

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Nícolas Andrei Höhn

**ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS: PROPRIEDADES
NUMÉRICAS E COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE
INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO**

VITÓRIA

2022

Nícolas Andrei Höhn

**ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS: PROPRIEDADES
NUMÉRICAS E COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE
INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira.

VITÓRIA

2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

H717a Hohn, Nicolas Andrei, 1989-
Análise dinâmica de estruturas : Propriedades numéricas e comparação de métodos de integração direta no tempo / Nicolas Andrei Hohn. - 2022.
153 f. : il.

Orientador: Walnório Graça Ferreira.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Dinâmica estrutural. 2. Algoritmos computacionais. I. Ferreira, Walnório Graça. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 624

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS: PROPRIEDADES NUMÉRICAS E COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO

Nícolas Andrei Höhn

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de Estruturas.

Aprovada no dia **12 de maio de 2022** por:

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira
Doutor em Engenharia Civil
Orientador – UFES

Prof^a. Dr^a. Elisabeth Junges Laure
Doutora em Engenharia Civil
Examinadora Interna – UFES

Prof. Dr. Webe João Mansur
Doutor em Engenharia Civil
Examinador Externo – UFRJ

Vitória – ES, maio de 2022

À minha esposa e ao meu filho pela linda
família que formamos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa, Fabiana Pelentir, e ao meu filho, Augusto Pelentir Höhn, por compreenderem a minha falta durante os momentos de estudo, por me apoiarem e me incentivarem a realizar este trabalho.

Aos meus pais por me ensinarem o valor da persistência.

Ao Professor Walnório pelo entusiasmo e conhecimentos transmitidos.

Aos Professores e colegas pela troca de experiências e pelos momentos agradáveis que passamos durante o mestrado.

À Universidade Federal do Espírito Santo por dispor os meios para que pudesse realizar a Pós-Graduação em Engenharia Civil.

RESUMO

Este trabalho descreve de forma extensa e agrupada as principais propriedades numéricas dos algoritmos de integração direta no tempo e suas formas de avaliação: convergência, consistência, estabilidade, acurácia, *overshoot* e custo computacional. Também apresenta e compara dois métodos de integração direta no tempo desenvolvidos na última década. Ambos os métodos escolhidos possuem precisão de segunda ordem, estabilidade incondicional, controle de altas frequências espúrias com a definição de apenas um parâmetro pelo usuário, são de fácil implementação e apresentam custo computacional por passo de tempo semelhante. A principal diferença dos métodos em estudo reside no fato de que o primeiro utiliza dois sub-passos por passo de tempo, enquanto o segundo não utiliza sub-passos, além das diferenças de acurácia de cada metodologia. A comparação dos métodos em estudo é realizada através da implementação e aplicação em três exemplos numéricos de dinâmica estrutural, onde as respostas numéricas obtidas podem ser avaliadas e confrontadas em função do parâmetro de controle selecionado.

Palavras Chave: Dinâmica estrutural; Métodos de integração direta no tempo; Propriedades numéricas.

ABSTRACT

This work describes in an extensive and grouped way the main numerical properties of direct time integration algorithms and their evaluation methods: convergence, consistency, stability, overshoot and computational cost. It also presents and compares two direct time integration methods developed in the last decade. Both methods chosen have second-order accuracy, unconditional stability, control of spurious high frequencies with the definition of only one parameter by the user, are easy to implement and have a similar computational cost per time step. The main differences between the methods lies in the fact that the first uses two sub-steps per time step, while the second does not use sub-steps, in addition to the differences in the accuracy of each methodology. The comparison of the methods under study is carried out through the implementation and application of three numerical examples of structural dynamics, where the numerical results obtained can be evaluated and compared according to the selected control parameter.

Keywords: Structural dynamics; Direct time integration methods; Numerical properties.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo matemático de um sistema dinâmico de 1GL (a) Diagrama de corpo livre do sistema dinâmico básico (b)	26
Figura 2 – Definição de decaimento da amplitude (DA) e alongamento do período (AP).	40
Figura 3 – Curva de L-estabilidade e precisão de segunda ordem do método Bathe - β_1/β_2	72
Figura 4 – Aproximação do deslocamento	82
Figura 5 – Raio espectral para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a).....	96
Figura 6 – Raio espectral para o método de Bathe - β_1/β_2 ($\beta_2 = 1 - \beta_1$) e de Soares (parâmetro a).....	97
Figura 7 – Alongamento do Período para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a)	99
Figura 8 – Decaimento da Amplitude para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a)	100
Figura 9 – Energia de <i>Overshoot</i> para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a) para $\mathbf{u}_0 = \mathbf{1}$, $\dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$ e $\Delta t/T = 10$	101

Figura 10 – Energia de <i>Overshoot</i> para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro α) para $u_0 = 1$, $\dot{u}_0 = 1$ e $\Delta t/T = 10$	102
Figura 11 – Energia de <i>Overshoot</i> para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro α) para $u_0 = 1$, $\dot{u}_0 = 1$ e $\Delta t/T = 500$	103
Figura 12 – Sistema massa mola com um grau de liberdade.....	107
Figura 13 – Deslocamento de 0 a 6s.....	110
Figura 14 – Deslocamento de 49 a 55s.....	110
Figura 15 – Detalhe A.....	111
Figura 16 – Sistema massa mola com três graus de liberdade.....	112
Figura 17 – Deslocamento do nó 2 de 0 a 70s.....	115
Figura 18 – Deslocamento do nó 2 de 0 a 3s e de 62.8 a 65.8s	115
Figura 19 – Velocidade do nó 2 de 0 a 70s.....	116
Figura 20 – Velocidade do nó 2 de 0 a 7s e de 63 a 70s	116
Figura 21 – Deslocamento do nó 3 de 0 a 70s.....	117
Figura 22 – Deslocamento do nó 3 de 24.5 a 27.2s e de 56 a 58.7s	117
Figura 23 – Velocidade do nó 3 de 0 a 70s.....	118
Figura 24 – Velocidade do nó 3 de 0 a 7s e de 63 a 70s	118

Figura 25 – Aceleração do nó 2 de 0 a 10s.....	120
Figura 26 – Aceleração do nó 2 de 0 a 10s, excluindo a resposta da Regra Trapezoidal	120
Figura 27 – Aceleração do nó 3 de 0 a 70s.....	121
Figura 28 – Barra engastada.....	123
Figura 29 – Solução analítica para o deslocamento horizontal para todos os nós.....	127
Figura 30 – Solução analítica para a velocidade horizontal para todos os nós.....	127
Figura 31 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o método de Bathe - β_1/β_2 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$	129
Figura 32 – Deslocamento horizontal para o nó 350, detalhe A.....	129
Figura 33 – Velocidade horizontal do nó 350 para o método de Bathe - β_1/β_2 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$	130
Figura 34 – Velocidade horizontal para o nó 350, detalhe A.....	130
Figura 35 – Raio espectral para o método de Bathe - β_1/β_2 com $\beta_2 = 2\beta_1$ e $\mu = 1/2$	131
Figura 36 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o método de Soares e $\Delta t =$ $8 \times 10^{-5} s$	132
Figura 37 – Deslocamento horizontal para o nó 350, detalhe A.....	132

Figura 38 – Velocidade horizontal do nó 350 para o método de Soares e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$	133
Figura 39 – Velocidade horizontal para o nó 350, detalhe A.....	133
Figura 40 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$	136
Figura 41 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B.....	137
Figura 42 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$	137
Figura 43 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B.....	138
Figura 44 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$	138
Figura 45 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B.....	139
Figura 46 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$	139
Figura 47 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B	140
Figura 48 – Velocidade horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$...	140
Figura 49 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B	141
Figura 50 – Velocidade horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$...	141
Figura 51 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B	142

Figura 52 – Velocidade horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$... 143

Figura 53 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B 143

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – FLOP para diferentes operações matemáticas	45
Tabela 2 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão	62
Tabela 3 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2	75
Tabela 4 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Soares	90
Tabela 5 – Número total de FLOP para os métodos de integração em estudo	104
Tabela 6 – Ordem do número total de FLOP	105
Tabela 7 – Métodos e parâmetros utilizados para a solução numérica.....	108
Tabela 8 – Erro relativo (%) para o deslocamento, velocidade e aceleração.....	122
Tabela 9 – Erro relativo para o deslocamento e velocidade de todos os nós e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$	134
Tabela 10 – Erro relativo para o deslocamento e velocidade de todos os nós e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$	135
Tabela 11 – Erro relativo para o deslocamento e velocidade de todos os nós e $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$	136
Tabela 12 – Número total de FLOP	145

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	18
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO, JUSTIFICATIVA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
1.2. OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	22
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1. O PROBLEMA DA DINÂMICA ESTRUTURAL	24
2.1.1. Equação do movimento	24
2.1.2. Vibração livre amortecida	29
2.2. PROPRIEDADES DOS ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA NO DOMÍNIO DO TEMPO	31
2.2.1. Convergência	35
2.2.2. Consistência	35
2.2.3. Estabilidade	36
2.2.4. Acurácia	39
2.2.5. Overshoot	42
2.2.6. Custo computacional	44
3. ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO	47
3.1. MÉTODO DE NEWMARK (29).....	47
3.2. MÉTODO DE BATHE (12,14,25,26)	50
3.2.1. Estabilidade e acurácia	55
3.2.2. Consistência	60

3.2.3.	Redução do custo computacional	61
3.2.4.	Overshoot.....	61
3.2.5.	Algoritmo e custo computacional	62
3.3.	MÉTODO DE BATHE - β_1/β_2 (17,27)	66
3.3.1.	Estabilidade e acurácia	70
3.3.2.	Consistência	73
3.3.3.	Redução do custo computacional	73
3.3.4.	Overshoot.....	74
3.3.5.	Algoritmo e custo computacional	75
3.4.	MÉTODO DE SOARES (21)	80
3.4.1.	Estabilidade e acurácia	84
3.4.2.	Consistência	87
3.4.3.	Overshoot.....	87
3.4.4.	Algoritmo e custo computacional	89
4.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	93
4.1.	COMPARAÇÃO DAS PROPRIEDADES NUMÉRICAS DOS ALGORITMOS DE BATHE- β_1/β_2 E SOARES	93
4.1.1.	Estabilidade.....	94
4.1.2.	Acurácia.....	97
4.1.3.	Overshoot.....	100
4.1.4.	Custo computacional	104
4.2.	EXEMPLOS.....	106

4.2.1. Sistema massa mola de 1 grau de liberdade.....	106
4.2.2. Sistema massa mola de 3 graus de liberdade.....	111
4.2.3. Barra homogênea	122
5. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	146
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	150

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO, JUSTIFICATIVA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Estruturas civis e *offshore*, veículos, aeronaves, equipamentos mecânicos, entre outros, apresentam uma característica em comum, são sujeitos a carregamentos dinâmicos, isto é, carregamentos que variam de direção, magnitude e/ou posição com o tempo. Para o desenvolvimento destas estruturas e equipamentos com segurança, confiabilidade e desempenho é necessária extensa análise e teste para obter a resposta estrutural em função destes carregamentos dinâmicos, ou seja, deslocamento e tensões que também variam com o tempo, o que só é possível através do uso de programação computacional e métodos numéricos específicos. (1).

As análises dinâmicas podem ser realizadas de duas maneiras distintas, em função da natureza dos carregamentos dinâmicos aplicados: determinística ou não determinística/aleatória/randômica. Nas análises determinísticas o carregamento dinâmico é completamente conhecido para qualquer instante de tempo, também conhecido como carregamento dinâmico prescrito, o qual pode ser escrito como uma função no tempo. Exemplos de carregamentos determinísticos estão presentes em importantes aplicações da engenharia, como é o caso de equipamentos rotativos que geralmente geram carregamentos periódicos, podendo ser representado matematicamente como uma função harmônica. Já as análises aleatórias/randômicas são aquelas que o carregamento dinâmico não é totalmente conhecido em qualquer instante, mas pode ser definido estatisticamente, também conhecido como carregamentos aleatórios ou randômicos. São os casos dos carregamentos impostos por terremotos, ondas oceânicas e vento. (2-4).

Devido à variação no tempo dos carregamentos externos, deslocamentos e forças inerciais, a análise de sistemas dinâmicos é realizada através da solução de equações diferenciais. A solução exata da formulação diferencial da análise dinâmica para sistemas contínuos, isto é, para sistemas que apresentam infinitos graus de liberdade, só é possível para poucas aplicações, de geometria e condições de contorno triviais, como é o caso de vigas uniformes, hastes delgadas e placas finas. (2-6).

Para aumentar a gama de aplicações possíveis da análise dinâmica, aproximam-se sistemas contínuos como sistemas discretos. Nos sistemas discretos consideram-se pontos discretos de componentes de deslocamento, simplificando bastante o modelo matemático, considerando agora um número finito de graus de liberdade, sob os quais se calcula os deslocamentos, velocidades e acelerações. (1-6).

Neste sentido, o Método de Elementos Finitos (MEF) é um dos principais métodos utilizados para a discretização espacial de sistemas contínuos. O método consiste na discretização da estrutura em um número finito de elementos, os quais são conectados por nós. A solução do método é obtida nos nós, os quais são interpolados sobre os elementos através das funções de forma, obtendo assim a solução aproximada do sistema contínuo. (6-9).

Após a discretização do sistema contínuo, a obtenção da resposta dinâmica, no domínio do tempo, de sistemas com N graus de liberdades e carregamento qualquer é geralmente obtida através do método da superposição modal, em especial para análises lineares e de longa duração, e o método da Integração direta no tempo, geralmente utilizado para a solução de problemas não lineares. (10-11).

O método da superposição modal consiste na transformação linear de um sistema acoplado de N equações e incógnitas, através do uso dos modos normais de vibrar do sistema não amortecido, em um sistema com N equações desacopladas, bastando

obter a resposta no tempo para cada grau de liberdade individualmente e posteriormente sobrepor os resultados. (1-2).

