UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO–UFES
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA–PROFMAT

ARTHUR DELL PROSCHOLDT

Uma proposta de Resolução de Problemas para séries iniciais

Vitória–ES
2022

ARTHUR DELL PROSCHOLDT

Uma proposta de Resolução de Problemas para séries iniciais

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

Vitória–ES

2022

Agradecimentos

A Deus por estar comigo em todos os momentos difíceis e pela força que alcanço em sua glória.

A minha esposa Chiely Nunes, pela paciência, resiliência, amor e carinho.

Ao meu filho Arthur Nunes Proscholdt, por me alegrar nos momentos de que mais precisei com seu carinho e amor incondicionais.

À CAPES e à UFES, por toda estrutura e apoio ofertados;

Ao Prof. Dr. Moacir Rosado Filho, pelo apoio e orientações enriquecedoras.

E finalmente ao meu orientador, Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, pela sua dedicação, orientação e paciência.

Resumo

Este trabalho consiste numa pré-seleção de problemas que visam contribuir para a redução da defasagem dos estudantes de Matemática do Ensino Fundamental (6º ano) e motivar os próprios para um estudo de resolução de problemas e, mesmo tendo sido pensada para uma série específica, nada impede de ser trabalhada nas demais séries. Separei os problemas em 4 temas que são: “Problemas Lógicos”, “Problemas Curiosos”, “Princípio da Casa dos Pombos” e “Paridade”. No capítulo "Introdução à Resolução de Problemas", são apresentadas sugestões de como devem ser desenvolvidos os problemas com os alunos com base no livro *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático* (POLYA; ARAÚJO, 1977) (POLYA; ARAÚJO, 1977). No capítulo intitulado “Problemas Lógicos”, são apresentados alguns problemas cuja resolução não depende de conhecimento específico ou de alguma técnica de resolução, basta um certo esforço mental e o velho e bom método da “tentativa” e “erro”. Em “Problemas Curiosos”, são apresentados 35 problemas e suas respectivas respostas que procuram abordar diferentes técnicas de resolução. Nos capítulos intitulados “Paridade” e “A casa dos Pombos", são apresentados os seus respectivos desenvolvimentos teóricos, alguns problemas de aplicação e suas respostas. No capítulo “O Jogo de Nim”, é apresentada uma estratégia vencedora do respectivo jogo de forma mais simples para poder ser trabalhado nas séries a que se destina esta pesquisa. Determinadas seleções foram estimuladas com base na minha experiência em sala de aula e conversas que tive ao longo de minha carreira com vários colegas de profissão com o intuito de sempre que possível facilitar a mediação entre o ensino e a aprendizagem.

Palavras-chave: Resolução de problemas, problemas lógicos, “Princípio da Casa de Pombos”, “Paridade” e “Jogo de Nim”.

Abstract

This MA thesis consists of a pre-selection of problems that aim to contribute to the reduction of the gap of Mathematics students in Elementary School (6th grade) and to motivate them to study problem-solving. Even though it is designed for a specific grade, nothing prevents it from being applied on in the other grades. I separated the problems into 4 themes: "Logical Problems", "Curious Problems", "Pigeonhole Principle" and "Parity". In the chapter "Introduction to Problem Solving", suggestions are presented on how problems with students should be developed based on the book The art of solving problems: a new aspect of the mathematical method (POLYA; ARAÚJO, 1977). In the chapter entitled "Logical Problems", I introduce some problems whose resolution does not depend on specific knowledge, or any solution technique, it just takes a certain mental effort and the good old method of "trial" and "error". In "Curious Problems", I present 35 problems and their respective answers that seek to address different resolution techniques. In the chapters entitled "Parity" and "Pigeonhole Principle", their respective theoretical developments, some application problems and their answers are presented. In the chapter "The game of de Nim", a winning strategy of the respective game is presented in a simpler way so that it can be uses the grades for which this research is intended. Certain selections were stimulated based on my experience in the classroom, and conversations that I had throughout my career with several colleagues in the profession in order to, whenever possible, facilitate the mediation between teaching and learning.

Keywords: Problem-solving, logic problems, "Pigeonhole Principle", "Parity" and "Nim Game".

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Quando tive que pensar qual seria o meu trabalho de conclusão no curso do PROFMAT, fiz um retrospecto de minha jornada como professor e aluno de matemática e logo veio a minha mente aquela pergunta que acredito passar pela mente de todos os meus colegas de profissão:

"Como fazer meu aluno gostar de matemática?"

Quase que de imediato pensei em um outro questionamento que pudesse me dar uma ideia com relação em que assunto eu deveria investir meu tempo de forma que pudesse ajudar meus alunos a gostarem de matemática e que os fizessem dedicar um pouco mais de seu tempo ao estudo da mesma:

"O que foi que me fez gostar de matemática?".

Para tentar responder a essa última pergunta preciso voltar para 1994, quando cursava o primeiro ano do Ensino Médio na Escola Passionista de Jardim América - Cariacica. Em um determinado dia, o diretor da escola foi até a minha sala conversar com a turma sobre as Olimpíadas de Matemática que ocorreriam ali naquela escola e, durante tal conversa, ele contou uma história contida em um livro intitulado *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, pseudônimo de Júlio César de Melo e Sousa"(TAHAN, 2021). Foi ela a da partilha dos camelos que relato na seção 4.32 deste trabalho. Esse problema despertou um grande interesse em mim, pois achei incrível aquela situação apresentada. Quis saber o motivo do ocorrido e logo, também, onde eu poderia ter acesso a mais problemas assim. Até então, a matemática era uma disciplina, para mim, sem o menor interesse, fazia o que me era pedido e no pouco do que era apresentado não havia qualquer interesse em me dedicar ao seu aprendizado. Simplesmente era obrigado a assistir àquelas aulas para passar de ano. Em 1998, ao voltar de uma aula do pré-vestibular que cursava, encontrei um amigo e começamos a conversar sobre cursos da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Ele me disse que estava cursando Matemática nesta universidade e me contou sobre um evento que estava acontecendo ali naquela mesma semana, quando teriam diversos estandes apresentando os cursos ofertados naquele ano. Inclusive, ele fazia parte do estande do Curso de Matemática. Ficamos algumas horas conversando sobre o curso e sobre o que haveria nos estandes (puzzles, formas geométricas curiosas, jogos matemáticos etc.). Novamente aquela chama da curiosidade apareceu. Não tive nenhuma dúvida, queria aprender mais sobre aquilo e, nesse mesmo ano, fiz o vestibular para o referido curso. Durante então a Licenciatura Plena em Matemática pela UFES, universidade pela qual sou muito grato por tudo que contribuiu para a minha formação com professores tão dedicados, conheci pessoas que apresentavam a mesma apreciação a respeito dos desafios lógicos. Sempre que nos reuníamos para conversar sobre as disciplinas que estávamos cursando ou outros assuntos corriqueiros, alguém trazia um desafio novo e fazia o grupo parar para pensar. E o que sempre me chamava atenção é que os desafios não dependiam de pré-requisitos e a dificuldade acabava sendo a mesma tanto para um iniciante como para alguém com mais experiência em matemática. Inclusive, muitas vezes fui surpreendido com problemas apresentados por pessoas que nada tinham a ver com o estudo de matemática, simplesmente gostavam de desafiar outras pessoas com aqueles problemas curiosos nos mais diversos ambientes.

Ao iniciar minha carreira no magistério, sempre procurei levar alguns dos desafios lógicos que conhecia para discutir com meus alunos. Esses momentos eram sempre muito proveitosos, pois conseguia movimentar toda a turma, até mesmo aqueles alunos que dificilmente participavam da aula no dia a dia. Em vários momentos, quem conseguia resolver os desafios eram aqueles alunos considerados "fracos" em matemática. E os questionamentos feitos nesses momentos de discussão sobre os problemas me davam abertura para várias discussões sobre temas que já havíamos abordado ou que iríamos ainda abordar. Até então encarava tais desafios como algo lúdico, não me ocorria o potencial ali presente para que fossem trabalhados no desenvolvimento de resolução de problemas dos mais variados.

Com um grande amigo que conheci no mesmo curso de graduação da UFES, Adwalte Ternero Dias, e com quem sempre conversava sobre desafios lógicos, além de nossas experiências em sala de aula, obtive relatos a respeito de suas aulas abordando os desafios que, por sinal, eram muito parecidos com os meus, mesmo trabalhando em escolas diferentes com realidades muito distintas (eu estava no ensino público e ele, no particular). Sempre era enfatizado o interesse que os alunos demonstravam em determinadas aulas e como isto contribuía para o ensino/aprendizado da matemática. Os alunos saíam daquela postura passiva e de certo temor para uma de participação e empolgação.

Ao conversar com meu orientador, o Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, acerca de minha intenção sobre usar desafios lógicos, ele me indicou o livro sobre resolução de problemas de G. Polya (POLYA; ARAÚJO, 1977). No decorrer da leitura fui percebendo então vários pontos em comum com a minha realidade em sala de aula e que eu estava perdendo a chance de usar os desafios de forma que contribuíssem ainda mais para o meu objetivo principal que ainda é o de ensinar matemática.

Dessa forma decidi que o meu trabalho de conclusão de Mestrado seria sobre resolução de problemas para séries iniciais e nele utilizaria os desafios lógicos para motivar e incentivar os alunos a se dedicarem ao estudo daquela disciplina tão enriquecedora. Para tanto, também iniciei uma pesquisa nos mais diversos locais (livros, sites, vídeos do youtube, revistas, folclore oral, artigos etc) com a intenção de selecionar uma boa quantidade de desafios adequados a meus alunos iniciais do ensino fundamental, já separando-os em 4 capítulos intitulados como: "Problemas Lógicos" (capítulo 3), "Problemas Curiosos" (capítulo 4), "Princípio da Casa de Pombos" (capítulo 5) e "Paridade" (capítulo 6).

Aqui alguns dos livros em que pesquisei uma série de problemas: *Círculos Matemáticos: a ex-periência Russa*, de Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2010); *Circulo Matemático Moscou: problemas semana-a-semana*, de Sergey Dorichenko (DORICHENKO, 2016); *Mania de Matemática*, de Ian Stewart (STEWART, 2004); *O livro dos Desafios*, de Charles Barry Townsend (TOWNSEND, 2004); *O homem que calculava*, de Malba Tahan (TAHAN, 2021) e *Qual o problema*, de Marco Moriconi (MORICONI, 2014).

1.1 Justificativa

Percebendo a grande dificuldade que meus alunos apresentavam ao resolver determinados problemas, procurei conversar ainda mais com os colegas de trabalho a tal respeito e, quando os perguntava como trabalhavam em sala de aula, notei que mantinham aquela velha rotina de explicar, dar exemplos e passar exercícios repetitivos sobre o conteúdo abordado. O pior que era exatamente assim como eu também lecionava as minhas aulas. Mesmo quando aplicava ferramentas digitais ou outras metodologias, continuava no mesmo esquema, ou seja, eu precisava buscar mais conhecimento para melhorar a minha metodologia de ensino. E isso ficou ainda mais claro quando li no prefácio do livro de Polya (POLYA; ARAÚJO, 1977) o seguinte:

> Um professor de matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas, se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar este objetivo.(POLYA; ARAÚJO, 1977, p. V)

O Ministério da Educação através dos parâmetros curriculares Nacionais de Matemática (PCN - Brasília : MEC, 2022) também incentiva, por sua vez, o desenvolvimento da resolução de problemas em contrapartida a essa rotina da simples reprodução de procedimentos. Vejamos:

> [· · ·] em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático

> ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham par desenvolver estratégias de resolução.(PCN - Brasília : MEC, 2022, p. 39-40)

Reafirmo então a importância de, em diversos momentos do meu trabalho em sala de aula, procurar levar problemas que denominava de "desafios lógicos", problemas que não exigiam conhecimentos específicos, bastando curiosidade e um certo esforço metal. Esses problemas despertaram em meus alunos um interesse real na busca pela resposta. Eram problemas que, já de início, me serviram muitas vezes de gancho ou mesmo para dar uma quebra naquela rotina enfadonha, quando eu ainda os via apenas como uma prática lúdica. Penso, hoje, que problemas assim, se bem usados, podem ser uma grande ferramenta para poder despertar o interesse e o raciocínio efetivo de nossos alunos. Nesse aspecto, Polya mesmo comenta:

> [$\cdots$] O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA; ARAÚJO, 1977, p. V)

Além disso,

> [$\cdots$] É possível, porém, que chegue a perceber que um problema de Matemática pode ser tão divertido quanto um jogo de palavras cruzadas, ou que o intenso trabalho mental pode ser um exercício tão agradável quanto uma animada partida de tênis. Tendo experimentado prazer no estudo da Matemática, ele não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma boa probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: um hobby, um instrumento profissional, a própria profissão ou uma grande ambição. (POLYA; ARAÚJO, 1977, p. V)

E ainda que,

> [$\cdots$] O espaço dedicado pelos jornais e revistas populares a palavras cruzadas e a outros enigmas parece revelar que as pessoas passam algum tempo resolvendo problemas sem aplicação prática. Por trás do desejo de resolver este ou aquele problema que não resulta em nenhuma vantagem material, pode haver uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os meios e as maneiras, as motivações e os procedimentos da resolução. (POLYA; ARAÚJO, 1977, p. VI)

A Resolução de problemas é apontada da BNCC[1] (CNE, 2022) como meio para que alunos do ensino fundamental desenvolvam habilidade referente ao pensamento numérico:

[1] Base Nacional Comum Curricular (http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base)

> [· · ·] Para isso, propõe-se a resolução de problemas evolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento). (CNE, 2022, p. 527)

E aponta a necessidade de se aproveitar todo o potencial já construído no ensino fundamental para se alcançar os propósitos do ensino médio ao estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. (CNE, 2022, p. 529)

A resolução de problemas ainda é citada na BNCC (CNE, 2022) como uma competência específica da Matemática e suas tecnologias.

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (CNE, 2022, p. 531)

No livro do Dante, ele afirma que é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados e para isso seria fundamental que nossos alunos tivessem em seus currículos de Matemática a resolução de problemas.

> [· · ·], é preciso que a criança tenha em seu currículo de Matemática elementar, a resolução de problemas como parte substancial, para que desenvolva desde cedo sua capacidade de enfrentar situações-problemas.(DANTE, 1991, p. 15)

1.2 Objetivos

Por meio de uma pré-seleção cuidadosa de problemas, uma escolha de temas acessíveis, alguns apontamentos sobre resolução de problemas e algumas sugestões de como os problemas apresentados neste trabalho poderão ser trabalhados em sala de aula, os objetivos buscados são os de levar nossos alunos a:

- Desenvolver o raciocínio;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes;
- Reduzir a defasagem da aprendizagem da Matemática;

- Resolver situações problemas utilizando as mais diversas técnicas como deduções, estimativas, intuições e analogias. E assim equipar os alunos com estratégias para resolver problemas;
- Buscar motivação e incentivo, fundamentais para o aprendizado matemático;
- Trabalhar o coletivo e o cooperativo na busca das soluções;
- Elevar autoestima e resiliência na busca das soluções;
- Deduzir e transcrever as ideias e as soluções obtidas através da linguagem matemática;

2 Resolução de problemas.

Na Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino de Matemática, ensinar a resolver problemas significa apresentar o conteúdo teórico, conceitos e definições a priori, para então serem aplicados aos problemas matemáticos. Por outro lado, outra abordagem é, contrariamente, desenvolver os conceitos e conteúdo teórico durante (e após) a resolução dos problemas propostos. Vejamos:

> [$\cdots$] propuseram três diferentes olhares para a Resolução de Problemas: ensinar sobre Resolução de Problemas; ensinar para resolver problemas; e ensinar através da Resolução de Problemas.(BRAGA, 2020, p. 8)

A resolução de problemas pode ser usada como um método para se ensinar conteúdos de Matemática, podendo reduzir o desinteresse por parte dos alunos, uma vez que se sintam motivados a explorar o problema proposto.

> A resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI; BOTIN, 2004, p. 1)

Assim como em (BRAGA, 2020), o termo "Problema"está sendo usado neste trabalho como:

> "[$\cdots$] questionamentos para os quais o aluno não possua ferramentas prontas e, de imediato, conhecidas para resolvê-lo; ainda assim, mostram-se interessados em buscar e investigar caminhos para solucioná-los. Isso vai além de desafios; são inquietudes que determinadas questões podem trazer para o aluno e que o levem, de forma ativa e crítica, a avançar na matemática e a desbravar novos conceitos e propriedades por meio de sua própria investigação e pesquisa. (BRAGA, 2020, p. 6)

Quando os alunos iniciam o 6º ano do ensino fundamental no ensino público, muitos possuem grandes dificuldades por não terem consolidado o aprendizado das 4 operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e, mesmo quando conseguem fazer essas operações, não sabem quando utilizar as mesmas para resolver problemas propostos e sempre perguntam: "Professor, esse problema se resolve com adição ou subtração?"É aqui onde precisamos começar a criar interesse por parte dos alunos a buscarem como resolver os problemas: é necessário motivá-los. Esse interesse pode ser alcançado seguindo várias dicas contidas no livro de G. Polya (POLYA; ARAÚJO, 1977), além de alguma criatividade. Irei apresentar agora algumas sugestões para o trabalho em sala de aula.

(Sugestão I):
"Quando o professor resolve um problema em aula, ele deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos."(POLYA; ARAÚJO, 1977, p. 3)

Essa sugestão me lembra as aulas de Resolução de Problemas da graduação em Matemática, quando o professor (hoje, meu orientador), antes de começar a resolver um problema, respirava fundo e se indagava em voz alta para que todos ouvissem coisas a respeito daquele problema. Isso chamava a atenção de todos e mal sabíamos que ele estava utilizando uma das sugestões do livro para nos motivar.

(Sugestão II):
Diversificar a metodologia das aulas ao trabalhar com a resolução de problemas é muito enriquecedor, fazer os alunos trabalharem em alguns momentos sozinhos e em outros momentos em equipes, potencializa o aprendizado destes. Dar abertura para que os alunos apresentem suas soluções aos colegas permite a discussão de outras possíveis soluções, contribui para a comunicação matemática e ajuda aqueles que não conseguiram chegar à resolução a entenderem como seus colegas o fizeram, acrescentando essas ideias a seus próprios arcabouços de problemas.

(Sugestão III):
Em alguns problemas, é possível utilizar material concreto que permite ao aluno chegar à resolução, principalmente quando trabalhamos com alunos do 6ºano. Um exemplo para esta sugestão, que me rendeu ótimos resultados, foi a utilização do problema da travessia dos sapinhos (seção 3.1). Quando percebi que uma parte dos alunos não estava conseguindo resolver este problema, pedi para que enrolassem seis bolinhas de papel para representar os sapinhos, três de uma cor e três de uma outra cor, e que desenhassem as seis pedras para a travessia em uma folha de papel. Ao colocar os "sapinhos"nas suas devidas posições iniciais, eles agora poderiam testar concretamente os movimentos dos "sapinhos". Isso fez com que vários alunos chegassem à solução e motivou outros a tentarem.

(Sugestão IV):
Ajudar o aluno com naturalidade, procurar se colocar no lugar do aluno para conseguir sugerir ou indicar um passo que o ajude a chegar à resolução do problema, passo esse que ele poderia ter alcançado sozinho.

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer [· · ·].(POLYA; ARAÚJO, 1977, p. 1)

(Sugestão V):
Incentivar os alunos a escreverem suas ideias, mesmo quando não conseguirem chegar

a uma solução. Discutir e apresentar essas ideias e as soluções à turma para que todos possam compreender, indagar e fazer novas sugestões.

(Sugestão VI):
Ter em mente que a resolução de problemas é uma habilitação prática; assim, é fundamental apresentar problemas e suas devidas resoluções para que os alunos possam aprender nos observando ou observando seus colegas.

> [$\cdots$] Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA; ARAÚJO, 1977, p. 3)

(Sugestão VII):
Verificar se todos os alunos entenderam o problema, se está claro o enunciado. Algo que muitos professores da minha graduação deveriam ter feito. Em certa ocasião, uma colega de trabalho estava reclamando, pois seus alunos de certa turma não conseguiram entender um problema simples e isso tinha causado uma certa confusão em sua aula. Então me pediu ajuda, pois precisava ajudá-los e se ajudar. Perguntei qual tinha sido o tal problema tão polêmico e ela me relatou que fora um problema de localização de números inteiros, onde ela perguntava quantos andares, no mínimo, uma pessoa percorreria em um elevador partindo do subsolo do andar (-3) para o andar $(+5)$. Então fui até a turma para tentar ajudar e, conversando com eles, percebi que não tinham a menor ideia do que seriam andares no subsolo, pois nunca haviam estado em um prédio com andares abaixo do térreo. Após explicar este fato, os alunos conseguiram entender o problema.

(Sugestão VIII):
Procurar ter um ambiente agradável para a prática dos problemas e discussão dos mesmos. Muitas vezes a sala de aula não é esse lugar. Sendo assim, levar os alunos para um lugar mais agradável pode facilitar o processo e motivá-los a buscar soluções ou a compreensão das ideias a serem discutidas.

