

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



**PROFMAT**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FELIPE CALIARI FABRES

VITÓRIA- ESPÍRITO SANTO

DEZEMBRO DE 2021

# TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FELIPE CALIARI FABRES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Florêncio Guimarães Filho.

**Vitoria - Espírito Santo**

Dezembro de 2021

# Agradecimentos:

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por está vivo e pode concluir este trabalho.

Depois agradeço a minha mãe que me deu todo o suporte para ser alguém na vida.

Agradeço também a minha irmã Raysa por me ajuda na correção deste trabalho.

Ao meu orientador Florêncio, vai os meus humildes agradecimentos, por ele ser um bom professor.

Ao meu amigo Fidellis por ele ter me ajudado na introdução deste trabalho.

A todos os meus amigos de mestrado que sempre me apoiaram e torceram por mim.

# Resumo

Nesta dissertação de mestrado, serão apresentadas e aplicadas algumas técnicas voltadas para resolução de problemas de Geometria no contexto de competições olímpicas de Matemática, a saber: técnica do elemento mais nobre, técnica do problema resolvido, generalização, especialização e analogia. Tais técnicas, discutidas por G. Polya em seu livro “A Arte de resolver problemas”, podem auxiliar professores e estudantes do Ensino Básico na elaboração de roteiros de estudo voltados para a resolução de problemas de Geometria de considerados complexos. Esta dissertação caracteriza-se, portanto, como um conjunto de unidades didáticas, as quais podem ser utilizadas por professores das redes pública e privada atuantes em países lusófonos para treinamento de estudantes via estudo dirigido individual ou coletivo. Cada capítulo desta dissertação, à sua maneira, lança luz sobre uma ou mais dessas técnicas, ilustrando-as por meio da resolução detalhada de problemas extraídos de competições nacionais e internacionais.

**Palavras Chaves:** Elemento mais nobre. Problema Resolvido. Generalização. Especialização. Analogia.

# ABSTRACT

In this dissertation, we present and apply some techniques aimed at solving Geometry problems in the context of Olympic Mathematics competitions, namely: the technique of the noblest element, the technique of the solved problem, generalization, specialization, and analogy. Such techniques, exposed by G. Polya in his book “The Art of Solving Problems”, can help teachers and students of Basic Education in the elaboration of study guides aimed at solving difficult Geometry problems. Specifically, this dissertation is characterized as a set of didactic units, which can be used by public and private teachers of Portuguese-speaking countries to train students via individual or collective approaches to Olympic competitions. Each chapter of this dissertation sheds light on one or more of these techniques, illustrating them through the detailed resolution of problems extracted from national and international competitions

**Keywords:** Noblest Element. Solved Problem. Generalization. Specialization. Analogy.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Resolução de problemas de geometria</b>	<b>6</b>
1.1	A técnica do elemento mais nobre . . . . .	6
1.2	O elemento auxiliar . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Generalização, Especialização e Analogia</b>	<b>44</b>
2.1	Generalização . . . . .	44
2.2	Particularização . . . . .	44
2.3	Analogia . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Técnicas de construções geométricas</b>	<b>63</b>
3.1	A Técnica do problema resolvido . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>83</b>

# Introdução

A habilidade de resolver problemas é considerada uma das mais importantes na formação escolar dos alunos, uma vez que ela ajuda a desenvolver o raciocínio lógico dedutivo e capacidade de abstração, generalização, criatividade, persistência e resiliência, conforme diz PEREIRA (2018) [25]. A importância desta habilidade extrapola os limites da sala de aula no sentido de contribuir para a formação de cidadãos mais críticos e mais bem preparados para o mundo do trabalho, seja pela via tradicional ou empreendedora, conforme se encontra no portal do MEC (Ministério da Educação), em [26].

Dado que alunos e professores, em geral, apresentam dificuldades de raciocínio lógico e dedutivo no contexto da resolução de problemas olímpicos, conforme diz Silva(2017), no artigo (mencionado em [27]), é que foi concebida a proposta desta dissertação. Com ela, estudantes e professores do Ensino Básico poderão elaborar planos de estudos voltados para a resolução de problemas matemáticos olímpicos.

Atualmente, no Brasil, existem diversas competições olímpicas de Matemática. Dentre elas, destacamos Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Do ponto de vista histórico, a primeira olimpíada de Matemática, nos moldes atuais, ocorreu em 1894 na Hungria, como destacado pelo site da OBM <sup>1</sup>. Com o passar do tempo, competições similares foram sendo criadas e difundidas pelo leste europeu, culminando na primeira Olimpíada Internacional de Matemática (**IMO**) em 1959.

Ainda de acordo com a OBM, em seu site <sup>2</sup>, Segundo a OBM, a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática se deu no ano de 1979 e foi organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Com o passar dos anos, houve várias mudanças no seu formato, porém foi mantido os seus objetivos centrais, que são:

•

---

<sup>1</sup>Vide [22]

<sup>2</sup>Vide [22]

- Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino da matemática no Brasil, estimulando alunos e professores a um aprimoramento propiciado pela participação em olimpíadas;
- Descobrir jovens com talento matemático excepcional e coloca-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível.

Em sua primeira configuração, a OBM era disputada apenas por alunos do Ensino Médio, porém hoje a OBM é aplicada para quatro níveis distintos, a saber:

- Nível 1: composto por alunos do sexto e sétimo ano do ensino fundamental;
- Nível 2: formado por alunos do oitavo e nono ano do ensino fundamental;
- Nível 3: formado por alunos do ensino médio;
- Nível 4: composto por alunos universitários.

A OBMEP, por sua vez, é uma competição promovida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), a qual ocorre anualmente desde 2005. A princípio, tal competição foi voltada exclusivamente para alunos das escolas públicas, porém, desde o ano de 2017 foi aberta também para estudantes de escolas privadas. Essa olimpíada é aplicada para três níveis:

- Nível 1: composto por alunos do sexto e sétimo ano do ensino fundamental;
- Nível 2: formado por alunos do oitavo e nono ano do ensino fundamental;
- Nível 3: formado por alunos do ensino médio.

As áreas da matemática que mais são cobradas em olimpíadas são basicamente quatro, a saber: Aritmética, Álgebra, Geometria e Combinatória. Em todas essas áreas, principalmente na área de Combinatória, as olimpíadas apresentam uma série de problemas diversificados, que necessitam de um raciocínio lógico amplo, exigindo que o aluno pense de forma diferenciada. Isso estimula o aluno a almejar desenvolver mais o raciocínio lógico e querer aprender mais os conceitos matemáticos.



Como ainda existem poucos materiais disponíveis para o uso de professores e alunos em treinamento para olimpíadas, desenvolvemos este conjunto de unidades didáticas com temática “Geometria”, o qual apresenta algumas estratégias de resolução de problemas estabelecidas por POLYA (1995), em [1]. Essas estratégias envolvem resolução de problemas de construções geométricas, bem como demonstrações de lemas e teoremas que são fundamentais na Geometria.

A maioria das técnicas e estratégias que serão apresentadas no decorrer deste texto, devem ser utilizadas para resolver problemas geométricos. FOMIM (2017), em [23], p. 167, afirma que “a Geometria escolar é uma oportunidade maravilhosa para o desenvolvimento do pensamento lógico e consistente”. Pare ele, essa disciplina pode ser considerada um jogo com regras axiomáticas criadas na Grécia antiga. Além disso, pelo fato da Geometria ser uma parte inalienável da Matemática e ter fortes elos com outras áreas do conhecimento matemático, um bom professor encontrará nesta área do conhecimento ótimas oportunidades para demonstrar a integridade da Matemática. Sem contar o fato de que as figuras, planas e espaciais, dão aos alunos uma melhor compreensão dos objetos que estão presentes em várias situações “corriqueiras”.

Segundo LOBATO (2019), em [24], a Geometria é uma disciplina indispensável ao desenvolvimento humano. Muitos estudantes não conseguem perceber a importância desta disciplina na formação dos cidadãos e não conseguem enxergar que ela está se manifestando de diferentes formas na realidade em que eles vivem.

LOBATO (2019), em [24], lança luz sobre um obstáculo muito agravante no Ensino e na Aprendizagem da Geometria nas escolas: o fato de muitos professores se limitarem ao uso do livro didático. Na maioria dos livros, a Geometria se resume a um conjunto de definições, propriedades e fórmulas, esquecendo-se dos seus conceitos e aplicações de natureza histórica e lógica, isto é, axiomática, conforme diz LOPES (2013), mencionada em [28].

No processo de Ensino e Aprendizagem, é necessário exercitar alguns conteúdos e conceitos que já foram previamente trabalhados e assimilados pelos estudantes. Nesse sentido, a resolução de problemas é algo de suma importância. As técnicas de resolução de problemas

que serão apresentadas, podem se tornam um facilitador na compreensão de alguns conceitos geométricos por parte dos estudantes, uma vez que elas auxiliam a resolver os problemas de forma mais simples e prática.

POLYA(1995), em [1], defende que são necessários quatro passos para a resolução de um problema matemático. O primeiro passo é **compreender** bem o enunciado do problema. Para isso é necessário compreender quais são os dados fornecidos pelo enunciado e qual é a incógnita que se deseja calcular. O segundo passo é **elaborar um plano** para a resolução do problema. O terceiro passo é **executar este plano**, e por último é necessário **fazer uma retrospectiva**, isto é, verificar se a incógnita encontrada satisfaz as condições do enunciado.

POLYA afirma ainda que na Matemática existem basicamente dois tipos de problemas, a saber, os **de determinação** e os **de demonstração**. Para que o enunciado de um problema de determinação seja bem compreendido, quase sempre é necessário serem feitas algumas indagações, como, por exemplo: “Quais são os dados do problemas?”, “Qual é a incógnita?”, “Qual é a condicionante?”, “Essa condicionante é suficiente para determinar a incógnita?”. Estas e outras indagações ajudam a compreender o problema melhor e na maioria das vezes, as mesmas são feitas naturalmente. O autor enfatiza que nos problemas de demonstração é necessário saber os dados do problema, que são as hipóteses, e a conclusão na qual se deseja chegar, que é a tese.

“Ao procurar ajudar o aluno, com discrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e indagar os mesmos passos. assim em inúmeros problemas temos que indagar: **Qual é a incógnita?** Podemos variar as palavras e indagar a mesma coisa de muitas maneiras diferentes: **Do que é que se precisa?**, o que é que se quer? O que é que você deve procurar? A finalidade destas é focalizar a atenção do aluno na incógnita.”( POLYA,1995, em [1],p.2)

POLYA também destaca que antes de ser elaborado um plano ou uma estratégia para resolver o problema, é necessário que o enunciado seja claramente compreendido. Dessa forma, as inter-relações entre os dados e a incógnita poderão serão percebidas claramente. Isto auxiliará a elaboração de um plano de resolução. Para estabelecer este plano ou estratégia, as vezes é necessário se lembrar de algum problema parecido, que possua a mesma incógnita, e até mesmo de alguns fatos e resultados matemáticos que foram anteriormente demonstrados. Esses resultados constituem, muitas vezes, uma ferramenta para para solução do problema. Depois de o problema ser resolvido, é interessante que seja feito um retrospecto e discussão de cada etapa da resolução, pois a partir daí pode-se gerar novas soluções ainda melhores.

POLYA afirma que assim como uma boa casa não poderá ser construída sem ótimos alicerces, uma boa estratégia de resolução também não poderá ser concebida sem uma ótima bagagem de conceitos e fatos matemáticos. Isto implica que uma revisão de conceitos e resultados demonstrados se faz necessária.

Por fim, o autor conclui que a presença de ótimas ferramentas na construção não significa que a casa ficará boa, assim como o fato de se ter um ótimo conhecimento de fatos matemáticos prévios, não significa possuir uma ótima estratégia para solucionar um problema. É necessário conhecer quais fatos ou resultados irão ajudar na resolução, e como usá-los.

“Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa idéia se pouco conhecermos do assunto, que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa idéia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma idéia boa sem lembrar de alguns fatos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis a resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados.” (POLYA, 1995, em [1], p 6)

O nível de dificuldade dos problemas olímpicos às vezes acaba desmotivando muitos alunos, por serem problemas que exigem conhecimento matemático e raciocínio lógico apurados. Nesse sentido, esta dissertação apresenta algumas técnicas que podem auxiliar a elaborar estratégias de resolução para estes problemas. Serão apresentadas basicamente seis técnicas, a saber: a técnica do elemento mais nobre, a técnica do problema resolvido, generalização, especialização, analogia e o elemento auxiliar.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No primeiro capítulo, que trata da técnica do elemento mais nobre e do elemento auxiliar, serão apresentados e resolvidos vinte e quatro problemas. No segundo capítulo, serão abordadas as técnicas de generalização, especialização e analogia, onde serão discutidos o total de oito problemas. O último capítulo tratará a técnica do problema resolvido, com foco em problemas de construções geométricas utilizando régua e compasso. Serão apresentados onze exemplos de aplicação desta técnica. A dissertação finaliza com algumas considerações e possibilidades de trabalhos futuros.

# 1 Resolução de problemas de geometria

## 1.1 A técnica do elemento mais nobre

A idéia dessa técnica é eleger um elemento do problema, que a princípio possui uma propriedade mais nobre, do que o elemento proposto no enunciado. E depois deve ser mostrado que o elemento que foi eleito é exatamente o elemento do enunciado. Isto é, a técnica se resume em substituir a proposição do elemento do enunciado, por uma mais nobre. E a partir disto, deve ser resolvido o problema com a proposição mais nobre e, após isso, deve-se mostrar que este problema coincide com o problema proposto no enunciado.

Necessita-se o nomear de propriedade mais nobre, aquela propriedade na qual se estar mais familiarizado. O elemento que possui essa propriedade deve ser chamado de elemento mais nobre.

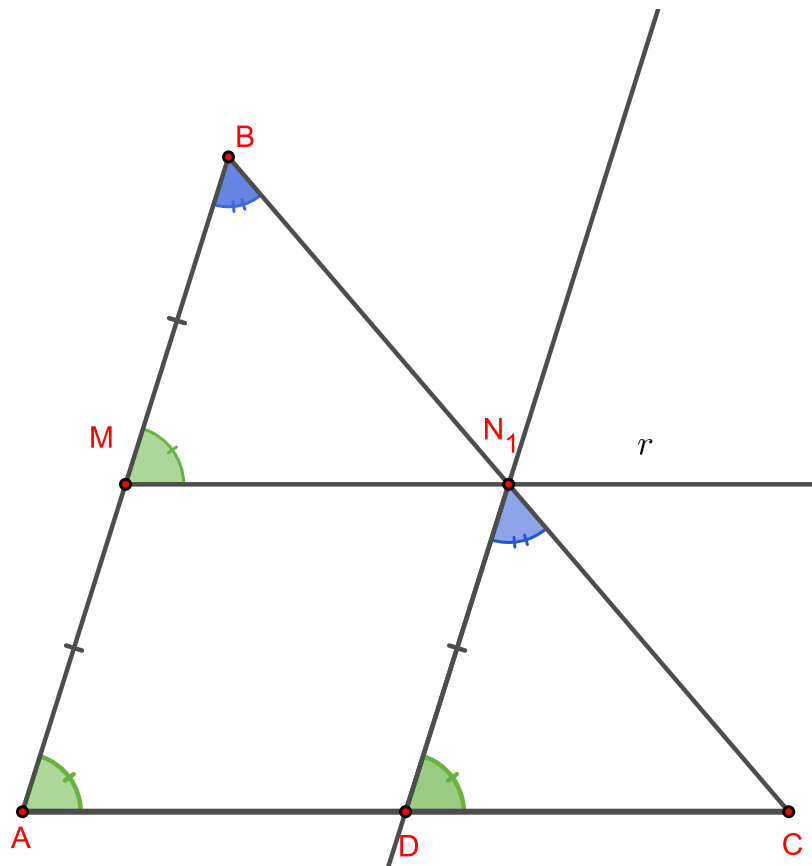
Para compreender melhor esta técnica, considere os exemplos abaixo.

**Definição:** O segmento  $DE$  é a base média de um triângulo  $ABC$  se as suas extremidades, que são os pontos  $D$  e  $E$ , são pontos médios de dois dos lados do triângulo  $ABC$ .

**Exemplo 1: O Teorema da base média.** Em um triângulo  $ABC$  e seja  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$  respectivamente. Então a base média  $MN$  é paralela ao lado  $BC$  e além disso  $MN = \frac{1}{2}BC$ .

**Demonstração:** Observe que neste exemplo foi dada a reta  $MN$ , em que  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$ , porém não se conhece muitas propriedades de retas que ligam dois pontos médios, mas é bem conhecido as propriedades de retas paralelas. Portanto ao invés de ser considerada a reta  $MN$ , que liga dois pontos médios, deve-se ter em conta uma reta  $r$  paralela à  $BC$  passando pelo ponto  $M$ , e será mostrado que essa reta  $r$  passa pelo médio  $N$ , demonstrando assim que a reta  $r$  é coincidente com a reta  $MN$ . Nesse caso a reta  $r$  é o elemento mais nobre do que a reta  $MN$ , uma vez que são bem conhecidas as propriedades de paralelismo entre retas.

Sendo assim considere a figura:



Nessa figura, seja  $N_1$  o ponto de intercessão entre  $AC$  e a reta  $r$ . Agora será traçada uma reta  $s$  paralela a  $AB$  passando por  $N_1$ , que irá intersectar o lado  $BC$  em  $D$ , obtendo assim o paralelogramo  $BMN_1D$ . Logo  $N_1D = MB = MA$  e como  $N_1D$  é paralela a  $AB$  então  $\widehat{DN_1C} = \widehat{BAC}$  e  $\widehat{CDN_1} = \widehat{CBA}$ . Mas como  $MN_1$  é paralela a  $BC$  por construção então  $\widehat{CDN_1} = \widehat{CBA} = \widehat{N_1MA}$ . Assim os triângulos  $AMN_1$  e  $N_1DC$  são congruentes pelo caso (ALA), e portanto  $AN_1 = N_1C$  e  $BD = MN_1 = DC$ . Consequentemente,  $N_1$  é o ponto médio de  $AC$  e  $N_1 = N$ . Logo a reta  $MN$  é coincidente com  $r$ , que por sua vez é paralela à reta  $BC$ .

Além disso:

$$BC = BD + DC = MN_1 + MN_1 = 2MN_1$$

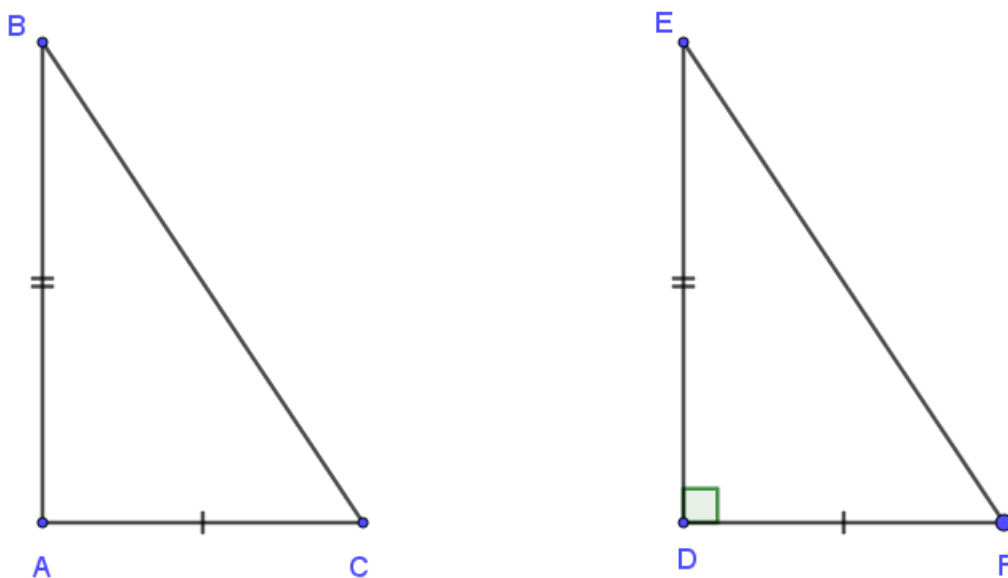
$$MN = MN_1 = \frac{1}{2}BC$$

Com isso a demonstração foi concluída

Observe que neste exemplo o uso da paralela ao lado  $BC$  se faz mais eficiente do que a base média, pois graças ao paralelismo existente entre as retas  $BC$  e  $r$ , podemos usar a igualdade entre os segmentos  $MB$  e  $MD$ .

**Exemplo 2: A recíproca do Teorema de Pitágoras:** Dado um triângulo  $ABC$ , onde  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  então mostre que  $\hat{B}\hat{A}\hat{C} = 90^\circ$ .

**Solução:** Neste exemplo é dado um triângulo  $ABC$  em que  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Mas esta propriedade não boa de se trabalhar, uma vez que não são bem conhecidas as suas consequências. Por outro lado, ao considerar um triângulo retângulo  $DEF$  de forma que os catetos  $DE$  e  $DF$  tenham as mesmas medidas que os lados  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, e com ângulo reto em  $D$ , é válida uma propriedade bem conhecida que é o famoso teorema de Pitágoras, que por sua vez é um teorema com o qual todos estão muito bem familiarizados. Logo neste exemplo o triângulo retângulo  $DEF$  é mais nobre do que o triângulo  $ABC$ . Por fim necessita-se mostrar que o triângulo retângulo  $DEF$  é congruente ao triângulo  $ABC$ . Para mostra essa congruência deve-se ter em mente que  $\hat{E}\hat{D}\hat{F} = 90^\circ$ ,  $DE = AB$  e  $DF = AC$ , como mostra a figura abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras pode-se concluir que:

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow$$

$$EF = BC$$

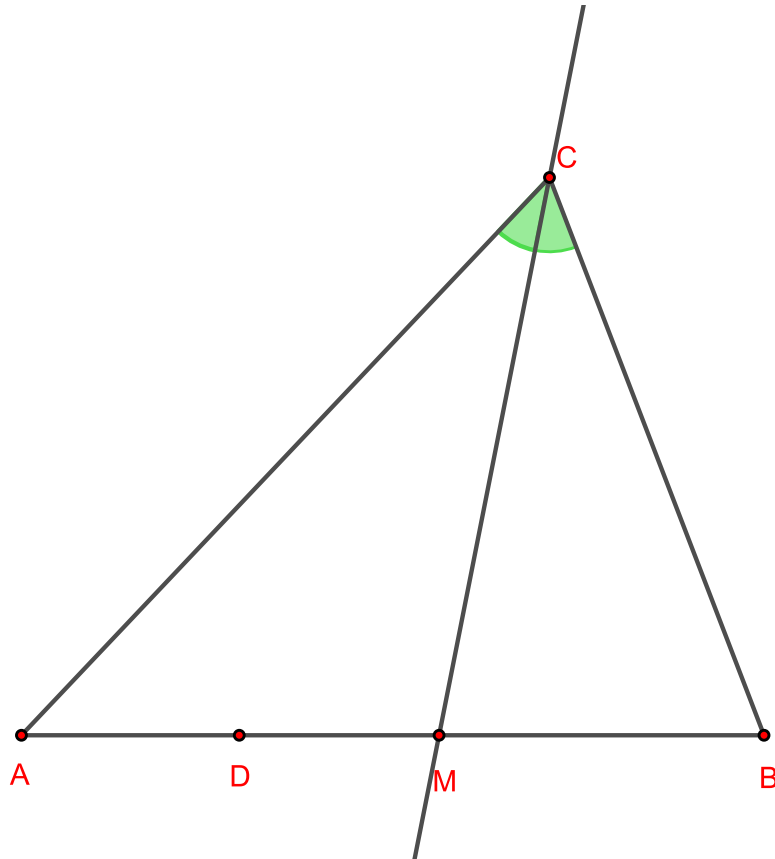
Logo pelo caso de congruência (*LLL*), pode ser entendido que os triângulos  $DEF$  e  $ABC$  são congruentes, visto que  $DE = AB$ ,  $DF = AC$  e  $EF = BC$ . Portanto  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ . Assim a demonstração está finalizada

Observe novamente que o ângulo reto em no vértice  $D$  é mais nobre que a condição dada no enunciado, uma vez que  $E\hat{D}F$  sendo reto pode-se usar o teorema de Pitágoras.

No próximo exemplo será usado um resultado que está demonstrado na página 34, referente à bissetriz interna de um triângulo.

**Exemplo 3: A Recíproca do Teorema da bissetriz interna:** Em um triângulo  $ABC$  seja  $T$  um ponto sobre o lado  $AB$  tal que  $\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BC}$ . Então mostre que  $CT$  é a bissetriz do ângulo  $A\hat{C}B$ .

**Demonstração:** Neste exemplo foi dado um ponto  $T$  sobre o lado  $AB$  com a propriedade de que  $\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BC}$ . É um pouco difícil de se trabalhar com esta propriedade, uma vez que nossos alunos não estão bem familiarizados com proporções. Ao invés disso, pode-se considerar um ponto  $M$  sobre o lado  $AB$  de forma que  $CM$  seja bissetriz  $A\hat{C}B$ . Observe que ao ter em mente a bissetriz  $CM$ , é válido um resultado muito conhecido no qual os alunos já estão mais familiarizados. Este resultado é chamado de teorema da bissetriz interna. Logo o ponto  $M$  é mais nobre que o  $T$ , uma vez que  $CM$  é uma bissetriz do triângulo  $ABC$  e sabemos que o teorema da bissetriz interna é válido. Agora necessita-se mostrar que o ponto  $M$  e o ponto  $T$  são coincidentes, e isso faz com que  $CT$  seja uma bissetriz do ângulo  $A\hat{C}B$ . Para isso observe a figura abaixo:



Como  $CM$  é a bissetriz do ângulo  $\hat{C}$ , então pelo teorema da bissetriz interna pode-se concluir que:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AT}{TB}$$

Aplicando a propriedade das proporções deve-se entender que:

$$\frac{AM + MB}{MB} = \frac{AT + TB}{TB}$$

Mas como:

$$AM + MB = AT + TB = AB$$

Logo:

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{TB} \Leftrightarrow MB = TB$$

Como os pontos  $M$  e  $T$  pertencem ao lado  $AB$  e ambos estão a mesma distância do ponto  $B$  segue então que  $B$  e  $M$  são pontos coincidentes. Assim a demonstração está finalizada.

O próximo exemplo foi proposto por COXETER, 1967, mencionado em [3]



**Exemplo 4:** Considere um quadrado  $ABCD$  e  $E$  um ponto dentro do quadrado tal que:  $AE = BE$  e  $\hat{E}AB = 15^\circ$ . Demonstre que o triângulo  $CEB$  é equilátero

**Solução:** Segundo o POLYA(1995), em [1],p 4, antes de se elaborar qualquer plano de resolução, necessita-se identificar os dados do problema e a tese.

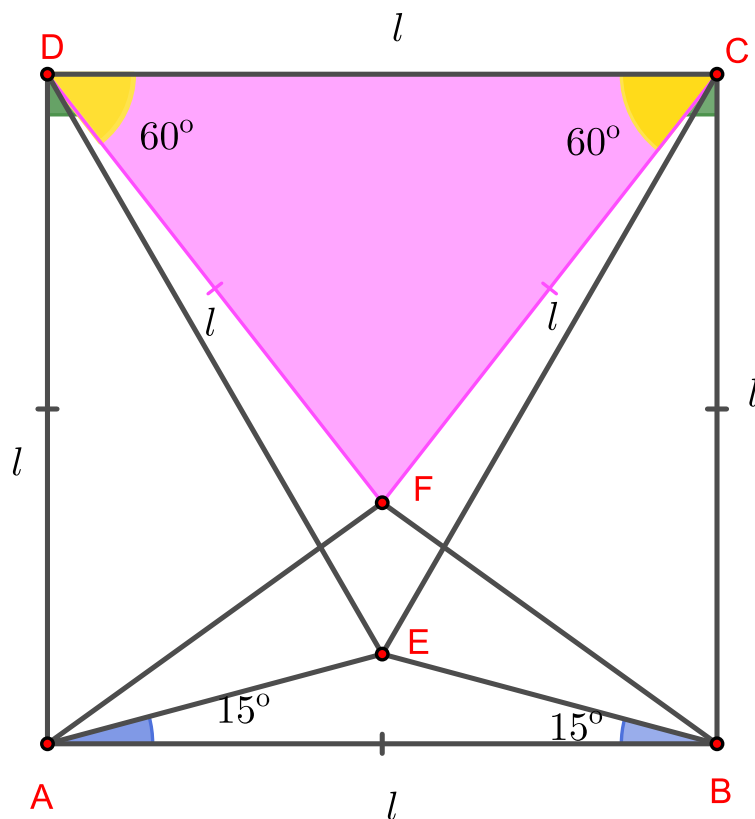
**Hipóteses:**

- $ABCD$  é um quadrado;
- $E$  é um ponto no seu interior do quadrado tal que  $AE = BE$  e  $\hat{E}AB = 15^\circ$

**Tese:**

- . Mostrar que o triângulo  $EDC$  é equilátero.

O próximo passo para resolver este problema é desenhar uma boa figura com o intuito de compreender melhor o problema. Para isso considere a figura abaixo:



Agora para ser elaborado um plano de resolução, será tomado um ponto  $F$  na figura, de modo que o triângulo  $DCF$  seja equilátero. Deve ser feito isso uma vez que o triângulo equilátero  $DCF$  possui mais propriedades elementares do que o triângulo isósceles  $ABE$ , isto se deve ao fato dos seus três lados serem iguais. O triângulo  $DCF$  torna, a princípio, o ponto  $F$  mais nobre do que o ponto  $E$ . Todavia, no final, será mostrado que os pontos  $E$  e  $F$  são coincidentes.

