



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**RENATO MOREIRA BAIENSE FILHO**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM  
INTERPOLAÇÃO DIRETA REGULARIZADO APLICADO  
A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR COM  
FORÇA DE CORPO**

Vitória, ES  
2022



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**RENATO MOREIRA BAIENSE FILHO**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM  
INTERPOLAÇÃO DIRETA REGULARIZADO APLICADO  
A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR COM  
FORÇA DE CORPO**

Dissertação/Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara  
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Vitória, ES  
2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

B152 m Baiense Filho, Renato Moreira, 1994-  
Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta Regularizado aplicado a problemas de Elasticidade Linear com força de corpo / Renato Moreira Baiense Filho. - 2022.  
133 f. : il.

Orientador: Luciano de Oliveira Castro Lara.  
Coorientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) -  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. MEC com Interpolação Direta Regularizado. 3. Tensor de Galerkin. 4. Teoria da Elasticidade Linear. I. Lara, Luciano de Oliveira Castro. II. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 621

---



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

# MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA REGULARIZADO APLICADO A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR COM FORÇA DE CORPO

**RENATO MOREIRA BAIENSE FILHO**

COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara  
Orientador (PPGEM/UFES)

---

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto  
Co-orientador (PPGEM/UFES)

---

Dr. André Bulcão  
Examinador Externo (CENPES/PETROBRAS)

---

Prof. Dr. João Paulo Barbosa  
Examinador Externo (IFES-São Mateus)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 24 de fevereiro de 2022.

## ASSINATURAS (4)

Documento original assinado eletronicamente, conforme MP 2200-2/2001, art. 10, § 2º, por:

**LUCIANO DE OLIVEIRA CASTRO LARA**

CIDADÃO

assinado em 24/02/2022 14:13:19 -03:00

**CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO**

CIDADÃO

assinado em 24/02/2022 15:25:09 -03:00

**ANDRE BULCAO**

CIDADÃO

assinado em 25/02/2022 08:28:25 -03:00

**JOÃO PAULO BARBOSA**

CIDADÃO

assinado em 24/02/2022 14:56:31 -03:00



### INFORMAÇÕES DO DOCUMENTO

Documento capturado em 25/02/2022 08:28:25 (HORÁRIO DE BRASÍLIA - UTC-3)

por LUCIANO DE OLIVEIRA CASTRO LARA (CIDADÃO)

Valor Legal: ORIGINAL | Natureza: DOCUMENTO NATO-DIGITAL

A disponibilidade do documento pode ser conferida pelo link: <https://e-docs.es.gov.br/d/2022-DFJQKS>

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e ao Senhor Jesus Cristo pela graça e misericórdia que se renovam a cada dia na minha vida e que me conduziram até aqui.

À minha amada esposa, Maria Luiza, que durante toda essa jornada esteve ao meu lado, me apoiando e me dando forças. Obrigado pelo seu amor, carinho e paciência que me dão a paz e a coragem necessárias para enfrentar as batalhas da vida.

Aos meus pais e familiares, que sempre me motivaram a correr atrás dos meus sonhos, me ensinando a ser quem sou hoje. Obrigado pelos ensinamentos e orações que me sustentam diariamente. Agradeço, em especial minha irmã, Priscila, que fez a revisão ortográfica do texto, me ajudando a finalizar essa etapa.

Ao meu orientador, Prof. Luciano, que mesmo nesse momento de crise me deu todo o suporte necessário para o desenvolvimento desse trabalho. Obrigado pela paciência, orientações e companheirismo que permitiram a conclusão dessa dissertação.

Ao meu coorientador, Prof. Loeffler, cuja inteligência e serenidade são inspiradoras. Obrigado pelas ideias que direcionaram essa pesquisa e por todo o conhecimento transmitido durante todo o período do Mestrado.

Ao Thiago Galdino, amigo que ganhei nessa jornada, que sempre prontamente me ajudou quando precisei.

À FAPES, órgão que tem promovido o crescimento da ciência e da pesquisa no Espírito Santo, agradeço o suporte dado para a produção desse trabalho.

*Feliz é o homem que acha sabedoria, e a pessoa que adquire conhecimento.*

*Provérbio de Salomão*

## RESUMO

Os métodos numéricos se tornaram indispensáveis para o progresso e desenvolvimento de conhecimento e tecnologia nas áreas da Ciência e Engenharia. Dentre os diversos métodos já desenvolvidos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem se destacado por sua singularidade e aplicabilidade. Para aumentar o seu campo de atuação, novas técnicas tem sido propostas com a finalidade de aperfeiçoar e expandir esse método, como é o caso do MECID (Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta), que utiliza um processo de interpolação com Funções de Base Radial (FBR) para transformar integrais de domínio em integrais de contorno.

Nesse contexto, o presente trabalho busca aplicar o MECID em problemas elásticos com forças de corpo atuantes, expandindo a área de conhecimento dessa recente técnica. Para isso, são apresentadas as equações governantes da Teoria da Elasticidade, as formulações do MEC para esse tipo de problema, o desenvolvimento matemático do procedimento de interpolação e de regularização do MECID sobre a integral de domínio da força de corpo e também o processo de discretização do contorno que resulta no sistema que é utilizado para a resolução numérica dos problemas elásticos simulados. Testes numéricos com problemas que possuem solução analítica conhecida são utilizados para validar o método e para analisar o comportamento das respostas geradas quando alguns parâmetros do problema são modificados. Além das soluções analíticas, o MECID também é comparado com a clássica técnica do MEC que utiliza o Tensor de Galerkin para transformar a integral de domínio da força de corpo em uma integral de contorno.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Interpolação Direta, Funções de Base Radial, Teoria da Elasticidade, Tensor de Galerkin.



## ABSTRACT

Numerical methods have become indispensable for the progress and development of knowledge and technology in the areas of Science and Engineering. Among the various methods already developed, the Boundary Elements Method (BEM) has stood out for its uniqueness and applicability. To increase its field of action, new techniques, based on the BEM, have been proposed with the purpose of improving and expanding this method, as is the case of the DIBEM (Direct Interpolation Boundary Elements Method), which uses a process of interpolation using Radial Base Functions (RBF) to transform domain integrals into boundary integrals.

In this context, the present work seeks to apply DIBEM in elastic problems with acting body forces, expanding the area of knowledge of this recent technique. For this, the governing equations of the Elasticity Theory, the BEM formulations for this type of problem, the mathematical development of the DIBEM interpolation and regularization procedure on the body force domain integral and also the discretization process are presented. of the contour that results in the system that is used for the numerical solution of the simulated elastic problems. Numerical tests with problems that have a known analytical solution are used to validate the method and to analyze the behavior of the responses generated when some parameters of the problem are modified. In addition to the analytical solutions, the DIBEM is also compared with the classical BEM technique that uses the Galerkin tensor to transform a body force integral into a boundary integral.

Keywords: Boundary Elements Method, Direct Interpolation, Radial Base Functions, Elasticity Theory, Galerkin Tensor.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - (a) Tensões internas; (b) Forças de superfície; (c) Forças de corpo. ....	27
Figura 2.2 - Estado Plano de Tensão .....	31
Figura 2.3 - Estado Plano de Deformação .....	33
Figura 3.1 – Região $\Omega^* + \Gamma^*$ que contém corpo $\Omega + \Gamma$ .....	35
Figura 3.2 - Contorno discretizado .....	41
Figura 3.3 - Elemento linear .....	41
Figura 3.4 - Coordenada adimensional .....	42
Figura 3.5 - Nó duplo .....	44
Figura 4.1 - Velocidades angulares para problemas bidimensionais .....	51
Figura 5.1 - Localização dos pontos no contorno e no interior do domínio .....	66
Figura 6.1 - Barra esbelta vertical com força gravitacional constante .....	68
Figura 6.2 - Barra esbelta horizontal com força centrífuga .....	74
Figura 6.3 - Barra quadrada vertical com força gravitacional variando linearmente .....	85
Figura 6.4 - Disco em rotação .....	91
Figura D.1 - Malhas para a barra esbelta vertical com (a) 24 elementos de contorno (b) 48 elementos de contorno (c) 120 elementos de contorno (d) 240 elementos de contorno .....	117
Figura D.2 – Distribuição dos pontos internos para a barra esbelta vertical com (a) 12 pontos internos (b) 57 pontos internos (c) 120 pontos internos .....	118
Figura D.3 - Malhas para a barra esbelta horizontal com (a) 24 elementos de contorno (b) 48 elementos de contorno (c) 120 elementos de contorno (d) 240 elementos de contorno .....	118
Figura D.4 – Distribuição dos pontos internos para a barra esbelta horizontal com (a) 12 pontos internos (b) 57 pontos internos (c) 120 pontos internos .....	119
Figura D.5 - Malhas para a barra quadrada vertical com (a) 32 elementos de contorno (b) 64 elementos de contorno (c) 128 elementos de contorno .....	120
Figura D.6 – Distribuição dos pontos internos para a barra quadrada vertical com (a) 9 pontos internos (b) 49 pontos internos (c) 121 pontos internos .....	121
Figura D.7 - Malhas para o disco em rotação com (a) 30 elementos de contorno (b) 75 elementos de contorno (c) 118 elementos de contorno .....	122
Figura D.8 – Distribuição dos pontos internos para o disco em rotação com (a) 9 pontos internos (b) 25 pontos internos (c) 81 pontos internos e (d) 121 pontos internos .....	123

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 6.1 - Deslocamentos verticais para força de corpo constante usando Tensor de Galerkin com $K = 0$ .....	69
Gráfico 6.2 - Deslocamentos verticais para força gravitacional constante usando Tensor de Galerkin com $K = 1$ .....	70
Gráfico 6.3 - Deslocamentos horizontais para força gravitacional constante usando Tensor de Galerkin com $K = 0$ .....	70
Gráfico 6.4 - Deslocamentos horizontais para força gravitacional constante usando Tensor de Galerkin com $K = 1$ .....	71
Gráfico 6.5 - Deslocamentos verticais para força gravitacional constante usando MECID ....	72
Gráfico 6.6 - Deslocamentos horizontais para força gravitacional constante usando MECID	72
Gráfico 6.7 - Deslocamentos horizontais do Tensor de Galerkin para força centrífuga na barra esbelta.....	75
Gráfico 6.8 - Deslocamentos horizontais com MECID com 24 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta.....	77
Gráfico 6.9 - Deslocamentos horizontais com MECID com 48 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta.....	77
Gráfico 6.10 - Deslocamentos horizontais com MECID com 120 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta.....	78
Gráfico 6.11 - Deslocamentos horizontais com MECID com 240 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta.....	78
Gráfico 6.12 - Deslocamentos horizontais com MECID com 24 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta.....	79
Gráfico 6.13 - Deslocamentos horizontais com MECID com 48 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta.....	79
Gráfico 6.14 - Deslocamentos horizontais com MECID com 120 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta.....	80
Gráfico 6.15 - Deslocamentos horizontais com MECID com 240 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta.....	80
Gráfico 6.16 - Deslocamentos horizontais com MECID com 24 elementos de contorno para FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta.....	81
Gráfico 6.17 - Deslocamentos horizontais com MECID com 48 elementos de contorno para FBR cúbica e para força centrífuga na barra esbelta.....	81

Gráfico 6.18 - Deslocamentos horizontais com MECID com 120 elementos de contorno para FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta.....	82
Gráfico 6.19 - Deslocamentos horizontais com MECID com 240 elementos de contorno para FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta.....	82
Gráfico 6.20 – EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta .....	83
Gráfico 6.21 - EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta.....	84
Gráfico 6.22 - Deslocamentos verticais do Tensor de Galerkin para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	85
Gráfico 6.23 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,5$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada	86
Gráfico 6.24 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,5$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada .....	87
Gráfico 6.25 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,56$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada .....	88
Gráfico 6.26 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,56$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada ....	89
Gráfico 6.27 – EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR radial simples para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	90
Gráfico 6.28 - EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada .....	91
Gráfico 6.29 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o Tensor de Galerkin com $\nu = 0$ .	93
Gráfico 6.30 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o Tensor de Galerkin com $\nu = 0,1$ .....	94
Gráfico 6.31 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o Tensor de Galerkin com $\nu = 0,2$ .....	94
Gráfico 6.32 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o Tensor de Galerkin com $\nu = 0,3$ .....	94
Gráfico 6.33 - Deslocamentos em $x_1$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0$ .....	95

Gráfico 6.34 - Deslocamentos em $x_1$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0,1$ .....	96
Gráfico 6.35 - Deslocamentos em $x_1$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0,2$ .....	96
Gráfico 6.36 - Deslocamentos em $x_1$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0,3$ .....	96
Gráfico 6.37 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0$ .....	97
Gráfico 6.38 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0,1$ .....	98
Gráfico 6.39 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0,2$ .....	98
Gráfico 6.40 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e $\nu = 0,3$ .....	98
Gráfico 6.41 - Deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o MECID com FBR placa fina, 30 elementos de contorno e $\nu = 0,3$ .....	102
Gráfico 6.42 - EMR dos deslocamentos radiais à $45^\circ$ da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e $\nu = 0$ .....	102
Gráfico 6.43 - EMR dos deslocamentos radiais à $45^\circ$ da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e $\nu = 0,1$ .....	103
Gráfico 6.44 - EMR dos deslocamentos radiais à $45^\circ$ da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e $\nu = 0,2$ .....	103
Gráfico 6.45 - EMR dos deslocamentos radiais à $45^\circ$ da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e $\nu = 0,3$ .....	103
Gráfico E.1 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR radial simples com $C = 0,50, 0,55$ e $0,60$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	124
Gráfico E.2 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,50, 0,55$ e $0,60$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	125
Gráfico E.3 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,53, 0,54, 0,55, 0,56$ e $0,57$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	125

Gráfico E.4 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR placa fina com $C = 0,50, 0,55$ e $0,60$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	126
Gráfico E.5 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,50, 0,55$ e $0,60$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	126
Gráfico E.6 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,53, 0,54, 0,55, 0,56$ e $0,57$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	127
Gráfico E.7 – Deslocamentos radiais à $45^\circ$ do MECID com 118 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR placa fina com $C = 0,50, 0,40$ e $0,30$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0$ .....	128
Gráfico E.8 – EMR dos deslocamentos radiais a $45^\circ$ do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,50, 0,40$ e $0,30$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0$ .....	128
Gráfico E.9 – EMR dos deslocamentos radiais a $45^\circ$ do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,30, 0,33, 0,34$ e $0,35$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0$ .....	129
Gráfico E.10 - Deslocamentos radiais a $45^\circ$ do MECID com 118 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR placa fina com $C = 0,50, 0,40$ e $0,30$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0$ .....	129
Gráfico E.11 – EMR dos deslocamentos radiais do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,50, 0,40$ e $0,30$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0$ .....	130
Gráfico E.12 – EMR dos deslocamentos radiais a $45^\circ$ do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,30, 0,33, 0,34$ e $0,35$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0$ .....	130
Gráfico E.13 – EMR dos deslocamentos radiais a $45^\circ$ do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,32, 0,33$ e $0,34$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0,1$ .....	131
Gráfico E.14 – EMR dos deslocamentos radiais a $45^\circ$ do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,32, 0,33$ e $0,34$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0,1$ .....	131

Gráfico E.15 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,31, 0,32$ e $0,33$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0,2$ .....	132
Gráfico E.16 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,31, 0,32$ e $0,33$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0,2$ .....	133
Gráfico E.17 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com $C = 0,30, 0,31$ e $0,32$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0,3$ .....	134
Gráfico E.18 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com $C = 0,30, 0,31$ e $0,32$ para força centrífuga no disco em rotação com $v = 0,3$ .....	134

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Funções de base radial e suas primitivas .....	57
Tabela 6.1 - EMR dos deslocamentos para MECID com 48 elementos de contorno e variação de pontos internos para força gravitacional constante.....	72
Tabela 6.2 - EMR dos deslocamentos verticais para força gravitacional constante.....	73
Tabela 6.3 - EMR dos deslocamentos horizontais para força gravitacional constante .....	74
Tabela 6.4 - EMR dos deslocamentos horizontais do Tensor de Galerkin para força centrífuga na barra esbelta .....	75
Tabela 6.5 - EMR dos deslocamentos horizontais do MECID com FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta.....	76
Tabela 6.6 - EMR dos deslocamentos horizontais do MECID com FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta .....	78
Tabela 6.7 - EMR dos deslocamentos horizontais do MECID com FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta .....	80
Tabela 6.8 - EMR dos deslocamentos horizontais do Tensor de Galerkin para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	85
Tabela 6.9 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR radial simples com $C = 0,5$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	87
Tabela 6.10 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR placa fina com $C = 0,5$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	87
Tabela 6.11 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR radial simples com $C = 0,56$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	89
Tabela 6.12 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR placa fina com $C = 0,56$ para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada.....	89
Tabela 6.13 - EMR dos deslocamentos no eixo $x_1$ para a técnica do Tensor de Galerkin com coeficiente de Poisson igual à 0, 0,1, 0,2 e 0,3 .....	93
Tabela 6.14 – EMR dos deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o Tensor de Galerkin....	93
Tabela 6.15 - Deslocamentos no eixo $x_1$ para o MECID com FBR radial simples e 118 elementos de contorno .....	97
Tabela 6.16 – EMR dos deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o MECID com FRB radial simples e $\nu = 0$ .....	99
Tabela 6.17 - EMR dos deslocamentos na direção radial a $45^\circ$ para o MECID com FRB radial simples e $\nu = 0,1$ .....	99



Tabela 6.18 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB radial simples e $\nu = 0,2$ .....	99
Tabela 6.19 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FBR radial simples e $\nu = 0,3$ .....	99
Tabela 6.20 – EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB placa fina e $\nu = 0$ .....	100
Tabela 6.21 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB placa fina e $\nu = 0,1$ .....	100
Tabela 6.22 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB placa fina e $\nu = 0,2$ .....	101
Tabela 6.23 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FBR placa fina e $\nu = 0,3$ .....	101

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

MDF – Método das Diferenças Finitas

MVF – Método dos Volumes Finitos

MEF – Método dos Elementos Finitos

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MECDR – Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade

MECMR – Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade

MECID – Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta

FBR – Função de Base Radial

EPT – Estado Plano de Tensão

EPD – Estado Plano de Deformação

NPG – Número de Pontos de Gauss

FORTRAN – Fórmula Translation

EMR – Erro médio relativo

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões
$\sigma_{kk}$	Traço do tensor de tensões
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$\varepsilon_{kk}$	Traço do tensor de deformações
$p_j$	Força de superfície
$b_j$	Força de corpo
$n_i$	Vetor normal
$\Omega$	Domínio do corpo
$\Gamma$	Contorno do corpo
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$E$	Módulo de Elasticidade
$\mu$	Constante de Lamé
$\lambda$	Constante de Lamé
$G$	Módulo de cisalhamento
$\gamma_{xy}$	Deformação angular
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$x_i$	Vetor diretor
$\Omega^*$	Domínio infinito
$\Gamma^*$	Contorno infinito
$e_j$	Vetor unitário na direção ortogonal
$\Delta(\xi, X)$	Delta de Dirac
$\xi$	Ponto fonte
$X$	Ponto Geométrico Genérico
$u_{ij}^*(\xi, X)$	Solução fundamental dos deslocamentos
$p_{ij}^*(\xi, X)$	Solução fundamental das forças de superfície
$c_{ij}(\xi)$	Matriz dos coeficientes da posição do ponto $\xi$
$G_{ij}^*$	Tensor de Galerkin
$F_{ij}^*$	Primitiva do Tensor de Galerkin
$K$	Constante do Tensor de Galerkin
$C$	Constante de translação de corpo rígido

$r$	Distância euclidiana
$\Gamma_e$	Elemento de contorno
$\phi_m$	Função de interpolação
$\zeta$	Coordenada adimensional
$\hat{h}_{ij}^m$	Submatriz dos deslocamentos
$g_{ij}^m$	Submatriz das forças de superfície
$\zeta_q$	Pontos de Gauss
$w_q$	Peso de Gauss
$J_e$	Jacobiano
$\Gamma_u$	Contorno com condição essencial
$\Gamma_p$	Contorno com condição natural
$\bar{u}_i$	Condição essencial prescrita (Newmann)
$\bar{p}_i$	Condição natural prescrita (Dirichlet)
$\alpha_j^k$	Vetor dos coeficientes correspondentes à função de interpolação
$F^k(X^k, X)$	Função de interpolação
$X^k$	Pontos base
$\Psi^k(X^k, X)$	Primitiva da função de interpolação
$\eta_{pi}^k(X^k, X)$	Derivada direcional da função de interpolação
$\xi_{A_i}$	Vetor de Interpolação
$B_i$	Vetor força de corpo
$P_{ij}(\xi, X)$	Tensor de Galerkin da regularização
$N$	Matriz da derivada direcional da função de interpolação discretizada
$F$	Matriz função de interpolação
$[F]^{-1}$	Inversa da matriz função de interpolação
$\xi_{\Lambda}$	Matriz das soluções fundamentais dos deslocamentos
$S$	Matriz produto
$\xi_{Z_i}$	Vetor da regularização
$H$	Matriz dos deslocamentos
$G$	Matriz das forças de superfície
$M$	Matriz das forças de corpo

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>22</b>
1.1	INTRODUÇÃO GERAL .....	22
1.2	OBJETIVOS E METODOLOGIA .....	24
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	25
<b>2</b>	<b>TEORIA DA ELASTICIDADE .....</b>	<b>26</b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	26
2.2	EQUAÇÕES GOVERNANTES .....	27
2.3	ESTADO PLANO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO.....	29
<b>2.3.1</b>	<b><i>Equações de compatibilidade</i></b> .....	29
<b>2.3.2</b>	<b><i>Estado Plano de Tensão</i></b> .....	30
<b>2.3.3</b>	<b><i>Estado Plano de deformação</i></b> .....	33
<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE LINEAR.....</b>	<b>35</b>
3.1	EQUAÇÃO INTEGRAL .....	35
3.2	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS .....	39
3.3	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL.....	40
3.4	SIMULAÇÃO DE DESCONTINUIDADES .....	44
<b>4</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM TENSOR DE GALERKIN .....</b>	<b>46</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	46
4.2	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DOS DESLOCAMENTOS.....	47
4.3	FORÇA GRAVITACIONAL CONSTANTE .....	49
4.4	FORÇA CENTRÍFUGA.....	50
4.5	FORÇA GRAVITACIONAL VARIANDO LINEARMENTE .....	54
4.6	DISCRETIZAÇÃO DA INTEGRAL DA FORÇA DE CORPO .....	54
<b>5</b>	<b>MÉTODO DA INTERPOLAÇÃO DIRETA APLICADA À ELASTICIDADE LINEAR.....</b>	<b>55</b>
5.1	PROCEDIMENTO DE INTERPOLAÇÃO .....	55
5.2	PROCEDIMENTO DE REGULARIZAÇÃO .....	58
5.3	PROCEDIMENTO DE DISCRETIZAÇÃO .....	61
<b>6</b>	<b>TESTES NUMÉRICOS.....</b>	<b>67</b>
6.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	67
6.2	BARRA ESBELTA VERTICAL COM FORÇA GRAVITACIONAL CONSTANTE .....	68
<b>6.2.1</b>	<b><i>Técnica do Tensor de Galerkin</i></b> .....	69
<b>6.2.2</b>	<b><i>MECID</i></b> .....	71

6.2.3	<i>Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin</i>	73
6.3	BARRA ESBELTA HORIZONTAL COM FORÇA CENTRÍFUGA	74
6.3.1	<i>Técnica do Tensor de Galerkin</i>	75
6.3.2	<i>MECID</i>	76
6.3.3	<i>Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin</i>	82
6.4	BARRA QUADRADA VERTICAL COM FORÇA GRAVITACIONAL VARIANDO LINEARMENTE	84
6.4.1	<i>Técnica do Tensor de Galerkin</i>	85
6.4.2	<i>MECID</i>	86
6.4.3	<i>Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin</i>	90
6.5	DISCO COM FORÇA CENTRÍFUGA	91
6.5.1	<i>Técnica do Tensor de Galerkin</i>	92
6.5.2	<i>MECID</i>	95
6.5.3	<i>Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin</i>	102
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>104</b>
7.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	104
7.2	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	105
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>106</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>110</b>
	<i>APÊNDICE A – Funções de interpolação primitiva e suas derivadas direcionais</i>	110
	<i>APÊNDICE B – Integral de contorno da constante C</i>	114
	<i>APÊNDICE C – Solução analítica dos deslocamentos para a força gravitacional variando linearmente</i>	115
	<i>APÊNDICE D – Malhas utilizadas nas simulações</i>	117
	<i>APÊNDICE E – Obtenção das constantes C</i>	124

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 INTRODUÇÃO GERAL

O conhecimento adequado dos fenômenos físicos tem se mostrado essencial para o desenvolvimento de novas tecnologias. Tal conhecimento permite que vários problemas de engenharia sejam estudados e soluções sejam encontradas para os mesmos. Matematicamente, o comportamento e a relação entre as grandezas físicas de um dado fenômeno são modelados por equações diferenciais cujas soluções, quando possíveis, são difíceis de serem determinadas analiticamente devido à sua complexidade. Para lidar com este problema, diversos métodos numéricos têm sido desenvolvidos, permitindo que soluções aproximadas consistentes sejam encontradas e aplicadas em diversas áreas da ciência e tecnologia.

Exemplos dessas equações diferenciais são as equações de Laplace, Poisson, Difusão-Advecção, Helmholtz, Navier, entre várias outras. A equação de Navier é a que modela problemas de elasticidade linear, como será apresentado no próximo capítulo. São sobre essas equações que os métodos computacionais são aplicados para produzir as soluções numéricas que permitem o avanço tecnológico.

Dentre os diversos métodos numéricos já desenvolvidos, destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) (SMITH, 1985; STRICWERDA, 2004), o Método dos Volumes Finitos (MFV) (LEVEQUE, 2002), o Método dos Elementos Finitos (MEF) (HUGHES, 1987; REDDY, 2005) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA, 1978; KATSIKADELIS, 2002). Os três primeiros métodos se baseiam em técnicas de discretização do domínio, já o MEC é fundamentado na discretização apenas do contorno do problema. Isto confere ao MEC algumas vantagens em relação aos demais métodos, como por exemplo, redução da dimensão do problema, menor quantidade de dados de entrada e sistema de equações de ordem reduzida se comparadas às técnicas de domínio. Além disso, é muito eficiente para problemas de domínio infinito e semi-infinito devido às soluções fundamentais utilizadas em sua formulação (BREBBIA et al., 1984). Contudo, após a aplicação do procedimento de discretização, suas matrizes se apresentam cheias e sem simetria, o que faz com que computacionalmente o MEC seja mais oneroso do que outras técnicas no tratamento de problemas de grande porte.

Além disso, o MEC, em sua formulação clássica, apresenta dificuldades no tratamento de corpos esbeltos e na resolução de problemas não homogêneos ou que possuem ações aplicadas no domínio, como forças de inércia e ações térmicas, pois é uma técnica de

contorno (BREBBIA e DOMINGUES, 1992). Para superar essa dificuldade, procedimentos matemáticos adicionais devem ser aplicados para transformar essas ações de domínio em valores de contorno. Uma das primeiras abordagens para esse tipo de problema foi a discretização do domínio em células (BREBBIA, 1978), fazendo com que o MEC perdesse sua principal vantagem sobre os métodos de domínio. Desta forma, em um esforço para evitar a discretização interna, diversas pesquisas foram conduzidas para encontrar um método geral e eficiente para transformar integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes. Surgem então outras abordagens, como o uso do Tensor de Galerkin, Método da Dupla Reciprocidade (MECDR), Método da Múltipla Reciprocidade (MECMR) e o Método da Interpolação Direta (MECID).

A utilização do Tensor de Galerkin se baseia na adoção de uma função primitiva da solução fundamental. Permite transformar a representação integral de domínio em integral de contorno utilizando integração por partes e o teorema da divergência sobre a primitiva do Tensor de Galerkin. Essa técnica, proposta inicialmente por Cruse (1975), foi empregada para problemas elásticos por diversos pesquisadores (CRUSE et al., 1977; DANSON, 1981; BREBBIA et. al 1984; TELLES, 1986).

A Dupla Reciprocidade foi originalmente desenvolvida por Nardini e Brebbia (1982) para problemas dinâmicos e, posteriormente, estendida para outras aplicações, por Wrobel e Brebbia (1987), Loeffler e Mansur (1987) e Ribeiro (1991). A abordagem de ações de domínio pela Dupla Reciprocidade foi feita primeiramente por Loeffler e Mansur (1987). Neste caso, tais ações são conhecidas e aproximadas por um procedimento de interpolação de valores conhecidos nos pontos base do problema, que são convenientemente escolhidos como os pontos nodais de contorno e os pontos internos ao domínio, se houverem. Este método resolve uma ampla gama de problemas, mas geralmente requer um número significativo de pontos internos como pontos de interpolação para representar a solução com precisão.

Nesse cenário, o Método da Múltipla Reciprocidade foi desenvolvido originalmente por Nowak (1989) como sendo uma ferramenta mais geral para a solução de uma ampla gama de problemas parabólicos e hiperbólicos. Adiante, o estudo se estendeu a uma série de aplicações, incluindo os problemas governados pela equação de Helmholtz (NOWAK e BREBBIA, 1989) e elasticidade (NEVES e BREBBIA, 1991). O MECMR pode ser considerado uma extensão da ideia da Dupla Reciprocidade, mas ao invés de aproximar o termo da força de corpo por um conjunto de novas funções, a solução fundamental será integrada quantas vezes forem necessárias utilizando uma sequência de soluções fundamentais de ordem superior de forma recursiva (NOWAK e PARTRIDGE, 1992).



O MECID é uma alternativa ainda recente, desenvolvida por Loeffler et al (2015), que está sendo aplicada na solução de uma variedade de problemas físicos. Tal como o MECDR, o MECID é uma técnica que utiliza funções de base radial (BUHMANN, 2003) para aproximar o núcleo de integrais de domínio e transformá-las em integrais de contorno. Apesar de ser semelhante à técnica de Dupla Reciprocidade, é matematicamente mais simples, pois o MECID é conceitualmente idêntico a um processo de interpolação. O MECID foi testado com sucesso em problemas bidimensionais envolvendo a solução das equações de Poisson e Helmholtz (LOEFFLER et. al, 2015; LOEFFLER e MANSUR, 2017).

Vários testes mostraram que o método não sofre instabilidades numéricas tão intensas quanto o MECDR, seja produzido por inconsistências no modelo de interpolação numérica ou devido a um número excessivo de pontos de interpolação. De acordo com a literatura (BARBOSA et. al, 2019), o MECID também funciona melhor em problemas tridimensionais em comparação com a formulação de Dupla Reciprocidade. Não se tem conhecimento, até o presente momento, do emprego dessa formulação para a solução de problemas elásticos com forças de corpo.

## 1.2 OBJETIVOS E METODOLOGIA

O objetivo primário dessa dissertação é expandir a aplicação do MECID, empregando esta técnica em problemas elásticos com força de corpo. Para isso, a formulação matemática do MECID para problemas elásticos bidimensionais é desenvolvida e implementada numericamente em código FORTRAN.

Por se tratar de um estudo inicial para esse tipo de problema, os testes numéricos realizados utilizam casos que possuem solução analítica previamente apresentada na literatura. As quatro simulações utilizadas foram:

- Barra vertical esbelta submetida à força gravitacional constante;
- Barra horizontal esbelta submetida à força centrífuga;
- Barra vertical quadrada submetida à força gravitacional variando linearmente;
- Disco submetido à força centrífuga;

A partir destas simulações buscou-se avaliar parâmetros que influenciam o comportamento da solução numérica e os efeitos gerados por esses parâmetros, fazendo um comparativo das respostas do MECID com as soluções analíticas e com as respostas numéricas da técnica do Tensor de Galerkin.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Além deste primeiro capítulo introdutório, são desenvolvidos nessa dissertação seis outros capítulos que abordam os seguintes assuntos:

- Capítulo 2: São apresentadas as equações gerais da Teoria da Elasticidade e as equações válidas em problemas bidimensionais, tanto para o Estado Plano de Tensão quanto o Estado Plano de Deformação;
- Capítulo 3: É mostrado o procedimento clássico do MEC para problemas elásticos, onde é desenvolvida a formulação integral inversa da equação de Navier. São apresentadas as soluções fundamentais e também o processo de discretização, no qual o termo da força de corpo é desprezado;
- Capítulo 4: É feita uma apresentação detalhada do equacionamento da técnica do Tensor de Galerkin aplicado sobre a integral de domínio da força de corpo para cada problema a ser analisado, incluindo o desenvolvimento da solução fundamental dos deslocamentos para essa técnica;
- Capítulo 5: É descrito detalhadamente a formulação do MECID aplicado sobre a integral de domínio da força de corpo, o procedimento de regularização, a discretização do problema e o sistema linear resultante gerado pelo MECID;
- Capítulo 6: Neste capítulo são apresentados os resultados dos testes numéricos, baseados em quatro problemas elásticos. Além disso, faz-se a discussão desses resultados com o objetivo de avaliar os diferentes parâmetros ali testados.
- Capítulo 7: São feitas as considerações finais, onde são destacadas as conclusões e propõem-se ideias de trabalhos futuros para a continuidade dessa pesquisa.

Além dos capítulos citados, na parte final da dissertação se encontram cinco Apêndices que complementam a estrutura do trabalho.

## 2 TEORIA DA ELASTICIDADE

### 2.1 INTRODUÇÃO

Todo corpo, ao ser submetido a forças externas, sofre uma deformação na sua geometria. Quando essas forças são retiradas, dois fenômenos podem acontecer com o corpo: a deformação desaparece e o corpo retorna a sua geometria original ou a deformação se torna permanente e a geometria do corpo é alterada. No primeiro caso, o corpo se encontra no regime elástico e é chamado de perfeitamente elástico, e no segundo caso, apresenta uma deformação plástica. Essas configurações dependem da intensidade dos esforços atuantes e das propriedades físicas do material.

As forças atuantes sobre um corpo podem ser classificadas em forças de superfície se forem distribuídas sobre a superfície do corpo, como por exemplo, a pressão hidrostática, ou forças de corpo, que são forças distribuídas pelo volume do corpo. Exemplos desse último caso são as forças gravitacionais, as forças magnéticas e as forças inerciais. No presente trabalho, será analisado o comportamento quando forças de corpo são atuantes.

De acordo com Timoshenko e Goodier (1970), todos os materiais utilizados na engenharia apresentam algum nível de elasticidade e por isso faz-se necessário o estudo detalhado dos corpos elásticos. Tal estudo é realizado pela Teoria da Elasticidade (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970; ATKIN e FOX, 1980; BORESI e CHONG, 1987), que é a disciplina da Mecânica responsável por descrever matematicamente as relações entre as grandezas envolvidas na Elasticidade. Essas grandezas são: tensão, deformação e deslocamento.

Tensão é a grandeza que indica a intensidade das forças internas aplicadas sobre uma unidade de área de superfície. A deformação corresponde à variação geométrica gerada pelos esforços externos. Deslocamento é a distância percorrida por um ponto do corpo, por consequência do movimento produzido pelas forças aplicadas. Quando a relação entre a tensão e a deformação é proporcionalmente constante, a relação é linear e o estudo passa a ser dado pela Teoria da Elasticidade Linear.

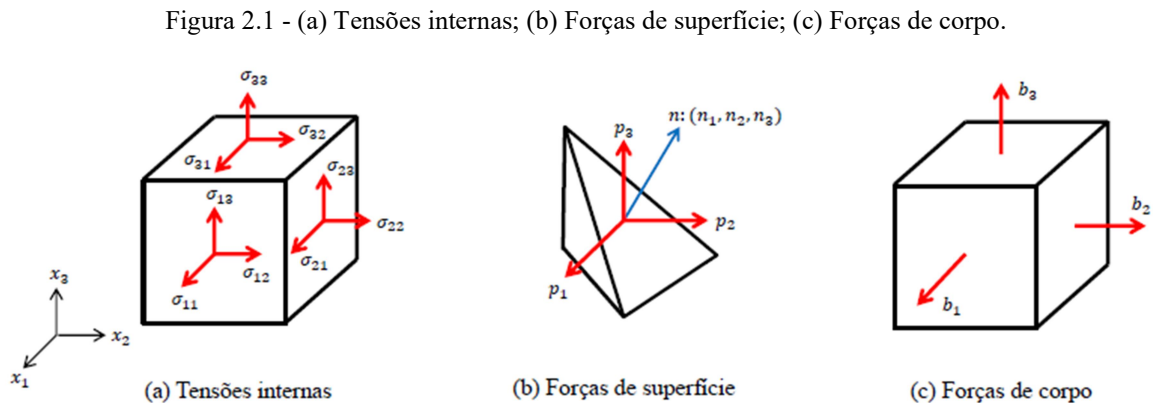
As equações governantes apresentadas na Elasticidade Linear são formuladas a partir das seguintes hipóteses (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970; BUDYNAS, 1977):

- Material homogêneo e contínuo;
- Corpo isotrópico, isto é, as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções;
- Corpo perfeitamente elástico.

As equações apresentadas na próxima seção serão dadas em notação indicial. Tal formulação facilita e simplifica a manipulação de equações que utilizam grandezas vetoriais e tensoriais, além de facilitar operações diferenciais, como gradiente, divergente e rotacional, aplicadas a campos escalares ou vetoriais, conforme apresentado por Lai et al. (2010).

