conforme foi sugerido na sequência didática, podem ser feitas adaptações para várias atividades. Justamente por isso, buscou-se oferecer metodologias diferenciadas, mantendo o enfoque no tratamento de frações a partir de uma perspectiva conceitual.

Como proposta de continuidade deste estudo, pretende-se aplicar essa sequência didática em sala de aula e avaliar seus resultados na prática, conferindo e comparando os dados resultantes com o referencial teórico, de modo a subsidiar novos estudos e práticas voltadas para o ensino e aprendizagem de frações.

Além disso, sugere-se o aprofundamento deste tema com estudos sobre o número racional sob outras formas, decimal e porcentagem, relacionadas às frações. Desse modo há ampliação e aprofundamento de uma mesma ideia fundamental que se conecta a outras (BOALER, 2018). Sob uma abordagem conceitual há maior possibilidade de os alunos entusiasmarem-se e desenvolverem sua compreensão da matemática como uma linguagem maravilhosa que conecta o mundo. E uma vez que número é conceito básico para fazer matemática, precisa-se conhecer frações para a conexão com o “fazer matemática”.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, H. M. O uso de celulares, tablets e notebooks no ensino da matemática. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 321-327, 2016. Disponível em: ¡https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p318¿. Acesso em 15 de jul. 2021.

[2] BACICH, L.; TANZI Neto, A.; TREVISANI, F. de M. *Ensino Híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

[3] BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

[4] BERTONI, N. E. *Educação e Linguagem Matemática IV*: Frações e Números Fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

[5] BERTONI, N. E. Um novo paradigma no ensino e na aprendizagem das frações. In: *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 8., Recife, 2004. Anais do VIII ENEM - Palestra. Recife: SBEM, 2004.

[6] BEZERRA, F. J. B. *Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações:* uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

[7] BEZERRA, O.; MACEDO, E. S. de; MENDES, I. A. *Matemática em atividades, jogos e desafios*. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

[8] BOALER, J. *Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador*. Porto Alegre: Penso, 2018.

[9] BOALER, J.; MUNSON, J.; WILLIAMS, C. *Mentalidades matemáticas na sala de aula*: ensino fundamental. Porto Alegre: Penso, 2018.

[10] BOALER, J.; MUNSON, J.; WILLIAMS, C. *Mentalidades matemáticas na sala de aula: ensino fundamental* – Volume 2. Porto Alegre: Penso, 2020.

[11] BOGDAN, R. C; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

[12] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 1ª ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

[13] BOYER, C. B. MERZBACH, U. C. *História da matemática*. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

[14] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

[15] BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Resolução CNE/CP n. 2/2020*, de 10 de dezembro de 2020. Disponível em: <https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=11/12/2020&jornal=515&pagina=55&totalArquivos=185>. Acesso em 25 de jun. 2021.

[16] BRASIL. *Lei. 9.394*, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em 25 de jun. 2021.

[17] BRASIL, Ministério de Educação e Cultura. *Explorando o Ensino da Matemática* - Atividades. Vol 2. Brasília: MEC 2004. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap1.pdf>. Acesso em 06 de maio 2002.

[18] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[19] BRASIL. *Parecer CNE/CP n° 9/2020*, de 8 de junho de 2020. Brasília, DF: Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação, 2020.

[20] BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília. SEF/MEC, 1998.

[21] BULGRAEN, C. V.; O papel do professor e sua mediação nos processos de elaboração do conhecimento, *Revista Conteúdo*, Capivari, v.I. n.4.ago./dez 2010 – ISSN I807-9539. Disponível em:

<http://www.moodle.cpscetec.com.br/capacitacaopos/mstech/pdf/d3/aula04/FOP_d03_a04_t07b.pdf>. Acesso em 10 de maio 2021.

[22] CAEd/UFJF. *CAEd realiza estudo pioneiro sobre impactos da pandemia na educação do estado de São Paulo*. Disponível em: <https://institucional.caeddigital.net/noticias-2/caed-realiza-estudo-pioneiro-sobre-impactos-da-pandemia-na-educacao-do-estado-de-sao-paulo.html>. Acesso em 26 de jun. 2021.

[23] CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. *O professor polivalente e a fração*: conceitos e estratégias de ensino. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo (SP), v. 8, n. 1, p. 125-136. 2006.

[24] CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. UFSC. v. 2. p. 68-93. 2007. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_campos_rodrigues.pdf>. Acesso em: 20 de nov. de 2020, 14:39.