(Sugestão IX):
Estabelecer um plano: essa é a parte que pode ser a mais longa e penosa, mas é o principal feito na resolução de um problema. O aluno precisa chegar a uma ideia geral de quais contas, cálculos ou desenhos ele deverá fazer para chegar a incógnita.

(Sugestão X):
A discussão de uma questão não deve ficar restrita apenas a suas soluções, pois muitas vezes ela pode ajudar a fazer discussões mais abrangentes, pode possibilitar o aprendizado de novos conteúdos ou técnicas, permitindo aos alunos resolverem futuros problemas.

(Sugestão XI):
Se não estiver conseguindo resolver o problema, tente um problema correlato mais simples,

este pode lhe dar dicas sobre como deverá ser o seu plano de resolução.

No livro do Polya, são apontados 4 momentos importantes para a resolução de um problema, são eles:

1. Compreender o problema.
    - Você leu e compreendeu corretamente o problema?
    - O que se pede no problema?
    - Quais são os dados e as condições do problema?
    - É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
    - É possível estimar a resposta?
2. Elaborar um plano.
    - Qual é o seu plano para resolver o problema?
    - Que estratégia você tentará desenvolver?
    - Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
    - Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.
    - Tente resolver o problema por partes.
    - Há alguma outra estratégia?
3. Executar o plano.
    - Execute o plano elaborado, desenvolvendo-o passo a passo.
    - Efetue todos os cálculos indicados no plano.
    - Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.
4. Fazer o retrospecto ou verificação.
    - Examine se a solução obtida está correta.
    - Existe outra maneira de resolver o problema?
    - É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

3 Problemas lógicos

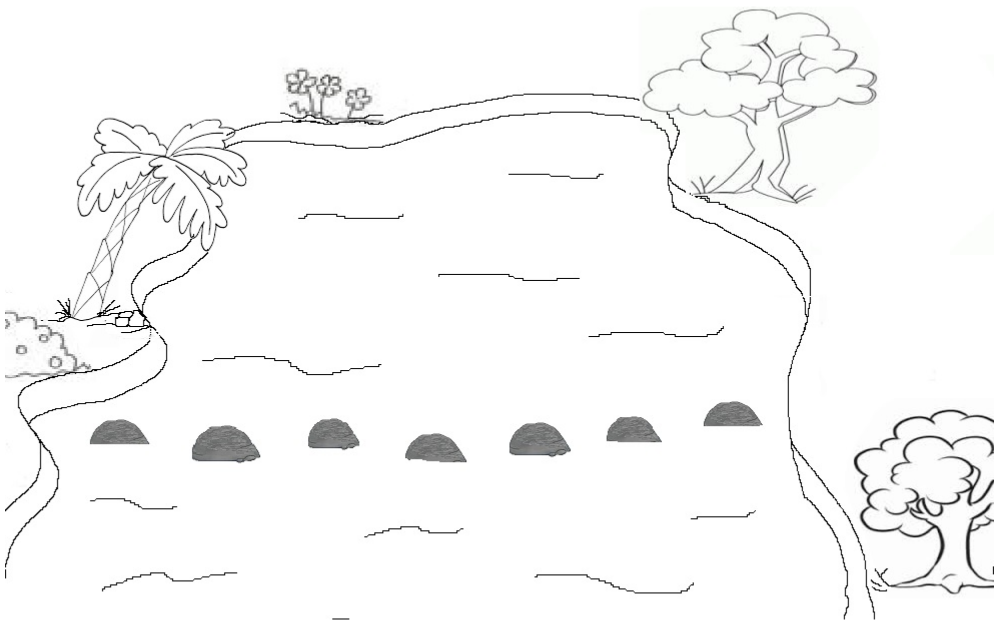
Neste capítulo serão abordados problemas lúdicos, que não necessitam de conhecimentos matemáticos específicos, problemas que podem ser resolvidos apenas com esforço mental e o método da tentativa e erro.

Nas seções seguintes irei apresentar e resolver alguns problemas.

3.1 A travessia dos sapinhos

Em uma pequena lagoa temos 7 pedras alinhadas na superfície da água que servem como travessia para os sapinhos daquele local, quando eles não querem se molhar. Os sapinhos pulam imediatamente para a pedra a sua frente se esta estiver vazia ou são capazes de dar um super salto, pulando uma pedra ocupada, caso a próxima esteja vazia, mas eles nunca pulam para traz. Em uma bela tarde, três sapinhos verdes se encontram nas três primeiras pedras de uma das margens, querendo atravessar a lagoa; enquanto que a mesma coisa acontece na outra margem, onde três sapinhos marrons estão ocupando as três primeiras pedras. Como todos sapinhos irão fazer para poderem atravessar sem nenhum deles se molhar?

Figura 1 – Lago



Fonte: o autor.

Resposta

A estratégia é a seguinte: você deve procurar deixar sempre um espaço entre os sapos enquanto avança. Por exemplo, no primeiro movimento, você não deve utilizar o sapo verde central ou o marrom central, pois ele saltará sobre o sapinho a sua frente, ficando dois sapos de mesma cor juntos ao avançarem: isso irá bloquear a passagem. Então, o seu primeiro movimento será com o sapo verde ou marrom mais à frente dos demais, determinado sapo deverá saltar para a pedra vazia, quando será necessário também saltar com o sapo da outra cor, pois senão teremos dois sapos de mesma cor bloqueando a passagem.

Vamos denominar os três sapinhos de uma das margens como A1, A2 e A3 e os três da outra margem, B1, B2 e B3, e a pedra vazia por O. Inicialmente, a disposição deste sapinhos será: A1 A2 A3 O B3 B2 B1. Abaixo, uma possível sequência de movimentos que leva à solução do problema:

A1 A2 A3 O B3 B2 B1.
A1 A2 O A3 B3 B2 B1
A1 A2 B3 A3 O B2 B1
A1 A2 B3 A3 B2 O B1
A1 A2 B3 O B2 A3 B1
A1 O B3 A2 B2 A3 B1
O A1 B3 A2 B2 A3 B1
B3 A1 O A2 B2 A3 B1
B3 A1 B2 A2 O A3 B1
B3 A1 B2 A2 B1 A3 O
B3 A1 B2 A2 B1 O A3
B3 A1 B2 O B1 A2 A3
B3 O B2 A1 B1 A2 A3
B3 B2 O A1 B1 A2 A3
B3 B2 B1 A1 O A2 A3
B3 B2 B1 O A1 A2 A3

Basta agora cada sapinho avançar para a sua margem de destino.

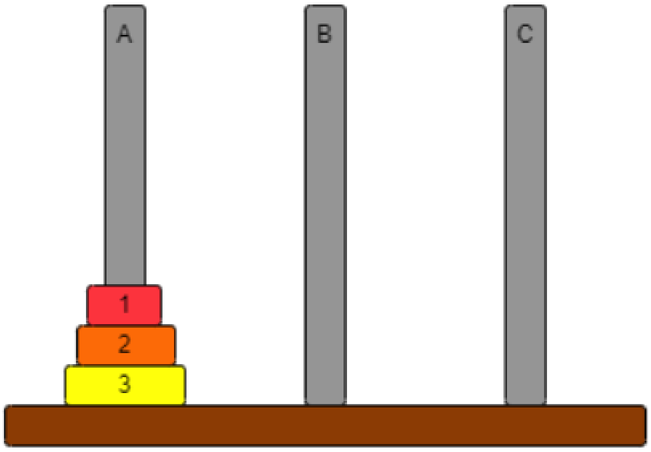
3.2 A torre de Hanói com 3 discos

Considere um jogo formado por uma base de madeira onde na mesma estão dispostas três hastes verticais. Iremos denominar estas hastes de A, B e C. Sendo A a haste à esquerda do jogador; B, a haste central; C, a haste à direita. Na haste A serão colocados 3 discos de diâmetros distintos, todos com furos em seus centros para que se encaixam perfeitamente nas hastes, em ordem decrescente da base para cima. O objetivo é conseguir passar todos os discos da haste A para a C, seguindo a seguinte regra:

(1) Somente um disco pode ser movido de cada vez;

(2) Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

Figura 2 – Torre de Hanói com 3 discos.



Fonte: o autor.

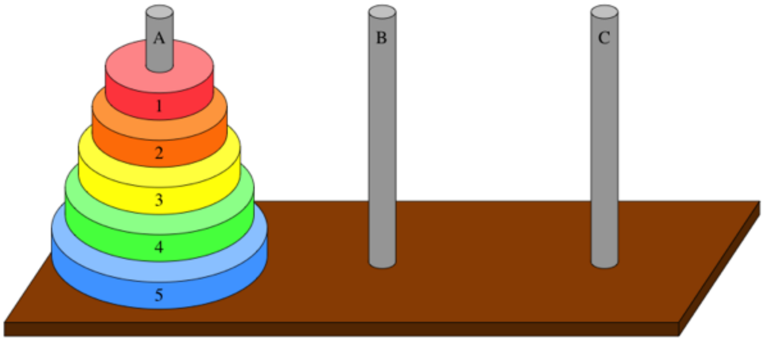
Resposta

A estratégia é a seguinte: vamos levar a base maior para a haste C, para isso precisamos tirar os dois discos menores de cima dele e depositá-los na haste B. Assim, colocamos o menor disco na haste C; agora, o disco médio na haste B; passamos o disco menor da C para B; o disco grande, de A para C; o disco pequeno, de B para A; o disco médio, de B para C e, por fim, o disco pequeno, de A para C. Importante observar que poderíamos ter levado os três discos para a haste B ao invés da C, caso fizéssemos pequenas alterações no procedimento. Temos então um jeito de mover os três discos para qualquer haste.

3.3 A torre de Hanói com 5 discos

Tente agora resolver o problema da Torre de Hanói da seção anterior adicionando dois discos. Ou seja: teremos agora no total 5 discos, inicialmente na haste A e o objetivo é levá-los para a haste C seguindo aquelas duas regrinhas já mencionadas.

Figura 3 – Torre de Hanói com 5 discos



Fonte: o autor.

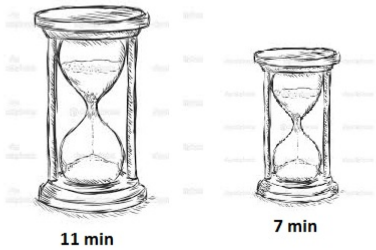
Resposta

A estratégia é a seguinte: Denotaremos os discos como 1, 2, 3, 4, 5, sendo 1 o disco menor e 5 o maior. Vamos levar o disco maior (5) para a haste C. Para isso podemos inicialmente utilizar o caso anterior para mover os três menores discos (1, 2, 3) para a haste C; depois movemos o disco 4 para a haste B; agora, os discos (1, 2, 3) para a haste B e, então, o disco 5 para a haste C. Agora é a vez de mover o disco 4 para a haste C. Para isso vamos mover os 3 discos menores (1, 2, 3) para a haste A e, então, o disco 4 para a haste C e por fim basta levar os três discos menores para a haste C.

3.4 Fritando um ovo

Se você tiver uma ampulheta de 7 minutos e outra de 11 minutos, você pode usá-las para ferver um ovo por exatamente 15 minutos?

Figura 4 – Ampulhetas



Fonte: http://br.depositphotos.com/38909423/stock-illustration-vector-sketch-illustration-sandglass.html

Resposta

Vire as duas ampulhetas; quando a ampulheta de 7 minutos terminar vire-a; quando a de 11 minutos terminar vire a de 7, pois nela terá passado 4 minutos desde a última virada nela. Então é só aguardar os 4 minutos passarem.

3.5 Meninas na escola

Três meninas que frequentam a mesma escola possuem mochilas de cores diferentes e gostam de sucos e matérias distintas. Tente identificar a cor da mochila e o gosto de cada uma delas.

Meninas: Aline, Flávia e Manuela.
Mochilas: Laranja, Vermelha e Rosa.
Matérias: Matemática, Português e História.
Sucos: Abacaxi, Limão e Uva.

Pistas:
1) A menina que gosta de português gosta de suco de abacaxi.
2) A mochila de Manuela não é laranja.
3) A garota da mochila vermelha gosta de suco de limão.
4) Aline gosta de história e não gosta de suco de uva.
5) Flávia não gosta de Matemática.

Dicas:
Utilize uma tabela para te auxiliar na resolução como a da figura 5.
Não é necessário seguir a ordem em que as pistas foram apresentadas.
Sempre que você descobre uma informação favorável sobre uma menina você também

descobre o que não é favorável as outras meninas, por exemplo, se você descobriu que Aline gosta da cor Laranja isso te garante concluir que nem Manuela ou Flávia gostam dessa cor.

Figura 5 – Tabela auxiliar

	Mochila			Matéria			Suco		
Meninas	Laranj	Verm	Rosa	Matem	Port	Hist	Abacax	Limao	Uva
Aline									
Flávia									
Manuela									

Fonte: o autor.

Resposta

Aline: Mochila Vermelha, Matéria História e Suco de Limão.
Flávia: Mochila Laranja, Matéria Português e Suco de Abacaxi.
Manuela: Mochila Rosa, Matéria Matemática e Suco de Uva.

3.6 A corrida de Kart

Quatro amigos se reuniram para participar de uma corrida de kart entre eles. Associe cada um dos pilotos com a idade e posição na corrida.

Amigos: Alexandre, Fabiano, Sandro e Robson.
Idade em anos: 13, 14, 15 e 16.
Posições: Primeiro, Segundo, Terceiro e Quarto.

Pistas:
O piloto que terminou em primeiro é mais velho do que Sandro.
Robson tem 13 anos.
Sandro ficou em segundo lugar.
Alexandre é um ano mais novo do que o piloto que terminou em terceiro.

Resposta

Alexandre ficou em primeiro e possui 15 anos.
Fabiano ficou em terceiro e possui 16 anos.
Sandro ficou em segundo e possui 14 anos.
Robson ficou em quarto e possui 13 anos.

3.7 Missionários e canibais

Três missionários e três canibais têm que atravessar um rio. No barco, cabem apenas duas pessoas por travessia. Em nenhum momento se pode ter menos missionários que canibais em uma das margens, pois, senão, os missionários serão devorados pelos canibais. Como se pode realizar essa travessia?

Resposta

Vamos representar os canibais e os missionários como pares ordenados, onde a abcissa vai se referir ao quantitativo de canibais e a ordenada, aos missionários. Então usaremos dois pares ordenados dessa forma onde o primeiro par indicará o quantitativo de indivíduos na margem de origem e o segundo par, o quantitativo da margem de destino em cada travessia.

Utilizando essa notação temos a seguinte disposição inicial: (3,3) e (0,0).

Uma sequência possível para a travessia é:

(3,3) e (0,0)
(2,2) e (1,1)
(2,3) e (1,0)
(0,3) e (3,0)
(1,3) e (2,0)
(1,1) e (2,2)
(2,2) e (1,1)
(2,0) e (1,3)
(3,0) e (0,3)
(1,0) e (2,3)
(2,0) e (1,3)
(0,0) e (3,3)

3.8 Qual a pergunta certa?

Imagine-se fechado numa sala, onde existem apenas duas portas. Uma conduz à vida e a outra, à morte. Com você estão duas pessoas que sabem exatamente para onde conduz cada porta. Uma diz apenas a verdade e a outra, só mentira e você não sabe quem é quem, tendo direito a apenas uma única pergunta.

Que pergunta você faria e a qual pessoa para descobrir qual é a porta da vida e sair sem problemas?

Resposta

Você pergunta a uma das pessoas o seguinte: "Se eu perguntar ao seu amigo qual porta que me levaria à vida, qual porta ele me indicaria?

Agora é só seguir para a outra porta.

Isso funciona, pois independente da pessoa escolhida, a resposta será sempre a porta que levaria para a morte, veja:

Se você fizer a pergunta para a pessoa que só fala a verdade, ela terá que lhe indicar a porta que leva para a morte, pois o outro indivíduo iria mentir quando você perguntasse a ele.

No caso da pergunta ser feita para a pessoa que só fala a mentira, a resposta também será a porta que leva para a morte, pois ele terá que mentir sobre a resposta da pessoa que só fala a verdade.

3.9 Os canibais

Você e três amigos estão viajando em um barco que naufragou e acabaram numa ilha onde ali habitava um grupo de canibais. Esse grupo lançou um desafio a vocês onde só seriam libertados se acertassem.

O que o grupo de canibais fez foi o seguinte: enterraram os quatro até o pescoço no chão. Todos olhando para o mesmo sentido dispostos em fila indiana. Entre a primeira e a segunda pessoa enterradas foi colocado um muro de forma que a primeira pessoa não pudesse ser avistada pelas demais. Em cada um dos 4 foi colocado um chapéu, sendo dois chapéus pretos e dois brancos. A primeira e a terceira pessoa ficaram com os chapéus pretos. Cada um vê apenas os chapéus das pessoas a sua frente, sendo que a primeira e segunda pessoa não avistam nenhum chapéu.

O desafio é um de vocês conseguir descobrir a cor do próprio chapéu sendo que pelas regras do desafio, cada um pode responder uma única vez, começando pelo último.

Na sua chance, ou você responde ou diz que não sabe, passando a vez de responder para a pessoa imediatamente a sua frente. Se responder errado o desafio termina.

Sabendo que vocês conseguiram se salvar dos canibais, quem acertou o desafio? Explique.

Resposta

O último diz que não sabe, pois os dois amigos que avista estão com chapéus de cores diferentes. Se ambos estivessem com chapéus de mesma cor, ele já concluiria a cor do seu chapéu que seria a cor que não está vendo. O penúltimo irá acertar a cor do próprio chapéu, pois como ele tem que possuir um de cor diferente da do chapéu do amigo a sua frente, que é branca, ele conclui que o seu chapéu seja preta.

3.10 A ponte

Uma família precisa atravessar uma ponte de madeira, suspensa e antiga, durante a noite, mas a travessia se torna perigosa sem uma iluminação adequada e, para isso, contam com apenas uma lanterna, além da referida suporta no máximo duas pessoas por vez. Do outro lado dessa ponte há um helicóptero de resgate que sairá em 17 minutos, não podendo esperar nem 1 minuto. Senão, irá faltar gasolina para voltar a sua base. Essa família é constituída de um filho mais novo, que consegue atravessar a ponte em 1 minuto; de uma filha, que consegue em 2 minutos; de um pai, que faz a travessia em 5 minutos; de um avô, que demora 10 minutos. É possível realizar essa travessia a tempo?

Resposta

A ideia básica é minimizar o tempo de travessia fazendo com que dois dos mais lentos passem juntos sem ter que um deles voltar. E, para isso, basta deixar um "mais rápido"do outro lado antes.

Primeiro atravessam o irmão e a irmã (Tempo total gasto: 2 minutos).

A irmã retorna com a lanterna (Tempo total gasto: 4 minutos).

Atravessam agora o pai e o avô (Tempo total gasto: 14 minutos).

O irmão retorna com a lanterna (Tempo total gasto: 15 minutos).

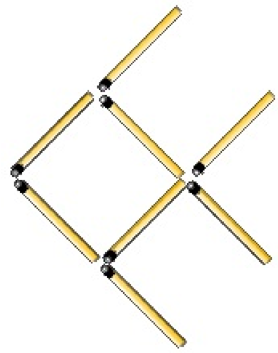
Agora finalizam a travessia o irmão e a irmã (Tempo total gasto: 17 minutos).

3.11 Virar o peixe

Faça um peixe utilizando 8 palitos como mostrado na figura 6.

Desafio: mude o sentido do peixe movendo apenas 3 palitos.

Figura 6 – Peixe de palitos

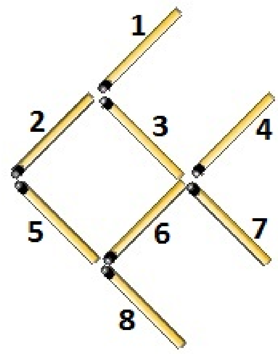


Fonte: o autor.

Resposta

Vamos numerar os palitos de cima para baixo e da esquerda para a direita como mostra a figura 7.

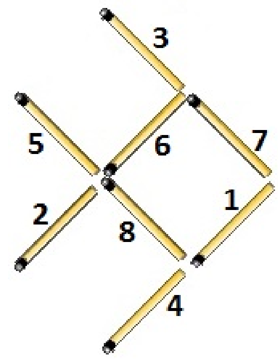
Figura 7 – Numeração dos palitos



Fonte: o autor.

Para mudar o sentido do peixe, uma solução possível é mover os palitos 1, 2 e 4 para as posições apresentadas na figura 8.

Figura 8 – Resposta

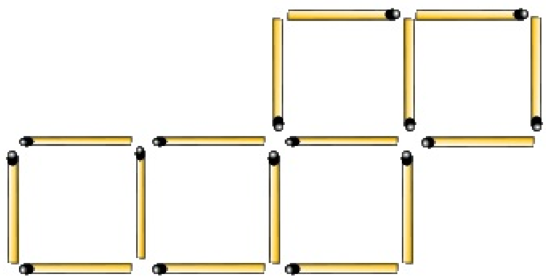


Fonte: o autor.