## 2.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

A Figura 2.1 (a) apresenta as componentes das tensões de um elemento infinitesimal de um corpo elástico em equilíbrio submetido à ação da força de corpo  $b_j$ , cujas componentes estão indicadas na Figura 2.1 (c).



Fonte: Adaptado de Boresi e Chong (1987)

As tensões no interior, Figura 2.1 (a), e as forças de superfície, Figura 2.1 (b), devem satisfazer as condições de equilíbrio estático das forças e dos momentos sobre o domínio  $\Omega$  e sobre contorno  $\Gamma$ , respectivamente. As equações de equilíbrio resultantes são:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (\Omega) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}n_i = p_j \quad (\Gamma) \quad (2.2)$$

As componentes da tensão mostradas na Figura 2.1 (a) são os elementos que compõem o tensor de tensões  $\sigma_{ij}$ , que apresenta uma forma matricial quadrada, onde na diagonal principal os elementos representam as tensões normais e os demais elementos indicam as tensões cisalhantes. Lembrando que o tensor de tensões é simétrico (BORESI e CHONG, 1987).

As deformações produzidas são definidas pelas equações cinemáticas, que relacionam as deformações  $\varepsilon_{ij}$  com as componentes do deslocamento  $u_i$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

No tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}$ , denominado tensor de Cauchy, em sua diagonal principal, são indicados os alongamentos ou as deformações lineares. Os demais elementos representam as distorções entre os planos do elemento infinitesimal, também conhecidos como deformações angulares ou cisalhantes (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970).

Na Teoria da Elasticidade, a relação entre o campo de tensões e o campo de deformações é definida pelas equações constitutivas. Para o caso da Elasticidade Linear, as equações respeitam a Lei de Hooke e são dadas pela expressão a seguir:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.4)$$

A equação (2.4) expressa as componentes da tensão em termos das componentes de deformação. Essa equação pode ser escrita na forma inversa, ou seja, a deformação em termos da tensão (LAI et al., 2010), como se segue:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.5)$$

Nas equações (2.4) e (2.5),  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamé, que estão relacionadas com duas propriedades físicas do material, módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.6)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \quad (2.7)$$

Nota-se que a primeira constante de Lamé é igual ao módulo de elasticidade transversal  $G$ , também denominado módulo de elasticidade ao cisalhamento.

Retornando para a equação (2.4),  $\varepsilon_{kk}$  é o traço do tensor das deformações  $\varepsilon_{ij}$ , ou seja, é a soma das deformações normais. O mesmo é válido para  $\sigma_{kk}$ , que é o traço do tensor de tensões. Já o termo  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Seus respectivos valores são:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.9)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

Se a equação (2.3) for substituída em (2.4) e o resultado for aplicado na equação de equilíbrio (2.1), obtém-se, com as devidas manipulações, uma equação diferencial parcial em função dos deslocamentos, denominada Equação de Navier (BORESI e CHONG, 1987):

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (\Omega) \quad (2.11)$$

Caso o mesmo procedimento seja feito utilizando-se agora a equação (2.2), obtém-se uma equação diferencial válida no contorno do corpo:

$$\lambda u_{k,k} n_j + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + n_i = p_j \quad (\Gamma) \quad (2.12)$$

A resolução completa de um problema de Elasticidade Linear consiste em resolver a equação de Navier (2.11) para determinação dos deslocamentos. A partir desse resultado, são encontradas as deformações por meio das equações cinemáticas (2.3), e por fim, as tensões são calculadas usando-se as equações constitutivas (2.4). A equação (2.12) é utilizada para que as condições de contorno sejam satisfeitas.

## 2.3 ESTADO PLANO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

As equações apresentadas até aqui são gerais e aplicáveis em problemas tridimensionais. Porém, diversos problemas podem ser reduzidos para um sistema bidimensional quando algumas condições são satisfeitas. Nessa situação, as grandezas tensão, deformação e deslocamento são funções apenas de duas direções,  $X_1$  e  $X_2$ . Logo, os índices da notação indicial das equações irão variar de 1 a 2, para indicarem as componentes ou derivações em relação a essas direções. Esses problemas são conhecidos como Estado Plano de Tensão (EPT) e Estado Plano de Deformação (EPD).

### 2.3.1 Equações de compatibilidade

Em problemas bidimensionais, o sistema de equações resultante da aplicação das condições de contorno sobre as equações de equilíbrio (2.1) apresenta três variáveis a serem

determinadas, que são as componentes de tensão  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$ . Porém, como o sistema é bidimensional, têm-se duas equações para três incógnitas. Dessa forma, o problema é estaticamente indeterminado, e para obtermos uma solução, a deformação deve ser considerada (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970), aumentando a quantidade de equações, tornando o sistema possível e determinado.

As equações cinemáticas (2.3) fornecem as três componentes da deformação, a saber,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_x \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_y \quad (2.14)$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \gamma_{xy} \quad (2.15)$$

Derivando a equação de (2.13) duas vezes em relação  $x_2$ , a equação (2.14) duas vezes em relação à  $x_1$  e a equação (2.15) uma vez em relação a  $x_1$  e uma vez em relação  $x_2$ , chega-se a uma equação diferencial chamada de condição de compatibilidade, dada por:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial^2 x_1} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é válida tanto para o EPT quanto para o EPD. É possível determinar também equações de compatibilidade em termos de tensões, porém sua formulação para o EPT é diferente do EPD e serão apresentadas nos tópicos a seguir.

### 2.3.2 Estado Plano de Tensão

De acordo com Timoshenko e Goodier (1970), o Estado Plano de Tensão é caracterizado em uma chapa fina carregada por forças aplicadas no contorno, paralelas ao plano da chapa e distribuídas de forma uniforme ao longo da espessura, conforme é mostrado na Figura 2.2.

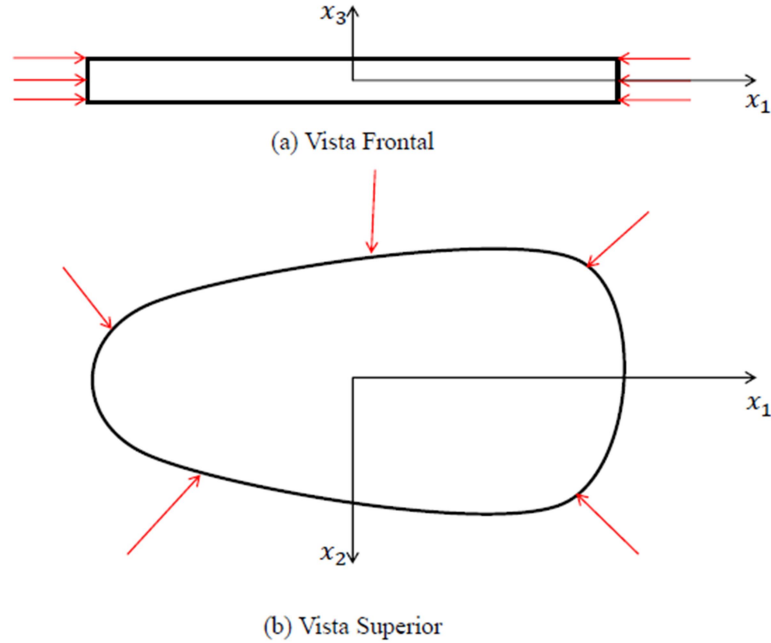
Nessa situação, as tensões normais e cisalhantes em relação à  $x_3$  são nulos, isto é:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (2.17)$$

Por consequência, duas componentes da deformação também serão nulas:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.18)$$

Figura 2.2 - Estado Plano de Tensão



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Goodier (1970)

As demais componentes de deformação podem ser escritas em função das componentes de tensão restantes a partir da equação (2.5) e são dadas por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \quad (2.20)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.22)$$

Ou, de forma inversa, as tensões em função das deformações serão iguais à:



$$\sigma_{11} = \frac{2G}{(1-\nu)}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \quad (2.23)$$

$$\sigma_{22} = \frac{2G}{(1-\nu)}(\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.24)$$

$$\sigma_{21} = 2G\varepsilon_{12} = G\gamma_{xy} \quad (2.25)$$

As equações de compatibilidade em termos das componentes de tensão para o EPT são apresentadas para situações gerais de equilíbrio por Timoshenko e Goodier (1970), e são dadas por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2}\right)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\right) \quad (2.26)$$

Em que  $b_1$  e  $b_2$  são as componentes da força de corpo. Caso as forças de corpo sejam nulas ou constantes, como o caso da força peso, a equação (2.26) se reduzirá a:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2}\right)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (2.27)$$

Ou ainda

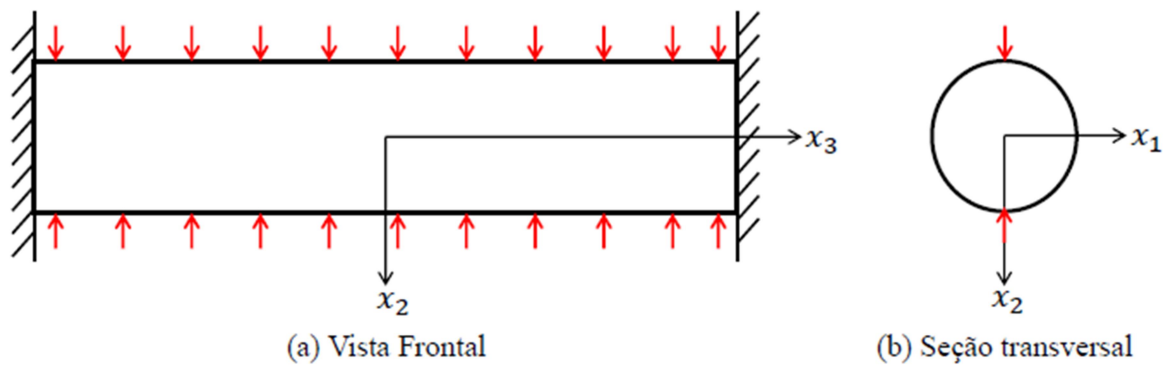
$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial^2 x_1} + 2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial^2 x_2} = 0 \quad (2.28)$$

A solução do problema elástico no EPT consiste em obter os valores das componentes do deslocamento  $u_1$  e  $u_2$  por meio da equação de Navier (2.11) aplicando o método numérico. Substituindo esses valores nas equações cinemáticas (2.3), encontram-se as deformações. Em seguida, usando as relações (2.23), (2.24) e (2.25), calcula-se as componentes da tensão. Por fim, por meio da expressão (2.22) é possível determinar a deformação na direção  $x_3$  normal ao plano.

### 2.3.3 Estado Plano de deformação

Boresi e Chong (1987) afirmam que o Estado Plano de Deformação (EPD) é aplicável a um corpo prismático ou cilíndrico cujo comprimento é muito maior que as suas dimensões de seção transversal e que é carregado uniformemente ao longo do seu comprimento. Exemplos dessa configuração são: muro de arrimo com pressão lateral, condutos ou túneis, tubo cilíndrico com pressão interna, rolo cilíndrico comprimido por forças no plano diametral. Uma ilustração desse último caso é apresentada na Figura 2.3:

Figura 2.3 - Estado Plano de Deformação



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Goodier (1970)

Nessa configuração, são considerados deslocamentos axiais nulos e dessa forma as deformações na direção  $x_3$  também serão nulas:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (2.29)$$

Por meio da Lei de Hooke, equação (2.4), são determinadas as componentes da tensão, dadas pelas equações (2.30) à (2.33):

$$\sigma_{11} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left( (1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} \right) \quad (2.30)$$

$$\sigma_{22} = \frac{2G}{(1-\nu)} \left( \nu\varepsilon_{11} + (1-\nu)\varepsilon_{22} \right) \quad (2.31)$$

$$\sigma_{21} = 2G\varepsilon_{12} = G\gamma_{xy} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.33)$$

Ou ainda, pela equação (2.5), as componentes de deformação podem ser escritas como funções das componentes de tensão:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left( (1 - \nu^2)\sigma_{11} - \nu(1 + \nu)\sigma_{22} \right) \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left( (1 - \nu^2)\sigma_{22} - \nu(1 + \nu)\sigma_{11} \right) \quad (2.35)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \quad (2.36)$$

Nota-se a diferença entre o EPT e o EPD por meio das suas equações resultantes. No EPT têm-se quatro componentes de deformação, equações (2.19) à (2.22), e três componentes de tensão, equações (2.23) à (2.24), enquanto o EPD possui três componentes de deformação, equações (2.34) à (2.36), e quatro componentes de tensão, equações (2.30) à (2.33). Em ambos os casos, todas as componentes são funções apenas das direções  $x_1$  e  $x_2$  e são independentes da direção  $x_3$ , isto é, são problemas estritamente bidimensionais.

Timoshenko e Goodier (1970) também apresentam a equação de compatibilidade em termo das componentes de tensão para o EPD. Considerando o caso geral, em que existem forças de corpo, essa equação é dada por:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{(1 - \nu)} \left( \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \right) \quad (2.37)$$

Nos casos particulares nas quais as forças de corpo são desprezíveis ou que apenas a força peso esteja atuando, a equação (2.37) se reduz às equações (2.27) e (2.28) já apresentadas para o caso do EPT.

Os procedimentos envolvidos para determinar a solução de problemas no EPD são os mesmos que no EPT, ou seja, encontram-se primeiro os deslocamentos pela resolução numérica da equação de Navier (2.11), em seguida são calculadas as deformações por meio das equações cinemáticas (2.3), e, por fim, utilizando as expressões (2.30), (2.31), (2.32) e (2.33), são calculadas as tensões em um determinado ponto do corpo.

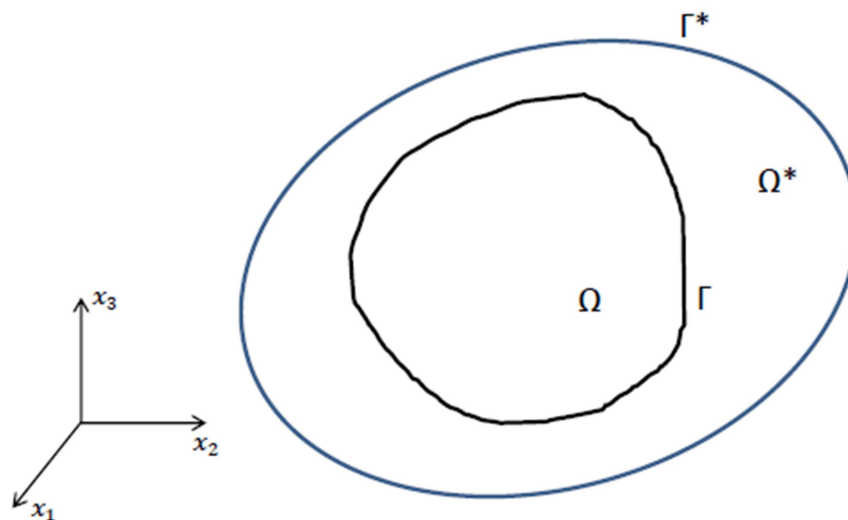
### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE LINEAR

#### 3.1 EQUAÇÃO INTEGRAL

O desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste em encontrar equações integrais de contorno que possam ser discretizadas e solucionadas por meio de integração numérica. De modo geral, as integrais de contorno são encontradas pela ponderação da equação diferencial que rege o problema, por meio de funções especiais de ponderação, denominadas soluções fundamentais (BREBBIA, 1978). Porém, esse procedimento não é único e, para problemas elásticos, é usual assumir a identidade de Somigliana que é encontrada a partir da aplicação do teorema de Betti, baseado no princípio do trabalho virtual (BREBBIA et al., 1984).

Considere um corpo de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  que satisfaz as hipóteses da Teoria da Elasticidade Linear apresentadas no capítulo 2. Esse corpo está em equilíbrio estático e apresenta as variáveis de estado  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $p_i$  e  $b_i$  que satisfazem as condições de equilíbrio. Esse corpo está inserido em uma região infinita de domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$  que apresenta as mesmas propriedades elásticas do corpo definido por  $\Omega + \Gamma$  e se encontra em equilíbrio estático com o mesmo. As variáveis de estado dessa região são:  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $p_i^*$  e  $b_i^*$ . A situação descrita acima está representada na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Região  $\Omega^* + \Gamma^*$  que contém corpo  $\Omega + \Gamma$



Fonte: Adaptado de Brebbia et al. (1984)

De acordo com Tauchert (1974), o princípio do trabalho Virtual diz que o trabalho realizado pelas tensões sobre o corpo  $\Omega+\Gamma$  é recíproco ao trabalho das tensões aplicadas em  $\Omega^*+\Gamma^*$ . Em outras palavras, as tensões sobre  $\Omega+\Gamma$  produz deformações em  $\Omega^*+\Gamma^*$  e, pelo princípio da reciprocidade, tensões em  $\Omega^*+\Gamma^*$  provocam deformações em  $\Omega+\Gamma$  e o trabalho realizado em ambos os sistemas são equivalentes. Matematicamente tem-se a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.1)$$

Substituindo o tensor de Cauchy, apresentado na equação (2.3), na equação (3.1), encontra-se:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} [u_{i,j}^* + u_{j,i}^*] d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* [u_{i,j} + u_{j,i}] d\Omega \quad (3.2)$$

Como o tensor de tensões é simétrico, a equação (3.2) irá se reduzir a:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega \quad (3.3)$$

Fazendo a integração por partes em ambos os lados da equação (3.3) chega-se a:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* u_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega \quad (3.4)$$

Aplicando o teorema da Divergência nas duas primeiras integrais do lado direito e esquerdo da equação (3.4), tem-se:

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i^*) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega \quad (3.5)$$

Como todo domínio se encontra em equilíbrio estático, as condições de equilíbrio tanto no domínio quanto no contorno apresentadas pelas equações (2.1) e (2.2) são satisfeitas. Substituindo as respectivas condições de equilíbrio em  $\Omega+\Gamma$  e na região infinita  $\Omega^*+\Gamma^*$  a equação (3.5) pode ser reescrita obtendo-se a equação (3.6), que corresponde à forma final do teorema de Betti (KATSIKADELIS, 2002).

$$\int_{\Gamma} p_j u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_j^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_j^* u_i d\Omega \quad (3.6)$$

De acordo com Brebbia e Domingues (1992), a equação (3.6) pode ser modificada se for assumido que a força de corpo  $b_j^*$  corresponde a cargas pontuais unitárias aplicadas sobre um ponto  $\xi$  pertencente ao domínio  $\Omega^*$ .

A carga pontual é representada matematicamente pela função delta de Dirac  $\Delta(\xi, X)$ , no qual  $\xi$  é o ponto de aplicação da carga, denominado ponto fonte, e  $X$  representa um ponto qualquer do domínio  $\Omega^*$ , conhecido como ponto campo.

A função delta de Dirac possui as seguintes propriedades (BRAGA, 2006):

$$\Delta(\xi, X) = 0, \quad \text{se } \xi \neq X \quad (3.7)$$

$$\Delta(\xi, X) = \infty, \quad \text{se } \xi = X \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} f(X) \Delta(\xi, X) d\Omega(X) = f(\xi) \quad (3.9)$$

Desta forma, as componentes da força de corpo sobre o ponto  $\xi$ , em cada uma das direções ortogonais, representados pelos vetores unitários  $e_j$ , podem ser escritas da seguinte maneira:

$$b_j^* = \Delta(\xi, X) e_j \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.10) na última integral da equação (3.6) e aplicando a propriedade (3.9), essa integral de domínio se reduzirá a:

$$\int_{\Omega} b_j^* u_i d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(\xi, X) e_j u_i d\Omega(X) = u_i(\xi) e_j \quad (3.11)$$

Se cada ponto fonte for tomado de forma independente, os vetores de deslocamento e das forças de superfície podem ser definidos também por meio dos vetores unitários  $e_j$  para cada direção ortogonal, sendo escritos conforme as equações (3.12) e (3.13):

$$u_i^* = u_{ij}^*(\xi, X) e_j \quad (3.12)$$

$$p_i^* = p_{ij}^*(\xi, X)e_j \quad (3.13)$$

A equação (3.6) pode ser reescrita aplicando-se as expressões (3.11), (3.12) e (3.13) para a obtenção das componentes do deslocamento no ponto fonte  $\xi$ , que é conhecida como Identidade de Somigliana para deslocamentos (BREBBIA et al., 1984), apresentada na equação a seguir:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, X)p_j(X)d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, X)u_j(X)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X)b_j(X) d\Omega \quad (3.14)$$

As funções  $u_{ij}^*(\xi, X)$  e  $p_{ij}^*(\xi, X)$  são as soluções fundamentais do problema de elasticidade linear que são soluções singulares da equação de Navier. Essas soluções fundamentais são apresentadas mais adiante na seção 3.2.

A Identidade de Somigliana é utilizada para determinar os deslocamentos dos pontos internos, a partir dos valores de contorno já conhecidos. Porém, para encontrar os deslocamentos e as forças de superfície no contorno é necessário um tratamento matemático que utiliza o limite das integrais de (3.14) quando o ponto fonte  $\xi$  tende ao contorno. Esse tratamento matemático é apresentado por Brebbia et al. (1984). Aplicando-se o procedimento citado, a equação (3.14) resulta na equação (3.15):

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, X)u_j(X)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, X)p_j(X)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X)b_j(X) d\Omega \quad (3.15)$$

Na equação acima,  $c_{ij}(\xi)$  é uma matriz que contém os coeficientes gerados pelo tratamento matemático que dependem da geometria do contorno  $\Gamma$  e do posicionamento do ponto  $\xi$ . Considerando um contorno suave, os valores de  $c_{ij}(\xi)$  serão:

$$c_{ij}(\xi) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{para } \xi \in \Omega \\ \frac{1}{2}\delta_{ij}, & \text{para } \xi \in \Gamma \\ 0, & \text{para } \xi \notin \Omega \end{cases} \quad (3.16)$$

A expressão (3.15) é a equação do MEC para problemas elásticos com força de corpo. Porém, nota-se que essa equação ainda apresenta uma integral de domínio oriunda da força de corpo.

É sobre essa última integral que as diferentes abordagens do MEC apresentadas na introdução são aplicadas.

### 3.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Um ponto crucial na formulação integral do MEC é a determinação das soluções fundamentais do problema, presentes nas equações (3.12) e (3.13). Essas soluções podem ser obtidas a partir da solução de um problema correlato. Para problemas elásticos, a partir da consideração de que o domínio  $\Omega^* + \Gamma^*$  é um meio elástico e infinito, a força de corpo  $b_j^*$  será definida pela equação (3.10) e a equação de Navier será dada por:

$$\mu u_{j,kk}^* + \frac{\mu}{(1-2\nu)} u_{k,kj}^* + \Delta(\xi, X) e_j = 0 \quad (3.17)$$

A solução da equação (3.17) foi determinada por Kelvin e é dada pela equação a seguir:

$$u_{ij}^*(\xi, X) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \{ (3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \} \quad (3.18)$$

Substituindo as derivadas do deslocamento (3.18) na equação (2.12) encontra-se uma expressão para  $p_i^*$ , e a partir da equação (3.13) obtém-se o seguinte resultado para  $p_{ij}^*(\xi, X)$ :

$$p_{ij}^*(\xi, X) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (3.19)$$

As equações (3.18) e (3.19) são denominadas soluções de Kelvin e correspondem respectivamente às soluções fundamentais dos deslocamentos e das forças de superfície (BREBBIA e WALKER, 1980; BREBBIA et al., 1984; BREBBIA; DOMINGUES, 1992).

Nas equações (3.18) e (3.19) a grandeza  $r = r(\xi, X)$  é a distância euclidiana entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $X$ . A definição e as propriedades em notação indicial da variável  $r(\xi, X)$  são:

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \quad (3.20)$$

$$r_i = x_i(X) - x_i(\xi) \quad (3.21)$$



$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(X)} = \frac{r_i}{r} \quad (3.22)$$

Nota-se que a equação (3.20) representa o módulo do vetor  $r_i$  definida em (3.21), cuja derivada tomada com relação às coordenadas  $x_i$  é dada por (3.22).

Importante ressaltar que as soluções fundamentais  $u_{ij}^*(\xi, X)$  e  $p_{ij}^*(\xi, X)$  representam respectivamente os deslocamentos e as forças de superfície na direção  $i$  do ponto  $X$ , quando uma carga unitária é aplicada em  $\xi$  e atua na direção  $j$ . Essas soluções são aplicadas sobre a equação integral do MEC (3.15), que é discretizada para gerar um sistema linear que será resolvido de forma numérica produzindo uma solução do problema em análise.

### 3.3 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Para fazer uma análise inicial da discretização da equação integral, serão consideradas apenas as integrais de contorno da equação (3.15), que consiste na equação integral clássica do MEC para elasticidade linear. A integral de domínio será tratada nos capítulos 4 e 5, em que sua discretização será apresentada, complementando o que será desenvolvido nessa seção. Assim, desprezando a integral de domínio em (3.15), chega-se à expressão:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, X)u_j(X)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, X)p_j(X)d\Gamma \quad (3.23)$$

A equação (3.23) é aplicável sobre um corpo elástico de domínio  $\Omega$  que possui contorno  $\Gamma$ . Esse contorno é aproximado por uma série de elementos  $\Gamma_e$  definidos por pontos geométricos sobre o contorno, conforme a Figura 3.2.

Assim, a equação (3.23) pode ser reescrita na forma discretizada, como se segue:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} p_{ij}^*(\xi, X)u_j(X)d\Gamma_e = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\xi, X)p_j(X)d\Gamma_e \quad (3.24)$$

Na presente dissertação, foram utilizados elementos lineares nos quais os pontos nodais coincidem com os pontos geométricos do elemento, conforme a Figura 3.3. Os valores de  $u_j(X)$  e  $p_j(X)$  no interior do elemento são calculados por interpolação linear, indicados em (3.25) e (3.26).

$$u_j(X) = \phi_1 u_j^1 + \phi_2 u_j^2 \quad (3.25)$$

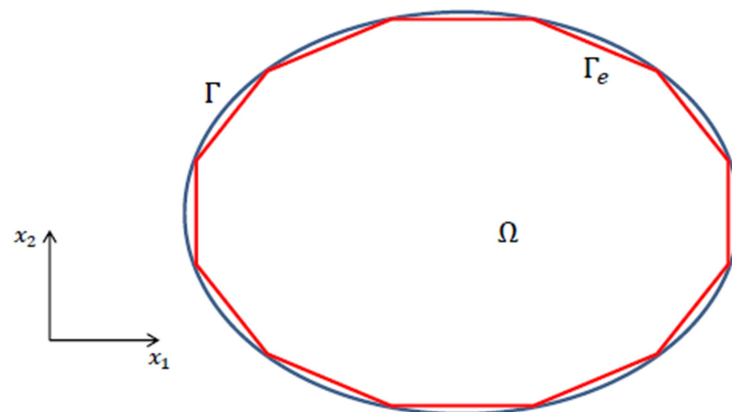
$$p_j(X) = \phi_1 p_j^1 + \phi_2 p_j^2 \quad (3.26)$$

Onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são as funções de interpolação, de acordo com as equações (3.27) e (3.28), e  $u_j^m$  e  $p_j^m$  são respectivamente os valores do deslocamento e da força de superfície nos pontos nodais  $m$  do elemento.

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta) \quad (3.27)$$

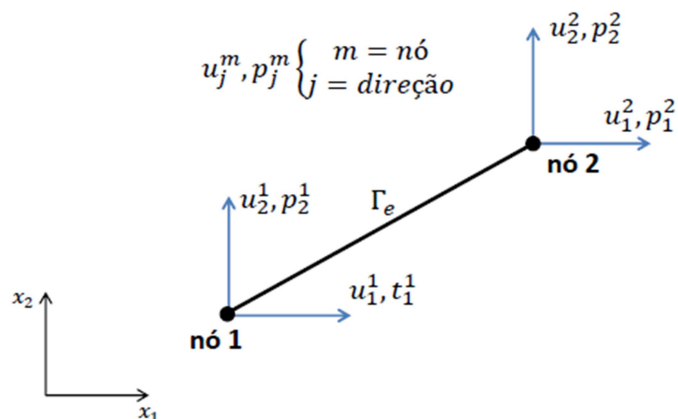
$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \quad (3.28)$$

Figura 3.2 - Contorno discretizado



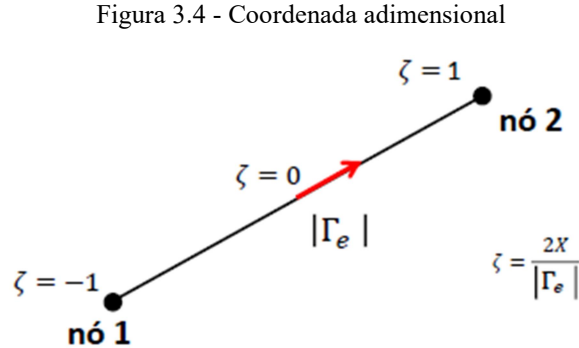
Fonte: Autoria própria

Figura 3.3 - Elemento linear



Fonte: Adaptado de Ribeiro (1991)

Em (3.27) e (3.28), a variável  $\zeta$  é uma coordenada adimensional do elemento definida de acordo com a Figura 3.4.



Substituindo (3.25) e (3.26) em (3.24), tem-se uma nova expressão para a equação discretizada:

$$c_{ij}u_j + \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} p_{ij}^* [\phi_1 u_j^1 + \phi_2 u_j^2] d\Gamma = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* [\phi_1 p_j^1 + \phi_2 p_j^2] d\Gamma \quad (3.29)$$

Definindo as submatrizes  $\hat{h}^m$  e  $g^m$  de ordem  $2 \times 2$ , em que  $m$  é o ponto nodal:

$$\hat{h}_{ij}^m = \int_{\Gamma_e} p_{ij}^* \phi_m d\Gamma_e \quad (3.30)$$

$$g_{ij}^m = \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \phi_m d\Gamma_e \quad (3.31)$$

Cada uma das integrais das submatrizes é calculada por meio de integração numérica utilizando a Quadratura de Gauss, definida por:

$$\int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta = \sum_{q=1}^{NPG} f(\zeta_q) w_q \quad (3.32)$$

Onde  $\zeta_q$  são os pontos de Gauss e  $w_q$  são os pesos de Gauss nos respectivos pontos  $\zeta_q$ .

Aplicando a Quadratura de Gauss nas integrais em (3.30) e (3.31), obtêm-se novas expressões para as submatrizes  $\hat{h}^m$  e  $g^m$ :

$$\hat{h}_{ij}^m = \sum_{q=1}^{NPG} p_{ij}^* \phi_m w_q |J_e| \quad (3.33)$$

$$g_{ij}^m = \sum_{q=1}^{NPG} u_{ij}^* \phi_m w_q |J_e| \quad (3.34)$$

Em que  $|J_e|$  é o Jacobiano da transformação da coordenada  $X$  em  $\zeta$ , que para o caso de geometria linear é igual à:

$$|J_e| = \frac{|\Gamma_e|}{2} \quad (3.35)$$

A partir das definições dadas em (3.30) e (3.31), a equação (3.29) pode ser escrita na forma da expressão (3.36):

$$c_{ij} u_j + \sum_{e=1}^N \hat{h}_{ij}^m u_j^m = \sum_{e=1}^N g_{ij}^m p_j^m \quad (3.36)$$

A expressão anterior pode ser reescrita de uma forma ainda mais sucinta, como indicado na equação (3.37), a partir da definição de uma nova sub-matriz  $h$ , definida em (3.38):

$$\sum_{e=1}^N h_{ij}^m u_j^m = \sum_{e=1}^N g_{ij}^m p_j^m \quad (3.37)$$

Onde  $h_{ij}^m$  é uma sub-matriz de ordem  $2 \times 2$ , de modo que:

$$h_{ij}^m = \begin{cases} \hat{h}_{ij}^m + c_i, & \text{para } \xi = X \\ h_{ij}^m, & \text{para } \xi \neq X \end{cases} \quad (3.38)$$

Assim, o sistema formado por todas as equações resultantes, em sua forma matricial, será dado por:

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \quad (3.39)$$

Na equação matricial (3.39), cada linha de  $H$  e  $G$  é gerada pela varredura do ponto fonte  $\xi$  sobre cada elemento de contorno  $\Gamma_e$ , definido pelos pontos nodais tomados como ponto fonte  $X$ . Os elementos dessas matrizes são as sub-matrizes  $h$  e  $g$  definidas anteriormente.

A próxima etapa é a resolução do sistema (3.39). Para isso, as condições de contorno devem ser impostas a partir dos valores prescritos. Considerando que o contorno seja definido por  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$ , onde  $\Gamma_u$  é a região do contorno que possui deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$ , isto é, condições de contorno essenciais, e  $\Gamma_p$  é a parte do contorno que possui forças de superfície prescritas  $\bar{p}_i$ , ou seja, condições naturais. Em  $\Gamma_u$  as forças de superfície são desconhecidas e em  $\Gamma_p$  os deslocamentos são as incógnitas.

Assim, fazendo a manipulação adequada do sistema (3.39), de forma que todas as incógnitas sejam agrupadas em um vetor  $Y$ , chega-se a um sistema de equações na forma:

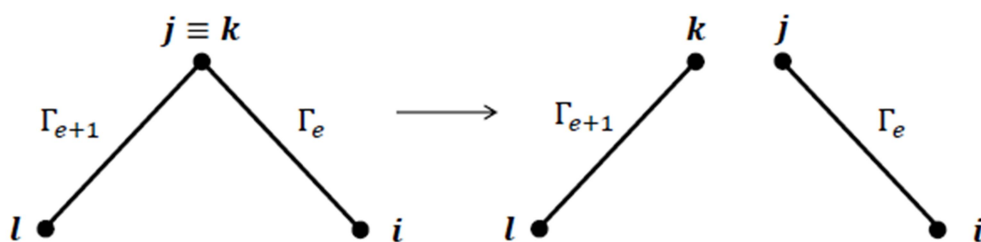
$$[A]\{Y\} = \{B\} \quad (3.40)$$

Esse sistema pode ser resolvido utilizando um método padrão de resolução de sistemas lineares, como por exemplo, o Método de Eliminação de Gauss, desde que a matriz  $A$  seja inversível.

### 3.4 SIMULAÇÃO DE DESCONTINUIDADES

Para simular as descontinuidades das condições de contorno do corpo, foi utilizado no presente trabalho o conceito de nó duplo (BREBBIA et al., 1984). O nó duplo consiste em definir dois pontos nodais no mesmo ponto geométrico, ou seja, dois pontos distintos que possuem a mesma coordenada, cada um deles pertencendo a elementos de contorno distintos, conforme apresentado na Figura 3.5.

Figura 3.5 - Nó duplo



Fonte: Adaptado de Brebbia et al. (1984)

O nó duplo é de simples implementação e mantém a precisão dos resultados. Porém, quando os nós duplos são utilizados como pontos fonte  $\xi$ , por estarem no mesmo lugar geométrico, produzem linhas iguais na matriz do sistema de equações, promovendo singularidades. Para contornar esse problema, é utilizado o conceito de elemento interpolado (NEVES, 1988), que consiste em um deslocamento do ponto fonte, que se encontra na extremidade do elemento, para o interior do elemento. Esse deslocamento é feito por um fator de afastamento que equivale a uma fração do comprimento total do elemento. Neste trabalho, o fator de afastamento utilizado foi de 5% do comprimento do elemento linear.

## 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM TENSOR DE GALERKIN

### 4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, foi desenvolvida a equação integral de um problema elástico, chegando-se à equação (3.15). Nessa equação, a última integral do lado direito da igualdade está aplicada ao domínio. Porém, como o MEC é uma técnica de contorno, é desejável realizar procedimentos matemáticos que convertam essa integral de domínio em uma integral de contorno. Em alguns casos particulares de forças de corpo, esse procedimento pode ser realizado a partir do Tensor de Galerkin  $G_{ij}^*$ , que é associado à solução fundamental dos deslocamentos, permitindo que as manipulações padrões do MEC sejam realizadas sobre a integral de domínio presente na equação (3.15).

Exemplos de forças de corpo em que esse método é aplicável são apresentados na literatura (CRUSE et al., 1977; DANSON, 1981; BREBBIA et. al 1984; TELLES, 1986). No presente trabalho, serão desenvolvidos os casos da força gravitacional e da força centrífuga devido à rotação em torno de um eixo fixo.

A solução fundamental  $u_{ij}^*$  está relacionada com o Tensor de Galerkin  $G_{ij}^*$  a partir da seguinte expressão (BREBBIA et al., 1984; BREBBIA e DOMINGUES, 1992):

$$u_{ij}^* = G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,kj}^* \quad (4.1)$$

Substituindo a equação (4.1) na integral de domínio da equação (3.15) obtém-se uma nova expressão para essa integral, que pode ser desenvolvida de acordo com a força de corpo  $b_j$  inserida nessa equação:

$$B_i = \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) d\Omega = \int_{\Omega} \left[ G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,kj}^* \right] b_j(X) d\Omega \quad (4.2)$$

Assim, o resultado gerado pelo desenvolvimento da equação (4.2) dependerá diretamente da força de corpo  $b_j$ , ou seja, um resultado diferente é obtido para cada tipo de força de corpo. Isso reduz a gama de aplicação do método, pois, se a força de corpo for dada por uma expressão mais complexa, não será possível realizar as manipulações padrões do MEC para

converter a equação (4.2) em integrais de contorno, por isso, somente em casos mais simples o método do Tensor de Galerkin pode ser utilizado.