Já o método da integração direta no domínio do tempo, também chamado de método passo a passo (*step-by-step*) ou marcha no tempo (*time marching*), soluciona a equação do movimento em tempos discretos, com incremento de tempo Δt . São adotadas equações para a variação do deslocamento, da velocidade e da aceleração entre os tempos t e $t + \Delta t$, que quando aplicadas na equação do movimento possibilita a obtenção das propriedades no tempo $t + \Delta t$. O que difere os vários algoritmos de integração direta são as relações adotadas para a variação do deslocamento, da velocidade e da aceleração no intervalo de tempo Δt , as quais proporcionam propriedades distintas de estabilidade, convergência e acurácia para cada formulação. (12).

Os métodos de integração direta podem ser classificados ainda como explícitos ou implícitos. Na formulação explícita, as variáveis da equação de movimento no tempo $t + \Delta t$ são obtidas a partir do tempo anterior e em geral apresenta baixo custo computacional, sendo o método diferença central uma técnica de integração direta explícita largamente utilizada. Já na formulação implícita, as variáveis da equação de movimento no tempo $t + \Delta t$ são funções deste próprio, necessitando a solução de um sistema de equações (fatoração da matriz rigidez efetiva) para obtenção da resposta dinâmica para cada passo de tempo, tornando o método, em geral, mais caro computacionalmente. (12-14).

Em análises dinâmicas estruturais, geralmente a resposta de interesse se encontra em frequências baixas, a qual só poderia ser obtida por um método de integração direta explícita com passos de tempo muito pequenos, devido à estabilidade condicional inerente a esta classe de métodos. (15). Os métodos de integração implícitos podem

alcançar estabilidade incondicional e por esse motivo são preferidos para as análises dinâmicas estruturais.

Nas últimas décadas observa-se o desenvolvimento de inúmeros métodos numéricos de integração direta para análise dinâmica estrutural (10,12,16-22), visando o desenvolvimento de melhores propriedades numéricas e eficiência computacional, porém ainda não há a concordância de qual o melhor algoritmo, mas sim quais as características que o método computacional geralmente deve apresentar (14,16,23,24):

1. Incondicionalmente estável;
2. Apresentar pelo menos precisão de segunda ordem;
3. Ser de fácil implementação e auto iniciável;
4. Apresentar somente um conjunto de equações lineares que necessitam ser resolvidas por passo de tempo, ou seja, baixo custo computacional;
5. Apresentar dissipação controlável de altas frequências.

Neste sentido, as técnicas de integração direta ainda são um campo de estudo promissor e em constante desenvolvimento. Recentemente, destaca-se na literatura o desenvolvimento da família de algoritmos de integração direta e implícito chamado de método de Bathe (12,14,17,25-27), cujo uso tem sido aumentado devido as suas características de acurácia (14,18,28). Outra família de algoritmos de integração direta foi proposta por Soares (20,21,22), os quais mostram propriedades competitivas. Entretanto a comparação entre as propriedades numéricas e resultado prático destes métodos é precária na literatura e inexistente quando se considera os recentes desenvolvimentos realizados por Bathe (17,27) para possibilitar a prescrição da dissipação numérica desejada.

Ainda, as metodologias de avaliação das propriedades numéricas dos algoritmos de integração direta são dispersas e dificilmente abordam todas as propriedades

pretendidas para serem descritas e avaliadas neste trabalho: convergência, consistência, estabilidade, acurácia, *overshoot* e custo computacional. Novamente, a comparação entre as propriedades da família de algoritmos de Bathe (12,14,17,18,25-27) e de Soares (21) não é encontrada de forma explícita na literatura.

Desta forma, o foco deste trabalho será descrever, de forma geral, as metodologias para avaliação das propriedades numéricas dos métodos de integração direta, comparar as propriedades numéricas e os resultados obtidos através da utilização da família de algoritmos implícitos de integração direta denominada método de Bathe - β_1/β_2 (17,27) com o algoritmo proposto por Soares (21), por apresentarem características semelhantes: algoritmos implícitos, precisão de segunda ordem, L-estabilidade, propriedades semelhantes de acurácia, apresentarem também o número total de operações matemáticas por passo de tempo de ordem de grandeza similar, além da possibilidade de controlar as propriedades numéricas com apenas um parâmetro e comparação direta destes algoritmos inexistente na literatura.

1.2. OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O objetivo geral deste trabalho é comparar as propriedades numéricas e as respostas obtidas a partir da aplicação do método de integração direta de Bathe (12,14,25,26) e sua variante Bathe - β_1/β_2 (17,27), as quais apresentam a possibilidade de prescrever a dissipação numérica desejada, com o algoritmo proposto por Soares (21), a qual também possui controle da dissipação numérica.

Os objetivos específicos são: Apresentar a metodologia de avaliação das propriedades numéricas dos algoritmos de integração direta no tempo; Apresentar a família de algoritmos de Bathe (12,14,25,26), de Bathe - β_1/β_2 (17,27) e de Soares (21); implementar computacionalmente os métodos em estudo, bem como suas propriedades

numéricas; Comparar e discutir as propriedades numéricas dos métodos em estudo; comparar e discutir os resultados da aplicação destes métodos à três exemplos numéricos.

O estudo será realizado no âmbito da análise linear, abordando apenas os métodos de integração implícitos e as propriedades a serem avaliadas são: convergência, consistência, estabilidade, acurácia/precisão, amortecimento numérico/dissipação, *overshoot* e custo computacional.

Após a introdução do trabalho, é apresentado no capítulo 2 a revisão bibliográfica e estado da arte do tema em estudo, contendo os conceitos fundamentais e formulação dos problemas da dinâmica estrutural e as metodologias de análise das propriedades dos algoritmos de integração direta no tempo.

No capítulo 3 são descritas as formulações matemáticas do método de Newmark (29), da família de algoritmos de integração direta de Bathe (12,14,17,18,25-27) e de Soares (21), juntamente com suas respectivas matrizes de amplificação e propriedades numéricas específicas, além de apresentar a implementação computacional e determinar o número total de operação matemáticas necessárias para obtenção da solução numérica de cada algoritmo.

O capítulo 4 contém a comparação, discussão e análise das propriedades numéricas dos métodos de integração direta em estudo, bem como a aplicação destes três exemplos numéricos, buscando avaliar as características da resposta dinâmica de cada algoritmo.

Por fim, no capítulo 5 são apresentadas a conclusão e as considerações finais do estudo.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica se inicia na formulação básica da equação do movimento da dinâmica estrutural, tanto para um grau de liberdade (1GL) como para múltiplos graus de liberdade (MGL), passando pela descrição das metodologias de avaliação das propriedades numéricas dos métodos de integração direta no domínio do tempo, posteriormente pela apresentação da família de algoritmos de Bathe (12,14,18,25-27) e de Soares (21) e de suas propriedades específicas.

2.1. O PROBLEMA DA DINÂMICA ESTRUTURAL

Este capítulo busca apresentar a formulação diferencial básica da equação do movimento, cujos algoritmos de integração direta têm por objetivo atender para os tempos discretos $t + n\Delta t$. Além disso, serão expostas, de forma geral, as propriedades numéricas dos algoritmos de integração direta e as formulações disponíveis para a sua avaliação.

2.1.1. Equação do movimento

Nos problemas de dinâmica estrutural, as equações do movimento são as expressões matemáticas que descrevem o movimento de um sistema físico através de variáveis dinâmicas, como deslocamento, velocidade e aceleração. A solução da equação de movimento fornece a variação do deslocamento do sistema físico em função do tempo. (2).

Para a formulação da equação de movimento podem ser empregados diferentes métodos: leis de Newton, princípio de D'Alembert, princípio do trabalho virtual e aproximações variacionais. (1). Neste trabalho será utilizada a segunda lei de Newton e

o princípio de D'Alembert para obter a expressão da equação do movimento da dinâmica.

2.1.1.1. Segunda lei de Newton e princípio de D'Alembert

A equação do movimento de uma partícula de massa m , a qual não varia no tempo, pode ser expressa através da segunda lei de Newton, da forma:

$$\sum F(t) = m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = m\ddot{u}(t) \quad (2.1)$$

Onde $F(t)$ corresponde às forças atuando na partícula, podendo ser forças elásticas e de amortecimento, e $u(t)$ corresponde ao deslocamento da partícula.

O princípio de D'Alembert afirma que uma força inercial desenvolvida por uma massa é equivalente à massa multiplicada pela sua aceleração, porém com sentido contrário a ela. (4). Portanto:

$$F_I(t) = -m\ddot{u}(t) \quad (2.2)$$

Onde $F_I(t)$ corresponde à força inercial da partícula.

Substituindo a equação (2.2) em (2.1), obtém-se:

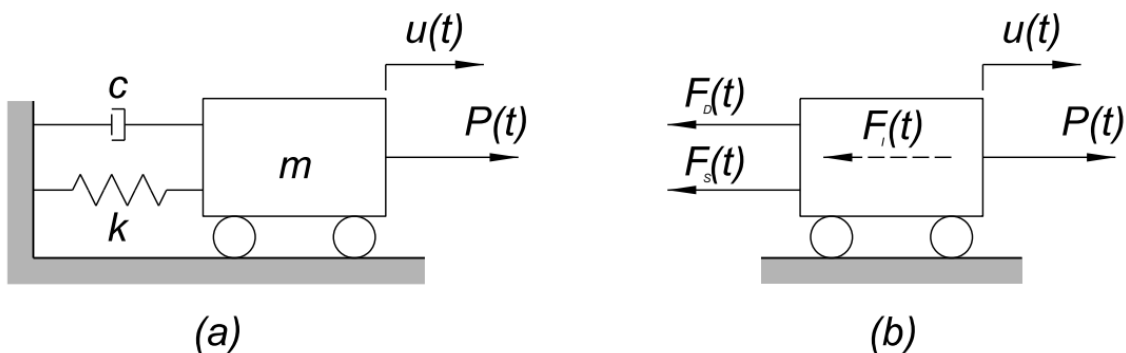
$$\sum F(t) + F_I(t) = 0 \quad (2.3)$$

Portanto, o princípio de D'Alembert mostra que o sistema de forças atuando em uma partícula estará em equilíbrio em qualquer instante de tempo, quando for adicionada a força inercial às forças atuando na partícula, possibilitando que as equações do movimento possam ser desenvolvidas através de equações de equilíbrio dinâmico. (1,2).

2.1.1.2. Sistema dinâmico com um grau de liberdade

O sistema dinâmico estrutural básico pode ser representado pelo modelo matemático de um grau de liberdade (1GL) apresentado na Figura 1 (a). Este sistema elementar é constituído de uma massa m , de uma mola e um amortecedor que representam as propriedades elásticas k (rigidez) e de amortecimento c (dissipação de energia mecânica), respectivamente. Ainda, a massa m do sistema está sujeita a ação de uma força externa dinâmica $P(t)$ e o seu deslocamento $u(t)$ ocorre somente no sentido horizontal.

Figura 1 – Modelo matemático de um sistema dinâmico de 1GL (a) Diagrama de corpo livre do sistema dinâmico básico (b)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando o diagrama de corpo livre do sistema dinâmico básico, Figura 1 (b), e invocando a segunda lei de Newton e o princípio de D'Alembert da equação (2.3), obtém-se:

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = P(t) \quad (2.4)$$

Os termos $F_I(t)$, $F_D(t)$ e $F_S(t)$ correspondem às forças de inércia, amortecimento e rigidez, respectivamente, as quais podem ser expressas por:

$$F_I(t) = m\ddot{u}(t) \quad (2.5)$$

$$F_D(t) = c\dot{u}(t) \quad (2.6)$$

$$F_S(t) = ku(t) \quad (2.7)$$

Onde $u(t)$ é o deslocamento, $\dot{u}(t)$ a velocidade e $\ddot{u}(t)$ a aceleração da massa do sistema. Portanto, a equação (2.4) pode ser reescrita da forma:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) \quad (2.8)$$

Ou ainda:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = F(t) \quad (2.9)$$

Onde $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ é chamada de taxa de amortecimento e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural do sistema.

As equações (2.8) e (2.9) correspondem à equação do movimento para um sistema dinâmico de um grau de liberdade. (1-5).

2.1.1.3. Sistema dinâmico com múltiplos graus de liberdade

Apesar de alguns sistemas dinâmicos serem capazes de ter seu comportamento adequadamente representado por modelos matemáticos de um grau de liberdade, para a maioria dos casos é necessária à utilização de modelos com múltiplos graus de liberdade (MGL). (1-5).

A equação do movimento para modelos com múltiplos graus de liberdade é similar à equação (2.8) e tem a forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.10)$$

Onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são matrizes $N \times N$ de massa, de amortecimento e de rigidez, respectivamente, e $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ correspondem aos vetores $N \times 1$ de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, onde N é o número de graus de liberdade do sistema. Por fim, \mathbf{P} é o vetor $N \times 1$ dos carregamentos externos.

Um dos principais métodos para a discretização espacial de sistemas contínuos em sistemas de N graus de liberdade é o Método de Elementos Finitos (MEF). Através do MEF é possível obter as matrizes de massa, rigidez e carregamento. Quando as funções de interpolação para geração da matriz rigidez são as mesmas para o cálculo

das matrizes de massa e carregamento, diz-se que estas duas últimas são chamadas de matriz de massa consistente e vetor de carregamentos consistente. Já quando é considerada a concentração das cargas totais, devido aos carregamentos distribuídos no elemento, e da massa total do elemento em partes iguais aplicadas aos nós deste elemento, chama-se a matriz de massa e o vetor carregamento de inconsistentes (*lumped*). (6-9). Neste caso, a matriz de massa inconsistente é uma matriz diagonal.

Para matriz de amortecimento \mathbf{C} , uma forma simples de obtê-la é através da combinação linear da matriz de massa \mathbf{M} e da matriz de rigidez \mathbf{K} , também conhecido como amortecimento de Rayleigh, (2), da forma:

$$\mathbf{C} = a\mathbf{K} + b\mathbf{M} \quad (2.11)$$

Onde a e b são constantes.