3.12 Mova 2 palitos para formar 4 quadrados

Disponha 16 palitos como na figura 9.

Figura 9 – Quadrados de palitos



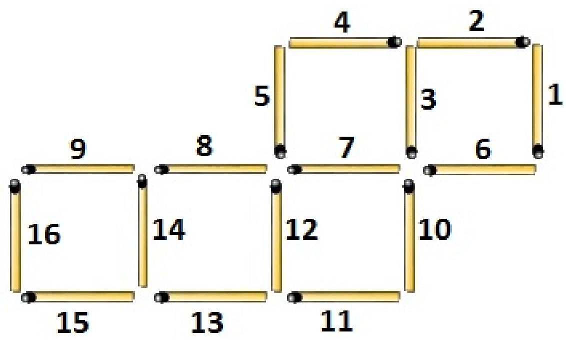
Fonte: o autor.

Como mover apenas dois palitos para formar quatro quadrados?

Resposta

Vamos numerar os palitos como mostra a figura10.

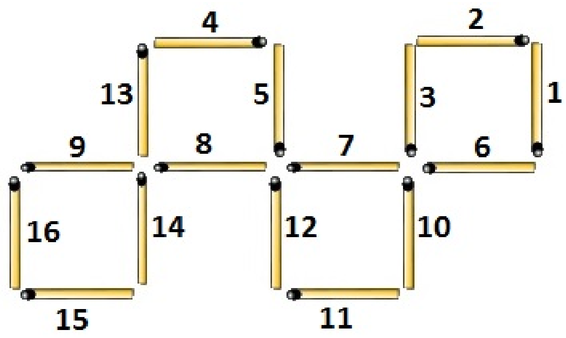
Figura 10 – Numeração dos palitos



Fonte: o autor.

Para conseguir os quatro quadrados basta mover os palitos 4 e 13 para as posições apresentadas na figura 11.

Figura 11 – Resposta

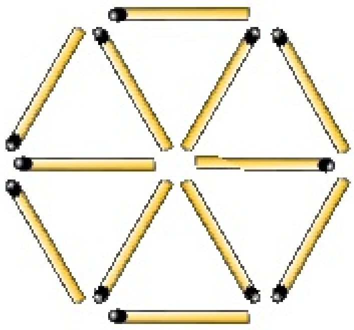


Fonte: o autor.

3.13 Mova 4 palitos para formar 3 triângulos

Mova 4 palitos da figura 12 para formar exatamente 3 triângulos equiláteros.

Figura 12 – Hexágono de palitos

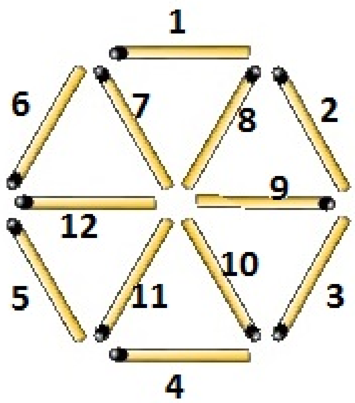


Fonte: o autor.

Resposta

Vamos numerar os palitos como mostra a figura 13.

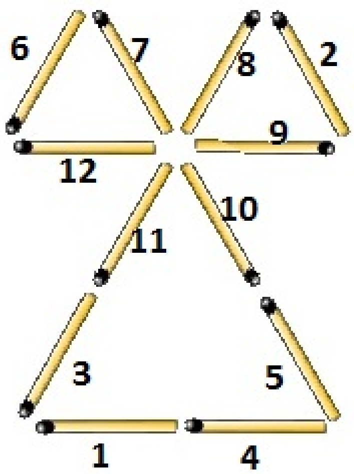
Figura 13 – Numeração dos palitos



Fonte: o autor.

Para conseguir os 3 triângulos equiláteros, podemos mover os palitos 1, 3, 4 e 5 para as posições mostradas na figura 14.

Figura 14 – Resposta

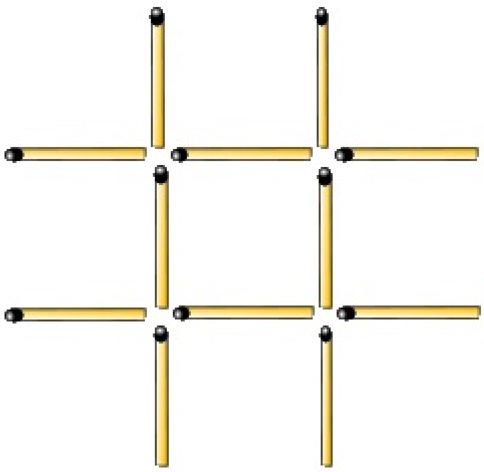


Fonte: o autor.

3.14 Mova 3 palitos para formar 3 quadrados

Mova 3 palitos da figura 15 para formar exatamente 3 quadrados.

Figura 15 – Jogo da velha de palitos

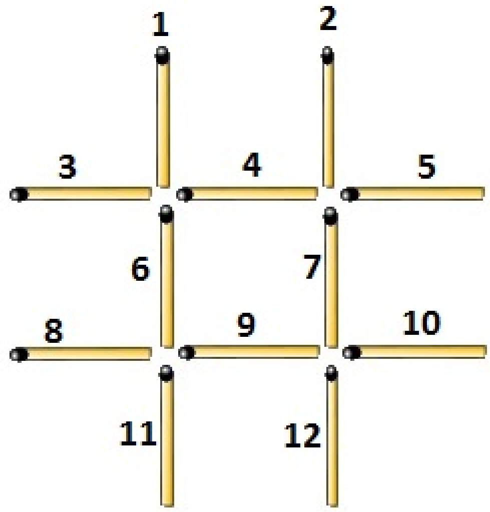


Fonte: o autor.

Resposta

Vamos numerar os palitos como mostra a figura 16.

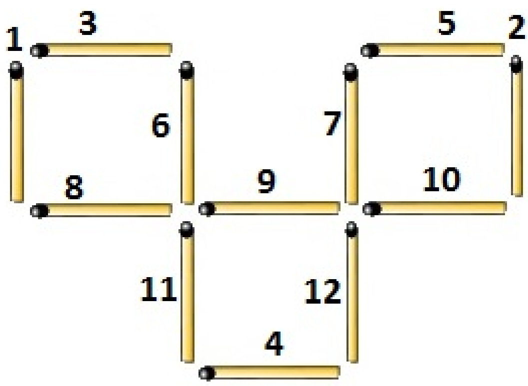
Figura 16 – Numeração dos palitos



Fonte: o autor.

Para conseguir os 3 quadrados vamos mover os palitos 1, 2 e 4 para as posições mostradas na figura 17.

Figura 17 – Resposta

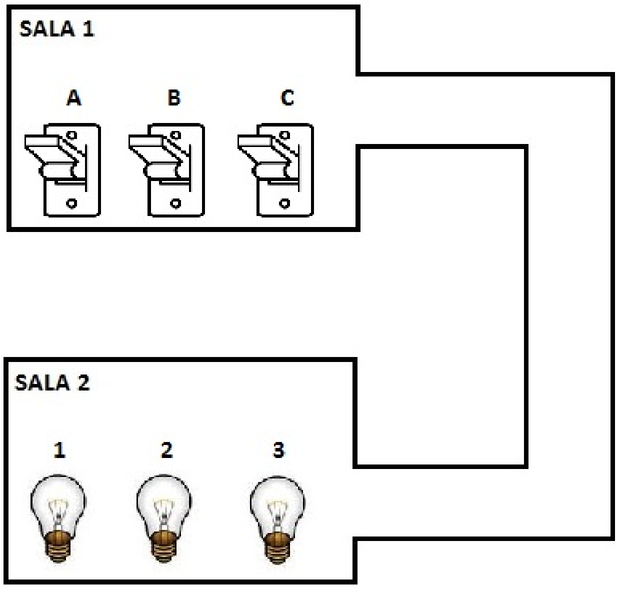


Fonte: o autor.

3.15 As lâmpadas e os interruptores

Na sala 1 temos 3 interruptores (A, B e C), cada um liga ou desliga uma das três lâmpadas incandescentes situadas na sala 2 (1, 2 e 3), como mostra a figura 18.

Figura 18 – Salas



Fonte: o autor.

Inicialmente as 3 lâmpadas estão desligadas e você se encontra na sala 1 de onde não é possível visualizar as lâmpadas da sala 2.

Como você faria para determinar como os interruptores estão associados as lâmpadas podendo alterar como quiser os interruptores e ir até a sala 2 uma única vez?

Dica: Lâmpadas incandescentes esquentam enquanto estão ligadas por causa do efeito Joule.

Resposta

Você liga um dos interruptores (por exemplo, o A) e espera alguns minutos, então desliga esse interruptor e liga outro (por exemplo, o B) e vai até a sala onde estão as lâmpadas. A lâmpada que estiver ligada está associada ao interruptor B, a que estiver quente (basta tocar nas duas desligadas para saber) está associada ao interruptor A e a que sobrou está associada ao interruptor C.

4 Problemas Curiosos

Neste capítulo serão trabalhados problemas que requerem alguma estratégia, técnica de resolução ou conhecimento matemático específico como as quatro operações e suas propriedades.

Nas seções seguintes irei apresentar e resolver alguns problemas.

4.1 Quantos gramas cabem?

Uma proveta cheia até a borda com água pesa 500 gramas, enquanto que a mesma proveta cheia pela metade pesa 325 gramas. Quantas gramas de água cabem na proveta?

Resposta

A diferença entre o peso da proveta cheia e de sua metade se refere a quantidade de água que foi retirada. Ou seja, faltam 175 gramas de água. Como foi retirada a metade, basta dobrar essa quantidade para acharmos o quanto de água cabe na proveta que é 350 gramas.

4.2 Batatas e chocolates

Ângela tem 7 batatas, Miguel tem 5 e Gregório não tem nenhuma. Eles as juntaram para fazer um pote de purê de batata e dividi-lo igualmente entre os três. Em troca pela sua parte, Gregório dá 12 pedaços de chocolate para Miguel e Ângela. Como deveriam dividir o chocolate entre eles para serem justos?

Resposta

Se repartirmos igualmente o total de batatas (12) entre os três, vamos ter 4 batatas para cada um. Como Ângela contribuiu com 7, ela deu 3 de suas batatas para Gregório e Miguel, que contribui com 5, deu uma batata. Vemos então que Ângela deu o triplo de batatas de Miguel. Dessa forma, para sermos justos, os chocolates devem ser divididos mantendo essa proporção, a quantidade que Ângela deve receber deve ser o triplo da quantidade que Miguel receberá. Como são 12 pedaços de chocolate cabem 9 pedaços a Ângela e 3 pedaços, a Miguel.

4.3 Duendes jogando

Dez duendes estão jogando damas. Cada um joga uma partida com cada um dos outros. (a) Ao final, quantas partidas cada duende jogou? (b) Quantas partidas foram jogadas ao todo?

Respostas

(a) Como são 10 duendes e cada duende joga uma partida contra cada um dos demais, temos que cada duende jogará 9 partidas.

(b) Ordenando os duendes em fila indiana, iniciamos a contagem das partidas pelo primeiro duende que são 9, agora contamos as partidas do segundo duende que são 8. Isso porque uma de suas partidas já foi contada, aquela contra o primeiro duende, agora contamos a do terceiro que são 7 (já contamos as partidas contra o primeiro e o segundo duende) e, assim por diante, até chegarmos ao penúltimo duende que terá apenas uma partida a ser contada (a partida contra o último). Dessa forma, para sabermos o total de partidas joga- das devemos fazer a soma $9+8+7+6+5+4+3+2+1$. Podemos agrupar convenientemente essa soma da seguinte maneira: $(9+1)+(8+2)+(7+3)+(6+4)+5 = 10+10+10+10+5 = 45$. Chegamos então ao total de partidas realizadas que é de 45.

4.4 A metade

Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois, cada bactéria se divide em duas; no próximo segundo todas, as bactérias se dividem novamente em duas e assim por diante. Depois de um minuto, o vidro estará cheio. Quando o vidro estava pela metade?

Resposta

Pensando a partir do final, vemos que, se o vidro está cheio depois de 60 segundos, ele tinha que estar pela metade um segundo antes, ou seja, depois de 59 segundos.

4.5 O gafanhoto

Um gafanhoto pulando ao longo de uma reta pode pular 6 ou 8 polegadas em qualquer sentido. Ele pode alcançar um ponto que está a uma distância de sua posição original de (a) 1 polegada e meia? (b) 7 polegadas? (c) 4 polegadas?

Respostas

(a) Não, como o gafanhoto só pode pular um número inteiro de polegadas ele não teria como alcançar essa "meia"polegada.

(b) Não, o gafanhoto pula sempre uma distância "par", sendo assim, sua distância em relação a posição inicial será sempre "par".

(c) Sim, por exemplo, ele pode pular 16 polegadas num sentido (8+8) e 12 polegadas (6+6) no sentido contrário, o que daria uma diferença de 4 polegadas com relação às 16 que ele pulou inicialmente.

4.6 Contando os Pokemon

Em um bosque foram avistados dois tipos de pokemons: o Charmander, que possui 4 patas e o Spearow, de 2 patas. Foram contadas 140 patas e sabendo que ali estão 52 pokemons tente descobrir quantos são os do tipo Charmander e quantos são os do tipo Spearow que ali estão.

Figura 19 – Pokemon

Fonte: http://bulbapedia.bulbagarden.net/wiki/Main_Page

Dica: Ambos os pokemons tem pelo menos duas patas.

Resposta

São 18 do tipo Charmander e 34 do tipo Spearow.

Como temos 52 pokemons no total, vamos contar 2 patas para cada um, isso totaliza 104 patas, como o total de patas contadas foram 140, a diferença 36 (140-104=36) se refere aos pokemons de 4 patas. Assim basta dividir essa diferença por 2 e teremos o total de pokemons com 4 patas (Charmander) que são 18 (36/2=18). Como temos 52 pokemons no total a diferença 34 (52-18=34) se refere aos pokemons de duas patas (Spearow).

Uma outra alternativa para responder a esse problema...

Vamos denominar por x o número de pokemons do tipo Charmander e por y o número de pokemons do tipo Spearow e, assim, podemos equacionar o problema acima. Vejamos:

Como a soma dos dois tipos de pokemons totaliza 52, temos que:

$$x + y = 52$$

E sabendo que o total de patas dos dois tipos de pokemons é de 140, podemos escrever:

$$4x + 2y = 140$$

Basta agora resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ 4x + 2y = 140 \end{cases}$$

Vamos utilizar o método da adição como mostrado a seguir:

Após multiplicar a primeira linha por -4 obtemos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -4x - 4y = -208 \\ 4x + 2y = 140 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema acima obtemos,

$$\begin{aligned} -2y &= -68 \\ 2y &= 68 \\ y &= 34 \end{aligned}$$

Temos então o número de pokemons do tipo Spearow é 34 e o número de pokemons do tipo Charmander é de 18 (52-34).

4.7 Os três santos

Certo dia, um bêbado cansado de andar pelas ruas da cidade sentou-se na escadaria da igreja e, estando bem próximo à porta, avistou dentro da igreja três santos. O bêbado então, lembrando-se da quantia de dinheiro que ainda lhe restava depois da compra das bebidas e com o objetivo de aumentar tal quantia, propôs ao primeiro santo:

"Se o Senhor dobrar o dinheiro que tenho comigo lhe dou 20 reais".

E assim fez o santo e o bêbado lhe deu 20 reais. Findado isso, ele se aproximou do segundo santo e disse:

"Se o Senhor dobrar o dinheiro que tenho comigo lhe dou 20 reais".

E assim também fez o respectivo santo e o bêbado lhe deu 20 reais. Antes de ir embora da igreja, ele se aproximou do terceiro santo e disse:

"Se o Senhor dobrar o dinheiro que tenho comigo lhe dou $20,00$ reais".

E assim ainda fez também o respectivo santo e o bêbado lhe deu 20 reais. Para a infelicidade do bêbado, no final das contas ele saiu da igreja sem dinheiro algum. Sendo assim, quanto é que o bêbado tinha quando entrou na igreja?

Resposta

Vamos pensar de traz para frente: como ele saiu sem nada, significa que antes do terceiro santo dobrar a sua quantia, ele estava com 10 reais (basta realizar as operações inversas, $0 + 20 = 20$ e $20 \div 2 = 10$). O mesmo pensamento vale para o segundo santo, como ele tinha 10 antes do terceiro santo, significa que ele tinha 15 reais antes do segundo santo dobrar sua quantia (novamente vamos realizar as operações inversas, $10 + 20 = 30$ e $30 \div 2 = 15$) e, por fim, aplicamos o raciocínio para o primeiro santo e descobriremos que ele tinha R$17,50 ($15 + 20 = 35$ e $35 \div 2 = 17,50$).

Uma outra proposta de resolução:

Vamos atribuir a incógnita x para o valor que o bêbado tinha antes de entrar na igreja.

Seguindo agora as operações indicadas no enunciado:

O primeiro santo dobra a quantia dele: $2x$.

Então ele dá 20 reais ao primeiro santo: $2x - 20$.

O segundo santo dobra a quantia que ele tem: $2 \cdot (2x - 20)$.

Novamente ele dá 20 reais ao segundo santo: $2 \cdot (2x - 20) - 20$.

O terceiro santo dobra a quantia que ele tem: $2 \cdot (2 \cdot (2x - 20) - 20)$.

E por fim, ele dá 20 reais ao terceiro santo: $2 \cdot (2 \cdot (2x - 20) - 20) - 20$.

E com isso ele fica sem nada: $2 \cdot (2 \cdot (2x - 20) - 20) - 20 = 0$.

Resolvendo esta equação, temos:

$$
\begin{gathered}
2 \cdot (2 \cdot (2x - 20) - 20) - 20 = 0 \\
2 \cdot (4x - 40 - 20) - 20 = 0 \\
2 \cdot (4x - 60) - 20 = 0 \\
8x - 120 - 20 = 0 \\
8x - 140 = 0 \\
8x - 140 + 140 = 0 + 140 \\
8x = 140 \\
8x \div 8 = 140 \div 8 \\
x = 17,5
\end{gathered}
$$

Concluímos então que o bêbado tinha R$17,50 ao entrar na igreja.

4.8 A lesma e o poço

Esta é a história de uma lesminha que caiu no fundo de um poço de 10 metros de profundidade. O poço era fundo demais para que a lesminha pudesse sair dele sem muito esforço. Todo dia, ela escalava 3 metros das paredes escorregadias do poço, mas, durante a noite, enquanto descansava, escorregava 2 metros. Nesse ritmo, de quantos dias a lesminha precisaria para sair do poço?

Figura 20 – O Poço

Fonte: http://colorirdesenhos.com/desenhos/374-poco

Resposta

Levará 8 dias. Note que a cada dia ela avança 1 metro, assim, no sétimo dia ela terá alcançado 7 metros em sua escalada, então no oitavo dia ela sobe os três metros que faltam para sair do poço.

4.9 O que é maior

O que é maior, a soma de todos os números pares de 0 a 100 ou a soma de todos os números ímpares de 1 a 99? Por quanto?

Resposta

Vamos agrupar em duplas esses números ímpares e pares de 0 a 100 da seguinte forma: o 1 forma dupla com o 2, o 3 forma dupla com o 4, o 5 forma dupla com o 6 e, assim por diante, até que o 99 formar dupla com o 100. Temos 50 duplas formadas sendo que em cada dupla temos o número par sendo maior que o ímpar, sendo assim, a soma de todos os pares de 0 a 100 é maior que a soma dos ímpares.

Como, em cada dupla, o par é uma unidade maior que o ímpar e temos 50 duplas formadas, a soma de todos os pares de 0 a 100 é 50 unidades maior que a soma dos ímpares.

4.10 Quantos livros?

André tem mais de 1000 livros. Não, ele tem menos de 1000 livros. Bem, ele tem que ter pelo menos um livro. Se é sabido que apenas uma dessa três afirmações é verdadeira, quantos livros tem André?

Resposta

São duas soluções possíveis, André tem exatamente 1000 livros ou ele não tem nenhum livro. Caso ele tenha 1000 livros, apenas a terceira afirmação será verdadeira. No caso dele não ter nenhum livro, apenas a segunda será verdadeira.