## 4.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DOS DESLOCAMENTOS

Associando a equação (4.1) com a definição do deslocamento  $u_j^*$  dada em (3.12) e substituindo o resultado na equação de Navier para um meio elástico infinito  $\Omega^* + \Gamma^*$  definida em (3.17), chega-se à seguinte equação biarmônica:

$$\nabla^2(\nabla^2 G_{ij}^*) = -\frac{1}{\mu} \Delta(\xi, X) \delta_{ij} \quad (4.3)$$

A equação (4.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 F_{ij}^* = -\frac{1}{\mu} \Delta(\xi, X) \delta_{ij} \quad (4.4)$$

Onde:

$$F_{ij}^* = \nabla^2 G_{ij}^* \quad (4.5)$$

A equação (4.4) é similar à equação de governo de um problema de potencial, cuja solução fundamental para problemas bidimensionais é dada por (NEVES e BREBBIA, 1991):

$$F_{ij}^* = -\frac{1}{2\pi\mu} [\ln r + K] \delta_{ij} \quad (4.6)$$

Na qual K é uma constante.

Substituindo (4.6) em (4.5) e resolvendo a equação diferencial resultante, encontra-se a expressão para o Tensor de Galerkin para problemas bidimensionais:

$$G_{ij}^* = -\frac{r^2}{8\pi\mu} (\ln r - 1 + K) \delta_{ij} \quad (4.7)$$

Substituindo esse último resultado na equação (4.1), chega-se à expressão da solução fundamental para os deslocamentos para o método do Tensor de Galerkin, definida por:



$$u_{ij}^*(\xi, X) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \{(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} + C \delta_{ij}\} \quad (4.8)$$

Onde  $C$  é uma constante dada por:

$$C = \frac{1}{2} + (3-4\nu)K \quad (4.9)$$

A constante  $C$  corresponde matematicamente a uma translação de corpo rígido e não influencia no valor das tensões e das deformações (KATSIKADELIS, 2002), contudo, a mesma interfere no resultado dos deslocamentos do MEC e precisa ser adequadamente definida, pois ela afeta o condicionamento numérico da solução bidimensional (NEVES; BREBBIA, 1991). O efeito dessa constante no MECID será avaliado no capítulo 6.

Quando  $C = 0$ , a solução fundamental se reduz à solução de Kelvin para um domínio  $\Omega^* + \Gamma^*$  infinito, conforme apresentado na seção 3.2, que é utilizada em problemas elásticos na qual a força de corpo é desprezada (BREBBIA e DOMINGUES, 1992) e também é a solução fundamental aplicada no MECDR (NARDINI e BREBBIA, 1983).

Se for usado o valor de  $K = 0$ , a constante  $C$  será igual à:

$$C = \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

Esse valor de  $C$  é utilizado tanto para o método utilizando o Tensor de Galerkin (CRUSE, 1977) quanto para a técnica da Múltipla Reciprocidade (NEVES e BREBBIA, 1991).

Outros valores para  $K$  também são definidos, como por exemplo, Brebbia et al. (1984) usam  $K = 1$  no Tensor de Galerkin, o que resulta em:

$$C = \frac{7-8\nu}{2} \quad (4.11)$$

Esse mesmo valor também foi testado no MMR por Neves e Brebbia (1991).

A solução fundamental das forças de superfície para o método do Tensor de Galerkin continua sendo a solução de Kelvin, apresentada em (3.19), pois a mesma é gerada a partir das derivadas de (4.8), que tornam o termo com a constante  $C$  nula.

### 4.3 FORÇA GRAVITACIONAL CONSTANTE

Um corpo de massa específica  $\rho$  constante, sobre o qual atua um campo gravitacional  $g_j$  também constante, sofrerá a ação de uma força gravitacional constante, denominada de peso próprio, que será dada por:

$$b_j = \rho g_j \quad (4.12)$$

A equação (4.12), em sua forma vetorial, será dada por:

$$\vec{b} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \rho g \end{matrix} \right\} \quad (4.13)$$

Substituindo o valor de (4.12) na equação (4.2), por ser constante,  $b_j$  sai da integral, resultando na expressão (4.14):

$$B_i = b_j \int_{\Omega} G_{ij,kk}^* - \frac{1}{(1-2\nu)} G_{ik,kj}^* d\Omega \quad (4.14)$$

Aplicando o teorema da divergência, obtém-se a equação abaixo:

$$B_i = b_j \int_{\Gamma} \left[ G_{ij,k}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,j}^* \right] n_k d\Gamma \quad (4.15)$$

Derivando o Tensor de Galerkin definido em (4.7) e substituindo o resultado em (4.15), após as devidas manipulações, chega-se à integral de contorno para força gravitacional constante:

$$B_i = b_j \int_{\Gamma} -\frac{r}{8\pi\mu} \left\{ [2 \ln r - 1 + 2K] \left( r_{,k} n_k \delta_{ij} - \frac{1}{2(1-\nu)} r_{,j} n_i \right) \right\} d\Gamma \quad (4.16)$$

Sendo  $P_{ij}$  a expressão que está dentro da integral, a equação (4.16) pode ser escrita de forma mais simplificada, como se segue:

$$B_i = b_j \int_{\Gamma} P_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{P}_i d\Gamma \quad (4.17)$$

Os valores de  $\hat{P}_i$  para  $K = 0$  e para  $K = 1$  são apresentados nas equações (4.18) e (4.19), respectivamente, que são as mesmas apresentadas por Cruse (1977) e por Brebbia et al. (1984).

$$\hat{P}_i = -\frac{r}{8\pi\mu} \left\{ [2 \ln r - 1] \left( b_i r_{,k} n_k \delta_{ij} - \frac{1}{2(1-\nu)} b_k r_{,k} n_i \right) \right\} \quad (4.18)$$

$$\hat{P}_i = -\frac{r}{8\pi\mu} \left\{ [2 \ln r + 1] \left( b_i r_{,k} n_k \delta_{ij} - \frac{1}{2(1-\nu)} b_k r_{,k} n_i \right) \right\} \quad (4.19)$$

Nota-se que a única diferença entre as expressões é o sinal da constante 1 dentro dos colchetes. Vale ressaltar que, em ambas as equações, os termos  $r_{,k} n_k$  e  $r_{,k} b_k$  representam um produto escalar entre o vetor radial unitário  $\vec{r}/r$  com o vetor normal ao contorno  $\vec{n}$  e com o vetor da força de corpo  $\vec{b}$ , respectivamente. Como  $\vec{n}$  também é um vetor unitário,  $r_{,k} n_k$  equivale ao cosseno entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$ . Matematicamente, tem-se:

$$r_{,k} n_k = \frac{r_1 n_1}{r} + \frac{r_2 n_2}{r} = \cos(\vec{r}, \vec{n}) \quad (4.20)$$

$$r_{,k} b_k = \frac{r_1 b_1}{r} + \frac{r_2 b_2}{r} \quad (4.21)$$

A equação (4.17) é então discretizada para ser somada ao sistema (3.39), formando o sistema resultante do MEC com força de corpo. Essa etapa será desenvolvida na seção 4.6.

#### 4.4 FORÇA CENTRÍFUGA

Considerando um corpo em rotação com velocidade angular dada por  $\omega_i$ , com eixos de rotação coincidentes com os eixos coordenados do sistema, o corpo estará submetido a uma força inercial denominada força centrífuga, cujas componentes são dadas pela equação abaixo (BREBBIA et al., 1984):

$$b_j = g_{ij} x_i \quad (4.22)$$

Em que  $g_{ij}$  é definida pelas componentes da velocidade angular  $\omega_i$ , apresentada na equação (4.23), e  $x_i$  é posição de uma partícula do corpo em relação aos eixos coordenados.

$$g_{ij} = \rho(\delta_{ij}\omega_m\omega_m - \omega_i\omega_j) \quad (4.23)$$

A forma matricial de  $g_{ij}$  dependerá do tipo de rotação aplicada sobre o corpo. Para problemas bidimensionais, duas situações podem ocorrer:

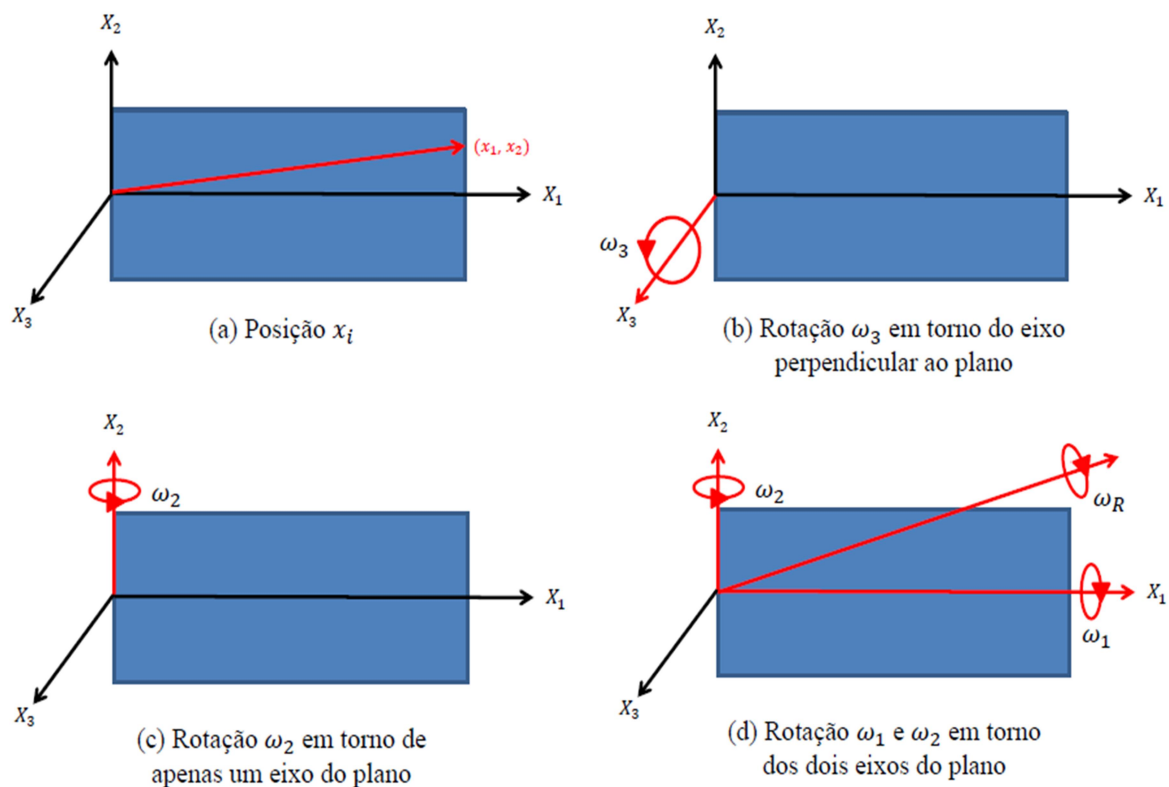
- Rotação perpendicular ao plano do problema;
- Rotação no mesmo plano do problema.

Na segunda situação, podem ocorrer ainda outros dois casos:

- Rotação apenas em um dos eixos;
- Rotação nos dois eixos.

Para melhor elucidar essas situações, a Figura 4.1 apresenta cada um dos casos descritos acima:

Figura 4.1 - Velocidades angulares para problemas bidimensionais



Fonte: Autoria própria

Para o caso de rotação em torno do eixo perpendicular,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  e com isso a equação (4.23) será igual à:

$$g_{ij} = \rho\omega_3^2\delta_{ij} \quad (4.24)$$

Conseqüentemente, as componentes da força de corpo para essa situação, substituindo (4.24) em (4.22), serão iguais à:

$$\vec{b} = \begin{cases} \rho\omega_3^2x_1 \\ \rho\omega_3^2x_2 \end{cases} \quad (4.25)$$

Se a rotação ocorrer em torno de apenas um dos eixos do plano do problema, como o mostrado na Figura 4.1(c),  $\omega_1 = \omega_3 = 0$  e, assim,  $g_{ij}$  terá apenas o elemento  $g_{11} = \rho\omega_2^2$ , os demais valores serão nulos. Substituindo esse resultado em (4.22), a força de corpo será dada por:

$$\vec{b} = \begin{cases} \rho\omega_2^2x_1 \\ 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

O último caso, apenas  $\omega_3 = 0$ , logo a matriz correspondente de  $g_{ij}$  será completa e  $b_j$ , em sua forma matricial, apresentará a seguinte estrutura:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \omega_2^2 & -\omega_1\omega_2 \\ -\omega_1\omega_2 & \omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \quad (4.27)$$

Na presente dissertação, as duas primeiras situações foram simuladas numericamente, como será visto no Capítulo 6.

Definidas as forças de corpo, a próxima etapa é encontrar a equação integral de contorno da equação (4.2). Substituindo (4.22) em (4.2), chega-se expressão abaixo:

$$B_i = g_{jk} \int_{\Omega} x_j \left[ G_{ik,mm}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,mk}^* \right] d\Omega \quad (4.28)$$

A variável  $x_j$  presente na integral de (4.28) impede a aplicação direta do teorema da divergência, como foi feito na força gravitacional constante. Dessa forma, inicialmente é necessário realizar uma integração por partes, para obter a equação (4.29):

$$B_i = g_{jk} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} (x_j G_{ik,m}^*) - G_{ik,j}^* + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ G_{ij,k}^* - \frac{\partial}{\partial x_m} (x_j G_{im,k}^*) \right] \right\} d\Omega \quad (4.29)$$

Sobre a equação (4.29) aplica-se o teorema da divergência para obter uma equação integral de contorno:

$$B_i = \int_{\Gamma} \left\{ g_{jk} x_j \left[ G_{ik,m}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,k}^* \right] n_m - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} G_{ik}^* n_j g_{jk} \right\} d\Gamma \quad (4.30)$$

Substituindo o Tensor de Galerkin, equação (4.7), e sua derivada na expressão acima, encontra-se a equação integral de contorno final, aplicável em todas as situações descritas anteriormente:

$$B_i = \int_{\Gamma} -\frac{r}{8\pi\mu} \left\{ [2 \ln r - 1 + 2K] \left( r_{,k} n_k x_s g_{si} - \frac{r_{,m} g_{ms} x_s n_i}{2(1-\nu)} \right) - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} r (\ln r - 1 + K) n_m g_{mi} \right\} d\Gamma \quad (4.31)$$

Se forem substituídos os valores de  $K = 0$  e  $K = 1$  na equação (4.31), encontra-se mais uma vez as expressões de  $\hat{P}_i$  apresentadas por Cruse (1977) e por Brebbia et al. (1984), conforme a seguir:

$$\hat{P}_i = \frac{-r}{8\pi\mu} \left\{ [2 \ln r - 1] \left( r_{,k} n_k x_s g_{si} - \frac{r_{,m} g_{ms} x_s n_i}{2(1-\nu)} \right) - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} r (\ln r - 1) n_m g_{mi} \right\} \quad (4.32)$$

$$\hat{P}_i = \frac{-r}{8\pi\mu} \left\{ [2 \ln r + 1] \left( r_{,k} n_k x_s g_{si} - \frac{r_{,m} g_{ms} x_s n_i}{2(1-\nu)} \right) - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} r (\ln r) n_m g_{mi} \right\} \quad (4.33)$$

Nas equações anteriores, o que irá diferenciar um problema do outro são os valores contidos na matriz  $g_{ij}$  das velocidades angulares de cada situação descrita no início dessa seção, cujos valores foram apresentados nas equações (4.24) à (4.27).

#### 4.5 FORÇA GRAVITACIONAL VARIANDO LINERMENTE

Um caso interessante de ser avaliado é quando a força gravitacional varia linearmente sobre o corpo. Essa situação hipotética pode ser definida a partir de uma variação linear da massa específica do corpo. Partindo desse pressuposto, a força de corpo será dada por:

$$\vec{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho g x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Essa estrutura é muito similar ao caso em que a força centrífuga é definida pela rotação em torno de um eixo do plano do problema, caracterizado na Figura 4.1(c), em que a força de corpo é dada pela equação (4.26). Sendo assim, é possível definir uma matriz  $g_{ij}$  correspondente para essa situação, permitindo que a equação (4.34) seja reescrita conforme abaixo:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Logo, a integral de contorno apresentada na equação (4.31) e as expressões (4.32) e (4.33), substituídas na integral de contorno (4.17), podem ser utilizadas para esse problema, pois, matematicamente, os problemas são equivalentes.

#### 4.6 DISCRETIZAÇÃO DA INTEGRAL DA FORÇA DE CORPO

Definida a integral de contorno para a força de corpo, a mesma é discretizada de forma semelhante à que foi apresentada na seção 3.3, com a diferença de que não são utilizadas as funções de interpolação. Com isso, a equação (4.17) em sua forma discretizada será dada por:

$$B_i = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \hat{P}_i(\xi, X) d\Gamma_e = \sum_{e=1}^N \sum_{q=1}^{NPG} \hat{P}_i w_q |J_e| \quad (4.36)$$

Aplicando a equação (4.36) para cada ponto fonte  $\xi$  no contorno, chega-se ao sistema de equações resultante para o MEC com forças de corpo, conforme apresentado por Brebbia e Walker (1980):

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} + \{B\} \quad (4.37)$$

## 5 MÉTODO DA INTERPOLAÇÃO DIRETA APLICADA À ELASTICIDADE LINEAR

### 5.1 PROCEDIMENTO DE INTERPOLAÇÃO

Como já citado anteriormente, nas diferentes técnicas do MEC, deseja-se realizar procedimentos matemáticos adicionais que transformem a integral de domínio da força de corpo da equação (3.15) em uma integral de contorno. Uma forma de fazer isso é aplicar o conceito de interpolação, que consiste em aproximar uma dada função por uma combinação linear de funções auxiliares, ponderadas pelos coeficientes dessa combinação linear. A partir disso, aplica-se a integração por partes e/ou teorema da divergência, transformando a integral de domínio em uma integral de contorno.

A técnica de interpolação foi inicialmente aplicada em problemas elásticos estáticos no método da dupla reciprocidade (MECDR), no qual apenas a força de corpo  $b_j^*(X)$  da integral de domínio é interpolada (RIBEIRO, 1991)

$$b_j(X) = \sum_{k=1}^{NT} \alpha_j^k F^k(X^k, X) \quad (5.1)$$

Onde  $\alpha_j^k$  são os coeficientes a serem determinados para cada direção  $j$  e  $F^k(X^k, X)$  são as funções auxiliares de interpolação que pertencem a classe das funções de base radial (FBR). Essas funções possuem seu argumento definido pela distância euclidiana entre o ponto base  $X^k$  e o ponto do domínio  $X$  (BUHMANN, 2003; SCHABACK, 2007). Na equação (5.1),  $NT$  corresponde ao total de pontos base utilizados na interpolação.

Uma proposta mais recente para se trabalhar a integral de domínio é o MECID, que também é uma técnica de interpolação, na qual todo o núcleo da integral de domínio é interpolado diretamente utilizando funções de base radial (LOEFFLER, CRUZ e BULCÃO, 2015; LOEFFLER et al., 2017). Aplicando esse método para o problema elástico, o núcleo da integral de domínio da equação (3.15) será dado por:

$$u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) = \sum_{k=1}^{NT} \xi \alpha_i^k F^k(X^k, X) \quad (5.2)$$



Inserindo o delta de Kronecker na equação acima e omitindo, apenas por simplicidade, mesmo não sendo uma notação indicial, o somatório em relação à  $k$ , tem-se a seguinte expressão:

$$u_{ij}^*(\xi, X)b_j(X) = \xi \alpha_p^k \delta_{pi} F^k(X^k, X) \quad (5.3)$$

Logo, a integral de domínio em (3.15) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X)b_j(X) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \alpha_p^k \delta_{pi} F^k(X^k, X) d\Omega \quad (5.4)$$

Para as simulações realizadas neste trabalho foram utilizadas as FBR's constante, simples, cúbica e placa fina (Tabela 5.1). As duas primeiras foram utilizadas por Brebbia e Nardini (1983) para o MECDR aplicado a problemas elásticos dinâmicos e suas definições também são apresentadas por Brebbia e Domingues (1992). As duas últimas, além da radial simples, foram testadas em problemas de Poisson (LOEFFLER, CRUZ e BULCÃO, 2015) e Helmholtz (LOEFFLER et al., 2015) com o MECID.

No MECID, assim como no MECDR, a integral de domínio é transformada em uma integral de contorno por meio de uma primitiva  $\Psi^k$  da função de interpolação. As primitivas de cada FBR são apresentadas na Tabela 5.1 e desenvolvidas no Apêndice A.

A partir da equação (5.4), o desenvolvimento do MECID é apresentado abaixo:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha_p^k \delta_{pi} F^k(X^k, X) d\Omega = \xi \alpha_p^k \int_{\Omega} \delta_{pi} \Psi_{,mm}^k(X^k, X) d\Omega \quad (5.5)$$

Aplicando o teorema da divergência, chega-se a integral de contorno:

$$\xi \alpha_p^k \int_{\Omega} \delta_{pi} \Psi_{,mm}^k(X^k, X) d\Omega = \xi \alpha_p^k \int_{\Gamma} \delta_{pi} \Psi_{,m}^k(X^k, X) n_m d\Gamma = \xi \alpha_p^k \int_{\Gamma} \eta_{pi}^k(X^k, X) d\Gamma \quad (5.6)$$

Na equação acima,  $\eta_{pi}^k$  representa a derivada direcional da função primitiva  $\Psi^k$ , onde  $n_m$  são as componentes do vetor normal ao contorno. As expressões de  $\eta_{pi}^k$  também são mostradas na tabela 5.1 e seu desenvolvimento pode ser visto no Apêndice A.

Importante salientar que a equação (5.6) é aplicada a cada ponto fonte  $\xi$ , cuja interpolação é realizada pela varredura de todos os pontos base  $X^k$  em relação aos pontos do domínio  $X$ , ponderados pelos coeficientes  ${}^\xi\alpha_p^k$  em cada direção  $p$ .

Tabela 5.1 – Funções de base radial e suas primitivas

Função	$F = \Psi_{,mm}$	$\Psi$	$\Psi_{,m}n_m$
Constante	1	$\frac{r^2}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)r_m n_m$
Radial simples	$r$	$\frac{r^3}{9}$	$\left(\frac{r}{3}\right)r_m n_m$
Radial cúbica	$r^3$	$\frac{r^5}{25}$	$\left(\frac{r^3}{5}\right)r_m n_m$
Placa fina	$r^2 \ln r$	$\frac{r^4}{32}(2 \ln r - 1)$	$\frac{r^2}{16}(4 \ln r - 1)r_m n_m$

Fonte: Autoria própria

Vale ressaltar que, em todas as FBR's da Tabela 5.1, os termos  $r_m n_m$  representam um produto escalar entre o vetor radial  $r$  e o vetor normal ao contorno  $n$ , ou seja:

$$r_m n_m = r_1 n_1 + r_2 n_2 \quad (5.7)$$

Após todas essas etapas, pode-se reescrever a equação integral (3.15) como uma equação integral de contorno, conforme a equação (5.8):

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, X)u_j(X)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, X)p_j(X)d\Gamma + {}^\xi\alpha_p^k \int_{\Gamma} \eta_{pi}^k(X^k, X)d\Gamma \quad (5.8)$$

Comparativamente à técnica do Tensor de Galerkin, um ponto importante a destacar do MECID consiste da necessidade de introdução de pontos fonte internos, para atuar como pontos interpolação. Tais pontos são reportados na literatura como polos. Como a transformação da integral de domínio em uma integral de contorno é feita através de primitivas das funções radiais, é preciso ter os valores internos da ação de domínio como informação, melhorando assim a aproximação. A inserção de tais pontos onera a solução do MECID, aumentando o tamanho das matrizes; porém, como em muitos casos a obtenção de

deslocamentos em pontos internos se faz necessária, há uma relativa compensação no tempo computacional dispendido na introdução de tais pontos.

## 5.2 PROCEDIMENTO DE REGULARIZAÇÃO

No processo de interpolação utilizado no MECID, singularidades surgem devido à coincidência geométrica de pontos fonte com pontos base da interpolação. Para contornar esse problema, Loeffler e Mansur (2017) aplicam o procedimento de regularização no MECID para problemas de Helmholtz. Esse procedimento foi utilizado por Pessolani (2002) em uma formulação alternativa do MEC (hierárquica adaptativa Hp) aplicado em problemas elásticos e, aqui, é usada para eliminar as singularidades (BRAGA, 2006).

O procedimento de regularização permite que uma mesma nuvem de pontos possa ser utilizada para formar o conjunto dos pontos fonte e o conjunto dos pontos base, sem a necessidade de implementar um procedimento de descolamento ou a introdução de uma nova nuvem de pontos.

Partindo da integral de domínio da equação (3.15), designada na equação (5.9) por  $B_i$ , soma-se a ela um termo nulo, dado pela diferença entre duas integrais iguais sobre o ponto fonte:

$$\begin{aligned} B_i &= \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) d\Omega + \left[ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega - \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega \right] \\ &= \left[ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) d\Omega - \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega \end{aligned} \quad (5.9)$$

Em (5.9), nota-se que quando  $X = \xi$ , isto é, quando o ponto base coincide com o ponto fonte, o termo em colchetes se torna nulo e a singularidade é eliminada. Nos demais pontos, essa diferença é interpolada usando o procedimento do MECID apresentado anteriormente, resultando na expressão (5.10):

$$\left[ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) d\Omega - \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega \right] = \xi \alpha_p^k \int_{\Gamma} \eta_{pi}^k(X^k, X) d\Gamma \quad (5.10)$$

A última integral da equação (5.9) é transformada em uma integral de contorno por meio do Tensor de Galerkin, cuja estrutura se encontra na equação (4.7). Porém, um ponto importante precisa ser considerado com relação ao Tensor de Galerkin. Em problemas escalares, a

segunda derivada do Tensor de Galerkin se reduz à solução fundamental (BREBBIA e DOMINGUES, 1992), e no caso da elasticidade, em problemas tridimensionais, a equação (4.1) gera a solução fundamental dos deslocamentos determinada por Kelvin (BREBBIA et al., 1984). Mas, como foi vista na seção 4.2, em problemas de elasticidade bidimensional, a equação (4.1) produz a solução fundamental dada pela equação (4.8), que difere da solução de Kelvin, equação (3.18), pelo acréscimo de uma constante, ou seja:

$$G_{ij,kk}^* - \frac{1}{(1-2\nu)} G_{ik,kj}^* = u_{ij}^*(\xi, X) + \left[ -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} C \delta_{ij} \right] \quad (5.11)$$

Assim, nota-se um desacoplamento entre as soluções fundamentais, pois o procedimento de interpolação do MECID utiliza a solução fundamental de Kelvin e o procedimento de regularização usa a solução fundamental proveniente do Tensor de Galerkin. Logo, é necessário que a constante entre colchetes da equação (5.11) seja subtraída no procedimento de regularização para que a solução fundamental seja a mesma em todo o equacionamento do MECID:

$$u_{ij}^*(\xi, X) = \left[ G_{ij,kk}^* - \frac{1}{(1-2\nu)} G_{ik,kj}^* \right] - D \delta_{ij} \quad (5.12)$$

Onde  $D$  é a constante entre colchetes da equação (5.11). Importante ressaltar que a equação (5.12) será utilizada apenas no procedimento de regularização. No procedimento de interpolação, será utilizada a solução fundamental de Kelvin definida na equação (3.18).

Retomando a integral de domínio da equação (5.9), sendo  $b_j(\xi)$  um valor definido no ponto  $X = \xi$ , esse pode sair da integral, e  $u_{ij}^*(\xi, X)$  será dado pela equação (5.12). Desta forma, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega = b_j(\xi) \left\{ \int_{\Omega} \left[ G_{ij,kk}^* - \frac{1}{(1-2\nu)} G_{ik,kj}^* \right] d\Omega - \int_{\Omega} D \delta_{ij} d\Omega \right\} \quad (5.13)$$

Logo:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega = b_j(\xi) \int_{\Omega} \left[ G_{ij,kk}^* - \frac{1}{(1-2\nu)} G_{ik,kj}^* \right] d\Omega - b_i(\xi) \int_{\Omega} D d\Omega \quad (5.14)$$

A primeira integral do lado direito da equação (5.14) será levada ao contorno da mesma maneira como foi feito na seção 4.3. Aplicando o teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} \left[ G_{ij,kk}^* - \frac{1}{(1-2\nu)} G_{ik,kj}^* \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ G_{ij,k}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,j}^* \right] n_k d\Gamma = \int_{\Gamma} P_{ij} d\Gamma \quad (5.15)$$

Logo, pela equação (4.16) tem-se:

$$\int_{\Gamma} P_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma} -\frac{r}{8\pi\mu} \left\{ [2 \ln r - 1 + 2K] \left( r_{,k} n_k \delta_{ij} - \frac{1}{2(1-\nu)} r_{,j} n_i \right) \right\} d\Gamma \quad (5.16)$$

A segunda integral do lado direito da equação (5.14) será levada ao contorno utilizando um conceito interessante do teorema de Green. Como  $D$  é uma constante, a mesma pode ser retirada da integral de domínio, sobrando o valor unitário nessa integral. Esse valor corresponde ao cálculo da área do domínio bidimensional:

$$\int_{\Omega} D d\Omega = D \int_{\Omega} 1 d\Omega = D \cdot A \quad (5.17)$$

Onde  $A$  é a área do domínio  $\Omega$ .

Para essa situação, o teorema de Green afirma que qualquer função vetorial que possua o seu divergente igual à unidade pode ser utilizada para o cálculo da área por meio do contorno (COURANT, 1936 ; STEWART, 2013). Utilizando a forma vetorial do teorema de Green em notação indicial, tem-se:

$$A = \int_{\Omega} 1 d\Omega = \int_{\Omega} f_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} f_i n_i d\Gamma \quad (5.18)$$

Em que  $f_i$  representa uma função vetorial.

Como é demonstrado no Apêndice B, a FBR constante, definida na primeira linha da Tabela (5.1), satisfaz esse critério e foi utilizada para calcular essa integral de domínio. Assim, a equação (5.17) será igual à:

$$\int_{\Omega} D d\Omega = \frac{D}{2} \int_{\Gamma} x_m n_m d\Gamma \quad (5.19)$$

Aplicando os resultados de (5.15) e (5.19) na equação (5.14), uma nova expressão para a integral de domínio da equação (5.9) é obtida:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, X) b_j(\xi) d\Omega = b_j(\xi) \int_{\Gamma} P_{ij} d\Gamma - b_i(\xi) \frac{D}{2} \int_{\Gamma} x_m n_m d\Gamma \quad (5.20)$$

Substituindo os resultados de (5.10) e (5.20) em (5.9), e substituindo a nova expressão resultante em (3.15), determina-se a equação integral de contorno do MECID regularizado para problemas elásticos, dada pela expressão (5.21), que é a equação discretizada e implementada nesta dissertação:

$$\begin{aligned} & c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, X) u_j(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, X) p_j(X) d\Gamma \\ &= \xi \alpha_p^k \int_{\Gamma} \eta_{pi}^k(X^k, X) d\Gamma + b_j(\xi) \int_{\Gamma} P_{ij} d\Gamma - b_i(\xi) \frac{D}{2} \int_{\Gamma} x_m n_m d\Gamma \end{aligned} \quad (5.21)$$

### 5.3 PROCEDIMENTO DE DISCRETIZAÇÃO

A discretização do lado esquerdo da equação (5.21) já foi apresentada no capítulo 3 e geram as matrizes tradicionais H e G. O procedimento de discretização do lado direito é feito de forma similar ao apresentado por Loeffler e Mansur (2017), na qual para cada ponto fonte  $\xi$  uma varredura é feita entre todos os pontos base de interpolação  $X^k$  em relação aos pontos de domínio X, porém com a diferença de que na elasticidade as grandezas envolvidas no problema são vetoriais, isto é, a discretização é efetuada para cada direção i.

Tomando inicialmente a primeira integral do lado direito de (5.21) e discretizando o contorno em M elementos tem-se:

$$\xi A_i = \xi \alpha_p^k \int_{\Gamma} \eta_{pi}^k(X^k, X) d\Gamma = \xi \alpha_p^k \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} \eta_{pi}^k(X^k, X_{\Gamma_e}) d\Gamma_e \quad (5.22)$$

Logo:

$${}^{\xi}A_i = {}^{\xi}\alpha_p^k \int_{\Gamma_1} \delta_{pi} \Psi_{,m}^k(X^k, X_{\Gamma_1}) n_m d\Gamma_1 + \dots + {}^{\xi}\alpha_p^k \int_{\Gamma_M} \delta_{pi} \Psi_{,m}^k(X^k, X_{\Gamma_M}) n_m d\Gamma_M \quad (5.23)$$

Para cada elemento aplica-se a varredura da interpolação do MECID. Colocando em evidência os coeficientes de ponderação de cada ponto base, chega-se à (5.24):

$${}^{\xi}A_i = {}^{\xi}\alpha_p^1 \left[ \int_{\Gamma_1} \delta_{pi} \Psi_{,m}^1(X^1, X_{\Gamma_1}) n_m d\Gamma_1 + \dots + \int_{\Gamma_M} \delta_{pi} \Psi_{,m}^n(X^n, X_{\Gamma_M}) n_m d\Gamma_M \right] + \dots \quad (5.24)$$

$$+ {}^{\xi}\alpha_p^n \left[ \int_{\Gamma_1} \delta_{pi} \Psi_{,m}^1(X^1, X_{\Gamma_1}) n_m d\Gamma_1 + \dots + \int_{\Gamma_M} \delta_{pi} \Psi_{,m}^n(X^n, X_{\Gamma_M}) n_m d\Gamma_M \right]$$

A equação (5.24) na forma matricial será dada por:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{\xi} = \begin{bmatrix} N_{11}^1 & N_{21}^1 & N_{11}^2 & N_{21}^2 & \dots & N_{11}^n & N_{21}^n \\ N_{12}^1 & N_{22}^1 & N_{12}^2 & N_{22}^2 & \dots & N_{12}^n & N_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \end{bmatrix}^{\xi} \quad (5.25)$$

Em (5.25), os elementos das submatrizes  $N^k$  são iguais aos somatórios das integrais de contorno entre colchetes da equação (5.24). A matriz  $[N]$  é a mesma para todos os pontos fonte  $\xi$ . Os valores dos coeficientes de ponderação podem ser calculados de forma explícita para cada ponto  $\xi$ , de acordo com os procedimentos a seguir.