2.1.2. Vibração livre amortecida

Será apresentado o caso particular da equação do movimento (2.8) para quando não há carregamentos externos. Este caso particular é muito utilizado para avaliar diversas propriedades dos algoritmos de integração no tempo. (1-5).

Seja a equação do movimento para 1GL e sem carregamentos externos:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = 0 \quad (2.12)$$

Esta equação diferencial de segunda ordem homogênea apresenta a solução, para os casos em que a constante de amortecimento $c < 2m\omega$ (sistemas com amortecimento subcrítico), (2), da forma:

$$u(t) = (c_1 e^{i\omega_D t} + c_2 e^{-i\omega_D t}) e^{-\xi\omega t} \quad (2.13)$$

Onde $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$, $e^{i\omega_D t} = \cos(\omega_D t) + i\text{sen}(\omega_D t)$ e $e^{-i\omega_D t} = \cos(\omega_D t) - i\text{sen}(\omega_D t)$. Ainda, c_1 e c_2 são constantes complexas, as quais podem ser escritas em termos de suas partes reais e imaginárias:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{r1} + ic_{i1} \\ c_2 &= c_{r2} + ic_{i2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Reescrevendo a equação (2.13):

$$u(t) = \{(c_{r1} + c_{r2}) \cos(\omega_D t) - (c_{i1} - c_{i2}) \text{sen}(\omega_D t) + i[(c_{i1} + c_{i2}) \cos(\omega_D t) + (c_{r1} - c_{r2}) \text{sen}(\omega_D t)]\} e^{-\xi\omega t} \quad (2.15)$$

Como a resposta dinâmica $u(t)$ necessita ser real, uma implicação importante da equação (2.15) é que a parte imaginária de $u(t)$ deve ser nula. (2). Isto só é possível quando as constantes complexas forem pares conjugados, desta forma:

$$\begin{aligned}c_{r1} &= c_{r2} \\c_{i1} &= -c_{i2}\end{aligned}\tag{2.16}$$

A equação (2.13) pode ainda ser expressa na sua forma trigonométrica:

$$u(t) = (d_1 \cos(\omega_D t) + d_2 \text{sen}(\omega_D t))e^{-\xi\omega t}\tag{2.17}$$

Esta propriedade de que as constantes de integração devem ser pares conjugados complexos, para que seja possível obter uma resposta dinâmica real, será utilizada no desenvolvimento da teoria das propriedades dos algoritmos de integração direta no domínio do tempo.

2.2. PROPRIEDADES DOS ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Este capítulo tem o objetivo de descrever as propriedades e apresentar a metodologia para análise dos algoritmos de integração direta no domínio do tempo. As propriedades em questão são: convergência, consistência, estabilidade, acurácia, *overshoot* e custo computacional.

O primeiro passo para a análise das propriedades dos algoritmos de integração direta no domínio do tempo é observar a relação entre estes métodos numéricos e o método da superposição modal.

O método da superposição modal consiste em expressar o vetor de deslocamentos \mathbf{u} do espaço físico através da transformação linear de um vetor de coordenadas modais \mathbf{Y} , referente a um espaço vetorial sem interpretação física, a partir da operação:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{Y} \quad (2.18)$$

Onde Φ é a base do espaço vetorial de deslocamento, formado pelos autovetores do problema de autovalor generalizado:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Desta forma, as equações acopladas:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.20)$$

Podem ser reescrita como:

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}_n \mathbf{Y}(t) = \mathbf{P}_n(t) \quad (2.21)$$

Onde o sistema pode ser desacoplado, significando que pode ser apresentado como N equações de um grau de liberdade apenas, cujas respostas podem ser encontradas analiticamente por alguma técnica exata ou através de um método numérico de integração direta, utilizando-se diferentes incrementos de tempo Δt de forma a obter a resposta dinâmica com a precisão desejada.

Ainda, se todas as N equações desacopladas forem integradas numericamente com o mesmo incremento de tempo Δt , as respostas dinâmicas obtidas pelo método da superposição modal e por algum método de integração direta são idênticas. (30).

Desta forma, como as N equações desacopladas de (2.21) são similares e dependem apenas do passo de tempo Δt , da frequência natural ω_j e da taxa de amortecimento ξ_j , com $j = 1, \dots, N$, a análise das propriedades de um algoritmo de integração direta pode ser realizada levando em consideração apenas uma das N equações de (2.21). (6,30).

Desta forma:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = F(t) \quad (2.22)$$

Para a utilização dos métodos de integração direta no domínio do tempo, a equação do movimento para um grau de liberdade (2.22) deve ser satisfeita nos tempos discretos $t + n\Delta t$, com $n = 0, 1, 2, \dots$, podendo ser escrita na sua forma discretizada:

$$\ddot{u}_{t+n\Delta t} + 2\xi\omega\dot{u}_{t+n\Delta t} + \omega^2u_{t+n\Delta t} = F_{t+n\Delta t} \quad (2.23)$$

Muitos algoritmos de integração direta, considerando a equação (2.23) e os procedimentos específicos do método numérico, podem ser escritos através da relação de recorrência em forma matricial e para um passo de tempo Δt . (20-22,24,31-36).

Desta forma:

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{U}_t + \mathbf{L}_t \quad (2.24)$$

Este é o segundo passo para a análise das propriedades dos algoritmos de integração direta.

Na equação (2.24), A é chamada de matriz de amplificação, (23), ou de operador de aproximação, (6,30), L é chamado de operador de carga, (6,12), e $U_{t+\Delta t} = \{u_{t+\Delta t}, \dot{u}_{t+\Delta t}, \ddot{u}_{t+\Delta t}\}^T$ é vetor que contém as incógnitas do problema.

Assim como a equação (2.23), a matriz de amplificação A e o operador de carga L dependem somente da taxa de amortecimento ξ , da frequência natural ω , do passo de tempo Δt e da formulação do algoritmo de integração direta no domínio do tempo.

Considerando um problema sem carregamento e com as condições iniciais $u(t=0) = u_0$ e $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, a resposta dinâmica em qualquer instante de tempo pode ser obtida a partir da equação (2.24), da forma:

$$U_{t+n\Delta t} = A^n U_0 \quad (2.25)$$

Outro ponto importante é a dimensão da matriz de amplificação A . Alguns algoritmos de integração apresentam a matriz de amplificação de tamanho 2×2 , enquanto outros algoritmos apresentam matriz de dimensão 3×3 . De forma geral, as matrizes de amplificação podem ser escritas na dimensão 3×3 , porém quando a aceleração em um passo de tempo \ddot{u}_n pode ser escrita como uma combinação do deslocamento u_n e da velocidade \dot{u}_n deste mesmo tempo discreto, a matriz de amplificação pode ser reduzida para a dimensão 2×2 , (37), como é caso do método de Bathe (12,14,25) e de Soares (20-22).

2.2.1. Convergência

Um algoritmo é dito convergente quando a solução aproximada $u_{t+n\Delta t}$, $\dot{u}_{t+n\Delta t}$ e $\ddot{u}_{t+n\Delta t}$ converge para a solução exata $u(t + n\Delta t)$, $\dot{u}(t + n\Delta t)$ e $\ddot{u}(t + n\Delta t)$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. (38).

Ou seja:

$$\begin{aligned} |u_{t+n\Delta t} - u(t + n\Delta t)| &\rightarrow 0 \\ |\dot{u}_{t+n\Delta t} - \dot{u}(t + n\Delta t)| &\rightarrow 0 \\ |\ddot{u}_{t+n\Delta t} - \ddot{u}(t + n\Delta t)| &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Segundo o teorema da equivalência de Lax (38), o atendimento das condições de consistência e estabilidade de um algoritmo são condições necessárias e suficientes para a sua convergência, no contexto dos métodos lineares multi-passos, (16), como é o caso dos métodos lineares de integração direta no domínio do tempo.

2.2.2. Consistência

A ordem de consistência de um método de integração direta é obtida a partir do erro de truncamento local. O erro de truncamento local $\varepsilon(t)$ é o resíduo obtido quando se aplica a solução exata da equação do movimento $u(t + n\Delta t)$, $\dot{u}(t + n\Delta t)$ e $\ddot{u}(t + n\Delta t)$ na relação de recorrência da equação (2.24) de um algoritmo. (39). Portanto:

$$\varepsilon(t) = \mathbf{U}(t + (n + 1)\Delta t) - \mathbf{AU}(t + n\Delta t) \tag{2.27}$$

Um método é dito consistente, para qualquer Δt , (11,16), quando:

$$|\varepsilon(t)| \leq Q\Delta t^k \text{ para } t \in [0, T] \quad (2.28)$$

e $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. (38).

Na equação (2.28) Q é uma constante que não depende de Δt e k é a ordem de consistência do método, com $k > 0$. A ordem de acurácia (precisão) do método, ou taxa de consistência, é igual a $k - 1$. (11,27,31).

Portanto a análise de consistência de um método consiste em analisar para que condições a equação (2.28) é atendida. A equação (2.28) pode ser obtida a partir da expansão em série de Taylor da equação (2.27), como é o caso de Zhou e Tamma (16), Soares (20,21), Zhang *et al.* (31), Malakiyeh *et al.* (27) e Dahlquist (40).

Por fim, segundo os teoremas de Dahlquist (40), não existe um algoritmo explícito incondicionalmente estável e que um algoritmo incondicionalmente estável pode obter no máximo precisão de segunda ordem.

2.2.3. Estabilidade

Estabilidade é a propriedade de um algoritmo não amplificar erros, principalmente devido ao truncamento numérico e a integração imprecisa dos modos de alta frequência.

Um método de integração direta é dito incondicionalmente estável quando a solução não cresce indefinidamente para qualquer passo de tempo $\Delta t/T$, em especial para grandes valores de $\Delta t/T$, (30), onde T é um período natural de vibração. Já quando a resposta dinâmica é estável apenas para $\Delta t/T$ abaixo de um determinado valor, diz-se que o método é condicionalmente estável.

A estabilidade de um método de integração direta é alcançada quando o raio espectral $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$, (31,33,41). O raio espectral ρ é dado por:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max|\lambda_i|, \quad i = 1,2,3 \quad (2.29)$$

Onde λ_i correspondem aos autovalores da matriz de amplificação \mathbf{A} . A equação (2.29) representa a formulação da análise de estabilidade de longo prazo dos algoritmos de integração, também chamada de análise espectral. (31). Para a análise de estabilidade de curto prazo destas famílias de algoritmos, fenômeno de *overshooting*, outra formulação matemática deve ser utilizada, (23,31,39), a qual será apresentada na seção 2.2.5.

Quando $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ diz-se que o método de integração possui A-estabilidade. Adicionalmente, o método é chamado de L-estável quando apresenta A-estabilidade e quando $\rho(\mathbf{A}) \rightarrow 0$ quando $\frac{\Delta t}{T} \rightarrow \infty$. (27,40). Ou seja, um método de integração será L-estável, quando:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq 1 \quad (2.30)$$

$$\rho_\infty = \lim_{\frac{\Delta t}{T} \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{A}) = 0 \quad (2.31)$$

Onde ρ_∞ é chamado de raio espectral infinito.

Os métodos que apresentam L-estabilidade são mais efetivos no amortecimento de altas frequências espúrias. (20). Neste sentido, diz-se ainda que os métodos que

satisfazem a equação (2.31) possuem aniquilação assintótica das respostas de alta frequência. (24).

Portanto, para a verificação da estabilidade espectral de um algoritmo de integração direta, é necessário o cálculo dos autovalores da matriz de amplificação do método em utilização, os quais são obtidos através da solução da equação característica de \mathbf{A} , (23), dada por:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^3 - 2A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad (2.32)$$

Onde \mathbf{I} é a matriz identidade e A_i , $i = 1,2,3$, são os invariantes da matriz amplificação \mathbf{A} , dados por:

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A})$$

$$A_2 = \text{soma dos menores principais de } \mathbf{A} \quad (2.33)$$

$$A_3 = \det(\mathbf{A})$$

Onde $\text{tr}(\mathbf{A})$ é o traço da matriz \mathbf{A} .

Para o método de Bathe (12,14,17,25-27) e de Soares (20-22) o invariante $A_3 = \det(\mathbf{A}) = 0$, devido ao fato de que a aceleração em um passo de tempo \ddot{u}_n pode ser escrita como uma combinação do deslocamento u_n e da velocidade \dot{u}_n deste mesmo tempo discreto. (37).

Dessa forma, a equação característica da matriz de amplificação \mathbf{A} toma a forma:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda(\lambda^2 - 2A_1\lambda + A_2) = 0 \quad (2.34)$$

Portanto, uma das raízes, ou autovalor, da equação característica $\lambda_3 = 0$, também chamada de raiz espúria. (23,26).