Observe que se  $DCF$  é equilátero então  $F\hat{D}C = F\hat{C}D = 60^\circ$ , logo:

$$A\hat{D}F = A\hat{D}C - F\hat{D}C = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Agora como  $AD = DC = DF$  então o triângulo  $ADF$  é isósceles e portanto:

$$D\hat{A}F = A\hat{F}D = \frac{(180^\circ - 30^\circ)}{2} = 75^\circ$$

Neste caso pode ser concluído:

$$F\hat{A}B = 90^\circ - D\hat{A}F = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

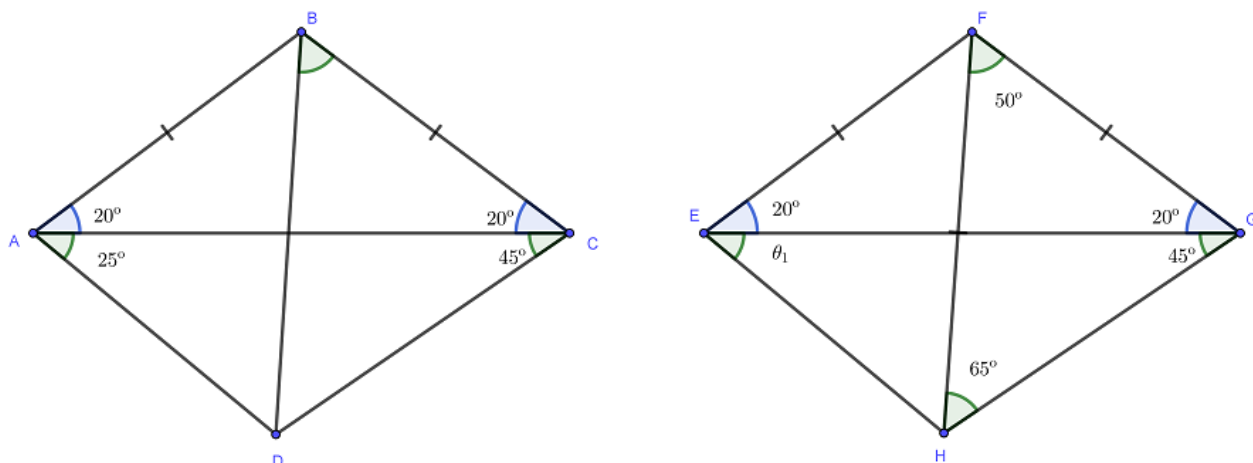
Logo  $F\hat{A}B = E\hat{A}B = 15^\circ$ .

Agora por um raciocínio análogo a este, deve-se concluir também que  $F\hat{B}A = 15^\circ = E\hat{B}A$ . Por fim, pelo caso de congruência ( $ALA$ ) será entendido que os triângulos  $ABE$  e  $ABF$  são congruentes, visto que o lado  $AB$  é comum aos dois triângulos e além disso  $F\hat{A}B = E\hat{A}B$  e  $F\hat{B}A = E\hat{B}A$ . Assim o ponto  $F$  coincide com o ponto  $E$ , visto que ambos estão no mesmo semiplano definido pela reta  $AB$ . E neste caso o triângulo  $DEC$  é equilátero e a demonstração está finalizada.

Novamente observe que neste exemplo o uso do triângulo equilátero  $DCF$  foi muito mais eficiente do que o uso do triângulo isósceles  $ABE$ . Então o triângulo equilátero  $DEC$  foi mais nobre que o triângulo isósceles  $AEB$ .

**Exemplo 5: OBM 2008 Nível 3: em [11]** Considere um quadrilátero  $ABCD$ , onde  $AB = BC$ ,  $B\hat{A}C = 20^\circ$ ,  $C\hat{A}D = 25^\circ$  e  $A\hat{C}D = 45^\circ$ . Mostre que  $D\hat{B}C = 50^\circ$ .

**Demonstração:** Neste exemplo será usada a seguinte notação:  $B\hat{A}C = \alpha$ ,  $C\hat{A}D = \theta$  e  $A\hat{C}D = \gamma$  como mostra a figura:



Nesta questão será construído um quadrilátero  $EFGH$  de forma que o triângulo  $ABC$  e  $EFG$  seja congruentes com  $EF = FG = BC = AB$ ,  $EG = AC$  e  $\hat{F}EG = \hat{B}AC$ . O ponto  $H$  deve ser definido de forma  $\hat{H}FG = 50^\circ$  e  $\hat{H}GF = \hat{B}CD = 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$

A partir de agora será mostrado que esses dois quadriláteros devem ser congruentes. Observe que ao somar os ângulos internos do triângulo  $FHG$  deduz-se que:

$$\hat{F}HG = 180^\circ - 50^\circ - 65^\circ = 65^\circ = \hat{H}GF$$

Logo o triângulo  $FHG$  é isósceles com  $FH = FG = EF$  e assim entende-se que o triângulo  $EFH$  também é isósceles. Portanto  $\hat{F}HE = \hat{F}EH = 20 + \theta_1$  onde  $\theta_1 = \hat{G}EH$ .

Agora vale a pena observar que neste exemplo o quadrilátero  $EFGH$  é mais nobre do que o quadrilátero  $ABCD$ , uma vez que a diagonal  $FH$  divide o quadrilátero  $EFGH$  em dois triângulos isósceles, a saber os triângulos  $EFH$  e  $FGH$ . Esses triângulos por sua vez possuem propriedades mais nobres que os triângulos  $ABD$  e  $BCD$ , pelo fato destes dois últimos triângulos não possuírem, a princípio, dois lados com a mesma medida.

Por outro lado ao somar os ângulos internos do triângulo  $EFG$  pode-se chegar a conclusão de que  $\hat{E}FG = 140^\circ$ . Logo:

$$\hat{E}FH = \hat{E}FG - \hat{H}FG = 140^\circ - 50^\circ = 90^\circ$$

Assim o triângulo  $EFH$  é um triângulo retângulo isósceles e portanto:

$$\hat{F}EH = \hat{F}HE = 20^\circ + \theta_1 = 45^\circ$$

$$\widehat{G\hat{E}H} = \theta_1 = 25^\circ = \widehat{C\hat{A}D}$$

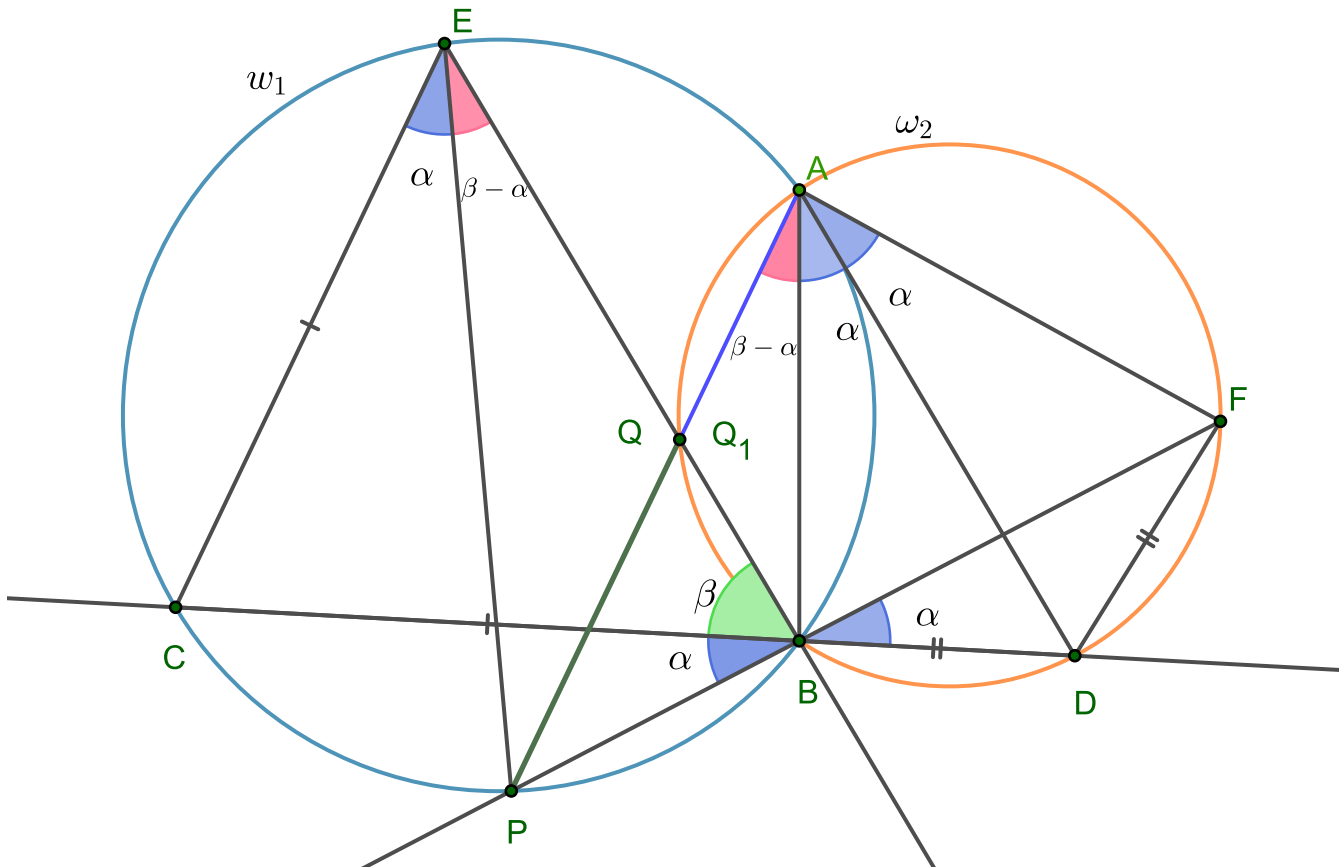
Logo os triângulos  $ADC$  e  $EHG$  são congruentes pelo caso de congruência ( $ALA$ ), visto que  $AC = EG$ ,  $\widehat{C\hat{A}D} = \widehat{G\hat{E}H}$  e  $\widehat{A\hat{C}D} = \widehat{H\hat{G}E} = 45^\circ$ . Todavia, é garantido também que  $ABC$  e  $EFG$  são congruentes por construção. Logo os quadriláteros  $ABCD$  e  $EFGH$  são congruentes e portanto:

$$\widehat{C\hat{B}D} = \widehat{G\hat{F}H} = 50^\circ$$

Assim a demonstração está acabada.

**Exemplo 6: Olimpíadas Iraniana de Geometria - 2017, em [13]:** Duas circunferências  $w_1$  e  $w_2$  se intersectam nos pontos  $A$  e  $B$ . Uma reta qualquer passando por  $B$  corta  $w_1$  e  $w_2$  em  $C$  e  $D$ , respectivamente. Os pontos  $E$  e  $F$  são escolhidos sobre  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente, de modo que  $CE = CB$  e  $BD = DF$ . Suponha que  $BF$  intersecta  $w_1$  em  $P$  e que  $BE$  intersecta  $w_2$  em  $Q$ . Prove que  $A, P$  e  $Q$  são colineares.

**Solução:** Considere a figura abaixo:



Nesta questão pode-se trocar o ponto  $Q$  pelo ponto  $Q_2$ , que será a intercessão da reta  $EB$  com a reta  $AP$ . Isto, por que a intercessão de duas retas possui propriedades bem conhecidas e mais simples de serem utilizadas, já as propriedades da intercessão de uma reta com círculo são um pouco mais complexas para este exemplo. Isto faz com que o ponto  $Q_2$  seja mais nobre do que o ponto  $Q$ . No final será mostrado que o ponto  $Q_2$  coincide com o ponto  $Q$ .

A princípio observe que  $Q_2 \neq B$ , pois se  $B$  e  $Q_2$  fosse coincidentes então a reta  $BP$  seria coincidente com a reta  $AP$ , e isto garantiria que o ponto  $A$  iria coincidir com o ponto  $F$ . Mas o ponto  $F$  é diferente do ponto  $B$  e do ponto  $P$ . Por outro lado como  $F = A$ , então  $F \in \omega_1$ . Assim os três pontos colineares,  $F$ ,  $B$  e  $P$ , estariam sobre o mesmo círculo o que seria um absurdo. Portanto  $Q_2 \neq B$ .

Como o triângulo  $ECB$  é isósceles com  $BC = CE$ , então  $\widehat{CEB} = \widehat{CBE} = \beta$ . Todavia os pontos  $A, B, P, C$  e  $E$  são pontos sobre o círculo  $\omega_1$ . Consequentemente  $\widehat{PBC} = \widehat{PEC} = \alpha$  e:

$$\widehat{PAB} = \widehat{PEB} = \widehat{CEB} - \widehat{PEC} = \beta - \alpha$$

Observe ainda que  $\widehat{PBC} = \widehat{FBD} = \alpha$ , pois esses ângulos são opostos pelo vértice  $B$ . E como o triângulo  $BDF$  é isósceles com  $BD = DF$ , então  $\widehat{BFD} = \widehat{FBD} = \alpha$ . Mas o quadrilátero  $ABDF$  está inscrito no círculo  $\omega_2$ , e com isso:

$$\widehat{DAF} = \widehat{FBD} = \widehat{BFD} = \widehat{BAD} = \alpha$$

Assim:

$$\widehat{PAF} = \widehat{PAB} + \widehat{BAD} + \widehat{DAF} = \alpha + \beta = \widehat{PBC} + \widehat{CBE} = \widehat{PBE} = \widehat{PBQ_2}$$

Aqui deve ser observado que a última igualdade só foi possível uma vez que  $Q_2$  está sobre o segmento  $BE$ .

Agora observe que os triângulos  $PBQ_2$  e  $PAF$  são semelhantes pelo caso  $(AA)$ , visto que  $\widehat{PAF} = \widehat{PBQ_2}$  e  $\widehat{APF} = \widehat{BQ_2P}$ .

Novamente esta última igualdade só pôde ser verificada, uma vez que o ponto  $B$  está no segmento  $PF$  e  $Q_2$  está no segmento  $AP$ . Observe o quão fundamental foi o fato de  $Q_2$  ser a intercessão de  $AP$  com  $BE$ .

Então pode ser concluído que  $\widehat{PFA} = \widehat{PQ_2B}$ . Com isso:

$$\widehat{BFA} + \widehat{BQ_2A} = \widehat{PFA} + \widehat{BQ_2A} = \widehat{PQ_2B} + \widehat{BQ_2A} = 180^\circ$$

Isto implica que o quadrilátero  $AFBQ_2$  é inscritível, logo  $Q_2 \in w_2$ . Mas como  $Q_2 \in BE$ , então  $Q_2$  pertence a interseção de  $BE$  com  $w_2$ . Logo ou  $Q_2 = B$  ou  $Q_2 = Q$ . Mas como estamos partindo do princípio de que  $Q_2 \neq B$  então  $Q_2 = Q$ . E assim  $Q \in AP$ , logo os pontos  $A, Q$  e  $P$  estão alinhados.

**Exemplo 7:** Considere um triângulo equilátero  $ABC$  e seja os pontos  $K$  e  $M$  sobre  $BC$  de modo que  $K$  e  $M$  dividem o segmento  $BC$  em três segmentos iguais. Construimos então, exteriormente ao triângulo, um semicírculo de diâmetro  $BC$ . Mostre que as retas  $AK$  e  $AM$  dividem este semicírculo em três arcos iguais.

**Solução:** Primeiro devem ser destacadas quais são as hipóteses do problema, que é aquilo que nos foi dado e a tese, que é aquilo que queremos demonstrar:

#### Hipóteses:

- $A, B$  e  $C$  são os vértices de um triângulo equilátero;
- $K$  e  $M$  são pontos pertencente ao segmento  $BC$ , tais que:

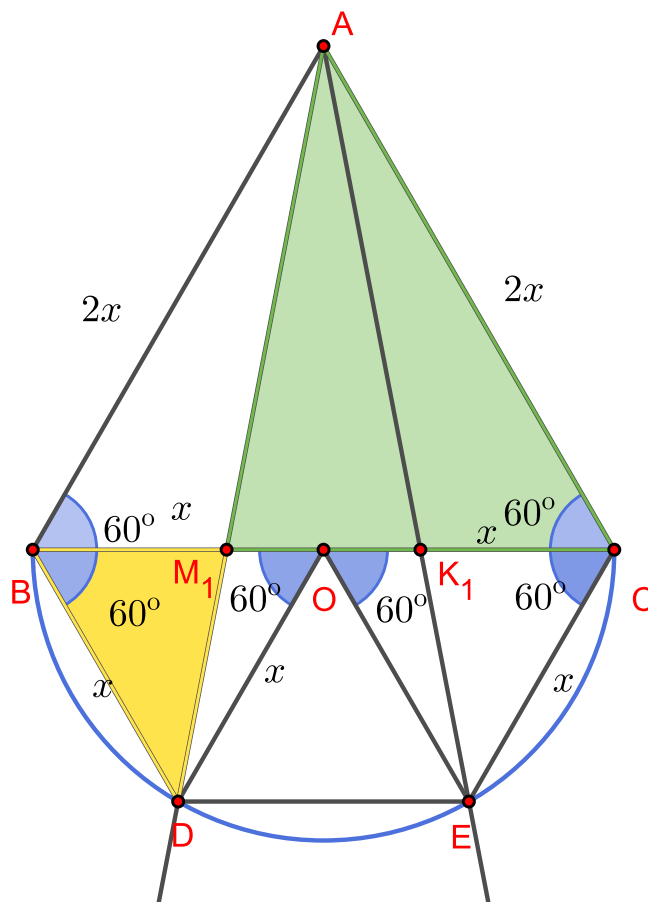
$$BK = KM = MC = x;$$

- $BC$  é o diâmetro de um semicírculo  $\Gamma$

#### Tese:

- As retas  $AK$  e  $AM$  vão cortar o semicírculo nos pontos  $D$  e  $E$  tais que os arcos  $BD, DE$  e  $EC$  possui a mesma medida

Agora pode ser desenhada a seguinte figura:



Na resolução deste problema deve-se tomar dois pontos  $M_1$  e  $K_1$  sobre o lado  $BC$  de forma que  $AM_1$  e  $AK_1$  dividem o semicírculo  $BC$  em três arcos iguais.

Seja  $D$  e  $E$  os pontos onde as retas  $AM_1$  e  $AK_1$  e  $O$  é ponto médio de  $BC$ , que também é o centro do semicírculo. Como os arcos  $BD$ ,  $DE$  e  $CE$  são iguais, então os triângulos  $BOD$ ,  $DOE$  e  $COE$  são equiláteros sendo  $BD = BO = OC = x$ . Esses triângulos equiláteros fazem com que os pontos  $M_1$  e  $K_1$  sejam mais nobres do que os pontos  $M$  e  $K$ . Assim pode-se entender que:

$$AB = AC = BC = BO + OC = 2x.$$

Por outro lado os triângulos  $BM_1D$  e  $AM_1C$  são semelhantes pelo caso  $(AA)$ , visto que  $M_1\hat{B}D = M_1\hat{C}A = 60^\circ$  e  $BM_1\hat{D} = CM_1\hat{A}$  (opostos pelo vértice) e portanto:

$$\frac{CM_1}{BM_1} = \frac{AC}{BD} = \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow$$

$$CM_1 = 2BM_1$$

$$BC = BM_1 + CM_1 = 3BM_1$$

$$BM_1 = \frac{1}{3}BC = BM$$

Por um raciocínio interamente análogo deve-se constatar que  $CK_1 = \frac{1}{3}BC = CK$ . Como  $M, M_1, K$  e  $K_1$  são pontos do segmento  $BC$  com  $BM_1 = BM$  e  $CK_1 = CK$  então os pontos  $M = M_1$  e  $K = K_1$ . Portanto  $AM$  coincide com  $AM_1$ , que por sua vez divide o semicirculo em três arcos iguais. E  $AK$  coincide com  $AK_1$  que também divide o semicirculo em três arcos iguais.

Observe que neste problema o fato de que as retas  $AM_1$  e  $AK_1$  dividerem o semicirculo em três arcos iguais é mais nobre do que o fato de que os pontos  $M$  e  $K$  dividirem o lado  $BC$  em três parte iguais.

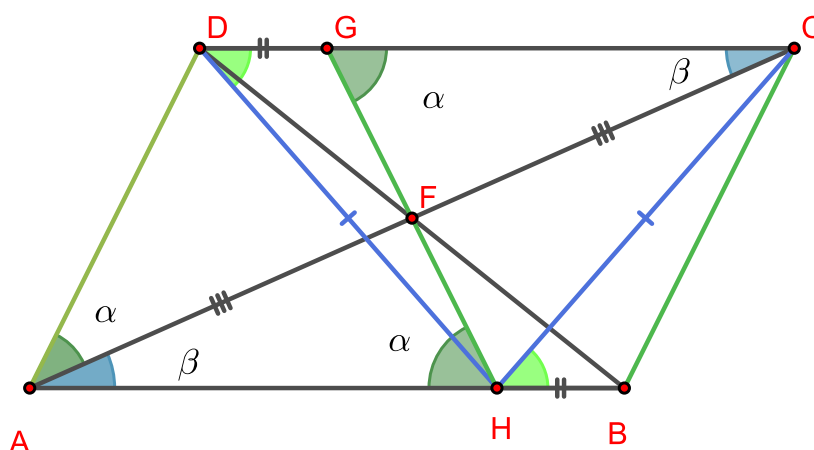
**Exemplo 8: Tournament of the towns, em [17]:** Em um paralelogramo  $ABCD$ ,  $F$  é o ponto de intercessão das diagonais. Sendo  $E$  um ponto sobre a semirreta  $AB$  com origem em  $A$ , tal que  $D\hat{A}B = F\hat{E}A = \alpha$ , então mostre que  $DE = CE$ .

**Solução:** Neste problema deve-se deixar de considerar o ponto  $E$  inicialmente, e será considerado apenas um ponto  $H$  sobre  $AB$  tal que  $H$  é equidistante de  $C$  e  $D$ . Isto por que o ponto  $H$  seria mais nobre que o ponto  $E$ . No final será demonstrado que estes pontos devem ser iguais. Para isso basta mostrar que  $AH = AE$ .

Observe que existem dois casos, onde no primeiro caso o ponto  $H$  está dentro do segmento  $AB$  e no segundo caso  $H$  está no prolongamento do segmento  $AB$ , no sentido de  $A$  para  $B$ .

**Caso 1:** Observe a seguinte figura abaixo.





Observe que na figura,  $G$  é o ponto de intercessão entre  $HF$  e  $DC$ . Sendo assim  $\widehat{GFC} = \widehat{AFH}$  ( são ângulos opostos pelo vértice),  $\widehat{GCF} = \widehat{FAH}$  ( são ângulos alternos internos) e  $AF = FC$ , pois  $F$  é o ponto médio das diagonais. Assim pelo caso de congruência ( $ALA$ ), observa-se que os triângulos  $GFC$  e  $HFA$  são congruentes e conseqüentemente,  $AH = GC$ . Além disso, como  $AB = CD$  conclui-se que:

$$DG = CD - GC = AB - AH = HB$$

Como  $DH = HC$  (por hipótese do elemento mais nobre) entende-se que  $\widehat{CDH} = \widehat{DCH} = \theta$  e  $\widehat{DCH} = \widehat{HCB} = \theta$ , pois são ângulos alternos internos. Por transitividade da igualdade conclui-se que:

$$\widehat{GDH} = \widehat{CDH} = \widehat{HCB} = \theta$$

Todavia,  $DH = HC$ ,  $DG = HB$  e  $\widehat{GDH} = \widehat{HCB} = \theta$ . Com isso consegue-se observar, pelo caso de congruência ( $LAL$ ), que os triângulos  $DHG$  e  $HCB$  são congruentes. Assim será válido o seguinte resultado:

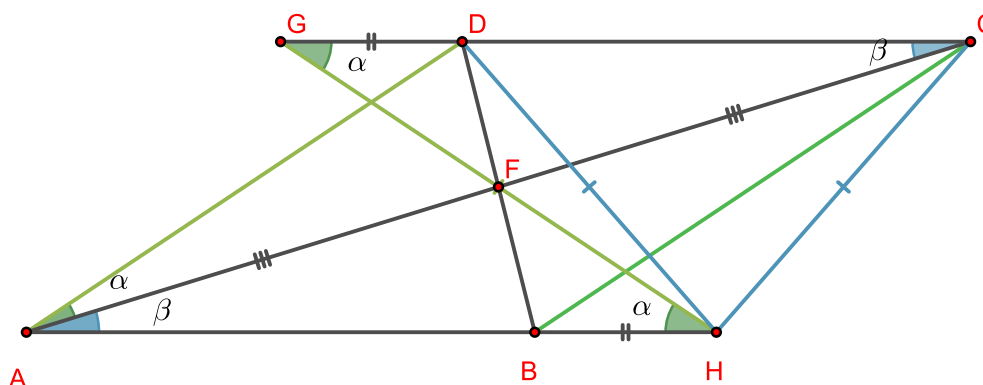
$$\widehat{DGH} = \widehat{HBC} = 180^\circ - \widehat{DAB}$$

Contudo  $DG \parallel AH$  e portanto:

$$\widehat{GHA} = \widehat{GHC} = 180^\circ - \widehat{DGH} = 180^\circ - (180^\circ - \widehat{DAB}) = \widehat{DAB}$$

Logo  $\widehat{FHA} = \widehat{GHA} = \widehat{DAB}$ , isto implica que  $H = E$ .

**Caso 2:** Observe a figura abaixo:



Como  $AH \parallel CG$ , então  $\widehat{FAH} = \widehat{FCG}$  e  $\widehat{FHA} = \widehat{FGC}$ , pois são ângulos alternos internos e além disso  $AF = FC$ , pois  $F$  é a intercessão das diagonais do paralelogramo, isto é,  $F$  é o ponto médio de  $AC$ . Assim pelo caso de congruência ( $LAA_o$ ), os triângulos  $AFH$  e  $CFD$  são congruentes e de disto depreende-se que  $AH = CG$ . Contudo como  $AB = CD$ , então:

$$GD = CG - CD = AH - AB = BH$$

Além disso, sendo  $P$  um ponto sobre o prolongamento do segmento  $AH$ , deve-se concluir que  $\widehat{HCD} = \widehat{CHP}$  (pois são ângulos alternos internos). Contudo, o triângulo  $DHC$  é isósceles, com  $DH = CH$ , então:

$$\widehat{HDC} = \widehat{HCD} = \widehat{CHP}$$

Sendo assim, infere-se que:

$$\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{CHP} = 180^\circ - \widehat{HDC} = \widehat{HDG}$$

Logo pelo caso de congruência ( $LAL$ ) os triângulos  $DHG$  e  $HCB$  são congruentes, visto que  $DH = HC$ ,  $GD = BH$  e  $\widehat{BHC} = \widehat{HDG}$ . Assim  $\widehat{DGH} = \widehat{HBC}$ . Contudo como  $ABCD$  é um paralelogramo então  $\widehat{DGH} = \widehat{GHA}$  e  $\widehat{PBC} = \widehat{DAB}$ , pois são ângulos alternos internos. Logo:

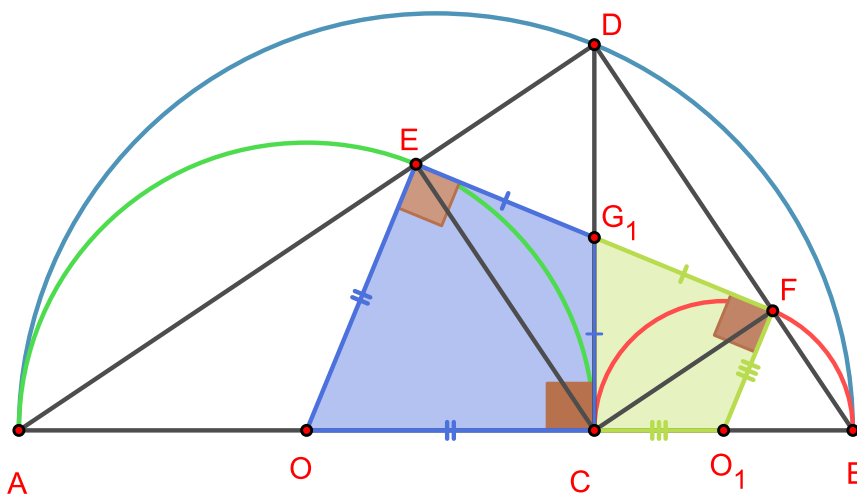
$$\widehat{FHA} = \widehat{GHA} = \widehat{DGH} = \widehat{HBC} = \widehat{PBC} = \widehat{DAB}$$

Conseqüentemente,  $H$  e  $E$  são pontos coincidentes e a demonstração está finalizada.

**Exemplo 9:** Em um segmento  $AB$  é marcado o ponto  $C$  e traçam-se os semicírculos de diâmetros  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , todos contidos em um mesmo semiplano determinado por  $AB$ . Seja  $D$  o ponto do semicírculo  $AB$  tal que  $CD$  é perpendicular a  $AB$  em  $C$ . Sejam  $E$  e  $F$  os pontos sobre os semicírculos  $AC$  e  $BC$ , respectivamente, tais que  $EF$  é uma tangente comum a estes dois semicírculos. Mostre que  $ECFD$  é um retângulo.