Partindo do conceito primário do MECID, dado pela equação (5.3), a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$\begin{cases} u_{11}^*(\xi, X)b_1(X) + u_{12}^*(\xi, X)b_2(X) = {}^{\xi}\alpha_1^k \delta_{11} F^k + {}^{\xi}\alpha_2^k \delta_{21} F^k \\ u_{21}^*(\xi, X)b_1(X) + u_{22}^*(\xi, X)b_2(X) = {}^{\xi}\alpha_1^k \delta_{12} F^k + {}^{\xi}\alpha_2^k \delta_{22} F^k \end{cases} \quad (5.26)$$

Cuja forma matricial é

$$[F] \{ \xi \alpha_p \} = [ \xi \Lambda ] \{ b_j \} \quad (5.27)$$

Multiplicando à esquerda ambos os lados da igualdade pela inversa de  $[F]$ , isola-se o vetor dos coeficientes de ponderação, conforme apresentado por Loeffler, Cruz e Bulcão (2015):

$$\{ \xi \alpha_p \} = [F]^{-1} [ \xi \Lambda ] \{ b_j \} \quad (5.28)$$

O vetor das forças de corpo  $\{ b_j \}$ , devido ao procedimento de regularização, possuirá seus elementos dados por:

$$b_j = b_j(X) - b_j(\xi) \quad (5.29)$$

Desta forma, o sistema definido em (5.28), para problemas elásticos, será definido por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \end{bmatrix}^{\xi} = \begin{bmatrix} [F^1(X^1, X_1) & 0] & \cdots & [F^1(X^1, X_n) & 0] \\ [0 & F^1(X^1, X_1)] & \ddots & [0 & F^1(X^1, X_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [F^n(X^n, X_1) & 0] & \cdots & [F^n(X^n, X_n) & 0] \\ [0 & F^n(X^n, X_1)] & \cdots & [0 & F^n(X^n, X_n)] \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [u_{11}^*(\xi, X_1) & u_{12}^*(\xi, X_1)] & \cdots & 0 & 0 \\ [u_{21}^*(\xi, X_1) & u_{22}^*(\xi, X_1)] & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{11}^*(\xi, X_n) & u_{12}^*(\xi, X_n)] \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{21}^*(\xi, X_n) & u_{22}^*(\xi, X_n)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1(X_1) - b_1(\xi) \\ b_2(X_1) - b_2(\xi) \\ \vdots \\ b_1(X_n) - b_1(\xi) \\ b_2(X_n) - b_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Da mesma maneira que a matriz  $[N]$  em (5.25), a matriz  $[F]$  e sua inversa  $[F]^{-1}$  são fixas para todos os pontos de interpolação. Substituindo (5.30) em (5.25) e realizando o produto matricial entre  $[N]$  e  $[F]^{-1}$ , obtém uma nova matriz  $[S]$ , também constante para todos os pontos  $\xi$ :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{\xi} = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{21}^1 \\ S_{12}^1 & S_{22}^1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} S_{11}^n & S_{21}^n \\ S_{12}^n & S_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_{11}^* & u_{12}^*]^1 & \cdots & 0 & 0 \\ [u_{21}^* & u_{22}^*]^1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{11}^* & u_{12}^*]^n \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{21}^* & u_{22}^*]^n \end{bmatrix}^{\xi} \begin{bmatrix} b_1^1 - b_1(\xi) \\ b_2^1 - b_2(\xi) \\ \vdots \\ b_1^n - b_1(\xi) \\ b_2^n - b_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$



Fazendo as multiplicações matriciais definidas em (5.31), encontra-se uma nova expressão para  ${}^\xi A_i$ :

$${}^\xi A_i = \sum_{k=1}^n S_{pi}^k {}^\xi \Lambda_{pj}^k b_j^k - \left( \sum_{k=1}^n S_{ip}^k {}^\xi \Lambda_{pj}^k \right) b_j(\xi) \quad (5.32)$$

Nota-se que em (5.32), quando  $X = \xi$ , a singularidade é eliminada, pois os termos de  $b_j^k$  e de  $b_j(\xi)$  se anulam. Aplicando a equação (5.32) para cada ponto fonte do problema, obtém-se o sistema global abaixo:

$$\begin{bmatrix} {}^1 A_1 \\ {}^1 A_2 \\ \vdots \\ {}^n A_1 \\ {}^n A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^n \begin{bmatrix} -S_{11}^k & {}^1 \Lambda_{11}^k & -S_{21}^k & {}^1 \Lambda_{21}^k \\ -S_{12}^k & {}^1 \Lambda_{12}^k & -S_{22}^k & {}^1 \Lambda_{22}^k \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} S_{11}^n & {}^1 \Lambda_{11}^n & S_{21}^n & {}^1 \Lambda_{21}^n \\ S_{12}^n & {}^1 \Lambda_{12}^n & S_{22}^n & {}^1 \Lambda_{22}^n \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} S_{11}^1 & {}^n \Lambda_{11}^1 & S_{21}^1 & {}^n \Lambda_{21}^1 \\ S_{12}^1 & {}^n \Lambda_{12}^1 & S_{22}^1 & {}^n \Lambda_{22}^1 \end{bmatrix} & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} -S_{11}^k & {}^n \Lambda_{11}^k & -S_{21}^k & {}^n \Lambda_{21}^k \\ -S_{12}^k & {}^n \Lambda_{12}^k & -S_{22}^k & {}^n \Lambda_{22}^k \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_1^n \\ b_2^n \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Agora será desenvolvida a segunda integral do lado direito da equação (5.21). Discretizando o contorno em M elementos tem-se:

$$\begin{aligned} {}^\xi Z_i &= b_j(\xi) \int_{\Gamma} P_{ij}(\xi, X) d\Gamma = b_j(\xi) \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} P_{ij}(\xi, X) d\Gamma_e = \\ & b_j(\xi) \left[ \int_{\Gamma_1} P_{ij}(\xi, X_{\Gamma_1}) d\Gamma_1 + \cdots + \int_{\Gamma_M} P_{ij}(\xi, X_{\Gamma_M}) d\Gamma_M \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

O sistema resultante da discretização será dada por:

$$\begin{bmatrix} {}^1 Z_1 \\ {}^1 Z_2 \\ \vdots \\ {}^n Z_1 \\ {}^n Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^1 & P_{21}^1 \\ P_{12}^1 & P_{22}^1 \end{bmatrix} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{bmatrix} P_{11}^n & P_{21}^n \\ P_{12}^n & P_{22}^n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_1^n \\ b_2^n \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Em (5.35), os elementos das submatrizes  $P_{ij}^\xi$  são iguais aos somatórios das integrais de contorno entre colchetes da equação (5.34). Nota-se que a matriz de (5.35) é diagonal, pois seus elementos são gerados apenas quando  $X = \xi$ , provenientes da regularização.

Por último, a terceira integral do lado direito da equação (5.21) é discretizada de forma semelhante ao que foi feito em  ${}^\xi Z_i$ . Chamando o termo de  ${}^\xi C$ , tem-se:

$${}^\xi C = \frac{D}{2} \int_{\Gamma} x_m n_m d\Gamma = \frac{D}{2} \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} x_m n_m d\Gamma_e \quad (5.36)$$

O valor de  ${}^\xi C$  é uma constante igual para todos os pontos fonte  $\xi$  e é aplicado sobre cada coordenada de  $b_i(\xi)$ .

$$\begin{bmatrix} {}^1 C_1 \\ {}^1 C_2 \\ \vdots \\ {}^n C_1 \\ {}^n C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^\xi C & 0 \\ 0 & {}^\xi C \end{bmatrix} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} {}^\xi C & 0 \\ 0 & {}^\xi C \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_1^n \\ b_2^n \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Por fim, pode-se definir uma nova matriz M da força de corpo, dado pela soma das equações matriciais (5.33) e (5.35) subtraídas de (5.37). Dessa forma, o sistema final do MECID regularizado para problemas elásticos estáticos é dado por:

$$[H]\{u\} - [G]\{p\} = [M]\{b\} \quad (5.38)$$

Onde o lado direito de (5.38) é igual à:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1 M_{11}^1 & {}^1 M_{12}^1 \\ {}^1 M_{21}^1 & {}^1 M_{22}^1 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} {}^1 M_{11}^n & {}^1 M_{12}^n \\ {}^1 M_{21}^n & {}^1 M_{22}^n \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} {}^n M_{11}^1 & {}^n M_{12}^1 \\ {}^n M_{21}^1 & {}^n M_{22}^1 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} {}^n M_{11}^n & {}^n M_{12}^n \\ {}^n M_{21}^n & {}^n M_{22}^n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_1^n \\ b_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1 A_1 \\ {}^1 A_2 \\ \vdots \\ {}^n A_1 \\ {}^n A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1 Z_1 \\ {}^1 Z_2 \\ \vdots \\ {}^n Z_1 \\ {}^n Z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^1 C_1 \\ {}^1 C_2 \\ \vdots \\ {}^n C_1 \\ {}^n C_2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Devido ao posicionamento dos pontos fonte e a sua varredura com relação aos demais pontos do domínio, as matrizes [H], [G] e [M] podem ser divididas em quatro submatrizes. Para melhor entender essa estrutura, a Figura 5.1 apresenta possíveis localizações dos pontos fonte

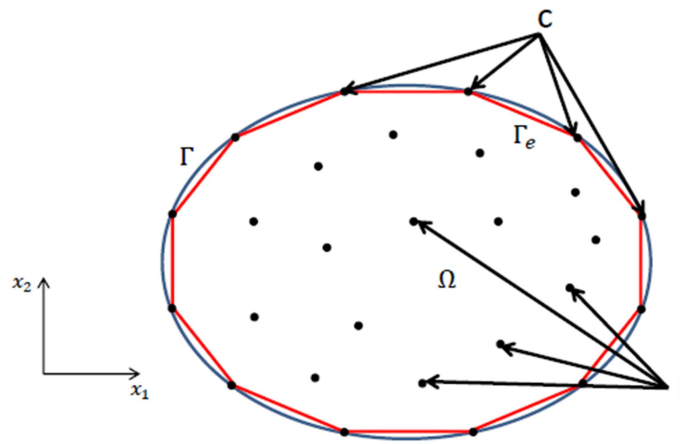
e pontos base, que podem ser no contorno, designados pelos pontos “c”, ou no interior do domínio, identificados pelos pontos “i”.

Assim, quatro possibilidades de interação entre os pontos são possíveis: contorno com contorno (cc), contorno com pontos internos (ci), interno com contorno (ic) e interno com interno (ii). Essas combinações resultam nas quatro submatrizes citadas anteriormente. Logo, o sistema (5.28) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_c \\ p_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_c \\ b_i \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

Em (5.40), as submatrizes  $0_{ci}$  e  $0_{ii}$  são matrizes nulas e a submatriz  $H_{ii}$  é diagonal.

Figura 5.1 - Localização dos pontos no contorno e no interior do domínio



Fonte: Adaptado de Barbosa (2019)

Ao serem impostas as condições de contorno, tanto naturais quanto essenciais, o sistema (5.38) também pode ser escrito na forma da equação (5.41):

$$\begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{p}} \\ H_{p\bar{u}} & H_{p\bar{p}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{p}} \\ G_{p\bar{u}} & G_{p\bar{p}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{p}} \\ M_{p\bar{u}} & M_{p\bar{p}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{b} \\ \bar{b} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Nos problemas analisados, os valores das forças de corpo são conhecidos em todos os pontos do domínio, e por esse motivo, o vetor  $\{b\}$  é formado apenas por valores prescritos. O sistema (5.41) pode ser resolvido utilizando um método de resolução de sistemas lineares, como já apresentado no capítulo 3, a partir do sistema (3.40).

Os sistemas matriciais (5.40) e (5.41) são similares aos apresentados por Loeffler et al. (2015) para problemas de Helmholtz.

## 6 TESTES NUMÉRICOS

### 6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Como apresentado na introdução do trabalho, foram realizados quatro testes numéricos para avaliar alguns parâmetros da técnica do Tensor de Galerkin e do MECID. Os resultados dos deslocamentos foram comparados com as soluções analíticas encontradas na literatura ou desenvolvidas no apêndice C. Foi utilizado erro médio relativo (EMR) para avaliar o desempenho numérico dos métodos, que em valores percentuais é dado por:

$$EMR(\%) = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{u_i^{ref} - u_i^{MEC}}{u_{maior}^{ref}} \right| \quad (6.1)$$

Onde:

- $u_i^{ref}$  = valor analítico de referência do ponto  $i$ ;
- $u_i^{MEC}$  = valor numérico da técnica do ponto  $i$ ;
- $u_{maior}^{ref}$  = maior valor analítico de referência da região em análise;

Os códigos de ambas as técnicas foram desenvolvidos em linguagem FORTRAN 90 e executados em um computador que possui as configurações apresentadas abaixo:

- Processador: Intel ® Core™ i5-4200U CPU @1.60GHz;
- Memória RAM: 4,00 GB (3,90 GB utilizáveis);
- Sistema operacional: Windows 10 Enterprise 64 bits;
- Armazenamento: Disco rígido de 1 TB.

Para as duas técnicas do MEC, foram utilizados elementos lineares e vinte pontos de Gauss para a integração numérica.

Por simplicidade, nos problemas com força gravitacional, foi considerada a aceleração da gravidade com módulo igual a 1 e, nos problemas com força centrífuga, a velocidade angular também foi igual à unidade:

- $g = 1$  (para força gravitacional)
- $\omega = 1$  (para força centrífuga)

Em todos os problemas foram adotados módulo de elasticidade e massa específica iguais à unidade:

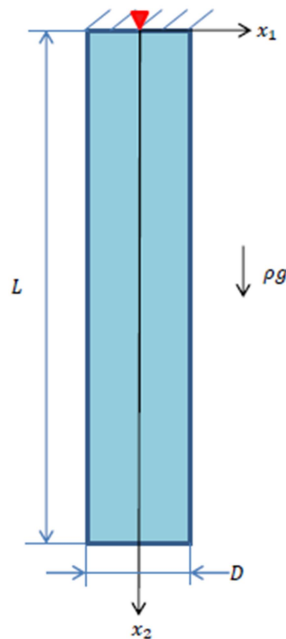
- $E = 1$
- $\rho = 1$

A partir dos valores numéricos encontrados e dos erros calculados, os resultados foram apresentados na forma de tabelas e gráficos gerados em Excel.

## 6.2 BARRA ESBELTA VERTICAL COM FORÇA GRAVITACIONAL CONSTANTE

O primeiro teste foi realizado com o caso mais simples de força de corpo, peso próprio constante. A Figura 6.1 ilustra a configuração do corpo em análise:

Figura 6.1 - Barra esbelta vertical com força gravitacional constante



Fonte: Autoria própria

Na Figura 6.1,  $L$  é o comprimento e  $D$  é a espessura da barra. Os valores para  $L$  e  $D$  do problema simulado são  $L = 2,5$  e  $D = 0,5$  unidades de comprimento.

A solução analítica de uma barra retangular sobre a qual atua uma força gravitacional constante é desenvolvida de forma detalhada por Chaves (2016). As componentes do deslocamento para o problema bidimensional serão dadas por:

$$u_1 = \frac{\nu \rho g}{E} x_1 (x_2 - L) \quad (6.2)$$

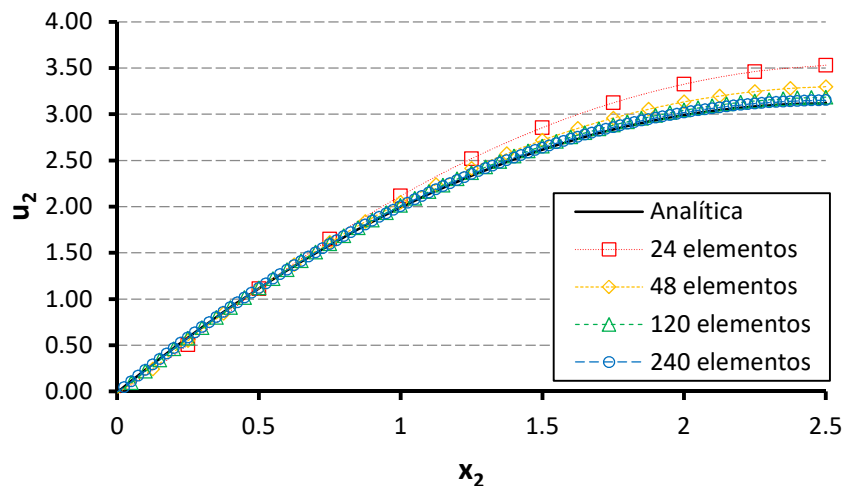
$$u_2 = \frac{\rho g}{E} x_2 \left( L - \frac{x_2}{2} \right) - \frac{\rho g \nu}{2E} x_1^2 \quad (6.3)$$

Nos testes realizados foi considerado  $\nu = 0,3$ .

Esse teste foi realizado com o objetivo de validar os códigos e avaliar o efeito da constante  $C$ . As malhas testadas possuíam 24/48/120/240 elementos lineares no contorno, conforme Apêndice D. Inicialmente, serão apresentados os resultados para a técnica do Tensor de Galerkin e depois os resultados do MECID. As respostas dos deslocamentos verticais são os valores obtidos da lateral da Figura 6.1. Como o problema é simétrico, apenas os deslocamentos de uma das laterais são suficientes para descrever o comportamento dos deslocamentos verticais. Já os deslocamentos horizontais consideram as variações ocorridas quando  $x_2 = 0$ , onde a barra se encontra engastada.

### 6.2.1 Técnica do Tensor de Galerkin

Gráfico 6.1 - Deslocamentos verticais para força de corpo constante usando Tensor de Galerkin com  $K = 0$

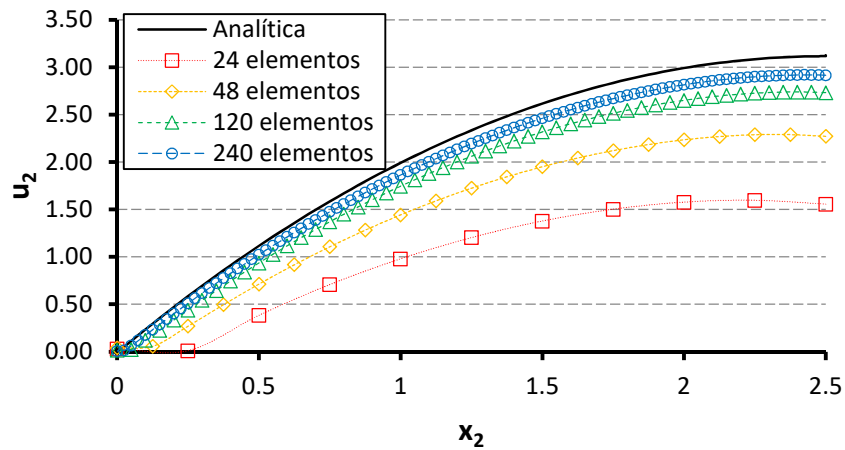


Fonte: Autoria própria

O Gráfico 6.1 mostra o deslocamento vertical obtido pela técnica de Galerkin com a constante  $K = 0$ , ou seja,  $C = 1/2$ . Nota-se que, com o aumento da quantidade de elementos de contorno, a resposta numérica se aproxima monotonicamente da solução analítica, como esperado.

A resposta para  $K = 1$  é apresentada no Gráfico 6.2. Observa-se que a solução melhora com o aumento da quantidade de elementos de contorno, porém, mesmo com 240 elementos, a resposta ainda fica afastada da solução analítica.

Gráfico 6.2 - Deslocamentos verticais para força gravitacional constante usando Tensor de Galerkin com  $K = 1$

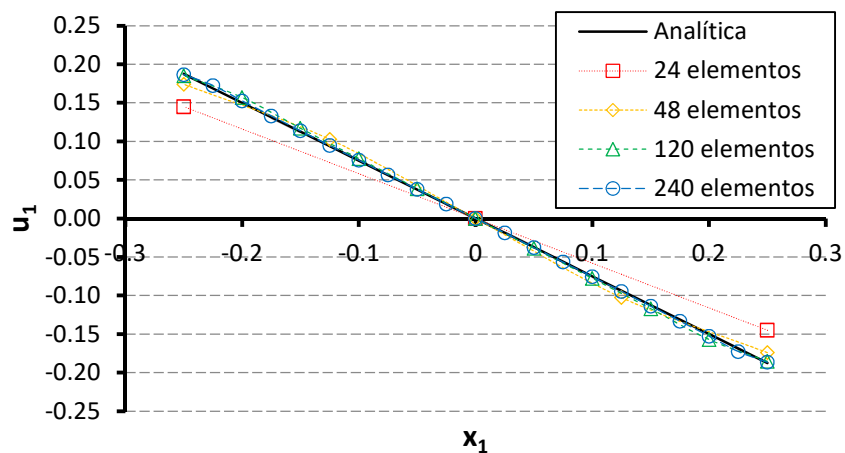


Fonte: Autoria própria

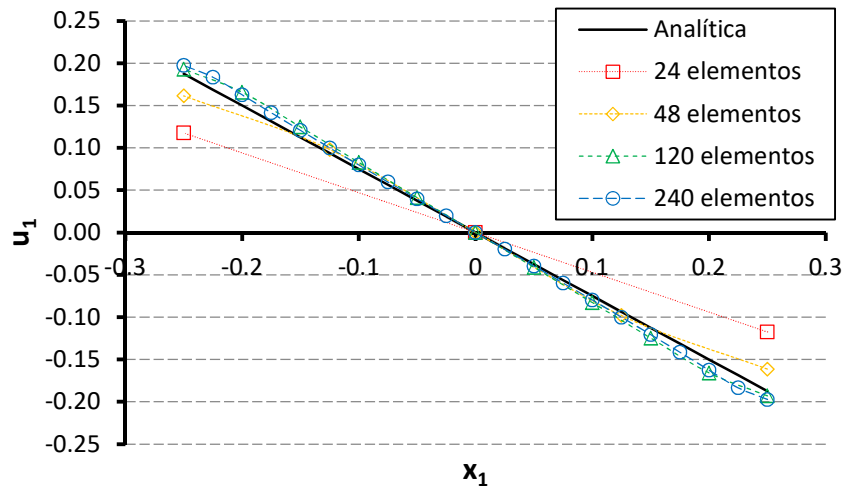
Os Gráficos 6.3 e 6.4 a seguir mostram que da mesma forma que ocorreu com o deslocamento vertical, o deslocamento horizontal melhora com o aumento da quantidade de elementos de contorno, tanto para  $K = 0$  quanto para  $K = 1$ .

Assim, os testes mostraram como a constante  $K$  afeta no condicionamento da solução numérica em problemas bidimensionais, conforme afirma Neves e Brebbia (1991). Além disso, para o problema analisado, a melhor resposta é dada quando  $K = 0$ , que é valor primeiramente definido por Cruse (1977) para a técnica do Tensor de Galerkin.

Gráfico 6.3 - Deslocamentos horizontais para força gravitacional constante usando Tensor de Galerkin com  $K=0$



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.4 - Deslocamentos horizontais para força gravitacional constante usando Tensor de Galerkin com  $K=1$ 

Fonte: Autoria própria

Os erros relativos médios dos deslocamentos para o Tensor de Galerkin são apresentados na seção 6.2.3.

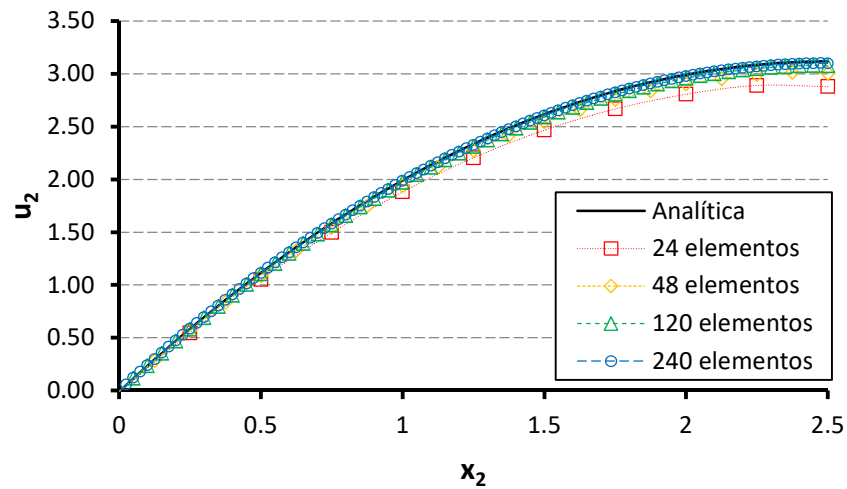
## 6.2.2 MECID

Partindo dos resultados apresentados pelo Tensor de Galerkin, foi adotado para a integral do procedimento de regularização do MECID o valor de  $K = 0$ . Os deslocamentos verticais obtidos são apresentados nos Gráficos 6.5, e os deslocamentos horizontais são mostrados nos Gráficos 6.6. As malhas correspondentes para essas primeiras simulações não possuem pontos internos. A análise dos pontos base internos é feita por meio dos resultados mostrados na Tabela 6.1. Todos os testes do MECID para esse primeiro problema utilizaram a FBR radial simples. A comparação entre as técnicas será feita na próxima seção, onde os valores dos erros relativos serão mostrados.

Os Gráficos 6.5 e 6.6 mostram que os resultados numéricos dos deslocamentos verticais e horizontais convergem para a solução analítica com o aumento da quantidade de elementos de contorno.

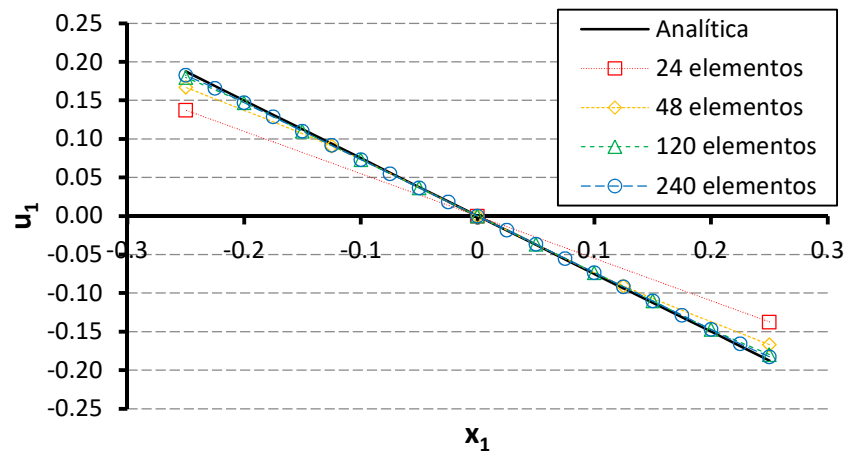


Gráfico 6.5 - Deslocamentos verticais para força gravitacional constante usando MECID



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.6 - Deslocamentos horizontais para força gravitacional constante usando MECID



Fonte: Autoria própria

Agora, será avaliado o comportamento do MECID quando se aumenta a quantidade de pontos internos. Tomando a malha com 48 elementos, aumentou-se gradativamente a quantidade de pontos internos. Os erros médios relativos são apresentados na Tabela 6.1:

Tabela 6.1 - EMR dos deslocamentos para MECID com 48 elementos de contorno e variação de pontos internos para força gravitacional constante

EMR (%)	0 pontos internos	12 pontos internos	57 pontos internos	120 pontos internos
Deslocamento horizontal	5,045	5,045	5,045	5,045
Deslocamento vertical	1,869	1,869	1,869	1,869

Fonte: Autoria própria

A Tabela 6.1 mostra que os deslocamentos verticais e horizontais não são afetados pelo aumento da quantidade de pontos internos, gerando as mesmas respostas em ambos os casos. Esse resultado, inicialmente, parece estranho, mas, na verdade, é o que realmente deveria acontecer. Como a força de corpo é constante, o seu valor é o mesmo para todos os pontos fonte e pontos base do domínio, fazendo com que o termo responsável pelo procedimento de interpolação seja nulo devido à regularização, ou seja,  $b_j(X) - b_j(\xi) = 0$  em todos os pontos. Dessa forma, a matriz  ${}^\xi A_i$  da equação (5.39) é nula e o MECID se reduz à técnica do Tensor de Galerkin, com a diferença de que a constante  $C$  é calculada separadamente. Logo, para o caso da força constante, o cálculo dos deslocamentos é feito utilizando apenas os elementos de contorno, não sendo necessária a utilização de pontos base internos de interpolação.

### 6.2.3 Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin

Os valores dos erros relativos médios (EMR%) dos deslocamentos para todos os casos analisados nas seções 6.2.1 e 6.2.2, com exceção do exemplo com variação dos pontos internos para o MECID, são indicados respectivamente nas Tabelas 6.2 e 6.3.

O Tensor de Galerkin obteve redução de erros dos deslocamentos verticais e horizontais para os dois valores de  $K$ , com a diferença de que os erros obtidos por  $K = 0$  são consideravelmente menores que para  $K = 1$ .

Comparando os EMR's dos deslocamentos verticais do MECID com a técnica do Tensor de Galerkin com  $K = 0$ , observa-se que o MECID apresenta uma convergência maior, obtendo um erro médio relativo inferior ao obtido pelo Tensor de Galerkin em todas as malhas.

Nos deslocamentos horizontais, o Tensor de Galerkin mostrou maior convergência, obtendo EMR's inferiores em quase todas as malhas, com exceção da malha com 120 elementos. No entanto, o MECID tem uma variação mais acentuada do EMR de 24 para 48 elementos e de 48 para 120 elementos, mostrando convergência também para os deslocamentos horizontais.

Tabela 6.2 - EMR dos deslocamentos verticais para força gravitacional constante

EMR(%)	24 elementos de contorno	48 elementos de contorno	120 elementos de contorno	240 elementos de contorno
Tensor de Galerkin $K = 0$	4,549	1,919	0,891	0,472
Tensor de Galerkin $K = 1$	33,532	18,740	8,321	4,327
MECID	4,013	1,869	0,675	0,296

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.3 - EMR dos deslocamentos horizontais para força gravitacional constante

EMR(%)	24 elementos de contorno	48 elementos de contorno	120 elementos de contorno	240 elementos de contorno
Tensor de Galerkin $K = 0$	1,621	1,812	1,439	0,498
Tensor de Galerkin $K = 1$	24,871	6,500	4,362	3,722
MECID	17,849	5,045	1,513	1,128

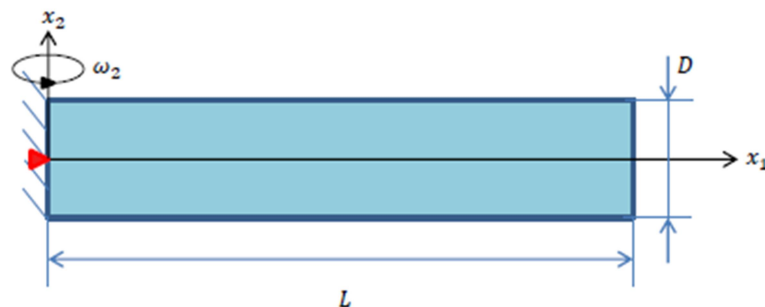
Fonte: Autoria própria

Com essa análise, pode-se concluir que o MECID apresentou menores erros na direção vertical, apresentando erros inferiores a 1% com as malhas de 120 e 240 elementos de contorno. Já a técnica do Tensor de Galerkin com  $K = 0$  se mostrou mais eficiente para determinar os deslocamentos horizontais, apresentando os menores EMR's em todas as malhas testadas. Porém, o MECID também obteve baixos erros na direção horizontal, se mostrando robusto para o problema de força constante em uma geometria esbelta, apresentando resultados tão satisfatórios quanto à técnica do Tensor de Galerkin.

### 6.3 BARRA ESBELTA HORIZONTAL COM FORÇA CENTRÍFUGA

A simulação com a barra esbelta horizontal submetida à uma força centrífuga representa o segundo caso apresentado na seção 4.4, ou seja, a rotação do corpo ocorre em uma única direção, no mesmo plano do problema. A Figura 6.2 representa essa situação:

Figura 6.2 - Barra esbelta horizontal com força centrífuga



Fonte: Autoria própria

A situação acima possui a seguinte solução analítica (EL-ZAFRANY; COOKSON; IQBAL, 1986):

$$u_1 = \frac{\rho\omega_2^2}{2E} x_1 \left( L^2 - \frac{x_1^2}{3} \right) \quad (6.4)$$

As dimensões do problema são as mesmas que foram utilizadas no primeiro teste, assim,  $L = 2,5$  e  $D = 0,5$  unidades de comprimento. Foram considerados apenas os deslocamentos na direção horizontal adotando-se coeficiente de Poisson igual a zero ( $\nu = 0$ ). A sequência de análise desse problema será semelhante ao exposto na seção anterior. As malhas utilizadas nas simulações eram formadas por 24/48/120/240 elementos lineares no contorno, conforme Apêndice D. As respostas dos deslocamentos horizontais são dos valores obtidos no comprimento inferior da Figura 6.2, quando  $x_2 = -0,25$ .

### 6.3.1 Técnica do Tensor de Galerkin

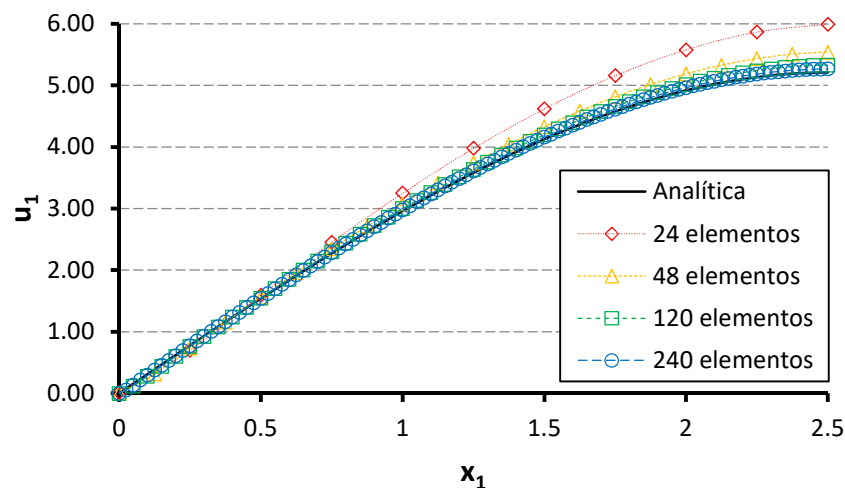
Baseado nas conclusões da seção 6.2.1, serão apresentadas as respostas numéricas do Tensor de Galerkin apenas para  $C = 1/2$ . Os valores dos deslocamentos foram plotados no Gráfico 6.7. Os erros médios relativos obtidos são dados na Tabela 6.4:

Tabela 6.4 - EMR dos deslocamentos horizontais do Tensor de Galerkin para força centrífuga na barra esbelta

EMR(%)	24 elementos de contorno	48 elementos de contorno	120 elementos de contorno	240 elementos de contorno
Tensor de Galerkin	6,119	2,673	1,010	0,497

Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.7 - Deslocamentos horizontais do Tensor de Galerkin para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

Nota-se que o erro é reduzido com o aumento da quantidade de elementos de contorno, mostrando a convergência da resposta numérica para a solução analítica.

### 6.3.2 MECID

O principal objetivo desse segundo exemplo para o MECID é avaliar o comportamento de cada FBR e analisar o efeito dos pontos internos em um problema que trabalha com um corpo esbelto. Diferentemente do exemplo anterior, o processo de interpolação direta é executado, porque a força de corpo não é constante em todo o domínio. As quantidades de pontos base internos utilizadas foram de 12, 57 e 120 pontos, cuja distribuição é mostrada no Apêndice D. Os Gráficos 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11 mostram os deslocamentos horizontais obtidos pela FBR radial simples, para 24, 48, 120 e 240 elementos respectivamente. A Tabela 6.5 apresenta os erros médios relativos obtidos em cada caso. O mesmo procedimento é feito com a FBR placa fina, Gráficos 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15 e a Tabela 6.6, e com a FBR cúbica, Gráficos 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19 e a Tabela 6.7.

Tabela 6.5 - EMR dos deslocamentos horizontais do MECID com FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta

EMR (%)	24 elementos de contorno	48 elementos de contorno	120 elementos de contorno	240 elementos de contorno
0 pontos internos	3,844	1,495	0,202	0,269
12 pontos internos	3,968	1,588	0,279	0,187
57 pontos internos	4,100	1,694	0,371	0,093
120 pontos internos	4,113	1,701	0,369	0,091

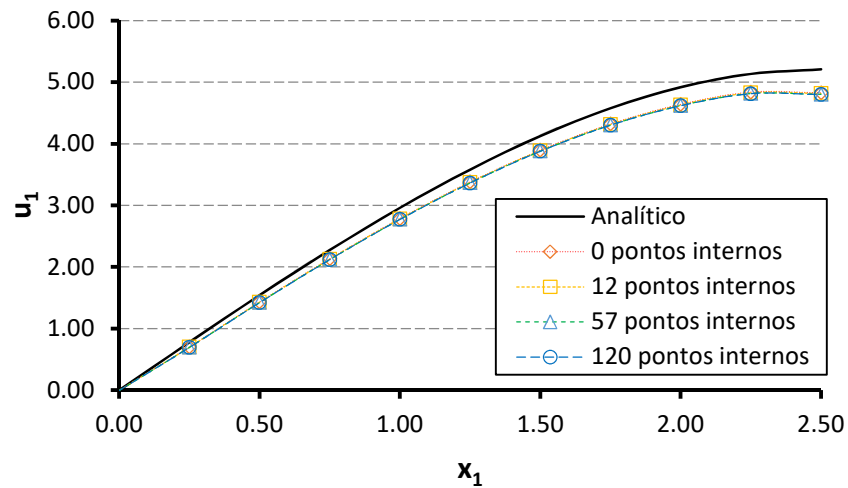
Fonte: Autoria própria

A Tabela 6.5 mostra que a influência dos pontos internos para a FBR radial simples é muito baixa, o que também pode ser observado nos Gráficos 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11, pois as curvas dos deslocamentos horizontais são muito próximas umas das outras em todos os casos, sendo difícil identificar a diferença entre elas por esses gráficos. A variação do EMR das malhas sem pontos internos para as malhas com 120 pontos internos fica apenas entre 0,15% e 0,30%.

Nota-se que as malhas com 24, 48 e 120 elementos de contorno o EMR aumenta, porém, para a malha mais refinada, com 240 elementos de contorno, a inserção dos pontos internos reduz o erro médio relativo, obtendo os menores EMR's, com valores inferiores a 0,1%.

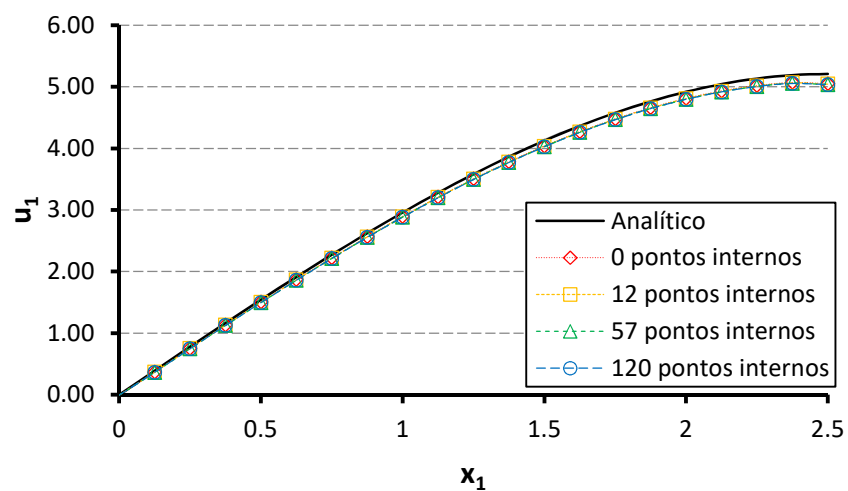
Dessa forma, pode-se concluir que, nesse teste, o principal responsável pela convergência do método para a solução analítica são os elementos de contorno e que os pontos internos afetam pouco na resposta numérica.