4.11 As esferas

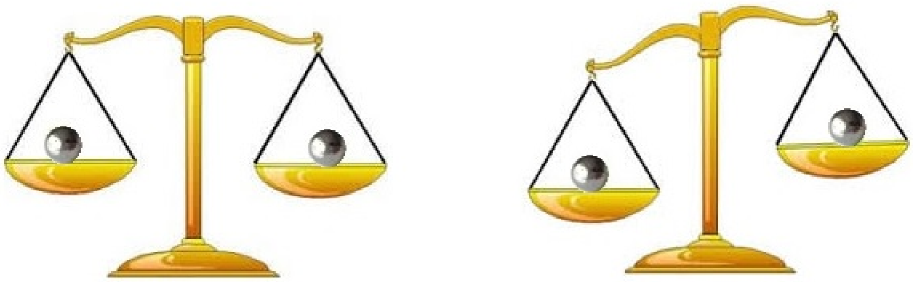
Temos três esferas aparentemente idênticas, porém uma delas é um pouco mais pesada que as demais que possuem o mesmo peso. Não é possível identificar essa bolinha mais pesada apenas segurando em nossa mão. A nossa disposição temos uma balança de pratos. Qual é o menor número de pesagens, nessa balança, que devemos fazer para descobrir a bolinha mais pesada?

Figura 21 – 3 esferas

Fonte: o autor.

Saiba: A balança de pratos é usada para comparar pesos entre objetos. Se os pratos ficarem à mesma altura em relação ao chão, após os objetos que se desejam pesar estarem em seus respectivos pratos, isso indicará que eles possuem o mesmo peso. Caso um dos pratos fique mais baixo, isso indicará que o objeto colocado nesse prato será o mais pesado.

Figura 22 – Balanças de pratos



Fonte: http://escolakids.uol.com.br/o-desafio-da-balanca.htm

Resposta

Basta uma pesagem. Para isso coloque uma esfera em cada prato e deixe uma de fora. No caso da balança ficar equilibrada, a esfera mais pesada é a que você deixou de fora. Caso um dos pratos desça, a esfera nesse prato é a mais pesada.

Vamos agora tentar resolver esse problema com nove esferas?

Temos nove esferas aparentemente idênticas, porém uma delas é um pouco mais pesada que as demais, que possuem o mesmo peso. Não é possível identificar essa bolinha mais pesada apenas segurando em nossa mão. A nossa disposição temos uma balança de pratos. Qual é o menor número de pesagens, nessa balança, que devemos fazer para descobrir a bolinha mais pesada?

Figura 23 – 9 esferas

Fonte: o autor.

Dica: Tente usar o caso mais simples (3 esferas) para resolver o de nove.

Resposta

Bastam duas pesagens. Primeiro colocamos três esferas em cada prato da balança, ficando três de fora. Se a balança indicar que as esferas possuem o mesmo peso, saberemos que a esfera mais pesada não se encontra ali. Então, basta usar o caso das três esferas nas que ficaram de fora e descobriremos a esfera mais pesada. Caso a esfera esteja em um dos pratos da primeira pesagem, esse prato irá descer. Então, utilizamos a resolução do caso das três esferas e descobriremos qual é a mais pesada.

E com oito esferas?

Temos oito esferas aparentemente idênticas, porém uma delas é um pouco mais pesada que as demais que possuem o mesmo peso. Não é possível identificar essa bolinha mais pesada apenas segurando em nossa mão. A nossa disposição temos uma balança de pratos. Qual é o menor número de pesagens, nessa balança, que devemos fazer para descobrir a bolinha mais pesada?

Figura 24 – 8 esferas

Fonte: o autor.

Resposta

Bastam duas pesagens. Primeiro colocamos três esferas em cada prato da balança, ficando duas de fora. Se a balança indicar que as esferas possuem o mesmo peso, saberemos que a esfera mais pesada não se encontra ali, então basta colocar as duas esferas que ficaram de fora, uma em cada prato, e descobriremos a esfera mais pesada. Caso a esfera esteja em um dos pratos da primeira pesagem, esse prato irá descer. Então, utilizamos a resolução do caso das três esferas e descobriremos qual é a mais pesada.

Podemos pensar agora no caso com 27 esferas?

Escreva o enunciado para esse caso e a sua solução.

4.12 Pesando pregos

Um saco contém 2kg de pregos. Você pode pesar 750g usando uma balança de dois pratos?

Resposta

Separe o total de pregos em dois grupos com o mesmo peso usando a balança de pratos, assim teremos 1kg em cada grupo. Agora repita o processo anterior e separe cada um desses grupos em dois novos grupos, agora teremos 4 grupos de 500g cada. Repetindo o processo mais uma vez, vamos obter 8 grupos de 250g cada. Agora basta juntar 3 grupos e teremos o peso desejado.

4.13 Juntando balas

Um grupo de 15 crianças juntaram 100 balas. Prove que duas delas juntaram o mesmo número de balas.

Resposta

Vamos supor que nenhuma delas tenham juntado o mesmo número de balas. Digamos que a primeira tenha juntado 0 balas, a segunda uma bala, a terceira duas balas e assim por diante até que a última criança tenha juntado 14 balas. Temos então 105 balas reunidas, dessa maneira, o que contradiz nossa hipótese que são 100 balas reunidas. Sendo assim, nossa suposição não estava correta, o que nos garante dizer que pelo menos duas crianças juntaram o mesmo número de balas.

Contagem do número de balas:

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=$$
$$(1+14)+(2+13)+(3+12)+(4+11)+(5+10)+(6+9)+(7+8)=$$
$$7\cdot 15=105$$

4.14 Último algarismo

O último algarismo do quadrado de um número natural pode ser 2?

Resposta

Não, para isso basta verificar os quadrados dos 10 algarismos de nosso sistema de numeração $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$, e perceber que a unidade do quadrado de qualquer número natural será a unidade do quadrado de sua unidade. Observe a tabela 1.

Temos então que as possíveis unidades para o quadrado de um número natural são: 0, 1, 4, 5, 6 e 9.

Tabela 1 – Unidades dos quadrados

Natural	Quadrado	Unidade
0	$0^2 = 0$	0
1	$1^2 = 1$	1
2	$2^2 = 4$	4
3	$3^2 = 9$	9
4	$4^2 = 16$	6
5	$5^2 = 25$	5
6	$6^2 = 36$	6
7	$7^2 = 49$	9
8	$8^2 = 64$	4
9	$9^2 = 81$	1

Fonte: o autor.

4.15 Medindo com recipientes

É possível medir exatamente 4 litros de água usando uma torneira, um recipiente de 3 litros e um recipiente de 5 litros?

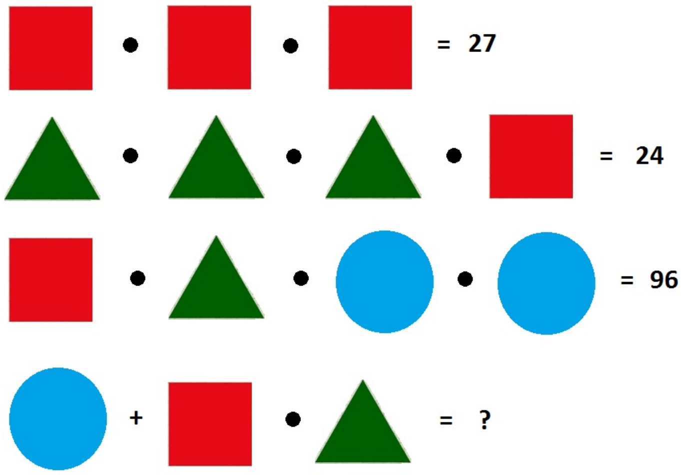
Resposta

Sim. Uma maneira possível é você encher o recipiente de 3 litros e despejar no de 5 inicialmente vazio. Então enchemos o de 3 e completamos o de 5 com 2 litros restando 1 litro de água no recipiente de 3 litros. Agora esvaziamos o recipiente de 5 litros e despejamos o conteúdo do de 3 litros nele ficando o de 5 litros com 1 litro de água. Agora, basta encher o recipiente de 3 litros e despejar no de 5 litros que este ficará com 4 litros de água.

4.16 Brincando com as operações

Cada uma das figuras geométricas que aparecem na figura 25 representa um valor. Observando as operações entre essas figuras e o respectivo resultado encontrado ao final de cada expressão horizontal, determine o resultado da última expressão.

Figura 25 – Figuras geométricas



Fonte: o autor.

Resposta

Na figura 25 aparecem três figuras geométricas (quadrado vermelho, triângulo verde e círculo azul). Cada figura representa um número para a qual devemos descobrir o seu respectivo valor. Essas figuras se repetem em cada linha e a direita da mesma aparece o resultado de operações efetuadas com os números que essas figuras representam.

Na primeira linha temos que o produto entre os quadrados vermelhos é 27, assim, o número representado por cada quadrado vale 3 pois 3.3.3=27.

Na segunda linha temos que o produto entre os três triângulos verdes e o quadrado vermelho é 24. Como sabemos o valor do quadrado (3), podemos dividir o 24 por 3 e descobrir quanto vale o produto dos três triângulo que é 8 (24/3=8). Dessa forma temos que o valor de cada triângulo é 2 pois 2.2.2=8.

Usando o mesmo raciocínio utilizado na linha 2 e sabendo que cada quadrado vale 3 e triângulo 2, basta dividir o 96 por 6 (6 = 2.3) e descobrir quanto vale o produto dos dois círculos que é 16. Dessa forma, cada círculo vale 4 pois 4.4=16.

Por fim nos resta descobrir quanto vale o resultado da expressão numérica da linha 4 (4 + 3 x 2). Lembrando que a multiplicação deve ser resolvida primeiro, teremos como resultado 10 (4 + 6).

4.17 A corrente de ouro

Para atravessar um deserto, cujo percurso demora 7 dias, o aventureiro Diego irá depender do conhecimento do guia que contratou. No entanto, o pagamento desse guia deverá ser feito diariamente, pois, se Diego antecipá-lo, o guia pode fugir à noite e este não aceita receber tudo ao final da jornada. Como Diego contava apenas com uma corrente de ouro formada de 7 anéis idênticos, foi acordado que ao final de cada dia ele daria um desses anéis para o guia como pagamento. Para realizar o corte em qualquer um desses anéis, Diego conta com apenas um pequeno maçarico que possui combustível para apenas um corte. Como Diego deverá proceder para poder fazer o pagamento ao guia e seguir sua viagem?

Figura 26 – Corrente de ouro

Fonte: o autor.

Dicas

1: Ao cortar um anel esse ficará solto desprendendo suas extremidades, ou seja, se você cortar qualquer um dos anéis centrais terá 3 pedaços. Se cortar em qualquer uma das duas extremidades terá apenas dois pedaços.

2: Para fazer o pagamento de um anel de ouro você pode pedir o "troco"ao guia, ou seja, se você der um pedaço com 3 anéis você pode pedir dois anéis de troco desde, é claro, que o guia tenha como dar esse troco.

Resposta

Basta realizar o corte no terceiro anel, com isso ficaremos com três pedaços, um de dois anéis, um de quatro anéis e um anel sozinho. Para fazer o pagamento diário iremos proceder assim:

1º dia: É dado o anel solto.

2º dia: Entregamos o pedaço de 2 anéis e pegamos o anel solto como troco.

3º dia: Novamente entregamos o anel solto.

4º dia: Pagamos com o pedaço de quatro anéis e pegamos como troco os dois pedaços que estão com o guia.

5º dia: Pagamos com o anel solto.

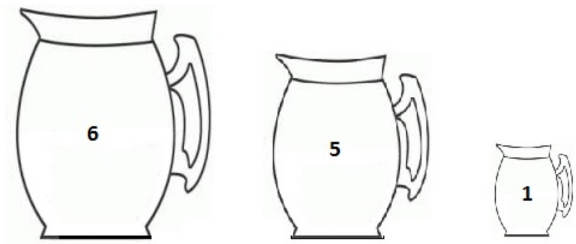
6º dia: Entregamos o pedaço de dois anéis e pegamos o anel solto como troco.

7º dia: Finalizamos o pagamento do guia entregando o último anel da corrente.

4.18 Na medida certa

Os três recipientes mostrados na figura 27, do maior para o menor, possuem respectivamente as seguintes capacidades: O primeiro 6 litros; o segundo, 5 litros e o terceiro, 1 litro. Inicialmente, o de 6 litros está com 2 litros de água; o de 5 litros está cheio e o de 1 litro também está cheio. Sabendo-se que os volumes só podem ser manipulados com seus respectivos recipientes, como iremos proceder para que dois recipientes fiquem com 4 litros cada um?

Figura 27 – Jarros



Fonte: o autor.

Resposta

Inicialmente transferimos o conteúdo do recipiente de 1 litros para o de 6 litros, assim o recipiente de 6 litros ficará com 3 litros de água. Depois, transferimos 1 litro do recipiente de 5 litros para o de 1 litro, que se encontra vazio. Teremos então 3 litros no recipiente de 6 litros; 4 litros, no de 5 litros, e o de 1 litro cheio. Para finalizar basta transferir o conteúdo do recipiente de 1 litro para o de 6 litros.

4.19 Como dividir o suco entre amigos

Dois amigos têm três garrafões de suco, de oito, cinco e três litros. O garrafão de oito litros está cheio e os outros estão vazios. Eles querem dividir o suco em partes iguais: quatro litros para cada um. Como proceder? Tudo o que eles podem fazer é passar o suco de um garrafão para o outro.

Resposta

O que os dois amigos devem fazer é criar um procedimento que permita, no final, terem certeza de que o conteúdo de um dos garrafões será de quatro litros.

Vamos inventar uma notação. Usaremos uma trinca de números para denotar o conteúdo de cada garrafão, sendo o primeiro número para denotar o conteúdo do garrafão de oito litros; o segundo, o de cinco litros; o terceiro, o de três litros. Assim, no início, temos (8,0,0), pois são oito litros no primeiro, enquanto que os outros dois estão vazios.

Se despejarmos suco no garrafão de cinco litros até enchê-lo, então passaríamos para (3,5,0). Note que a soma dos três números tem de ser sempre oito, o volume total de suco.

Agora uma sequência de trincas que leva a uma solução:

(8,0,0)
(3,5,0)
(3,2,3)
(6,2,0)
(1,5,2)
(1,4,3)
(4,4,0)

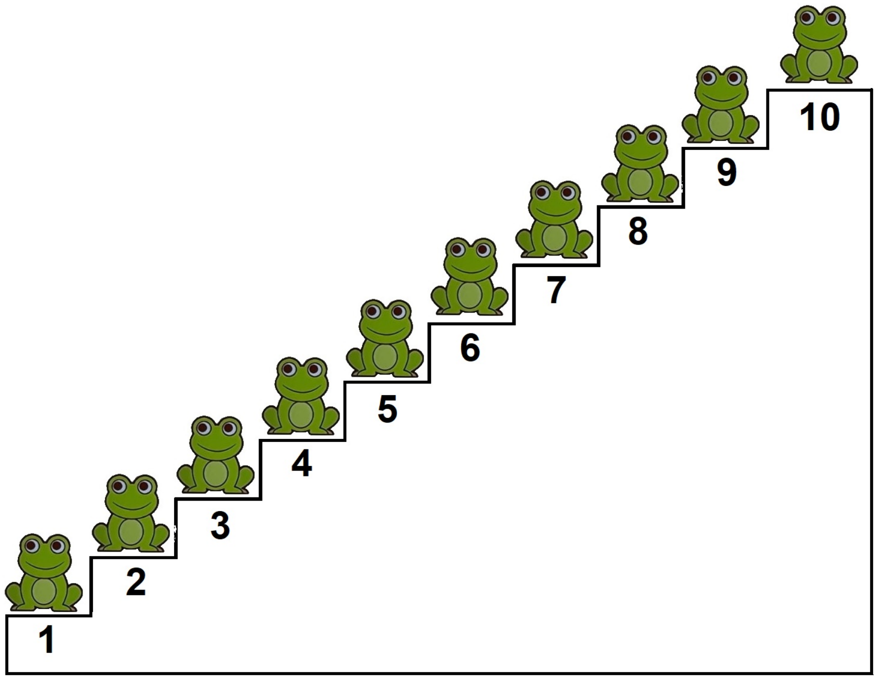
Uma outra sequencia possível:

(8,0,0)
(5,0,3)
(5,3,0)
(2,3,3)
(2,5,1)
(7,0,1)
(7,1,0)
(4,1,3)
(4,4,0)

4.20 Rãs na escada

Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode saltar para um outro degrau, subindo ou descendo. No entanto, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve saltar o mesmo número de degraus, no sentido contrário. Por exemplo, se uma rã decidir saltar 3 degraus para cima, no mesmo instante, uma outra rã precisa saltar 3 degraus para baixo. Será que em algum momento todas as rãs poderão estar no mesmo degrau?

Figura 28 – Rãs na Escada



Fonte: o autor.

Resposta

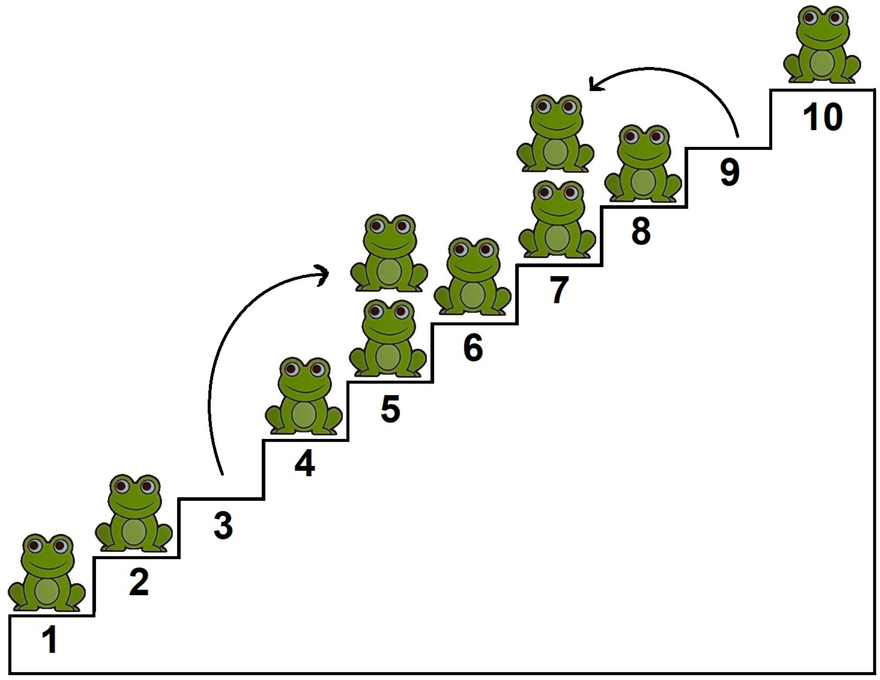
Vamos enumerar os degraus a partir da base como: $1, 2, 3, 4, \cdots, 10$.

Agora vamos multiplicar o número do degrau pela quantidade de rãs que há sobre ele. Inicialmente temos uma rã em cada degrau, então somaremos todos essas parcelas e chamaremos de SOMATÓRIA o resultado obtido. Assim, no início teremos: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \cdots + 10 \cdot 1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$, SOMATÓRIA$= 55$.

É interessante notar que SOMATÓRIA não irá se alterar após os movimentos das rãs, visto que, sempre que uma rã desce um certo número de degraus, outra rã subirá o mesmo número, o que faz com que a soma permaneça a mesma.

Por exemplo, vamos dizer que a rã que estava no degrau 3 pulou para o degrau 5 e, ao mesmo tempo, a rã que estava no degrau 9 desceu para o degrau 7, assim como na figura abaixo.

Figura 29 – Exemplo



Fonte: o autor.

Calculando a SOMATÓRIA temos:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1 =$$
$$= 1 + 2 + 4 + 10 + 6 + 14 + 8 + 10 = 55.$$

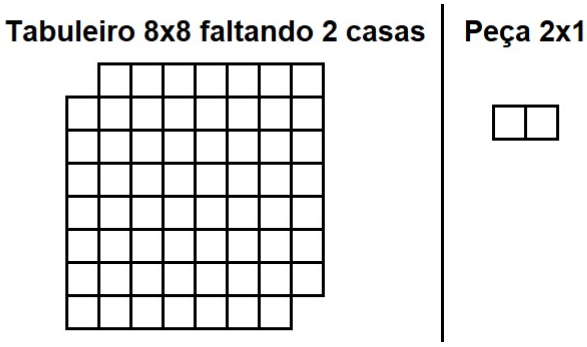
Perceba que a rã, quado pula do degrau 3 para o 5, adiciona 2 a SOMATÓRIA e, quando a outra rã sai do degrau 9 para o 7, ela subtrai 2 da SOMATÓRIA. Ou seja, o valor da SOMATÓRIA não se alterou, pois foram realizadas operações inversas que se anulam.

Temos então que, após vários movimentos de subir e descer das rã, a SOMATÓRIA será 55. Isso, inclusive, no caso de todas elas pararem em um mesmo degrau, se possível. Dessa forma, a SOMATÓRIA seria o número deste degrau multiplicado por 10 (pois todas as rãs estariam neste degrau). Ou seja, o número deste degrau seria $55 \div 10 = 5,5$. Mas é impossível, pois nossos degraus são números naturais e o resultado obtido para o número do degrau não é. Dessa forma, podemos concluir que em nenhum momento será possível termos estas rãs em um mesmo degrau.