**Solução:** Neste exemplo serão considerados os pontos  $E_1$  como sendo a interseção entre  $AD$  e o semicírculo  $AC$  e  $F_1$  como sendo interseção entre  $BD$  e o semicírculo  $BC$ . Será mostrado que  $E_1 = E$  e  $F_1 = F$ . Aqui os pontos  $E_1$  e  $F_1$  são mais nobres do que os pontos  $E$  e  $F$ , respectivamente, uma vez que o fato dos pontos  $A$ ,  $E_1$  e  $D$  serem colineares faz com que os ângulos  $\widehat{AE_1C}$  e  $\widehat{CE_1D}$  sejam suplementares. O mesmo vale para os pontos colineares  $B$ ,  $F_1$  e  $D$  que também garante que os ângulos  $\widehat{CF_1B}$  e  $\widehat{DF_1C}$  sejam suplementares.

Considere também os pontos  $O$  e  $O_1$  como sendo o centro do semicírculo  $AC$  e o centro do semicírculo  $BC$ , respectivamente, como mostra a figura abaixo:



Observe que  $E_1$  e  $F_1$  estão em semiplanos opostos em relação à reta  $CD$ . Portanto existe uma interseção entre os segmentos  $E_1F_1$  e  $CD$ . Tome  $G_1$  como sendo essa interseção.

É conhecido que os pontos  $D$ ,  $E_1$  e  $F_1$  pertencem aos semicírculos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  respectivamente. Portanto:

$$\widehat{AE_1C} = \widehat{CF_1B} = \widehat{ADB} = 90^\circ$$

Logo os ângulos do quadrilátero  $E_1DF_1C$  satisfazem:

$$\widehat{CE_1D} = \widehat{E_1DF_1} = \widehat{DF_1C} = 90^\circ$$

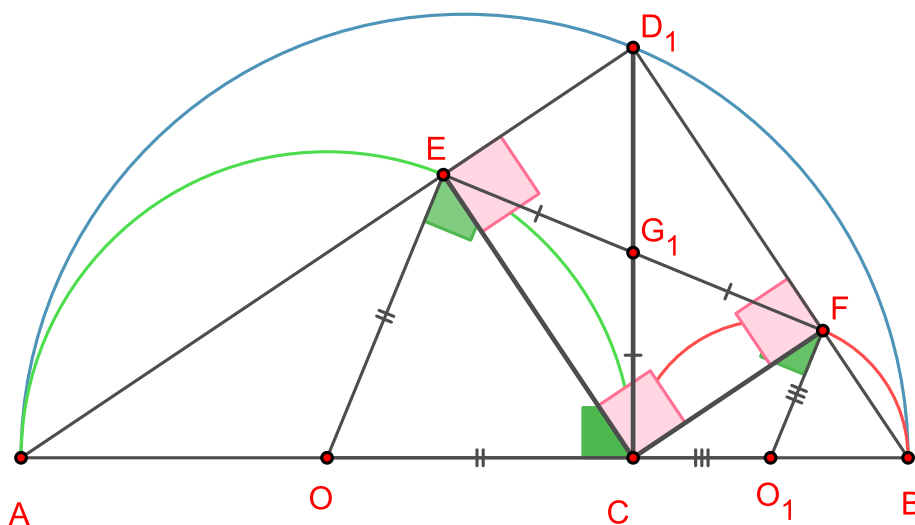
O quadrilátero  $E_1DF_1C$  possui três ângulos retos e, portanto, ele é um retângulo. Como consequência disso  $G_1$  é o ponto médio do segmento  $E_1F_1$  e também do segmento  $CD$ . Além disso, o triângulo  $E_1CF_1$  é retângulo em  $C$ , portanto  $E_1G_1 = CG_1 = G_1F_1$ . Por outro lado percebe-se que  $OE_1 = OC$ , pois os dois segmentos são raios do semicírculo  $AC$ . Também constata-se que o segmento  $OG_1$  é comum aos triângulos  $OCG_1$  e  $OE_1G_1$ , então esses dois triângulos são congruentes pelo caso  $(LLL)$ . Assim chega-se a conclusão que  $O\hat{E}_1G_1 = O\hat{C}G_1 = 90^\circ$ .

De maneira análoga se pode concluir que os triângulos  $O_1CG_1$  e  $O_1F_1G_1$  são congruentes pelo caso  $(LLL)$ , visto que  $CG_1 = G_1F_1$ ,  $O_1C = O_1F_1$  e  $O_1G_1$  é um segmento comum aos dois triângulos. Portanto  $O_1\hat{F}_1G_1 = O_1\hat{C}G_1 = 90^\circ$ .

Consequentemente, a reta  $E_1F_1$  é uma tangente comum aos semicírculos  $AC$  e  $BC$ , pois  $O\hat{E}_1G_1$  e  $O_1\hat{E}_1G_1$  são retos. Como consequência da construção feita na página 52, o segmento tangente exterior comum a dois semicírculos é único, então segmento  $EF$  deve coincidir com o segmento  $E_1F_1$ . Portanto devemos ter  $E_1 = E$  e  $F_1 = F$ . Assim, o quadrilátero  $E_1CF_1D$  é coincidente com o quadrilátero  $ECFD$ . Portanto  $ECFD$  é um retângulo.

**Solução 2:** Observe que neste exemplo foram dadas as poligonais  $AED$  e  $BFD$ , onde o segmento  $EF$  é a tangente comum aos semicírculos  $\widehat{AC}$  e  $\widehat{BC}$ . Ao invés destas poligonais, serão consideradas, inicialmente, as retas  $AE$  e  $BF$ , que se encontram no ponto  $D_1$ . Essas duas retas, por sua vez são mais nobres do que as poligonais  $AED$  e  $BFD$ , uma vez que os ângulos  $A\hat{E}C$  e  $C\hat{E}D_1$  são ângulos suplementares, assim como os ângulos  $C\hat{F}B$  e  $C\hat{F}D_1$ . O próximo passo é mostrar que as retas  $AE$  e  $BF$  coincidem com as poligonais  $AED$  e  $BFD$ , para isto deverá ser mostrado que  $D_1 = D$ .

Para isso considere  $G$  como sendo o ponto do segmento  $EF$ , tal que  $GC$  é perpendicular à  $AB$  no ponto  $C$ , como mostra a figura abaixo:



Como  $GC$  é perpendicular aos diâmetros  $AC$  e  $BC$ , segue que  $GC$  é um segmento tangente aos semicírculos  $AC$  e  $BC$ .

Além disso,  $EF$  é uma tangente comum aos dois semicírculos, logo  $GE = GC = GF$ . Portanto o círculo de diâmetro  $EF$  passa em  $C$ . Assim, o ângulo  $E\hat{C}F$  é  $90^\circ$ .

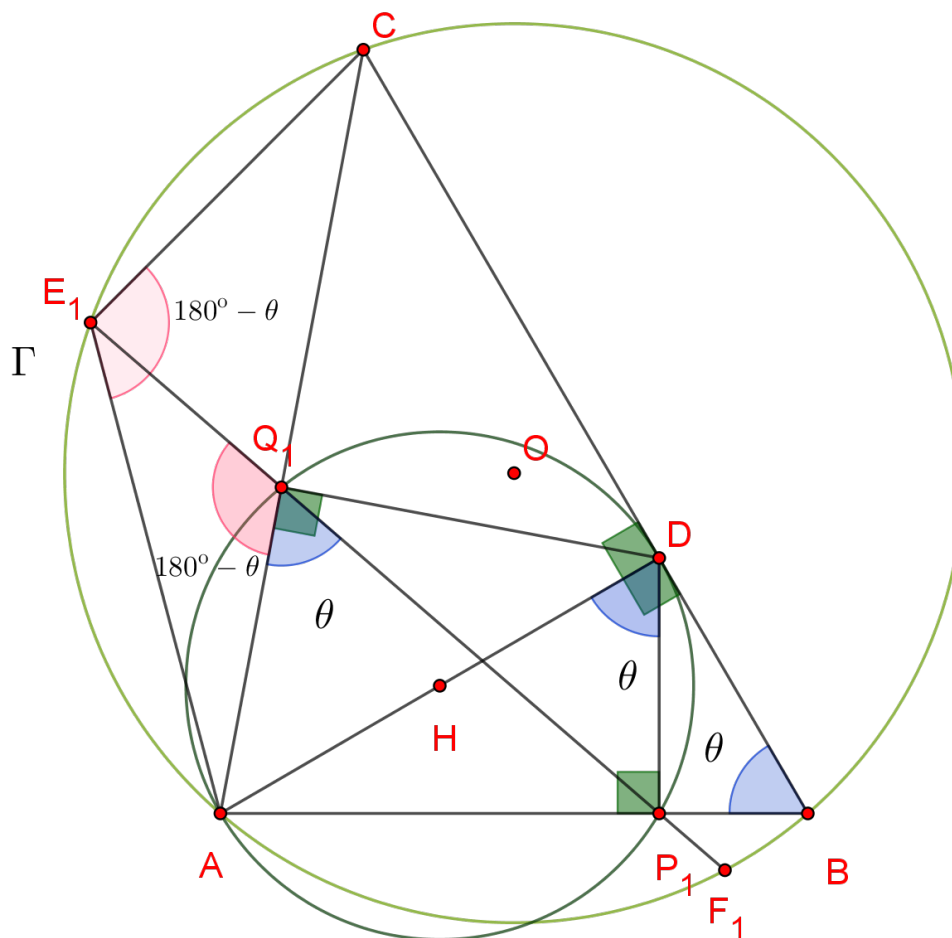
Os ângulos  $A\hat{E}C$  e  $C\hat{F}B$  estão inscritos nos semicírculos de diâmetros respectivamente iguais a  $AC$  e  $CB$ , portanto estes ângulos são retos. Conseqüentemente, os suplementares dos ângulos  $A\hat{E}C$  e  $C\hat{F}B$ , que são os ângulos  $C\hat{E}D_1$  e  $C\hat{F}D_1$ , respectivamente, também são ângulos retos. Como consequência disto, o quadrilátero  $ECFD_1$  tem 3 ângulos retos, logo ele é um retângulo. Assim o ângulo  $A\hat{D}_1B = 90^\circ$  está inscrito no semicírculo  $\widehat{AB}$ . Disso concluímos que o ponto  $D_1$  pertence ao semicírculo  $\widehat{AB}$ .

Além disso, pode-se perceber que a diagonal  $CD_1$  do retângulo  $CED_1F$ , deve passar no ponto médio  $G$  da outra diagonal  $EF$ .

Logo  $D_1$  pertence à reta  $CG$ . Desta forma,  $D_1$  pertence a interseção da reta  $CG$  com o semicírculo  $\widehat{AB}$ . Todavia, a interseção de  $CG$  e o semicírculo  $\widehat{AB}$  é  $D$ . Logo  $D_1 = D$ .

**Exemplo 10: OBM 2019- Fase Única-Nível 2-Questão 3, em [15])** Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo inscrito em um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$ . Seja  $D$  o pé da altura relativa ao vértice  $A$ . Sejam  $E$  e  $F$  pontos sobre  $\Gamma$  tais que  $AE = AD = AF$ , sendo que  $E$  pertence ao arco  $AC$  que não contém o ponto  $B$  e  $F$  pertence ao arco  $AB$  que não contém o ponto  $C$ . Seja  $P$  e  $Q$  os pontos de interseção entre a reta  $EF$  com a reta  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Mostre que o circuncírculo do triângulo  $APQ$  tem diâmetro  $AD$

**Solução:** Neste exemplo será considerado que o círculo de diâmetro  $AD$  toca as semirretas  $AB$  e  $AC$ , ambas com origens em  $A$ , nos pontos  $P_1$  e  $Q_1$ , como mostra a figura:



A técnica neste exemplo consiste em mostrar que  $P_1 = P$  e  $Q_1 = Q$ , pois assim o circuncírculo de  $APQ$  será o mesmo que o circuncírculo de  $AP_1Q_1$  que terá diâmetro  $AD$ . Neste caso, os pontos  $P_1$  e  $Q_1$  são mais nobre do que os pontos  $P$  e  $Q$ , uma vez que os ângulos  $\angle AP_1D = \angle AQ_1D = 90^\circ$ , pois estes ângulos estão inscritos no círculo de diâmetro  $AD$ . O fato destes ângulos serem retos, geram triângulos retângulos com propriedades bem conhecidas.

Considere  $E_1$  e  $F_1$  como sendo os pontos de interseção da reta  $P_1Q_1$  com o círculo  $\Gamma$ . De modo que  $E_1$  pertence ao arco menor  $\widehat{AC}$  e  $F_1$  pertence ao arco menor  $\widehat{AB}$ .

Como foi dito antes,  $\angle AQ_1D = \angle AP_1D = 90^\circ$ , pois ambos os ângulos estão opostos ao diâmetro  $AD$  do circuncírculo de  $AP_1F_1$ . Agora pelas relações métricas no triângulo retângulo  $ADC$  entende-se que:

$$AD^2 = AQ_1 \cdot AC$$

Por outro lado, os triângulos  $ADP_1$  e  $ABD$  são semelhantes, uma vez que  $\widehat{AP_1D} = \widehat{ADB} = 90^\circ$  e o ângulo  $\widehat{DAB}$  é comum aos dois triângulos. Portanto  $\widehat{ADP_1} = \widehat{ABD} = \theta$ .

Como o quadrilátero  $AP_1DQ_1$  é inscritível então  $\widehat{AQ_1P_1} = \widehat{ADP_1} = \theta$ . Assim:

$$\widehat{AQ_1E_1} = 180^\circ - \widehat{AQ_1P_1} = 180^\circ - \theta$$

Por outro lado o quadrilátero  $ABCE_1$  também é inscritível. Consequentemente:

$$\widehat{AE_1C} = 180^\circ - \widehat{ABD} = 180^\circ - \theta = \widehat{AQ_1E_1}$$

Além disso, é sabido que  $E_1\widehat{AC} = Q_1\widehat{AE_1}$ . Com isto, os triângulos  $ACE_1$  e  $AE_1Q_1$  são semelhantes pelo caso (AA). Assim  $\widehat{AE_1Q_1} = \widehat{AE_1C}$ , e vale a proporção:

$$\frac{AE_1}{AC} = \frac{AQ_1}{AE_1}$$

$$AE_1^2 = AQ_1 \cdot AC = AD^2$$

$$AE_1 = AD$$

Assim  $E_1$  pertence ao círculo de centro em  $A$  e raio  $AD$ . Logo  $E_1$  pertence a interseção deste círculo com o arco menor  $\widehat{AC}$ . Contudo,  $E$  é um ponto do arco  $\widehat{AC}$  tal que  $AE = AD$ , então  $E$  também pertence a interseção do arco  $\widehat{AC}$  com o círculo de centro em  $A$ . E como essa interseção é única teremos que  $E_1 = E$ .

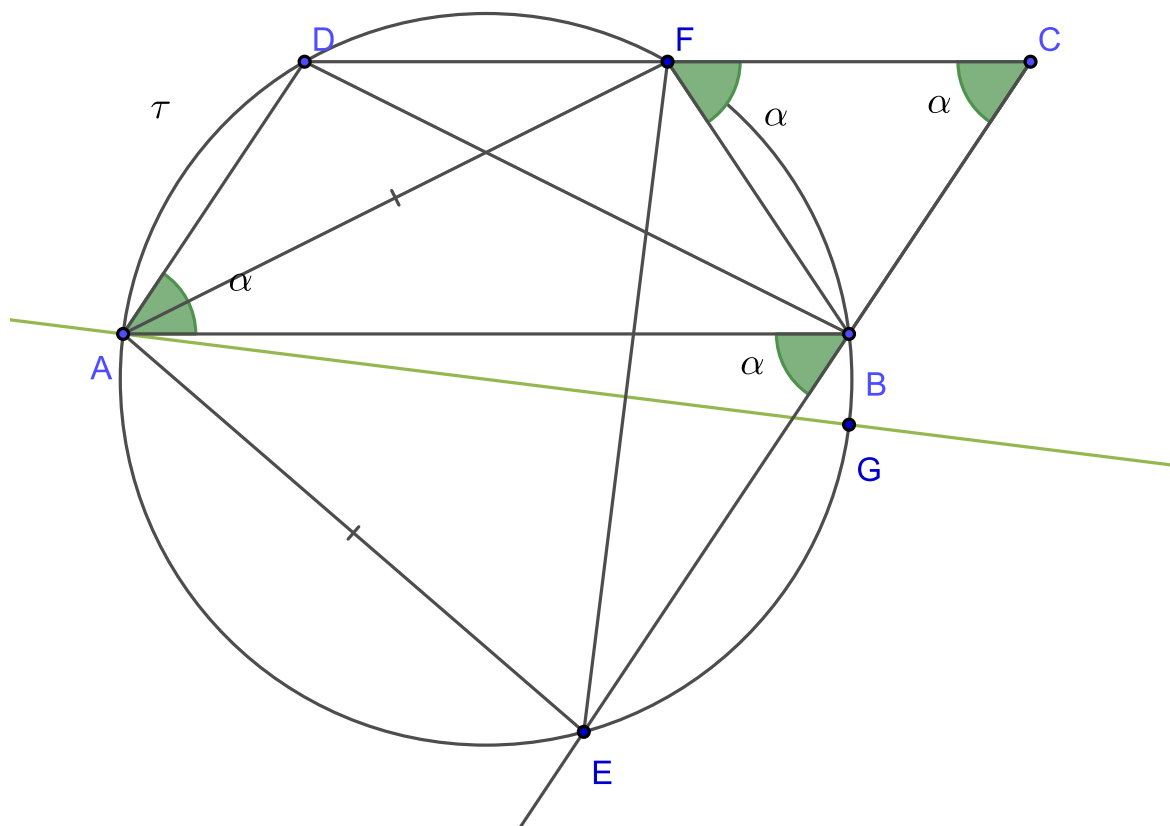
De modo inteiramente análogo também se pode concluir que  $F_1 = F$ . Portanto as retas  $EF$  e  $E_1F_1$  são coincidentes e assim teremos que  $P_1 = P$  e  $Q_1 = Q$ . Como se quer demonstrar.

**Exemplo 11: OBM 2010- Adptada, em [16]** Seja  $ABCD$  um paralelogramo e  $\tau$  a circunferência circunscrita ao triângulo  $ABD$ . Se  $E$  e  $F$  são as interseções de  $\tau$  com as retas  $BC$  e  $CD$  respectivamente, então faça o que se pede.

a) Mostre que  $A$  pertence à reta mediatriz do segmento  $EF$ .

b) Prove que o circuncentro do triângulo  $CEF$  está sobre  $\tau$ .

**Solução: a)** A princípio será colocado alguns elementos que são importantes nesta figura, como por exemplo o ângulo  $D\hat{A}B$  que será denotado por  $\alpha$ , como mostra a figura abaixo:



Repare que para mostrar que o ponto  $A$  pertence à mediatriz de  $EF$ , basta mostrar que  $A$  é equidistante de  $E$  e de  $F$ , isto é,  $AE = AF$ .

Para isto observe que o quadrilátero  $AEBF$  é inscrito, então  $A\hat{F}E = A\hat{B}E$ . Todavia,  $ABCD$  é um paralelogramo, logo:

$$A\hat{B}E = D\hat{C}B = D\hat{A}B = \alpha$$

Portanto:

$$A\hat{F}E = A\hat{B}E = \alpha$$

Repare também que o quadrilátero  $ABFD$  é também inscrito e assim  $D\hat{F}B = 180^\circ - \alpha$ . Consequentemente:

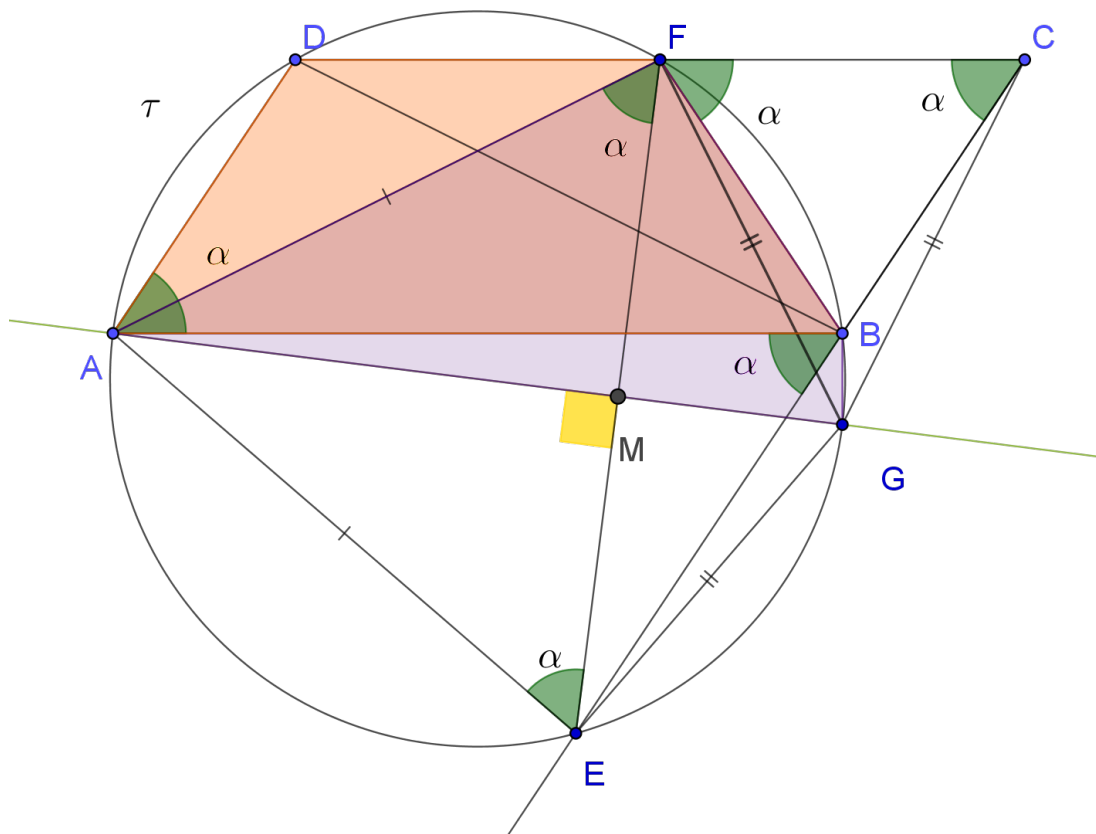
$$B\hat{F}C = 180^\circ - D\hat{F}B = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$$

Mas como  $FC$  é paralela à  $AB$ , então  $B\hat{F}C = F\hat{B}A = \alpha$ , pois são ângulos alternos internos. Finalmente, como o quadrilátero  $AEBF$  é inscrito então  $F\hat{B}A = F\hat{E}A = \alpha$  e assim  $A\hat{F}E = \alpha = F\hat{E}A$ . Logo o triângulo  $AFE$  é isósceles com  $AF = AE$ . Portanto  $A$  pertence a mediatriz de  $FE$ .



b) Neste exemplo ao invés de ser considerado o circuncentro do triângulo  $EFC$ , será tomado um ponto específico do círculo  $\tau$  e será mostrado que ele deve ser o circuncentro do triângulo  $EFC$ . Repare que para um ponto ser o circuncentro do triângulo  $EFC$  é necessário que este ponto pertença às três mediatrizes de  $EFC$ , assim o ponto do círculo que é o melhor candidato a ser o circuncentro é o segundo ponto de intercessão da mediatriz do segmento  $EF$  com o círculo  $\tau$ , que será denotado por  $G$ . Agora será provado que este ponto  $G$  é o circuncentro e para isso será mostrado que  $FG = CG = GE$ . Neste caso o ponto  $G$  será mais nobre do que o circuncentro do triângulo  $EFC$ , uma vez que o quadrilátero  $AFBG$  é cíclico, e possui propriedades que preservam alguns ângulos que são de suma importância para a resolução do problema.

Traçando os segmentos  $CG$  e  $FG$  pode ser esboçada a seguinte figura:



Sendo  $M$  o ponto de intercessão da mediatriz  $AG$  com a reta  $EF$  temos que  $\widehat{AMF} = 90^\circ$ . Assim:

$$\widehat{FAG} = 180^\circ - \widehat{AMF} - \widehat{AFE} = 90^\circ - \alpha$$

Mas como o quadrilátero  $AFBG$  é inscritível, pode-se constatar que:

$$F\hat{B}G = 180^\circ - F\hat{A}G = 90^\circ + \alpha$$

Além disso como  $B\hat{F}C = D\hat{C}B = \alpha$ , então  $F\hat{B}C = 180^\circ - 2\alpha$ . Assim observa-se que:

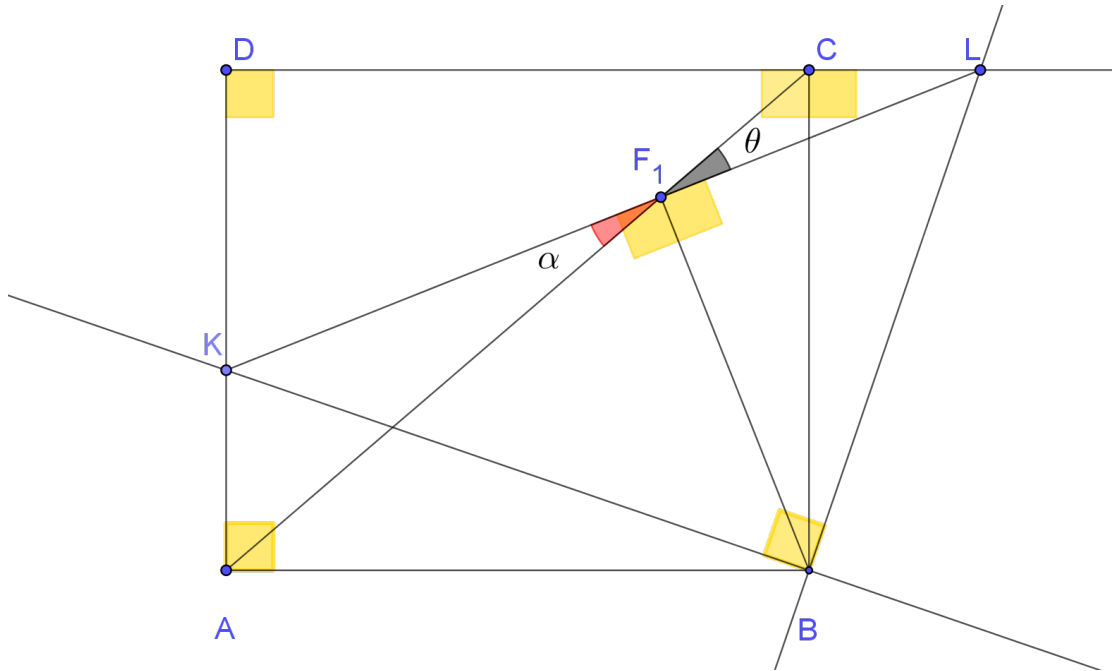
$$G\hat{B}C = 360^\circ - F\hat{B}C - F\hat{B}G = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ + \alpha = F\hat{B}G$$

Finalmente, deve -se concluir que os triângulos  $FBG$  e  $CBG$  são congruentes pelo caso  $(LAL)$ , pois  $FB = BC$ ,  $BG$  é um lado comum aos dois triângulos e  $G\hat{B}C = F\hat{B}G$ . Assim  $FG = CG$  mas como  $G$  pertence a mediatriz de  $EF$  então  $EG = FG = CG$ . Logo  $G$  é o circuncentro como deseja-se demonstrar.

**Exemplo 12:** Considere um retângulo  $ABCD$  e duas retas  $r$  e  $s$  perpendiculares entre -si que passam pelo ponto  $B$ . Sabemos que  $s$  intercepta o lado  $AD$  em  $K$ , enquanto  $r$  intercepta a semirreta  $DC$ , com origem  $D$ , no ponto  $L$ . Sendo  $F$  a intercessão do segmentos  $AC$  e  $KL$ , mostre que  $B\hat{F}L = 90^\circ$ .

**Solução:** Neste exemplo será considerado o ponto  $F_1$  como sendo o pé da perpendicular baixada de  $B$  para  $KL$  e será mostrado que  $F_1 = F$ . Para isso será concluído que os pontos  $A, F_1$  e  $C$  estão alinhados, e isto é equivalente a mostrar que  $K\hat{F}_1A = C\hat{F}_1L$ . Neste caso o ponto  $F_1$  será mais nobre do que o ponto  $F$ , uma vez que os quadriláteros  $BF_1CL$  e  $ABF_1K$  são cíclicos, e isto faz com que alguns ângulos de suma importância para a nossa resolução, tenham a mesma medida.