Gráfico 6.8 - Deslocamentos horizontais com MECID com 24 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta



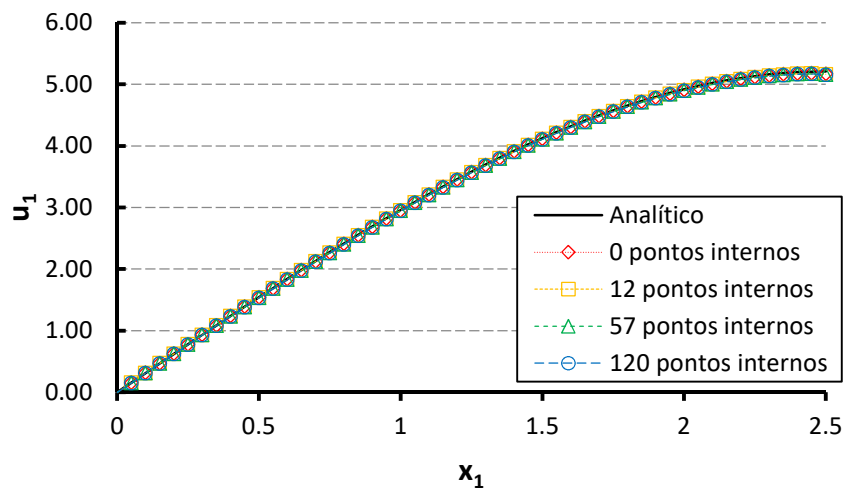
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.9 - Deslocamentos horizontais com MECID com 48 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta



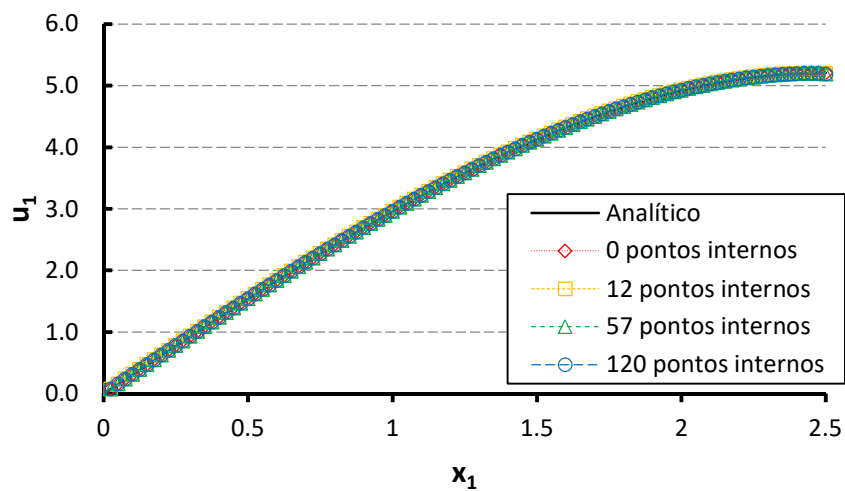
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.10 - Deslocamentos horizontais com MECID com 120 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.11 - Deslocamentos horizontais com MECID com 240 elementos de contorno para FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.6 - EMR dos deslocamentos horizontais do MECID com FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta

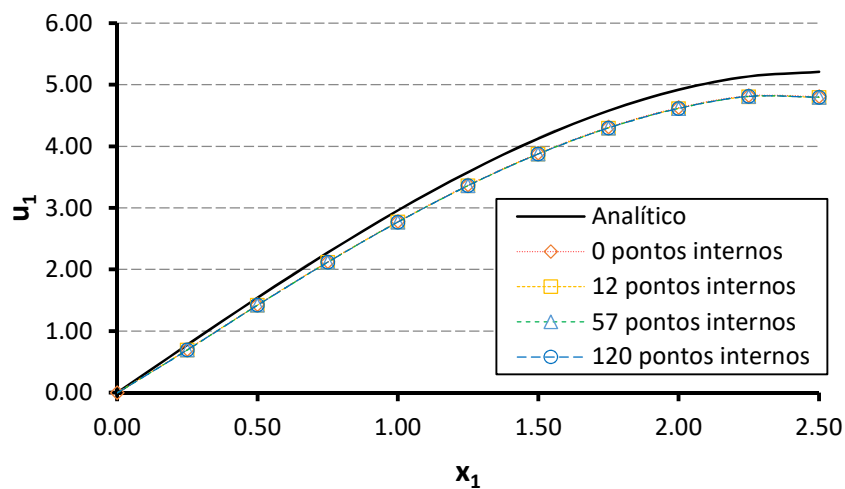
EMR (%)	24 elementos de contorno	48 elementos de contorno	120 elementos de contorno	240 elementos de contorno
0 pontos internos	3,874	1,423	0,063	0,143
12 pontos internos	4,101	1,677	0,676	0,274
57 pontos internos	4,127	1,697	0,392	0,083
120 pontos internos	4,141	1,702	0,480	0,141

Fonte: Autoria própria

Os Gráficos 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15, juntamente com a Tabela 6.6, mostram que a FBR placa fina apresentou um comportamento semelhante à FBR radial simples, pouca influência dos pontos internos e convergência dada principalmente pela quantidade de elementos de contorno.

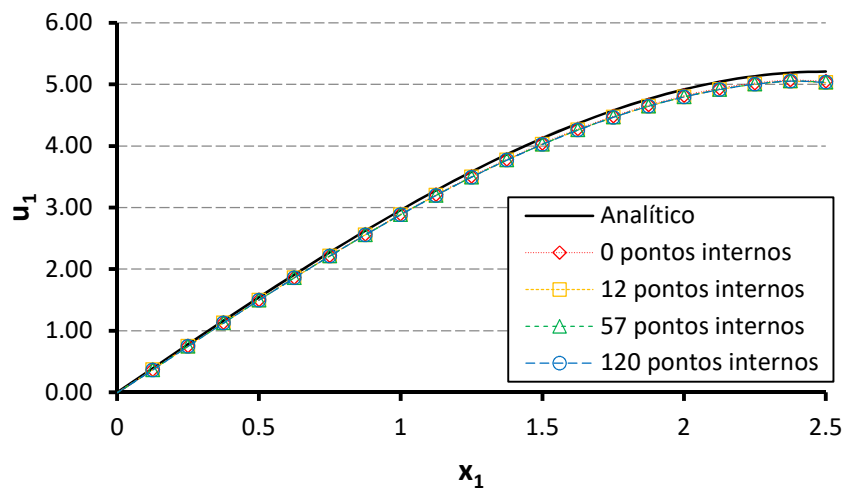
A variação máxima do EMR das malhas sem pontos internos para as malhas com 120 pontos internos foi de aproximadamente 0,42% para a malha com 120 elementos de contorno.

Gráfico 6.12 - Deslocamentos horizontais com MECID com 24 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

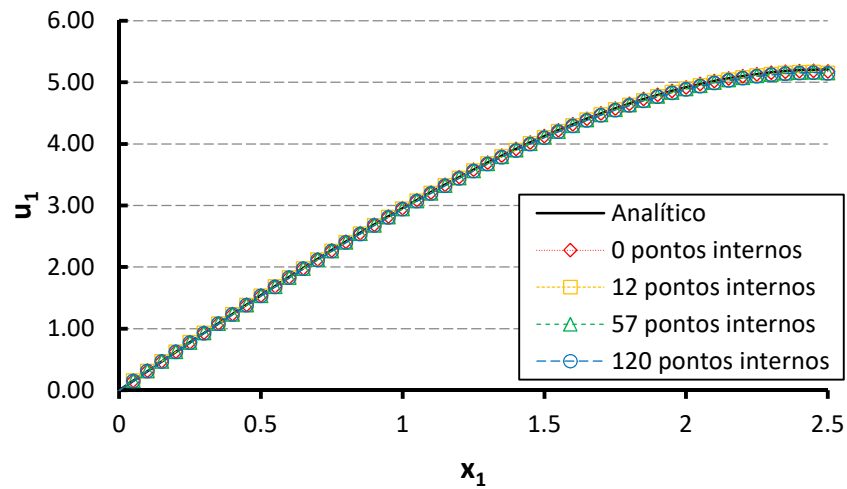
Gráfico 6.13 - Deslocamentos horizontais com MECID com 48 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

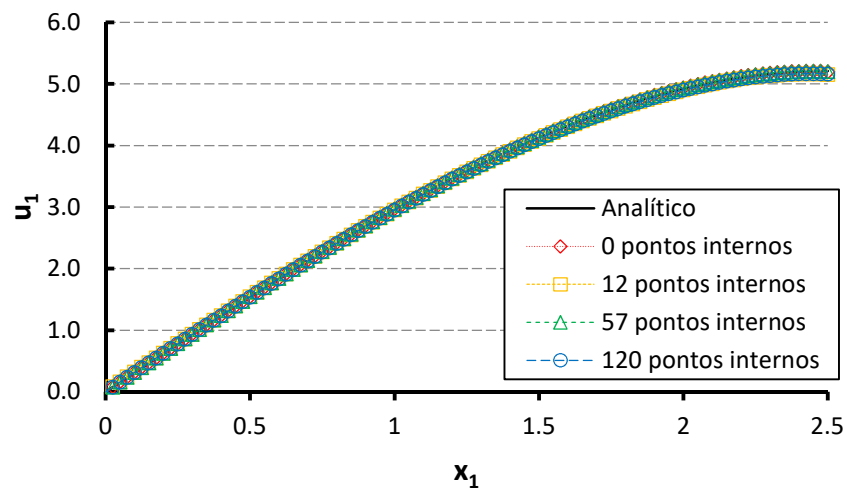


Gráfico 6.14 - Deslocamentos horizontais com MECID com 120 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.15 - Deslocamentos horizontais com MECID com 240 elementos de contorno para FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

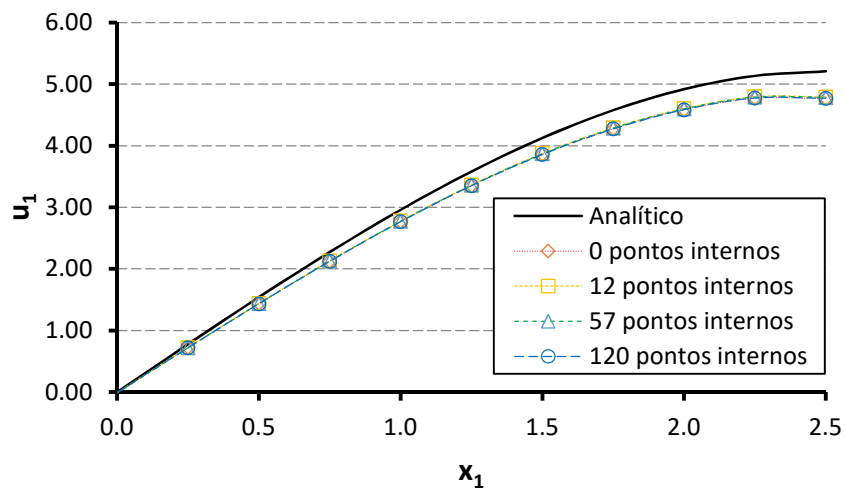
Tabela 6.7 - EMR dos deslocamentos horizontais do MECID com FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta

EMR (%)	24 elementos de contorno	48 elementos de contorno	120 elementos de contorno	240 elementos de contorno
0 pontos internos	4,250	1,767	22,720	22,608
12 pontos internos	4,025	1,158	8,982	16,828
57 pontos internos	4,105	2,305	1,742	55,576
120 pontos internos	4,256	0,916	42,980	46,373

Fonte: Autoria própria

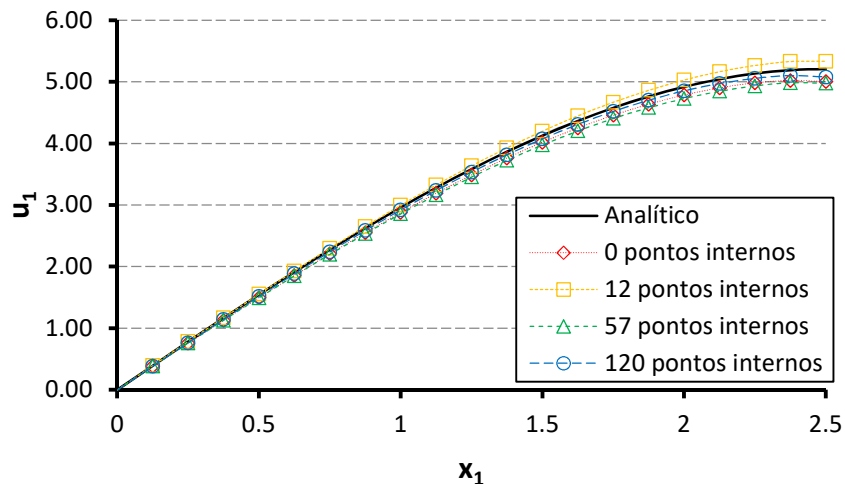
Os Gráficos 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19 e a Tabela 6.7 indicam que a FBR cúbica apresentou um comportamento distinto em relação às outras duas FBR's. Para as duas primeiras malhas, os resultados possuem valores similares aos anteriores, contudo, com 120 elementos de contorno e com 240 elementos de contorno, é observado que a resposta numérica diverge da solução analítica, mostrando que não ocorre convergência monotônica para essa FBR. Logo, é possível concluir que a FBR cúbica diverge da solução analítica quando a quantidade de elementos é mais elevada. Dessa forma, os próximos testes serão realizados apenas com a FBR radial simples e placa fina.

Gráfico 6.16 - Deslocamentos horizontais com MECID com 24 elementos de contorno para FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta



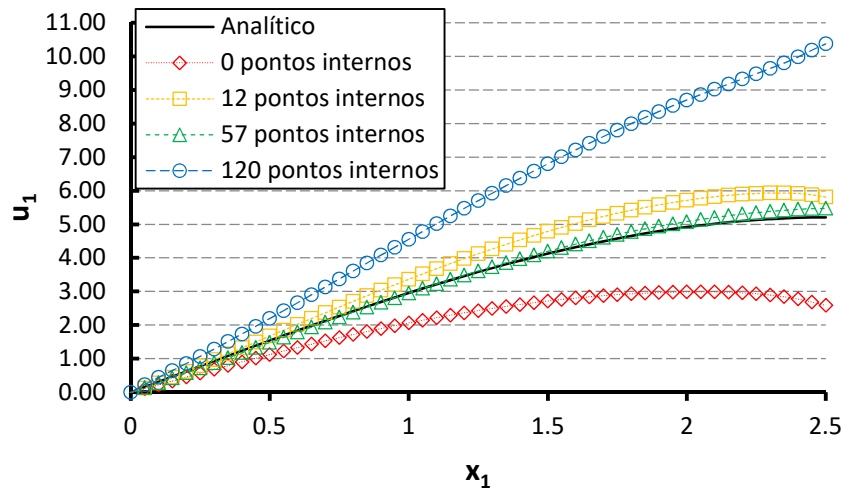
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.17 - Deslocamentos horizontais com MECID com 48 elementos de contorno para FBR cúbica e para força centrífuga na barra esbelta



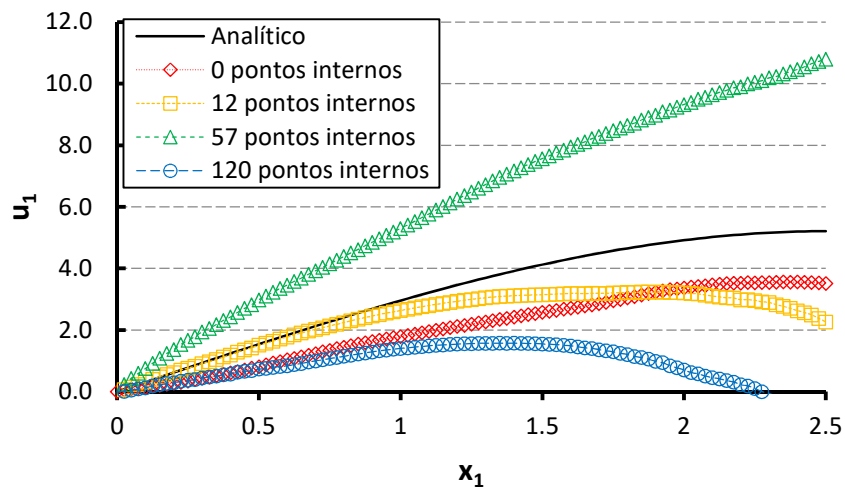
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.18 - Deslocamentos horizontais com MECID com 120 elementos de contorno para FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.19 - Deslocamentos horizontais com MECID com 240 elementos de contorno para FBR cúbica para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

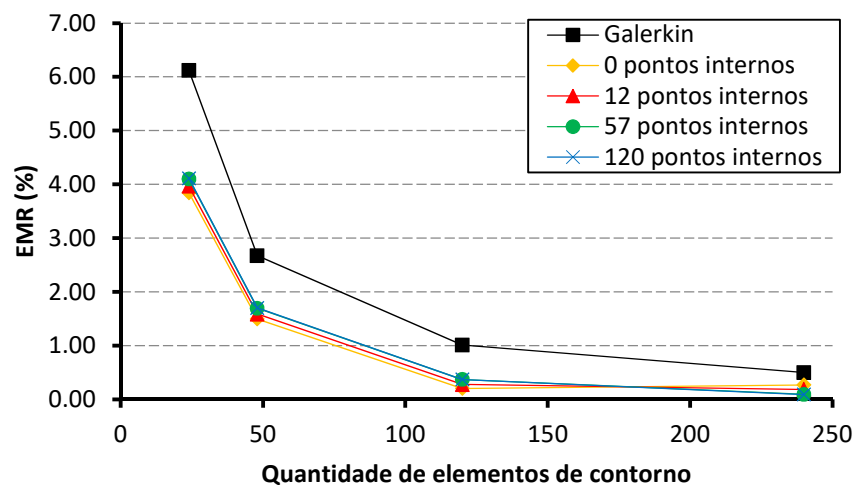
### 6.3.3 Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin

A partir do que foi exposto nas seções anteriores, neste ponto pode-se afirmar que o MECID, com as FBR's radial simples e placa fina, obteve erros médios relativos inferiores à técnica do Tensor de Galerkin em todas as malhas, o mesmo comportamento observado no primeiro exemplo, mostrando que o MECID converge mais rapidamente para a solução analítica em problemas esbeltos. Porém, a FBR cúbica mostrou ser instável quando a quantidade de pontos base é aumentada, divergindo da solução analítica.

Foi observado que, para as duas primeiras FBR's, os pontos internos influenciaram pouco na resposta numérica. Além disso, nota-se que para as malhas mais pobres os pontos internos aumentam o EMR e para a malha mais refinada o EMR é reduzido. A fim de explicar esse comportamento, alguns pontos devem ser levados em consideração. Primeiramente, como as curvas são próximas, pequenas diferenças nos deslocamentos produzem pequenas variações no valor do EMR. Foi observado em todas as malhas que os pontos internos promovem uma leve redução nos valores absolutos do deslocamento. Ou seja, as curvas dos deslocamentos das malhas com pontos internos estão um pouco abaixo da curva das malhas sem pontos internos, o que não é perceptível nos gráficos apresentados. Como nas malhas mais pobres as curvas se encontram abaixo da solução analítica, o efeito dos pontos internos é aumentar o EMR. No entanto, as malhas com 240 elementos, estão um pouco acima da solução analítica, fazendo com que os pontos internos ajustem a resposta numérica, reduzindo o EMR.

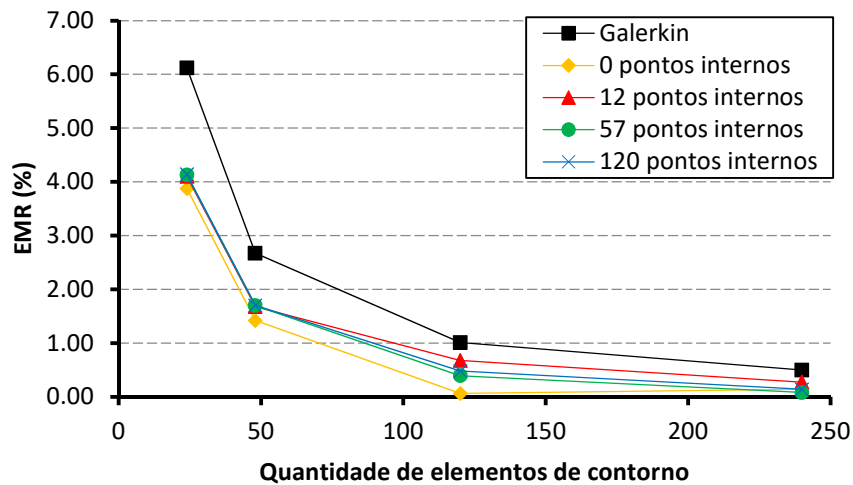
Importante ressaltar que esse comportamento não indica divergência do método, pois, conforme pode ser observado na Tabela 6.5 e 6.6, as respostas para 120 e 240 elementos de contorno são muito próximas, sendo obtidos EMR's menores a 0,5%, valor inferior ao EMR da técnica do Tensor de Galerkin com 240 elementos, indicando a robustez do MECID para problemas com geometria esbelta. Como pode ser visto nos Gráfico 6.20 e 6.21, que comparam os EMR's obtidos pela técnica do tensor de Galerkin com o MECID usando FBR radial simples e placa fina respectivamente, os erros médios relativos do MECID são menores se comparados com a técnica do tensor de Galerkin em todas as malhas testadas.

Gráfico 6.20 – EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR radial simples para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.21 - EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga na barra esbelta



Fonte: Autoria própria

#### 6.4 BARRA QUADRADA VERTICAL COM FORÇA GRAVITACIONAL VARIANDO LINEARMENTE

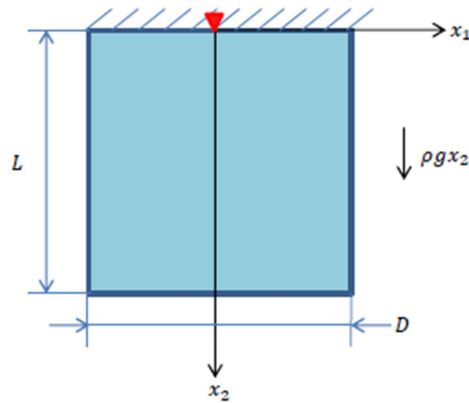
A Figura 6.3 apresenta a geometria do problema analisado no terceiro teste. O problema não possui solução analítica elástica em duas dimensões (o que seria similar a uma chapa), a menos que seja fisicamente reduzido a um caso escalar, similar a uma barra axialmente carregada. Por isso, o coeficiente de Poisson também foi considerado nulo. A solução analítica é desenvolvida no Apêndice C e a expressão final é dada pela equação (6.5):

$$u_2 = \frac{\rho g}{2E} x_2 \left( L^2 - \frac{x_2^2}{3} \right) \quad (6.5)$$

Utilizou-se comprimento e largura de valor unitário, ou seja,  $L = D = 1$  (unidades de comprimento).

As malhas utilizadas nesse teste foram de 32, 64 e 128 elementos de contorno. Para as simulações do MECID, usaram-se ainda malha com 9, 49 e 121 pontos internos, conforme distribuição indicada no Apêndice D. Foram considerados apenas os deslocamentos verticais. As respostas dos deslocamentos na direção vertical são dos valores obtidos na lateral direita da Figura 6.3, quando  $x_1 = 0,5$ .

Figura 6.3 - Barra quadrada vertical com força gravitacional variando linearmente

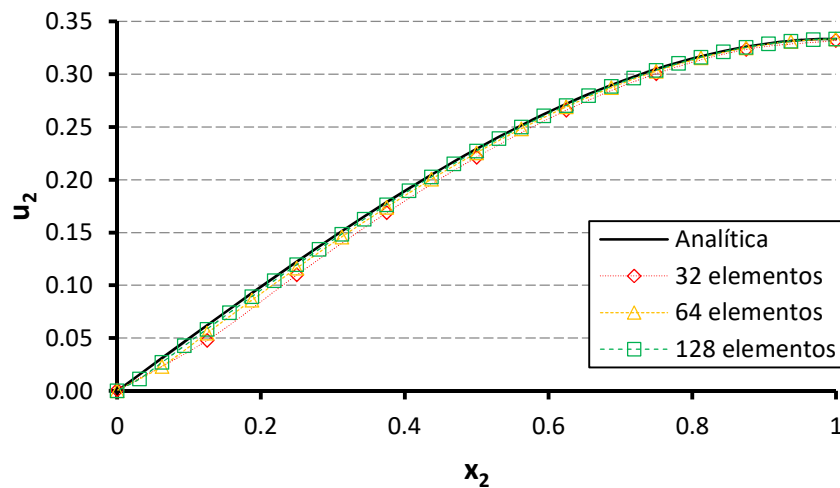


Fonte: Autoria própria

### 6.4.1 Técnica do Tensor de Galerkin

As curvas dos deslocamentos para a técnica do Tensor de Galerkin com  $C = 1/2$  são apresentadas no Gráfico 6.22 e os erros relativos médios são mostrados na Tabela 6.8.

Gráfico 6.22 - Deslocamentos verticais do Tensor de Galerkin para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.8 - EMR dos deslocamentos horizontais do Tensor de Galerkin para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada

EMR (%)	32 elementos de contorno	64 elementos de contorno	128 elementos de contorno
Tensor de Galerkin	2,064	1,001	0,492

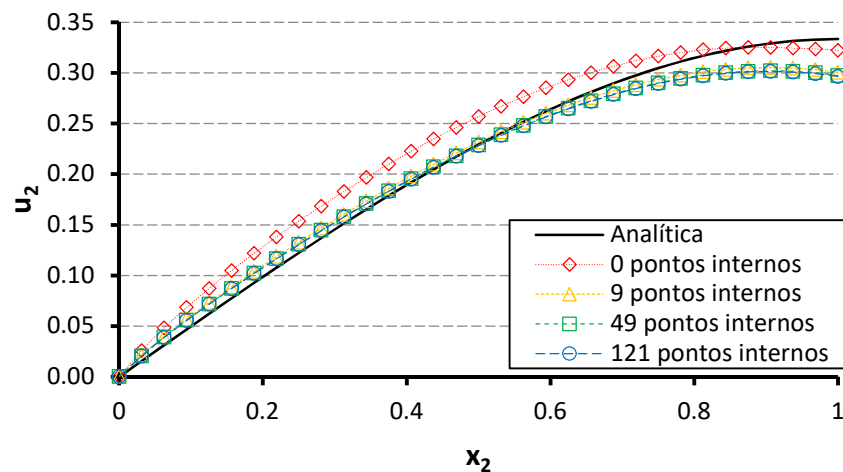
Fonte: Autoria própria

Nota-se que a resposta numérica converge mais rapidamente para a solução analítica se comparada com as respostas obtidas nos problemas com corpos esbeltos, obtendo EMR próximo a 1% com 64 elementos de contorno. Esse resultado condiz com a literatura. O Tensor de Galerkin é uma técnica clássica do MEC, que possui maiores dificuldades na resolução de problemas com corpos esbeltos (BREBBIA e DOMINGUES, 1992). Logo, necessita de uma quantidade maior de elementos de contorno para obter uma melhor precisão nessas situações.

### 6.4.2 MECID

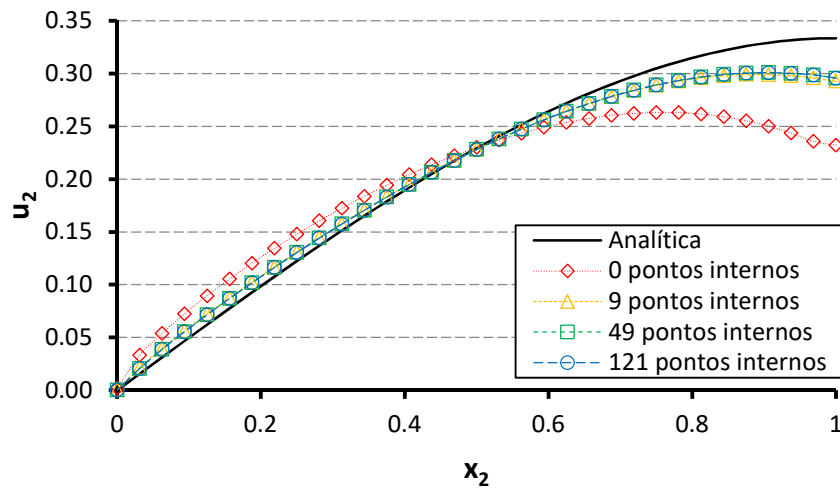
Para simplificar a exposição dos resultados para esse exemplo com o MECID, serão apresentadas apenas as curvas de deslocamentos para as malhas com 128 elementos de contorno, pois são as malhas mais refinadas. Os Gráficos 6.23 e 6.24 mostram, respectivamente, as curvas dos deslocamentos verticais para das FBR's radial simples e placa fina. Os valores obtidos consideravam a constante  $C = 1/2$ . Os erros médios relativos de todas as malhas para cada caso são dados nas Tabelas 6.9 e 6.10.

Gráfico 6.23 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,5$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.24 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com  $C = 0,5$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.9 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR radial simples com  $C = 0,5$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada

EMR (%)	32 elementos de contorno	64 elementos de contorno	128 elementos de contorno
0 pontos internos	4,564	5,453	5,914
9 pontos internos	3,859	3,518	3,363
49 pontos internos	4,252	3,776	3,534
121 pontos internos	4,343	3,838	3,588

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.10 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR placa fina com  $C = 0,5$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada

EMR (%)	32 elementos de contorno	64 elementos de contorno	128 elementos de contorno
0 pontos internos	10,212	9,843	9,579
9 pontos internos	4,563	4,059	3,788
49 pontos internos	4,419	3,884	3,617
121 pontos internos	4,406	3,871	3,621

Fonte: Autoria própria

Pelos Gráficos 6.23 e 6.24 e Tabelas 6.9 e 6.10, é possível perceber a influência dos pontos internos, que reduzem o EMR de forma significativa em todas as malhas. Porém, quando  $x_2$



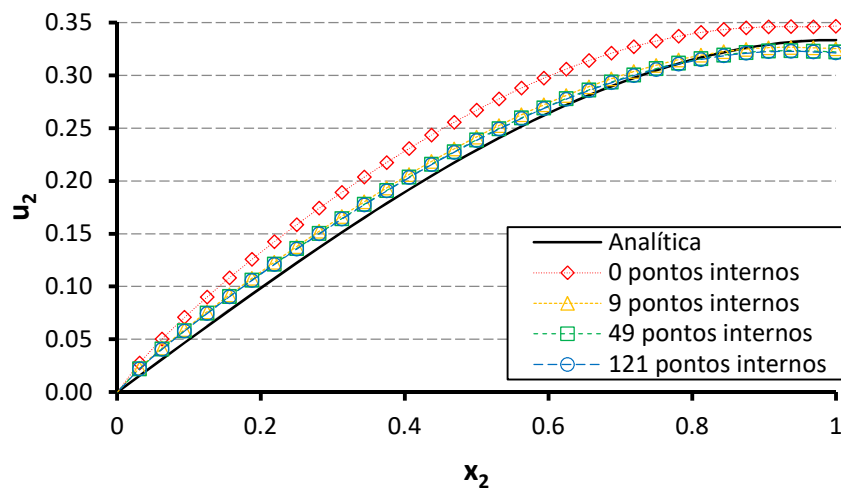
se aproxima de  $L = 1$  a solução numérica se afasta da solução analítica, produzindo erros que ficam entre 3,3% e 4,6%.

Na FBR radial simples, nota-se que o aumento da quantidade de elementos de contorno reduz o EMR e que as respostas das malhas com pontos internos são melhores se comparadas com as malhas sem pontos internos. No entanto, também pode ser observado que a malha com 9 pontos internos possui os menores EMR's, embora o valor do erro para 49 e 121 pontos seja próximo.

Já a FBR placa fina reduziu o valor do EMR com o aumento da quantidade de elementos de contorno e dos pontos base internos, exceto um leve aumento de 0,004% na malha com 128 elementos de contorno e 121 pontos internos.

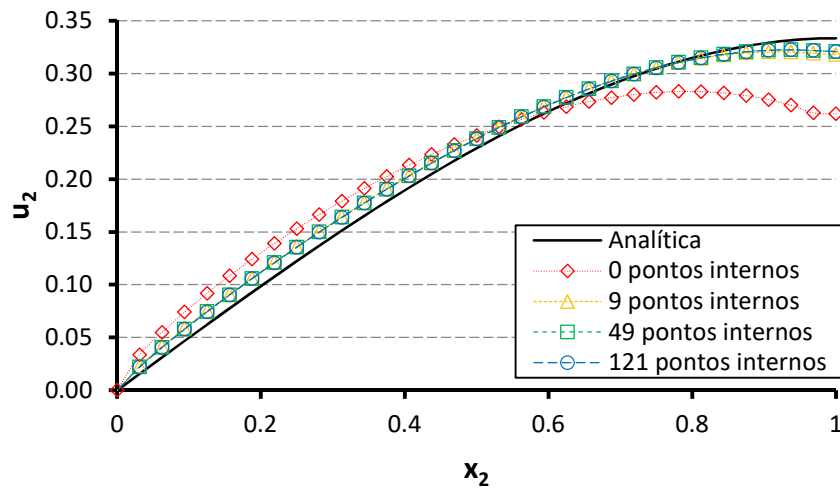
Foi observado que variando o valor da constante  $C$ , o erro relativo médio era reduzido. Dessa maneira, buscou-se a constante que obteve os menores EMR's, sendo encontrado o valor de 0,56, conforme apresentado no Apêndice E. Os resultados para as FBR's radial simples e placa fina do MECID com  $C = 0,56$  são mostrados nos Gráficos 6.25 e 6.26 respectivamente para 128 elementos de contorno. Os valores dos erros médios relativos de todas as malhas são apresentados nas Tabelas 6.11 e 6.12.

Gráfico 6.25 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,56$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.26 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com  $C = 0,56$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.11 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR radial simples com  $C = 0,56$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada

EMR (%)	32 elementos de contorno	64 elementos de contorno	128 elementos de contorno
0 pontos internos	6,653	7,816	8,499
9 pontos internos	2,184	2,545	2,884
49 pontos internos	2,244	2,329	2,506
121 pontos internos	2,288	2,310	2,462

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.12 - EMR dos deslocamentos verticais do MECID para FBR placa fina com  $C = 0,56$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada

EMR (%)	32 elementos de contorno	64 elementos de contorno	128 elementos de contorno
0 pontos internos	8,294	8,162	8,025
9 pontos internos	2,521	2,518	2,663
49 pontos internos	2,341	2,333	2,468
121 pontos internos	2,328	2,313	2,439

Fonte: Autoria própria

O principal efeito gerado pela mudança da constante foi aproximar a curva numérica da solução analítica quando  $x_2$  tende a 1; conseqüentemente, o EMR foi reduzido.

A Tabela 6.11 mostra que nas malhas com 64 e 128 elementos de contorno o aumento da quantidade de pontos internos reduz o EMR na FBR radial simples, o que ocorre com a FBR

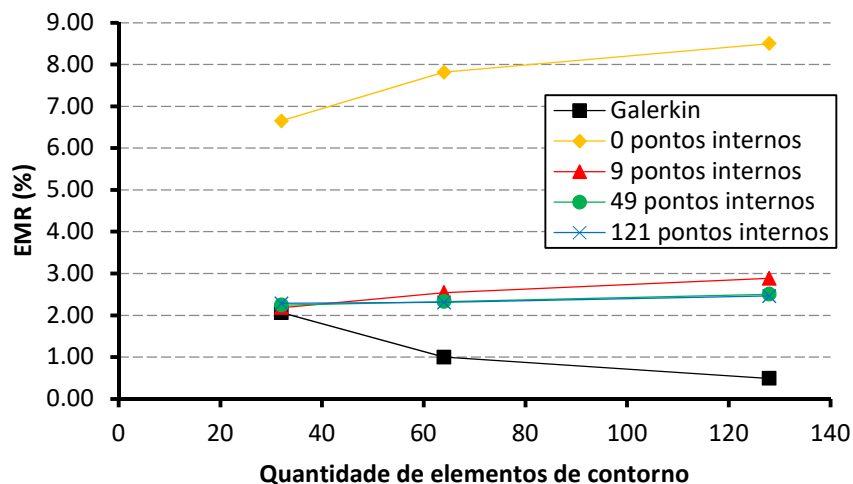
placa fina também. As respostas dessas duas malhas são próximas, mostrando mais uma vez a convergência do MECID.

Com esse resultado, pode-se afirmar que a constante  $C$  está diretamente relacionada à curva de convergência da solução numérica para a formulação proposta, sendo necessário defini-la corretamente. Em outras palavras, como o procedimento de interpolação está atuando e os pontos internos estão influenciando efetivamente na resposta numérica. Porém, a constante  $C$  precisa ser corretamente definida para que ocorra o acoplamento entre as soluções fundamentais do procedimento de interpolação, que usa a solução fundamental de Kelvin, e do procedimento de regularização, o qual utiliza a solução fundamental do Tensor de Galerkin, apresentando assim um valor diferente de 0,5.