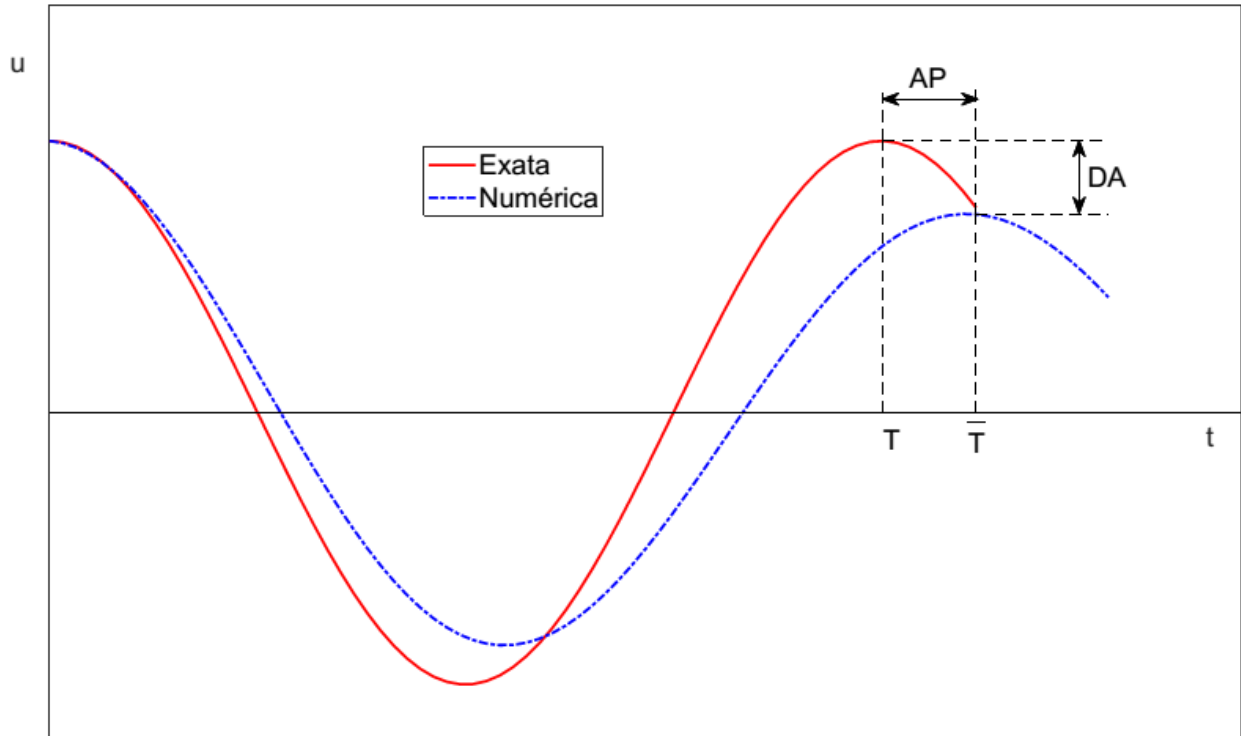
2.2.4. Acurácia

A acurácia, ou precisão, é a propriedade de um algoritmo fornecer uma resposta numérica próxima da solução exata. (6). Os erros entre a solução numérica e a solução exata podem ser medidos através do decaimento da amplitude (medida de dissipação) e alongamento do período (medida de dispersão). (10,27,31).

Estas medidas de acurácia dependem dos autovalores, e conseqüentemente do raio espectral, da matriz de amplificação do método de integração utilizado, assim como a análise de estabilidade, e por esse motivo também é conhecida como acurácia de raio espectral. (31,36).

As medidas do decaimento da amplitude (DA) e alongamento do período (AP) são apresentadas na Figura 2.

Figura 2 – Definição de decaimento da amplitude (DA) e alongamento do período (AP).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o uso repetido da equação (2.24) a velocidade e a aceleração podem ser eliminadas e a equação em termos de deslocamentos pode ser obtida, (36), da forma:

$$u_{n+1} - 2A_1u_n + A_2u_{n-1} - u_{n-2} = 0, \quad n \in \{2,3, \dots, N-1\} \quad (2.35)$$

O deslocamento discreto pode então ser escrito comparando as equações (2.32) e (2.35), da forma:

$$u_n = \bar{c}_1 \lambda_1^n + \bar{c}_2 \lambda_2^n + \bar{c}_3 \lambda_3^n \quad (2.36)$$

Onde \bar{c}_1 , \bar{c}_2 e \bar{c}_3 são obtidas a partir das condições iniciais do problema.

A consequência da convergência do algoritmo de integração é existência de uma constante positiva $\tilde{\Omega}$ tal que $\Omega \in (0, \tilde{\Omega})$. Dessa forma os autovalores $\lambda_{1,2}$ da matriz de amplificação A são pares conjugados complexos, chamados de raízes principais, e o autovalor λ_3 é chamado de raiz espúria, os quais satisfazem $|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}| \leq 1$. Quando essa condição é atendida, a solução numérica da equação (2.35) pode ser escrita em uma forma semelhante à solução exata da equação (2.17), para um sistema dinâmico amortecido e sem carregamento, (8,23,26,33,36,39), da forma:

$$u_n = (\bar{c}_1 \cos(\bar{\omega}_D t_n) + \bar{c}_2 \text{sen}(\bar{\omega}_D t_n)) e^{-\bar{\xi} \omega t_n} + \bar{c}_3 \lambda_3^n \quad (2.37)$$

Onde $\bar{\xi}$ e $\bar{\omega}$ são a taxa de amortecimento numérica e a frequência natural numérica, respectivamente.

Aplicando as restrições para que os autovalores principais $\lambda_{1,2}$ sejam pares conjugados e o termo $\bar{c}_3 \lambda_3^n$ seja nulo, a solução numérica da equação (2.37) é comparada diretamente com a solução exata da equação (2.17), (31), quando é obtida a maximização da dissipação das altas frequências. (20). Portanto, as expressões matemáticas para o decaimento da amplitude (DA) e alongamento do período (AP) tem a forma:

$$\lambda_1 = A + Bi; \lambda_2 = A - Bi; B \geq 0 \quad (2.38)$$

$$\tan(\bar{\Omega}_D) = B/A \quad (2.39)$$

$$\bar{\omega}_D = \frac{\bar{\Omega}_D}{\Delta t}; \quad \omega = \frac{\Omega}{\Delta t} \quad (2.40)$$

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{2\Omega} \ln(A^2 + B^2) \quad (2.41)$$

$$AP = \frac{\bar{T}_D - T}{T} = \frac{\Omega}{\bar{\Omega}_D} - 1 \quad (2.42)$$

$$\bar{T}_D = \frac{2\pi}{\bar{\omega}_D}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.43)$$

$$DA = 1 - e^{\left(-2\pi\bar{\xi}\frac{\Omega}{\bar{\Omega}_D}\right)} \quad (2.44)$$

Para o método de Bathe (12,14,17,25-27) e de Soares (20-22) a raiz espúria λ_3 da equação característica da matriz de amplificação dos métodos satisfaz $|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}| \leq 1$, uma vez que $\lambda_3 = 0$, devido à formulação dos seus algoritmos, conforme explicado na seção 2.2.3.

2.2.5. Overshoot

Mesmo para os métodos de integração direta no domínio do tempo incondicionalmente estáveis, alguns deles apresentam a tendência de fornecer uma resposta numérica que ultrapassa significativamente a solução exata nos primeiros passos de tempo. (10,23).

Essa tendência é conhecida como *overshoot* e geralmente ocorre para grandes passos de tempo Δt ou para altas frequências naturais ω , de forma que $\Omega = \omega\Delta t$ seja também um valor elevado. (10,17,31).

Deste modo, o fenômeno de *overshoot* pode ser predito através da avaliação da amplitude da resposta numérica, para um sistema homogêneo de 1GL, no primeiro passo de tempo e em função do parâmetro $\Omega = \omega\Delta t$, quando $\Omega \rightarrow \infty$. (10,16,20,21,31).

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \\ \ddot{u}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\infty \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \\ \ddot{u}_0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Onde

$$\mathbf{A}_\infty = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \mathbf{A} \quad (2.46)$$

Outro modo de verificar a existência da tendência de *overshoot* nos primeiros passos de tempo, (17,23), é através da norma da energia do problema em questão, comparando a energia da resposta numérica no passo de tempo $t + n\Delta t$ com a energia no tempo inicial t , para um valor de $\Omega = \omega\Delta t$ fixo, ou ainda comparar a energia da resposta numérica no passo de tempo $t + \Delta t$ (E_n) com a energia no tempo inicial t_0 (E_0), variando o passo de tempo Δt . Portanto:

$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{\|(u_n, \dot{u}_n)\|^2}{\|(u_0, \dot{u}_0)\|^2} = \frac{(\dot{u}_n^2 + \omega^2 u_n^2)}{(\dot{u}_0^2 + \omega^2 u_0^2)} \quad (2.47)$$

Quando $\frac{E_n}{E_0} < 1.0$ diz-se que o algoritmo em análise não apresenta características de *overshooting*.

2.2.6. Custo computacional

O custo computacional de um método de integração é diretamente proporcional ao passo de tempo Δt utilizado para obtenção da resposta, podendo ser definido como o número de operações necessárias para tal. As análises de estabilidade e acurácia de um método de integração servem de guia para a seleção do passo de tempo Δt adequado, o qual deve ser pequeno o suficiente para fornecer uma resposta precisa, porém não tão pequeno a ponto de aumentar o custo computacional sem necessidade. (6).

Em geral, para análises dinâmicas lineares, a solução numérica obtida pelo uso dos algoritmos de integração direta pode ser dividida nas etapas:

1. Cálculo e definição dos parâmetros iniciais do método;
2. Formação e fatoração da matriz de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}$. Em geral, utiliza-se a fatoração $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$, a qual representa a maior parcela do custo computacional individual para obtenção da solução. (42).
3. Cálculo do vetor de carregamentos efetivo $\hat{\mathbf{P}}$.
4. Solução do sistema linear $\mathbf{LDL}^T \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}$ para cada passo de tempo. A parcela do custo computacional devido à solução do sistema linear pode ser maior que a parcela devido à fatoração da matriz rigidez efetiva, a depender do número de passos de tempo utilizados.
5. Cálculo das outras variáveis do problema em questão, geralmente velocidade e aceleração.

Neste trabalho o custo computacional será calculado através da contagem do número de operações matemáticas (FLOP – *Floating Point Operation*) feitas pelo algoritmo para a obtenção da solução.

A contagem do número de operações matemáticas (FLOP) é uma forma de quantificar a quantidade de trabalho realizada por um algoritmo, entretanto este processo é uma aproximação grosseira da eficiência de um programa, pois não leva em consideração outras parcelas do custo computacional associados à utilização da memória, às taxas de transferências de dados, à programação utilizada, etc. (43).

A Tabela 1 apresenta o número de operações (FLOP) utilizadas para diversas operações matemáticas. (43). Os FLOP apresentados na Tabela 1 serão utilizados nas seções seguintes para quantificar o número de operações necessárias para obtenção da solução com a utilização dos algoritmos de integração direta no domínio do tempo em estudo, conforme Tabela 2 até a Tabela 4.

Tabela 1 – FLOP para diferentes operações matemáticas

(continua)

Operação	Dimensão	FLOP
$\alpha \cdot x$	$\alpha \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^m$	m
$x \cdot y$	$x, y \in \mathbf{R}^m$	$2m - 1$
$x + y$	$x, y \in \mathbf{R}^m$	m
$A \cdot x$	$A \in \mathbf{R}^{m \times m}, x \in \mathbf{R}^m$	$2m^2 - m$
$A \cdot B$	$A, B \in \mathbf{R}^{m \times m}$	$2m^3 - m^2$

Tabela 1 – FLOP para diferentes operações matemáticas

(conclusão)

Operação	Dimensão	FLOP
$A \pm B$	$A, B \in \mathbf{R}^{m \times m}$	m^2
$\alpha \cdot A$	$\alpha \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{R}^{m \times m}$	m^2
Resolução de um sistema triangular inferior/superior $Ax = b$	$A \in \mathbf{R}^{m \times m}, x, b \in \mathbf{R}^m$	m^2
Fatorar $A = L \cdot D \cdot L^T$	$A, L, D \in \mathbf{R}^{m \times m}$	$\frac{m^3}{3}$
Resolver um sistema linear com fatoração (com o custo da fatoração incluso) $A = L \cdot D \cdot L^T$ $Ax = b$	$A, L, D \in \mathbf{R}^{m \times m}, x, b \in \mathbf{R}^m$	$\frac{m^3}{3} + 2m^2 + m$
Resolver n sistemas lineares com fatoração (com o custo da fatoração incluso) $A = L \cdot D \cdot L^T$ $Ax = b$	$A, L, D \in \mathbf{R}^{m \times m}, x, b \in \mathbf{R}^m$	$n \left(\frac{m^3}{3} + 2m^2 + m \right)$

3. ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA NO TEMPO

O objetivo deste capítulo é descrever a família de algoritmos de integração direta de Bathe (12,14,25,26), de Bathe - β_1/β_2 (17,27) e de Soares (21). Será realizada também uma breve descrição do método de Newmark (29), por fazer parte integrante do método de Bathe.

3.1. MÉTODO DE NEWMARK (29)

O método de integração de Newmark assume as relações para o deslocamento e velocidade no tempo $t + \Delta t$, (29), da forma:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_t + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_t + \beta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right] \quad (3.2)$$

Rearranjando (3.2) em termos de $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.1), tem-se:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (3.4)$$

Da equação de equilíbrio da dinâmica no tempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right] \\ + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right] + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} \\ = \mathbf{P}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \right] \mathbf{u}_{t+\Delta t} \\ = \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_t + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right] \\ + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_t + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ou ainda:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t} \quad (3.8)$$

Onde $\hat{\mathbf{K}}$ é matriz rigidez efetiva e $\hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}$ é o vetor de carregamentos efetivo, dados por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t} = & \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{u}_t + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_t \right] \\ & + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{u}_t + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right)\ddot{\mathbf{u}}_t \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pode-se ainda definir as constantes de integração, (6), da forma:

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \\ a_4 = \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right); a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right); a_6 = \Delta t(1 - \gamma); a_7 = \gamma\Delta t \end{aligned} \quad (3.11)$$

Portanto (3.7) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}]\mathbf{u}_{t+\Delta t} \\ = \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}[a_0\mathbf{u}_t + a_2\dot{\mathbf{u}}_t + a_3\ddot{\mathbf{u}}_t] + \mathbf{C}[a_1\mathbf{u}_t + a_4\dot{\mathbf{u}}_t + a_5\ddot{\mathbf{u}}_t] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, o deslocamento $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ pode ser obtido a partir da equação (3.12) e na sequência $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ são calculados através das equações (3.13) e (3.14).