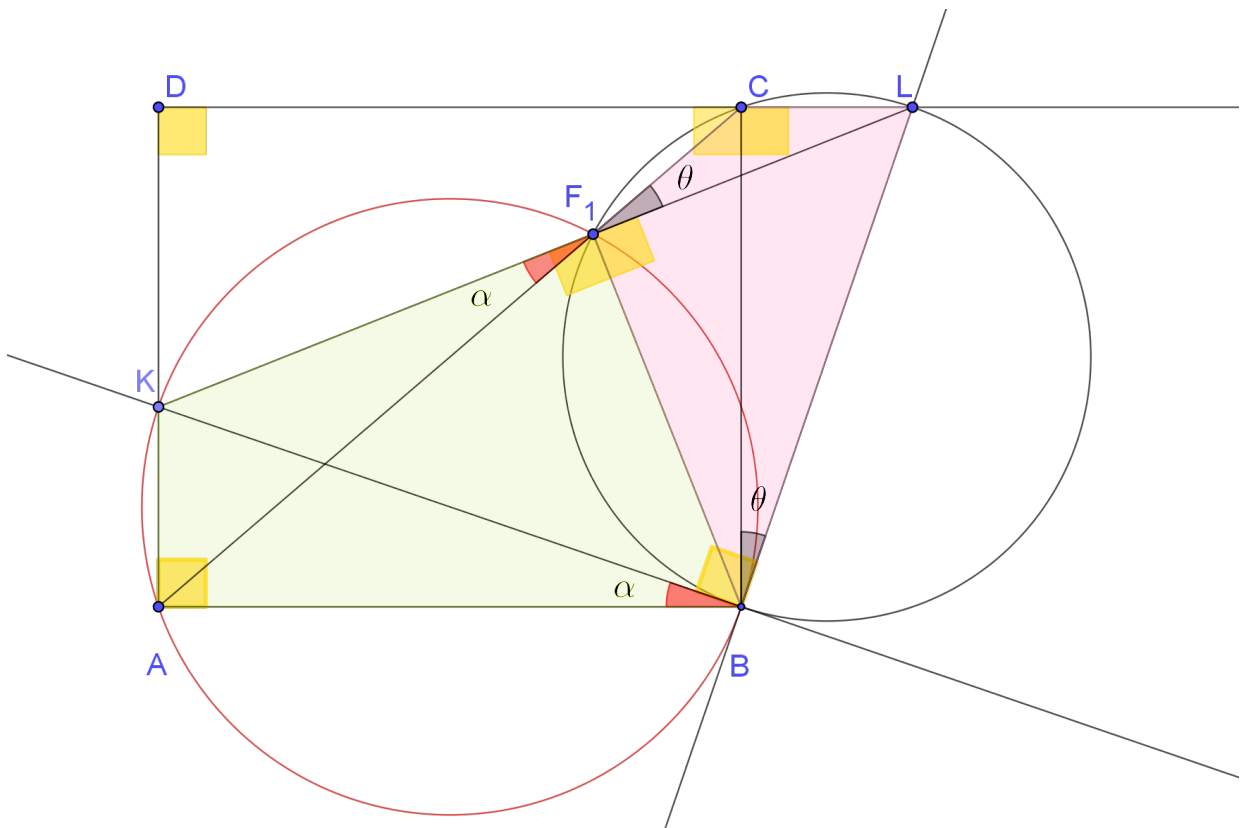
Com o intuito de mostrar que  $F_1 = F$ , considere a figura abaixo:



Nesta figura deve ser reparado que o quadrilátero  $AKF_1B$  é inscriível, pois:

$$\widehat{KF_1B} + \widehat{KAB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Logo vai ter um círculo passando pelos vértices  $A, K, F_1$  e  $B$ . Como mostra a figura abaixo:



Percebe-se que  $K\hat{F}_1A = A\hat{B}K$ , pois ambos os ângulos estão inscritos no arco  $AK$ . Deve ser notado também que:

$$B\hat{F}_1L = B\hat{C}L = 90^\circ$$

Isso garante, pelo segundo critério de inscrição, que o quadrilátero  $B\hat{F}_1CL$  é inscritível, uma vez que os ângulos  $B\hat{F}_1L$  e  $B\hat{C}L$  são iguais e ambos estão opostos ao segmento  $BL$ . Assim existe um círculo passando pelos vértices  $B, F_1, C$  e  $L$ , e com isso pode se garantir que  $C\hat{F}_1L = C\hat{B}L$ , pois ambos os ângulos estão inscritos no arco  $CL$ .

Finalmente, observa-se que  $A\hat{B}C = K\hat{B}L = 90^\circ$ . Além disso, também é conhecido que:

$$A\hat{B}C = A\hat{B}K + K\hat{B}C$$

e

$$K\hat{B}L = K\hat{B}C + C\hat{B}L$$

Portanto:

$$A\hat{B}K + K\hat{B}C = K\hat{B}C + C\hat{B}L$$

$$A\hat{B}K = C\hat{B}L$$

Assim pode se concluído que:

$$K\hat{F}_1A = A\hat{B}K = C\hat{B}L = C\hat{F}_1L$$

Logo os pontos  $A, F_1$  e  $C$  são colineares, uma vez que os ângulos  $K\hat{F}_1A$  e  $C\hat{F}_1L$  são opostos pelo vértice  $F_1$  e são iguais. Em outras palavras, o ponto  $F_1$  pertence a diagonal  $AC$  e como ele também pertence a reta  $KL$ , então o ponto  $F_1$  pertence a interseção de  $AC$  com  $KL$ . Logo  $F_1 = F$ .

## 1.2 O elemento auxiliar

Às vezes na resolução de um determinado problema é necessário acrescentar um elemento novo que auxilie na conclusão de um resultado desejado. O elemento auxiliar não é uma técnica de resolver problemas, mas segundo POLYA (1995), em [1], a maioria das vezes pode não ser o suficiente o conhecimento de quais são as hipóteses e quais são as incógnitas do problema. É necessário a elaboração de um plano de resolução que contém elementos que a princípio não estão entre as hipóteses e condicionantes do problema que se deseja

solucionar. O que torna necessário o esboço novos elementos na figura. Estes elementos poderão ser uma reta, um polígono ou até um círculo como poderá ser visto nos exemplos a seguir.

**Exemplo 1: Tournament Of The Towns, em [18]:** Considere um triângulo  $BOD$ , um ponto  $A$  sobre o lado  $OB$  e um ponto  $C$  sobre o lado  $OD$ . Uma reta ligando os pontos médios dos segmentos  $AD$  e  $BC$  toca os lados  $OB$  e  $OD$  nos pontos  $M$  e  $N$ . Mostre que:  $\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{CD}$ .

**Solução:** Primeiro devem ser vistas quais são as hipóteses e a tese do problema.

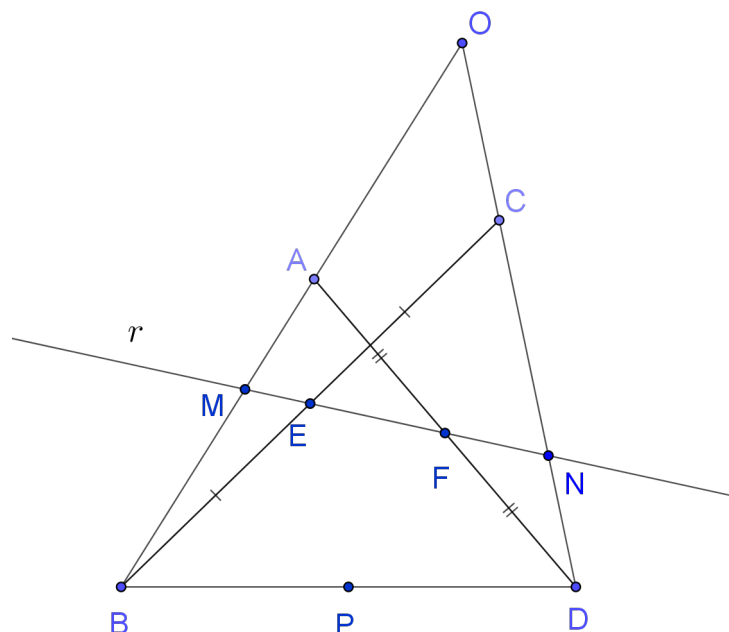
#### Hipóteses:

- $OBD$  é um triângulo;
- $A \in OB$ , e  $C \in OD$ ;
- $r$  é uma reta que passa pelos pontos  $F$  e  $E$ , que são os pontos médios de  $AD$  e  $BC$  respectivamente;
- $M$  e  $N$  são os pontos de intercessão entre  $OB$  e  $OD$  com  $r$  respectivamente.

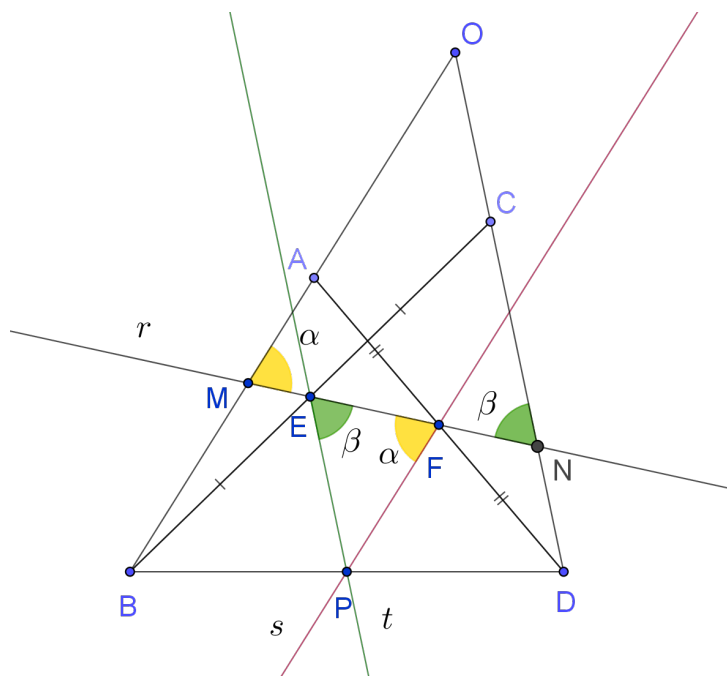
#### Tese:

- $\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{CD}$

Com base nestes dados, será construída a seguinte figura:



Para esse problema ser resolvido primeiro será destacado o ponto médio de  $BD$ , que chamaremos de  $P$ , e depois serão acrescentadas, a figura, as retas que suportam os segmentos  $EP$  e  $FP$  que iremos denotar por  $t$  e  $s$  respectivamente. Assim a nova figura será:



Observe que  $P$  e  $F$  são pontos médios dos lados  $BD$  e  $AD$  do triângulo  $ADB$ , logo que  $FP$  é a base média de  $ABD$  e pelo teorema da base média entende-se que a reta  $s$  é paralela à  $AB$  e  $FP = \frac{1}{2}AB$ .

De modo análogo, nota-se que  $EP$  é base média do triângulo  $BCD$ . Assim a reta  $t$  é paralela à reta  $DC$  e  $EP = \frac{1}{2}DC$ . Porém como  $s$  é paralela à  $AB$  e  $MN$  é uma reta transversal às duas, segue que  $\alpha = \widehat{OMN} = \widehat{PFE}$ , pois são ângulos alternos internos. De modo semelhante, a reta  $t$  é paralela ao segmento  $CD$ , por isso  $\beta = \widehat{ONM} = \widehat{PEF}$ , pois estes ângulos também são alternos internos. Como consequência disso, os triângulos  $EFP$  e  $OMN$  são semelhantes pelo caso de semelhança  $(AA)$  e vale a seguinte proporção:

$$\frac{ON}{EP} = \frac{OM}{FP}$$

$$\frac{ON}{0,5DC} = \frac{OM}{0,5AB}$$

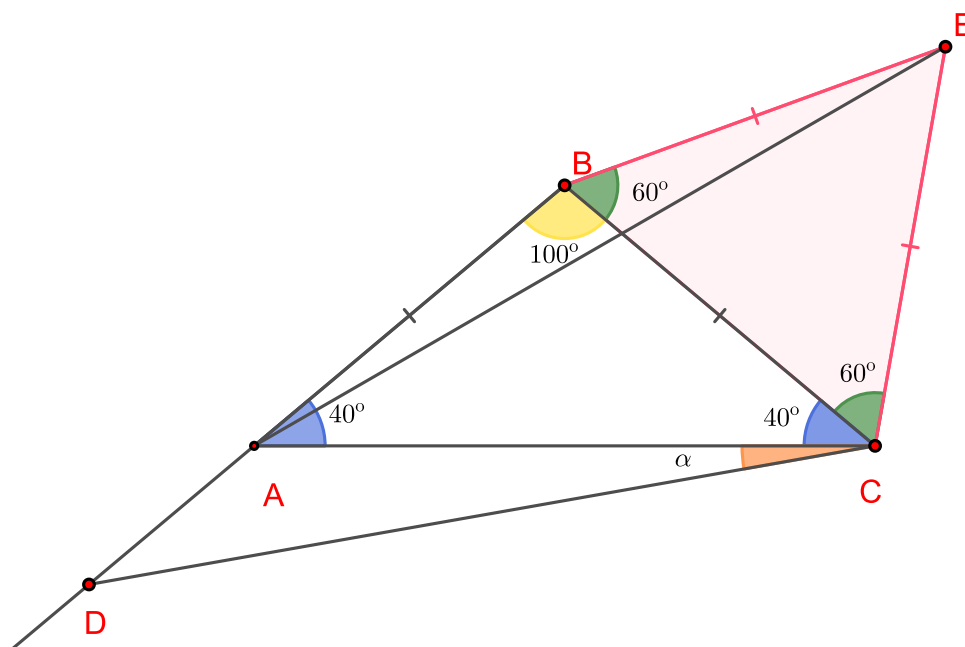
$$\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{DC}$$

Como deseja-se demonstrar.

O próximo exemplo foi retirado de um site que se encontra em [6]

**Exemplo 2:** Considere um triângulo  $ABC$  tais que  $AB = BC$  e o ângulo  $\hat{A}BC = 100^\circ$ . Seja  $D$  um ponto sobre o prolongamento de  $AB$  no sentido de  $B$  para  $A$  tal que  $BD = AC$ . Calcule o ângulo  $D\hat{C}A$ .

**Solução:** Neste problema deve ser acrescentado um triângulo equilátero sobre o lado  $BC$  do triângulo  $ABC$ , como mostra a figura:



Como o triângulo  $ABC$  é isósceles cujo ângulo do vértice mede  $\hat{A}BC = 100^\circ$ , então  $\hat{A}CB = \hat{B}AC = \frac{180-100}{2} = 40^\circ$ .

Por outro lado, é notório que  $AB = BC = BE$ . Logo o triângulo  $AEB$  é isósceles com:

$$\hat{A}BE = 100^\circ + 60^\circ = 160^\circ$$

Logo:

$$\hat{A}EB = \hat{B}AE = \frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 10^\circ$$

Disto pode-se chegar a conclusão de que:

$$\hat{A}EC = \hat{B}EC - \hat{A}EB = 60^\circ - 10^\circ = 50^\circ$$

Observe também que os triângulos  $BDC$  e  $CAE$  são congruentes pelo caso (LAL), pois  $BD = CA$ , por hipótese,  $CE = BC$  e

$$\widehat{ECA} = \widehat{ECB} + \widehat{ACB} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ = \widehat{DBC}$$

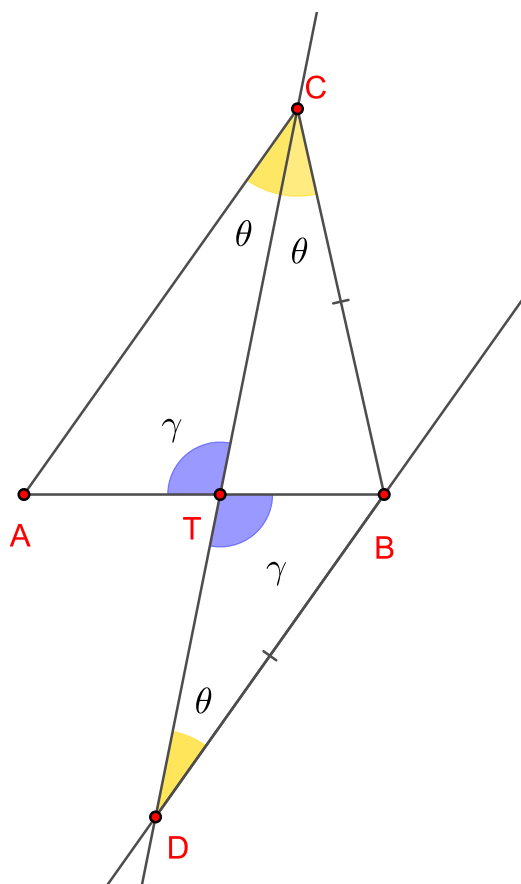
e disto pode-se deduzir que  $\widehat{BCD} = \widehat{AEC} = 50^\circ$ . Portanto:

$$\widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$$

**Exemplo 3: O teorema da bissetriz interna:** : Seja  $ABC$  um triângulo e  $T$  um ponto sobre o lado  $AB$ , tal que  $CT$  é a bissetriz interna do ângulo  $\widehat{ACB}$ . Então mostre que:

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BC}$$

**Solução:** Partindo do princípio de que  $CT$  é uma bissetriz de  $\widehat{ACB}$ , trace uma reta  $r$  paralela ao lado  $AC$  passando por  $B$ . Essa reta  $r$  irá interceptar a reta  $CT$  no ponto  $D$ , como mostra a figura abaixo:



Observe que  $\widehat{ATC} = \widehat{BDT}$ , pois são ângulos opostos pelo vértice. Além disso,  $\widehat{ACT} = \widehat{BDT}$ , pois são ângulos alternos internos. Logo pelo caso de semelhança (AA) entende-se que os



triângulos  $ATC$  e  $BDT$  são semelhantes e vale a seguinte proporção:

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BD}$$

Mas como  $CT$  é bissetriz de  $\hat{A}CB$  e, além do mais,  $\hat{A}CT$  e  $\hat{B}DT$  são ângulos alternos internos, então:

$$\hat{B}CT = \hat{A}CT = \hat{B}DT$$

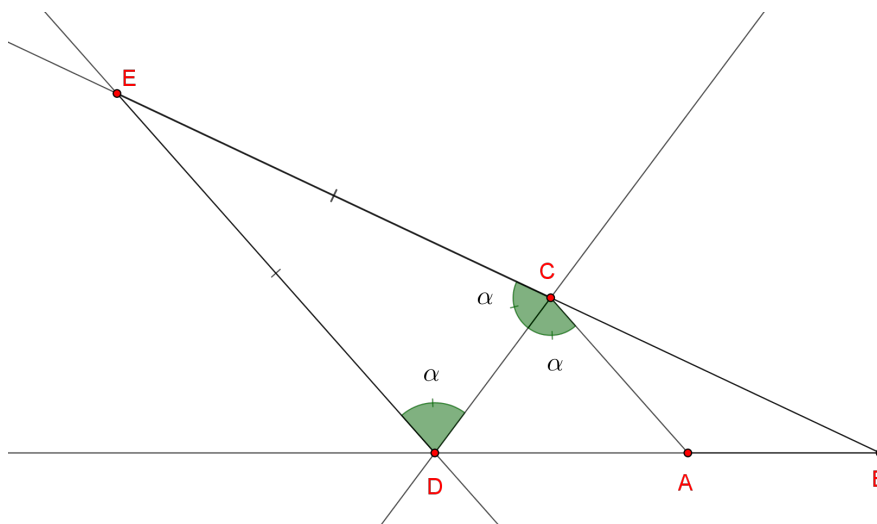
Assim o triângulo  $BCD$  é isósceles com  $BC = BD$ , e por isso:

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

**Exemplo 4: O Teorema da bissetriz externa:** Dado um triângulo  $ABC$  e um ponto  $D$  pertencente ao prolongamento do segmento  $BA$  de  $B$  para  $A$ . Se  $CD$  é uma bissetriz do ângulo externo correspondente ao ângulo  $\hat{A}CB$ , então:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

**Solução:** Traçe uma reta paralela ao segmento  $AC$  passando por  $D$ . Essa reta irá interceptar a a reta  $BC$  no ponto  $E$ , como mostra a figura abaixo:



Observe que os ângulos  $\hat{E}DC$  e  $\hat{D}CA$  são alternos internos e assim  $\hat{E}DC = \hat{D}CA = \hat{D}CE$ , pois  $CD$  é bissetriz de  $\hat{E}CA$ . Logo o triângulo  $EDC$  é isósceles com  $EC = ED$ .

Além disso, é pode ser notado que os triângulos  $EDB$  e  $CAB$  são semelhantes, uma vez que  $AC \parallel DE$ . Isto faz com que  $\hat{E}DB = \hat{C}AB$  e  $\hat{D}EB = \hat{D}CB$ . Assim pode-se concluir que:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{ED} = \frac{AC}{EC} \Leftrightarrow$$

$$\frac{BD - AB}{BD} = \frac{BE - BC}{BE} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BE}$$

Por outro lado, é válido que  $\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{EC}$  e assim deve-se chegar a seguinte conclusão:

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

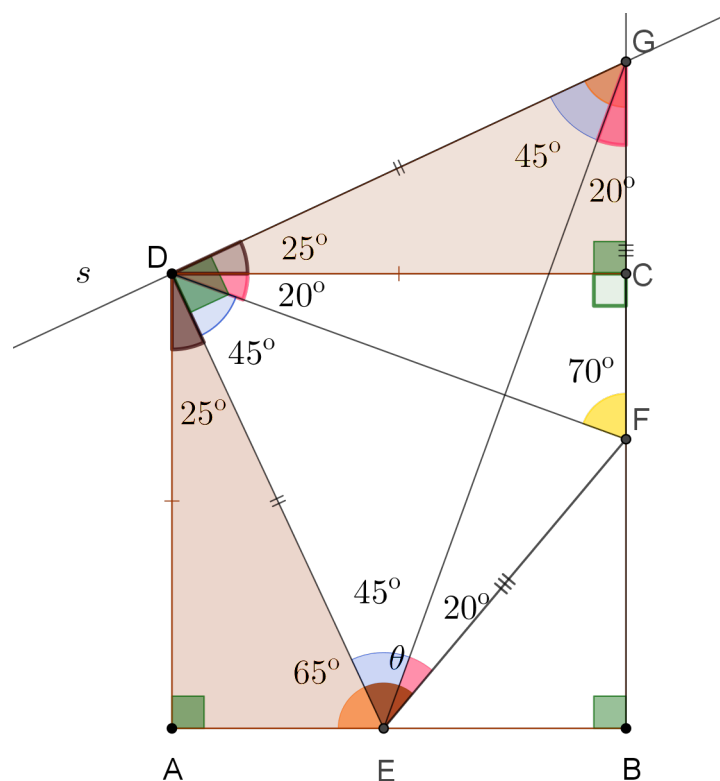
Logo:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

E a demonstração está finalizada.

**Exemplo 5:** Considere um quadrado  $ABCD$ , um ponto  $F$  sobre o lado  $BC$  de forma que  $\widehat{CFD} = 70^\circ$  e um ponto  $E$  sobre o lado  $AB$  de forma que  $\widehat{EDF} = 45^\circ$ . Calcule o ângulo  $\widehat{DEF}$ .

**Solução:** Neste exemplo será traçada uma reta auxiliar  $s$ , perpendicular ao segmento  $ED$  passando por  $D$ . Essa reta irá interceptar a reta  $BC$  no ponto  $G$ , como mostra a figura:



Somando os ângulos no triângulos  $DCF$  será concluído que:

$$\hat{C}FD + \hat{D}CF + \hat{C}DF = 180^\circ$$

$$70^\circ + 90^\circ + \hat{C}DF = 180^\circ$$

$$\hat{C}DF = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

É sabido ainda que:

$$\hat{A}DE + \hat{E}DF + \hat{C}DF = \hat{A}DC = 90^\circ$$

$$\hat{A}DE = 90^\circ - 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

Mas como  $\hat{A}ED$  e  $\hat{A}DE$  são complementares então  $\hat{A}ED = 65^\circ$ . Por outro lado, também é conhecido que:

$$\hat{E}DG = \hat{E}DF + \hat{C}DF + \hat{C}DG$$

$$90^\circ = 45^\circ + 20^\circ + \hat{C}DG$$

$$\hat{C}DG = 90^\circ - 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ = \hat{A}DE$$

Agora deve ser observado que os triângulos  $ADE$  e  $CDG$  são congruentes pelo caso ( $ALA$ ), uma vez que  $AD = CD$  (pois  $ABCD$  é um quadrado),  $\hat{A}DE = \hat{C}DG$  e  $\hat{D}CG = 90^\circ = \hat{D}AE$ . Através disso dar para ser concluído que  $DE = DG$ , e portanto o triângulo  $DEG$  é um triângulo retângulo isósceles com  $\hat{D}EG = \hat{D}GE = 45^\circ$ . Além de tudo, como  $AD = CD$ , então:

$$\hat{A}ED = \hat{C}GD = 65^\circ$$

Em contrapartida o segmento  $DF$  é uma bissetriz interna do triângulo  $DEG$  relativa a base  $EG$ , uma vez que:

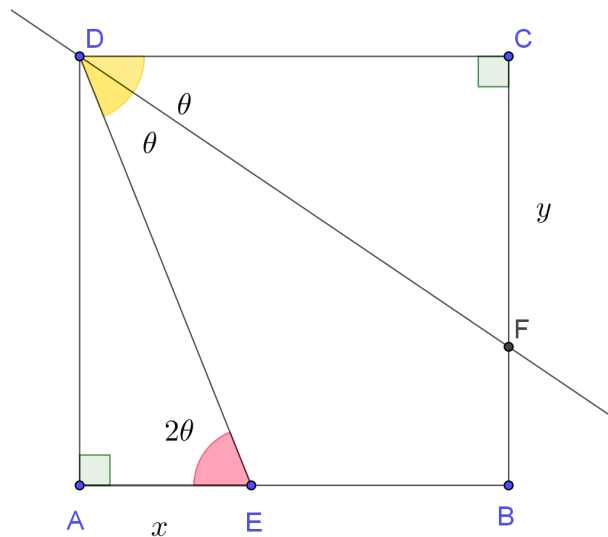
$$\hat{E}DF = 45^\circ = \frac{90^\circ}{2} = \frac{\hat{E}DG}{2}$$

Como no triângulo isósceles a bissetriz do ângulo vértice, coincide com a mediatriz da base, então  $DF$  é a mediatriz do segmento  $EG$ . Portanto  $FG = EF$ , levando a conclusão de que o triângulo  $EFG$  também é isósceles com  $F\hat{E}G = E\hat{G}F$ . Logo:

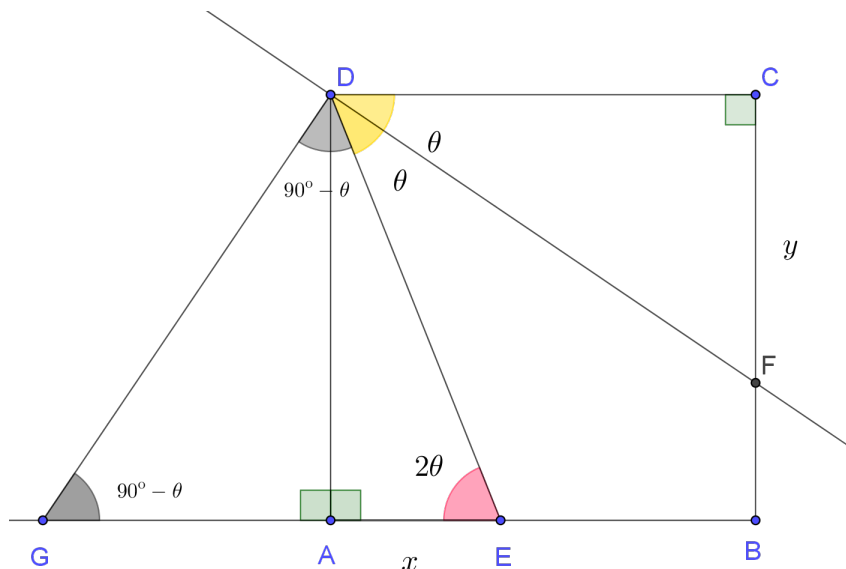
$$D\hat{E}F = D\hat{E}G + F\hat{E}G = D\hat{G}E + E\hat{G}F = D\hat{G}F = C\hat{G}D = 65^\circ$$

**Exemplo 6: Tournament of the towns 1997 , mencionado em [19]:**Seja  $E$  um ponto sobre o lado  $AB$  de um quadrado  $ABCD$ . Sabendo que a bissetriz interna do angulo  $E\hat{D}C$  intersecta o lado  $BC$  em  $F$ , mostre que  $DE = AE + CF$ .