### 6.4.3 Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin

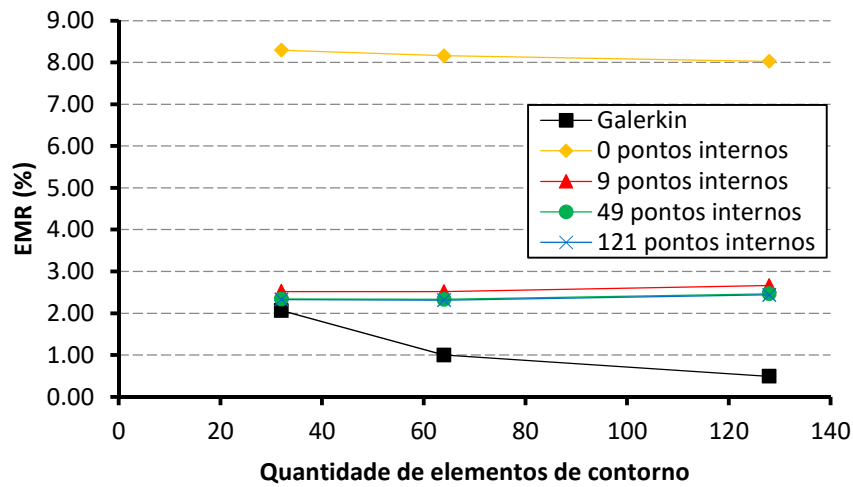
Pela comparação dos dois métodos neste exemplo, conclui-se que o Tensor de Galerkin se mostrou mais eficiente que o MECID para a geometria quadrada, mesmo com a mudança da constante  $C$ . Nota-se que a convergência do MECID é rápida, mas a curvatura gerada apresentou uma diferença em relação à solução analítica, não permitindo que o MECID alcançasse um EMR inferior a 2%, como pode ser visto nos Gráficos 6.27 e 6.28, que comparam os EMR's obtidos pela técnica do tensor de Galerkin com os EMR's encontrados pelo MECID com FBR radial simples e placa fina, respectivamente, ambos considerando  $C = 0,56$ .

Gráfico 6.27 – EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR radial simples para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.28 - EMR dos deslocamentos horizontais da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



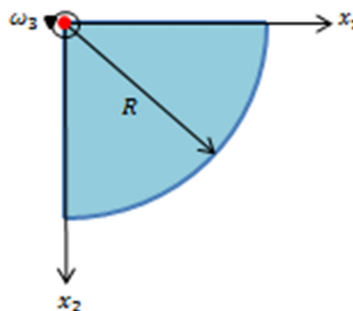
Fonte: Autoria própria

Pelos Gráficos 6.27 e 6.28 é possível observar que, mesmo com a variação da constante  $C$ , em todos os casos, o MECID apresenta um EMR superior ao da técnica do tensor de Galerkin. Além disso, nota-se um crescimento do EMR com o aumento da quantidade de elementos de no MECID, indicando que não está ocorrendo convergência monotônica para esse teste, quando a constante  $C$  é modificada.

## 6.5 DISCO COM FORÇA CENTRÍFUGA

No quarto problema em análise, foi simulado um disco em rotação com velocidade angular perpendicular ao plano do disco, correspondendo ao primeiro caso de força centrífuga apresentado na seção 4.4. Por se tratar de um problema simétrico, a geometria modelada para os testes foi de um quarto ( $1/4$ ) do disco, conforme a figura abaixo:

Figura 6.4 - Disco em rotação



Fonte: Autoria própria

Na Figura 6.4,  $R$  corresponde ao raio do disco. Em todas as simulações, o raio considerado tinha o valor unitário,  $R = 1$ . A solução analítica do disco em rotação é desenvolvida em coordenadas polares e é apresentada por Timoshenko e Goodier (1970). A expressão resultante dessa dedução é:

$$u(r) = \frac{1}{E} \left\{ (1 - \nu) \left[ \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega_3^2 R \right] r - \left[ \frac{(1 - \nu^2)}{8} \rho \omega_3^2 \right] r^3 \right\} \quad (6.6)$$

Onde  $r$  é a distância radial de um ponto em relação à origem.

A equação (6.6) mostra que a solução analítica em coordenadas polares é unidimensional, função apenas da posição radial do ponto. Entretanto, o código do MECID e do Tensor de Galerkin calculam a solução numérica apenas em coordenadas cartesianas. Logo, a análise desse problema é bidimensional, em que a solução numérica está relacionada com a solução analítica por meio da resultante dos deslocamentos, segundo a equação (6.7):

$$u(r) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (6.7)$$

As malhas utilizadas nesse exemplo foram de 30, 78 e 118 elementos de contorno. A quantidade de pontos internos utilizados nessas três malhas foi de 9, 25, 81 e 121 pontos, conforme apêndice D. Diferentemente dos dois testes anteriores, foram testados outros valores para o coeficiente de Poisson, sendo esses iguais a 0, 0,1, 0,2 e 0,3. Para os deslocamentos no contorno foram utilizados os valores gerados na direção do eixo  $x_1$ , ou seja, quando  $x_2 = 0$ . Já para os deslocamentos internos, em que as duas direções do deslocamento são calculadas, ocorreu na direção a  $45^\circ$  no sentido horário em relação ao eixo positivo de  $x_1$ . Nessa direção, os deslocamentos em  $r = 0$  (origem) e  $r = 1$  são valores dados no contorno do problema.

### 6.5.1 Técnica do Tensor de Galerkin

Mais uma vez, o Tensor de Galerkin convergiu para a solução analítica no contorno, obtendo erros relativos médios inferiores a 1% para a malha com 118 elementos. Os valores obtidos para cada valor do coeficiente de Poisson são apresentados na Tabela 6.13.

Nota-se que com o aumento do valor do coeficiente de Poisson, a técnica perde precisão, pois o EMR sofre um aumento. As curvas dos deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o

coeficiente de Poisson igual a 0, 0,1, 0,2 e 0,3 são mostradas respectivamente nos Gráficos 6.29, 6.30, 6.31 e 6.32. Os EMR para cada caso são mostrados na Tabela 6.14.

Tabela 6.13 - EMR dos deslocamentos no eixo  $x_1$  para a técnica do Tensor de Galerkin com coeficiente de Poisson igual à 0, 0,1, 0,2 e 0,3

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
$\nu = 0$	2,328	0,954	0,712
$\nu = 0,1$	2,479	1,016	0,759
$\nu = 0,2$	2,640	1,081	0,809
$\nu = 0,3$	2,808	1,149	0,861

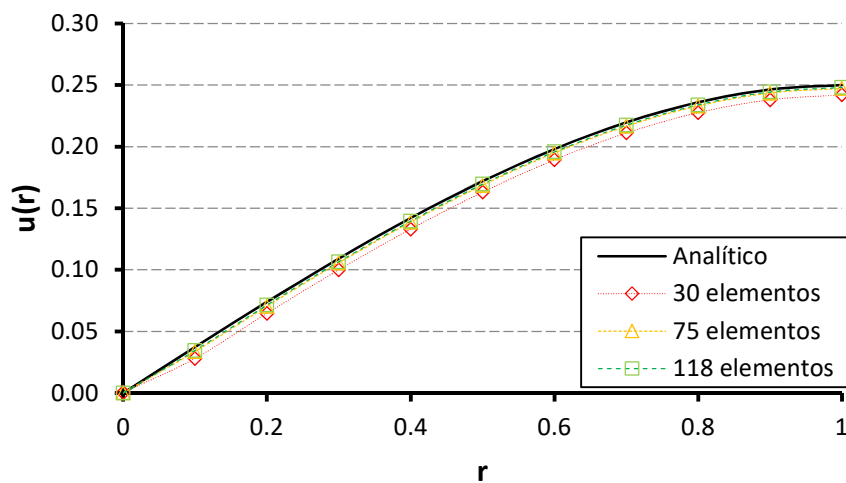
Fonte: Autoria própria

Tabela 6.14 – EMR dos deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o Tensor de Galerkin

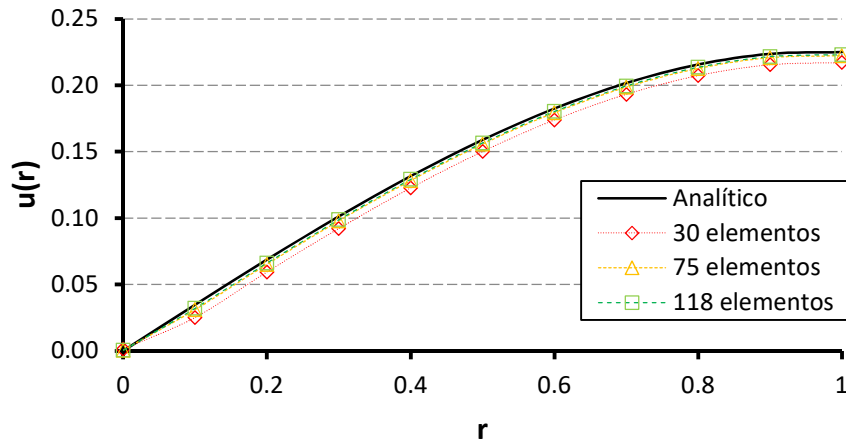
EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
$\nu = 0$	3,071	1,139	0,833
$\nu = 0,1$	3,413	1,277	0,938
$\nu = 0,2$	3,781	1,427	1,049
$\nu = 0,3$	4,165	1,582	1,167

Fonte: Autoria própria

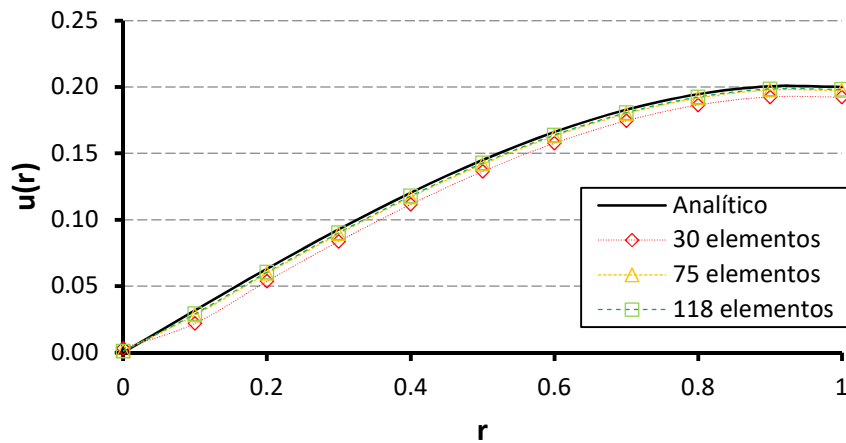
Gráfico 6.29 - Deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o Tensor de Galerkin com  $\nu = 0$



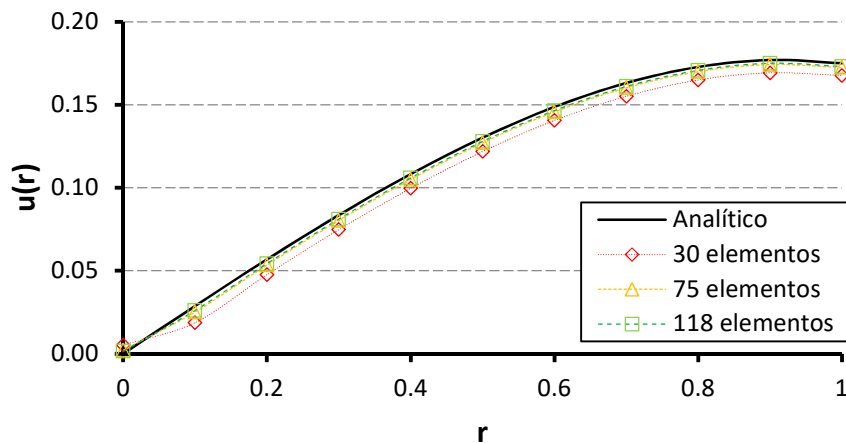
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.30 - Deslocamentos na direção radial a 45° para o Tensor de Galerkin com  $\nu = 0,1$ 

Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.31 - Deslocamentos na direção radial a 45° para o Tensor de Galerkin com  $\nu = 0,2$ 

Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.32 - Deslocamentos na direção radial a 45° para o Tensor de Galerkin com  $\nu = 0,3$ 

Fonte: Autoria própria

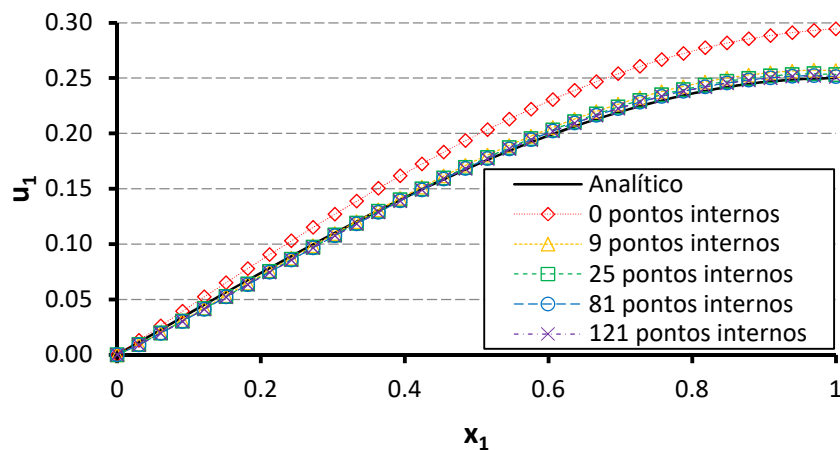
Pela Tabela 6.14, é possível perceber que a técnica do Tensor de Galerkin perde um pouco de eficiência para determinar os valores dos deslocamentos internos, apresentando erros superiores a 1% para  $\nu = 0,3$  e  $\nu = 0,2$ . Nota-se que a variação do coeficiente de Poisson afeta a resposta numérica, aumentando o EMR quando seu valor cresce.

### 6.5.2 MECID

Os dois objetivos principais desse exemplo são avaliar o comportamento do MECID para um caso bidimensional, assim como o comportamento com a variação do coeficiente de Poisson. A partir das conclusões obtidas na simulação anteriores, buscou-se o valor de  $C$  correspondente para o problema proposto, sendo encontrado o valor de 0,34 para coeficiente de Poisson nulo, conforme apresentado no Apêndice E. Em seguida, variou-se a constante  $C$  para cada valor do coeficiente de Poisson, obtendo,  $C = 0,32$  para  $\nu = 0,1$ ,  $C = 0,31$  para  $\nu = 0,2$  e  $C = 0,30$  para  $\nu = 0,3$ , de acordo com o desenvolvimento no Apêndice E.

Antes de apresentar as respostas bidimensionais na direção radial a  $45^\circ$ , serão mostradas a seguir as curvas obtidas no contorno na direção do eixo  $x_1$ , com o objetivo de mostrar novamente a influência da resposta com os pontos internos quando comparado com as malhas sem pontos internos, pois, na direção radial a  $45^\circ$ , não é possível visualizar esse efeito por trabalhar apenas com pontos internos. Para exemplificar a influência dos pontos internos, foi tomada a malha com 118 elementos de contorno, por ser a mais refinada, cujos deslocamentos obtidos para cada coeficiente de Poisson são plotados respectivamente nos Gráficos 6.33, 6.34, 6.35 e 6.36. Os EMR's de cada caso são apresentados na Tabela 6.15.

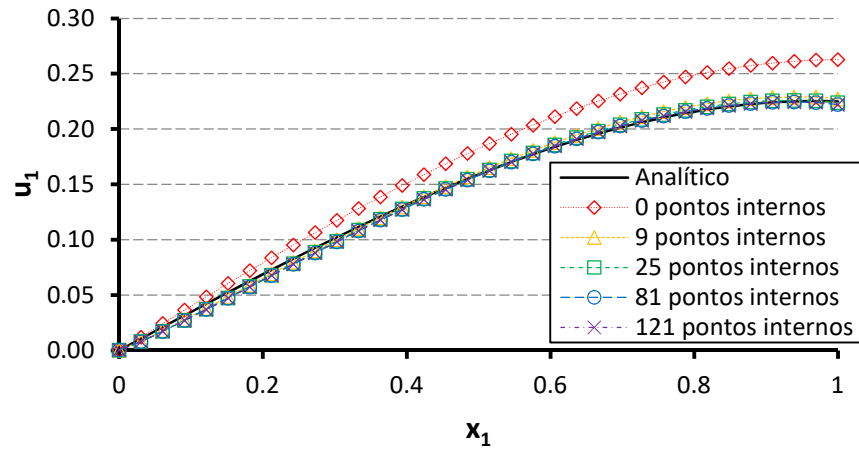
Gráfico 6.33 - Deslocamentos em  $x_1$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0$



Fonte: Autoria própria

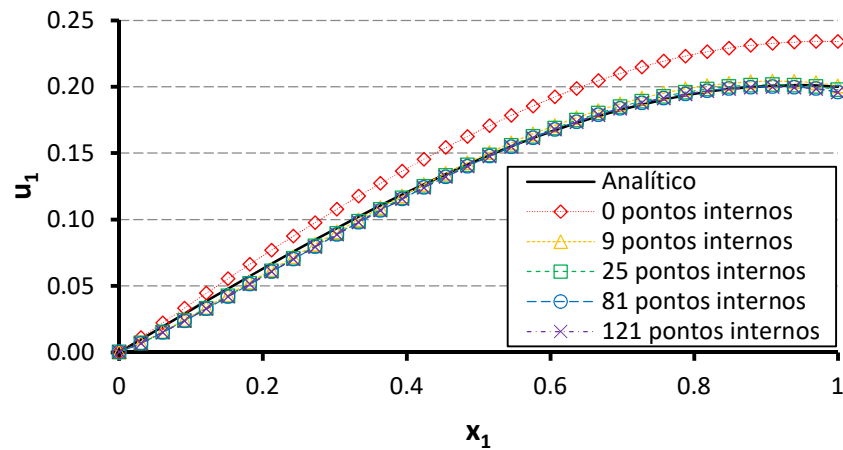


Gráfico 6.34 - Deslocamentos em  $x_1$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0,1$



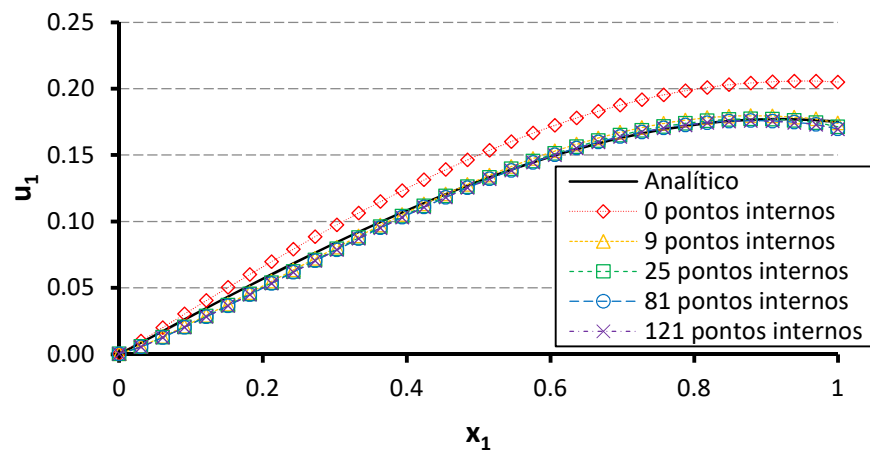
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.35 - Deslocamentos em  $x_1$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0,2$



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.36 - Deslocamentos em  $x_1$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0,3$



Fonte: Autoria própria

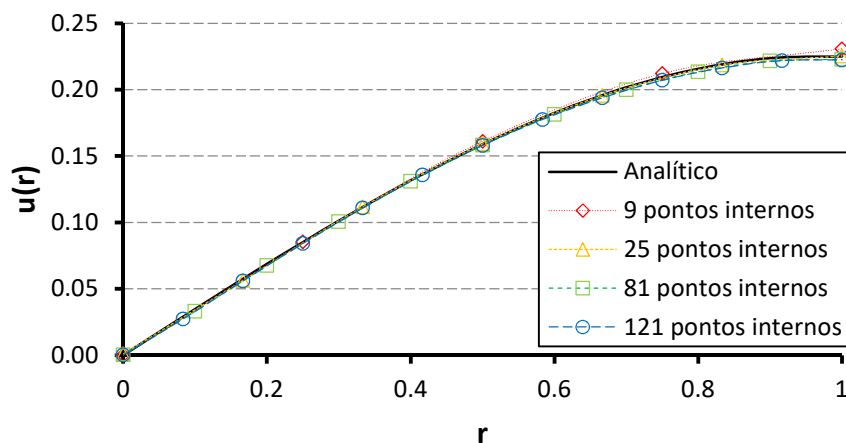
Tabela 6.15 - Deslocamentos no eixo  $x_1$  para o MECID com FBR radial simples e 118 elementos de contorno

EMR (%)	0 pontos internos	9 pontos internos	25 pontos internos	81 pontos internos	121 pontos internos
$\nu = 0$	9,991	1,796	1,286	1,068	1,030
$\nu = 0,1$	9,669	1,458	1,072	1,007	1,011
$\nu = 0,2$	9,890	1,587	1,286	1,293	1,302
$\nu = 0,3$	10,157	1,797	1,619	1,682	1,700

Fonte: Autoria própria

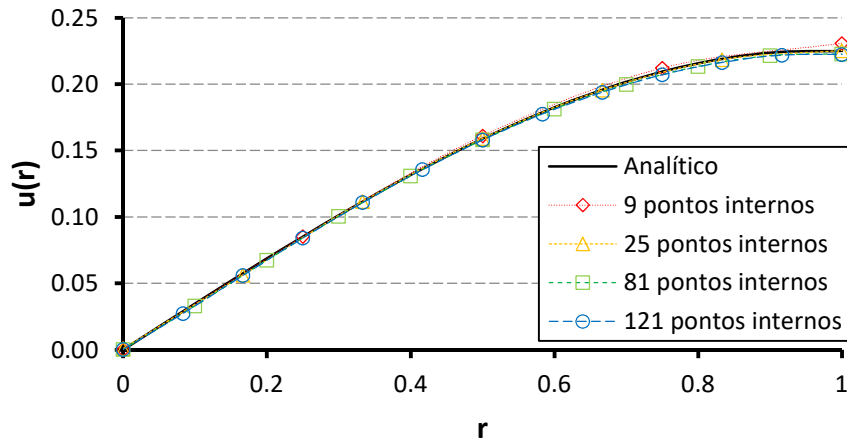
Os Gráficos 6.33, 6.34, 6.35 e 6.36 demonstram mais uma vez a influência dos pontos internos na solução numérica gerada pelo MECID. Porém, pode ser observado o mesmo comportamento que ocorreu com a técnica do Tensor de Galerkin, o EMR cresce com o aumento do valor de  $\nu$ .

Agora, será avaliado o comportamento dos deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$ . As curvas dos Gráficos 6.37, 6.38, 6.49 e 6.40 são para a malha com 118 elementos para cada valor do coeficiente de Poisson com a FBR radial simples. Os erros médios relativos obtidos para cada coeficiente de Poisson em cada malha são dados nas Tabelas 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19.

Gráfico 6.37 - Deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0$ 

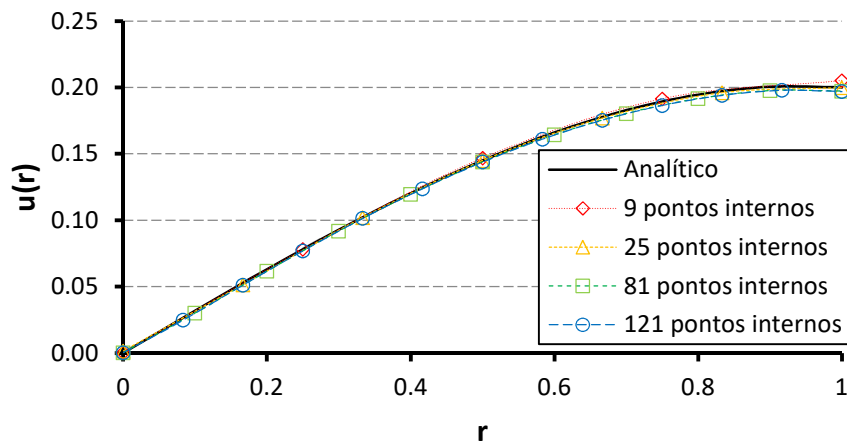
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.38 - Deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0,1$



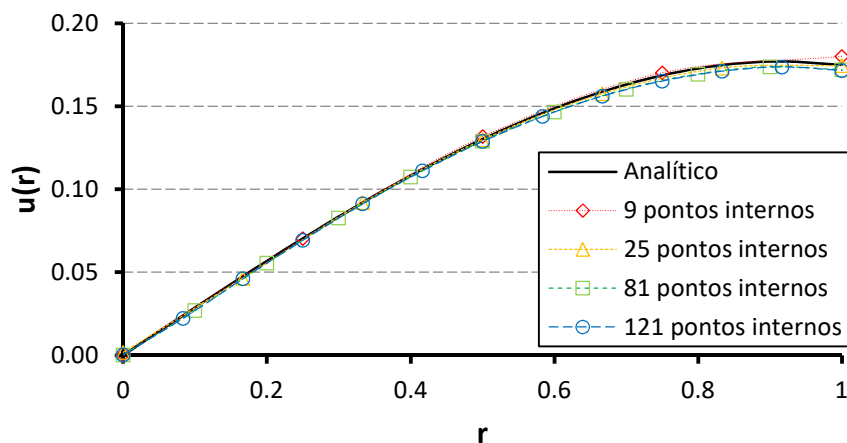
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.39 - Deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0,2$



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.40 - Deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o MECID com FBR radial simples, 118 elementos de contorno e  $\nu = 0,3$



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.16 – EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB radial simples e  $\nu = 0$ 

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	0,537	1,009	1,430
25 pontos internos	1,478	0,179	0,553
81 pontos internos	1,796	0,382	0,152
121 pontos internos	1,845	0,446	0,154

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.17 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB radial simples e  $\nu = 0,1$ 

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	1,108	0,593	0,972
25 pontos internos	2,241	0,577	0,218
81 pontos internos	2,480	0,994	0,604
121 pontos internos	2,265	0,968	0,625

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.18 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB radial simples e  $\nu = 0,2$ 

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	1,372	0,551	0,946
25 pontos internos	2,698	0,832	0,368
81 pontos internos	2,812	1,241	0,844
121 pontos internos	2,291	1,061	0,746

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.19 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FBR radial simples e  $\nu = 0,3$ 

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	1,621	0,530	0,984
25 pontos internos	3,287	1,134	0,551
81 pontos internos	3,134	1,472	1,047
121 pontos internos	2,242	1,098	0,811

Fonte: Autoria própria

Os resultados apresentados nas Tabelas 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19 demonstram a convergência do MECID para o problema bidimensional, obtendo erros médios relativos inferiores a 1% nas malhas mais refinadas e quando a quantidade de pontos internos é superior a 81 pontos, mesmo com a variação do coeficiente de Poisson. Nota-se que, para as malhas com 75 e 118 elementos de contorno, o aumento da quantidade de pontos internos reduz o EMR, porém de forma oscilante. Ainda pode ser observado que, para a malha com 30 elementos de contorno, o menor EMR é dado quando a quantidade de pontos internos é igual a 9.

Os resultados desse quarto teste são obtidos por meio da variação da constante  $C$  quando o coeficiente de Poisson é alterado. Esse comportamento é compatível com a teoria porque a constante  $C$  é função do coeficiente de Poisson. Assim, é esperado que a variação do coeficiente de Poisson produzisse valores diferentes para a constante  $C$ .

Os mesmos testes foram realizados para a FBR placa fina e seus resultados são mostrados nas Tabelas 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23. Novamente, a FBR placa fina apresentou um comportamento semelhante à FBR radial, com exceção das malhas com 30 elementos de contorno, onde o EMR reduz com o aumento dos pontos internos.

Tabela 6.20 – EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB placa fina e  $\nu = 0$

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	2,008	0,452	0,306
25 pontos internos	1,991	0,556	0,155
81 pontos internos	1,922	0,590	0,220
121 pontos internos	1,899	0,574	0,302

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.21 - EMR dos deslocamentos na direção radial a 45° para o MECID com FRB placa fina e  $\nu = 0,1$

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	2,695	1,045	0,517
25 pontos internos	2,811	1,215	0,672
81 pontos internos	2,606	1,217	0,827
121 pontos internos	2,324	1,092	0,830

Fonte: Autoria própria

Tabela 6.22 - EMR dos deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o MECID com FBR placa fina e  $\nu = 0,2$ 

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	3,067	1,291	0,726
25 pontos internos	3,319	1,539	0,933
81 pontos internos	2,969	1,501	1,081
121 pontos internos	2,347	1,185	0,939

Fonte: Autoria própria

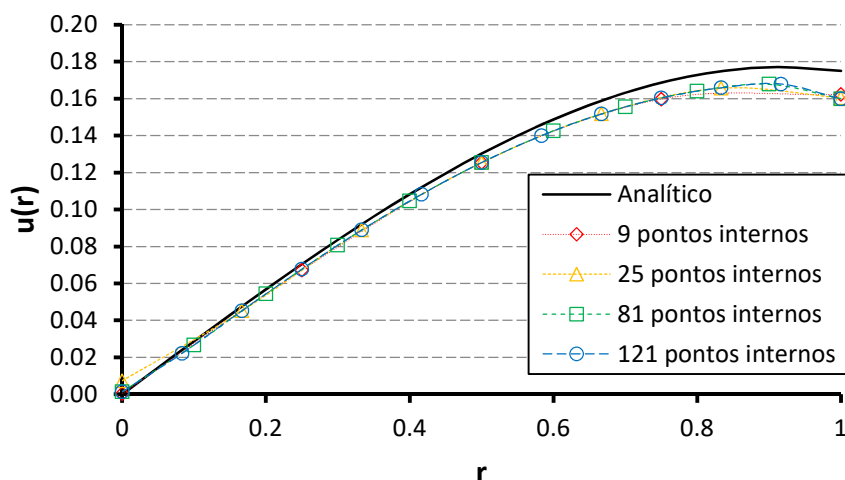
Tabela 6.23 - EMR dos deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o MECID com FBR placa fina e  $\nu = 0,3$ 

EMR (%)	30 elementos de contorno	75 elementos de contorno	118 elementos de contorno
9 pontos internos	3,429	1,517	0,894
25 pontos internos	3,974	1,908	1,209
81 pontos internos	3,294	1,748	1,309
121 pontos internos	2,290	1,224	1,007

Fonte: Autoria própria

Nas Tabelas 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23, nota-se que o menor EMR é dado pelas malhas com 118 elementos de contorno. Pode ser observado também que as malhas com 30 elementos de contorno e 25 pontos internos possuem os maiores EMR, menos para o Poisson nulo. Esse mesmo comportamento ocorreu com a FBR radial simples com 30 elementos de contorno para  $\nu = 0,3$ . Isso está acontecendo porque o deslocamento em  $r = 0$  está apresentando um afastamento mais acentuado da solução fundamental, como pode ser visto no Gráfico 6.41, o que está afetando diretamente o EMR. O Gráfico 6.42 mostra o caso mais crítico para FBR placa fina, malha com 30 elementos de contorno, 25 pontos internos e coeficiente de Poisson igual a 0,3. Esse deslocamento na origem deveria ser nulo, porém nesse ponto está sendo aplicado um nó duplo, onde um dos nós pertence ao eixo  $x_1$  e outro nó pertencendo ao eixo  $x_2$ . No nó pertencente ao eixo  $x_1$  foi aplicada a condição de deslocamento prescrito nulo apenas na componente de direção  $x_2$ , enquanto a componente da direção  $x_1$  não é prescrita e se encontra livre para sofrer deslocamento. Já no nó pertencente ao eixo  $x_2$  ocorre o oposto, o valor prescrito nulo é na direção em  $x_1$  e livre para deslocamento na direção  $x_2$ . Por esse motivo são encontrados valores diferentes de zero. Em todos os outros casos, o deslocamento calculado numericamente é muito próximo de zero, porém, para a malha com 30 elementos de contorno e 25 pontos internos, esse resultado apresentou um valor discrepante.

Gráfico 6.41 - Deslocamentos na direção radial a  $45^\circ$  para o MECID com FBR placa fina, 30 elementos de contorno e  $\nu = 0.3$

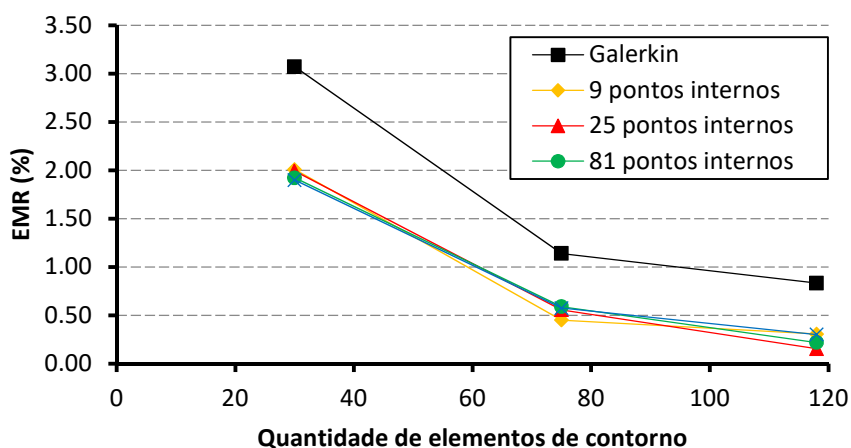


Fonte: Autoria própria

### 6.5.3 Comparação entre o MECID e a técnica do Tensor de Galerkin

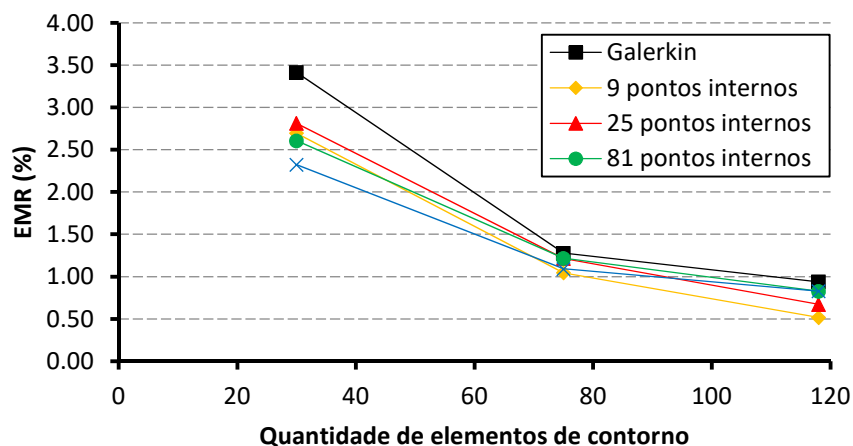
A partir das análises feitas nas seções anteriores, é perceptível que a técnica do Tensor de Galerkin é mais eficiente para determinar os valores no contorno e apresenta EMR maiores para os valores no interior do domínio para o problema com disco em rotação. Já o MECID mostrou o comportamento contrário, pois calcula os valores internos com menores erros se comparados com os valores no contorno. Com o objetivo de mostrar essas conclusões, os Gráficos 6.42, 6.43, 6.44 e 6.45 comparam os EMR's da técnica do tensor de Galerkin com os EMR's obtidos pelo MECID com a FBR placa fina dos deslocamentos dos pontos internos para cada coeficiente de Poisson.

Gráfico 6.42 - EMR dos deslocamentos radiais à  $45^\circ$  da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e  $\nu = 0$



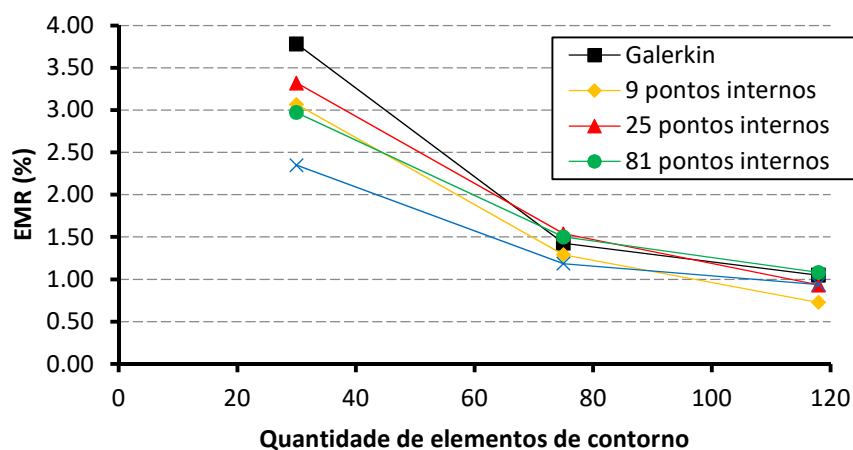
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.43 - EMR dos deslocamentos radiais à 45° da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e  $\nu = 0,1$



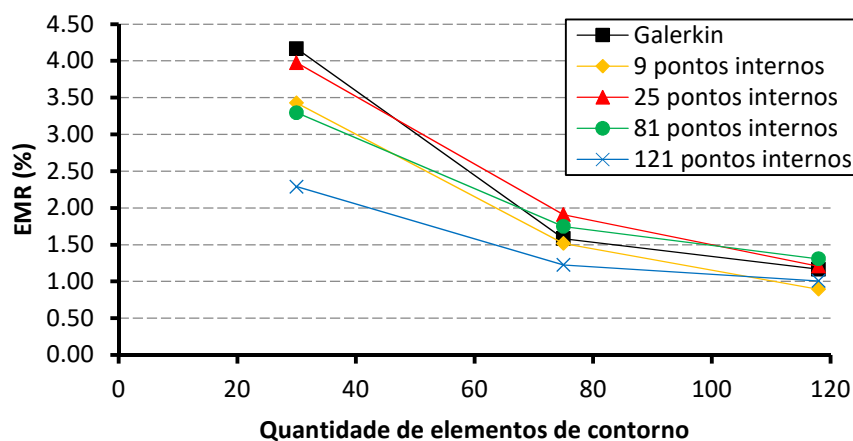
Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.44 - EMR dos deslocamentos radiais à 45° da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e  $\nu = 0,2$



Fonte: Autoria própria

Gráfico 6.45 - EMR dos deslocamentos radiais à 45° da técnica do tensor de Galerkin e do MECID com FBR placa fina para força centrífuga no disco em rotação e  $\nu = 0,3$



Fonte: Autoria própria



## 7 CONCLUSÃO

### 7.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação analisou e comparou duas técnicas do MEC para problemas de elasticidade: a clássica formulação utilizando o Tensor de Galerkin, e a recente técnica do MECID. A técnica do Tensor de Galerkin apresentou o comportamento esperado: baixos erros no cálculo dos deslocamentos no contorno, maior convergência nos problemas não esbeltos, e erros maiores em pontos no interior do domínio. A técnica de interpolação direta apresentou resultados satisfatórios, mostrando rápida convergência em todos os casos analisados e obtendo baixos erros tanto no contorno quanto nos pontos no interior do domínio a partir da definição correta da constante  $C$ .