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = a_0(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2\dot{\mathbf{u}}_t - a_3\ddot{\mathbf{u}}_t \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_6\ddot{\mathbf{u}}_t + a_7\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \quad (3.14)$$

3.2. MÉTODO DE BATHE (12,14,25,26)

O método de Bathe é um algoritmo de integração direta composto e implícito, proposto inicialmente por Bathe e Baig (12) de forma genérica e com formulação apropriada para análises não lineares. No trabalho de Bathe (14) o método é avaliado na aplicação em sistemas com grandes deslocamentos e grande tempo de duração da análise. Já no trabalho de Bathe e Noh (25) a formulação linear do método é avaliada, novas percepções são apontadas e o algoritmo de integração passa a ser chamado de método de Bathe. Dando continuidade ao estudo do método, novas percepções são ainda apresentadas por Noh e Bathe (26), no qual as características do algoritmo são avaliadas em função da variação da razão de proporção do passo de tempo.

Basicamente o método de Bathe divide o passo de tempo Δt em dois sub-passos, um para o tempo $t + \mu\Delta t$ e outro para $t + \Delta t$, onde μ é conhecida como a razão de proporção do passo de tempo (*splitting ratio*) e a solução da equação do movimento deve ser conhecida para o instante de tempo t .

Para cada sub-passo de tempo a equação da dinâmica estrutural deve ser satisfeita. Portanto, considerando análise linear:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} \quad (3.15)$$

e

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} \quad (3.16)$$

No primeiro sub-passo, para o tempo $t + \mu\Delta t$, utiliza-se o método da Regra trapezoidal, que corresponde a um caso particular do método de Newmark quando $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$. Portanto adotam-se as seguintes expressões para a velocidade e deslocamento:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\mu\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} = \mathbf{u}_t + \frac{\mu\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{u}}_t + \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}) \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17) e explicitando em termos de $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}$ e rearranjando (3.18) em termo de $\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}$, tem-se

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = \frac{4}{(\mu\Delta t)^2}(\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} - \mathbf{u}_t - \mu\Delta t\dot{\mathbf{u}}_t) - \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (3.19)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = \frac{2}{\mu\Delta t}(\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \dot{\mathbf{u}}_t \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) e (3.20) em (3.16) e rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{K} + \frac{2}{\mu\Delta t} \mathbf{C} + \frac{4}{(\mu\Delta t)^2} \mathbf{M} \right] \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} & \quad (3.21) \\ & = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{M} \left[\frac{4}{(\mu\Delta t)^2} \mathbf{u}_t + \frac{4}{\mu\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_t \right] + \mathbf{C} \left[\frac{2}{\mu\Delta t} \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t \right] \end{aligned}$$

Resolvendo a equação (3.21) se obtém o deslocamento $\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}$ no tempo $t + \mu\Delta t$. O valor de $\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}$ é substituído nas equações (3.19) e (3.20) para obter a velocidade e aceleração no instante de tempo $t + \mu\Delta t$.

Na maioria dos casos o método de Bathe utiliza $\mu = \frac{1}{2}$, (12,14,25). Entretanto, Noh e Bathe (26) passam a utilizar o primeiro sub-passo do método como sendo o método de Newmark, em substituição à Regra Trapezoidal tradicionalmente utilizada. Dessa forma o método de Bathe foi avaliado quanto à variação de μ (*splitting ratio*) e seus impactos nas propriedades de dissipação e dispersão numéricas.

Sendo assim, daqui em diante o método de Bathe será avaliado considerando o método de Newmark aplicado ao primeiro sub-passo e este método será chamado de Bathe padrão.

Considerando que o primeiro sub-passo do método de Bathe pode ser escrito de forma genérica utilizando o método de Newmark, (26,29), a equação (3.21) passa a ser idêntica à equação (3.12):

$$\begin{aligned} [\mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}] \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} & \quad (3.22) \\ & = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{M} [a_0 \mathbf{u}_t + a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t] + \mathbf{C} [a_1 \mathbf{u}_t + a_4 \dot{\mathbf{u}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_t] \end{aligned}$$

Onde as constantes $a_0 \dots a_7$ são dadas pela equação (3.11), desde que Δt seja substituído por $\mu\Delta t$. Portanto, as constantes $a_0 \dots a_7$ são reescritas da forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta(\mu\Delta t)^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta\mu\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta\mu\Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \\ a_4 &= \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right); a_5 = \frac{\mu\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right); a_6 = \mu\Delta t(1 - \gamma); a_7 = \gamma\mu\Delta t \end{aligned} \quad (3.23)$$

A equação (3.22) pode ser reescrita da forma:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_1 \quad (3.24)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \quad (3.25)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{M}[a_0 \mathbf{u}_t + a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t] + \mathbf{C}[a_1 \mathbf{u}_t + a_4 \dot{\mathbf{u}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_t] \quad (3.26)$$

Onde $\hat{\mathbf{K}}_1$ é matriz de rigidez efetiva e $\hat{\mathbf{P}}_1$ é o vetor de carregamentos efetivo para o primeiro sub-passo.

O deslocamento $\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}$ é então obtido a partir da equação (3.22) no tempo $t + \mu\Delta t$. A aceleração e a velocidade são então calculadas:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = a_0(\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}_t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (3.27)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_6 \ddot{\mathbf{u}}_t + a_7 \ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \quad (3.28)$$

O segundo sub-passo é aplicado ao incremento temporal $(1-\mu)\Delta t$, de $t + \mu\Delta t$ a $t + \Delta t$, utilizando o método regressivo de Euler com 3 pontos para obter as aproximações para a velocidade e aceleração no tempo $t + \Delta t$. As relações adotadas neste método são:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = c_1 \mathbf{u}_t + c_2 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} + c_3 \mathbf{u}_{t+\Delta t} \quad (3.29)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = c_1 \dot{\mathbf{u}}_t + c_2 \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + c_3 \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \quad (3.30)$$

Onde c_1 , c_2 e c_3 são dadas por:

$$c_1 = \left(\frac{1-\mu}{\mu\Delta t} \right); c_2 = \left(\frac{-1}{(1-\mu)\mu\Delta t} \right); c_3 = \left(\frac{2-\mu}{(1-\mu)\Delta t} \right) \quad (3.31)$$

Substituindo (3.29) e (3.30) em (3.16) e rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{K} + c_3 \mathbf{C} + c_3^2 \mathbf{M}] \mathbf{u}_{t+\Delta t} \\ &= \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} [c_1 c_3 \mathbf{u}_t + c_2 c_3 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} + c_1 \dot{\mathbf{u}}_t + c_2 \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}] \\ & - \mathbf{C} [c_1 \mathbf{u}_t + c_2 c_3 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Novamente, a equação (3.32) pode ser reescrita da forma:

$$\hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_2 \quad (3.33)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K} + c_3 \mathbf{C} + c_3^2 \mathbf{M} \quad (3.34)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{M}[c_1 c_3 \mathbf{u}_t + c_2 c_3 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} + c_1 \dot{\mathbf{u}}_t + c_2 \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}] - \mathbf{C}[c_1 \mathbf{u}_t + c_2 c_3 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}] \quad (3.35)$$

Onde $\widehat{\mathbf{K}}_2$ é matriz de rigidez efetiva e $\widehat{\mathbf{P}}_2$ é o vetor de carregamentos efetivo para o segundo sub-passo.

Resolvendo a equação (3.32) obtém-se o deslocamento, $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$, no tempo $t + \Delta t$. O valor de $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ é substituído nas equações (3.29) e (3.30) para obter a velocidade e aceleração no instante de tempo $t + \Delta t$.

3.2.1. Estabilidade e acurácia

O estudo da estabilidade do método é realizado considerando o sistema de 1 grau de liberdade, equação (2.9), a partir da qual é possível estabelecer a equação recursiva que representa o método de integração, (10,30), da forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_{t+\Delta t} \\ \dot{u}_{t+\Delta t} \\ u_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddot{u}_t \\ \dot{u}_t \\ u_t \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{a_{t+\mu\Delta t}} r + \mathbf{L}_{b_{t+\Delta t}} r \quad (3.36)$$

Onde a matriz de amplificação \mathbf{A} e os operadores de carga \mathbf{L}_a e \mathbf{L}_b , (26), são dados por:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{L}_a = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(2\mu^2 \beta - 4 \left(\beta - \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right) \mu - 2\gamma \right) \Omega^2 + 2\gamma(\mu - 2)\xi\Omega \\ -\mu(1 - \mu)\beta\Omega^2 \Delta t - \gamma(\mu - 2)\Delta t \\ 2\mu(1 - \mu)\beta\xi\Omega\Delta t^2 + \frac{1}{2}(-2\mu^2\beta + 4(4\beta - 2\gamma)\mu + 2\gamma)\Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{L}_b = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \begin{bmatrix} (\beta\mu^2\Omega^2 + 2\gamma\mu\Omega\xi + 1)(\mu - 2)^2 \\ \Delta t(\mu - 1)(\mu - 2)(\beta\mu^2\Omega^2 + 2\gamma\mu\Omega\xi + 1) \\ \Delta t^2(\mu - 1)^2(\beta\mu^2\Omega^2 + 2\gamma\mu\Omega\xi + 1) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

e

$$\beta_1 = \beta\mu^2\Omega^2 + 2\gamma\mu\Omega\xi + 1$$

$$\beta_2 = (\mu - 1)^2\Omega^2 + 2\xi(\mu - 1)(\mu - 2)\Omega + (\mu - 2)^2$$

$$a_{11} = -2 \left(\Omega\xi\mu \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} \right) (\mu - 2)\mu\Omega^2$$

$$a_{12} = -4 \frac{(\mu - 2)\Omega}{\Delta t} \left(\left(\frac{1}{4} \right) \beta\mu^2(\mu - 1)\Omega^3 + \left(\frac{1}{4} \right) (\mu^2\beta + (-\beta + \gamma)\mu + \beta - 2\gamma)\xi\mu\Omega^2 + (\mu - 2) \left(\xi^2\gamma\mu + \frac{1}{4} \right) \Omega + \left(\frac{1}{2} \right) \xi(\mu - 2) \right) \quad (3.40)$$

$$a_{13} = -\frac{1}{\Delta t^2} (\mu - 2)\Omega^2 (\Omega^2\beta\mu^3 - 2\beta\mu^2\Omega^2 + 2\Omega\gamma\mu^2\xi + \Omega^2\beta\mu - 4\gamma\mu\Omega\xi + \mu - 2)$$

$$a_{21} = -2\Delta t \left(\Omega\xi\mu \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} \right) \mu(\mu - 1)\Omega^2$$

$$a_{22} = (\Omega^2\beta\mu^4 + (-4\Omega^2\beta + 2\gamma\Omega\xi)\mu^3 + (1 - 2\Omega^3\xi(\beta - \gamma) + 4\Omega^2\beta - 8\gamma\Omega\xi)\mu^2 + (-4 + 2\Omega^3\xi(\beta - \gamma) + \Omega^2 + 8\gamma\Omega\xi)\mu - \Omega^2 + 4)$$

$$a_{23} = -\frac{1}{\Delta t} \Omega^2 (\mu - 1) (\Omega^2 \beta \mu - 2\beta \mu^2 \Omega^2 + 2\Omega \gamma \mu^2 \xi + \Omega^2 \beta \mu - 4\gamma \mu \Omega \xi + \mu - 2)$$

$$a_{31} = 4\Delta t^2 \left(\Omega \xi \mu \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} \right) \mu \left(\xi (\mu - 1) \Omega + \frac{\mu}{2} - 1 \right)$$

$$a_{32} = 4\Delta t \left(\left(\left(\frac{1}{4} \right) \beta \mu^2 - \frac{\beta \mu}{2} + (\beta - \gamma) \xi^2 \right) \mu \Omega^2 (\mu - 1) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \right) \Omega (\gamma \mu^3 + 1 + (\beta - 4\gamma) \mu^2 + (-2\beta + 4\gamma - 1) \mu) \xi \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{4} \right) (\mu - 2)^2 \right)$$

$$a_{33} = (2\Omega \xi (\mu - 1) + \mu - 2) (\Omega^2 \beta \mu^3 - 2\beta \mu^2 \Omega^2 + 2\Omega \gamma \mu^2 \xi + \Omega^2 \beta \mu - 4\gamma \mu \Omega \xi + \mu - 2)$$

$$\Omega = \omega \Delta t$$

Onde ω é a frequência natural do sistema.