**Solução:** Do enunciado pode ser construída a seguinte figura:



O elemento auxiliar que deve ser considerado aqui é um ponto  $G$  que pertence ao prolongamento da semirreta  $BA$ , com origem em  $B$ , tal que  $AG = CF$ . Como está ilustrado na figura abaixo:



Deste modo os triângulos  $DAG$  e  $DCF$  são congruentes pelo caso (LAL) visto que:  $D\hat{A}G = D\hat{C}F = 90^\circ$ ,  $AD = CD$  e  $AG = CF$ . Assim:

$$A\hat{D}G = C\hat{D}F = \frac{E\hat{D}C}{2} = \frac{D\hat{E}A}{2} = \theta$$

e

$$D\hat{G}A = D\hat{F}C = 90^\circ - C\hat{D}F = 90^\circ - \frac{D\hat{E}A}{2} = 90^\circ - \theta$$

Além disso:

$$E\hat{D}A = 90^\circ - D\hat{E}A = 90^\circ - 2\theta$$

Consequentemente:

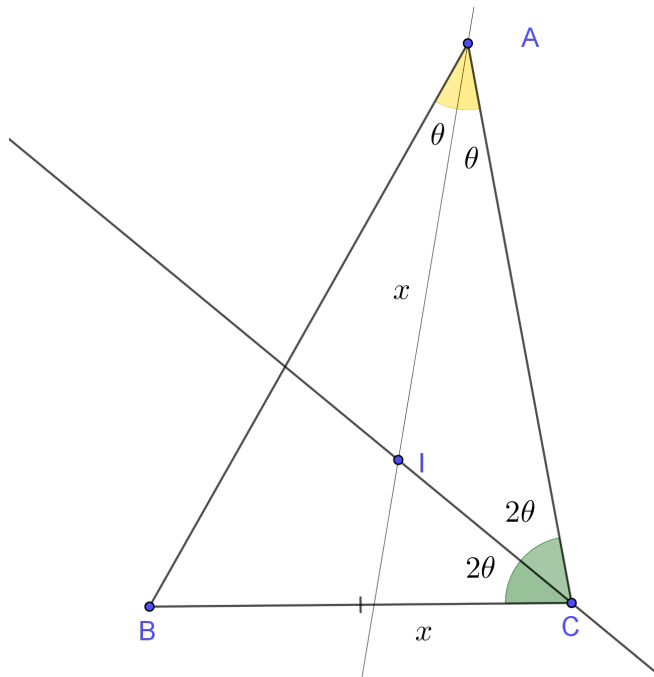
$$E\hat{D}G = E\hat{D}A + A\hat{D}G = 90^\circ - 2\theta + \theta = 90^\circ - \theta = D\hat{G}A$$

Logo o triângulo  $DGE$  é isosceles com  $EG = DE$ . Disto pode-se concluir que:

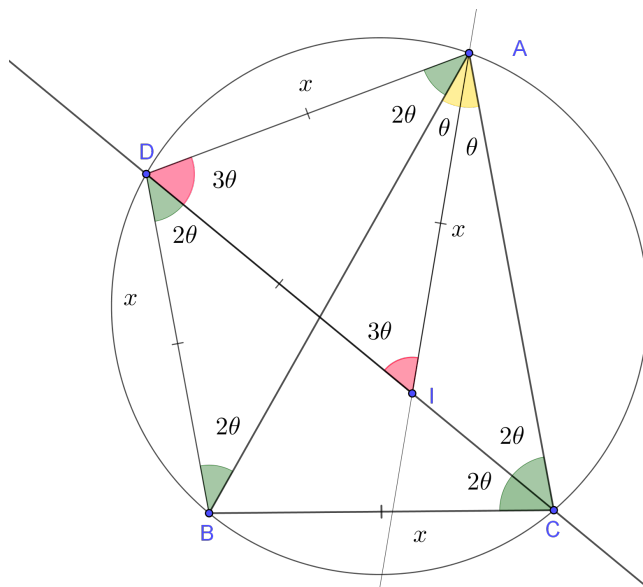
$$DE = EG = AE + AG = AE + CF$$

**Exemplo 7: OBM, 2010, em [20]:** As bissetrizes internas dos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$  do triângulo  $ABC$  cortam-se no ponto  $I$ . Sabe-se que  $AI = BC$  e que  $I\hat{C}A = 2I\hat{A}C$ . Determine a medida do ângulo  $A\hat{B}C$ .

**Solução:** Do enunciado deve-se construir a seguinte figura:



Neste exemplo, o elemento auxiliar seria o circuncírculo do triângulo  $ABC$ . Considere o ponto  $D$  como sendo a interseção entre este circuncírculo e a reta  $CI$ , como está ilustrado na seguinte figura:



Nesta figura, foi usada a seguinte notação:  $\widehat{IAC} = \theta$  e  $AI = BC = x$ . Logo pelo enunciado:

$$\widehat{ICA} = 2\widehat{IAC} = 2\theta$$

E como  $AI$  e  $CI$  são bissetrizes segue que  $B\hat{A}I = \theta$  e  $I\hat{C}B = 2\theta$ . Além disso, o quadrilátero  $ABCD$  é inscritível então:

$$D\hat{B}A = D\hat{C}A = D\hat{C}B = D\hat{A}B = 2\theta$$

Assim o triângulo  $ADB$  é isósceles com  $AD = DB$ . Além de tudo, é conhecido também que:

$$B\hat{D}C = B\hat{A}C = B\hat{A}I + I\hat{A}C = \theta + \theta = 2\theta = I\hat{C}B = D\hat{C}B$$

Assim o triângulo  $BDC$  é isósceles com  $DB = BC = x$ . Disto resulta que:

$$AD = DB = BC = AI = x$$

Assim o triângulo  $ADI$  tem no mínimo dois lados iguais e  $A\hat{D}I = A\hat{I}D$ . Por outro lado, nota-se que  $A\hat{I}D$  é um ângulo externo do triângulo  $IAC$  logo:

$$A\hat{D}I = A\hat{I}D = I\hat{A}C + I\hat{C}A = \theta + 2\theta = 3\theta = D\hat{A}I$$

Assim o triângulo  $DAI$  é equilátero com:

$$D\hat{I}A = 3\theta = 60^\circ$$

$$\theta = 20^\circ$$

Assim

$$A\hat{B}C = 180^\circ - A\hat{C}B - B\hat{A}C = 180^\circ - 4\theta - 2\theta = 180^\circ - 6\theta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

**Exemplo 8) Olimpíada Ibero Americana de Matemática 2018, em [21]:** Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $B\hat{A}C = 90^\circ$  e  $BA = CA$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$ . Escolhe-se um ponto  $D \neq A$  na semicircunferência de diâmetro  $BC$  que contém  $A$ . A circunferência circunscrita ao triângulo  $DAM$  intersecta as retas  $DB$  e  $DC$  nos pontos  $E$  e  $F$ , respectivamente, onde  $E$  pertence ao prolongamento do segmento  $BD$ , no sentido de  $B$  para  $D$ . Demonstre que  $BE = CF = AF = EA$

**Solução:** Do enunciado pode ser construída a seguinte figura:



Observe que o quadrilátero  $ACBD$  está inscrito na semicircunferência de diâmetro  $BC$ . Logo deve ser concluído que:

$$\widehat{FCA} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA} = \widehat{EBA} = \alpha$$

e

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$$

Consequentemente:

$$\widehat{FDE} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Agora como  $DEAF$  é um quadrilátero também inscritível em um círculo, segue que :

$$\widehat{EAF} + \widehat{FDE} = 180^\circ$$

$$\widehat{EAF} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \widehat{BAC}$$

Porém, como  $\widehat{EAF} = \widehat{EAB} + \widehat{BAF}$  e  $\widehat{BAC} = \widehat{BAF} + \widehat{FAC}$ , então pode ser concluído que:

$$\widehat{EAB} + \widehat{BAF} = \widehat{BAF} + \widehat{FAC}$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{FAC} = \beta$$



E como  $\widehat{FCA} = \widehat{EBA}$  e  $AC = AB$  então, pelo caso de congruência (ALA), segue que os triângulos  $AFC$  e  $AEB$  são congruentes e disto deve-se concluir que  $BE = CF$  e  $AF = EA$ .

Além disso,  $\widehat{EBA} = \widehat{DBA}$  que é um ângulo inscrito no arco  $\widehat{AD}$ , da circunferência de diâmetro  $BC$ , cujo o ângulo central é  $\widehat{DMA}$ . Como consequência disto:

$$\widehat{DMA} = 2\widehat{EBA} = 2\widehat{FCA}$$

Mas como o quadrilátero  $DMFA$  é inscritível, conclui-se que:

$$\widehat{DMA} = \widehat{DFA} = 2\widehat{FCA}$$

Além de tudo,  $\widehat{DFA}$  é um ângulo externo ao triângulo  $AFC$  então:

$$\widehat{DFA} = \widehat{FCA} + \widehat{FAC}$$

$$2\widehat{FCA} = \widehat{FCA} + \widehat{FAC}$$

$$\widehat{FAC} = \widehat{FCA}$$

Logo o triângulo  $FAC$  é isósceles com  $AF = CF$  e disto entende-se que  $BE = CF = AF = AE$  como se deseja demonstrar.

## 2 Generalização, Especialização e Analogia

### 2.1 Generalização

Segundo POLYA (1954), em [2],p 12, esta técnica ocorre quando é conhecido que uma determinada propriedade é válida um conjunto de objetos  $P$  e deseja-se mostrar que essa propriedade também é válida para um conjunto maior que contenha  $P$ . Por exemplo, quando é sabido que uma determinada propriedade vale para todos os números primos e anseia-se mostrar que ela é válida para todos os naturais então deve ser aplicada esta técnica de generalização.

Segundo POLYA (1954), em [2],p 12, a técnica de generalização também é utilizada quando, por exemplo, deixa-se de olhar para um triângulo equilátero e passa-se a olhar para um triângulo qualquer, ou quando deixa-se de olhar para um triângulo e passa-se a olhar para um polígono arbitrário. Esta técnica também é utilizada quando se para de considerar as funções trigonométricas apenas para ângulos agudos e passa-se a estudar as propriedades destas funções para um ângulo qualquer.

"Generalization is passing from the consideration of a given set of objects to that of a larger set, containing the given one. For example, we generalize when we pass from the consideration of triangles to that of polygons with an arbitrary number of sides. We generalize also when we pass from the study of the trigonometric functions of an acute angle to the trigonometric functions of an unrestricted angle"(POLYA (1954), em [2],p 12)

### 2.2 Particularização

Segundo POLYA (1954), em [2],p 13, esta técnica consiste em deixar de considerar um conjunto  $P$  para atentar apenas para um subconjunto especial de  $P$ , por isso a técnica também pode ser chamada de especialização. Esta técnica é muito usada para demonstrar

que um conjunto genérico satisfaz determinada propriedade  $Q$ . Às vezes, por ser difícil de verificar esta propriedade num conjunto genérico  $T$ . Talvez seja mais fácil pegarmos um subconjunto  $A$  de  $T$ , no qual seja mais fácil de verificar esta propriedade e, após isto, usaremos este subconjunto para generalizar esta propriedade para qualquer outro subconjunto de  $T$  e assim a propriedade estará provada para todo o conjunto  $T$ .

Segundo POLYA (1954), em [2], p 13, a técnica de especialização estará sendo utilizada quando, por exemplo, para-se de considerar polígono regular qualquer e muda-se o foco para um triângulo regular, isto é, um triângulo equilátero.

"Specialization is passing from the consideration of a given set of objects to that of a smaller set, contained in the given one. For example, we specialize when we pass from the consideration of polygons to that of regular polygons, and we specialize still further when we pass from regular polygons with  $n$  sides to the regular, that is, equilateral, triangle"(POLYA, 1954, em [2], p 13)

Esta técnica também é poderosa para mostrar que uma propriedade não é válida para todos os elementos de  $P$ . Por exemplo, para mostrar que nem todo natural maior que 2 por ser escrito como a diferença entre dois quadrados perfeitos, basta considerar o subconjunto dos números naturais constituídos de números que dão resto 2 na divisão por 4, isto é, são os números da forma  $4k + 2$ . Se por acaso estes números pudessem ser escrito como uma diferença de dois quadrados então, certamente, existiria dois números naturais  $r$  e  $s$  tais que:  $r^2 - s^2 = 4k + 2$  e assim da para ser deduzido que  $r^2 - s^2 \equiv 2 \pmod{4}$ .

Contudo, é conhecido que todo números natural ao quadrado é congruente a 0 ou a 1 módulo 4, assim:  $r^2 - s^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $r^2 - s^2 \equiv 1 \pmod{4}$  ou  $r^2 - s^2 \equiv -1 \pmod{4}$ . Logo não existem  $r$  e  $s$  tais que  $r^2 - s^2 \equiv 2 \pmod{4}$ .

Assim pode ser concluído que os números da forma  $4k + 2$  não podem ser escrito como diferença de quadrado. Portanto esta propriedade não é válida para os todos naturais. Assim deve ser lembrar que um contraexemplo é um subconjunto particular onde a propriedade  $P$  não é válida.

Agora se uma determinada propriedade for válida para um subconjunto de  $P$  e deseja-se mostrar que ela é válida para todo o conjunto  $P$ , deve-se fazer algumas deduções lógicas a fim de generaliza-la para qualquer subconjunto de  $P$ . Feito isso, esta propriedade ficará provada para todo o conjunto  $P$ .

Considere os seguintes exemplos de generalização e especialização:

**Exemplo 1:** Mostre que o quadrado de todo número natural maior que 2, pode ser escrito como a diferença de dois quadrados de números inteiros positivos.

Deve ser mostrado que, para todo  $z > 2$  com  $z \in \mathbb{N}$ , existem  $r, s \in \mathbb{N}$  tais que  $r^2 - s^2 = z^2$ .

Observe que:

$$r^2 - s^2 = z^2 \Leftrightarrow$$

$$(r + s).(r - s) = z^2 \Rightarrow$$

$$(r + s) | z^2$$

E além disso:

$$(r - s) | z^2$$

Observe que se  $z$  for um natural qualquer ele poderá ter muitos divisores ou poucos. Neste caso ficaria difícil de se exhibir, com clareza, os valores de  $r$  e  $s$  que fazem com que  $r + s$  e  $r - s$  sejam divisores de  $z^2$ . Além disso, deve-se lembrar que  $r + s$  e  $r - s$  tem que ter a mesma paridade.

Mas, ao considerar o caso particular de  $z$  ser um número primo maior que 2 esta tarefa poderá ser mais fácil, tendo em vista que existem apenas três divisores positivos possíveis para  $z^2$  que são: 1,  $z$  e  $z^2$ . Além de tudo, como  $s > 0$  então  $r + s > r - s$ . Assim pode-se concluir que:

$$r + s = z^2$$

e

$$r - s = 1$$

Somando estas duas equações, chega-se a seguinte conclusão:

$$2r = z^2 + 1$$

$$r = \frac{z^2 + 1}{2}$$

$$s = r - 1 = \frac{z^2 + 1}{2} - 1 = \frac{z^2 - 1}{2}$$

Assim:

$$z^2 = \left[\frac{z^2 + 1}{2}\right]^2 - \left[\frac{z^2 - 1}{2}\right]^2$$

E como  $z$  é um primo maior que 2 então  $z$  é ímpar e assim  $z^2 + 1$  e  $z^2 - 1$  são pares. Logo suas metades correspondem a números naturais. Assim o teorema fica demonstrado para o caso  $z$  primo maior que 2.

Por outro lado, se  $z$  é um número ímpar qualquer então:

$$\left(\frac{z^2 + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z^2 - 1}{2}\right)^2 = \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{4} - \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{4} = \frac{4z^2}{4} = z^2$$

E como  $z^2 + 1$  e  $z^2 - 1$  são pares, então  $\frac{z^2 + 1}{2}$  e  $\frac{z^2 - 1}{2}$  são números naturais. Assim fica demonstrado que o quadrado de todo número ímpar maior do que 1 pode ser escrito como diferença dos quadrados de dois números naturais.

Antes de demonstrar esta propriedade para os números pares deve ser levada em conta duas coisas importantes. A primeira é que é conhecido que todo quadrado de número primo, com exceção do 2, pode ser escrito de forma única como diferença de dois quadrados de números inteiros como está escrito acima. Em segundo lugar sabe-se que, no caso  $z = 2$  isto não é possível uma vez que  $z^2 + 1$  e  $z^2 - 1$  são ímpares. Estas observações devem ser levadas em consideração na hora de generalizar esta propriedade.

Para mostrar esta propriedade para os números pares, deve ser observado que todo número par maior que 2 é uma potência de 2 multiplicada por algum número natural ímpar, isto é,  $z = 2^t r$  com  $t > 1$  e com  $r$  ímpar.

Agora se  $r = 1$ , segue que  $z = 2^n$  com  $z > 2$  e assim:

$$t \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2^{2t} = 4^t = 4^{(t-2)} \cdot 4^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 4^{(t-2)} \cdot (5^2 - 3^2) = (5 \cdot 2^{t-2})^2 - (3 \cdot 2^{t-2})^2$$

Assim  $z^2$  pode ser escrito como uma diferença de quadrados quando  $z$  for uma potencia de 2.

Agora se  $r > 1$  com  $r$  ímpar, já é conhecido que existem  $m$  e  $n$  naturais tais que  $r^2 = m^2 - n^2$  e assim pode ser concluído que:

$$z^2 = (2^t)^2 \cdot r^2 = (2^t)^2 \cdot (m^2 - n^2) = (2^t \cdot m)^2 - (2^t \cdot n)^2$$

Assim a demonstração está finalizada.

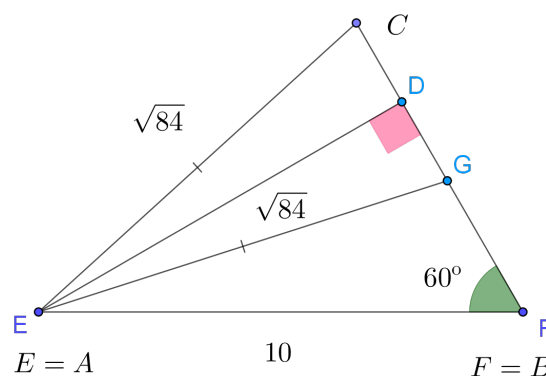
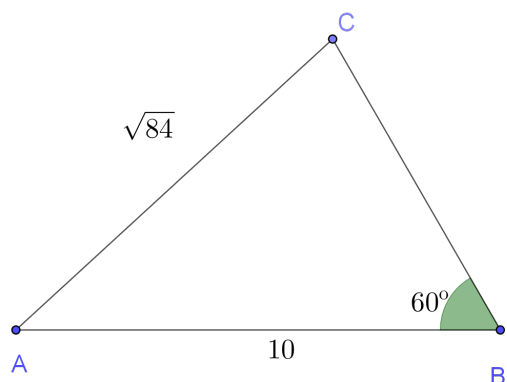
Antes de ver mais algum caso de especialização, deve ser observado que algumas propriedades não valem para casos gerais e sim para casos particulares

Segundo POLYA(1954), em [2], um caso particular é representativo se este possuir uma propriedade  $P$  que pode ser generalizada para um caso mais geral. Este foi o caso do exemplo acima onde se tinha um número primo ímpar com a propriedade de que o seu quadrado pode ser escrito como uma diferença de quadrados de números naturais. A partir deste caso particular, esta propriedade pôde ser estendida para todos os naturais maiores que 2.

O exemplo a seguir é um caso particular não representativo.

**Exemplo 2:** Considere a propriedade: "Dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$  são tais que  $AB = EF$  e  $AC = EG$  e  $\hat{A}BC = \hat{E}FG$ . Então estes triângulos são congruentes".

Pode ser verificado que esta propriedade é falsa quando se trata de um triângulo acutângulo, pois pode ser dado, como exemplo, dois triângulos em que:  $AB = EF = 10$  e  $AC = EG = \sqrt{84}$  e  $\hat{A}BC = \hat{E}FG = 60^\circ$  cuja a figura está representada abaixo:



Fazendo com que o segmento  $AB$ , coincida com o segmento  $EF$ , pode ser observado que o ponto  $C$  está sobre o círculo, com centro em  $A$  e raio  $AC = \sqrt{84}$ , e também está sobre uma reta  $r$  que passa por  $B$  formando um ângulo de  $60^\circ$ . Porém a dependendo do tamanho de  $AB$ , pode haver dois pontos de intercessão entre a reta  $r$  e o círculo. Estes pontos serão denotados por  $C$  e  $G$ . Determinando assim dois triângulos diferentes.

Uma outra forma de verificar que esta propriedade é falsa, seria calcular os valores de  $BC$  e de  $FG$  aplicando a lei dos cossenos em cada triângulo. Assim:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos(60^\circ)$$

$$(\sqrt{84})^2 = 10^2 + BC^2 - 2 \cdot 10 \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$$

$$84 = 100 + BC^2 - 10BC$$

$$BC^2 - 10BC + 16 = 0$$

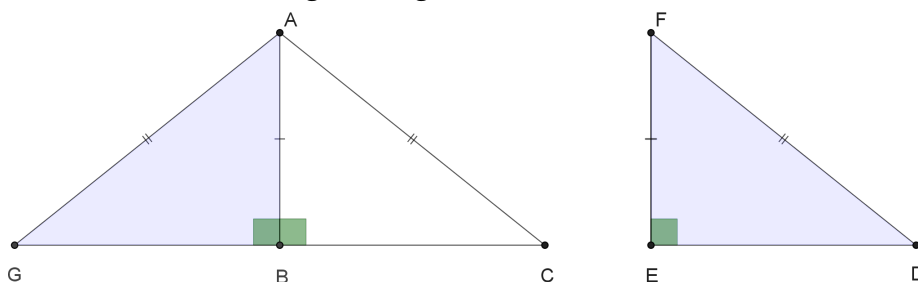
Podemos observar que  $BC$  e  $FG$  são as raízes dessa equação. No entanto resolvendo essa equação, serão encontrados os 2 e 8 como raízes. Logo pode se ter que  $BC = 8$  e  $FG = 2$ . Determinando assim dois triângulos não congruentes.

Logo a propriedade é falsa em geral. Mas, ao ser considerado o caso especial em que  $\hat{A}BC = \hat{E}FG \geq 90^\circ$  esta propriedade será verdadeira e será demonstrada a partir de agora.

Primeiro será considerado o caso em que  $\hat{A}BC = \hat{E}FG = 90^\circ$ . Sendo assim, considere a seguinte proposição:

**Caso de congruência cateto Hipotenusa:** Dois triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$  retângulos em  $B$  e  $B_1$  com  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  e  $\hat{A}BC = \hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1 = 90^\circ$  então os triângulos são congruentes.

**De fato:** Observe a seguinte figura :



Sobre o prolongamento do segmento  $BC$  de  $C$  para  $B$ , tome um ponto  $D$  tal que  $DB = A_1B_1$ . Como  $AB = A_1B_1$  e  $\hat{A}BD = \hat{A}BC = \hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1 = 90^\circ$  por hipótese, então pelo caso  $LAL$ , os triângulos  $ABD$  e  $A_1B_1C_1$  são congruentes. Assim conclui-se que  $A_1C_1 = AD = AC$  e  $\hat{A}_1\hat{C}_1\hat{B}_1 = \hat{A}\hat{D}\hat{B}$ . Logo o triângulo  $ADC$  é isósceles e os ângulos da base são iguais. Portanto:

$$\hat{A}_1\hat{C}_1\hat{B}_1 = \hat{A}\hat{D}\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$$

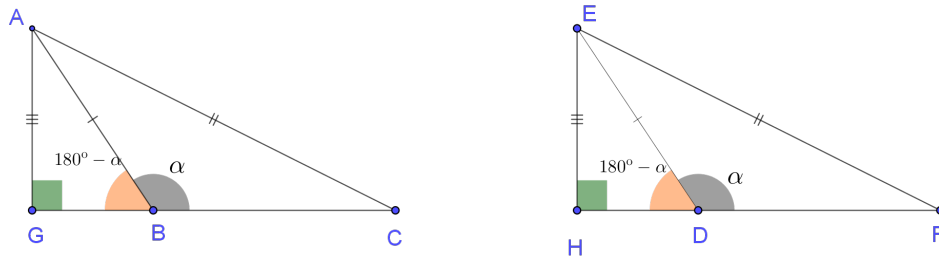
Além disso, como  $\hat{A}BC = \hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1 = 90^\circ$ , pode ser concluído que  $B_1A_1C_1 = \hat{B}\hat{A}\hat{C}$ . Agora pelo caso de congruência ( $ALA$ ), observa-se que os triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$  são congruentes. Assim a demonstração chegou ao seu fim.

Agora com base nisto, será mostrado que este resultado também é válido se  $\hat{A}BC = \hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1 > 90^\circ$ .

**Exemplo 3: Segundo caso especial de congruência:** Seja  $ABC$  e  $EDF$  dois triângulos, tais que  $AB = DE$ ,  $AC = EF$  e  $\hat{A}BC = \hat{E}DF > 90^\circ$ . Então  $ABC$  e  $DEF$  são triângulos congruentes.



**Demonstração:** Do enunciado pode ser construída a seguinte figura:



Observe que na figura os pontos  $G$  e  $H$  são as projeções ortogonais de  $A$  sobre a reta  $BC$  e de  $E$  sobre a reta  $FD$ , respectivamente. Além disso, observe também que:

$$\widehat{EDH} = 180^\circ - \widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{ABG}$$

Além do mais:

$$\widehat{AGB} = \widehat{EHD} = 90^\circ$$

e

$$ED = AB$$

Logo pelo caso de congruência ( $LAA_0$ ), os triângulos  $AGB$  e  $EHD$  são congruentes. Portanto  $EH = AG$  e  $BG = HD$ .

Porém, como  $\widehat{AGC} = \widehat{EHF} = 90^\circ$  e  $AC = EF$  segue então do resultado anterior que os triângulos  $AGC$  e  $EHF$  são congruentes. Assim pode ser concluído que:

$$CG = HF \Leftrightarrow$$

$$BG + BC = HD + DF$$

com:

$$BG = HD$$

e

$$BC = DF$$

Assim, pelo caso ( $LLL$ ) ou ( $LAL$ ), os triângulos  $ABC$  e  $EDF$  são congruentes.

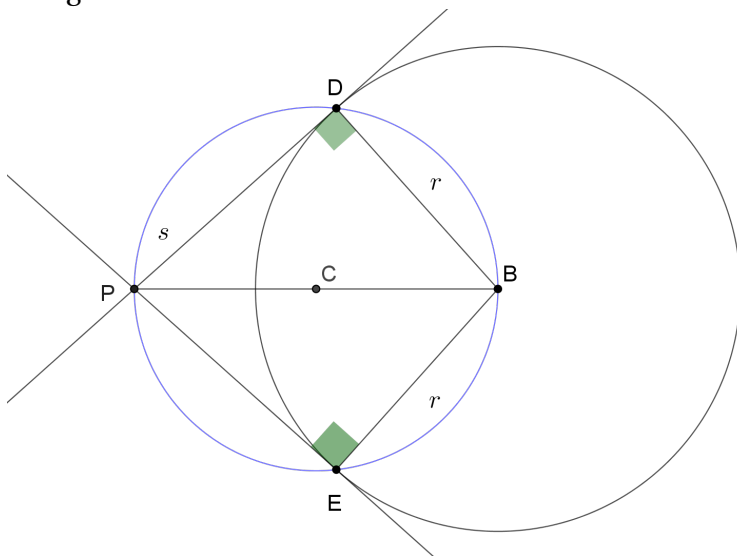
Observe que este caso especial, onde o triângulo é retângulo ou obtusângulo, o caso de congruência ( $LAL_o$ ) é válido. Para os triângulos em geral ele é falso. Logo o fato deste caso de congruência valer somente para triângulos retângulos e obtusângulos constitui um caso especial não representativo.

O próximo exemplo foi proposto pelo POLYA (1954), em [2], p 24

**Exemplo 4)** Construa uma reta tangente exterior a dois círculos dados de raios  $r_1$  e  $r_2$ , e com os centros nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Pode ser considerado que um círculo não seja interno ao outro. Existe um caso especial para estes dois círculos?

**Solução:** Antes de ser apresentada uma solução este problema, é importante refletir sobre alguns problemas auxiliares que são os seguintes:

**Problema 1:** Considere um círculo de raio  $r$  e um ponto  $P$  fora do círculo. Construa uma reta  $s$  que passe por  $P$  e seja tangente ao círculo. Para isso considere o problema resolvido na figura abaixo:



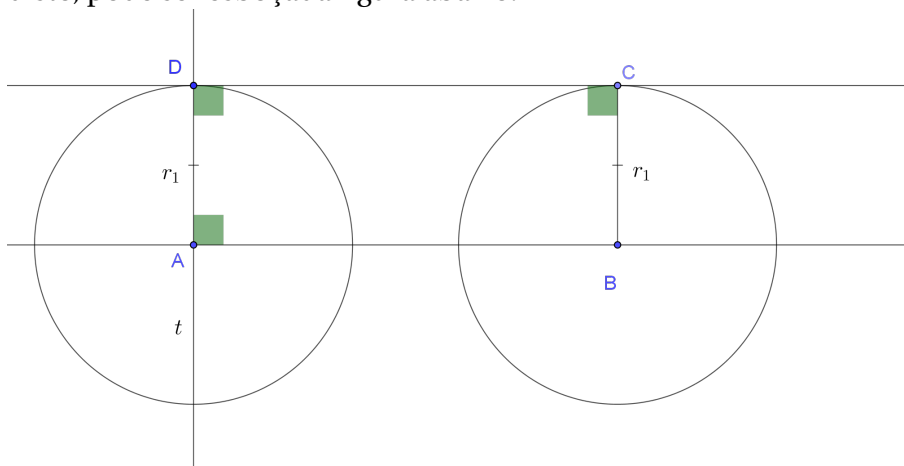
Repare que se  $D$  é o ponto onde a reta  $s$  tangencia o círculo, então o ângulo formado por  $s$  e o raio  $BD$  é reto, isto é,  $P\hat{D}B = 90^\circ$ . Então  $D$  pertence ao círculo de diâmetro  $BP$ . Logo  $D$  deve ser a interseção do círculo de raio  $r$  e do semicírculo de diâmetro  $BP$ . Assim essa reta pode ser construída da seguinte forma:

Primeiro construa, com régua e compasso, o ponto médio do segmento  $BP$  que pode ser chamado de  $C$ .

Após isso, colocando a ponta seca do compasso em  $C$  e abrindo o raio até  $P$ , construa um círculo de raio  $CP$  de centro em  $C$ .

Por fim, considere as intercessões deste último círculo com o círculo de raio  $r$ , que serão dois pontos que podem ser chamados de  $D$  e  $E$ . As retas  $PD$  e  $PE$  são duas retas que passam por  $P$  e são tangentes ao círculo dado no enunciado.