4.21 Peças no tabuleiro

É possível preencher completamente um tabuleiro quadriculado como o de xadrez: 8x8, faltando as casas extremas de uma de suas diagonais com peças 2x1?

Figura 30 – Tabuleiro e peça



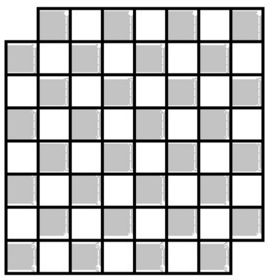
Fonte: o autor.

Resposta

Para facilitar a argumentação, vamos pintar o tabuleiro assim como é feito no tabuleiro de xadrez. Cada casa (os menores quadrados que formam o tabuleiro) será pintada da cor branca ou cinza, alternadamente.

A figura 31 mostra como ficará o tabuleiro após o procedimento apontado acima.

Figura 31 – Tabuleiro pintado



Fonte: o autor.

Vamos agora observar o seguinte fato: como nossas peças são de dimensões 2x1, cada peça terá que ocupar uma casa branca e outra cinza. Como nosso tabuleiro possui 62 casas ($64 - 2 = 62$), vamos precisar de 31 peças ($62 \div 2 = 31$).

Como cada peça ocupa uma casa de cada cor, precisaremos de 31 casas cinzas e 31 casas brancas, porém o tabuleiro possui 32 casas cinzas e 30 casas brancas. Ou seja, sobrará uma casa cinza e faltará uma casa branca para podermos preencher completamente o tabuleiro.

4.22 Quais são as idades das filhas do maestro?

Um Maestro perguntou ao seu amigo, professor de Matemática:

- Tenho três filhas. Qual a idade de cada uma?

- Faltam dados - respondeu o matemático.

No intuito de dar mais informações, o Maestro continuou:

- Multiplicando a idade das três o resultado dá 36.

- Ainda faltam dados! - retrucou o professor.

- Por coincidência, somando suas idades o resultado é igual ao número daquela casa - completou o pai das três misteriosas filhas.

O professor de Matemática olhou na direção apontada, sacudiu a cabeça negativamente e insistiu:

- Ainda faltam dados, caro Maestro!

Então, num lance de inspiração, o Maestro afirmou:

- A mais velha toca piano.

O Matemático sorriu e disse a idade das três filhas.

Quais são essas idades?

Resposta

Como o produto das três idades é igual a 36, vamos fazer a fatoração de 36 em números naturais. Vamos fazer a primeira idade ser menor ou igual a segunda, a segunda ser menor ou igual a terceira e já descartar a possibilidade das três idades serem iguais, visto que a raiz cúbica de 36 não é um número natural.

$$36 = 1\ .\ 1\ .\ 36$$
$$36 = 1\ .\ 2\ .\ 18$$
$$36 = 1\ .\ 3\ .\ 12$$
$$36 = 1\ .\ 4\ .\ 9$$
$$36 = 1\ .\ 6\ .\ 6$$
$$36 = 2\ .\ 2\ .\ 9$$
$$36 = 2\ .\ 3\ .\ 6$$
$$36 = 3\ .\ 3\ .\ 4$$

Agora observamos que foi afirmado ser a soma dessas idades é igual ao número de uma certa casa que não sabemos, mas o professor de matemática sabe e, como ele não conseguiu concluir as idades das três usando tal informação, isso significa que devem haver somas iguais. Vejamos:

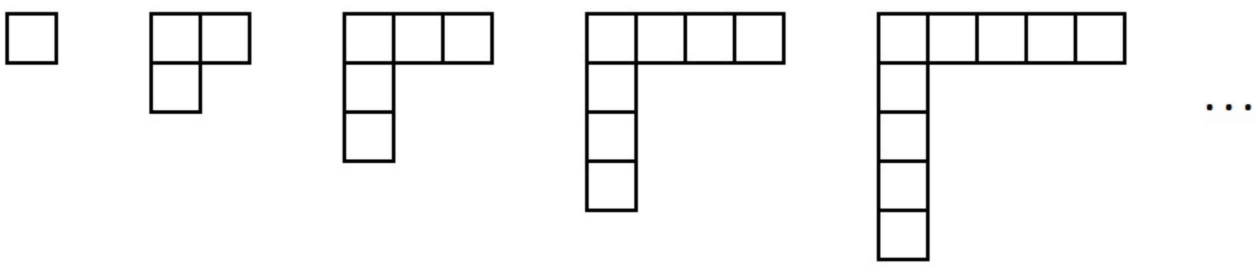
$$1 + 1 + 36 = 38$$
$$1 + 2 + 18 = 21$$
$$1 + 3 + 12 = 16$$
$$1 + 4 + 9 = 14$$
$$\mathbf{1 + 6 + 6 = 13}$$
$$\mathbf{2 + 2 + 9 = 13}$$
$$2 + 3 + 6 = 11$$
$$3 + 3 + 4 = 10$$

Percebemos aqui que as únicas possibilidades para as idades das filhas do Maestro são: 2, 2 e 9 ou 1, 6 e 6. Como foi afirmado que o Maestro tem uma filha mais velha, então a resposta é: 2, 2 e 9.

4.23 Contando quadradinhos

Observe a série de imagens apresentadas na figura 32.

Figura 32 – Série de figuras



Fonte: o autor.

A primeira consiste de um quadrado. Quantos quadrados há na centésima figura? Quantos quadrados há ao todo nas 100 primeiras figuras?

Resposta

Para responder a primeira pergunta podemos pensar da seguinte forma:

Vamos numerar as figuras na ordem em que aparecem. Assim, a primeira figura é a que possui 1 quadrado, a segunda figura é aquela constituída de 3 quadrados e assim por diante.

Percebe-se que a diferença de quadrados entre duas figuras adjacentes é sempre dois. Ou seja, de uma figura para a sua figura consecutiva o número de quadrados é aumentado em dois.

Para saber o número de quadrados de uma figura qualquer basta então somar quantos dois quadrados foram somados a primeira figura. Por exemplo, para saber o número de quadrados da quinta figura vamos somar 4 vezes dois quadrados à primeira figura, que possui um quadrado, o que resulta em 9 quadrados.

Temos então que o número de quadrados da centésima figura é o número de quadrados da primeira figura somado a 99 vezes dois quadrados. Ou seja, 199 quadrados.

A resposta da segunda pergunta fica ainda mais fácil de responder se notarmos que a primeira figura cabe dentro da segunda, formando um quadrado 2x2, e essa nova figura cabe dentro da terceira, formando um quadrado 3x3, e assim por diante. Se juntarmos todos os quadrados das 100 primeiras figuras iremos formar um quadrado de 100x100, resultando assim em 10000 quadrados.

4.24 O problema de tirar o chapéu

Era uma vez três sábios (para nós, um sábio é um ser capaz de fazer uma dedução perfeita a partir dos dados que têm) que se encontram em uma sala e um rei decide testar o quão sábios eles são. Propõe então o seguinte teste: ele colocará os três em fila e um chapéu em cada um. O último da fila, que chamaremos de Arquimedes, vê os outros dois à sua frente, Euclides e Martin. O segundo, Euclides, vê apenas Martin. E Martin, o primeiro, não vê ninguém.

O desafio dos sábios é descobrir a cor de seu chapéu. Tudo o que eles sabem é que o rei dispunha de três chapéus pretos e dois brancos. Eis o diálogo:

Rei: "Pronto, estão todos de chapéu. Agora, eu quero ver! Arquimedes, qual a cor do seu chapéu?"

Arquimedes: "Ah, meu rei, não há como dizer..."

Rei: "Euclides, sabe a cor do seu chapéu?"

Euclides:"Não, meu rei, não sei."

Rei: "Só falta você, Martin! Sabe a cor do seu chapéu?"

Martin: "Sim, meu rei, sei a cor do meu chapéu!"

Rei: "Como!??"

Eis aqui o problema, como Martin deduziu a cor do chapéu dele? E qual seria?

Resposta

Vamos analisar as respostas dadas:

Como Arquimedes disse que não sabia a cor do próprio chapéu, isso significa que ele não foi capaz de deduzi-la. Ou seja, pelo menos um dos sábios a sua frente estava de chapéu preto, pois, do contrário, ele veria dois chapéus brancos e poderia então concluir que o seu chapéu era preto.

Como Euclides também não foi capaz de deduzir a cor do seu próprio chapéu e, tendo em vista que ouviu a resposta do amigo sábio, isso significa que ele está vendo um chapéu preto na cabeça de Martin, pois, do contrário, ao ver um chapéu branco e, sabendo que não poderiam ser dois chapéus brancos, ele teria deduzido que o seu chapéu é preto.

Martin ouvindo as respostas de seus dois amigos sábios e utilizando o mesmo raciocínio não teve dúvidas em afirmar que o seu chapéu era preto.

4.25 A fila de execução

Observação: este problema requer multiplicação de inteiros. Dessa forma, deverá ser aplicado para séries a partir do 6° ano.

Em uma fila, havia certo número de homens condenados à morte. A situação havia chegado a tal ponto que o rei decidiu executar os condenados, mas, para não afetar demais sua popularidade, deu uma última chance a eles. Decidiu colocar os prisioneiros em fila e pôr um chapéu (preto ou branco) na cabeça de cada um deles (cada um da fila podia ver todos os outros à sua frente). Feito isso, a partir do último, cada um tentaria adivinhar a cor do próprio chapéu, depois de ter ouvido a resposta de seu antecessor na fila (todos ouvem o que todos falam).

Quem acertasse a cor do próprio chapéu estaria livre. Já quem errasse...

Cientes das regras do jogo, os presos tiveram uma última noite em conjunto, quando tentaram bolar um plano para salvar o maior número de pessoas.

Primeiramente, se perguntaram se seria possível salvar alguém. Convencidos de que sim, passaram à questão seguinte: qual o maior número possível de presos que poderiam escapar da morte?

Resposta

Uma estratégia viável seria a seguinte:

Vamos atribuir +1 aos chapéus pretos e -1 aos brancos. O último da fila será o primeiro a tentar a sorte. Ele conta quantos chapéus pretos e brancos vê a sua frente. Depois, multiplica os números associados aos chapéus que viu e diz que essa é a cor de seu chapéu (ou seja, se o resultado da multiplicação for +1, ele diz que o seu chapéu é preto;

se for -1, branco). Na verdade, ao fazer isso, o último da fila está sendo altruísta, pois essa estratégia ajudará, como veremos, apenas os presos à sua frente.

Agora, o penúltimo da fila se pergunta: "Se o preso de trás se atribui [preto/branco], é porque viu que o resultado da multiplicação das cores, começando do meu chapéu até o camarada lá no começo da fila, é [+1/-1]. Mas, como eu vejo todos os chapéus que ele vê, menos o meu, dá para descobrir a cor do meu chapéu!". Por exemplo, se o último da fila disse "preto", quer dizer que o produto associado é +1. Se o penúltimo vê que na sua frente o produto das cores dos chapéus dá -1, então ele tem certeza de que a cor do seu chapéu corresponde ao número -1, ou seja, é branco.

Procedendo assim, cada preso poderá descobrir a cor do próprio chapéu. Portanto, há uma estratégia que salva quase todos os presos, apenas um que dependerá da sorte.

4.26 O ouro dos piratas

Nosso problema agora se passa em um navio pirata, em um mar infestado de tubarões. Na embarcação, estão cinco piratas e 100 moedas de ouro: uma combinação conhecidamente perigosa. Apesar de gananciosos, os piratas têm um certo espírito "democrático"e decidem partilhar as moedas do seguinte modo: eles formam uma fila e o primeiro dela sugere uma estratégia para partilhar as moedas, que são indivisíveis. Ou seja, não existe "meia moeda"ou coisa parecida.

Caso o primeiro da fila obtenha pelo menos metade dos votos - três, no mínimo, em uma fila de cinco, por exemplo -, então a sugestão é obedecida. Caso contrário, ele é preso sem direito algum sobre a partilha. Aí, o segundo da fila tem a chance de propor uma partilha das moedas e assim por diante. A pergunta é: o que o primeiro pirata deve fazer? Ele quer salvar a pele; afinal, eles são gananciosos, mas não são burros!

Resposta

Vamos pensar de trás para frente.

Imaginamos a situação mais simples possível: só um pirata está no navio. É fácil concluir que para essa situação a partilha proposta seria "100 moedas para mim".

Agora, no caso de serem dois piratas no navio, digamos Peter e Pan? Sendo que a fila comece por Peter. Bem, nesse caso, como qualquer proposta de Peter contará com o próprio voto, ele consegue pelo menos a metade dos votos, com certeza. Assim, ele simplesmente propõe 100 moedas para ele e zero para Pan.

Vamos analisar o caso de três piratas no navio, digamos: Peter, Pan e Hulk. A fila está nessa mesma ordem dos nomes. Ou seja, Peter é o primeiro e Hulk o último a propor.

Nesse caso, Peter tem que ser esperto, pois precisa de pelo menos dois votos para passar sua proposta. Se ele não conseguir, literalmente cai fora e Pan sugere a estratégia anterior, da qual ele leva tudo. Portanto, o melhor que Peter pode fazer é dar uma moedinha para Hulk (que não levaria nada no caso anterior), zero para Pan e 99 para ele mesmo.

Adicionando o quarto pirata (Sr. Smee) e mantendo a fila na ordem: Peter, Pan, Hulk e Sr, Smee. Peter precisa de pelo menos dois votos, como ele já tem o seu, só precisa de mais um. Assim, ele propõe zero para o Sr. Smee, uma para Hulk, zero para Pan e 99 para si mesmo. Hulk, que não está interessado em fazer a fila e ficar só com três piratas, pois não levaria nada, provavelmente aprovará a sugestão de Peter.

Finalmente, o quinto pirata é adicionado (Gancho) e pela ordem: Peter, Pan, Hulk, Sr. Smee e Gancho. O que Peter precisa fazer é conseguir dois votos, além do seu. Basta analisar o caso de quatro piratas, ver quem não levaria nada e oferecer uma moeda para cada um deles. Ou seja, a proposta de Peter seria uma para Pan, uma para o Sr. Smee e 98 para si mesmo.

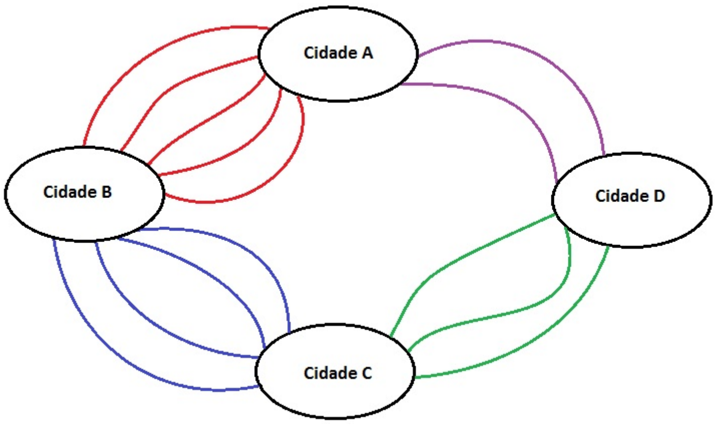
4.27 As estradas

Um determinado país pequeno tem 4 cidades: A, B, C e D. Existem 5 estradas entre A e B, 4 entre B e C, 2 entre A e D, e 3 entre D e C. Responda:

(a) De quantas maneiras diferentes é possível viajar de A para C passando por B?

(b) De quantas maneiras diferentes é possível viajar de A para C passando por B ou por D?

Figura 33 – Estradas



Fonte: o autor.

Resposta

(a) Temos 5 opções para ir de A para B, para cada escolha dessas há 4 opções de continuar a viagem de B para C, sendo assim, temos $5 \times 4 = 20$ formas de ir de A para C.

(b) Já sabemos que temos 20 formas diferentes de ir de A para C passando por B. Então nos resta descobrir de quantas formas diferentes podemos ir de A para C passando por D. Como temos duas formas diferentes para ir de A para D e para cada uma dessas escolhas existem 3 formas de continuar a viagem indo de D para C, temos $2 \times 3 = 6$ formas de ir de A para C passando por D. Concluímos então que temos $20 + 6 = 26$ formas diferentes de realizar a viagem indicada.

4.28 Decorando a árvore de Natal

(a) Há três lâmpadas em um fio muito curto de luzes para árvores de Natal: uma é vermelha, outra é azul e a terceira é verde. Cada lâmpada pode estar ligada ou desligada. De quantas maneiras diferentes esse fio pode estar iluminado?

(b) E se o fio tivesse cinco lâmpadas diferentes de cinco cores diferentes?

Resposta

(a) Como são 3 lâmpadas e cada uma pode estar ligada ou desligada, temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ formas dessas lâmpadas estarem ligadas ou desligadas. Como queremos que essa árvore esteja iluminada, então, é necessário que pelo menos uma das lâmpadas esteja acesa e, sendo assim, temos que eliminar a opção de TODAS estarem desligadas: o que nos dá 8 - 1 = 7 formas de iluminar esse fio.

Outra forma de pensar é a seguinte, se apenas uma das lâmpadas estiver acesa iremos ter 3 possibilidades para iluminar esse fio; com apenas duas lâmpadas acesas teremos 3 possibilidades; com as três lâmpadas acesas ao mesmo tempo, uma possibilidade. Dessa forma haverá $3 + 3 + 1 = 7$ formas diferentes de iluminar esse fio.

(b) São $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ formas diferentes destas lâmpadas estarem acesas ou apagadas. Eliminando a possibilidade das 5 estarem apagadas temos $32 - 1 = 31$ formas diferentes de iluminar esse fio.

Outra forma de resolver seria a de contar separadamente os casos com apenas uma, apenas duas, apenas três, apenas 4 e apenas cinco lâmpadas acesas.

Com apenas uma lâmpada são 5 possibilidades.

Para contar com apenas duas lâmpadas acesas, vamos representar as possibilidades por quinas da seguinte forma: (AADDD) onde A significa acesa e D significa Desligada.

Nesse nosso exemplo, apenas, as duas primeiras lâmpadas estão acesas. Se pensarmos em duas lâmpadas acesas adjacentes temos 4 possibilidades que são (AADDD); (DAADD); (DDAAD) e (DDDAA). Com uma lâmpada apagada, entre duas acesas, temos 3 possibilidades que são (ADADD); (DADAD) e (DDADA). Agora com duas lâmpadas apagadas, entre duas acesas, temos 2 possibilidades que são (ADDAD) e (DADDA). Com 3 lâmpadas apagadas, entre duas acesas, temos apenas uma possibilidade. Dessa forma temos $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ formas diferentes de apenas duas lâmpadas estarem acesas.

Vamos contar agora os casos em que temos apenas 3 lâmpadas acesas. (AAADD); (DAAAD); (DDAAA); (ADAAD); (ADDAA); (DAADA); (DADAA); (ADADA); (AADAD); (AADDA). São 10 formas diferentes de apenas 3 lâmpadas estarem acesas.

Com apenas quatro lâmpadas acesas temos 5 possibilidades: (AAAAD); (DAAAA); (ADAAA); (AADAA); (AAADA).

Com as cinco lâmpadas acesas temos apenas uma possibilidade.

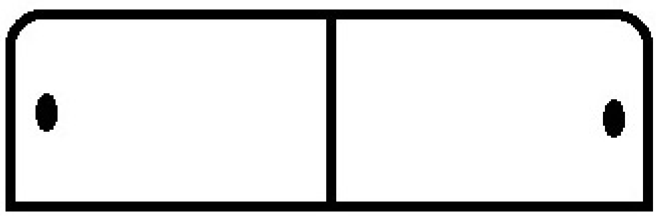
Concluímos assim que temos $15 + 10 + 5 + 1 = 31$ formas diferentes de iluminar esse fio.

4.29 A janela do ônibus

Pré Requisito: Cálculo de área.

A figura 34 esboça uma das janelas de um ônibus. Todas as curvas que formam os cantos arredondados são arcos de um círculo.

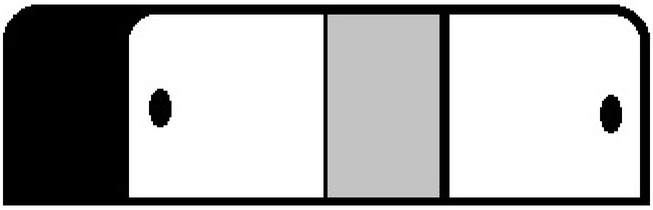
Figura 34 – Janela do ônibus fechada



Fonte: o autor.

Uma parte da janela foi aberta 10 cm como mostra a figura 35. A altura da seção aberta é 25cm.

Figura 35 – janela do ônibus parcialmente aberta



Fonte: o autor.

Encontre a área da abertura (área escura).

Resposta

A área é de 250cm^2.

Esta área foi calculada através do retângulo em cinza formado pela sobreposição dos vidros, esse retângulo possui 25cm de altura e 10cm de largura, ou seja, sua área é o produto dessas medidas (25 x 10).