[25] CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

[26] CARVALHO, E. de F. G. de et al. *As tecnologias educacionais digitais e as metodologias ativas para o ensino de matemática*. Brazilian Journal of Development. Curitiba, v.7, n.1, p.3153-3169 jan. 2021. Disponível em: <https://www.brazilianjournals.com/index.php/BRJD/article/view/22886 >. Acesso em 15 de jul. 2021.

[27] CECÍLIO, Camila. *Ensino Híbrido*: quais são os modelos possíveis? Revista Nova Escola. 2020. Disponível em: ¡https://novaescola.org.br/conteudo/19715/ensino-hibrido-quais-sao-os-modelos-possiveis¿ . Acesso em: 03 de maio de 2021.

[28] CELESTINO, K. G. *As frações em algumas civilizações antigas*. In: XIV EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, Cascavel: Unioeste de Cascavel, p. 1-16, 2017.

[29] CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. *Ensino híbrido*: uma inovação disruptiva? Uma introdução à teoria dos híbridos. [S. l: s. n], 2013. Disponível em: <http://porvir.org/wp-content/uploads/2014/08/PT_Is-K-12-blended-learning-disruptive-Final.pdf>. Acesso em: 28 de abr. 2021.

[30] *COMPARANDO FRAÇÕES COM LINHAS E CÍRCULOS*. Jhuliene Seger ; Duane Habecker. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/c4mfveca>. Acesso em: 18 de out. 2021.

[31] *COQUINHOS*. Disponível em: <https://www.coquinhos.com/>. Acesso em: 20 de set. 2021.

[32] CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. *Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática*. Revista Psicopedagogia, São Paulo , v. 27, n. 83, p. 298-309, 2010. Disponível em: ¡http://www.revistapsicopedagogia.com.br/detalhes/212/senso-numerico-e-dificuldades-de-aprendizagem-na-matematica¿ . Acesso em: 12 de jun. de 2021.

[33] DANTE, L. R. *Matemática* - Projeto Teláris - 6o ano do Ensino Fundamental. 3a ed. São Paulo: Ática, 2018.

[34] DANTE, L. R. *Matemática* - Projeto Teláris - 7o ano do Ensino Fundamental. 3a ed. São Paulo: Ática, 2018.

[35] DOMINÓ - *Fração Matemática no Power Point*. Studio Office. Youtube. 31 out. 2020. 27min58s. Disponível em: ¡https://www.youtube.com/watch?v=i8gi7E336J4¿. Acesso em: 11 de set. 2021.

[36] ESPÍRITO SANTO. Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo (SEDU). *Plano de retorno às aulas presenciais da Rede Pública Estadual de Ensino do Espírito Santo*. Vitória, 2020. Disponível em: ¡https://sedu.es.gov.br/Media/sedu/EscoLAR/plano

[37] ESTIMANDO FRAÇÕES. Marco A. Manetta. *Geogebra*. Disponível em: ¡https://www.geogebra.org/m/wertedgz¿. Acesso em: 18 de out. 2021.

[38] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[39] FERREIRA, L. A.; CRUZ, B. D. S.; ALVES, A. O.; LIMA, I. P. *Ensino de Matemática e COVID-19*: práticas docentes durante o ensino remoto, Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, vol. 2, no. 11, pp. 1-16, jun. 2020.

[40] FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática*. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990. Disponível em:

<http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso_47_e_51_-_matematica_-_emersom_rolkouski_-_texto_1.pdf>. Acesso em: 14 de jul. 2021.

[41] FRAÇÃO. Isaque Ribeiro dos Santos. *Geogebra.* Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/HR32cN8E>. Acesso em: 11 de set. 2021.

[42] IGNACIO, R.; ULBRIGHT, J. *Geogebra.* Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/wMTh2YUC>. Acesso em: 18 de out. 2021.

[43] *FRAÇÕES EQUIVALENTES.* Maria Aparecida Mendes da Silva Camacho Blanco; Marco A. Manetta. Geogebra. Disponível em: ¡https://www.geogebra.org/m/pEAGRC6Z¿. Acesso em: 18 de out. 2021.

[44] *FRAÇÕES EQUIVALENTES.* Marilia Dias de Araújo ; Diogo Pelaes. Geogebra. Disponível em: ¡https://www.geogebra.org/m/d84Me6Gz¿. Acesso em: 18 de out. 2021.

[45] GAMBERA, A. R.; VITAL, C. *Possibilidade para o ensino de frações*: relato de uma experiência com o GeoGebra. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM, 12., 2016, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM, Unicsul, 2016.

[46] GARCEZ, W. R. *Tópicos sobre O Ensino de Frações*: Equivalência. Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[47] GIRALDO, V; CAETANO, P; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT, 06).