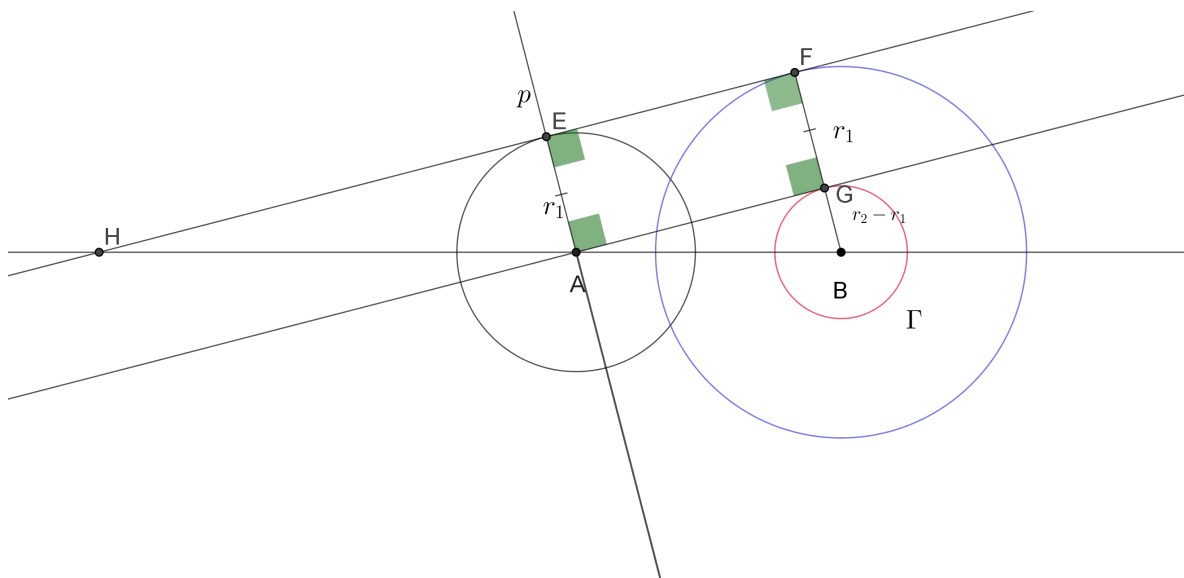
**Problema 2:** Construa uma reta tangente exterior a dois círculos dados com o mesmo raio e com os centros nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. . Neste caso, como  $r_1 = r_2$ , basta tomar a reta determinada pelos centros desses dois círculos, que serão denotados pelos pontos  $A$  e  $B$ , e construir uma reta paralela à reta  $AB$  que esteja a uma distância  $r_1$  desta reta. A partir disto, pode ser esboçada figura abaixo:



Para fazer a construção desta reta paralela, basta traçar uma reta  $t$  perpendicular à reta  $AB$  passando por  $A$ . Após isto, considere um ponto  $D$  em  $t$  que esteja a uma distância  $r_1$  de  $A$ . Finalmente, traçe uma reta perpendicular à reta  $t$  passando por  $D$ . Esta reta será a paralela a  $AB$  que é tangente aos dois círculos dados no enunciado. Pois sendo  $C$  o ponto desta reta que está a uma distância igual a medida de  $AB$  do ponto  $D$  e no mesmo semiplano, definido pela reta  $t$ , em que se encontra o ponto  $B$ , segue que o quadrilátero  $ABCD$  é um retângulo, visto que  $B\hat{A}D = A\hat{D}C = 90^\circ$ . Além disso  $CD = AB$ . Logo  $C$  pertence ao círculo centrado em  $B$ , e a reta  $DC$  é perpendicular aos raios  $AD$  e  $BC$ , portanto essa reta é tangente aos dois círculos.

**Problema 3:** Construa uma reta tangente a dois círculos dados com os centros nos pontos  $A$  e  $B$  e com os raios  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, considerando que  $r_1 \neq r_2$ .

Sem perda de generalidade, pode ser feita a suposição de que  $r_2 > r_1$ . Primeiro construa um círculo  $\Gamma$  de raio  $r_2 - r_1$  e com o centro em  $B$ , como está ilustrado no esboço abaixo:



Para traçar a reta  $EF$  tangente aos dois círculos, primeiro deve ser construída a reta  $AG$  que é tangente ao círculo  $\Gamma$  passando por  $A$ , onde  $G$  é o ponto tangencia entre a reta e o círculo. Isso recai no problema 1 presente na página 52.

Após isso, deve ser traçada uma reta  $p$  perpendicular à reta  $AG$  passando por  $A$ . Marcar-se então um ponto  $E$  como sendo a intercessão da reta  $p$  com o círculo de raio  $r_1$  centrado em  $A$ . Por fim, deve ser construída uma reta paralela à reta  $AG$  passando por  $E$ . Essa reta tangencia o círculo de raio  $r_1$  em  $E$ , e o círculo de raio  $r_2$  em  $F$ .

Agora, para justificar este fato, basta lembrar que a reta  $AG$  é tangente ao círculo de raio  $r_2 - r_1$  em  $G$ . Então  $\widehat{AGB} = 90^\circ$ . Além disso, como  $EF$  é paralela à reta  $AG$  então  $\widehat{EFG} = \widehat{AGB} = 90^\circ$ . Logo pode ser dito que  $EF$  tangencia o círculo de raio  $r_2$  em  $F$ . Além disso, como  $\widehat{AEF} = \widehat{EAG} = 90^\circ$ , então  $EF$  tangencia o círculo de raio  $r_1$  em  $E$ .

Esta construção também prova que o segmento tangente a dois semicírculos com raios distintos é único.

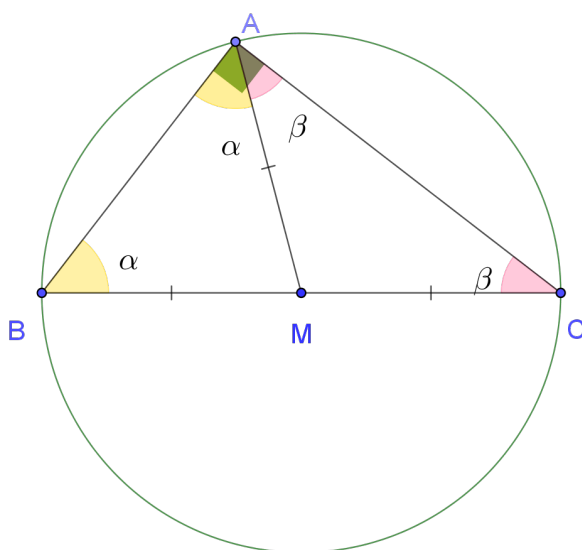
O próximo exmplo foi proposto por POLYA (1954), em [2], p 24

### O Ângulo Central e o Ângulo Inscrito

**Exemplo 5:** Mostre que o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito em um círculo. Observe que uma vez que o ângulo central é determinado, existe varias posições para o ângulo inscrito no círculo. Mas na prova de Euclides, qual é a posição especial do ângulo inscrito no círculo ?

**Solução:** Considere um ângulo  $\hat{B}\hat{A}C$  e  $M$  o centro do círculo. É bem conhecido o fato de que o ângulo  $\hat{B}\hat{A}C$  é inscrito no círculo se e somente se  $BC$  é uma corda deste círculo e  $A$  pertence ao círculo. Agora para se chegar até a solução deste problema, se deve dividi-lo em três casos.

**Caso 1:** Se  $M$  pertence a um dos lados do triângulo  $ABC$ , então, sem perda de generalidade, pode-se supor que ele pertence ao lado  $BC$ . Neste caso  $M$  é o ponto médio de  $BC$ , visto que  $MB$  e  $MC$  são raios como mostra a figura:



Como  $MA = MB$ , então o triângulo  $ABM$  é isósceles e  $\hat{C}\hat{B}A = \hat{M}\hat{A}B$ . Além do mais, como  $MC = MA$  então o triângulo  $ACM$  é isósceles com  $\hat{B}\hat{C}A = \hat{M}\hat{A}C$ . Assim pode ser concluído que:

$$\hat{B}\hat{A}C = \hat{M}\hat{A}B + \hat{M}\hat{A}C = \hat{C}\hat{B}A + \hat{B}\hat{C}A$$

Por outro lado, também é verdade que:

$$\hat{B}\hat{A}C + \hat{C}\hat{B}A + \hat{B}\hat{C}A = 180^\circ$$

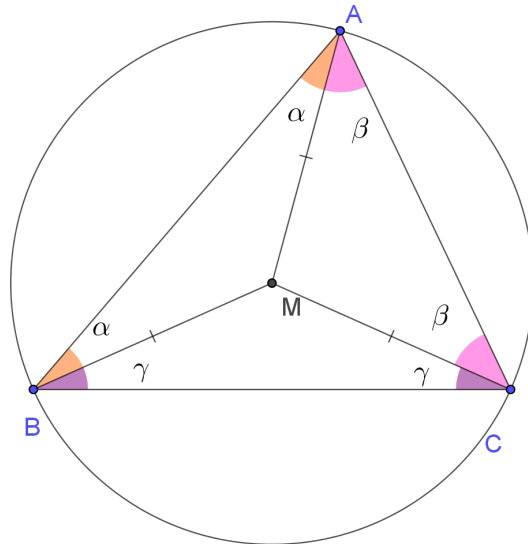
Logo:

$$2\hat{B}\hat{A}C = 180^\circ$$

$$\hat{B}\hat{A}C = 90^\circ$$

Neste caso o triângulo é retângulo em A. E como  $BC$  é diâmetro então  $B\hat{M}C = 180^\circ$  que é exatamente o dobro de  $B\hat{A}C$ .

**Caso 2:** Neste caso,  $M$  está dentro do triângulo  $ABC$ , como mostra a figura:



Como que  $MA = MB$ , conclui-se que o triângulo  $AMB$  é isósceles com  $M\hat{A}B = A\hat{B}M = \alpha$ . E dado que  $AM = MC$ , então o triângulo  $AMC$  também é isósceles e  $A\hat{C}M = M\hat{A}C = \beta$ . Finalmente, também deve ser observado também que o triângulo  $BMC$  é isósceles com  $MB = MC$ , logo:

$$M\hat{B}C = M\hat{C}B = \gamma$$

Assim  $B\hat{A}C = \alpha + \beta$  e olhando para o triângulo  $BMC$  conclui-se que:

$$B\hat{M}C = 180^\circ - 2\gamma$$

Por fim, somando os ângulos no triângulo  $ABC$ , entende-se que:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Leftrightarrow$$

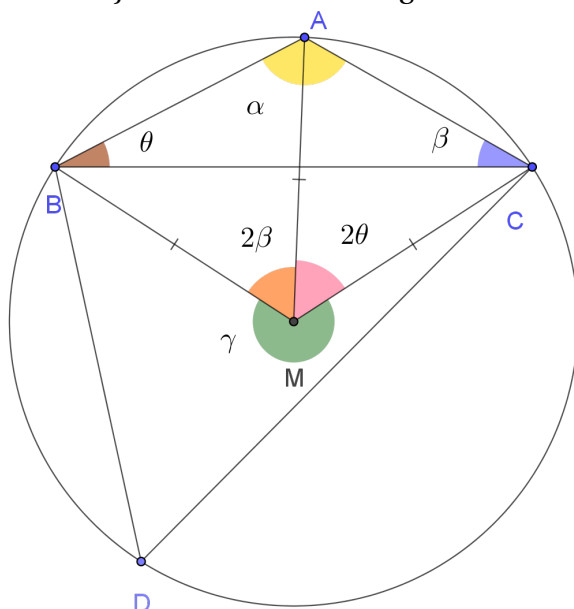
$$\alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$$

Assim conclui-se que:

$$B\hat{M}C = 180^\circ - 2\gamma = 2.(90^\circ - \gamma) = 2.(\alpha + \beta) = 2B\hat{A}C$$

Logo o ângulo central  $B\hat{M}C$  é o dobro do ângulo inscrito  $B\hat{A}C$ . E como  $B\hat{M}C < 180^\circ$  então  $B\hat{A}C < 90^\circ$ . Aplicando o mesmo raciocínio para os demais ângulos teremos um triângulo acutângulo.

**Caso 3:** Neste caso, o ponto  $M$  se encontra fora do triângulo  $ABC$ . Sem perda de generalidade, pode-se supor que  $M$  se encontra no semiplano, definido pela reta  $BC$ , oposto ao que se encontra o ponto  $A$ . Sendo assim, toma-se um ponto  $D$ , no arco não convexo  $\widehat{BC}$ , de modo que  $M$  esteja no interior do triângulo  $BCD$ . Conforme mostra figura:



Pode-se perceber que  $A\hat{M}B$  é o ângulo central do arco  $\widehat{AB}$ , enquanto o ângulo  $A\hat{C}B$  é o ângulo inscrito. Pelo caso caso 2, temos que  $A\hat{M}B = 2A\hat{C}B$ . De forma análoga também se concluir que  $A\hat{M}C = 2A\hat{B}C$ , uma vez que  $A\hat{M}C$  é o ângulo central do arco  $\widehat{AC}$  e  $A\hat{B}C$  é o ângulo inscrito. Agora somando os ângulos no triângulo  $ABC$  se conclui que:

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^\circ$$

$$B\hat{A}C = 180^\circ - A\hat{B}C - A\hat{C}B$$

Denotando o ângulo não convexo  $B\hat{M}C$  por  $\gamma$ , pode se chegar a seguinte expressão:

$$\gamma = 360^\circ - B\hat{M}C = 360^\circ - (A\hat{M}C + A\hat{M}B)$$

$$\gamma = 360^\circ - 2\hat{A}BC - 2\hat{A}CB = 2(180^\circ - \hat{A}BC - \hat{A}CB) = 2\hat{B}AC$$

Logo em qualquer um desses três casos o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito.

## 2.3 Analogia

A palavra analogia deriva do análogo, que significa “parecido ou semelhante”. Segundo POLYA(1954), em [2], p 13, analogia é uma técnica de resolução de problemas que lida com objetos matemáticos que possuem propriedades parecidas, por exemplo, um objeto análogo à esfera é o círculo, já o análogo do cubo é o quadrado e assim sucessivamente.

De acordo com POLYA(1954), [2] analogia é uma semelhança em um nível mais intelectual, e ela se distingue das demais semelhanças por conta dos conceitos claros que dois objetos análogos possuem em comum.

"Analogy is a sort of similarity. It is, we could say, similarity on a more definite and more conceptual level. Yet we can express ourselves a little more accurately. The essential difference between analogy and other kinds of similarity lies, it seems to me, in the intentions of the thinker. Similar objects agree with each other in some aspect. If you intend to reduce the aspect in which they agree to definite concepts, you regard those similar objects as analogots. If you succeed in getting down to clear concepts, you have clarified the analogy"(George POLYA (1954), em [2], p 13.)

Vejamos alguns exemplos de problemas que podem ser resolvidos por analogia.

**Exemplo 1 :** Considere a seguinte teorema: Em um paralelogramo as diagonais se cortam ao meio. Encontre um resultado análogo para a geometria sólida.

É conhecido que o objeto análogo da reta no  $R_3$  é o plano, assim pode-se argumentar que se o paralelogramo é formado por pares de retas paralelas, então o análogo deste no  $R_3$  é um sólido formado por 3 pares de planos paralelos, onde um par de planos é concorrente ao outro par dois a dois. Este poliedro é chamado de paralelepípedo.

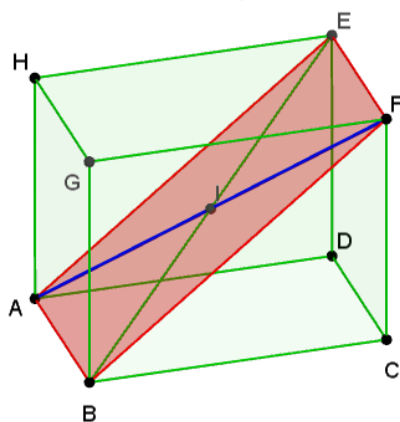


As faces do paralelepípedo são paralelogramos. Pois fixando o plano  $\pi_1$  como sendo um dos seis planos, conclui-se que existem entre os demais planos, dois pares de planos paralelos que irão interceptar  $\pi_1$ , formado com este quatro retas paralelas duas a duas, obtendo assim um paralelogramo.

Agora pode-se definir a diagonal de um paralelepípedo como sendo um segmento cujas extremidades são vértices do paralelepípedo, nos quais não existe nenhuma face deste poliedro que os contém.

Assim com essas definições em mente pode-se dizer que o análogo de um resultado referente às diagonais de um paralelogramo será um resultado referente às diagonais do paralelepípedo. Logo pode-se intuir que o resultado análogo ao descrito acima seria: As quatro diagonais de um paralelepípedo se cortam ao meio.

Observe que aqui foi feita uma conjectura, a partir uma analogia existente entre paralelogramo e paralelepípedo. Mas a partir de agora, será demonstrado este resultado usando a lógica. Para isto considere o paralelepípedo  $ABCDEFGH$  e as diagonais,  $AF$  e  $BE$ , deste paralelepípedo como mostra a figura abaixo:



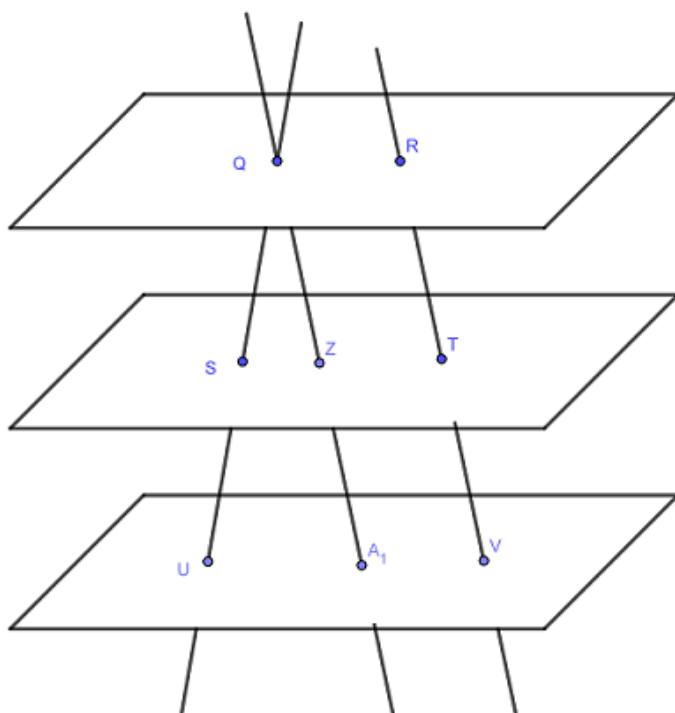
Observe que cada face do paralelepípedo é um paralelogramo então  $AB \parallel HG$  e  $HG \parallel EF$  e pela transitividade se conclui que  $EF \parallel AB$ .

Logo existe um plano que contém as retas  $AB$  e  $EF$  e a interseção deste plano com o paralelepípedo determina o quadrilátero  $AEFB$ . Como a reta  $AB$  é paralela à reta  $EF$  e  $AB = HG = EF$  se conclui que  $ABEF$  é um paralelogramo. Agora como  $AF$  e  $BE$  são as diagonais deste paralelogramo então elas se cortam ao meio. Assim pode-se concluir que este resultado é válido para quaisquer duas diagonais do paralelepípedo.

**Exemplo 2:** "Considere a seguinte propriedade na geometria plana: Duas retas cortam três retas paralelas determinando quatro segmentos proporcionais. Enuncie e prove um teorema análogo a este na geometria sólida" (POLYA (1954), em [2], p 25).

**Solução:** Observe que o análogo da reta no  $R_3$ , pode ser reta ou plano. Sendo assim um teorema que é verdadeiro que análogo ao teorema anterior é: Duas retas cortam 3 planos paralelos determinando quatro segmentos proporcionais.

**Demonstração:** Sejam  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  planos paralelos e  $r$  e  $s$  são retas que interceptam os planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  nos pontos  $Q, S, U$  e  $R, T$  e  $V$ , respectivamente. Agora considere  $Z$  e  $A_1$  pontos escolhidos no planos  $\Pi_2$  e  $\Pi_3$  respectivamente de forma que  $A_1V = TZ = QR$  e além disso, a reta  $A_1V$  é paralela à reta  $ZT$ , que por sua vez é paralela à reta  $QR$ . Conforme mostra a figura:



Observe que o quadrilátero  $QRTZ$  é um paralelogramo, visto que o segmento  $TZ$  é paralelo ao segmento  $QR$  e  $QR = TZ$ , e assim  $QZ = RT$ . Da mesma forma o quadrilátero  $ZTVA_1$  também é um paralelogramo, assim  $A_1Z = TV$ . Mas olhando para o plano que contém os pontos  $Q, U$  e  $A_1$  entende-se que os pontos  $Q, S, U, A_1$  e  $Z$  são todos coplanares sendo que as retas  $QS$  e  $QZ$  são transversais às retas paralelas  $UA_1$  e  $SZ$ . Logo por Tales temos que:

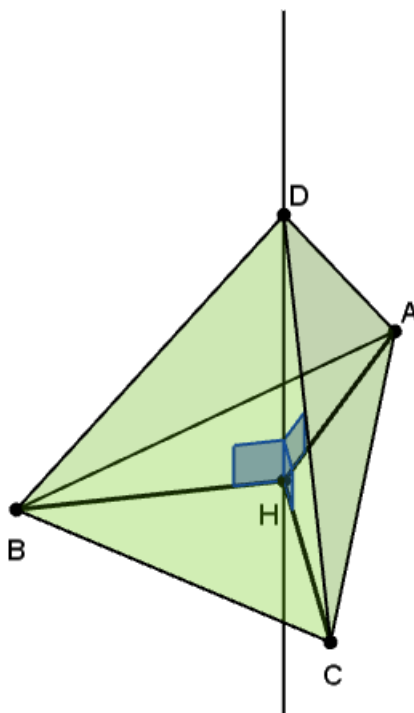
$$\frac{QS}{SU} = \frac{QZ}{ZA_1} = \frac{RT}{TV}$$

Assim a demonstração chegou ao seu fim.

**Exemplo 3:** "Considere a seguinte propriedade na geometria plana: Em um triângulo isósceles a altura relativa ao vértice corta a base no seu ponto médio. Enuncie e demonstre uma propriedade análoga para a geometria sólida" (POLYA (1954), em [2], p 26).

**Solução:** O análogo ao triângulo isósceles no  $R_3$  é uma tetraedro cuja a distância do vértice a cada um dos vértices da base é a mesma. Assim pode ser feita a seguinte conjectura: "Em um tetraedro em que todas as arestas laterais tem o mesmo comprimento, a sua altura passa pelo centro da base."

**Demonstração:** Seja  $ABCD$  um tetraedro de vértice  $D$  e base  $ABC$  e seja  $H$  a projeção ortogonal de  $D$  no plano  $ABC$ , como mostra a figura abaixo:



Como  $DH$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , então  $DH$  é perpendicular a qualquer reta contida neste plano. Logo:

$$D\hat{H}A = D\hat{H}B = D\hat{H}C = 90^\circ$$

Agora observe que as hipotenusas  $AD, BD$  e  $CD$  dos triângulos  $ADH, BDH$  e  $CDH$  são iguais e o cateto  $DH$  é comum aos três triângulos, logo pelo caso especial de congruência, cateto hipotenusa, entende-se que estes três triângulos são congruentes. Logo  $HA = HB = HC$ . Assim  $H$  é o circuncentro.

**Exemplo 4:** Considere a seguinte propriedade na geometria plana: "Um círculo possui uma área igual a área de um triângulo cuja a base tem a mesma medida do perímetro do círculo e cuja a altura igual ao raio deste círculo. Enuncie e verifique uma propriedade análoga para a geometria sólida." (POLYA (1954), em [2], p 25 e 26)

**Solução:** É conhecido o fato de que o objeto análogo do círculo no  $R_3$  é a esfera e o objeto análogo do triângulo é a pirâmide. Assim pode ser dito que o comprimento da base de um triângulo é o análogo à área da base da pirâmide no  $R_3$ . Assim pode ser enunciado o seguinte teorema:

**Teorema:** Uma esfera possui um volume igual ao volume de uma pirâmide cuja a altura é igual ao raio da esfera e a área da base da pirâmide tem a mesma medida da área total da esfera.

**Demonstração:** É sabido que a área da esfera é dada por:

$$A_{esfera} = 4\pi R^2$$

E o volume da pirâmide é:

$$V_{piramide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot R}{3}$$

$$V_{piramide} = \frac{4\pi \cdot R^3}{3} = V_{esfera}$$

Assim a demonstração está finalizada.

### 3 Técnicas de construções geométricas

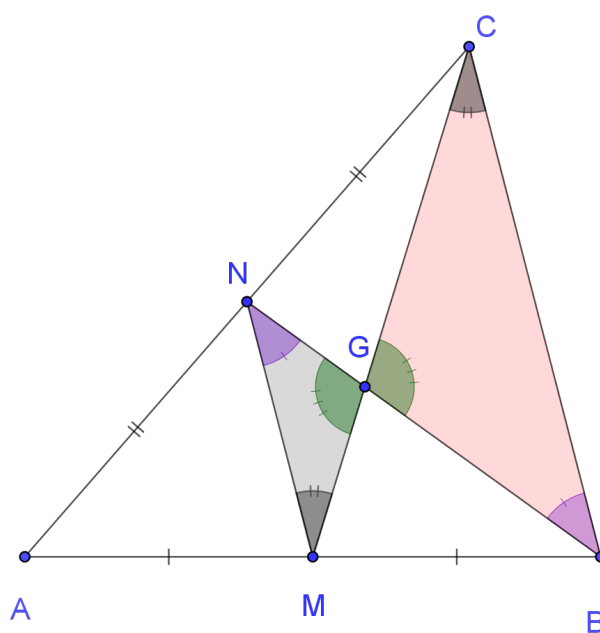
Neste capítulo será abordada uma técnica importante para a resolução de problemas geométricos que envolve construção com régua e compasso. Antes de se fazer uma abordagem desta técnica famosa, será falado um pouco sobre um lema fundamental, que será usado para resolver os exemplos deste capítulo.

**Lema 01:** Dado um triângulo  $ABC$  e sendo  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. E  $G$  é o ponto de interseção dos segmentos  $BN$  e  $CM$ , logo:

$$\frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GM} = 2$$

Em outras palavras, este lema afirma que uma das medianas de um triângulo divide cada uma das outras medianas em dois segmentos na proporção 2 por 1.

**Demonstração:** Observe a figura abaixo:



Nesta figura pode-se perceber que como  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$ , então  $MN$  é uma base média do triângulo  $ABC$ . Pelo teorema da base média entende-se que o segmento  $MN$  é paralelo ao segmento  $BC$  e  $\frac{BC}{MN} = 2$ . Assim  $B\hat{N}M = C\hat{B}N$ , pois são ângulos alternos internos, e  $B\hat{G}C = N\hat{G}M$  pois são opostos pelo vértice  $G$ . Assim os triângulos  $BGC$  e  $NGM$  são semelhantes, pelo caso de semelhança (AA). E vale a seguinte proporção:

$$\frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GM} = \frac{BC}{MN} = 2$$

### 3.1 A Técnica do problema resolvido

Segundo POLYA(1995), em [1], p 104, o grande precursor desta técnica foi Pappus, um grande matemático grego que viveu nos 300 de nossa era. A técnica do problema resolvido consiste em dois processos que nomeados de análise e de síntese. Na análise deve ser admitido que aquilo que se precisa demonstrar ou construir, é algo verdadeiro ou que já tenha sido feito e, a partir disso, deve ser extraídas as consequências e as consequências das consequências até se chegar em um ponto que pode ser usado como ponto de partida. Pappus também chama essa técnica de análise ou raciocínio regressivo.

"Na análise, começamos por aquilo de que se precisa e que admitimos como certo e extraímos consequências disso e consequência das consequências até chegarmos a um ponto que podemos usar como partida da síntese. Por que na análise admitimos que o que precisa ser feito já o foi (o que se procura já foi encontrado, o que se têm a demonstrar é verdadeiro). Indagamos de qual antecedente poderá ser deduzido o resultado desejado: em seguida, indagamos de novo qual poderá ser o antecedente desse antecedente e assim por diante, até chegarmos finalmente a algo que já conhecemos ou que já admitimos como verdadeiro. A este procedimento chamamos análise, ou regressão ou raciocínio regressivo" (POLYA,1995, em [1],p 104)

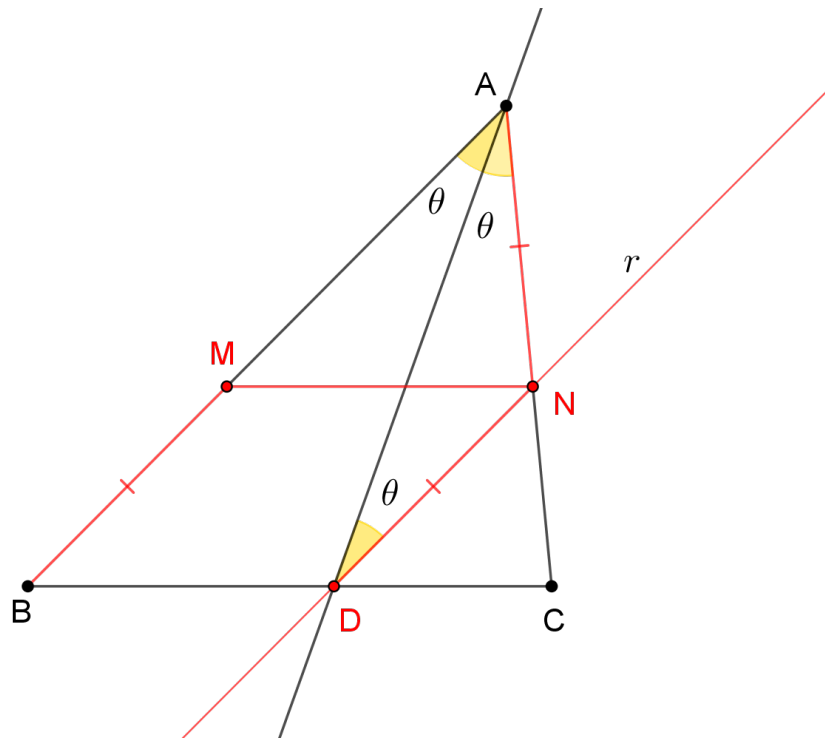
Segundo POLYA(1995), em [1], p 104, após esse procedimento deve-se inverter o processo. A partir do último ponto a que foi chegado na análise, deve deduzir o que o precedeu, e continuando a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, consegue-se chegar aonde se quer. A este último procedimento, dar-se o nome de síntese.