Para garantir que a área desse retângulo é a mesma área da figura formada pela abertura da janela (área escura) temos que observar os seguintes pontos:

- O total de vidro da janela é composta da somatória dos vidros das 2 bandas que essa janela possui;
- Com a abertura da janela, o total de vidro não se alterou.

Vistos esses pontos podemos pensar assim: A soma das 2 bandas com a janela fechada tem que ser igual a soma das 2 bandas mais a área escura e mais a área cinza.

Essas somas só serão iguais se a área escura tiver a mesma área da cinza, ou seja, ao se abrir a janela parcialmente, o vidro contido no lugar da área escura formou a área cinza (sobreposição das bandas da janela).

4.30 É possível pagar com essas notas?

É possível fazer o pagamento de R\$32, 00 com notas de R\$4, 00 e R\$7, 00 sem o troco? E para as quantias de R\$17, 00, R\$19, 00 ou R\$13, 00? Explique como será feito o pagamento para os casos em que seja possível.

Resposta

É possível pagar R$32, 00, para isso usamos quatro notas de R$7, 00 e uma de R$4, 00. Não é possível pagar R$17, 00, com as notas indicadas. Isso pode ser verificado por tentativas. Vejamos:

- Não podemos usar apenas notas de 4, pois 17 não é múltiplo de 4.
- Se usarmos uma nota de 7 irá restar 10 que não pode ser paga com apenas notas de 4 por aquele não ser múltiplo deste.
- Se usarmos duas notas de 7 irá sobrar 3 o que impossibilita o pagamento.
- E 3 notas de 7 ultrapassam os 17.

É possível pagar R$19, 00, para isso usamos uma notas de R$7, 00 e três de R$4, 00. Não é possível pagar R$13, 00, com as notas indicadas. Novamente verificamos isso por tentativas:

- Não podemos usar apenas notas de 4, pois 13 não é múltiplo de 4.
- Se usarmos uma nota de 7 irão sobrar 6 e este não é múltiplo de 4.
- Não podemos usar duas notas de 7, pois ultrapassam o valor de 13.

Verifique que, para valores iguais ou acima de R$18, 00, sempre é possível fazer o pagamento com notas de R$4, 00 e R$7, 00. Faça isso testando alguns valores começando em R$18, 00 e tente montar uma estratégia que permita observar esse fato.

Resposta

Esse número 18 foi obtido da seguinte forma: $(4-1).(7-1)$

Repare que, a partir das quantias 18, 19, 20 e 21, todos os demais valores podem ser obtidos somando um múltiplo de 4 a cada um desses valores, de forma que não iremos mais precisar da nota 7.

$$\begin{aligned}
22 &= 18+4 = 1\cdot 4+2\cdot 7+4 = 2\cdot 4+2\cdot 7\\
23 &= 19+4 = 3\cdot 4+1\cdot 7+4 = 4\cdot 4+1\cdot 7\\
24 &= 20+4 = 5\cdot 4+0\cdot 7+4 = 6\cdot 4+0\cdot 7\\
25 &= 21+4 = 0\cdot 4+3\cdot 7+4 = 1\cdot 4+3\cdot 7\\
26 &= 22+4 = 2\cdot 4+2\cdot 7+4 = 3\cdot 4+2\cdot 7
\end{aligned}$$

Tabela 2 – Cédulas necessárias

Número de cédulas necessárias		
Quantia (R$)	R$4, 00	R$7, 00
18	1	2
19	3	1
20	5	0
21	0	3
22	2	2
23	4	1
24	6	0
25	1	3
26	3	2
27	5	1
28	7	0
29	2	3
30	4	2

Fonte: o autor.

E com notas de R$3, 00 e R$11, 00, podemos fazer o pagamento de R$32, 00? E para as quantias de R$17, 00, R$21, 00 ou R$13, 00? Explique como será feito o pagamento para os casos em que seja possível.

Resposta

É possível pagar R$32, 00, para isso usamos uma nota de R$11, 00 e sete de R$3, 00. É possível pagar R$17, 00, para isso usamos uma nota de R$11, 00 e duas de R$3, 00. É possível pagar R$21, 00, para isso usamos sete notas de R$3, 00.

Não é possível pagar R$13, 00, com as notas indicadas. Vejamos:

- Não podemos usar apenas notas de 3, pois 13 não é múltiplo de 3.
- Se usarmos uma nota de de 11 irão sobrar 2, que não pode ser pago.
- Se usarmos duas notas de 11 irão ultrapassar o valor de 13.

Vamos determinar aquele número para os quais os valores iguais ou acima dele são pagáveis:

$$(3 - 1).(11 - 1) = 2.10 = 20$$

Mostre que para valores iguais ou acima de R$20, 00 sempre seja possível fazer o pagamento com notas de R$3, 00 e R$11, 00. Verifique também que não seja possível fazer o pagamento do valor antecessor ao 20. (R$19, 00).

Tabela 3 – Cédulas necessárias

Número de cédulas necessárias		
Quantia (R$)	R$3,00	R$11,00
20	3	1
21	7	0
22	0	2
23	4	1
24	8	0
25	1	2
26	5	1
27	9	0
28	2	2
29	6	1
30	10	0
31	3	2
32	7	1

Fonte: o autor.

Resposta

De fato não é possível fazer o pagamento de R$19,00 com notas de R$3,00 e R$11,00. Vejamos:

- Não podemos usar apenas notas de 3, pois 19 não é múltiplo de 3.
- Se usarmos uma nota de 11 irão sobrar 8, que não é múltiplo de 3.
- Se usarmos duas notas de 11 irão ultrapassar o valor de 19.

Podemos garantir que TODOS os valores iguais ou acima de 20 podem ser pagos, mostrando que qualquer valor acima de 22 pode ser pago da mesma forma que os valores 20, 21 e 22 mais um acréscimo de um múltiplo de 3.

Agora é com você!

Descubra qual o menor valor para o qual sempre é possível fazer o pagamento sem troco dele, ou acima dele, com notas de R$5,00 e R$9,00.

4.31 Os 35 camelos

Pré Requisito: Conceito de fração e adição com frações.

Este problema é baseado em uma passagem do livro *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan.

Nesta passagem, Beremiz – o homem que calculava – e seu colega de jornada encontraram três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmão – esclareceu o mais velho – e recebemos como heranças esses 35 camelos. Segundo vontade de nosso pai devo receber a metade; o meu irmão Hamed, uma terça parte; o mais moço, Harin, deve receber apenas a nona parte do lote de camelos.

Contudo, não sabemos como realizar a partilha, visto que a mesma não é exata.

- É muito simples – falou o Homem que Calculava. Encarrego-me de realizar, com justiça, a divisão se me permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal, pertencente a meu amigo de jornada, que nos trouxe até aqui.

E, assim foi feito.

- Agora – disse Beremiz – de posse dos 36 camelos, farei a divisão justa e exata.

Voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber a metade de 35, ou seja, $17,5$. Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, ou seja, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação. Por fim, disse ao mais novo:

- Tu, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, ou seja, 4. Teu lucro foi igualmente notável.

E, concluiu com segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão realizada, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo, e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence a meu amigo de jornada. O outro cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

Agora o problema: Qual a explicação matemática para a partilha realizada por

Beremiz, de tal forma que, além de conceder vantagens aos irmãos, ainda fez sobrar um camelo para si?

Resposta

O ponto central aqui é que a partilha feita pelo pai não foi correta, pois não dividiu toda a herança entre os filhos, ficando uma parte sem ser dividida, parte essa percebida por Beremiz. Vejamos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

Ou seja, faltou $\frac{1}{18}$ da herança para ser dividido. Como haviam 35 camelos, Beremiz percebeu que se juntasse mais um camelo a essa herança, a parte que ficaria de fora da partilha da herança seriam dois camelos (um dezoito avos de 36 camelos são 2 camelos).

4.32 A jangada

Helena e Gabriel pulam simultaneamente de uma jangada em um rio em direções opostas. Gabriel nada rio abaixo seguindo a corrente a determinada velocidade e Helena nada rio acima contra a corrente, possivelmente numa velocidade diferente. Depois de 5 minutos, eles viram e voltam para a jangada, cada um mantendo uma velocidade constante durante todo o tempo. Quem chega primeiro?

Resposta

As crianças chegarão simultaneamente cinco minutos depois da virada. Para isso, basta mudar o referencial para o rio, pois este afeta igualmente todos os objetos contidos nele, movendo-os rio abaixo a velocidade da correnteza e, assim, podemos observar que o tempo de ida será igual ao tempo de retorno.

Podemos verificar essa resposta supondo velocidades ao barco, a Gabriel e a Helena. Mesmo fazendo apenas um caso particular, isso é válido, pois o problema faz uma afirmação genérica. Ou seja, serve para todos os casos, então irá se verificar neste em particular.

Por exemplo, vamos supor a velocidade do barco de 1 metro por minuto (1m/min), a de Helena 3 m/min e a de Gabriel 2 m/min.

Sendo assim, após 5 minutos:

- o barco terá se deslocado 5 metros rio abaixo (sentido da correnteza).

- Helena terá se deslocado 10 metros rio acima (sentido contra a correnteza), estando 15 metros de distância do barco.
- Gabriel terá se deslocado 15 metros rio abaixo, estando 10 metros de distância do barco.

Após a virada, teremos:

Tabela 4 – Distâncias após a virada

Tempo após a virada (minutos)	**Distância (Gabriel/Barco)**	**Distância (Helena/Barco)**
0	10	15
1	8	12
2	6	9
3	4	6
4	2	3
5	0	0

Fonte: o autor.

Verificamos então que, 5 minutos após a virada, os dois chegam ao barco (distância zero).

4.33 Dragolândia

Na ilha encantada da Dragolândia, existem dragões de três tipos: verdes, azuis e rosas. Mais especificamente, 15 dragões verdes, 17 dragões azuis e 19 dragões rosas. Nessa ilha mágica, algo incomum ocorre, sempre que dois dragões de cores distintas se chocam, eles passam a ter sua cor diferente de ambos que se chocaram.

Dessa forma:

- Se um dragão azul se chocar com um verde, ambos se tornarão rosas.
- Se um dragão rosa se chocar com um azul, ambos se tornarão verdes.
- Se um dragão verde se chocar com um rosa, ambos se tornarão azuis.

É possível que depois de certo tempo, com os dragões se chocando entre si, só restem dragões de uma mesma cor?

Resposta

Sejam x, y e z os números de dragões verdes, azuis e rosas, respectivamente. De acordo com a operação descrita no enunciado, a tripla (x,y,z) irá se transformar em uma das triplas (x-1,y+2,z-1); (x-1,y-1,z+2) ou (x+2,y-1,z-1), de acordo com a cor dos dragões que se chocarem.

Observe que a diferença entre quaisquer duas coordenadas da tripla ou não muda, ou muda de $+3$ ou muda de -3. Para verificarmos isso vamos supor que a tripla (x,y,z) se transformou na tripla (x-1,y+2,z-1). A diferença entre quaisquer duas coordenadas está descrita abaixo:

$$\begin{gathered}
(x-1)-(y+2)=(x-y)-3\\
(x-1)-(z-1)=x-z\\
(y+2)-(z-1)=(y-z)+3\\
(y+2)-(x-1)=(y-x)+3\\
(z-1)-(x-1)=z-x\\
(z-1)-(y+2)=(z-y)-3
\end{gathered}$$

Logo, o resto da divisão por 3 dessas diferenças não muda. No início temos:

- y-x=17-15=2 (resto 2 na divisão por três, $2 = 3 \cdot 0 + 2$) e para que todos os dragões sejam da cor rosa teríamos que ter y-x=0-0=0 (resto zero na divisão por três, $0 = 3 \cdot 0 + 0$): o que é impossível.

- z-x=19-15=4 (resto 1 na divisão por três, $4 = 3 \cdot 1 + 1$) e para que todos os dragões sejam da cor azul teríamos que ter z-x=0-0=0 (resto zero na divisão por três, $0 = 3 \cdot 0 + 0$): o que é impossível.

- z-y=19-17=2 (resto 2 na divisão por três, $2 = 3 \cdot 0 + 2$) e para que todos os dragões sejam da cor verde teríamos que ter z-y=0-0=0 (resto zero na divisão por três, $0 = 3 \cdot 0 + 0$): o que é impossível.

Concluímos então que não seja possível restarem dragões de apenas uma cor.

4.34 Quantos reis?

Qual o maior número de reis que podem ser colocados em um tabuleiro de xadrez de modo que nenhum deles esteja em cheque?

Resposta

O tabuleiro possui dimensões 8 x 8 casas (64 posições ao todo) e o rei consegue se mover uma posição em qualquer direção e sentido. Xeque ocorre quando um rei é ameaçado, nesta questão, um rei só será ameaçado por outro. Então, um rei assume uma posição, dessa forma ele impede que outro rei assuma outras 9 posições (a posição que ele ocupa, mais oito dos arredores), para que não ocorra o xeque. Isso, exceto quando o rei está numa posição de borda. Nesse caso, três (ou até mesmo seis) posições não existirão. Com o intuito de colocar o maior número de reis possível no tabuleiro, devemos posicioná-los de modo a estarem o mais próximo possível uns dos outros. Para isso, cada rei deve ser disposto no limite do alcance do próximo. Sendo assim, deve ser colocado um rei e então pulamos uma casa na linha e colocamos outro, saltamos outra casa e impomos o terceiro rei e assim por diante. Contudo, cada rei pode tomar qualquer posição na linha superior: o que faz com que na segunda linha não haja nenhum rei. A partir daí, a terceira linha faz-se de modo análogo à primeira linha. Logo:

$$N_{reis} = 4 + 4 + 4 + 4 \Rightarrow N_{reis} = 16 \text{ reis}$$

4.35 Quantos zeros?

Após resolver o produto abaixo, irão aparecer quantos zeros?

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$$

Resposta

Uma estratégia eficaz é contarmos quantos 5 temos nesse produto fatorado em primos, isso porque, cada zero que irá aparecer no resultado final vem de um produto $2 \cdot 5$, sendo que o 5 aparece uma quantidade menor de vezes em relação ao 2. Devemos tomar cuidado na hora de fazer essa contagem pois o 5 aparece 1 vez em alguns fatores, como por exemplo na fatoração dos números $5, 10, 15, \cdots$ e duas vezes na fatoração dos números $25, 50, 75, \cdots$. Então vamos primeiro contar quantas vezes o 5 irá aparecer uma vez em cada fator e então somar o fator extra no caso dos múltiplos de 25. Desta forma, teremos:

$$100 \div 5 + 100 \div 25 = 20 + 4 = 24$$

Sendo assim, descobrimos que o produto terá 24 zeros.

5 O Princípio da Casa de Pombos (P.C.P.)

5.1 Enunciado do princípio da casa de pombos ou Teorema de Dirichlet

Se temos uma quantidade de pombos maior que o número de casas de pombos, então pelo menos uma dessas casas irá conter pelo menos dois pombos.

Demonstração

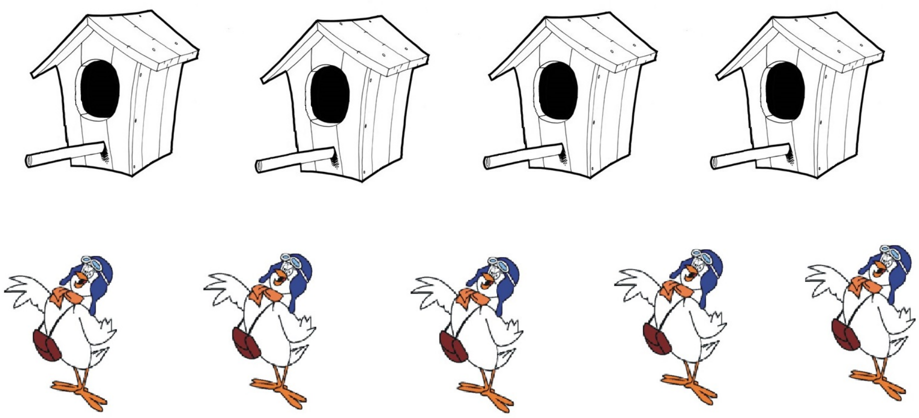
Dados N+1 pombos ou mais e N casas de pombos, vamos provar que alguma das casas vai ter dois ou mais pombos.

De fato, suponho por absurdo que não tem mais de um pombo em cada casa, assim teríamos N pombos ao total, o que é uma contradição, já que temos N+1 ou mais pombos na hipótese. Dessa forma, alguma das casas deve conter mais de um pombo, ou seja, dois ou mais pombos.

Exemplo

Imagine que temos 5 pombos e 4 casas.

Figura 36 – Casas e pombos



Fonte: o autor.

Se cada casa for ocupada por um único pombo, um deles ficará sem casa. Sendo assim, para que TODOS os pombos fiquem nas casas, uma delas deverá conter pelo menos dois pombos.

Nas subseções seguintes irei apresentar e resolver alguns problemas.

5.1.1 Meias na gaveta

Uma gaveta contém meias de duas cores: branca e preta. Qual o menor número de meias que precisam ser retiradas da gaveta, sem olhar, de modo que possamos garantir que temos um par de meias da mesma cor?

Resposta

Casas: uma casa da cor branca e outra da cor preta que receberão meias de suas respectivas cores. Pombos: as meias.

O primeiro pombo (meia) a ser retirado da gaveta irá para uma das duas casas. Ao retirarmos o segundo pombo, esse poderá ir para a casa já ocupada ou para a que ainda está vazia. Como não queremos depender da sorte, digamos que o segundo pombo seja de cor diferente do primeiro, assim ele ocupará a segunda casa; agora, na terceira retirada, esse pombo terá que ocupar uma das casas já ocupadas, pois temos duas casas e três pombos, nos garantindo um par de meias de mesma cor. Temos então que o menor número procurado é três.

5.1.2 A floresta

Uma floresta tem um milhão de pinheiros. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 espinhos. Mostre que pelo menos dois pinheiros na floresta têm que ter o mesmo número de espinhos.

Resposta

Casas: os números de espinhos das árvores (de 0 a 600.000), ou seja, 600.001 casas. Pombos: os pinheiros.

Colocamos cada "pombo"(pinheiro) na casa de pombo numerada de acordo com o número de espinhos na árvore. Como existem mais "pombos"do que casas, pelo menos dois "pombos"têm que estar na mesma casa: caso contrário, não poderia haver mais de 600.001 "pombos". Mas, se dois "pombos"estão na mesma casa, isso significa que eles têm o mesmo número de espinhos.

5.1.3 Aniversário

Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que duas, entre elas, fazem aniversário no mesmo mês?

Resposta

Casas: os 12 meses do ano (Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho, Julho, Agosto, Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro). Pombos: 13 pessoas.

Associando cada pessoa ao seu mês de nascimento, pelo P.C.P. temos 12 casas e 13 "pombos", então pelo menos uma das casas receberá dois pombos, ou seja, um dos meses terá pelo menos dois aniversariantes.

5.1.4 A moradia

Quantas pessoas, no mínimo, devem morar numa casa com 7 quartos para garantirmos que pelo menos duas dormem num mesmo quarto?

Resposta

Casas: os quartos. Pombos: as pessoas.

Como temos 7 casas (os quartos), é suficiente o número de 8 pessoas para garantirmos com a ajuda do P.C.P. que em um dos quartos irão dormir pelo menos duas pessoas.

5.1.5 Bolinhas de Gude

Uma sacola contém bolinhas de gude de 3 cores (azul, vermelha e amarela). Qual o menor número de bolinhas que devemos retirar dessa sacola para garantirmos que temos duas bolinhas de gude de mesma cor?

Resposta

Casas: uma caixa azul, uma caixa vermelha e uma caixa amarela. Pombos: As bolinhas de gude.

Retiramos 4 bolinhas de gude (pombos) da sacola e vamos colocar cada uma em sua respectiva caixa (casa), pelo P.C.P. teremos pelo menos duas bolinhas em uma mesma casa. Sendo assim, duas bolinhas de gude de mesma cor.

5.1.6 Diferença entre doze naturais

Dados doze naturais, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

Resposta

Casas: os possíveis restos da divisão desses números por 11. ou seja, $0, 1, 2, 3, ..., 10$. Pombos: os doze inteiros dados.

Como são 11 casas e 12 pombos, pelo PCP teremos dois pombos em uma mesma casa, ou seja, dois números naturais que ao serem divididos por 11 terão o mesmo resto. Escolhendo estes dois números, a sua diferença será divisível por 11. Para verificar isso, vamos denominar de A o primeiro número e B o segundo. Dessa forma, $A = 11q + r_1$ e $B = 11Q + r_2$, onde $r_1 = r_2$. Fazendo a diferença entre esses dois naturais, temos:

$$A - B = 11q + r_1 - 11Q - r_2 = 11q - 11Q = 11(q - Q)$$

Concluímos assim, que a diferença $A - B$ é divisível por 11.

5.1.7 Mesa redonda

Cem pessoas estão sentadas em volta de uma mesa redonda e mais da metade delas são homens. Prove que dois dos homens estão sentados diametralmente opostos um ao outro.