Os resultados mostraram que os pontos internos em problemas esbeltos influenciam pouco na resposta numérica. Esse fato está relacionado com a proximidade entre as laterais do corpo no comprimento da direção de atuação da força de corpo. Como a distância entre essas laterais é pequena, os pontos base no contorno já são suficientes para a convergência do resultado, fazendo com que os pontos base internos afetem pouco na resposta numérica.

Das três FBR's testadas no MECID, as que obtiveram melhor desempenho foram a radial simples e a placa fina apresentando poucas instabilidades nos testes realizados, além de apresentarem resultados semelhantes. No entanto, a FBR cúbica apresentou instabilidades, principalmente para as malhas com maior quantidade de elementos de contorno. Foi observado também o efeito dos pontos internos e, como na maioria dos testes, o aumento da quantidade desses pontos melhora a solução numérica, o mesmo comportamento visto nos problemas de Poisson e Helmholtz, condizendo com a literatura (LOEFFLER, CRUZ, e BULCÃO, 2015; LOEFFLER et al., 2015; LOEFFLER e MANSUR, 2017).

Notou-se que a formulação proposta do MECID apresentou forte dependência da constante  $C$ , que por sua vez mostrou ser função da influência dos pontos internos de interpolação e do coeficiente de Poisson. A influência dos pontos internos pode ser explicada pelo fato da solução fundamental do procedimento de interpolação não levar em consideração a constante, enquanto o procedimento de regularização sim, necessitando de um novo valor para que haja acoplamento dos dois procedimentos. Já a constante  $C$  é definida em função do coeficiente de Poisson, logo sua variação afeta o módulo de  $C$ .

## 7.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

A presente dissertação foi um estudo preliminar da aplicação do MECID em problemas elásticos, ou seja, existem alguns aspectos que não são totalmente compreendidos e que precisam de estudos mais detalhados para um melhor entendimento da técnica quando aplicada em elasticidade. Baseado nisso, algumas sugestões de pesquisas são propostas abaixo:

- Aplicação da formulação em geometrias mais complexas e com diferentes forças de corpo para avaliar o comportamento da constante  $C$  nesses casos, fazendo uma comparação com o MEF;
- Comparação com outras técnicas do MEC, como por exemplo, a Dupla Reciprocidade e a Múltipla reciprocidade;
- Testar outras funções de base radial, tais como as FBR's com suporte compacto, semelhante ao que foi desenvolvido por Loeffler et al. (2017);
- Aplicar o MECID para o cálculo das tensões, na última integral de domínio da equação abaixo (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$\sigma_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, X) p_k(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, X) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, X) b_k(X) d\Omega \quad (7.3)$$

- Expandir a técnica para problemas elásticos tridimensionais.

A última sugestão possui a vantagem de não ser necessária a avaliação da constante  $C$ , pois, como já citado anteriormente, a solução fundamental gerada pelo Tensor de Galerkin em problemas tridimensionais é a igual à solução fundamental de Kelvin.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATKIN, R. J.; FOX, N. **An Introduction to the Theory of Elasticity**, Longman, 1980.

BARBOSA, J. P.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C.. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. **Engineering Analysis With Boundary Elements**. v. 108, p. 295-300. 2019.

BORESI, A. P.; CHONG, K. P. **Elasticity in engineering mechanics**, New York: Elsevier, 1987.

BRAGA, Carmen Lys Ribeiro. **Notas de Física Matemática: Equações diferenciais, Funções de Green e Distribuições**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

BREBBIA, C. A.. **The Boundary Element Method for Engineers**. London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUES, J.. **Boundary Elements An Introductory Course**. Southampton, U. K.: Wit Press, 1992.

BREBBIA, C. A.; NARDINI, D.. Dynamics analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. **Soil Dynamics And Earthquake Engineering**. Southampton, p. 228-233. out. 1983.

BREBBIA, C. A.; WALKER, S.. **Boundary Element Techniques in Engineering**. Southampton: Newnes-Butterworths, 1980.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering**. Heidelberg: Springer-verlag Berlin, 1984.

BUDYNAS, R. G.. **Advanced strength and applied stress analysis**. New York: McGraw-Hill Book, 1977.

BUHMANN, Martin D.. **Radial Basis Functions: theory and implementations**. Cambridge: University Press, 2003.

CHAVES, Eduardo W. V.. Solving problems by means of Continuum Mechanics. 2016. Disponível em: [http://mmc.rmee.upc.edu/documents/Tensor\\_Analysis/mmc\\_problems.pdf](http://mmc.rmee.upc.edu/documents/Tensor_Analysis/mmc_problems.pdf). Acesso em: 17 nov. 2021.

COURANT, R.. **Differential and Integral Calculus**, vol 2. New York: Interscience, 1936.

CRUSE, T. A.; Snow, D. W.; Wilson, R. B.. Numerical solutions in axisymmetric elasticity. **Computers & Structures**. 7, East Hartford, p. 445-451. 1977.

CRUSE, T. A.. **Boundary-Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Fracture Mechanics Analysis**. East Hartford: Pratt And Whitney Aircraft, 1975.

CRUSE, Thomas A.. **Mathematical foundations of the boundary-integral equation method in solid mechanics**. East Hartford: Conn.: Pratt And Whitney, 1977.

DANSON, D. J.. A boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces. In: BREBBIA, C. A.. **Boundary Element Methods**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. p. 105-122.

EL-ZAFRANY, A.; COOKSON, R. A.; IQBAL, M.. Boundary element stress analysis with domain type loading: advances in the use of the boundary element method for stress analysis. **Mechanical Engineering Publications**. London, p. 15-34. 1986

HUGHES, Thomas J. R.. **The Finite Element Method**: linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey: Prentice-Hall, 1987.

KATSIKADELIS, John T.. **Boundary Elements**: theory and applications. Oxford: Elsevier Science Ltd, 2002.

LAI, W. M.; KREMPL, E.; RUBEN, D. **Introduction to Continuum Mechanics**. 4. ed. Burlington: Elsevier, 2010.

LEVEQUE, Randall J.. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J.. A Regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. **Engineering Analysis With Boundary Elements**. Vitória, p. 14-18. jan. 2017.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J.. Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation. In: BREBBIA, C. A.; VENTURINI, W. S.. **BETECH 87**. Rio de Janeiro: Computational Mechanics Publication, Southampton, 1987. p. 105-122.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J.. Uma Nova Abordagem do Método dos Elementos de Contorno para Solução de Problemas com Cargas de Domínio. In: VIII Congresso Latino Americano e Ibérico sobre métodos computacionais para engenharia. **Anais[...]** Rio de Janeiro. v. B, p. 347-362, 1987.

LOEFFLER, C. F.; ZAMPROGNO, L.; MANSUR, W. J.; BULCÃO, A. Performace of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potencial Problems. **Computer Modeling In Engineering And Sciences.**, v. 113, n. 3, p. 367-387. 2017c.

LOEFFLER, Carlos F.; CRUZ, Átila L.; BULCÃO, André. Direct use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary elem. **Engineering Analysis With Boundary Elements**. United Kingdom, p. 97-108. jan. 2015.

LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M.; MANSUR, W. J.; BULCÃO, A. Solving Helmholtz problems with the boundary element method using direct radial basis function inter. **Engineering Analysis With Boundary Elements**. v. 61, p. 218-225. 2015a.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A.. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. **Applied Mathematical Modelling**. Southampton, p. 157-162. jun. 1983.

NEVES, A. C.; BREBBIA, C. A.. The Multiple Reciprocity Boundary Element Method in Elasticity: A new approach for transforming domain Integrals to the Boundary. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, Southampton, v. 31, n. 4, p. 709-727, 20 mar. 1991.

NOWAK, A.J., The Multiple Reciprocity Method of Solving Transient Heat Conduction Problems, in **Boundary Elements**. XI, Vol. 2, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York, 1989.

NOWAK, A.J. and BREBBIA, C.A., Solving Helmholtz Equation by Boundary Element Method Using the Multiple Reciprocity Method. **Proc. Comp. Eper. Fluid Flow**, ed. G.M. Carlomagno e C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub./Spinger-Verlag, 156-270, 1989

NOWAK, A.J. and PARTRIDGE, P.W., Comparison of the dual reciprocity and the multiple reciprocity methods. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 10, 155-160, 1992

PESSOLANI, R. B. V.. An Hp-Adaptive Hierarchical Formulation for the Boundary Element Method Applied to Elasticity in Two Dimensions. **Journal Of The Brazilian Society Of Mechanical Sciences**. Niterói, p. 23-25. mar. 2002.

REDDY, J. N.. **An Introduction to The Finite Element Method**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2005.

RIBEIRO, Maj Qem Harlido Leite. **Análise de Estruturas com carregamento térmico utilizando o método dos elementos de contorno**. 1991. 91 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1991.

SCHABACK, R.. **A Practical to Radial Basis Functions**. 2007. Disponível em: <https://num.math.uni-goettingen.de/schaback/teaching/sc.pdf>. Acesso em: 16 dez. 2021.

SMITH, G. D.. **Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. 3. ed. Oxford: Clarendon Press, 1985.

STEWART, James. **Cálculo**, vol. 2. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Tradução 7ª edição norte-americana.

STRICWERDA, John C.. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. 2. ed. Philadelphia: Siam, 2004.

TAUCHERT, T. R.. **Energy Principles in Structural Mechanics**. Tokio: McGraw-Hill, 1974.

TELLES, J. C. F.. **Two Dimensional Elastostatic Analysis Using Boundary Elements**. Southampton: Computational Mechanics Publication, 1986.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N.. **Theory of Elasticity**. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1970.

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A.. The dual reciprocity boundary element formulation for non-linear diffusion problems. **Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering**, v. 65, n. 2, p. 147-164, nov. 1987.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A – Funções de interpolação primitiva e suas derivadas direcionais

Dada uma função de base radial  $F^k(X^k, X)$ , definida por meio do laplaciano da função primitiva  $\Psi^k(X^k, X)$ :

$$F^k(X^k, X) = \nabla^2 \Psi^k(X^k, X) \quad (\text{A.1})$$

O laplaciano de uma função  $f$  em coordenadas polares é dado por:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a equação (A.1) em (A.2) e considerando que não haja variação angular, a equação diferencial parcial (A.2) se reduz a uma equação diferencial ordinária, obtendo a seguinte equação:

$$\frac{d^2 \Psi^k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi^k}{dr} = F^k(X^k, X) \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando ambos os lados por  $r$  e escrevendo o lado esquerdo como a derivada de um produto, a equação (A.3) pode ser reescrita:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi^k}{dr} \right) = r F^k(X^k, X) \quad (\text{A.4})$$

Integrando ambos os lados:

$$r \frac{d\Psi^k}{dr} = \int r F^k(X^k, X) dr \quad (\text{A.5})$$

A equação (A.5) mostra que a solução depende de cada tipo de função de base radial.

Após determinar a função primitiva, para MECID, deseja-se obter a derivada direcional dessa função, que é dada pelo produto escalar entre o gradiente de  $\Psi^k$  e o vetor normal ao contorno:

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial x_m} n_m = \frac{\partial \Psi^k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_m} n_m = \frac{\partial \Psi^k}{\partial r} r_{,m} n_m \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a propriedade dada pela equação (3.22), tem-se:

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial x_m} n_m = \frac{\partial \Psi^k}{\partial r} \frac{r_m}{r} n_m \quad (\text{A.7})$$

Após encontrar a função primitiva  $\Psi^k$  pela equação (A.5), deriva-se a mesma em relação à  $r$  e substitui o resultado em (A.7), determinando a sua derivada direcional. Essa sequência será realizada para cada função apresentada na Tabela 5.1.

### I. Função radial constante: $F^k(\mathbf{X}^k, \mathbf{X}) = 1$

Para a Função radial constante, a equação (A.5) será dada por:

$$r \frac{d\Psi^k}{dr} = \int r dr = \frac{r^2}{2} + K_1 \quad (\text{A.8})$$

Considerando  $K_1 = 0$ , tem-se:

$$\frac{d\Psi^k}{dr} = \frac{r}{2} \quad (\text{A.9})$$

Logo, a primitiva e sua derivada direcional serão dadas respectivamente pelas equações (A.10) e (A.11):

$$\Psi^k = \frac{r^2}{4} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial x_m} n_m = \frac{r}{2} \frac{r_m}{r} n_m = \frac{1}{2} r_m n_m \quad (\text{A.11})$$

### II. Função radial simples: $F^k(\mathbf{X}^k, \mathbf{X}) = r$

Para a Função radial simples, a equação (A.5) será dada por:



$$r \frac{d\Psi^k}{dr} = \int r^2 dr = \frac{r^3}{3} + K_1 \quad (\text{A.12})$$

Considerando  $K_1 = 0$ , tem-se:

$$\frac{d\Psi^k}{dr} = \frac{r^2}{3} \quad (\text{A.13})$$

Logo, a primitiva e sua derivada direcional serão dadas respectivamente pelas equações (A.14) e (A.15):

$$\Psi^k = \frac{r^3}{9} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial x_m} n_m = \frac{r^2}{3} \frac{r_m}{r} n_m = \frac{r}{3} r_m n_m \quad (\text{A.15})$$

### III. Função radial cúbica: $F^k(X^k, X) = r^3$

Para a Função radial cúbica, a equação (A.5) será dada por:

$$r \frac{d\Psi^k}{dr} = \int r^4 dr = \frac{r^5}{5} + K_1 \quad (\text{A.16})$$

Considerando  $K_1 = 0$ , tem-se:

$$\frac{d\Psi^k}{dr} = \frac{r^4}{5} \quad (\text{A.17})$$

Logo, a primitiva e sua derivada direcional serão dadas respectivamente pelas equações (A.18) e (A.19):

$$\Psi^k = \frac{r^5}{25} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial x_m} n_m = \frac{r^4}{5} \frac{r_m}{r} n_m = \frac{r^3}{5} r_m n_m \quad (\text{A.19})$$

**IV. Função radial placa fina:  $F^k(X^k, X) = r^2 \ln r$**

Para a Função radial placa fina, a equação (A.5) será dada por:

$$r \frac{d\Psi^k}{dr} = \int r^3 \ln r \, dr \quad (\text{A.20})$$

Aplicando integração por partes, em que:

$$u = \ln r \rightarrow du = \frac{1}{r} dr \quad (\text{A.21})$$

$$dv = r^3 dr \rightarrow v = \frac{r^4}{4} \quad (\text{A.22})$$

Obtém-se:

$$r \frac{d\Psi^k}{dr} = \frac{r^4}{4} \ln r - \int \frac{r^4}{4} \frac{1}{r} dr = \frac{r^4}{4} \ln r - \frac{r^4}{16} + K_1 \quad (\text{A.23})$$

Considerando  $K_1 = 0$ , tem-se:

$$\frac{d\Psi^k}{dr} = \frac{r^3}{4} \ln r - \frac{r^3}{16} \quad (\text{A.24})$$

Logo, a primitiva e sua derivada direcional serão dadas respectivamente pelas equações (A.25) e (A.26):

$$\Psi^k = \frac{1}{4} \left( \frac{r^4}{4} \ln r - \frac{r^4}{16} \right) - \frac{r^4}{64} = \frac{r^4}{16} \ln r - \frac{r^4}{32} = \frac{r^4}{16} (2 \ln r - 1) \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial x_m} n_m = \left( \frac{r^3}{4} \ln r - \frac{r^3}{16} \right) \frac{r_m}{r} n_m = \frac{r^2}{16} (4 \ln r - 1) r_m n_m \quad (\text{A.26})$$

## APÊNDICE B – Integral de contorno da constante C

Como apresentado no capítulo 5, a área de um domínio bidimensional pode ser calculada por meio do teorema de Green pela seguinte relação:

$$A = \int_{\Omega} 1 \, d\Omega = \int_{\Omega} f_{i,i} \, d\Omega = \int_{\Gamma} f_i n_i \, d\Gamma \quad (\text{A.27})$$

Ou seja, se o divergente de uma função vetorial  $f_i$  for igual a 1, a integral de linha da componente normal de  $f_i$  ao longo do contorno  $\Gamma$  é igual a área do domínio bidimensional (STEWART, 2013).

Considerando a função primitiva  $\Psi^k$  dada pela equação (A.10) e sendo  $r$  a distância entre um ponto e a origem da referência. Logo:

$$\Psi^k = \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2) \quad (\text{A.28})$$

Definindo a função vetorial  $f_i$  como sendo o gradiente da função anterior, tem-se:

$$f_i = \Psi_{,i}^k = \frac{\partial \Psi^k}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial \Psi^k}{\partial x_2} e_2 = \frac{1}{2}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \frac{1}{2} x_i \quad (\text{A.29})$$

Aplicando o divergente sobre a função anterior, chega-se à:

$$f_{i,i} = \Psi_{,ii}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad (\text{A.30})$$

Assim, foi demonstrado que a FBR constante pode ser utilizada para o cálculo da integral (A.27). Substituindo a equação (A.29) em (A.27), chega-se a equação (A.31) aplicada na equação (5.19):

$$\int_{\Gamma} f_i n_i \, d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x_i n_i \, d\Gamma \quad (\text{A.31})$$

### APÊNDICE C – Solução analítica dos deslocamentos para a força gravitacional variando linearmente

Quando uma barra engastada está submetida à ação da força peso, conforme a Figura 6.3, as seguintes condições de contorno são aplicáveis:

$$u_2 = 0 \text{ em } x_2 = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{du_2}{dx_2} = 0 \text{ em } x_2 = L \quad (\text{A.33})$$

Considerando que a variação da tensão ocorre apenas na direção vertical, a equação de equilíbrio (2.1) será dada por:

$$\frac{d\sigma_{22}}{dx_2} + \rho g x_2 = 0 \quad (\text{A.34})$$

A Lei de Hooke para uma única direção é dada por:

$$\sigma_{22} = E \varepsilon_2 = E \frac{du_2}{dx_2} \quad (\text{A.35})$$

Derivando ambos os lados da equação (A.35):

$$\frac{d\sigma_{22}}{dx_2} = E \frac{d^2u_2}{dx_2^2} \quad (\text{A.36})$$

Substituindo a equação (A.36) em (A.34):

$$\frac{d^2u_2}{dx_2^2} = -\frac{\rho g}{E} x_2 \quad (\text{A.37})$$

Integrando (A.37), tem-se:

$$\frac{du_2}{dx_2} = -\frac{\rho g}{E} \cdot \frac{x_2^2}{2} + C_1 \quad (\text{A.38})$$

Integrando mais uma vez, chega-se a seguinte expressão:

$$u_2 = -\frac{\rho g}{2E} \cdot \frac{x_2^3}{3} + C_1 x_2 + C_2 \quad (\text{A.39})$$

Impondo a primeira condição de contorno na equação (A.39), encontra-se  $C_2 = 0$ . Aplicando a segunda condição de contorno na equação (A.38), determina-se o valor de  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{\rho g}{2E} L^2 \quad (\text{A.40})$$

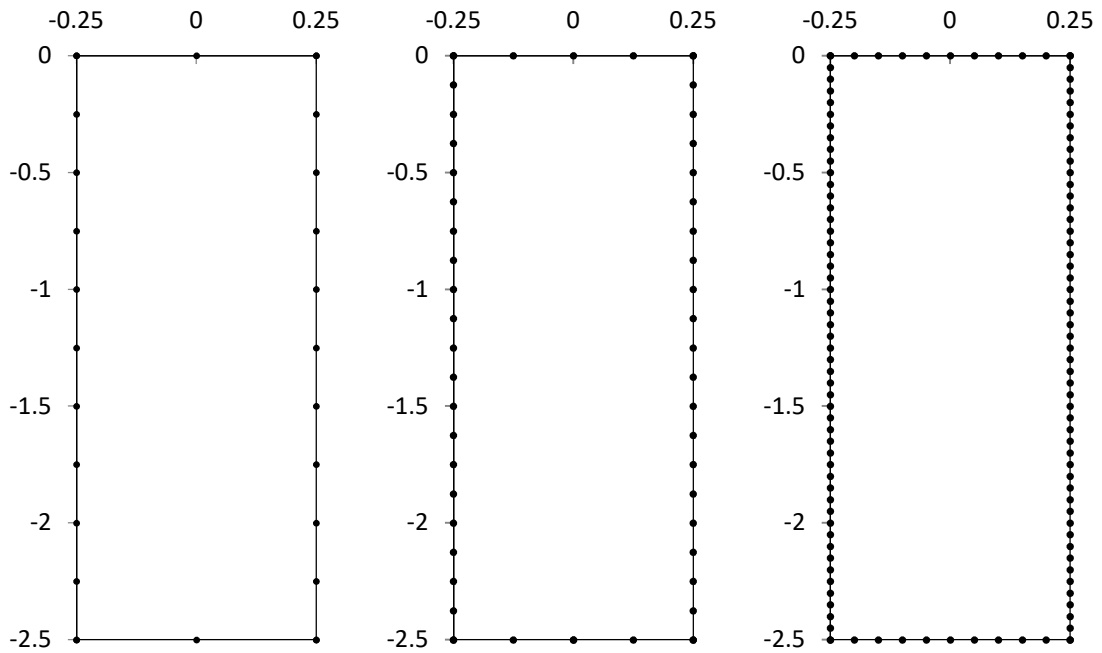
Assim, substituindo os coeficientes encontrados na equação (A.39), obtém-se a solução analítica para a força gravitacional variando linearmente, dada por:

$$u_2 = \frac{\rho g}{2E} x_2 \left( L^2 - \frac{x_2^2}{3} \right) \quad (\text{A.41})$$

## APÊNDICE D – Malhas utilizadas nas simulações

### I. Malhas da barra esbelta vertical (primeiro teste)

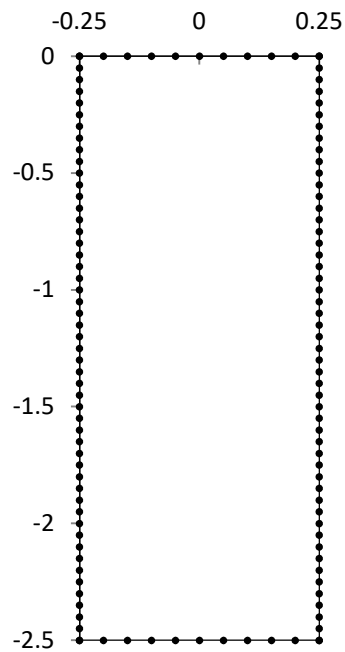
Figura D.1 - Malhas para a barra esbelta vertical com (a) 24 elementos de contorno (b) 48 elementos de contorno (c) 120 elementos de contorno (d) 240 elementos de contorno



(a) 24 elementos de contorno

(b) 48 elementos de contorno

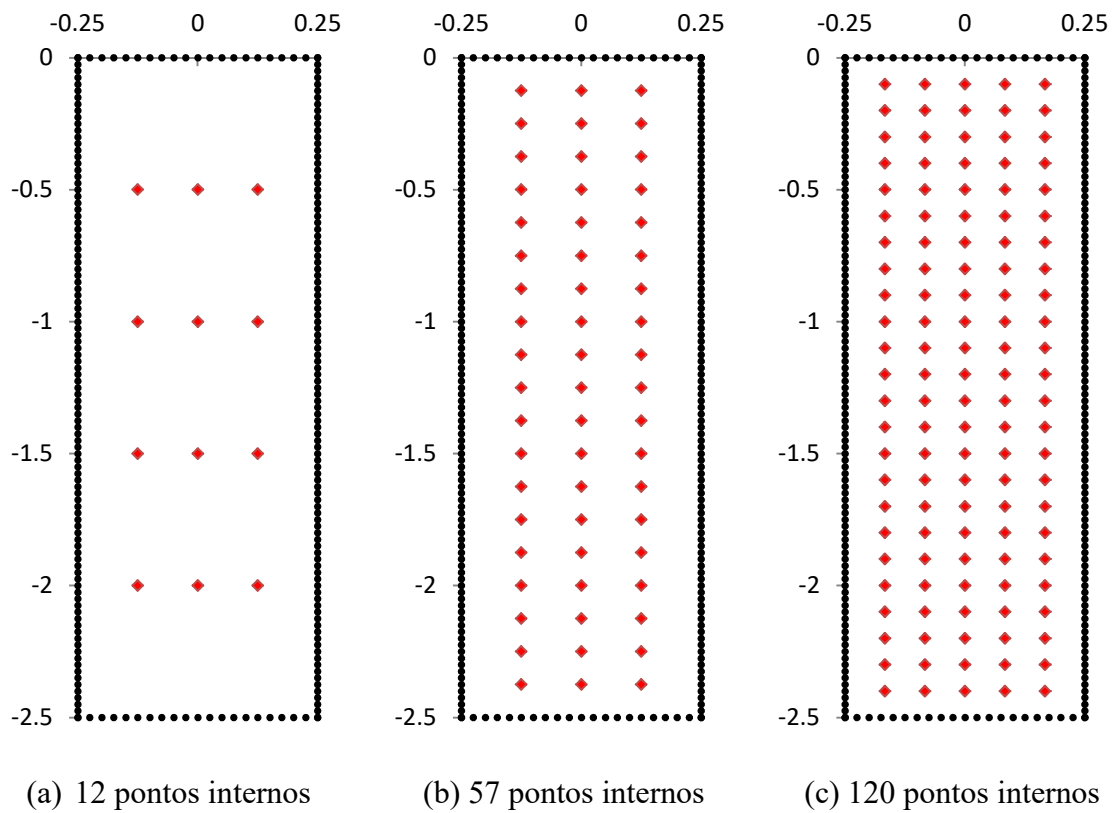
(c) 120 elementos de contorno



(d) 240 elementos de contorno

Fonte: Autoria própria

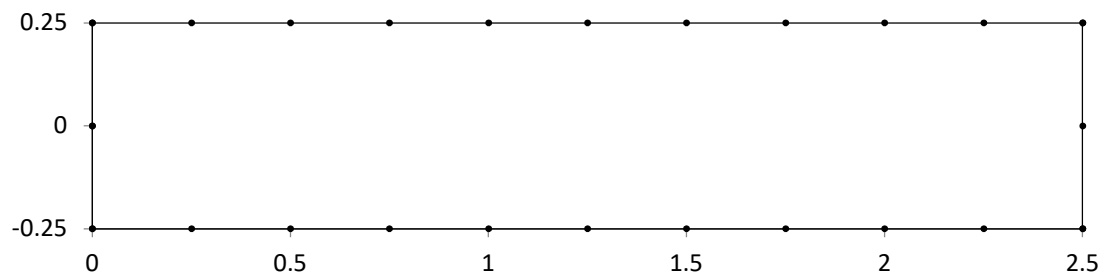
Figura D.2 – Distribuição dos pontos internos para a barra esbelta vertical com (a) 12 pontos internos (b) 57 pontos internos (c) 120 pontos internos

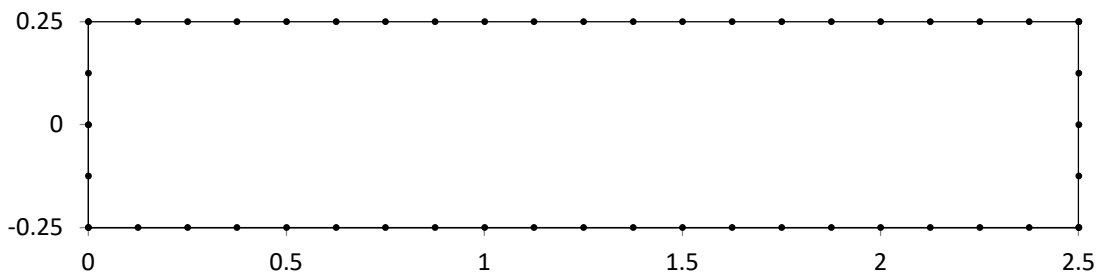


Fonte: Autoria própria

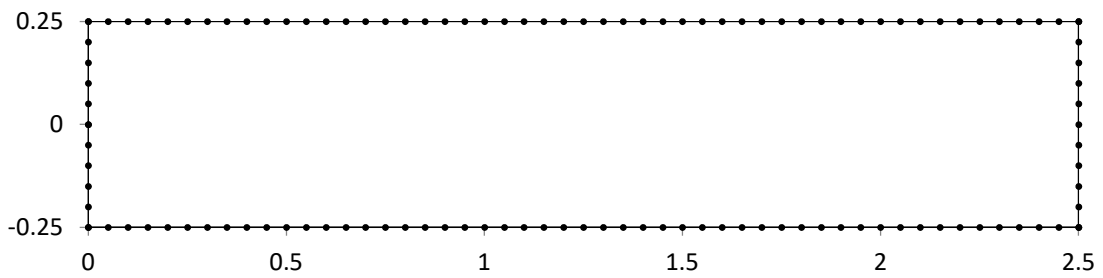
## II. Malhas da barra esbelta horizontal (segundo teste)

Figura D.3 - Malhas para a barra esbelta horizontal com (a) 24 elementos de contorno (b) 48 elementos de contorno (c) 120 elementos de contorno (d) 240 elementos de contorno

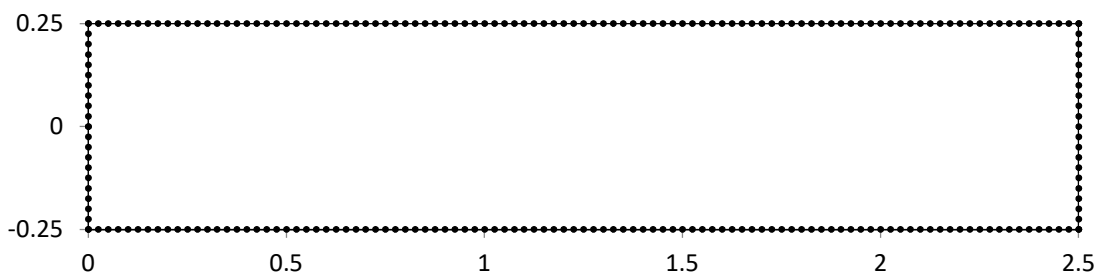




(b) 48 elementos de contorno



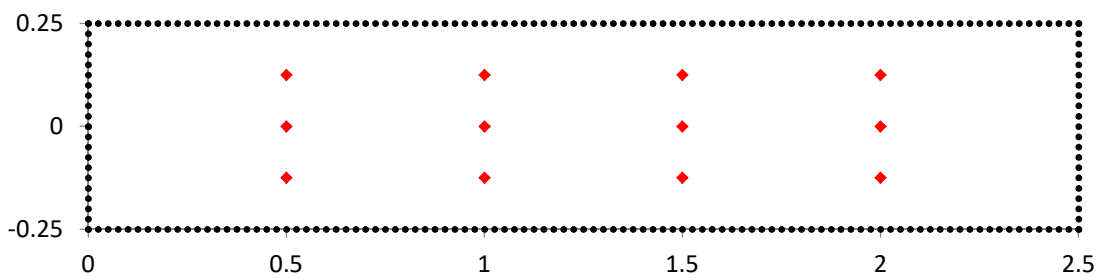
(c) 120 elementos de contorno



(d) 240 elementos de contorno

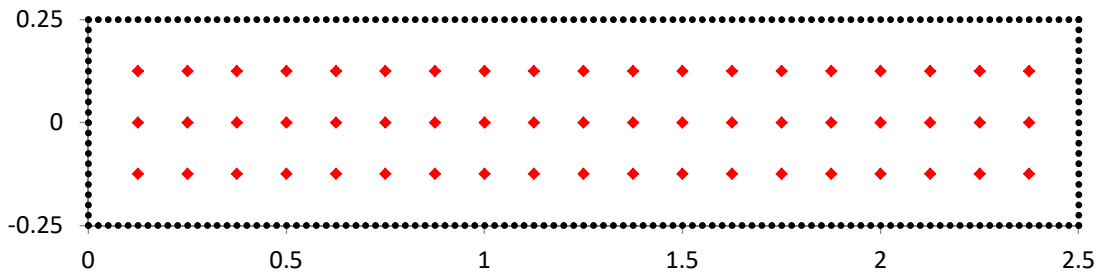
Fonte: Autoria própria

Figura D.4 – Distribuição dos pontos internos para a barra esbelta horizontal com (a) 12 pontos internos (b) 57 pontos internos (c) 120 pontos internos

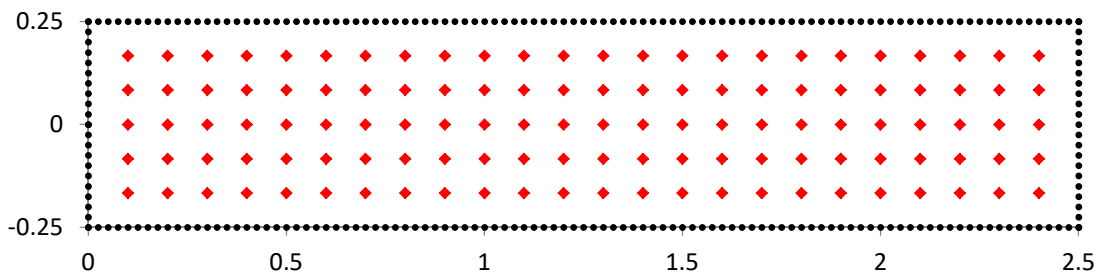


(a) 12 pontos internos





(b) 57 pontos internos

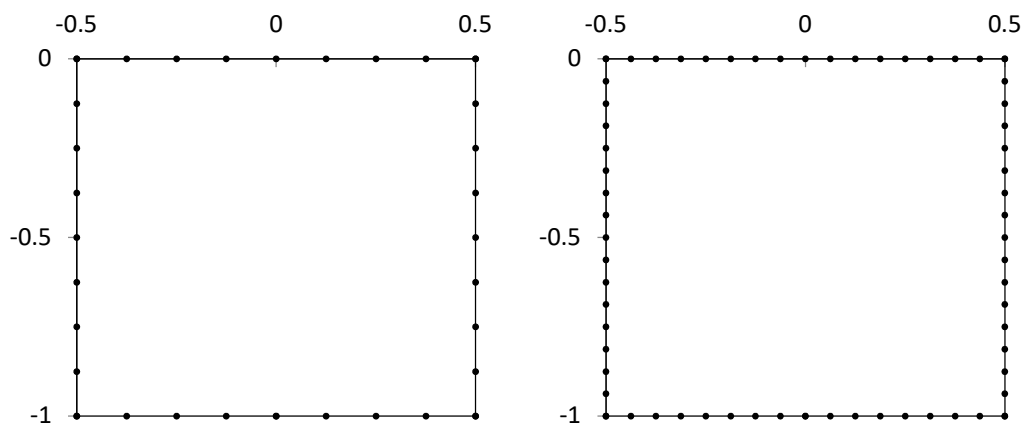


(c) 120 pontos internos

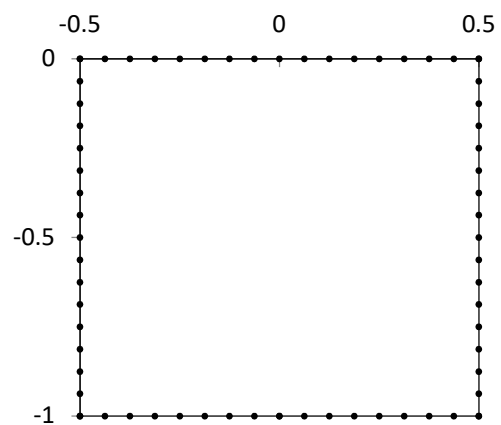
Fonte: Autoria própria

### III. Malhas da barra quadrada vertical (terceiro teste)

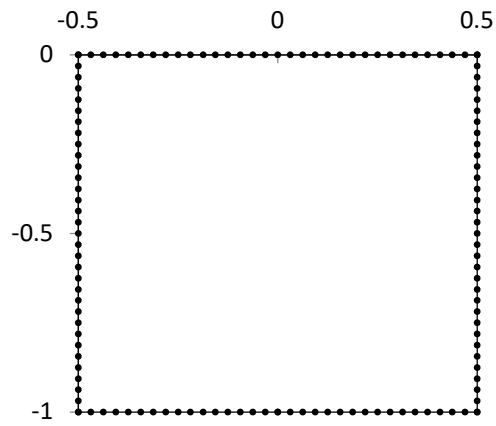
Figura D.5 - Malhas para a barra quadrada vertical com (a) 32 elementos de contorno (b) 64 elementos de contorno (c) 128 elementos de contorno