"Mas na síntese, invertemos o processo, partimos do último ponto a que chegamos na análise, daquilo que já sabemos ou admitimos como verdadeiro. Disso deduzimos o que o precedeu na análise e continuamos a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, conseguimos finalmente chegar no aonde queríamos. A este procedimento damos chamamos síntese, ou resolução construtiva ou raciocínio regressivo. " (POLYA,1995, em [1],p 104)

O exemplo a seguir foi proposto por Wagner (2007), em [4], p 21.

**Exemplo 1:** Dado um triângulo  $ABC$ , determine um ponto  $M$  sobre o lado  $AB$  e um ponto  $N$  sobre o lado  $AC$  tais que  $MN$  é paralela a  $BC$  e  $BM = AN$ .

**Solução:** Suponha o problema resolvido, que neste caso é o processo de análise, como mostra a figura.



Pode ser traçada uma reta  $r$  paralela ao segmento  $AB$  passando por  $N$ , de forma que esta reta intercepte o lado  $BC$  em  $D$ . Como o segmento  $MN$  é paralelo ao segmento  $BC$ , por hipótese do problema resolvido, depreende-se que o quadrilátero  $MNDB$  é um paralelogramo. Portanto  $DN = BM = AN$ . Assim o triângulo  $AND$  é isósceles com  $\widehat{NAD} = \widehat{NDA}$ . Mas como a reta  $ND$  é paralela ao segmento  $AB$ , entende-se que os ângulos  $\widehat{NDA}$  e  $\widehat{BAD}$  são alternos internos e por isso:

$$\widehat{BAD} = \widehat{NDA} = \widehat{NAD}$$

Assim  $AD$  é a bissetriz de  $\widehat{BAC}$ , que por sua vez tem uma construção elementar. Assim para determinar as posições dos pontos  $N$  e  $M$ , deve-se construir primeiro a bissetriz do ângulo  $\widehat{BAC}$ . Em outras palavras, essa bissetriz serve como o ponto de partida para a construção dos pontos  $M$  e  $N$ .

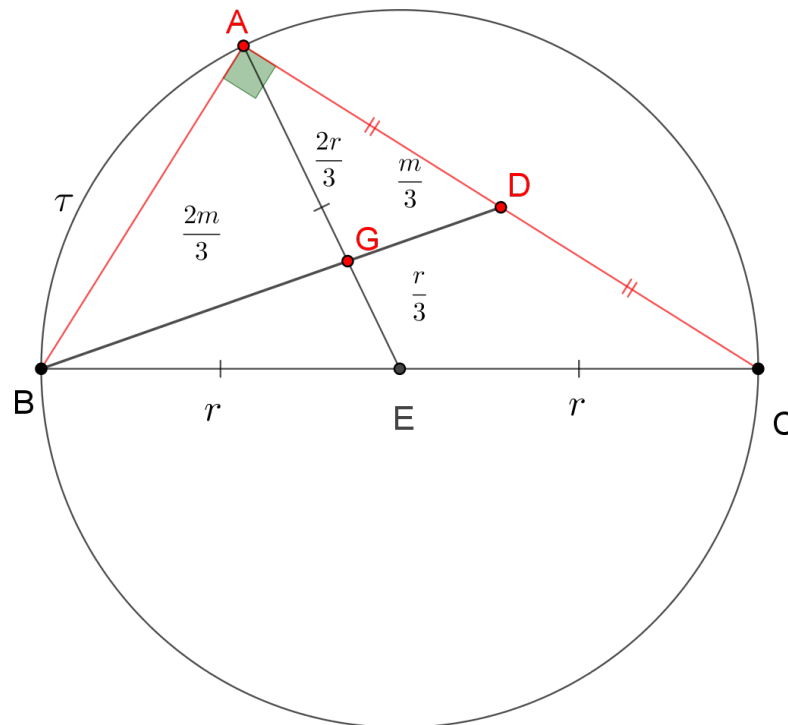
Agora deve-se descrever a construção passo a passo, e este processo é chamado de síntese. Primeiro se constrói a bissetriz do  $\hat{BAC}$  de forma que a sua intercessão com o lado  $BC$  determina o ponto  $D$ . Após isso, deve ser traçada uma reta  $r$  paralela ao lado  $AB$  passando por  $D$ , de forma que  $r$  intercepta o lado  $AC$  em  $N$ . Por fim, desenha-se uma paralela ao lado  $BC$  passando por  $N$ , que irá interceptar o lado  $AB$  em  $M$ . Esses pontos  $M$  e  $N$  satisfazem as condições do enunciado, pois como  $AD$  é bissetriz de  $\hat{BAC}$  então  $\hat{BAD} = \hat{NAD}$ . Todavia, o segmento  $ND$  é paralelo ao  $AB$ , então  $\hat{NDA} = \hat{BAD} = \hat{NAD}$  e portanto o triângulo  $AND$  é isóceles com  $AN = DN$ . Agora como o quadrilátero  $BDMN$  é um paralelogramo então  $BM = DN = AN$  e  $MN$  é paralelo a  $BD$ . Isto termina a construção.

Observe que neste exemplo o ponto de chegada do problema é a posição dos pontos  $M$  e  $N$ . Para obtê-los foi necessário partir do princípio que estes pontos já tenham sido encontrados, e construir, a partir disso, o paralelogramo  $BDMN$ . Este paralelogramo funciona como uma espécie de antecedente para a construção. A partir do paralelogramo  $BDMN$  pode-se concluir que  $AD$  é a bissetriz de  $\hat{BAC}$ . Essa bissetriz foi tomada como ponto de partida para a construção, uma vez que a construção da bissetriz é elementar.

**Exemplo 2:** Construa um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , conhecendo o tamanho da hipotenusa  $BC$  e o tamanho  $m$  da mediana relativa a  $AC$ .

**Solução:** Seja  $D$  o ponto médio do lado  $AC$ , neste caso é conhecido o tamanho da mediana  $BD = m$ , a hipotenusa  $BC$  e o ângulo  $\hat{BAC} = 90^\circ$ . Usando a técnica do problema resolvido pode ser construída a seguinte figura:





Como o ângulo  $B\hat{A}C$  é reto, então o vértice  $A$  está sobre o círculo de diâmetro  $BC$ . Logo se  $E$  é o ponto médio de  $BC$  então  $AE = BE = CE$ . Por outro lado,  $BD$  e  $AE$  são duas medianas do triângulo  $ABC$ , e como cada mediana do triângulo divide qualquer outra mediana em dois segmentos na proporção de 2 está para 1 e sendo  $G$  o ponto de encontro dessas duas medianas então:

$$AG = 2GE$$

$$GE = \frac{AE}{3} = \frac{BE}{3} = \frac{BC}{6}$$

Além disso:

$$BG = 2GD \Leftrightarrow BG = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}m$$

Como é conhecido o tamanho de  $BC$  e de  $BD$ , então também são conhecidos os tamanhos de  $BE$ ,  $GE$  e  $BG$ . Com isso pode ser determinada a posição do ponto  $G$ , pois os lados do triângulo  $BGE$  são todos conhecidos. A partir disso, pode ser realizada a construção do triângulo  $ABC$ , que é na verdade o processo de síntese, da seguinte maneira:

Primeiro deve-se construir o triângulo  $BEG$ , de modo que  $BE = \frac{1}{2}BC$ ,  $GE = \frac{BC}{6}$  e  $BG = \frac{2}{3}m$ . O ponto  $C$  é definido como o simétrico de  $B$  com relação a  $E$ . Assim  $E$  é o ponto médio do

segmento  $BC$ . Após isso, deve ser construído um círculo  $\tau$  de diâmetro  $BC$ . Finalmente, pode ser traçada a semirreta  $EG$  com origem  $E$ . A intercessão desta semirreta com o círculo  $\tau$  será o ponto  $A$ . Assim está construído o triângulo  $ABC$  que o enunciado pede.

Agora será provado que este triângulo  $ABC$  de fato satisfaz as condições do enunciado. Para isto o primeiro fato que deve ser notado é que  $B\hat{A}C = 90^\circ$ , uma vez que  $A$  pertence ao círculo  $\tau$  de diâmetro  $BC$ . Logo  $AE$  é mediana e tem a mesma medida do raio  $BE$  do círculo  $\tau$ , isto é,  $AE = BE = \frac{BC}{2}$ . Portanto:

$$AG + GE = AE = \frac{BC}{2}$$

$$AG + \frac{BC}{6} = \frac{BC}{2}$$

$$AG = \frac{BC}{2} - \frac{BC}{6} = \frac{3BC}{6} - \frac{BC}{6}$$

$$AG = \frac{2BC}{6} = \frac{BC}{3}$$

Portanto:

$$\frac{AG}{GE} = \frac{\frac{BC}{3}}{\frac{BC}{6}} = 2$$

Agora como  $AE$  é uma mediana e  $G$  divide este segmento na proporção de 2 para 1, segue que  $G$  é o baricentro do triângulo. Isso significa que a reta  $BG$  corta  $AC$  no ponto médio  $D$ , e  $G$  divide o segmento  $BD$  também na proporção de 2 para 1. Logo:

$$\frac{BG}{GD} = 2$$

$$GD = \frac{BG}{2} = \frac{BD}{3} = \frac{m}{3}$$

Portanto:

$$BD = BG + GD = \frac{2}{3}m + \frac{m}{3} = m$$

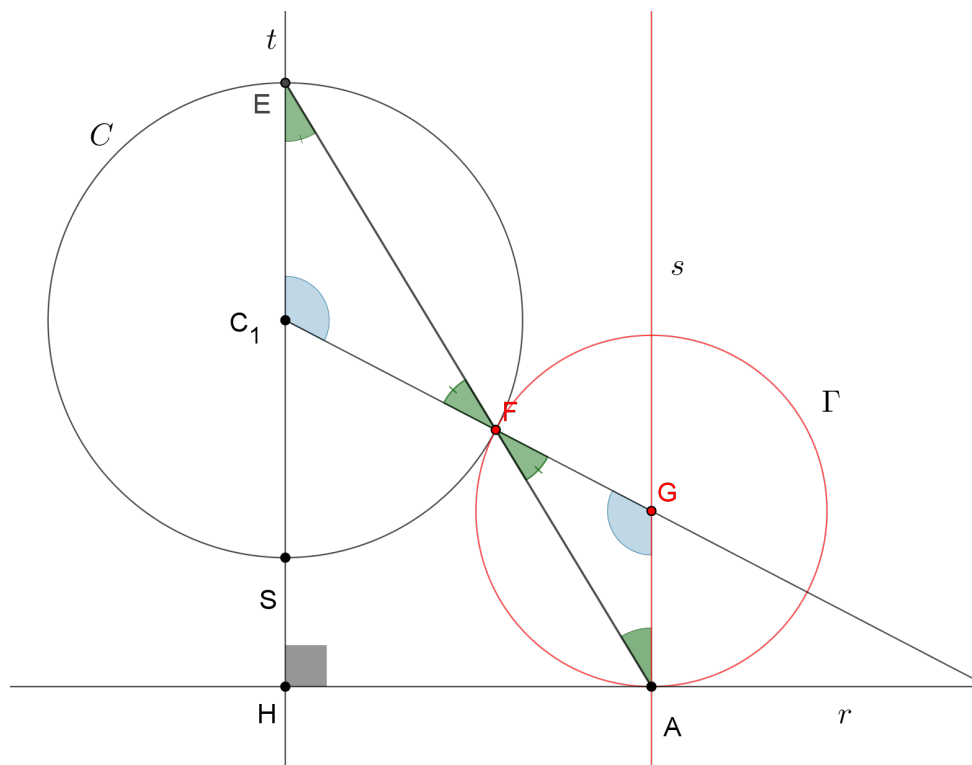
Assim foi concluído que a mediana  $BD$ , tem a mesma medida que foi proposta no enunciado. Logo o triângulo  $ABC$ , assim construído, realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo o ponto  $G$ , que é o baricentro do triângulo  $ABC$ , e o triângulo  $BEG$  são dois antecedentes cruciais para a nossa construção, uma vez que o ponto  $G$  dividi as medianas  $BD$  e  $AE$  na proporção de 1 esta para 2, fazendo com que os lados do triângulo  $BEG$  tenham comprimentos conhecidos, de modo que  $BEG$  seja um triângulo fácil de construir. Assim este triângulo foi tomado como ponto de partida para a construção.

O exemplo a seguir foi dado Wagner(2007), em [4], p 19.

**Exemplo 3:** Dado um círculo  $C$ , uma reta  $r$  exterior a  $C$  e um ponto  $A$  sobre  $r$ . Construa um círculo tangente a  $C$  exteriormente e tangente a reta  $r$  em  $A$ . [3]

**Solução:** Novamente supondo o problema resolvido, que é o processo de análise, pode ser feita a seguinte figura:



Sendo  $C_1$  o centro do círculo  $C$ ,  $G$  o centro do círculo a ser construído que será chamado de  $\tau$  e  $F$  é ponto de tangência entre os dois círculos. Como o círculo  $\tau$  é tangente a  $r$

em  $A$  então  $GA$  é perpendicular à reta  $r$ . A partir disso, pode-se traçar uma reta auxiliar  $t$  paralela à reta  $GA$  passando por  $C_1$ , de forma que esta reta intercepta o círculo  $C$  no ponto  $E$  pertencente ao semiplano definido pela reta  $C_1G$  que não contém o ponto  $A$ . Esta reta  $t$  irá interceptar a reta  $r$  no ponto  $H$ .

Observe que  $A\hat{H}E = 90^\circ$ , visto que a reta  $EH$  é paralela à reta  $GA$  e  $H\hat{A}G = 90^\circ$ . É conhecido também que quando dois círculos são tangentes os seus centros e o ponto de tangência estão alinhados. Logo pode ser percebido que os ângulos  $E\hat{C}_1F$  e  $F\hat{G}A$  são iguais, pois são alternos internos definido pelas retas paralelas  $GA$  e  $HE$  e pela transversal  $C_1G$ . Logo como os triângulos  $C_1EF$  e  $GFA$  são isósceles com  $C_1E = C_1F$  e  $GF = GA$ . Portanto:

$$C_1\hat{F}E = \frac{1}{2}(180^\circ - E\hat{C}_1F) = \frac{1}{2}(180^\circ - F\hat{G}A) = G\hat{F}A$$

Isto mostra que os ângulos opostos pelo vértice  $F$  são iguais e logo os pontos  $E$ ,  $F$  e  $A$  estão alinhados. A partir disso pode ser feita a construção, que é o processo de síntese.

Primeiro deve ser traçada uma reta perpendicular à  $r$  passando por  $C_1$ . Esta perpendicular irá interceptar o círculo  $C$  no ponto  $E$ , que é o ponto do círculo que está mais distante da reta  $r$ . Após isso, será determinado o ponto  $F$  que será a intercessão do círculo  $C$  com o segmento  $EA$ . Finalmente pode-se desenhar uma reta  $s$  perpendicular a reta  $r$  passando por  $A$ . Com isso será determinado o ponto  $G$  que é a intercessão desta reta  $s$  com a reta  $C_1F$ . E assim pode ser obtido o círculo de centro em  $G$  que passa por  $F$ , que se chama  $\Gamma$ , e o problema está resolvido.

Agora será provado que  $\Gamma$  realmente satisfaz as condições do enunciado. Primeiro deve ser observado que o ponto  $F$  faz parte da intercessão dos círculos  $C$  e  $\Gamma$ , e o centro de  $\Gamma$ , que é o ponto  $G$ , está alinhado com o ponto  $F$  e o ponto  $C_1$  que é o centro de  $C$ . Isto faz com que  $\Gamma$  seja tangente a  $C$  em  $F$ .

Além disso, deve ser notado que as retas  $EC_1$  e  $s$  são paralelas, uma vez que ambas são perpendiculares à reta  $r$ . Como elas estão sendo cortadas pela transversal  $EA$ , segue que os ângulos  $C_1\hat{E}F$  e  $F\hat{A}G$  são alternos internos, portanto  $F\hat{A}G = C_1\hat{E}F$ . Mas o triângulo  $C_1EF$  é isósceles com  $C_1E = C_1F$ , isso faz com que  $C_1\hat{E}F = C_1\hat{F}E$ . Por fim, os ângulos  $C_1\hat{F}E$  e  $G\hat{F}A$  são opostos pelo vértice  $F$ , logo  $C_1\hat{F}E = G\hat{F}A$ . Portanto:

$$G\hat{F}A = C_1\hat{F}E = C_1\hat{E}F = F\hat{A}G$$

Com isso, temos que o triângulo  $AFG$  é isósceles com  $AG = FG$ , isto faz com que  $\Gamma$  passe pelo ponto  $A$ . Além disso  $G$ , que é o centro de  $\Gamma$ , está sobre a reta  $s$  que é perpendicular à reta

$r$  em  $A$ , isto é, a reta  $r$  é perpendicular ao raio  $GA$ . Logo  $\Gamma$  é tangente à reta  $r$  em  $A$ . Portanto este círculo realmente satisfaz as condições do enunciado.

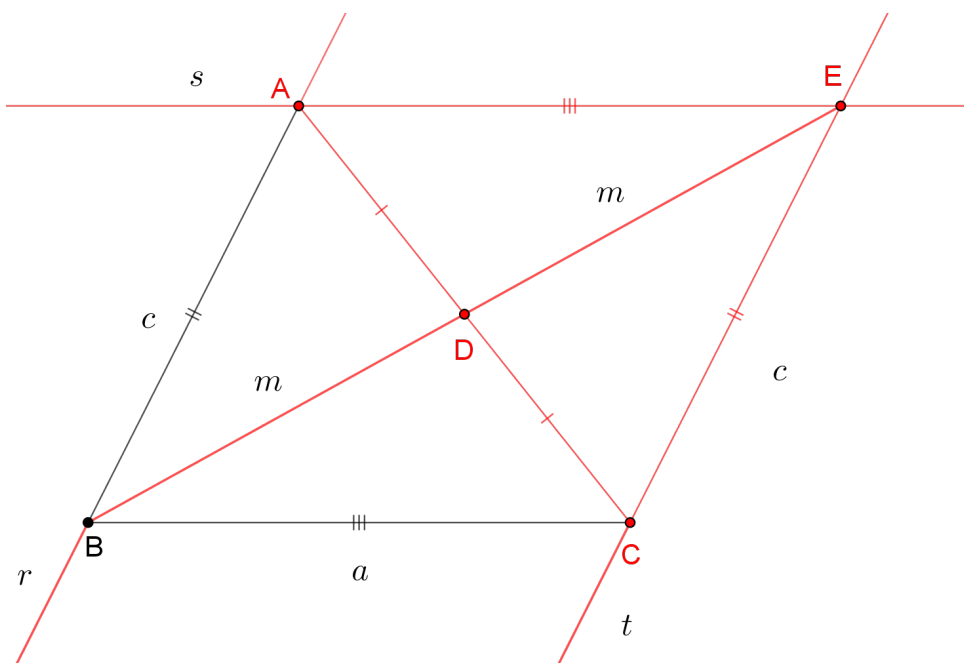
Observe que para o caso em que o ponto  $A$  for pé da perpendicular  $EC_1$ , isto é,  $A = H$  o ponto  $F$  será igual ao ponto  $S$ , onde  $S$  é o ponto diametralmente oposto  $E$  através de  $C$ , e o ponto  $G$  será o ponto médio do segmento  $SA$ .

Neste exemplo, os antecedentes cruciais que serviram como ponto de partida para a construção foram os triângulos isósceles  $C_1FE$  e  $GFA$ , e também o fato de que os pontos  $A, F$  e  $E$  estão alinhados. Este alinhamento permitiu determinar a posição do ponto  $F$ , e consequentemente a posição do ponto  $G$ .

O exemplo a seguir foi um exercício proposto por Wagner (2007), em [4], p 23.

**Exemplo 4:** Construir um triângulo  $ABC$  conhecendo os lados  $AB = c$  e  $BC = a$  e a mediana  $m$  relativa ao lado  $AC$ .

**Solução:** Novamente usando a técnica do problema resolvido, que o POLYA(1995), mencionado em[1], chama de processo de análise, pode ser construída a seguinte figura:



Na figura foi traçada uma reta auxiliar  $t$  paralela ao segmento  $AB$  passando por  $C$ . Após isto, foi determinado um ponto  $E$  sobre esta reta de forma que  $CE = AB$  e os pontos  $E$  e  $A$  se encontram no mesmo semiplano definido pela reta  $BC$ . Observe que o quadrilátero  $ABCE$  é um paralelogramo e portanto suas diagonais se encontram no ponto médio. Logo sendo

$D$  o ponto de intercessão de suas diagonais  $AC$  e  $BE$ , então  $BD$  é mediana do triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $AC$  com  $BD = m$ . Além disso,  $D$  é o ponto médio de  $BE$ , logo  $BE = 2BD = 2m$ . Como são conhecidos o tamanho do lado  $BC = a$ , o tamanho do lado  $AB = c$ , que é o mesmo tamanho do lado  $CE$ , e o tamanho de  $BD = m$ , então o triângulo  $ACE$  tem os seus três lados com medidas conhecidas, uma vez que  $BE = 2m$ . Diante disso a construção é bem simples.

Sobre o segmento  $BC$  dado, pode ser construído o triângulo  $BCE$ , com  $BC = a$ ,  $CE = c$  e  $BE = 2m$ . Após isso, é traçada uma reta  $r$  paralela ao segmento  $EC$  passando por  $B$  e uma reta  $s$  paralela ao segmento  $BC$  passando por  $E$ . A intercessão das retas  $r$  e  $s$  determina o ponto  $A$ .

Agora será mostrado que o triângulo  $ABC$ , assim construído, realmente satisfaz as condições propostas no enunciado. Para isso basta observar que o quadrilátero  $ABCE$  é um paralelogramo, uma vez que  $s$  é paralela ao segmento  $BC$  e  $r$  ao segmento  $CE$ . Isto nos garante que  $AB = CE = c$  e que as diagonais  $AC$  e  $BE$  se cortam no ponto médio, que será nomeado de  $D$ . Logo  $BD$  é mediana relativa ao lado  $AC$  e:

$$BD = \frac{BE}{2} = \frac{2m}{2} = m$$

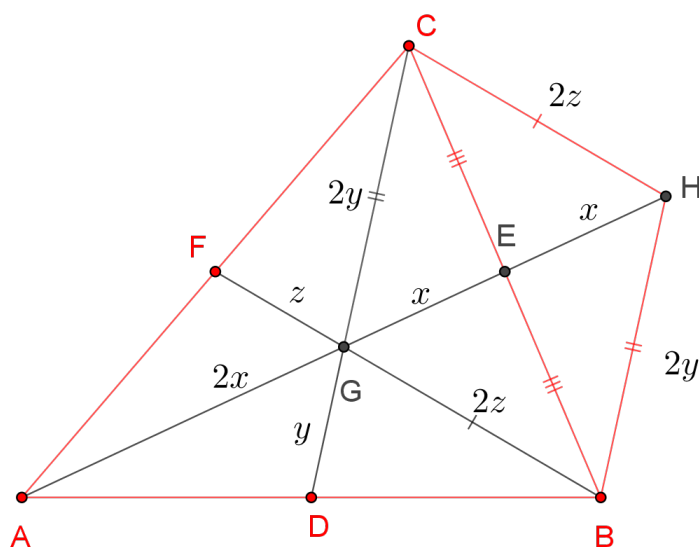
Com isso, o triângulo  $ABC$  realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo os antecedentes cruciais que auxiliaram à construção foram o paralelogramo  $ABCE$  e o triângulo  $BCE$ , que serviu como ponto de partida para a construção uma vez que os seus três lados tinham medidas conhecidas.

O exemplo a seguir foi proposto por Wagner(2007), em [4], p 14.

**Exemplo 5:** Construa um triângulo  $ABC$  conhecendo os tamanhos  $3x, 3y$  e  $3z$  que são os tamanhos das medianas relativas aos lados  $BC, AB$  e  $AC$ , respectivamente.

Considerando a técnica do problema resolvido e sendo  $D, E$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $AB, BC$  e  $AC$ , respectivamente, pode ser esboçada a seguinte figura:



Observe que são conhecidas as medidas dos segmentos  $BF = 3z$ ,  $CD = 3y$  e  $AE = 3x$ , e como cada mediana divide cada uma das demais em dois segmentos em que um é o dobro do outro então  $GE = \frac{1}{3}AE = x$ ,  $CG = \frac{2}{3}CD = 2y$  e  $BG = \frac{2}{3}BF = 2z$ . Tomando um ponto  $H$  sobre a reta  $AE$  de modo que  $GE = EH = x$ , com  $H \neq G$ , entende-se  $E$  é o ponto médio  $GH$ . Como as diagonais  $BC$  e  $GH$ , do quadrilátero  $BGCH$ , se encontram no ponto médio, então este quadrilátero é um paralelogramo.

Logo  $GH = 2GE = 2x$ ,  $CH = BG = 2z$  e  $BH = CG = 2y$ . Assim são conhecidas as medidas dos três lados dos triângulos  $CGH$  e  $BGH$ . A partir disso, pode ser realizada a construção do triângulo  $ABC$  da seguinte maneira:

Primeiro devem ser construídos os triângulos  $BGH$  e  $CGH$ , de modo que  $CH = BG = 2z$ ,  $BH = CG = 2y$  e  $GH = 2x$ , obtendo assim o paralelogramo  $BGCH$ . Após isso, sobre a semirreta  $HG$ , com origem em  $H$ , tome o ponto  $A \neq H$  tal que  $GA = 2x$ . Assim a construção do triângulo  $ABC$  foi terminada.

Agora será mostrado que este triângulo  $ABC$  satisfaz as condições do enunciado. Sendo  $E$  o ponto de interseção das diagonais  $BC$  e  $GH$  do paralelogramo  $BGCH$ , entende-se que  $E$  é o ponto médio dos segmentos  $BC$  e  $GH$ . Sendo assim,  $AE$  é a mediana relativa ao lado  $BC$  e  $GE = \frac{GH}{2} = x$ .

Além disso, é concluído também que  $GA = 2x$ . Portanto  $G$  divide a mediana  $AE$  em dois segmentos,  $AG$  e  $GE$ , cuja a proporção é de 2 para 1. Logo  $G$  é o baricentro do triângulo

*ABC*. Consequentemente:

$$\frac{CG}{GD} = 2$$

$$2GD = CG = 2y$$

$$GD = y$$

Portanto:

$$CD = CG + GD = 2y + y = 3y$$

É válido também que:

$$\frac{BG}{GF} = 2$$

$$2GF = BG = 2z$$

$$GF = z$$

Então:

$$BF = BG + GF = 2z + z = 3z$$

Logo o triângulo *ABC* possui medianas  $AE = 3x$ ,  $CD = 3y$  e  $BF = 3z$ .

Neste exemplo os antecedentes essenciais para a construção foram o paralelogramo *BGCH* e os triângulos *BGH* e *CGH*, que foram utilizados como ponto de partida, uma vez que estes triângulos possuem os seus três lados com medidas conhecidas.

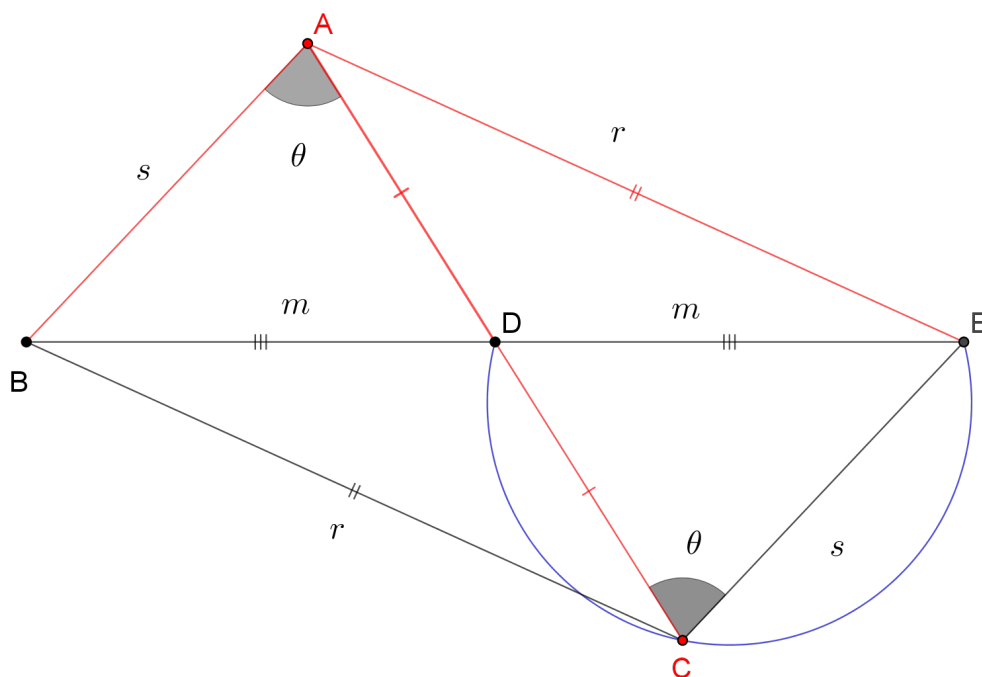
Os três exemplos a seguir são exercícios propostos por Wagner (2007), em [4], p 23 e 24.