Resposta

Casas: 50 pares de pessoas. Pombos: O número de homens.

Divida todas as pessoas em 50 pares, de modo que as pessoas, em cada par, estejam sentadas diametralmente opostas uma à outra. Considere esses pares como sendo as casas de pombos e como pombos o número de homens. Pelo PCP, como mais de 50 pessoas são homens, um dos pares terá que incluir mais de um homem.

5.1.8 Leningrado

A cidade de Leningrado tem cinco milhões de habitantes. Sabendo que nenhuma pessoa tem mais de um milhão de cabelos em sua cabeça, mostre que pelo menos dois dos habitantes têm que ter o mesmo número de cabelos em sua cabeça.

Resposta

Casas: o número de cabelos nas cabeças das pessoas (de 1 até 1.000.000). Pombos: o número de habitantes da cidade.

Pelo PCP, pelo menos dois habitantes terão o mesmo número de cabelos em sua cabeça.

5.1.9 As notas

Quantos alunos devemos ter em uma sala para garantirmos que dois obtiveram a mesma nota em um exame de 0 a 100, onde são válidos apenas números naturais para serem exprimidas as notas dos alunos.

Resposta

Casas: são as notas de 0 a 100, ou seja, teremos 101 casas ao todo, a casa da nota 0, a casa da nota 1, a casa da nota 2, a casa da nota 3, e assim por diante até a casa da nota 100. Pombos: os alunos.

Cada "pombo"(aluno) ocupará a casa de número igual a sua nota. Sendo assim e para garantirmos, pelo P.C.P., que dois alunos tiveram a mesma nota, é necessário que haja 102 alunos nessa sala.

5.1.10 Os amigos

Mostre que, em qualquer grupo de cinco pessoas, duas delas têm o mesmo número de amigos no grupo.

Resposta

Casas: a quantidade de amigos, teremos uma casa para a quantidade 0, uma casa para a quantidade 1, uma casa para a quantidade dois e assim por diante até a casa para a quantidade 4. Repare que não podemos ter a casa 0 e a casa 4 ao mesmo tempo, pois se alguém do grupo não tiver nenhum amigo isso significa também que ninguém poderá ter 4 amigos e vice versa. Sendo assim teremos 4 casas apenas, de 0 a 3 ou de 1 a 4. Pombos: as pessoas.

Como temos 5 pombos e 4 casas, podemos garantir pelo princípio da casa de pombos que em uma das casas haverá pelo menos dois pombos. Sendo assim, teremos pelo menos duas pessoas com o mesmo número de amigos.

5.1.11 Aniversariantes

Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que duas entre elas fazem aniversário no mesmo mês?

Resposta

Casas: Meses do ano (12). Pombos: Pessoas (13).

Vamos associar cada pessoa ao seu mês de nascimento. Pelo Princípio das Casas de Pombos, como temos 12 casas e 13 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos. Ou seja, um dos meses terá dois aniversariantes.

5.1.12 Times de futebol

Diversos times de futebol jogam em um torneio onde cada time tem que jogar com todos os outros, exatamente uma vez. Mostre que, em qualquer instante do torneio, dois times terão jogado, até este instante, o mesmo número de jogos.

Resposta

Casas: possíveis números de jogos até certo instante de um time, ou seja, $0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n-$ 1. Pombos: n times.

Neste caso, para n times temos que a cada instante cada time jogou com 0, 1, 2, ... n-1 times (n números possíveis no total, já que um time não pode jogar com ele mesmo). Se algum time já jogou com todos os times restantes, os nºs de jogos de cada time ficam reduzidos a n-1 possibilidades (1, 2, ..., n-1) e, portanto, pelo PCP, haverá dois times com o mesmo nº de jogos. Caso contrário, os nºs de jogos de cada time também ficam reduzidas a n-1 possibilidades (0,1,2,..., n-2) e temos, pois, a mesma conclusão.

5.1.13 Somas na tabela

Observação: Este problema trabalha com números inteiros, então deve ser aplicado a partir do 7° ano.

Cada célula em uma tabela 3x3 está preenchida com um dos números -1, 0, 1. Prove que, entre as oito somas possíveis ao longo das linhas, colunas e diagonais, duas delas têm que ser iguais.

Resposta

Casas: as sete somas possíveis entre esses inteiros $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$. Pombos: as oito somas possíveis ao longo das linhas, colunas e diagonais.

Realizando todas as somas com as três parcelas $-1, 0e1$,encontramos sete somas: $-3. - 2. - 1.0.1.2.3$. Pelo PCP, pelo menos duas somas das sete se repetirão.

5.2 Enunciado do Princípio Geral das Casas de Pombos

Se precisarmos colocar $N \cdot K + 1$ ou mais pombos em N casas, então alguma casa terá que conter pelo menos $k + 1$ pombos.

De fato, se dispuséssemos em cada casa k pombos, teríamos nk pombos nas n casas, o que deixaria 1 ou mais pombos sem casas. Dessa forma seria necessário que pelo menos uma das casas contivesse $k + 1$ pombos.

Nas subseções seguintes irei apresentar e resolver alguns problemas.

5.2.1 Engradados de maçãs

Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. Elas são de três tipos diferentes, mas todas as de cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove dos engradados contêm o mesmo tipo de maçãs.

Resposta

Casas: tipos de maças. Pombos: Os engradados.

Podemos colocar 8 engradados em cada casa totalizando 24 engradados sendo 8 de cada tipo e o próximo engradado terá que ser necessariamente de um dos tipos. Assim, mostramos que pelo menos 9 dos engradados são do mesmo tipo.

5.2.2 No mesmo mês

O número mínimo de pessoas em um grupo para que se garanta que, necessariamente, haja 7 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano é:
a) 73
b) 83
c) 13
d) 43
e) 23

Resposta

Casas (N): os meses do ano. Pombos (K): As pessoas.

Temos 12 casas ($N = 12$) e queremos que pelo menos 7 "pombos"estejam na mesma casa, então ($K + 1 = 7$), e dessa forma temos que ($K = 6$), assim, $6 \cdot 12 + 1 = 73$. Ou seja, o número mínimo de pessoas é 73, letra A.

5.2.3 Mesmo signo

Mostre que, em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo.

Resposta

Casas (N): os 12 signos (Virgem, Libra, Escorpião, Sagitário, Capricórnio, Aquário, Peixes, Áries, Touro, Gêmeos, Câncer e Leão). Pombos (K): as 40 pessoas.

Vamos associar cada pessoa a um signo. Como $40 = 3 \cdot 12 + 4$, temos $12 \cdot 3 + 4$ pombos e 12 casas. Pelo PCP, pelo menos uma das casas receberá, no mínimo, 4 $(3 + 1)$ pessoas. Ou seja, 4 pessoas têm o mesmo signo.

5.2.4 Caixas de laranjas

Um agricultor possui quatro caixas para guardar suas laranjas. Quantas laranjas ele deve ter para que pelo menos em uma das caixas tenha 3 laranjas?

Resposta

Casas: as quatro caixas. Pombos: as laranjas.

Se colocarmos dois pombos em cada uma das casas disponíveis, teremos o total de 8 pombos nas casas. Então, basta colocarmos um pombo a mais (9 laranjas) para podermos garantir pelo PCP que teremos pelo menos 3 laranjas em uma das casas.

6 Paridade

6.1 Teorema da divisão euclidiana

Dados dois números naturais a, b sendo $b \neq 0$, sempre existem e são únicos os números naturais q e r tais que

$$a = qb + r \text{ e } 0 \leq r < b$$

Definição: Nas condições do teorema anterior, os números q e r são chamados, respectivamente, o quociente e o resto da divisão (euclidiana) de a por b, e os números a e b são chamados, respectivamente, de dividendo e divisor dessa Divisão Euclidiana.

Exemplo: Dados os naturais 42 e 5, temos:

$$42 = 8 \cdot 5 + 2, \text{ com } 2 < 5$$

Onde: 42 é o dividendo, 8 é o quociente, 5 é o divisor e 2 é o resto.

6.2 Enunciado sobre paridade

Chamamos de números pares os inteiros $\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots$ ou seja, a todos os inteiros da forma $2K$, onde k é algum inteiro. Semelhantemente, chamamos de números ímpares os inteiros $\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots$, ou seja, a todos os inteiros da forma $2k + 1$, onde k é algum número inteiro.

Observação: para o 6° ano, é necessário alterar o conjunto dos números inteiros para os naturais no enunciado acima e nos teoremas e definições que seguem, pois esse conteúdo (inteiros) só será visto no 7° ano. Irei sublinhar onde será necessário fazer essa alteração ou mesmo a retirada de todo o texto sublinhado.

6.2.1 Teorema 1

Cada número <u>inteiro</u> é ou PAR ou ÍMPAR. Consequentemente, o conjunto dos números <u>inteiros</u> fica particionado em dois subconjuntos: o dos números pares e o dos números ímpares.

Prova

Dado um número <u>inteiro</u> n, dividindo por 2 (divisão Euclidiana), temos: $n = 2q + r$, para algum <u>inteiro</u> q e onde $0 \leq r < 2$. Logo, ou $r = 0$ e ficamos com $n = 2q$ (par), ou $r = 1$ e ficamos com $n = 2q + 1$ (ímpar).

6.2.2 Definição 1

Dizemos que dois <u>inteiros</u> têm a mesma paridade quando, e só quando, ou ambos forem pares, ou ambos forem ímpares.

Exemplos

Zero é PAR, pois 0=2x0
7 é ÍMPAR, pois 7=2x3+1

6.2.3 Teorema 2 (expansão decimal)

Dado um número <u>inteiro</u> n, representado no sistema decimal:

n é PAR quando, e só quando, sua expansão decimal terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.
n é ÍMPAR quando, e só quando, sua expansão decimal terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9.

Provas

Seja, $N = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0$ com $0 \leq a_i \leq 9$ onde $i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$

(i) Se n é par, então a_0 é igual a 0, 2, 4, 6 ou 8.

De fato, se N é PAR então N=2k, para algum número natural k.
Assim podemos escrver, $a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 = 2k$, logo,
$a_0 = 2k - 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_1) = 2\left(k - 5\left(2a_n 10^{n-1} + \cdots + 2a_1\right)\right) = 2k'$,onde
$k' = \left(k - 5\left(2a_n 10^{n-1} + \cdots + 2a_1\right)\right)$ e portanto,a_0 é par. Como a_0 é par e $0 \leq a_i \leq 9$, então a_0 é igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8.

(ii) Se a_0 é igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8, então N é par.

De fato, se a_0 é igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8, então a_0 é par e portanto $a_0 = 2k$, para algum número natural k.
Assim, $N = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + 2k$, colocando o 2 em evidência, temos: $N = 2\left(2^{n-1} 5^n a_n + \cdots + 5a_1 + k\right) = 2k'$, onde $k' = 2^{n-1} 5^n a_n + \cdots + 5a_1 + k$ e portanto N é par.

6.2.4 Teorema 3 (paridade de somas)

Antes de mais nada, observe que toda diferença de inteiros pode ser vista como uma soma. Exemplo: $5 - 2 = 5 + (-2)$.

$$\text{Par} + \text{Par} = \text{Par}.$$
$$\text{Par} + \text{Ímpar} = \text{Ímpar}.$$
$$\text{Ímpar} + \text{Ímpar} = \text{Par}.$$

Provas

Caso: Par + Par

Vamos escrever um desses números pares como 2Q e o outro como 2q.
Queremos então provar que 2Q + 2q é um número par.
De fato, 2Q + 2q = 2 (Q + q) (par).

Caso: par + Ímpar
Vamos escrever o número par como 2Q e o ímpar como 2q+1.
Queremos então provar que 2Q + 2q+1 é um número ímpar.
De fato, 2Q + 2q+1 = 2(Q+q)+1 (ímpar).

Caso: ímpar + ímpar
Vamos escrever um desses números ímpares como 2Q+1 e o outro como 2q+1.
Queremos então provar que 2Q+1 + 2q+1 é um número par.
De fato, 2Q+1 + 2q+1 = 2(Q+q)+1+1 = 2(Q+q)+2 = 2(Q+q+1) (par).

6.2.5 Teorema 4 (paridade de produtos)

$$\text{Par} \cdot \text{Par} = \text{Par}.$$
$$\text{Par} \cdot \text{Ímpar} = \text{Ímpar} \cdot \text{Par} = \text{Par}.$$
$$\text{Ímpar} \cdot \text{Ímpar} = \text{Ímpar}.$$

Provas

Caso: Par · Par
Vamos escrever um desses números pares como 2Q e o outro como 2q.
Queremos então provar que 2Q · 2q é um número Par.

De fato, 2Q x 2q = 2 (2 Q q) (par).

Caso: Par · Ímpar

Vamos escrever o número par como 2Q e o ímpar como 2q+1.
Queremos então provar que 2Q · (2q+1) é um número Par.
De fato, 2Q · (2q+1) = 4Qq+2Q = 2(2Qq+Q) (par).

Caso: Ímpar · Ímpar

Vamos escrever um desses números ímpares como 2Q+1 e o outro como 2q+1.
Queremos então provar que (2Q+1) · (2q+1) é um número Ímpar.
De fato, (2Q+1) · (2q+1) = 4Qq+2Q+2q+1 = 2 (2Qq+Q+q)+1 (ímpar).

Nas subseções seguintes irei apresentar e resolver alguns problemas.

6.2.6 Encontrando números

É possível encontrar 3 números ímpares que a soma seja 10?

Resposta

Não, a soma de três números ímpares é um número ímpar e 10 é par.

6.2.7 Trocando notas

Podemos trocar uma nota de 25 reais usando dez notas que podem assumir os valores 1,3,5?

Resposta

Não. Como a soma de um número par de números ímpares é par (podemos verificar isso da seguinte forma: basta somar as dez notas de dois em dois e, como a soma de dois números ímpares é um número par, teremos 5 números pares. Ao somar estes 5 números pares, tere- mos um número par). A soma dessas 10 notas só pode ser um número par, mas 25 é ímpar.

6.2.8 Engrenagens

Temos cinco engrenagens colocadas abaixo. Todas as engrenagens podem rodar ao mesmo tempo?

Resposta

Não. As engrenagens só poderiam rodar ao mesmo tempo se estivessem em uma quantidade par para que os sentidos: horário e anti-horário, estejam intercalados fazendo que uma engrenagem gire a outra. Como a quantidade de engrenagens é ímpar isso não irá acontecer, já que duas engrenagens adjacentes terão o mesmo sentido.

6.2.9 Cadeia de dominós

Em um jogo de dominó tradicional, retirando as peça que contenham o zero é possível organizar uma única cadeia com as peças restantes?

Resposta

Não. Vamos demonstrar isso por absurdo. Se existisse tal cadeia, então um dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ não apareceria nas extremidades da cadeia. Suponha que o número 3 não aparece, mas, no interior da cadeia, o número 3 aparece em pares, de modo que ele esteja em um número par de vezes. Entretanto, com os "zeros"descartados, o conjunto conterá sete extremidades com 3 bolinhas ao todo. Isto é uma contradição. O mesmo argumento funciona para qualquer outro número que não esteja em uma das extremidades.

6.2.10 Folhas arrancadas

Wagner Numerou as 120 folhas de um caderno de 1 a 240. Ledo arrancou 13 folhas e somou os 26 números que encontrou. É possível que a soma desses 26 números seja 2016?

Resposta

Observamos que cada folha irá conter um número par e outro ímpar, assim, sua soma será um número ímpar.

Ao serem somados esses 13 números ímpares, o resultado será um número ímpar. Como 2016 é par, não é possível a soma ser 2016.

6.2.11 Moedas

Em um conjunto de 101 moedas, há 50 falsas e as demais são verdadeiras. Uma moeda falsa difere de uma verdadeira em 1 grama e Marcos tem uma balança que mostra a diferença de peso entre objetos colocados nos dois pratos. É possível, com uma pesagem, identificar se uma moeda escolhida é falsa?

Resposta

É possível, para isso retiramos uma das moedas e separamos as demais em duas pilhas de 50 moedas cada e colocamos cada uma dessas pilhas em um dos pratos da balança. Se a diferença registrada for um número PAR significa que a moeda retirada é VERDADEIRA caso a diferença registrada seja ÍMPAR a moeda retirada é FALSA.

6.2.12 Somando e subtraindo

(a) Os números de 1 a 3 estão escritos em cartões. É possível montar uma conta colocando sinais de "+"e -"na frente deles de forma que a conta dê 0? (b) E se fossem números de 1 a 4? (c) E se fossem números de 1 a 5?

Resposta

(a) Sim, por exemplo $1 + 2 - 3 = 0$.

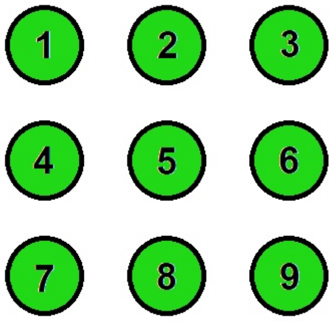
(b) Sim, por exemplo $4 + 1 - 2 - 3 = 0$.

(c) Não, pois temos 3 números ímpares (1, 3 e 5) o que irá resultar em uma soma ou diferença ímpar, visto que os demais números são pares só podemos conseguir uma soma ou diferença ímpar nessas condições.

6.2.13 Jogo dos botões

Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte forma:

Figura 37 – Jogo dos botões



Fonte: o autor.

Apertando o botão do centro (5), trocam de cor todos os seus 8 vizinhos, porém ele não. Apertando qualquer outro botão que não seja o do centro, trocam de cor o botão apertado e seus vizinhos (do lado ou em diagonal).

Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

Resposta

Podemos verificar isso da seguinte forma:

Se apertarmos um dos botões das quinas (1, 3, 7 ou 9) irão trocar de cor 4 botões.

Se apertarmos um dos botões laterais que não são quinas (2, 4, 6 ou 8) irão trocar de cor 6 botões.

Se apertarmos o botão do centro (5), irá trocar de cor 8 botões.

Sendo assim, sempre que apertarmos um botão qualquer irão trocar de cor uma quantidade PAR de botões. Como temos uma quantidade IMPAR de botões, não será possível trocar a cor de TODOS os botões.

6.2.14 Ponto médio natural

Dados 5 pontos de coordenadas naturais e os segmentos formados por quaisquer dois desses pontos, mostre que o ponto médio de um desses segmentos possui coordenadas naturais. O ponto médio do segmento será obtido através da média aritmética entre as abcissas e as ordenadas das suas extremidades.

Resposta

Vamos utilizar o PCP para resolver esse problema onde:

Pombos: são os cinco pontos de coordenadas naturais. Casas: quatro pares ordenados sendo: a 1ª casa com abcissa par e ordenada par (P, P), a 2ª casa com abcissa ímpar e ordenada par (I, P), a 3º casa com abcissa ímpar e ordenada ímpar (I, I) e a 4ª casa com abcissa par e ordenada ímpar (P, I).

A escolha dessas casas foram baseadas no fato de que para termos o ponto médio com coordenadas naturais a soma entre as abcissas das suas extremidades e a soma entre as ordenadas de suas extremidades precisam ser múltiplos de dois (isso porque serão divididos por 2).

Pelo PCP, podemos garantir que dois pontos terão abcissas de mesma paridade e ordenadas de mesma paridade. Dessa forma, a soma das abcissas e das ordenadas serão múltiplos de 2 (par), o que nos permite concluir que o ponto médio terá coordenadas naturais.

6.2.15 Marcianos

O único marciano sobrevivente relatou que, nos últimos tempos em Marte, apenas existiam 20 marcianos amarelos, 21 verdes e 22 azuis. Informou também que, quando dois marcianos de cores distintas se encontravam, fundiam-se transformando-se em um só marciano com a cor distinta da deles. Qual a cor do marciano sobrevivente?

Resposta

Imagine que 20 marcianos amarelos fundiram-se a 20 marcianos verdes resultando em 20 marcianos azuis. Então, temos agora apenas um marcianos verde e 42 marcianos azuis. Este marciano verde que restou irá se fundir a um dos azuis gerando um marciano amarelo que, por sua vez, fará o mesmo se fundindo e resultando em um verde e assim até terminarem os marcianos azuis. Para esta disposição, teremos que em quantidades pares de marcianos azuis haverá, como resultado da fusão, um marciano amarelo e em quantidades impares, um verde. Dessa forma, o último marciano azul irá se fundir ao último amarelo restando um ultimo marciano da cor VERDE.