A representação do método apresentada na equação (3.36) é utilizada para o estudo da estabilidade e acurácia. Conforme Noh e Bathe (26), os autovalores da matriz de amplificação A , para o caso de vibração sem amortecimento, podem ser obtidos por:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda - A_3 \quad (3.41)$$

Onde os invariantes $A_i, i = 1, 2, 3$ são dados por:

$$\begin{aligned}
A_1 = \frac{1}{\beta_{01}\beta_{02}} & \left(\left(\frac{1}{4} \right) \mu^2 (2\beta - \gamma) (\mu - 1) \Omega^4 \right. \\
& + \left(-1 + \mu^4 \beta - 4\mu^3 \beta + \left(\frac{1}{4} \right) (16\beta + 2\gamma + 1) \mu^2 \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{4} \right) (-4\gamma + 2) \mu \right) \Omega^2 + (\mu - 2)^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = \left(\frac{1}{\beta_{01}\beta_{02}} & \left(\left(\mu^4 \beta - 4\mu^3 \beta + \left(\frac{1}{2} \right) (8\beta + 2\gamma + 1) \mu^2 + \left(\frac{1}{2} \right) (-4\gamma - 2) \mu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 1 \right) \Omega^2 + (\mu - 2)^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$A_3 = 0 \tag{3.44}$$

$$\beta_{01} = \beta \mu^2 \Omega^2 \tag{3.45}$$

$$\beta_{02} = (\mu - 1)^2 \Omega^2 + (\mu - 2)^2 \tag{3.46}$$

É importante notar que para o método de Bathe padrão a aceleração pode ser escrita em função do deslocamento e velocidade. Dessa forma, uma linha da matriz de amplificação \mathbf{A} é uma combinação linear das demais linhas (37), o que resulta em:

$$\det(\mathbf{A}) = A_3 = 0 \tag{3.47}$$

Como já mencionado na seção 2.2, para representar a resposta dinâmica, os autovalores de A devem ser um par conjugado complexo, (8,23,26,33,36,39), ou seja:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2A_1\lambda + A_2) \quad (3.48)$$

Onde $\lambda_3 = 0$ e

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (3.49)$$

Logo, o raio espectral, (26,28), é dado por:

$$\rho = |\lambda_{1,2}| = \sqrt{A_2} \quad (3.50)$$

A condição para $\lambda_{1,2}$ ser um par conjugado complexo é:

$$A_1^2 - A_2 \leq 0 \quad (3.51)$$

As equações (3.50) e (3.51) implicam que o método de Bathe pode representar resposta dinâmica e ser incondicionalmente estável, (26,31), quando:

$$\gamma = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4}; \{\mu \in R \mid \mu \neq 0 \text{ e } \mu \neq 1\} \quad (3.52)$$

Ainda, o amortecimento numérico, alongamento do período e decaimento da amplitude, (26,31), são dados por:

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{\Omega} \ln(\rho(\mathbf{A})) \quad (3.53)$$

$$PE = \frac{\Omega}{\bar{\Omega}} - 1 \quad (3.54)$$

$$AD = 1 - e^{-2\pi\bar{\xi}\frac{\Omega}{\bar{\Omega}}} \quad (3.55)$$

Onde

$$\bar{\Omega} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{A_2 - A_1^2}}{A_1} \right), \quad \bar{\Omega} > \frac{\pi}{2} \quad (3.56)$$

3.2.2. Consistência

Zhang *et al.* (31) demonstrou que o método de Bathe padrão, utilizando o método de Newmark para o primeiro sub-passo, apresenta precisão de segunda ordem para a aceleração, velocidade e deslocamento somente quando $\gamma = \frac{1}{2}$, independentemente do sistema transiente ser de múltiplos graus de liberdade, apresentar amortecimento físico e do tipo de carregamento aplicado. Ou seja, para $\gamma = \frac{1}{2}$ tanto o método de Newmark, aplicado ao primeiro sub-passo, quanto o método da regressão de Euler utilizando 3

pontos, aplicado no segundo sub-passo, apresentam precisão de segunda ordem. (26,31).

3.2.3. Redução do custo computacional

As equações (3.21) e (3.22) mostram que algoritmo de Bathe padrão, considerando a Regra Trapezoidal ($\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$) para o primeiro sub-passo e método regressivo de Euler com 3 pontos para o segundo sub-passo, necessita fatorar duas matrizes de rigidez efetivas para a solução dos sistemas lineares, fato que aumenta o custo computacional do algoritmo. Noh e Bathe (26) citam ainda que o método de Bathe padrão é aproximadamente duas vezes mais custoso computacionalmente que a Regra Trapezoidal, por passo de tempo Δt , já que apresenta dois sistemas lineares para resolver.

Entretanto, para a proporção de divisão do passo de tempo de $\mu = 2 - \sqrt{2}$ as matrizes de rigidez efetiva das equações (3.21) e (3.32) se tornam iguais, sendo necessária a fatoração de apenas uma matriz. (6,12). Para os valores $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$ e $\mu = 2 - \sqrt{2}$ o método continua sendo incondicionalmente estável, com precisão de segunda ordem e apresenta as características de dispersão e dissipação muito próximas de quando se utiliza a razão de proporção do passo de tempo de $\mu = \frac{1}{2}$. (25).

3.2.4. Overshoot

Para um sistema homogêneo de 1GL, a matriz de amplificação A do método de Bathe padrão ($\mu = 1/2$, $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$), no limite $\Omega \rightarrow \infty$, se torna:

$$\mathbf{A}_\infty = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & O(\Delta t^{-1}) & O(\Delta t^{-2}) \\ 0 & 0 & O(\Delta t^{-1}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Dessa forma, a aceleração, a velocidade e o deslocamento no primeiro passo de tempo Δt , quando $\Omega \rightarrow \infty$, (28), podem ser escritos como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \dot{u}_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \dot{u}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} O(\Delta t^{-1})\dot{u}_0 + O(\Delta t^{-2})u_0 \\ O(\Delta t^{-1})u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Portanto, observa-se que o método de Bathe padrão não apresenta o comportamento de *overshooting* para o deslocamento, velocidade e aceleração no primeiro passo de tempo. (31).

3.2.5. Algoritmo e custo computacional

O algoritmo para implementação numérica do método de Bathe padrão (12,14,25,26) e a contagem do número de operação matemáticas de cada etapa é apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

(continua)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

1. Definições e cálculos iniciais

1.1. Montar as matrizes globais \mathbf{M} , \mathbf{K} e $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times m}$.

Tabela 2 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

(continuação)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

1.2. Entrar com os vetores deslocamento, velocidade e aceleração no tempo inicial:
 $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$ e $\ddot{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{R}^{m \times 1}$.

1.3. Definir os parâmetros γ, β .

1.4. Definir a razão de proporção do passo de tempo (*splitting ratio*) de μ .

1.5. Definir o passo de tempo Δt da análise.

1.6. Calcular as constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{\beta(\mu\Delta t)^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta\mu\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta\mu\Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)$$

$$a_4 = \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right); a_5 = \frac{\mu\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right); a_6 = \mu\Delta t(1 - \gamma); a_7 = \gamma\mu\Delta t$$

$$c_1 = \left(\frac{1 - \mu}{\mu\Delta t}\right); c_2 = \left(\frac{-1}{(1 - \mu)\mu\Delta t}\right); c_3 = \left(\frac{2 - \mu}{(1 - \mu)\Delta t}\right)$$

N° operações = 36

1.7. Formar as matrizes de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}; \hat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K} + c_3\mathbf{C} + c_3^2\mathbf{M}$$

N° operações = $4m^2$; $4m^2 + 1$, total $8m^2 + 1$

1.8. Triangularizar as matrizes $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{D}_1\mathbf{L}_1^T; \hat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{L}_2\mathbf{D}_2\mathbf{L}_2^T$$

N° operações = $\frac{m^3}{3}$; $\frac{m^3}{3}$, total $\frac{2m^3}{3}$

Tabela 2 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

(continuação)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

1.9. Número total de operações dos cálculos iniciais:

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ total de operações da etapa 1} = \frac{2m^3}{3} + 8m^2 + 37$$

2. Primeiro sub-passo2.1. Calcular o vetor de carregamento efetivo no tempo $t + \mu\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{M}[a_0\mathbf{u}_t + a_2\dot{\mathbf{u}}_t + a_3\ddot{\mathbf{u}}_t] + \mathbf{C}[a_1\mathbf{u}_t + a_4\dot{\mathbf{u}}_t + a_5\ddot{\mathbf{u}}_t]$$

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ operações} = 2(2m^2 + 5m - m) + 2m = 4m^2 + 10m$$

2.2. Resolver o sistema linear para obter o deslocamento no tempo $t + \mu\Delta t$:

$$\mathbf{L}_1\mathbf{D}_1\mathbf{L}_1^T \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_1$$

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ operações} = 2m^2 + m$$

2.3. Calcular a aceleração e a velocidade no tempo $t + \mu\Delta t$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = a_0(\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2\dot{\mathbf{u}}_t - a_3\ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ operações} = 6m$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_6\ddot{\mathbf{u}}_t + a_7\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}$$

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ operações} = 4m$$

2.4. Número total de operações do primeiro sub-passo:

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ total de operações da etapa 2} = 6m^2 + 21m$$

Tabela 2 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

(conclusão)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe padrão

3. Segundo sub-passo

3.1. Calcular o vetor de carregamento efetivo no tempo $t + \Delta t$:

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{M}[c_1 c_3 \mathbf{u}_t + c_2 c_3 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} + c_1 \dot{\mathbf{u}}_t + c_2 \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}] - \mathbf{C}[c_1 \mathbf{u}_t + c_2 c_3 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}]$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{operações} = 4m^2 + 10m + 3$$

3.2. Resolver o sistema linear para obter o deslocamento no tempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2^T \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_2$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{operações} = 2m^2 + m$$

3.3. Calcular a velocidade e a aceleração no tempo $t + \Delta t$:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = c_1 \mathbf{u}_t + c_2 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} + c_3 \mathbf{u}_{t+\Delta t}$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{operações} = 5m$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = c_1 \dot{\mathbf{u}}_t + c_2 \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + c_3 \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{operações} = 5m$$

3.4. Número total de operações segundo sub-passo:

$$\mathbf{N}^\circ \text{total de operações da etapa 3} = 6m^2 + 21m + 3$$

4. Repetir as etapas 2 e 3 para os próximos passos de tempo $t + n\Delta t$

$$\mathbf{N}^\circ \text{total de operações do algoritmo} = \left(\frac{2m^3}{3} + 8m^2 + 37\right) + n(12m^2 + 42m) + 3$$

3.3. MÉTODO DE BATHE - β_1/β_2 (17,27)

O algoritmo de Bathe - β_1/β_2 é um esquema de integração direta implícita e uma variação do método de Bathe, descrito na seção 3.2, cujo objetivo é possibilitar a prescrição da dissipação numérica desejada através dos parâmetros β_1 e β_2 . O esquema de Bathe - β_1/β_2 também utiliza dois sub-passos por passo de tempo, sendo a Regra Trapezoidal aplicada ao primeiro sub-passo e Regra Trapezoidal de 3 pontos para o segundo sub-passo. (27).

As equações que definem o método de Bathe - β_1/β_2 serão descritas adiante de acordo com Malakiyeh *et al.* (17).

Da mesma forma como o método de Bathe padrão, o primeiro sub-passo utiliza o método da Regra Trapezoidal para o incremento de tempo $\mu\Delta t$. Portanto a condição de equilíbrio no tempo $t + \mu\Delta t$ é obtida a partir de:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} \quad (3.59)$$

Utilizando as equações (3.19) e (3.20) e substituindo na equação (3.59) obtém-se:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_1 \quad (3.60)$$

Onde

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K} + \frac{2}{\mu\Delta t} \mathbf{C} + \frac{4}{(\mu\Delta t)^2} \mathbf{M} \quad (3.61)$$

e

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{M} \left[\frac{4}{(\mu\Delta t)^2} \mathbf{u}_t + \frac{4}{\mu\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_t \right] + \mathbf{C} \left[\frac{2}{\mu\Delta t} \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t \right] \quad (3.62)$$

Resolvendo a equação (3.60) obtém-se o deslocamento, $\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}$, no tempo $t + \mu\Delta t$. O valor de $\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t}$ é substituído nas equações (3.19) e (3.20) para obter a velocidade e aceleração no instante de tempo $t + \mu\Delta t$.

Já para o segundo sub-passo é utilizado a Regra Trapezoidal de 3 pontos no tempo $t + \Delta t$, satisfazendo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} \quad (3.63)$$

Estabelecendo a relação entre o deslocamento, velocidade e aceleração entre os tempos discretos t , $t + \mu\Delta t$ e $t + \Delta t$ como sendo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + (\mu\Delta t) & \left((1 - \beta_1)\ddot{\mathbf{u}}_t + \beta_1\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \right) \\ & + ((1 - \mu)\Delta t) \left((1 - \beta_2)\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + \beta_2\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + (\mu\Delta t) & \left((1 - \beta_1)\dot{\mathbf{u}}_t + \beta_1\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \right) \\ & + ((1 - \mu)\Delta t) \left((1 - \beta_2)\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + \beta_2\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Rearranjando as equações (3.64) e (3.65) para explicitar $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ em termos do deslocamento, velocidade e aceleração das condições de equilíbrio dinâmico dos tempos discretos t , $t + \mu\Delta t$:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = & \frac{1}{(\beta_2(1-\mu)\Delta t)^2} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{\mu(1-\beta_1) + \beta_2(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t \\ & - \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} - \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ & - \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_2(1-\mu)\Delta t} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \quad (3.67)$$

Substituindo as equações (3.66) e (3.67) na equação (3.63), obtém-se:

$$\hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_2 \quad (3.68)$$

Onde

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K} + \frac{1}{\beta_2(1-\mu)\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{(\beta_2(1-\mu)\Delta t)^2} \mathbf{M} \quad (3.69)$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} & \left[\frac{1}{(\beta_2(1-\mu)\Delta t)^2} \mathbf{u}_t + \frac{\mu(1-\beta_1) + \beta_2(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2 \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \ddot{\mathbf{u}}_t \right. \\
& + \left. \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2 \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} + \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \right] \\
& + \mathbf{C} \left[\frac{1}{\beta_2(1-\mu)\Delta t} \mathbf{u}_t + \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_t \right. \\
& + \left. \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \right]
\end{aligned} \tag{3.70}$$

O método de Bathe - β_1/β_2 pode representar a Regra Trapezoidal quando $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$, para o primeiro e segundo sub-passos. Adicionalmente a estes parâmetros de β_1 e β_2 , quando $\mu = \frac{1}{2}$ as matrizes $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$ são iguais e é necessária somente a fatoração de uma matriz para resolver o sistema linear, reduzindo significativamente o custo computacional do método. Ainda, para as relações:

$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{2\mu(\mu-2)} \text{ e } \beta_2 = \frac{1}{2-\mu} \tag{3.71}$$

O método de Bathe - β_1/β_2 reproduz o método de Bathe padrão e para que $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$ se tornem idênticas, é necessário que $\mu = \frac{2\beta_2}{1+2\beta_2}$, para qualquer β_1 . (17,27).