[48] HENZ, C. C. *O uso das tecnologias no ensino-aprendizagem da matemática.* Monografia (Graduação em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões. Erechim, 2008. Disponível em: <https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/850.pdf>. Acesso em: 15 de jul. 2021.

[49] HUIZINGA, Johan. *Homo ludens*: o jogo como elemento da cultura. São Paulo, Perspectiva; Edusp, Trad. João Paulo Monteiro, 1971.

[50] *HYPATIAMAT.* Disponível em: <https://www.hypatiamat.com/apresentacao.php>. Acesso em: 11 de set. 2021.

[51] IFRAH, G. *Os números*: história de uma grande invenção. Trad. Stella M. Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

[52] IFRAH, Georges. *Os Números*: a história de uma grande invenção. Trad. Senso, Stella M. de Freitas. 90ª Ed. Editora Globo, 2010.

[53] INEP. *Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil*. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206>. Acesso em: 07 de maio de 2021.

[54] KHAN, Salman. *Um mundo, uma escola*: a educação reinventada. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013.

[55] KUKLINSKI, H. P.; COBO, C. *Expandir la universidad más allá de la enseñanza remota de emergência Ideas hacia un modelo híbrido post-pandemia*. Barcelona: Outliers School, 2020.

[56] LEIVAS, J. C. P.; BASSO, M. V. de A.; SILVA, R. S. da S.; SAMÁ, S. *Pandemia e Educação Matemática*: relatos e reflexões sobre práticas nas aulas de Matemática durante o Ensino Remoto. Porto Alegre: Mundo Acadêmico, 2021. E-book. Disponível em: ¡https://www.casaletras.com/academico-livros¿. Acesso em: 28 de jun. 2021.

[57] LOPES, A. J. O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

[58] LORENSATTI, Edi Jussara Candido. *Aritmética*: um pouco de história, 2012. Disponível em: ¡http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/1786/265¿ . Acesso em: 08 de maio de 2021.

[59] MASOLA, W. D. J.; ALLEVATO, N. S. G. *Dificuldades de aprendizagem matemática*: algumas reflexões. Educação Matemática em Debate, v.3, n. 7, jan.-abr. 2019. p. 52-67.

[60] MORÁN, J. *Mudando a Educação com Metodologias Ativas*. In: [Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. Vol. II] Carlos Alberto de Souza e Ofelia Elisa Torres Morales (orgs.). PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf> . Acesso em: 23 de jun. de 2021.

[61] MORAN, J. M. *Gestão inovadora da escola com tecnologias*. In: VIEIRA, Alexandre (Org.). Gestão educacional e tecnologia. São Paulo: Avercamp, 2003. p.

151-164. Disponível em: <http://files.portefolio-digital8.webnode.com/200000006-2c91d2e812/gestao%20inovadora%20da%20escola%20com%20tecnologias.pdf> . Acesso em: 15 de jul. de 2021.

[62] MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. *A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador*: das estruturas algébricas às cognitivas IN: Revista Bolema, Ano 21, nº31, p.103-127. UNESP: Rio Claro, 2008.

[63] MOCROSKY, L. F.; ORLOVSKI, N. ; TYCHANOWICZ, S. D. ; ANDRADE, S. P. ;PANOSSIAN, M. L. *Frações na Formação Continuada de Professoras dos Anos Iniciais*: fragmentos de uma complexidade. Boletim de Educação Matemática. BOLEMA, v. 33, p. 1444-1463, 2019.

[64] NIVEN, I. M. *Números*: racionais e irracionais. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[65] O HOMEM QUE CALCULAVA - *A partilha dos 35 camelos* - Malba Tahan. Me ajuda Du. Youtube. 18 abr. 2021. 3min04s. Disponível em: ¡https://www.youtube.com/watch?v=W2dFs9sQMpM¿. Acesso em: 21 de set. 2021.

[66] OLIVEIRA, M. A.; CARREIRO, E. de L. P. *O novo normal da educação, quando o virtual não é fictício*. Revista Lagos, volume 11, 2020. Disponível em: ¡https://www.lagos.vr.uff.br/index.php/lagos/article/view/353¿ . Acesso em: 16 de jun. de 2021.

[67] ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. *As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas.* Bolema, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008. Disponível em: ¡https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883006.pdf¿ . Acesso em: 14 de jul. de 2021.

[68] ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. *Pesquisa em Resolução de Problemas*: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas. Bolema, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.

[69] PAIVA, M. H. P. *Aprendizagem de Frações com softwares e aplicativos matemáticos online.* Dissertação (Mestrado) — PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS, Lajeado: UNIVATES, 2016.

[70] PAIVA, T. Y. *Aprendizagem Ativa e Colaborativa*: Uma Proposta de uso de Metodologias Ativas no Ensino da Matemática. (Dissertação). PROFMAT. UNB, 2016.