(a) 32 elementos de contorno



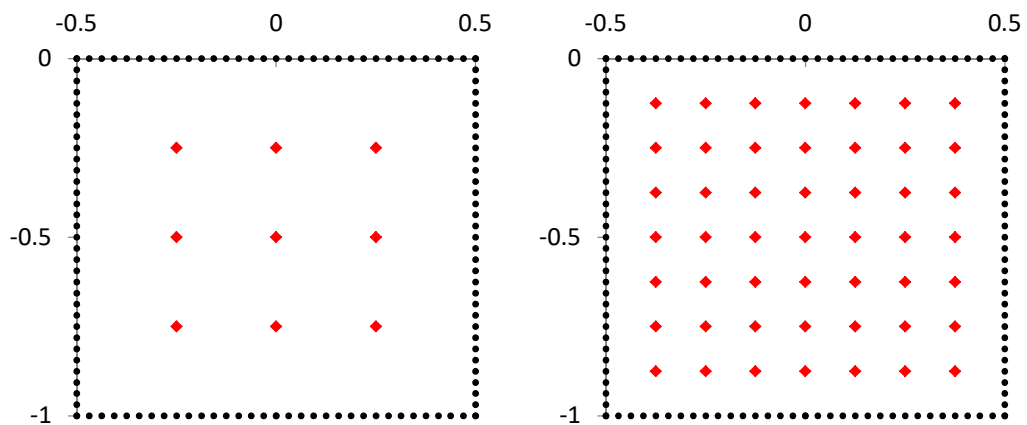
(b) 64 elementos de contorno



(c) 128 elementos de contorno

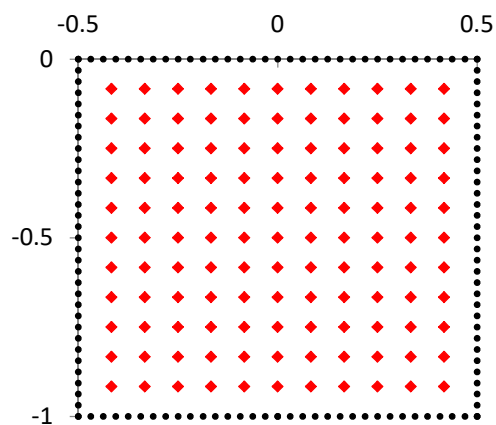
Fonte: Autoria própria

Figura D.6 – Distribuição dos pontos internos para a barra quadrada vertical com (a) 9 pontos internos (b) 49 pontos internos (c) 121 pontos internos



(a) 9 pontos internos

(b) 49 pontos internos

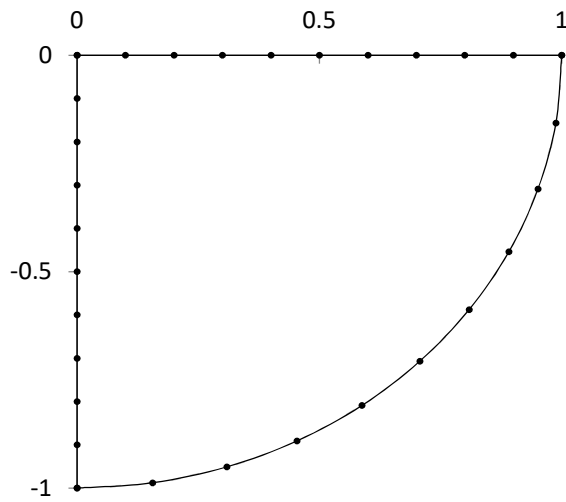


(c) 121 pontos internos

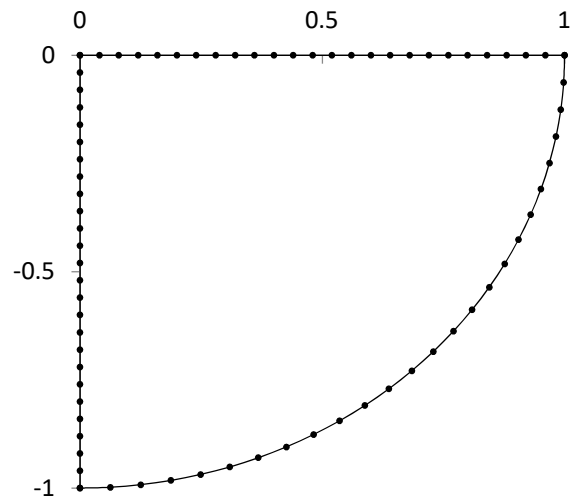
Fonte: Autoria própria

#### IV. Malhas do disco em rotação (quarto teste)

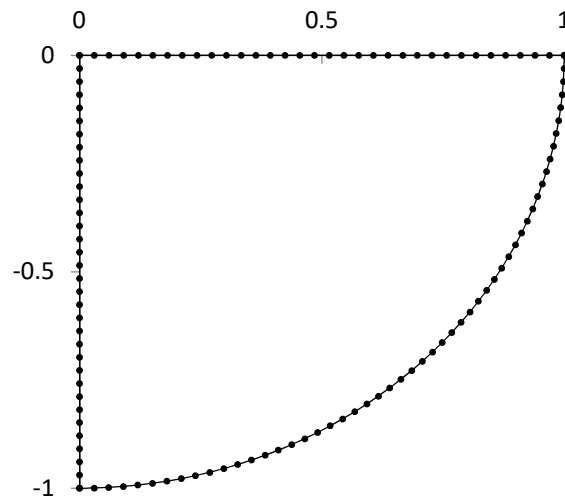
Figura D.7 - Malhas para o disco em rotação com (a) 30 elementos de contorno (b) 75 elementos de contorno (c) 118 elementos de contorno



(a) 30 elementos de contorno



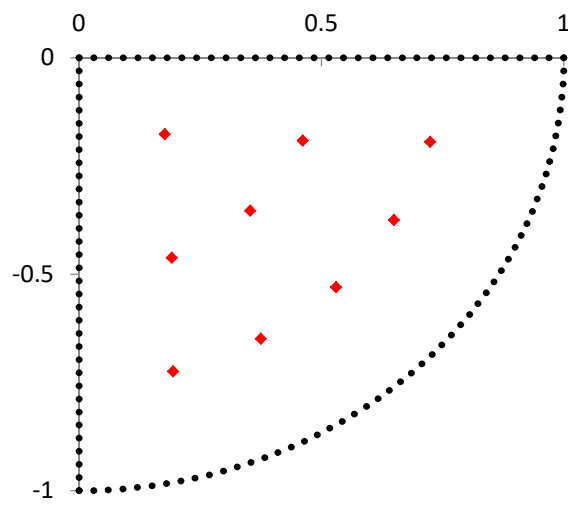
(b) 75 elementos de contorno



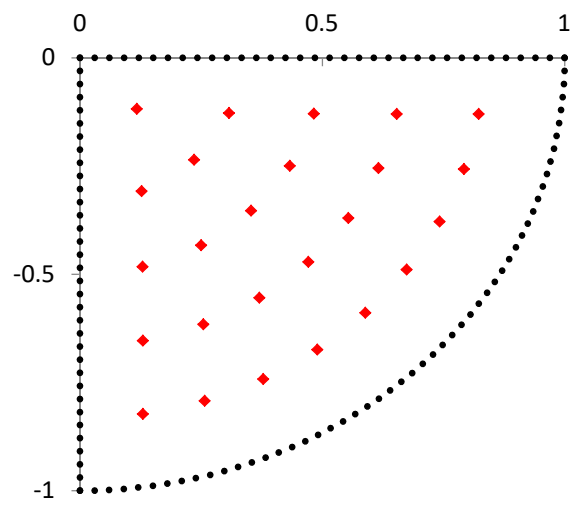
(c) 118 elementos de contorno

Fonte: Autoria própria

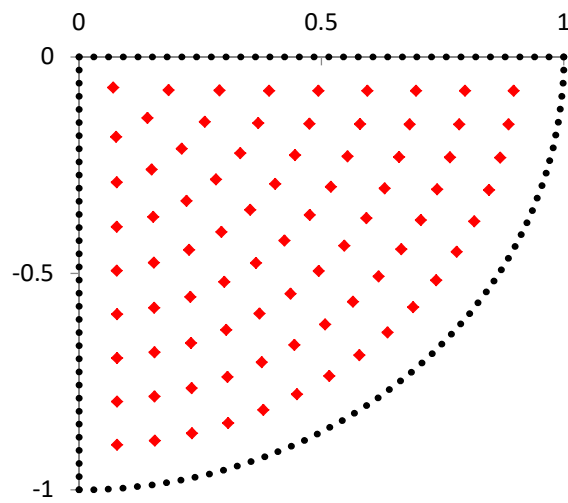
Figura D.8 – Distribuição dos pontos internos para o disco em rotação com (a) 9 pontos internos (b) 25 pontos internos (c) 81 pontos internos e (d) 121 pontos internos



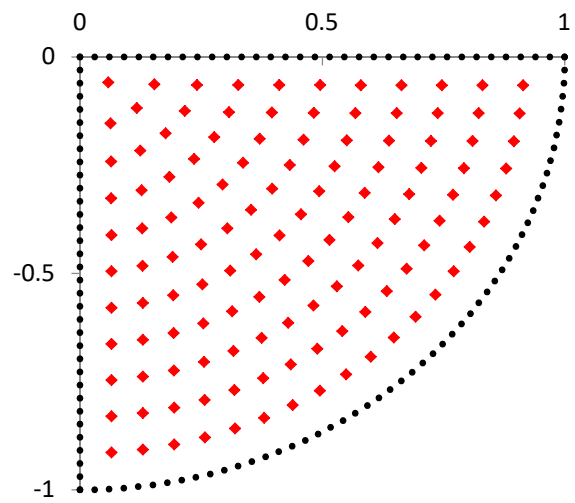
(a) 9 pontos internos



(b) 25 pontos internos



(c) 81 pontos internos



(d) 121 pontos internos

Fonte: Autoria própria

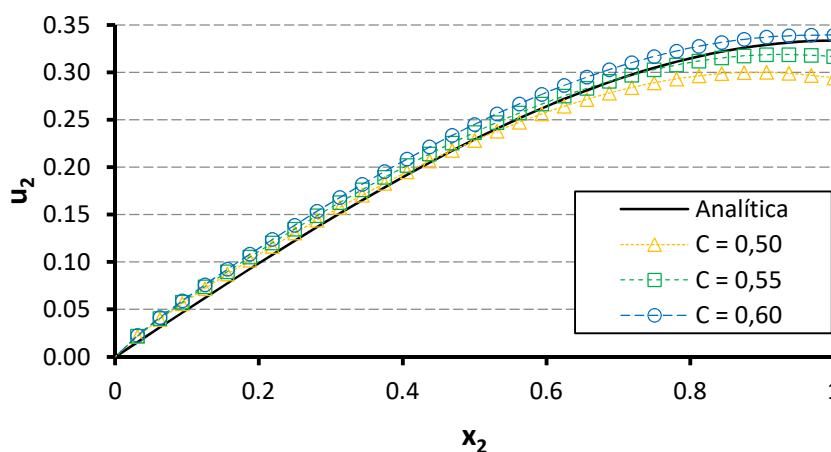
## APÊNDICE E – Obtenção das constantes C

### I. Constante C para barra quadrada vertical com força gravitacional variando linearmente

Para determinar a nova constante C do terceiro problema foi utilizada a malha mais refinada devido à sua convergência obtida nos testes da técnica do tensor de Galerkin, ou seja, a malha com 128 elementos de contorno. Variou-se o valor da constante C e os resultados obtidos foram comparados, sendo escolhido como novo valor da constante o resultado que obteve os menores erros médios relativos em comparação com a solução analítica.

Primeiramente variou-se o valor da constante em intervalos de 0,05 para determinar o intervalo de C, onde a curva com o menor EMR deveria se encontrar. O Gráfico E.1 apresenta as curvas encontradas para  $C = 0,50$ ,  $0,55$  e  $0,60$  das malhas com 128 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR radial simples, apenas para ilustrar a localização das curvas em relação a solução analítica.

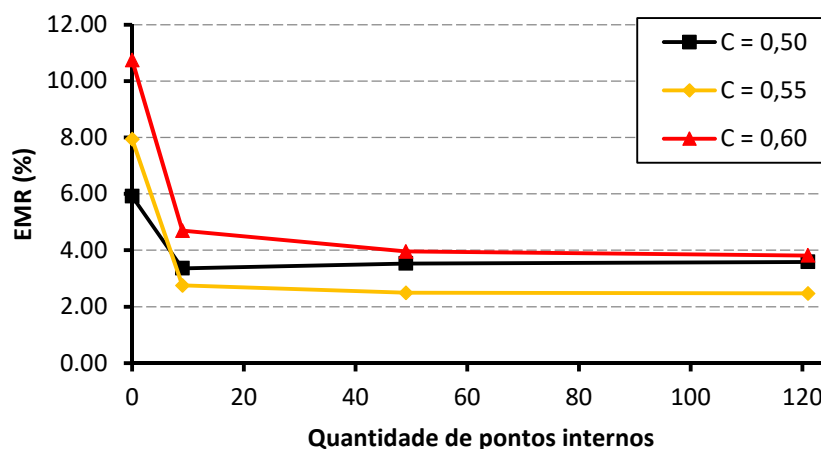
Gráfico E.1 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR radial simples com  $C = 0,50$ ,  $0,55$  e  $0,60$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Pelo Gráfico E.1, nota-se que o valor da constante C deve ficar no intervalo entre 0,55 e 0,60. Os EMR's para  $C = 0,50$ ,  $0,55$  e  $0,60$  das malhas com 128 elementos de contorno e 9, 49 e 121 pontos internos são apresentados no Gráfico E.2

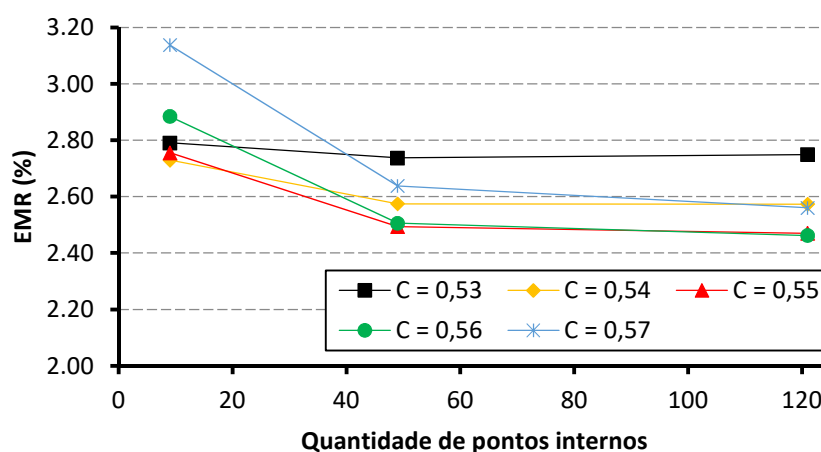
Gráfico E.2 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,50, 0,55$  e  $0,60$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

Pelo Gráfico E.2 observa-se que os menores EMR's foram obtidos para  $C = 0,55$ . Para refinar esse resultado, calculou-se os EMR's dos deslocamentos de diferentes valores de C dentro do intervalo e próximos de 0,55, cujos resultados foram plotados no Gráfico E.3. Por simplicidade, foram desconsiderados os valores das malhas sem pontos internos.

Gráfico E.3 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,53, 0,54, 0,55, 0,56$  e  $0,57$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada

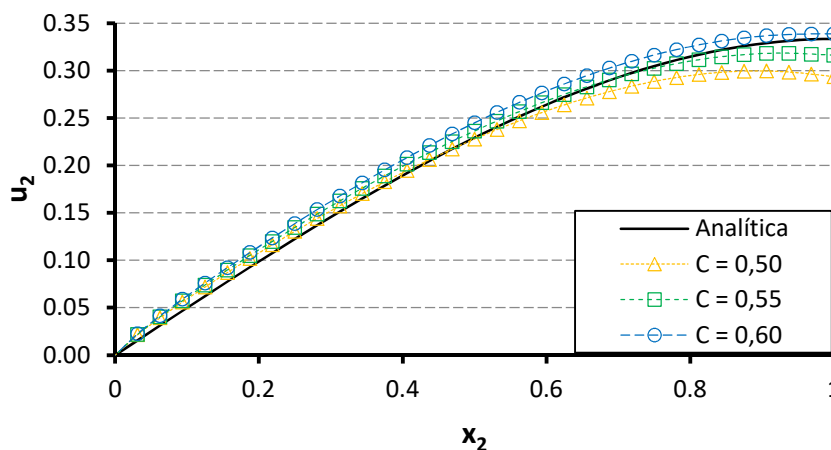


Fonte: Autoria própria

Pelo Gráfico E.3 os valores de C que apresentam os menores EMR's são 0,55 e 0,56 para FBR radial simples.

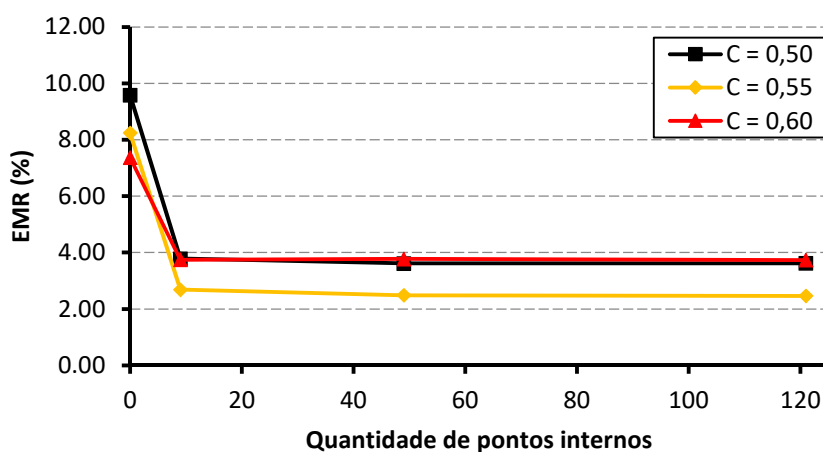
Aplicando os mesmos procedimentos para FBR placa fina, tem-se os resultados apresentados nos Gráficos E.4, E.5 e E.6.

Gráfico E.4 - Deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR placa fina com  $C = 0,50, 0,55$  e  $0,60$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

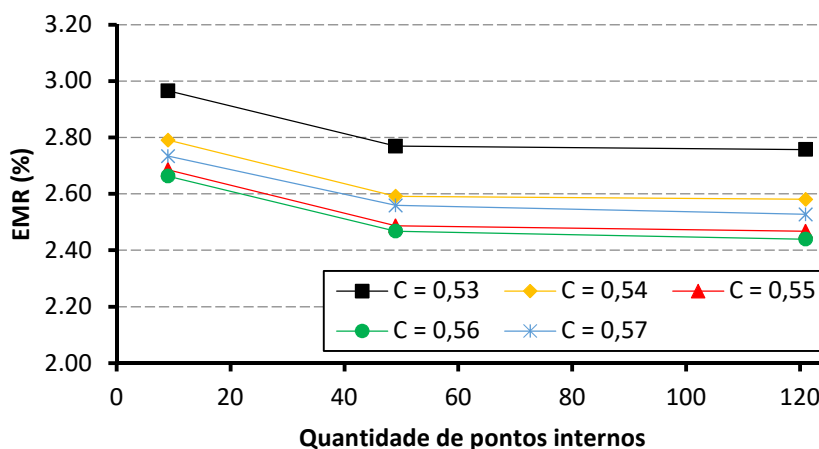
Gráfico E.5 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com  $C = 0,50, 0,55$  e  $0,60$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

O Gráfico E.5 mostra um resultado similar ao apresentado no Gráfico E.2. Logo, o valor da constante  $C$  para FBR placa fina também fica próximo a  $0,55$ . Os EMR's de diferentes valores de  $C$  são apresentados no gráfico E.6.

Gráfico E.6 – EMR dos deslocamentos verticais do MECID com 128 elementos de contorno para FBR placa fina com  $C = 0,53, 0,54, 0,55, 0,56$  e  $0,57$  para força gravitacional variando linearmente na barra quadrada



Fonte: Autoria própria

O Gráfico E.6 mostra que os menores valores do EMR são obtidos para  $C = 0,56$ .

Assim, baseado nas respostas apresentadas no Gráfico E.3 e E.6, o valor escolhido para o novo valor da constante  $C$  no terceiro teste é o  $0,56$ .

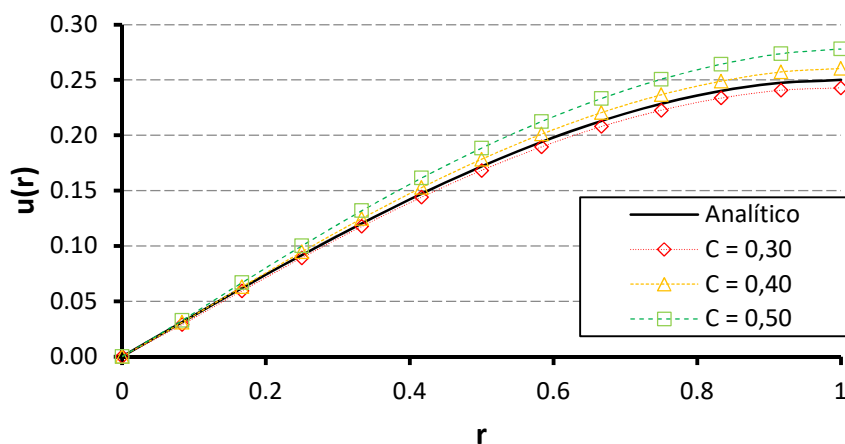
## II. Constante $C$ para disco com força centrífuga e coeficiente de Poisson igual a 0

Para determinar a nova constante  $C$  do quarto problema com  $\nu = 0$  foi utilizada a malha mais refinada devido à sua convergência obtida nos testes da técnica do tensor de Galerkin, ou seja, a malha com 118 elementos de contorno. Variou-se o valor da constante  $C$  e os resultados obtidos dos deslocamentos na direção a  $45^\circ$  foram comparados, sendo escolhido como novo valor da constante o resultado que obteve os menores erros médios relativos em comparação com a solução analítica.

Primeiramente variou-se o valor da constante em intervalos de 0,1 para determinar o intervalo de  $C$  onde a curva com o menor EMR deveria se encontrar. O Gráfico E.7 apresenta as curvas encontradas para  $C = 0,50, 0,40$  e  $0,30$  das malhas com 118 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR radial simples, apenas para ilustrar a localização das curvas em relação a solução analítica.



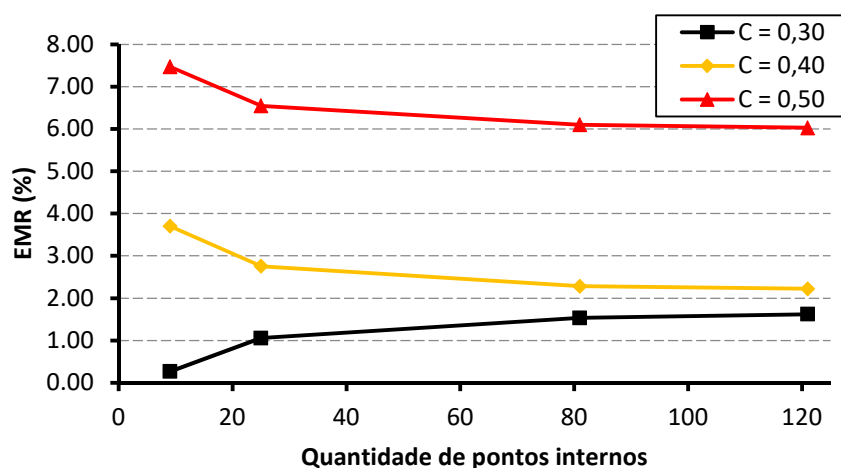
Gráfico E.7 – Deslocamentos radiais à 45° do MECID com 118 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR placa fina com  $C = 0,50, 0,40$  e  $0,30$  para força centrífuga no disco em rotação com  $v = 0$



Fonte: Autoria própria

Pelo Gráfico E.7, nota-se que o valor da constante  $C$  deve ficar no intervalo entre  $0,40$  e  $0,30$ . Os EMR's para  $C = 0,50, 0,40$  e  $0,30$  das malhas com 118 elementos de contorno e 9, 25, 81 e 121 pontos internos são apresentados no Gráfico E.8:

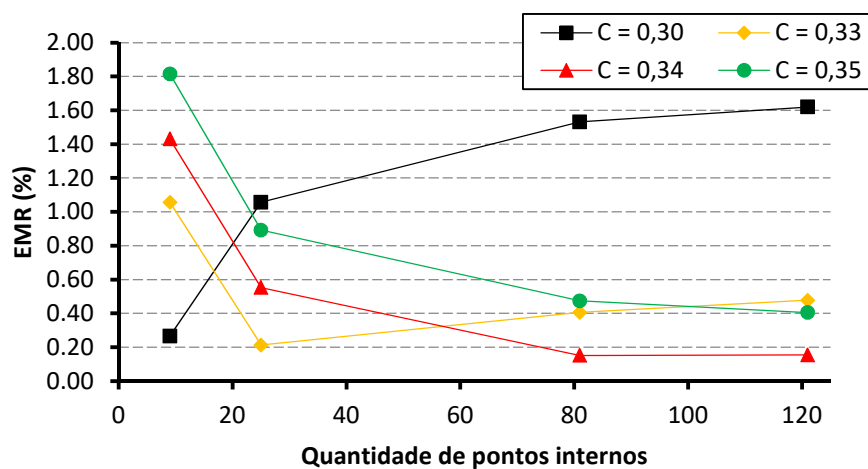
Gráfico E.8 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,50, 0,40$  e  $0,30$  para força centrífuga no disco em rotação com  $v = 0$



Fonte: Autoria própria

Pelo Gráfico E.8 nota-se que os menores EMR's foram obtidos para  $C = 0,30$ . Para refinar esse resultado, calculou-se os EMR's dos deslocamentos de diferentes valores de  $C$  dentro do intervalo e próximos de  $0,30$ , cujos resultados foram plotados no Gráfico E.9.

Gráfico E.9 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,30, 0,33, 0,34$  e  $0,35$  para força centrífuga no disco em rotação com  $\nu = 0$

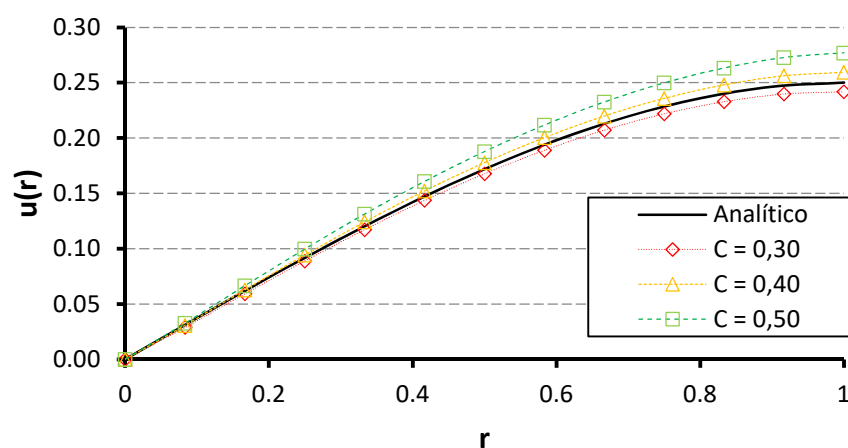


Fonte: Autoria própria

Pelo Gráfico E.9 os valores de  $C$  que apresentam os menores EMR's são 0,33 e 0,34 para FBR radial simples.

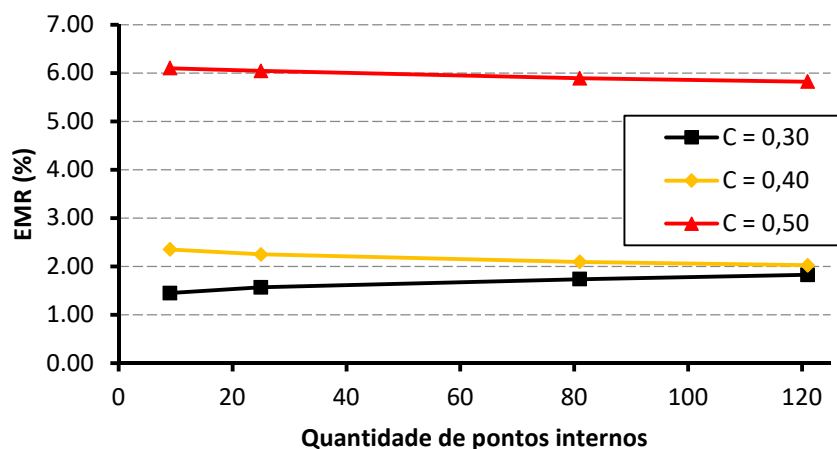
Aplicando os mesmos procedimentos para FBR placa fina, obtém-se os resultados apresentados nos Gráficos E.10, E.11 e E.12.

Gráfico E.10 - Deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno e 121 pontos internos para FBR placa fina com  $C = 0,50, 0,40$  e  $0,30$  para força centrífuga no disco em rotação com  $\nu = 0$



Fonte: Autoria própria

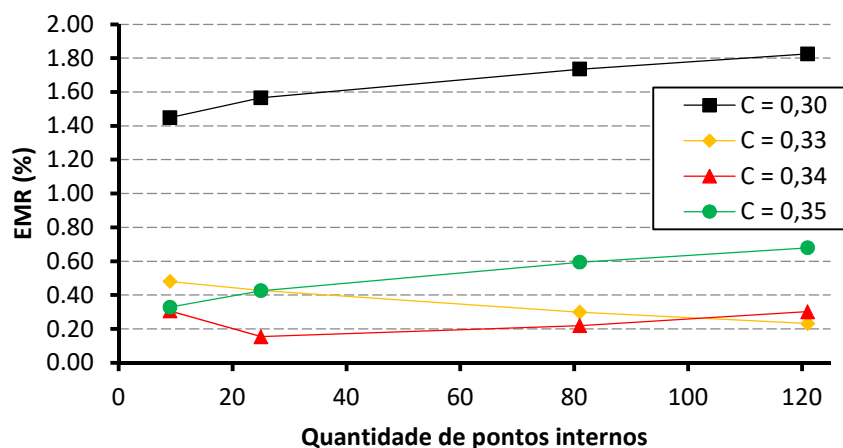
Gráfico E.11 – EMR dos deslocamentos radiais do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com  $C = 0,50, 0,40$  e  $0,30$  para força centrífuga no disco em rotação com  $v = 0$



Fonte: Autoria própria

O Gráfico E.11 mostra um resultado similar ao apresentado no Gráfico E.8. Logo, o valor da constante  $C$  para FBR placa fina também fica próximo a  $0,30$ . Os EMR's de diferentes valores de  $C$  são apresentados no gráfico E.12.

Gráfico E.12 – EMR dos deslocamentos radiais a  $45^\circ$  do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com  $C = 0,30, 0,33, 0,34$  e  $0,35$  para força centrífuga no disco em rotação com  $v = 0$



Fonte: Autoria própria

O Gráfico E.12 mostra que os menores valores do EMR são obtidos para  $C = 0,33$  e  $0,34$ , assim como ocorreu com a FBR radial simples.

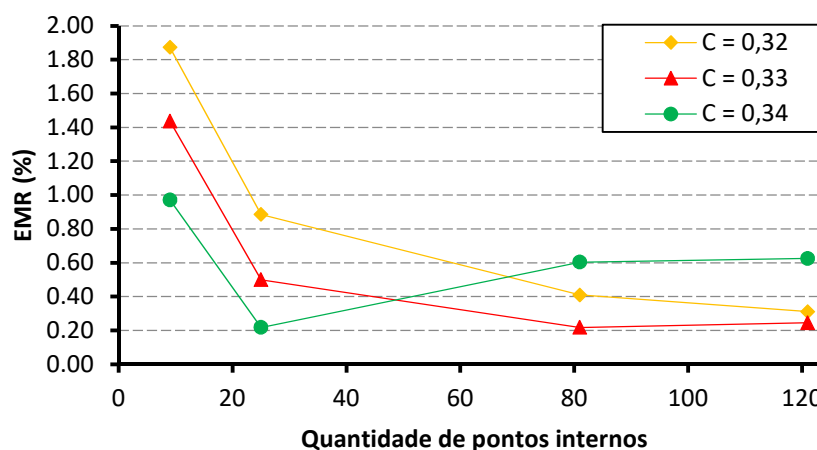
Assim, baseado nas respostas apresentadas no Gráfico E.9 e E.12, pode-se concluir que a resposta de  $C = 0,34$ , de forma geral, tem um EMR menor se comparado com  $C = 0,33$ . Dessa

forma, o valor de  $C$  escolhido para o disco em rotação com coeficiente de Poisson nulo é  $C = 0,34$ .

### III. Constante $C$ para disco com força centrífuga e coeficiente de Poisson igual a 0,1

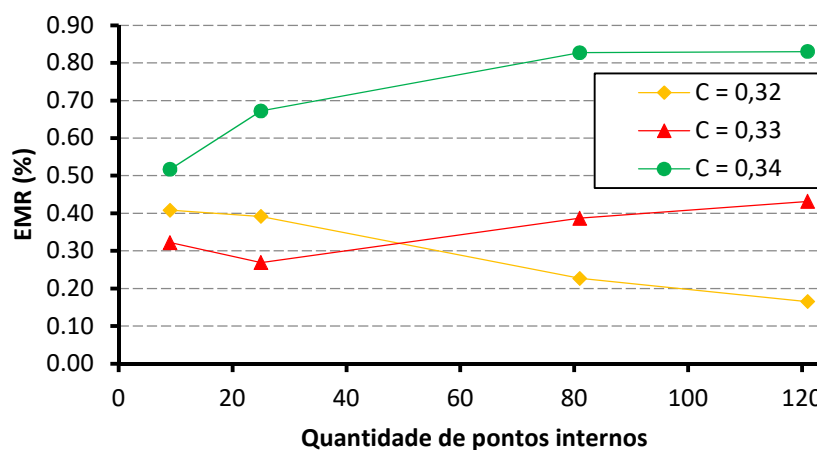
Partindo do valor da constante  $C$  encontrado no item anterior, ou seja,  $C = 0,34$ , foi aplicada uma variação de 0,01 no valor de  $C$  para determinar qual constante apresentaria os menores EMR's. Os Gráfico E.13 e E.14 mostram, respectivamente, os resultados obtidos pra FBR radial simples e placa fina para os valores de  $C = 0,34$ , 0,33 e 0,32.

Gráfico E.13 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,32$ , 0,33 e 0,34 para força centrífuga no disco em rotação com  $\nu = 0,1$



Fonte: Autoria própria

Gráfico E.14 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR placa fina com  $C = 0,32$ , 0,33 e 0,34 para força centrífuga no disco em rotação com  $\nu = 0,1$



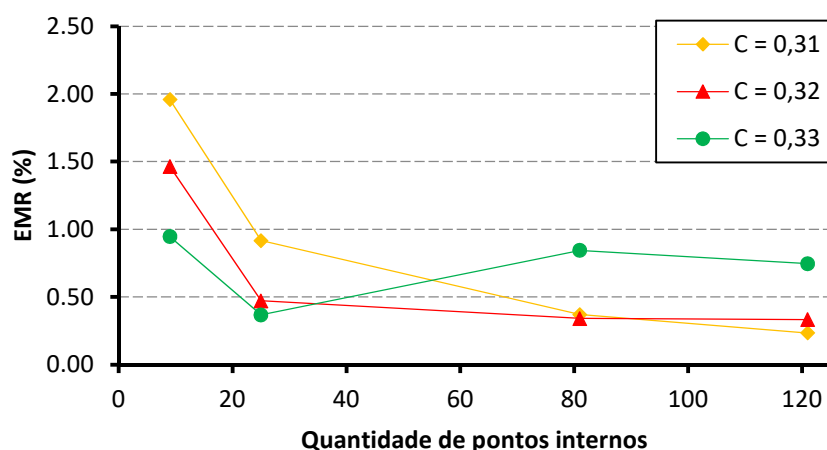
Fonte: Autoria própria

Pode ser observado que no Gráfico E.13 os menores EMR's são dados para  $C = 0,33$  para a FBR radial simples. Já a FBR placa fina, o menor valor do EMR é dado pela constante  $C = 0,33$  apenas para as malhas com 9 e 25 pontos internos, enquanto as malhas com 81 e 121 pontos internos possuem menor EMR para  $C = 0,32$ , conforme Gráfico E.14. Nota-se que a constante  $C = 0,32$  em ambos os casos sempre reduz com o aumento dos pontos internos, mostrando convergência, enquanto para  $C = 0,33$ , o valor cresce quando a quantidade de pontos internos aumenta na FBR placa fina. Além disso, o menor EMR obtido foi com  $C = 0,32$  na malha com 121 pontos internos e FBR radial simples, inferior a 0,20%. Assim, o valor escolhido para a constante de  $C$  para o disco em rotação com  $v = 0,1$  é 0,32.

#### IV. Constante $C$ para disco com força centrífuga e coeficiente de Poisson igual a 0,2

De forma semelhante ao que foi feito no item anterior, partindo de  $C = 0,33$  foi aplicada uma variação de 0,01 no valor de  $C$  para determinar qual constante apresentaria os menores EMR's. Os Gráficos E.15 e E.16 mostram, respectivamente, os resultados obtidos pra FBR radial simples e placa fina para os valores de  $C = 0,33$ , 0,32 e 0,31.

Gráfico E.15 – EMR dos deslocamentos radiais a 45° do MECID com 118 elementos de contorno para FBR radial simples com  $C = 0,31$ , 0,32 e 0,33 para força centrífuga no disco em rotação com  $v = 0,2$



Fonte: Autoria própria