3.3.1. Estabilidade e acurácia

Novamente, o estudo da estabilidade do método é realizado considerando o sistema de 1 grau de liberdade, equação (2.9), a partir do qual é possível estabelecer a equação recursiva que representa o método de integração, (10,30), da forma:

$$\begin{bmatrix} u_{t+\Delta t} \\ \dot{u}_{t+\Delta t} \\ \ddot{u}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_t \\ \dot{u}_t \\ \ddot{u}_t \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{a_{t+\mu\Delta t}} r + \mathbf{L}_{b_{t+\Delta t}} r \quad (3.72)$$

Onde a matriz de amplificação \mathbf{A} e os operadores de carga \mathbf{L}_a e \mathbf{L}_b são dados por Malakiyeh *et al.* (17):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{L}_a = \begin{bmatrix} l_{a1} \\ l_{a2} \\ l_{a3} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{L}_b = \begin{bmatrix} l_{b1} \\ l_{b2} \\ l_{b3} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\mu\Delta t}{2}; a_1 = a_0^2; a_2 = 2a_0; a_3 = \frac{1}{\beta_2(1-\mu)\Delta t}; a_4 = a_3^2; \\ a_5 &= \frac{\mu(1-\beta_1)+\beta_2(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2\Delta t}; a_6 = \frac{\mu\beta_1+(1-\beta_2)(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2\Delta t}; a_7 = \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)}; a_8 = \frac{\mu\beta_1+(1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$D = (1 + 2\xi\omega a_0 + \omega a_1)^{-1}; D_1 = (a_4 + 2\xi\omega a_3 + \omega^2)^{-1}; b_1 = -D\omega^2;$$

$$b_2 = D(-2\xi\omega - \omega^2 a_2); b_3 = D(-2\xi\omega a_0 - \omega^2 a_1); b_4 = a_0 b_1; b_5 = 1 + a_0 b_2 \quad (3.77)$$

$$b_6 = a_0 + a_0 b_3;$$

$$a_{11} = D_1(a_4 + 2\xi\omega a_3 + b_4(a_6 + 2\xi\omega a_8) + b_1 a_8);$$

$$a_{12} = D_1(a_5 + 2\xi\omega a_7 + b_5(a_6 + 2\xi\omega a_8) + b_2 a_8);$$

$$a_{13} = D_1(a_7 + b_6(a_6 + 2\xi\omega a_8) + b_3 a_8);$$

$$a_{21} = a_{11} a_3 - a_3 - b_4 a_8;$$

$$a_{22} = a_{12} a_3 - a_7 - b_5 a_8; \quad (3.78)$$

$$a_{23} = a_{13} a_3 - b_6 a_8;$$

$$a_{31} = a_{21} a_3 - b_1 a_8;$$

$$a_{32} = a_{22} a_3 - a_3 - b_2 a_8;$$

$$a_{33} = a_{23} a_3 - a_7 - b_7 a_8;$$

$$l_{a1} = D_1 D(a_0(a_6 + 2\xi\omega a_8) + a_8);$$

$$l_{a2} = l_{a1} a_3 - D a_0 a_8;$$

$$l_{a3} = l_{a2} a_3 - D a_8;$$

$$(3.79)$$

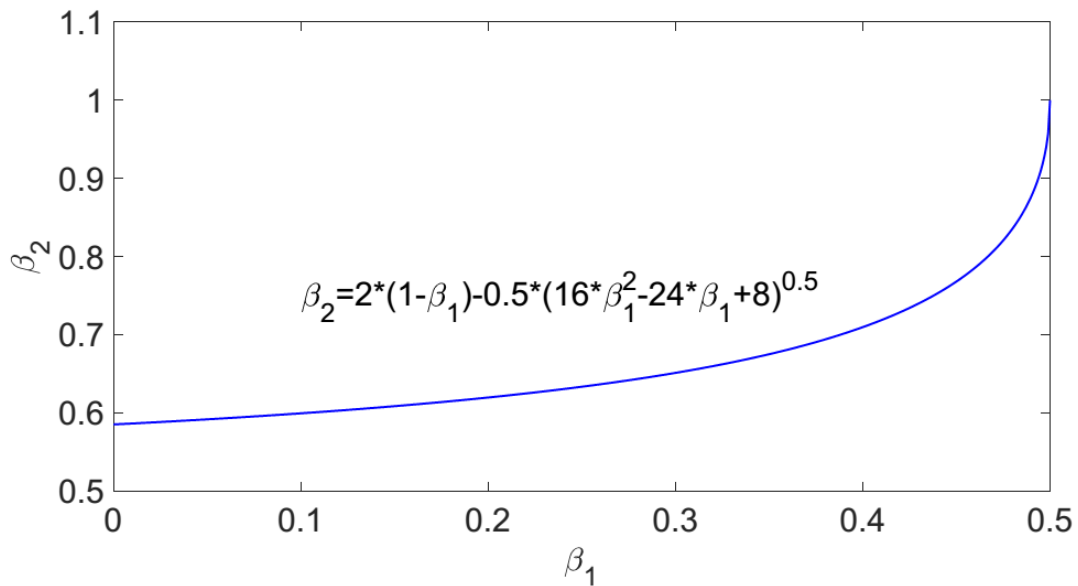
$$l_{b1} = D_1;$$

$$l_{b2} = a_3 D_1;$$

$$l_{b3} = a_3^2 D_1$$

Para os casos de vibração sem amortecimento ($\xi = 0$), o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta L-estabilidade, com possibilidade de obter precisão de segunda ordem para curva assinalada na Figura 3, para $0 < \mu < 1$. (27).

Figura 3 – Curva de L-estabilidade e precisão de segunda ordem do método Bathe - β_1/β_2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ou seja,

$$0 < \beta_1 < 0.5 \text{ e } \beta_2 = 2(1 - \beta_1) - \frac{1}{2}(16\beta_1^2 - 24\beta_1 + 8)^{1/2} \quad (3.80)$$

Quando,

$$\mu = \frac{(\beta_2 - 1)}{(2\beta_1 - 2 + \beta_2)} \text{ e } 0 < \mu < 1 \quad (3.81)$$

A partir da matriz de amplificação do método pode-se estudar as propriedades de dissipação e dispersão do método, através do decaimento da amplitude (DA) e alongamento do período (AP), respectivamente, conforme as equações apresentadas na seção 2.2.4.

3.3.2. Consistência

A partir do erro de truncamento do deslocamento, velocidade e aceleração do método, independentemente da presença de amortecimento físico do sistema dinâmico, o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta precisão de segunda ordem, (27), quando:

$$0 < \beta_1 < 0.5 \text{ e } \beta_2 = 2(1 - \beta_1) - \frac{1}{2}(16\beta_1^2 - 24\beta_1 + 8)^{1/2} \quad (3.82)$$

$$\mu = \frac{(\beta_2 - 1)}{(2\beta_1 - 2 + \beta_2)} \text{ e } 0 < \mu < 1$$

Portanto, o método de Bathe - β_1/β_2 somente poderá ter L-estabilidade e precisão de segunda ordem quando a equação (3.81) e (3.82) forem satisfeitas.

No presente trabalho, todas as propriedades do algoritmo de Bathe - β_1/β_2 serão estudadas a partir do atendimento da equação (3.82).

3.3.3. Redução do custo computacional

Como já apresentado, o algoritmo de Bathe - β_1/β_2 divide o passo de tempo em dois sub-passos. Portanto há a necessidade de fatoração das matrizes de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$, equações (3.61) e (3.69), para obtenção da resposta dinâmica, fato que aumenta o custo computacional do método, quando comparados a outros algoritmos que

necessitam apenas de fatorar uma matriz de rigidez efetiva e resolver apenas um sistema linear por passo de tempo Δt .

Entretanto, é possível selecionar valores de β_1 e β_2 , com a razão de proporção do passo de tempo pertencente ao intervalo $0 < \mu < 1$ e para os quais as matrizes de rigidez efetiva $\widehat{\mathbf{K}}_1$ e $\widehat{\mathbf{K}}_2$ se tornam iguais e o método ainda apresenta L-estabilidade e precisão de segunda ordem. Para isso, os valores de β_1 e β_2 , (27), são:

$$\beta_1 = 0.75 - 0.25\sqrt{2} \text{ e } \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.83)$$

Dessa forma é necessário fatorar apenas uma matriz rigidez, desde que os parâmetros β_1 , β_2 e μ sejam mantidos para todos os sub-passos, reduzindo o custo computacional do método. Mesmo assim, ainda é necessário resolver dois sistemas lineares por passo de tempo Δt .

3.3.4. Overshoot

Para um sistema de 1GL a possibilidade de ocorrência do fenômeno não físico de *overshooting* pode ser predito através da razão da norma da energia no instante de tempo $t = n\Delta t$ e t , conforme equação (2.47). Dessa forma, para que o algoritmo de Bathe - β_1/β_2 não apresente *overshoot* deve-se satisfazer:

$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{\|(u_n, \dot{u}_n)\|^2}{\|(u_0, \dot{u}_0)\|^2} = \frac{(\dot{u}_n^2 + \omega^2 u_n^2)}{(\dot{u}_0^2 + \omega^2 u_0^2)} < 1.0 \quad (3.84)$$

Tal condição é satisfeita para diferentes valores de μ , β_1 e β_2 , condições iniciais $u_0 = 1$, $\dot{u}_0 = 0$ e $\Omega = \omega\Delta t = 10$, conforme apresentado por Malakiyeh *et al.* (17), demonstrando que o método não apresenta características de *overshooting* nestas condições.

3.3.5. Algoritmo e custo computacional

O algoritmo para implementação numérica do método de Bathe - β_1/β_2 (17,27) e a contagem do número de operação matemáticas de cada etapa é apresentada na Tabela 3.

Tabela 3 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

(continua)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

1. Definições e cálculos iniciais

- 1.1. Montar as matrizes globais M , K e $C \in \mathbf{R}^{m \times m}$.
 - 1.2. Entrar com os vetores deslocamento, velocidade e aceleração no tempo inicial: \mathbf{u}_0 , $\dot{\mathbf{u}}_0$ e $\ddot{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{R}^{m \times 1}$.
 - 1.3. Definir os parâmetros $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$.
 - 1.4. Definir os parâmetros β_1 e β_2 .
-

Tabela 3 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

(continuação)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

1.5. Definir a razão de proporção do passo de tempo (*splitting ratio*) de μ .1.6. Definir o passo de tempo Δt da análise.

1.7. Calcular as constantes de integração:

$$a_0 = \frac{4}{(\mu\Delta t)^2}; a_1 = \frac{2}{\mu\Delta t}; a_2 = \frac{4}{\mu\Delta t}; a_3 = 1$$

$$a_4 = 1; a_5 = 0; a_6 = \frac{\mu\Delta t}{2}; a_7 = \frac{\mu\Delta t}{2}$$

N° operações = 111.8. Formar as matrizes de rigidez efetiva \hat{K}_1 e \hat{K}_2 :

$$\hat{K}_1 = K + a_0 M + a_1 C$$

$$\hat{K}_2 = K + \frac{1}{\beta_2(1-\mu)\Delta t} C + \frac{1}{(\beta_2(1-\mu)\Delta t)^2} M$$

N° operações = $4m^2$; $4m^2 + 9$, total $8m^2 + 9$ 1.9. Triangularizar as matrizes \hat{K}_1 e \hat{K}_2 :

$$\hat{K}_1 = L_1 D_1 L_1^T; \hat{K}_2 = L_2 D_2 L_2^T$$

N° operações = $\frac{m^3}{3}$; $\frac{m^3}{3}$, total $\frac{2m^3}{3}$

Tabela 3 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

(continuação)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

1.10. Número total de operações dos cálculos iniciais:

$$\text{N}^\circ \text{ total de operações da etapa 1} = \frac{2m^3}{3} + 8m^2 + 20$$

2. Primeiro sub-passo2.1. Calcular o vetor de carregamento efetivo no tempo $t + \mu\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_{t+\mu\Delta t} + \mathbf{M}[a_0\mathbf{u}_t + a_2\dot{\mathbf{u}}_t + a_3\ddot{\mathbf{u}}_t] + \mathbf{C}[a_1\mathbf{u}_t + a_4\dot{\mathbf{u}}_t + a_5\ddot{\mathbf{u}}_t]$$

$$\text{N}^\circ \text{ operações} = 4m^2 + 8m$$

2.2. Resolver o sistema linear para obter o deslocamento no tempo $t + \mu\Delta t$:

$$\mathbf{L}_1\mathbf{D}_1\mathbf{L}_1^T \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_1$$

$$\text{N}^\circ \text{ operações} = 2m^2 + m$$

2.3. Calcular a aceleração e a velocidade no tempo $t + \mu\Delta t$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = a_0(\mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2\dot{\mathbf{u}}_t - a_3\ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\text{N}^\circ \text{ operações} = 6m$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_6\ddot{\mathbf{u}}_t + a_7\ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}$$

$$\text{N}^\circ \text{ operações} = 4m$$

Tabela 3 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

(continuação)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

2.4. Número total de operações do primeiro sub-passo:

$$\mathbf{N}^\circ \text{ total de operações da etapa 2} = 6m^2 + 19m$$

3. Segundo sub-passo3.1. Calcular o vetor de carregamento efetivo no tempo $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} & \left[\frac{1}{(\beta_2(1-\mu)\Delta t)^2} \mathbf{u}_t + \frac{\mu(1-\beta_1) + \beta_2(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2 \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \ddot{\mathbf{u}}_t \right. \\ & \left. + \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2 \Delta t} \mathbf{u}_{t+\mu\Delta t} + \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \right] \\ & + \mathbf{C} \left[\frac{1}{\beta_2(1-\mu)\Delta t} \mathbf{u}_t + \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{ operações} = 4m^2 + 12m + 52$$

3.2. Resolver o sistema linear para obter o deslocamento no tempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2^T \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_2$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{ operações} = 2m^2 + m$$

Tabela 3 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

(conclusão)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Bathe - β_1/β_2

3.3. Calcular a velocidade e a aceleração no tempo $t + \Delta t$:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_2(1-\mu)\Delta t} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \dot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t}$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{ operações} = 5m + 16$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = & \frac{1}{(\beta_2(1-\mu)\Delta t)^2} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{\mu(1-\beta_1) + \beta_2(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ & - \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{(\beta_2(1-\mu))^2\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} - \frac{\mu(1-\beta_1)}{\beta_2(1-\mu)} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ & - \frac{\mu\beta_1 + (1-\beta_2)(1-\mu)}{\beta_2(1-\mu)} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\mu\Delta t} \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}^\circ \text{ operações} = 9m + 36$$

3.4. Número total de operações segundo sub-passo:

$$\mathbf{N}^\circ \text{ total de operações da etapa 3} = 6m^2 + 27m + 104$$

4. Repetir as etapas 2 e 3 para os próximos passos de tempo $t + n\Delta t$

$$\mathbf{N}^\circ \text{ total de operações do algoritmo} = \left(\frac{2m^3}{3} + 8m^2 + 20 \right) + n(12m^2 + 46m) + 104$$

Caso se utilize o parâmetro $\beta_1 = 0.3964 = 0.75 - 0.25\sqrt{2}$ e $\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, este método apresenta matrizes de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$ idênticas, necessitando a fatoração desta matriz apenas uma vez, reduzindo o número total de operações para $\left(\frac{m^3}{3} + 8m^2 + 20 \right) + n(12m^2 + 46m) + 104$.