[71] PEDROSA, V. N. M. et al. *Sequência Fedathi e análise de erros contribuindo para o ensino de frações atrelado ao jogo Fraction Matcher*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM, 12., 2016, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM, Unicsul, 2016.

[72] PEREIRA, A. P. C. C. *O Ensino de Frações na Escola Básica*: O Currículo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT), Universidade Federal Fluminense, 2015.

[73] *PHET INTERACTIVE SIMULATIONS*. Disponível em: ¡https://phet.colorado.edu/pt_BR/¿. Acesso em: 20 de set. 2021.

[74] PIERINI, A. C. *Aplicativos educacionais no ensino da matemática*. 2018. 21 f. Artigo de Conclusão de Curso (Especialização) - UFSM, Restinga Sêca, 2018.

[75] PÓLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de janeiro: Interciência, 1995.

[76] PÓLYA, G. *Dez mandamentos para professores*. In Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº. 10, p. 2-10, 1º semestre, 1987. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/10/2.htm>. Acesso em: 03 de jul. 2021.

[77] PÓLYA, G. - *O Ensino por Meio de Problemas*. In Revista do Professor de Matemática, nº 7, 2º semestre, 1985, pp 11-16. São Paulo: S.B.M., 1985. Disponível em: ¡https://rpm.org.br/cdrpm/7/3.htm¿. Acesso em: 10 de jul. 2021.

[78] PONTE, J. P. *Concepções dos professores de matemática e processos de formação*. In Educação Matemática: Temas de Investigação (pp. 185-239). Lisboa: IIE, 1992. Disponível em: ¡http://hdl.handle.net/10451/2985¿. Acesso em: 07 de maio 2021.

[79] RANGEL, L. G. *Teoria de Sistemas* - Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo - Estabelecendo Relações em Um Estudo Colaborativo. Tese de Doutorado. COPPE - UFRJ, 2015. Disponível em: <http://www.cos.ufrj.br/uploadfile/1430757169.pdf>. Acesso em: 04 de dez. 2020.

[80] GIRALDO, V.; RANGEL, L. *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica*: Números Inteiros. Rio de Janeiro: SBM. 1º ed. 2016.

[81] RIPOLL, C.C., et al. *Frações no Ensino Fundamental* – Volume 1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS), 2016 / versão 2.0 de Fevereiro de 2017.

[82] RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA; J. F. P. *Números Racionais, Reais e Complexos*. 2ª Edição. Porto Alegre: UFRGS, 2011.

[83] SIEGLER, R. S. S. *Frações*: onde tudo dá errado. Scientific American. [S.I.] 2017. Disponível em: ¡https://www.scientificamerican.com/article/fractions-where-it-all-goes-wrong/¿. Acesso em: 10 de maio de 2021.

[84] SILVA, A. J. N. da, NERY, Érica S. S., NOGUEIRA, C. A. *FORMAÇÃO, TECNOLOGIA E INCLUSÃO*: o professor que ensina Matemática no "novo normal". Plurais Revista Multidisciplinar, 5(2), 97-118. 2020. Disponível em: <https://www.revistas.uneb.br/index.php/plurais/article/view/9375>. Acesso em: 16 de jun. de 2021.

[85] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. *Caderno Mathema, 6º ao 9º ano. Ensino Fundamental*. São Paulo: Penso, 2007.

[86] SMOLE, K. S. *Mathema*. Disponível em: <https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/papa-todas-de-fracoes/>. Acesso em: 20 de set. 2021.

[87] SOARES, L. H. *Aprendizagem significativa na educação matemática*: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Paraíba: UFPB, 2009.

[88] STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. *Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática*. The teaching and assessment of mathematical problem solving, Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.

[89] STRASSACAPPA, A. *A Resolução de Problemas no Ensino de Frações*. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2008. Curitiba: SEED/PR., 2011. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo _adriana_strassacappa.pdf>. Acesso em: 03 de maio de 2021.

[90] TAHAN, M [Julio Cesar de Mello e Souza]. *O homem que calculava*. 75ª ed.Rio de Janeiro: Record, 2009.

[91] TEIXEIRA, L. R. M. *Dificuldades e erros na Aprendizagem da Matemática*. In: VII EPEM ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. São Paulo: Anais, 2004.

[92] VENTURA, H. M.G. L. *A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre As Suas Representações*: Uma Experiência de Ensino no 2.o Ciclo do Ensino Básico. Tese de doutorado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2013.

[93] WALLE, J. A. V. *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª Edição. Porto Alegre: Artmed, 2009.

[94] ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.