**Exemplo 6:** Construa um triângulo *ABC* conhecendo o  $\hat{A} = \theta$ , o lado  $BC = r$  e a mediana  $m$  relativa à base *AC*.

**Solução:**



Considere  $D$  o ponto médio de  $AC$ . São conhecidas as medidas do lado  $BC$ , do ângulo  $B\hat{A}C$  e da mediana  $BD$ . Usando a técnica do problema resolvido, isto é, supondo conhecido o triângulo  $ABC$ , pode ser desenhada a seguinte figura:



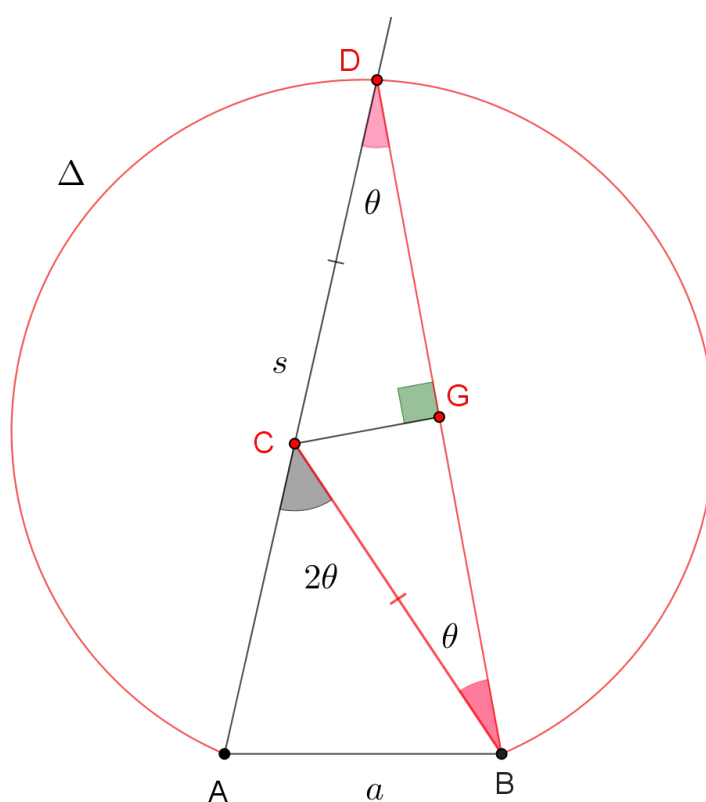
Seja  $E$  o ponto da semirreta  $BD$  de forma que  $D$  é o ponto médio de  $BE$ . Observe que o quadrilátero  $ABCE$  é um paralelogramo, pois as suas diagonais  $AC$  e  $BE$  se encontram no ponto médio  $D$ . Logo  $EC$  é paralelo a  $AB$  e  $B\hat{A}C = D\hat{C}E = \theta$ . Portanto  $C$  pertence ao arco capaz  $\Gamma$  do ângulo  $\theta$  construído sobre o segmento  $DE$ . Por outro lado, como a distância de  $B$  até  $C$  é  $r$ , então  $C$  também pertence ao círculo de centro em  $B$  e raio  $r$ . Logo  $C$  pertence à interseção de  $\Gamma$  com o círculo de centro em  $B$ . Com base nisso podemos construir o triângulo da seguinte maneira.

Dado o segmento  $BD$ , usando o compasso com centro em  $D$ , pode ser marcado o ponto  $E$  sobre a semirreta  $BD$  de forma que  $DE = DB$ . Em seguida, deve ser construído o arco capaz  $\Gamma$  do ângulo  $\theta$  sobre o segmento  $DE$ . A interseção de  $\Gamma$  com o círculo de centro  $B$  e raio  $r$ , determina o ponto  $C$ . Finalmente, pode ser desenhado um círculo com centro  $D$  passando por  $C$ . A interseção deste círculo com a reta  $CD$  determina o ponto  $A$ . Assim o triângulo  $ABC$  está construído. Como os segmentos  $BE$  e  $AC$  se cortam ao meio temos que quadrilátero  $ABCE$  é um paralelogramo, portanto  $B\hat{A}C = D\hat{C}E = \theta$ . O triângulo  $ABC$  assim obtido tem  $BD = m$  como mediana e  $BC = r$  como base e assim ele satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo os antecedentes cruciais na resolução deste problema de construção foram o simétrico do ponto  $B$  com relação ao ponto  $D$ , que foi denominado por  $E$ , o arco capaz do ângulo  $\theta$  construído sobre o segmento  $DE$  e o paralelogramo  $ABCE$ . Todavia foi tomado como ponto de partida, o ponto  $E$ .

**Exemplo 7:** Construa um triângulo  $ABC$  conhecendo o ângulo  $\hat{C} = 2\theta$ , o lado  $AB$  e a soma  $s = AC + BC$ .

**Solução:** Usando a técnica do problema resolvido, isto é, conhecido um triângulo  $ABC$  sujeito as condições do enunciado, pode ser esboçada a seguinte figura:



Neste exemplo deve-se transformar a soma de  $AC$  com  $BC$  em um único segmento. Para isso será considerado um ponto  $D$  sobre o prolongamento do segmento  $AC$ , no sentido de  $A$  para  $C$ , de modo que  $CD = BC$ . Desta forma:

$$AD = AC + CD = AC + BC = s$$

e o triângulo  $DCB$  é isósceles. Como é conhecido o ângulo  $\hat{ACB} = 2\theta$ , que é um ângulo externo ao triângulo  $DCB$ , então pelo teorema do ângulo externo temos que:

$$\hat{BDC} = \hat{CBD} = \frac{1}{2} \hat{ACB} = \theta$$

Logo  $D$  pertence ao arco capaz  $\Delta$  do ângulo  $\theta$  construído sobre o segmento  $AB$ . Além disso, sabe-se que  $AD = s$ . Consequentemente, o ponto  $D$  pertence também ao círculo de centro em  $A$  e raio  $s$ . Sendo assim  $D$  pertence a interseção deste círculo com o arco capaz  $\Delta$ , e isto torna possível a construção do triângulo  $ADB$ . Observe ainda que  $C$  pertence à mediatriz do segmento  $BD$ , visto que  $CD = BC$ . A partir disso, a construção do triângulo  $ABC$ , pode ser feita da seguinte forma:

Construa o arco capaz  $\Delta$  do ângulo  $\theta$  sobre o segmento  $AB$ . Após isso, trace o círculo de centro em  $A$  e raio  $s$  e considere  $D$  como a interseção deste círculo com  $\Delta$ . Finalmente, trace a mediatriz  $m$  do segmento  $BD$  e considere o ponto  $C$  definido pela interseção de  $m$  com o segmento  $AD$ . O triângulo  $ABC$ , assim construído, satisfaz as condições do enunciado.

Para verificar isso basta observar que o triângulo  $BCD$  é isósceles com  $BC = CD$ , pois  $C$  pertence à mediatriz de  $BD$ . Portanto:

$$\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = \theta$$

Agora usando o teorema do ângulo externo pode ser inferido que:

$$\widehat{ACB} = \widehat{CBD} + \widehat{CDB} = 2\theta$$

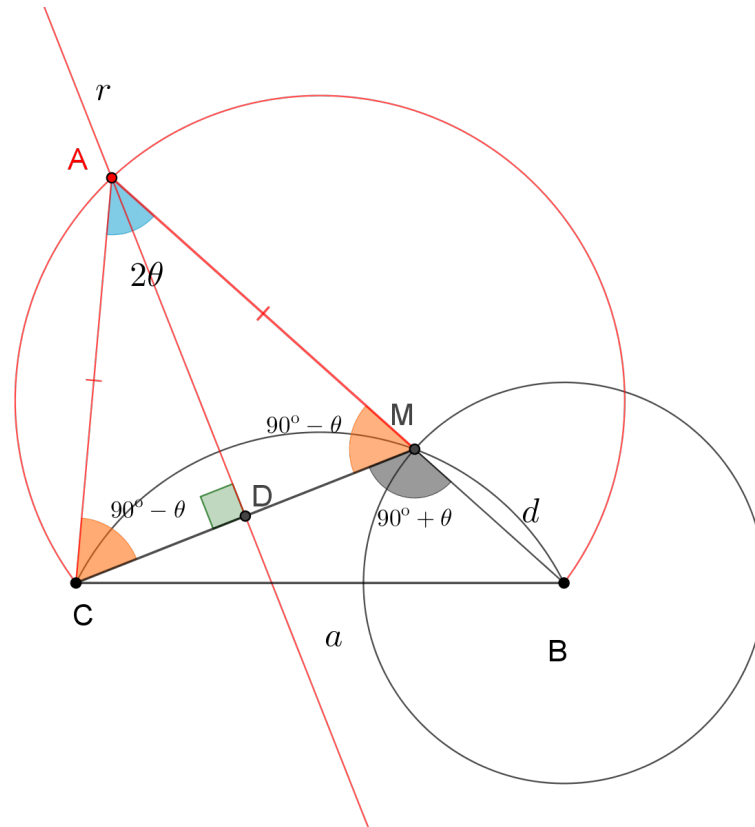
$$AC + CB = AC + CD = AD = s$$

Assim o triângulo  $ABC$  realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo, os antecedentes que ajudaram na construção do triângulo  $ABC$  foram o arco capaz do ângulo  $\theta$  construído sobre o lado  $AB$ , o ponto  $D$  determinado pela interseção deste arco com a reta  $AC$  e o triângulo isósceles  $BCD$ . Todavia o ponto de partida para a construção foi o arco capaz do ângulo  $\theta$  sobre o lado  $AB$ .

**Exemplo 8:** Construa um triângulo  $ABC$ , conhecendo o lado  $BC = a$ , o ângulo  $\hat{A} = 2\alpha$  e a diferença  $d = AB - AC$  com  $AB > AC$ .

**Solução:** Usando a técnica do problema resolvido pode-se construir a figura abaixo:



Nesta figura foi escolhido o ponto  $M$  sobre o lado  $AB$  de tal modo que  $AM = AC$ . Observe que:

$$MB = AB - AM = AB - AC = d$$

Além disso, temos que o triângulo  $ACM$  é isósceles, logo:

$$\widehat{ACM} = \widehat{AMC} = 90^\circ - \alpha$$

Assim  $\widehat{CMB} = 90^\circ + \alpha$ , pois os ângulos  $\widehat{CMB}$  e  $\widehat{AMC}$  são suplementares. Isso faz com que o ponto  $M$  esteja sobre o arco capaz do ângulo  $90^\circ + \theta$  construído sobre o segmento  $BC$ . Por outro lado, como  $BM = d$ , segue que  $M$  também pertence ao círculo com centro em  $B$  e com raio igual a  $d$ . Este fato ajudará a construir o triângulo  $ABC$  de forma mais detalhada a partir de agora.

Primeiro deve ser obtido o ângulo  $\alpha$  a partir da construção da bissetriz do ângulo  $2\alpha$ . Em seguida obtenha o ângulo de  $90^\circ + \alpha$  através do ângulo  $\alpha$ , fazendo uma rotação de  $90^\circ$ . Após isto, pode-se construir o arco capaz do ângulo  $90^\circ + \alpha$  sobre o segmento  $BC$ . A interseção deste arco capaz com o círculo de centro em  $B$  e raio  $d$  determina o ponto  $M$ . Portanto  $BM = d$ .

Agora tome o ponto  $A$  como sendo a intercessão da reta  $BM$  com a mediatriz da reta  $MC$ . Com isto o triângulo  $ABC$  está construído.

Agora será provado que este triângulo obtido na construção de fato satisfaz as condições do enunciado. Para isto deve ser notado que  $A$  está sobre a mediatriz de  $AM$ . Logo  $AC = AM$  e:

$$AB = AM + BM = AC + d$$

$$d = AB - AC$$

Além disso, como  $M$  está sobre o arco capaz do ângulo  $90^\circ + \theta$  construído sobre o segmento  $BC$  então  $\widehat{CMB} = 90^\circ + \theta$ . Consequentemente  $\widehat{AMC} = 90^\circ - \theta$ , pois  $\widehat{CMB}$  e  $\widehat{AMC}$  são ângulos suplementares. Agora como o triângulo  $ACM$  é isósceles com  $AC = AM$  então:

$$\widehat{ACM} = \widehat{AMC} = 90^\circ - \theta$$

Somando os ângulos no triângulo  $ACM$  segue que:

$$\widehat{ACM} + \widehat{BAC} + \widehat{AMC} = 180^\circ$$

$$90^\circ - \theta + \widehat{BAC} + 90^\circ - \theta = 180^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 2\theta$$

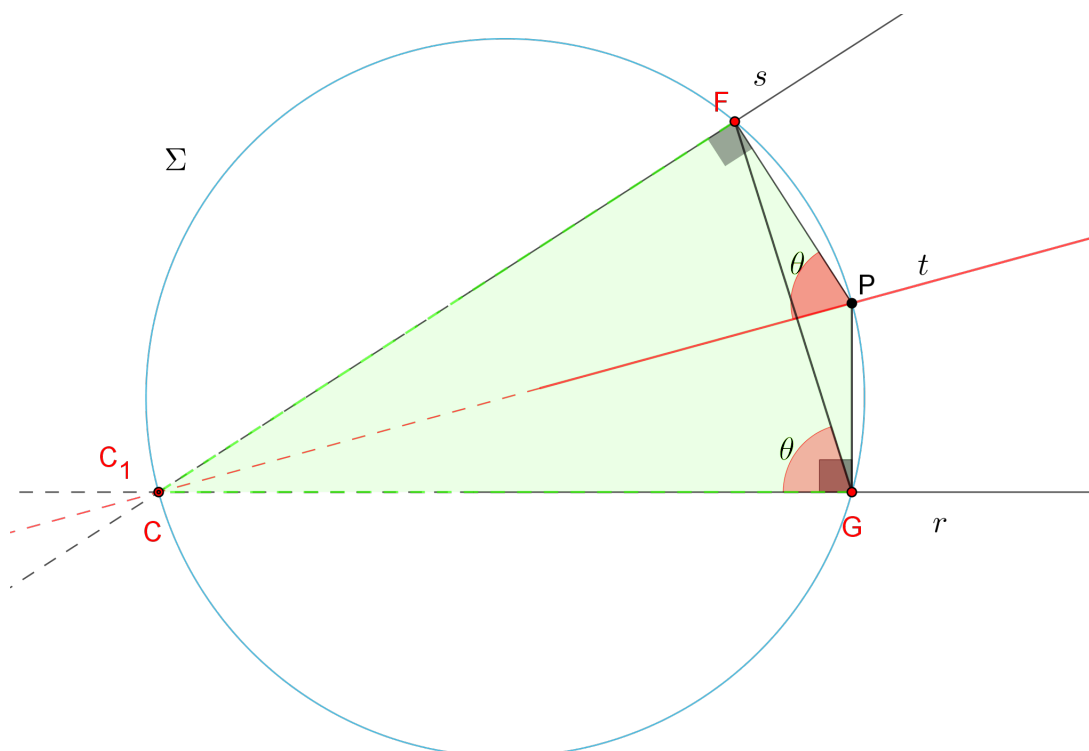
Por fim, deve ser observado que o lado  $BC = a$  por construção. Assim o triângulo  $BAC$  obtido nesta construção realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo, os antecedentes foram o arco capaz do ângulo  $90^\circ + \theta$  construído sobre o lado  $BC$ , o ponto  $M$  e o triângulo isósceles  $ACM$ . Contudo, o ponto de partida para construção foi o arco capaz.

Os dois exemplos a seguir são adaptações dos exercícios propostos por WAGNER (2007), em [4], p 25

**Exemplo 9:** Considere duas retas  $r$  e  $s$  que se encontram em um ponto inacessível  $C$ , e um ponto  $P$  na região delimitada por essas duas retas. Trace uma reta passando por  $P$  e por  $C$ .

**Solução:** Considere o problema o problema resolvido e observe a figura abaixo:



Nesta figura  $F$  e  $G$  são as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $r$  e  $s$ , respectivamente. Logo entende-se que:

$$P\hat{G}C + P\hat{F}C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Portanto o quadrilátero  $CFPG$  é inscritível num círculo  $\Sigma$  e assim pode-se inferir que  $F\hat{P}C = F\hat{G}C = \theta < 90^\circ$ , pois  $\theta$  é um ângulo do triângulo retângulo  $FPC$ . Mas observe que o ângulo  $F\hat{G}C$  é o menor ângulo formado pelas retas  $r$  e  $FG$ . Mas como os pontos  $F$  e  $G$  são pontos conhecidos então a reta  $FG$  está determinada e o ângulo  $F\hat{G}C$  também. Com isso, pode ser feita a construção.

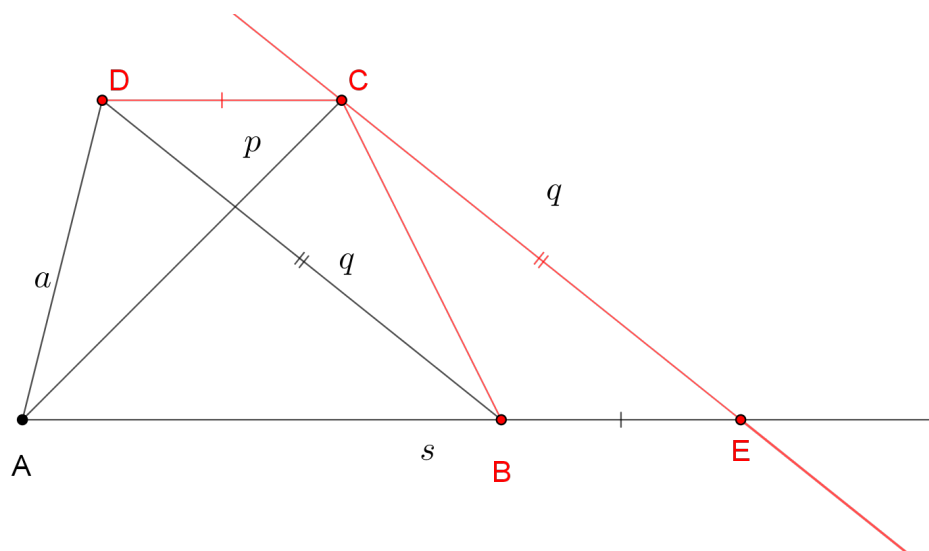
Partindo do ponto  $P$ , trace as retas perpendiculares às retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, determinando o ponto  $F$  sobre  $s$  e o ponto  $G$  sobre  $r$ . Seja  $\theta$  o ângulo agudo formado pelas retas  $r$  e  $FG$ . Passando por  $P$  trace uma reta  $t$  que forma um ângulo  $\theta$  com o segmento  $FP$ , de modo que o ângulo  $\theta$  esteja contido no interior do ângulo  $F\hat{P}G$ .

Será provado agora que esta reta  $t$  satisfaz as condições do enunciado, isto é, a reta  $t$  vai passar pelo ponto  $C$ . Para isso, considere que a reta  $t$  intercepte a reta  $r$  no ponto  $C_1 \neq G$ .

Observe que  $F\hat{P}C_1 = \theta < 90^\circ$ , e este ângulo está contido dentro do ângulo  $F\hat{P}G$ , isto significa que o ponto  $C$  e o ponto  $C_1$  estão no mesmo semiplano definido pela reta  $FG$ , logo  $F\hat{G}C_1 = F\hat{G}C = \theta$ . Portanto  $F\hat{P}C_1 = F\hat{G}C_1$  e com isso  $G$  pertence ao circuncírculo  $\Sigma$  do triângulo  $FPG$ . Agora como  $C\hat{F}P = C\hat{G}P = 90^\circ$ , então  $C\hat{F}P + C\hat{G}P = 180^\circ$ , com isso o quadrilátero  $FCGP$  é inscrito e  $C$  pertence a  $\Sigma$ . Todavia  $C$  e  $C_1$  são pontos da reta  $r$ , portanto  $C$  e  $C_1$  pertencem a interseção de  $r$  com  $\Sigma$ . Mas como  $C$  e  $C_1$  são diferentes de  $G$ , então  $C = C_1$ . Logo a reta  $t$  passa por  $C$ .

**Exemplo 10:** Construa um trapézio conhecendo a soma das bases  $AB + CD = s$ , as diagonais  $AC = p$  e  $BD = q$  e o lado  $AD = a$ .

**Solução:** Considere o problema resolvido e observe a figura abaixo.



Primeiro deve ser traçada uma reta paralela à diagonal  $BD$  passando por  $C$ , de modo que esta reta encontre a reta  $AB$  no ponto  $E$ . Como o segmento  $DC$  é paralelo à reta  $AB$  e a reta  $CE$  é paralela ao segmento  $BD$ , então o quadrilátero  $BDCE$  é um paralelogramo e assim  $BD = CE = q$  e  $BE = DC$ . Logo:

$$AE = AB + BE = AB + DC = s$$

Observe que o triângulo  $ACE$  é fácil de construir, pois conhecemos as medidas dos seus três lados. Este triângulo e o paralelogramo  $BDCE$  funcionam como antecedentes para a construção que será feita a partir de agora.

Primeiro construa o triângulo  $ACE$ , com  $AC = p$ ,  $CE = q$  e  $AE = s$ . A seguir, trace uma reta  $r$ , paralela à reta  $AE$ , passando por  $C$ . A interseção da reta  $r$  com um círculo de centro





## 4 Considerações Finais

Tendo em vista a escassez de materiais voltados para resolução de problemas olímpicos de Matemática é que surge esta dissertação de mestrado. Ela foi elaborada, como um conjunto de unidades didáticas, para servir de material de apoio ao professor e ao estudante do Ensino Básico. Apresentamos e aplicamos algumas técnicas voltadas para a resolução de problemas de Geometria, a saber: técnica do elemento mais nobre, a técnica do problema resolvido, generalização, especialização e analogia e o elemento auxiliar. Estas técnicas foram ilustradas ao longo de três capítulos.

No capítulo 1, tratamos da técnica do elemento mais nobre e da do o elemento auxiliar. No capítulo 2, foram abordados os temas: generalização, especialização e analogia. No terceiro capítulo tratamos da técnica do problema resolvido, também chamada *processo de análise e síntese*, trabalho pioneiro de Pappus de Alexandria. Todos capítulos exploram os conteúdos por meio da resolução detalhada de problemas.

Esperamos que esta dissertação possa contribuir para o processo de Ensino e de Aprendizagem voltados para o treinamento olímpico de estudantes, em diferentes níveis, de maneira que possa motivar a realização de diferentes tipos de trabalho nesta linha de trabalho.

Como trabalhos futuros, pretendemos estudar e aplicar essas e outras técnicas de resolução de problemas nas outras áreas comumente exigidas em competições olímpicas: Álgebra, Aritmética e Combinatória. Nesse sentido, esperamos ampliar o rol temático de abrangência dessa abordagem com intuito de favorecer e motivar o estudo da Matemática por parte dos estudantes e professores.

# Referências Bibliográficas

- [1] POLYA, G.P, A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Modelo Matemático. Segunda Edição. Interciência Ltda, Rio de Janeiro,1995.
- [2] POLYA,G.P, Mathematics And Plausible Reasoning: Induction And Analogy In Mathematics. Princeton University Press London: Geoffrey Cumberlege, Oxford University Press L.C. Card 53-6388, 1954. Disponível para download em: [Induction And Analogy](#). Acesso em: 12 dez 2021
- [3] COXETER,H.G.S. Geometry Revisited. Toronto and New York. The Mathematical Association of América,1967
- [4] WAGNER, E.W, Construções Geométricas. 6º edição, SBM, Rio de Janeiro, 2007.
- [5] INTERNATIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT Of THE TOWNS BOOK 5: Camberra Australia, Editora Australian Mathematics Trust Publishing, 2006.p.13
- [6] PAULO FERREIRA DE ARAUJO, M.P.FA, Geometria-Aula 27,Encontre o ângulo alfa, [www.youtube.com.br](http://www.youtube.com.br). Disponível em:[www.youtube.com/watch?v=3rxPS5V89jo](http://www.youtube.com/watch?v=3rxPS5V89jo). Acesso em :15 de julho 2019.
- [7] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA,36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE-NÍVEL 2, ano 2014, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2014. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>. Acesso em: 05 jan 2019.
- [8] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE-NÍVEL 2, ano 2013, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA,2013.Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>. Acesso em: 05 jan 2019
- [9] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 27º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE – NÍVEL 2, ano 2005, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2005. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/> Acesso em :05 jan 2019

- [10] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 39º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE -NÍVEL 3, ano 2017, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2017. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/> Acesso em :05 jan 2019.
- [11] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 30º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, PRIMEIRA FASE NÍVEL 3, ano 2008, questão 16, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2008. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>. Acesso: 11 dez 2021
- [12] ART OF PROBLEM SOLVING, Sharygin Geometry Olimpiad, Final Round, Grade 8, question 2, ano 2012, ART OF PROBLEM SOLVING, 2012. Disponível em: [Sharygin Geometry 2012](#) Acesso em: 10 dez 2019
- [13] ART OF PROBLEM SOLVING, Iranian Geometry Olimpiad, Intermediate Level, ano 2017, ART OF PROBLEM SOLVING, 2017. Disponível em: [Arte de resolver problemas, AOPS](#). Acesso em 11 dez 2021
- [14] PAPMEM - Julho de 2018 - Geometria Analítica com Vetores, :EDUARDO WAGNER .Disponível em: [www.youtube.com/watch?v=USkxto1ueqI](http://www.youtube.com/watch?v=USkxto1ueqI). Acesso em: 05 de jan 2019.
- [15] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 41º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, Fase Única, Nível 2, Questão 3, ano 2019, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2019. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>. Acesso em: 12 dez 2021.
- [16] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 32º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, Terceira Fase, Nível 2, Questão 2, ano 2010, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2010. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>. Acesso em: 12 dez 2021
- [17] ART OF PROBLEM SOLVING, Tournament Of The Towns, Juniors A Level, Spring (1998), ART OF PROBLEM SOLVING, 1998. Disponível em: [A arte de resolver problemas, AOPS](#). Acesso em: 12 dez 2021
- [18] Art Of Problem Solving, Tournament Of The Towns, Juniors O Level, SPRING (1998), question 2. Art Of Problem Solving. Disponível em: [A arte de resolver problemas, AOPS](#). Acesso em: 12 dez 2021.
- [19] KEOSEREY. FILES, Tournament Of The Towns, Juniors A Level, Fall, ano 1997, KEOSEREY.FILES, 1997. Disponível em: [TOURNAMENT 1997](#) Acesso em: 12 dez 2021

- [20] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 32º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, Segunda Fase, Nível 3, Parte B, Questão 1, ano 2010, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2010. Disponível em: [OBM 2010 nível 3](#). Acesso em: 12 dez 2021.
- [21] ART OF PROBLEM SOLVING, Ibero Abimerican, Problem 2, ano 2018, ART SOLVING PROBLEM, 2018. Disponível em: [Olimpíada Ibero americana](#). Acesso em: 12 dez 2021.
- [22] Olimpíada Brasileira De Matemática, Disponível em: [OBM: Histórico](#). Acesso em: 20 dez 2021.
- [23] FOMIM, D.F, GENKIN, S.G, ITENBERG, I.I, **CÍRCULOS MATEMÁTICOS**, A Experiência Russa, Primeira Edição, Rio de Janeiro, Dona Castorina, 2017
- [24] LOBATO, L.F.L; ANDRADE, G. O. A. DESAFIO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO. Disponível em: [Desafios no aprendizado de geometria](#). Acesso: 21 dez 2021
- [25] FILHO, R.L.B.F, PEREIRA, A.R.S.P, MAIA, E.M.M. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ENSINO MÉDIO, Portal.mec.gov.br. Disponível em: [portal.mec.gov.br](#). Acesso em: 16 de jan de 2022.
- [26] portal.mec.gov.br. NOVO ENSINO MÉDIO. <http://portal.mec.gov.br>. Disponível em: [Novo Ensino Médio](#). Acesso em: 16 de jan de 2022.
- [27] SILVA, R.S.D.S, MARTINEZ, M.L.S.M. DIFICULDADES NA MATEMÁTICA BÁSICA: O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA A VIDA, educere.bruc.com.br, 2017. Disponível em: [Dificuldades na Matemática](#). Acesso em: 16 de jan de 2022.
- [28] LOPES, A.S.L. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO MÉDIO, impa.br, 2013. Disponível em: [Análise de livros didáticos](#). Acesso em: 17 de jan de 2022