Uma outra solução seria a seguinte:

Sejam x, y e z os números de marcianos amarelos, verdes e azuis respectivamente. De acordo com a operação descrita no enunciado, a tripla (x,y,z) irá se transformar em uma das triplas (x+1,y-1,z-1) ; (x-1,y+1,z-1) ou (x-1,y-1,z+1), de acordo com a cor dos marcianos que se encontrarem. Observe que a diferença entre quaisquer duas coordenadas da tripla ou não muda, ou muda de +2 ou muda de -2. Para verificarmos isso, vamos supor que a tripla (x,y,z) se transformou na tripla (x-1,y+1,z-1). A diferença entre qualquer duas coordenadas está descrita abaixo:

(x-1)-(y+1)=(x-y)-2
(x-1)-(z-1)=x-z
(y+1)-(z-1)=(y-z)+2
(y+1)-(x-1)=(y-x)+2
(z-1)-(x-1)=z-x
(z-1)-(y+1)=(z-y)-2

Logo, o resto da divisão por 2 dessas diferenças não muda, o que nos dá que essa diferença é sempre PAR ou sempre ÍMPAR.

No início temos: x-y=20-21=-1 (Ímpar) e para que o ultimo marciano seja da cor azul teríamos que ter x-y=0-0=0 (Par): o que é impossível. x-z=20-22=-2 (Par) e para que o último marciano seja da cor verde teríamos que ter x-z=0-0=0 (Par): o que é possível. y-z=21-22=-1 (Ímpar) e para que o último marciano seja da cor amarela teríamos que ter y-z=0-0=0 (Par): o que é impossível.

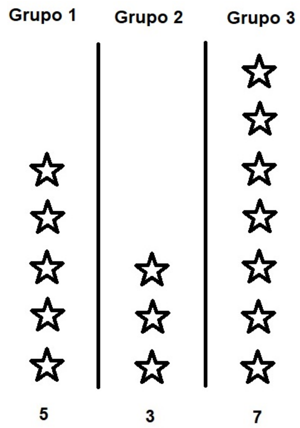
Temos então que o último marciano será da cor VERDE.

7 O Jogo de Nim

7.1 Conhecendo o jogo

O jogo consiste de uma certa quantidade de objetos separados em três grupos com números distintos de elementos. Abaixo na figura 36 um exemplo disso onde os objetos são estrelas, temos três grupos com 5, 3 e 7 objetos.

Figura 38 – Exemplo do jogo de Nim



Fonte: o autor.

Durante o jogo, dois jogadores se alternam retirando um número não nulo qualquer de objetos de apenas um dos grupos, podendo retirar inclusive todos os objetos do grupo escolhido. Ganha o jogador que fizer a última retirada de objetos.

7.2 Simulação

Vamos fazer uma simulação de uma possível partida entre Arthur e Chiely seguindo a configuração inicial apresentada na figura 38.

Para facilitar a compreensão, vamos utilizar a seguinte notação para representar em cada etapa o número de objetos em cada grupo:

$$(g_1, g_2, g_3)$$

Onde g_1 é o número de objetos no primeiro grupo, g_2 é o número de objetos do segundo grupo e g_3 o número de objetos do terceiro grupo.

Dessa forma, a configuração inicial será escrita da seguinte forma:

$$(5, 3, 7)$$

Arthur começará o jogo retirando um objeto do grupo 3, então Chiely vai retirar um objeto do primeiro grupo, e os dois jogadores vão se revezando ao fazerem suas retiradas. Observe:

$$(5,3,7) \Rightarrow (5,3,6) \Rightarrow (4,3,6) \Rightarrow (4,2,6) \Rightarrow (0,2,6) \Rightarrow (0,2,2) \Rightarrow (0,1,2) \Rightarrow (0,1,1) \Rightarrow (0,0,1) \Rightarrow (0,0,0)$$

Nessa partida, Arthur venceu, pois fez a última retirada.

A primeira jogada de Arthur, bem como as seguintes, não foram aleatórias, ele seguiu uma estratégia vencedora que irei descrever a seguir:

Em sua vez de jogar, ele quebrou o número de objetos de cada grupo em potências de 2 $(1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, 32 = 2^5, \cdots)$ da seguinte forma:

Grupo	Objetos	Potências de 2
1	5	$4+1$
2	3	$2+1$
3	7	$4+2+1$

Fonte: o autor.

Determinou então a quantidade de vezes que cada potência distinta de dois apareceu: o 4, **duas** vezes; o 2, **duas** vezes; o 1, **três** vezes. Vamos escrever essa contagem da seguinte forma $[2, 2, 3]$, observe que as quantidades estão organizadas em ordem decrescente em relação as potências e chamaremos isso de **chave**.

Exemplo, para o instante em que as quantidade de objetos são $(4, 3, 6)$, a chave será $[2, 2, 1]$, pois o 4 aparece **duas** vezes; o 2, **duas** vezes e o 1, **uma** vez. Agora, para uma situação onde tenhamos $(15, 20, 13)$, a chave será $[1, 2, 3, 1, 2]$ pois o 16 aparece **uma** vez; o 8, **duas** vezes; o 4, **três** vezes; o 2, **uma** vez e o 1, **duas** vezes.

Agora ele fez uma retirada de forma a deixar a chave toda par e chamaremos essa ação de "retirada boa", caso faça uma retirada em que isso não ocorra, chamaremos de "retirada ruim".

Como existe apenas um valor ímpar na chave referente à potência $1 = 2^0$, ele retirou 1 objeto em um dos grupos que possuía essa potência. Assim, todos os números da chave agora são pares, fazendo desta jogada uma "retirada boa".

Como agora a chave só possui números pares, qualquer que seja a jogada de Chiely, pelo menos a quantidade de um dos valores da chave se tornará ímpar, fazendo desta uma "jogada ruim"(isto pode ser verificado com análise de todas as possibilidades possíveis).

A partir de agora, basta Arthur realizar o procedimento inicial para realizar uma "retirada boa", forçando Chiely a realizar uma "retirada ruim", e assim, sucessivamente. Esse processo levará Arthur à vitória, pois a configuração final é [0, 0, 0], o que indica que a última retirada foi uma "retirada boa", que é feita neste caso sempre pelo Arthur.

Vale a pena observar que, caso a configuração inicial do jogo apresente uma chave toda par, o vencedor será o segundo jogador, vide o procedimento descrito acima. Um exemplo é a configuração (14, 5, 11), cuja chave é [2, 2, 2, 2].

7.3 Retirada boa

Em uma chave onde pelo menos um de seus elementos é ímpar, sempre é possível realizar uma "retirada boa".

Para a prova, vamos verificar qual a maior potência cuja contagem na chave é ímpar. Ela sempre existirá, pois nossa chave possui pelo menos um elemento ímpar por hipótese. Digamos que 2^k seja esta potência, agora vamos escolher um grupo onde ela apareça. Então retiramos um valor, que chamarei de "**valor de concerto**", que faça a paridade de todas as potências de dois se tornarem pares. Tal "valor de concerto"será obtido da seguinte maneira: somamos todas as potências de paridade ímpar do grupo escolhido e, dessa soma, subtraímos todas as potências de paridade ímpar que não estão presentes no grupo.

Ao escolher a maior potência de paridade ímpar na chave, temos duas situações possíveis: ou ela é a única de paridade ímpar na chave ou existem outras potências menores de paridade ímpar. No primeiro caso, ao retirar determinada potência conseguimos deixar a chave toda par, realizando assim uma "retirada boa". Para o segundo caso, as potências de paridade ímpar serão menores do que 2^k. Isso, porque qualquer potência de dois pode ser escrita como a soma de todas as menores potências naturais de dois mais 1: o que nos garante poder "concertar"a paridade dessas menores potências.

Por exemplo, imagina que nossa maior potência seja $32 = 2^5$, e que vamos precisar concertar a paridade das potências 2^3 e 2^1. Vamos verificar que essa maior potência pode ser escrita como soma de todas as menores potências de dois mais 1 da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
2^5 &= 2 \cdot 2^4 = 2^4 + 2^4 = 2^4 + 2 \cdot 2^3 = 2^4 + 2^3 + 2^3 = 2^4 + 2^3 + 2 \cdot 2^2 = \\
&= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 \cdot 2^1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^1 = \\
&= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2 \cdot 2^0 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^0
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$2^5 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1$$

E assim, para deixar a chave toda com paridade par, basta "concertar"essas menores potências através da retirada do "valor de concerto", garantindo assim uma "retirada boa".

7.4 Após uma retirada boa só é possível realizar uma retirada ruim

Após uma "retirada boa", a chave se torna toda par, ao retirarmos qualquer número estamos mudando a paridade de pelo menos um dos valores da chave. Basta perceber que qualquer número que se retire pode ser escrito como uma soma de potências únicas de dois. Ou seja, estaremos mudando a paridade de um ou mais valores da chave, visto que iremos reduzir 1 ou aumentar 1 em cada contagem: o que nos garante ter realizado uma "retirada ruim".

7.5 Vitória garantida para o primeiro jogador

No jogo de Nim, quando a configuração inicial apresenta apenas números ímpares (I, I, I), vence sempre o primeiro jogador que realizar "retiradas boas".

De fato, como as três quantidades são números ímpares, há de que pelo menos uma das potências de dois apresentar paridade ímpar, pois o 1 (2^0) estará em todos os grupos e, com isso, o primeiro jogador poderá realizar uma "retirada boa"obrigando o segundo jogador a realizar uma "retirada ruim"e, no caso do primeiro jogador, na sua vez de jogar, sempre realizar uma "retirada boa", isso garantirá a sua vitória, já que a chave final do jogo tem paridade toda par. Ou seja, o que aconteceu após uma "retirada boa".

Como exemplo, vamos imaginar um jogo de Nim com a seguinte configuração inicial: $(7, 5, 13)$.

Agora vamos mostrar que o primeiro jogador irá vencer caso faça sempre "retiradas boas".

Qual será a "retirada boa"do primeiro jogador no início do jogo?

Primeiro vamos transformar as quantidades em potências únicas de dois:

Grupo	Objetos	Potências de 2
1	7	$4+2+1$
2	5	$4+1$
3	13	$8+4+1$

Fonte: o autor.

A chave para esta configuração inicial será $[1, 3, 2, 3]$, com a maior potência de dois, cuja paridade na contagem da chave é ímpar, igual a 8.

Como esta potência está no grupo 3, vamos descobrir qual o "**valor de concerto**"que devemos fazer neste grupo. Para isso, somamos todas as potências de paridade ímpar do grupo $(8 + 4 + 1 = 13)$ e então subtraímos todas as menores potências ímpares que não estão neste grupo $(13 - 2 = 11)$, descobrindo assim o "valor de concerto"que é o 11.

Com isso, o primeiro jogador realizou uma "retirada boa".

Só resta ao segundo jogador, agora, realizar um "retirada ruim"como já explicado anteriormente.

Basta agora o primeiro jogador repetir o processo das "retiradas boas"na sua vez de jogar para garantir a sua vitória.

Vamos ver agora uma "retirada boa"durante o jogo, já tendo sido feito alguns lances. Vamos supor a configuração $(27, 31, 28)$.

Obtendo as potências de 2 de cada grupo:

Grupo	Objetos	Potências de 2
1	27	$16 + 8 + 2 + 1$
2	31	$16 + 8 + 4 + 2 + 1$
3	28	$16 + 8 + 4$

Fonte: o autor.

A chave para esta configuração é $[3, 3, 2, 2, 2]$ e a maior potência será o 16.

Como a maior potência está em todos os grupos, vamos escolher um grupo qualquer. Por exemplo, o grupo 3 e calcular o "valor de concerto"para este grupo.

Valor de concerto: $(16 + 8) - (0) = 24 - 0 = 24$

Após a retirada de 24 no grupo 2, a chave ficou: $[2, 2, 2, 2, 2]$

Veja como a configuração mudou após a retirada:

$$(27, 31, 28) \Rightarrow (27, 7, 28)$$

Como:

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1$$
$$7 = 4 + 2 + 1$$
$$28 = 16 + 8 + 4$$

Temos agora potências de dois em quantidade pares. Sendo assim, realizamos uma "retirada boa".

7.6 Generalização

O jogo pode ser generalizado para o caso de qualquer número de pilhas, com a mesma regra. Da mesma forma como já vimos, a estratégia vencedora consiste no jogador que primeiro deixar uma chave toda par e realizar apenas "retiradas boas"em todas as jogadas subsequentes, obrigando assim o outro jogador a realizar apenas "retiradas ruins". Na revista *The Annals of Mathematics* (BOUTON, 2007, p. 38), o autor além de falar sobre essa generalização em relação ao número de pilhas, também frisa sobre modificações na regra e apresenta o caso de três pilhas onde quem faz a última retirada perde.

7.7 Podemos sempre escrever a quantidade de objetos de cada grupo como potências distintas de 2?

O processo de quebrar a quantidade de objetos em uma soma de potências distintas de dois é sempre possível e existe apenas uma forma de se fazer isso a não ser pela ordem das parcelas. Vamos a um exemplo:

Para escrever o número 53 em potências distintas de 2, dividimos ele por 2 e escrevemos:

$$53 = 2 \cdot 26 + 1$$

Então dividimos o novo quociente (13) por 2 e escrevemos:

$$53 = 2 \cdot (2 \cdot 13 + 0) + 1$$

E repetimos o processo até que o quociente se torne 1, então escrevemos:

$$53 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 1 + 1) + 0) + 1) + 0) + 1$$

Desenvolvendo essa expressão:

$$53 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0) + 1) + 0) + 1$$

$$53 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1) + 0) + 1$$

$$53 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0) + 1$$

$$53 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1$$

Escrevendo os produtos iguais como potências, obtemos:

$$53 = 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 1$$

O que nos dá:

$$53 = 32 + 16 + 4 + 1$$

E assim conseguimos escrever o número 53 como potências única de dois.

Vamos agora escrever o número 44 como potências únicas de dois através do processo descrito acima:

$$44 = 2 \cdot 22 + 0$$

$$44 = 2 \cdot (2 \cdot 11 + 0) + 0$$

$$44 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 5 + 1) + 0) + 0$$

$$44 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1) + 0) + 0$$

$$44 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 1 + 0) + 1) + 1) + 0) + 0$$

$$44 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0$$

$$44 = 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 0$$

$$44 = 2^5 + 2^3 + 2^2$$

$$44 = 32 + 8 + 4$$

Demonstração da existência

Vamos então provar que este processo é sempre possível:

Dado um número natural N com $N > 0$, existe apenas duas possibilidades: ou este número já é uma potência de 2 e, então, nada temos a demonstrar ou ele não é uma potência de 2 e, então, temos que mostrar uma forma de escrevê-lo como uma soma de potências distintas de 2. Para tanto, vamos proceder da seguinte forma:

Iremos dividir tal número por 2, o quociente desta divisão será denominado por q_1 e o resto por r_1. Dessa forma, podemos escrever:

$$N = 2 \cdot q_1 + r_1, \text{ com } r_1 = 0 \text{ ou } r_1 = 1$$

Se $q_1 \neq 1$, repetimos o processo acima e denominamos de q_2 o novo quociente e r_2 o novo resto. Então, escrevemos:

$$q_1 = 2 \cdot q_2 + r_2, \text{ com } r_2 = 0 \text{ ou } r_2 = 1$$

Dessa forma,

$$N = 2 \cdot (2 \cdot q_2 + r_2) + r_1$$

Repetimos esse processo até encontrar o quociente igual a 1. Então escrevemos:

$$N = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \cdots (2 \cdot q_n + r_n) + r_{n-1}) + r_{n-2}) + \cdots) + 1$$

Organizando convenientemente essa expressão, obtemos:

$$N = 2^n \cdot q_n + 2^{n-1} \cdot r_n + 2^{n-2} \cdot r_{n-1} + 2^{n-3} \cdot r_{n-2} + \cdots + 2^1 \cdot r_2 + 2^0 \cdot r_1$$

Onde n é a quantidade de divisões realizadas.

Desta forma, conseguimos escrever N como potências distintas de 2.

Demonstração da unicidade

Suponha por absurdo que existe uma outra forma de escrever N com potências distintas de dois. Dessa forma, teríamos duas escritas distintas para N cuja soma das parcelas resultam no mesmo resultado N . Veja,

Primeira escrita ordenada para N:

$$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + \cdots + 2^{k_n}, \text{ com } k_1 < k_2 < \cdots < k_n$$

Segunda escrita ordenada para N:

$$N = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3} + \cdots + 2^{t_m}, \text{ com } t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

Agora vamos igualar estas expressões:

$$2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + \cdots + 2^{k_n} = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3} + \cdots + 2^{t_m}$$

Agora vamos retirar dos dois membros potências iguais, a partir da menor potência, até chegarmos a menor potência distinta entre elas. Observe que $2^{k_1} = 2^{t_1}$, visto que se N é ímpar então $2^{k_1} = 2^{t_1} = 1$ e, se N for par, então $2^{k_1} = 2^{t_1} = 0$.

Desta forma, chegaríamos a menor potência distinta de ambas as escritas. Agora basta dividir os termos restantes de cada membro pela menor potência encontrada.

$$(2^{k_3} + \cdots + 2^{k_n}) \div 2^{t_3} = (2^{t_3} + \cdots + 2^{t_m}) \div 2^{t_3}, \text{ no caso de } 2^{t_3} < 2^{k_3}$$

Com isso, chegaríamos a seguinte expressão:

$$2^{k_3 - t_3} + 2^{k_4 - t_3} + \cdots + 2^{k_n - t_3} = 2^{t_3 - t_3} + 2^{t_4 - t_3} + \cdots + 2^{t_m - t_3}$$

Colocando 2 em evidência nos dois membros:

$$2 \cdot (2^{(k_3 - t_3) - 1} + 2^{(k_4 - t_3) - 1} + \cdots + 2^{(k_n - t_3) - 1}) = 1 + 2 \cdot (2^{(t_4 - t_3) - 1} + 2^{(t_5 - t_3) - 1} + \cdots + 2^{(t_m - t_3) - 1})$$

O que é um absurdo, pois teríamos um número ímpar igual a um número par. Dessa forma, concluímos que existe uma única escrita para N como soma de potências únicas de dois.

8 Considerações Finais

Todo o material apresentado neste trabalho objetiva colaborar com a prática docente e, com isso, para uma melhor aprendizagem de nossos alunos, reduzindo a grande defasagem em Matemática apontada por exemplo pelo Saeb [1].

Como o tempo de planejamento é muito escasso nas escolas públicas e nossos professores possuem jornadas de trabalho acima de 40 horas semanais, este trabalho espera poder contribuir para um melhor aproveitamento do tempo tão escasso que nossos profissionais da educação dispõem para a preparação de suas aulas, garantindo assim uma qualidade melhor das aulas ministradas.

Não foi a intenção deste estudo apresentar a "forma ideal"de como trabalhar em sala de aula, mas sim a de apresentar sugestões para uma melhoria da prática metodológica ao se desenvolver a Resolução de Problemas em sala de aula, além de oferecer ao professor um conjunto de problemas adequados para o desenvolvimento desta habilidade prática.

Não posso deixar de mencionar e agradecer a grande contribuição que meus colegas de turma e eu recebemos por parte do PROFMAT [2], que nos possibilitou uma formação docente de qualidade para o desenvolvimento deste trabalho que tanto contribuiu para a minha prática docente.

E por fim, espero ter dado através deste trabalho uma pequena contribuição ao estudo da Matemática, disciplina que aprendi a gostar e a entender seu papel crucial no crescimento de nossa sociedade como um todo. Espero por meio deste ajudar no incentivo e na motivação de nossos alunos, desde o início da linda jornada que é o aprendizado da Matemática.

[1] Sistema de Avaliação da Educação básica
[2] Programa de Pós-Graduação em Matemática Stricto Sensu na modalidade de Mestrado profissional

Referências

BOUTON, C. L. *The Annals of Mathematics*. 2007. Disponível em: <http://links.jstor.org/sici?sici=0003-486X%281901%2F1902%292%3A3%3A1%2F4%3C35%3ANAGWAC%3E2.0.CO%3B2-%23>. Acesso em: 18 de Março de 2022. Citado na página 96.

BRAGA, E. dos Santos de O. *RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA*. 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/243854>. Acesso em: 15 de Março de 2022. Citado na página 18.

CNE, C. N. de E. *Base Nacional Comum Curricular*. 2022. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 23 de fevereiro de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. [S.l.]: Atica, 1991. Citado na página 16.

DORICHENKO, S. *Círculo Matemático Moscou, Problemas Semana-a-Semana*. [S.l.]: IMPA/OBMEP, 2016. Citado na página 14.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Círculos matemáticos–a experiência russa. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada: Rio de Janeiro, Brasil*, 2010. Citado na página 14.

LUPINACCI, M.; BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife*, p. 1–5, 2004. Citado na página 18.

MORICONI, M. *Qual o problema?* [S.l.]: FAPERJ, 2014. Citado na página 14.

PCN - Brasília : MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*. 2022. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 23 de fevereiro de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

POLYA, G.; ARAÚJO, H. L. de. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. [S.l.: s.n.], 1977. Citado 7 vezes nas páginas 4, 13, 14, 15, 18, 19 e 20.

STEWART, I. *Mania de Matemática*. [S.l.]: Zahar, 2004. Citado na página 14.

TAHAN, M. *O homem que calculava*. [S.l.]: Editora Record, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.

TOWNSEND, C. B. *O livro dos Desafios 1*. [S.l.]: Ediouro, 2004. Citado na página 14.