3.4. MÉTODO DE SOARES (21)

Assim como os métodos anteriores, o algoritmo proposto por Soares (21) é uma metodologia de integração direta no domínio do tempo e implícita, na qual as propriedades do modelo são levadas em consideração através de parâmetros locais, somente relações entre deslocamentos e velocidades são consideradas, não sendo necessário o cálculo das acelerações.

Conforme Soares (20,21), integrando cada equação do sistema de equações do movimento (2.10), para o passo de tempo Δt , tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)dt + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)dt + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{K}\mathbf{u}(t)dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{P}(t)dt \quad (3.85)$$

Para solução das integrais são consideradas as aproximações:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)dt \approx \mathbf{M}(\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}_t) \quad (3.86)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)dt \approx \mathbf{C}(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) \quad (3.87)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{K}\mathbf{u}(t)dt \approx \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{D}_1 \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{D}_2 \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}_t) \quad (3.88)$$

Na equação (3.88) \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são matrizes diagonais que contém os parâmetros do método:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} d1_1 & 0 & 0 \\ 0 & d1_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} d2_1 & 0 & 0 \\ 0 & d2_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Os parâmetros do método $d1_i$ e $d2_i$ são dados por Soares (21):

$$d1_i = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh(a\omega_i\Delta t) \text{ e } d2_i = 2\sqrt{2d1_i} - d1_i - 1 \quad (3.90)$$

O parâmetro a controla a dissipação numérica do método, sendo a dissipação numérica nula quando $a = 0$ e proporcionalmente aumenta com o aumento de a . Já o parâmetro ω_i leva em conta as propriedades do modelo relacionadas com cada equação do conjunto de equações do movimento, (21), podendo ser calculado como:

$$\omega_i = \sqrt{K_{ii}/M_{ii}} \quad (3.91)$$

Onde K_{ii} e M_{ii} são os elementos da diagonal principal das matrizes de rigidez \mathbf{K} e de massa \mathbf{M} . Dessa forma o produto $a\omega_i$ controla a intensidade da dissipação numérica introduzida em cada equação que governa o movimento. (21).

O campo de deslocamentos é obtido a partir da aproximação linear conforme apresentado na Figura 4, de onde surge a relação:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}\Delta t \quad (3.92)$$

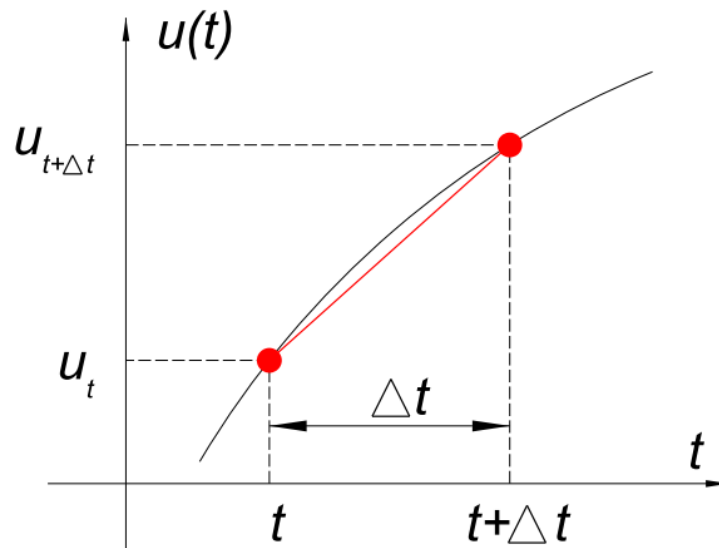
Onde $\dot{\mathbf{u}}$ pode ser escrito como:

$$\dot{u} = \frac{1}{2}\dot{u}_{t+\Delta t} + \frac{1}{2}\dot{u}_t \quad (3.93)$$

Portanto:

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \frac{\Delta t}{2}\dot{u}_{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\dot{u}_t \quad (3.94)$$

Figura 4 – Aproximação do deslocamento



Fonte: elaborado pelo autor, adaptado de (20)

Substituindo as aproximações (3.86) a (3.88) e (3.94) na equação (3.85) se obtém a equação recursiva do método de Soares (21):

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{D}_1 \mathbf{K} \right) \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} & \quad (3.95) \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{P}(t) dt + \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_t - \Delta t \mathbf{K} \mathbf{u}_t - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{D}_2 \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}_t \end{aligned}$$

A integração numérica do vetor de carregamento será realizada através da Regra Trapezoidal neste trabalho, entretanto outros métodos podem ser utilizados para este propósito. Dessa forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{P}(t) dt = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{P}_t) \Delta t \quad (3.96)$$

A equação (3.95) pode ser reescrita da forma:

$$\hat{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}} \quad (3.97)$$

Onde $\hat{\mathbf{K}}$ é matriz de rigidez efetiva e $\hat{\mathbf{P}}$ é o vetor de carregamento efetivo.

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{D}_1 \mathbf{K} \quad (3.98)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{P}_t) \Delta t + \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_t - \Delta t \mathbf{K} \mathbf{u}_t - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{D}_2 \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}_t \quad (3.99)$$

Resolvendo o sistema linear da equação (3.97) se obtém a velocidade no tempo $t + \Delta t$. Após, com a equação (3.94) calcula-se o deslocamento $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$.

Uma das principais características deste método é a sua simplicidade. Somente é necessário definir o parâmetro a no início da solução e não há a necessidade de calcular a aceleração para computar o deslocamento e velocidade no passo de tempo seguinte, reduzindo o custo computacional do algoritmo.

O método da Regra Trapezoidal também pode ser reproduzido através do método de Soares (21), através da utilização do parâmetro $a = 0$.

3.4.1. Estabilidade e acurácia

Soares (20,21) apresenta as equações dos termos da matriz de amplificação A e operador de carga L . Para isso considera-se o sistema de 1GL da forma da equação (2.9), a partir da qual é possível estabelecer a equação recursiva que representa o método de integração:

$$\begin{bmatrix} u_{t+\Delta t} \\ \dot{u}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_t \\ \dot{u}_t \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \\ p_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Onde a matriz de amplificação A e o operador de carga L são dados por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

e

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\left(1 + \xi\omega\Delta t + \frac{1}{4}(3 \tanh(a\omega\Delta t) - 1)\omega^2\Delta t^2\right)}{a_0} \\
a_{12} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\left(2 + 3 \tanh(a\omega\Delta t) - 2\sqrt{1 + 3 \tanh(a\omega\Delta t)}\right)\omega^2\Delta t^2\right)\Delta t}{a_0} \\
a_{21} &= \frac{-\omega^2\Delta t}{a_0} \\
a_{22} &= \frac{\left(1 - \xi\omega\Delta t + \frac{1}{4}\left(3 + 3 \tanh(a\omega\Delta t) - 4\sqrt{1 + 3 \tanh(a\omega\Delta t)}\right)\omega^2\Delta t^2\right)}{a_0} \quad (3.102)
\end{aligned}$$

$$a_0 = 1 + \xi\omega\Delta t + \frac{1}{4}(1 + 3 \tanh(a\omega\Delta t))\omega^2\Delta t^2$$

$$l_{11} = \frac{b_1\Delta t^2}{2a_0}; \quad l_{12} = \frac{b_2\Delta t^2}{2a_0}; \quad l_{13} = \frac{b_3\Delta t^2}{2a_0}$$

$$l_{21} = \frac{b_1\Delta t}{a_0}; \quad l_{22} = \frac{b_2\Delta t}{a_0}; \quad l_{23} = \frac{b_3\Delta t}{a_0}$$

Onde b_1 , b_2 e b_3 são os parâmetros de integração do operador de carga L e, por exemplo, assumindo $a = 0$ e $b_1 = b_3 = \frac{1}{2}$ e $b_2 = 0$, o método de Soares (21) reproduz o método da Regra trapezoidal.

Conforme apresentado na seção 2.2.3, para a avaliação da estabilidade do método é necessário determinar os autovalores, λ , da matriz de amplificação A , da forma:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2A_1\lambda + A_2 \quad (3.103)$$

e

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (3.104)$$

Onde os invariantes A_1 e A_2 são dados por Soares (21):

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}) = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}(d_1 - d_2 - 1)\omega^2 \Delta t^2\right)}{a_0} \quad (3.105)$$

$$A_2 = \det(\mathbf{A}) = \frac{\left(1 - \xi\omega\Delta t + \frac{1}{2}(1 - d_2)\omega^2 \Delta t^2\right)}{a_0} \quad (3.106)$$

Para que o algoritmo seja incondicionalmente estável é necessário que $\rho(\mathbf{A}) = \max|\lambda_{1,2}| \leq 1.0$. Esta condição é atendida quando:

$$d_1 + d_2 \geq 1 \text{ e } d_1 - d_2 < 0 \quad (3.107)$$

Portanto, o método de Soares (21) é incondicionalmente estável para qualquer valor de $a \in [0, +\infty)$.

Adicionalmente, para que o método apresente L-estabilidade e obter um amortecimento mais efetivo das altas frequências espúrias, deve-se satisfazer:

$$\rho_{\infty} = \lim_{\frac{\Delta t}{T} \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{A}) = 0 \quad (3.108)$$

Onde ρ_{∞} é chamado de raio espectral infinito. A equação (3.108) é satisfeita para:

$$d_2 = 2\sqrt{2d_1} - d_1 - 1 \quad (3.109)$$

Que corresponde a um dos parâmetros assumidos do método, o qual apresenta L-estabilidade para valores de $a \in (0, +\infty)$.

Neste trabalho serão adotados valores de $a \in (0,1)$, garantindo que o método de Soares (21) seja incondicionalmente estável e apresente L-estabilidade.

No capítulo 4.1 serão comparadas as propriedades numéricas dos métodos de Bathe padrão, Bathe β_1/β_2 e de Soares através das curvas do raio espectral, decaimento da amplitude, alongamento do período e overshooting.

3.4.2. Consistência

Conforme Soares (21) esse método implícito de integração direta apresenta precisão de segunda ordem para quaisquer valores de a e ω .

3.4.3. Overshoot

Considerando um sistema de 1GL, sem amortecimento e homogêneo, os termos da matriz de amplificação \mathbf{A} do método de Soares (21) para $a \in (0, +\infty)$., no limite $\Omega \rightarrow \infty$, se tornam:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} a_0 = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(1 + \xi \omega \Delta t + \frac{1}{4} (1 + 3 \tanh(a\omega \Delta t)) \omega^2 \Delta t^2 \right) = 1 + \Omega^2 \quad (3.110)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} a_{11} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 + \xi \omega \Delta t + \frac{1}{4} (3 \tanh(a\omega \Delta t) - 1) \omega^2 \Delta t^2 \right)}{a_0} \right) = \frac{1}{2} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} a_{12} & \quad (3.112) \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{4} (2 + 3 \tanh(a\omega \Delta t) - 2\sqrt{1 + 3 \tanh(a\omega \Delta t)}) \omega^2 \Delta t^2 \right) \Delta t}{a_0} \right) \\ &= \frac{\Delta t}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} a_{21} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(\frac{-\omega^2 \Delta t^2}{\Delta t a_0} \right) = \frac{1}{\Delta t} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} a_{22} & \quad (3.114) \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 - \xi \omega \Delta t + \frac{1}{4} (3 + 3 \tanh(a\omega \Delta t) - 4\sqrt{1 + 3 \tanh(a\omega \Delta t)}) \omega^2 \Delta t^2 \right)}{a_0} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{A}_\infty = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \mathbf{A}$ é dado por:

$$\mathbf{A}_\infty = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\Delta t}{4} \\ \frac{1}{\Delta t} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Dessa forma, o deslocamento e a velocidade no primeiro passo de tempo Δt , quando $\Omega \rightarrow \infty$, podem ser escritos como:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \end{bmatrix} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_0}{2} + \frac{\Delta t \dot{u}_0}{4} \\ -\frac{\dot{u}_0}{2} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Portanto, observa-se a tendência do método de Soares (21) apresentar o comportamento linear de *overshooting* para o deslocamento em função de Δt e devido à velocidade inicial \dot{u}_0 . Já a velocidade não apresenta o fenômeno de *overshoot*. A tendência de *overshoot* no deslocamento pode ser eliminada para $a = 0$, porém o método se equivale a Regra Trapezoidal.

3.4.4. Algoritmo e custo computacional

O algoritmo para implementação numérica do método de Soares (21) e a contagem do número de operação matemáticas de cada etapa é apresentada na Tabela 4.

Tabela 4 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Soares

(continua)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Soares

1. Definições e cálculos iniciais

- 1.1. Montar as matrizes globais M , K e $C \in \mathbf{R}^{m \times m}$.
- 1.2. Entrar com os vetores deslocamento e velocidade inicial: u_0 e $\dot{u}_0 \in \mathbf{R}^{m \times 1}$.
- 1.3. Definir o passo de tempo Δt da análise e o parâmetro de controle a .
- 1.4. Calcular o parâmetro $\omega = \min \left(\sqrt{\frac{K_{ii}}{M_{ii}}} \right)$, conforme sugerido em Soares (21).

Nº operações = $2m$

- 1.5. Calcular os parâmetros $d1_i$ e $d2_i$ do método em função de a :

$$d1_i = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh(a\omega_i \Delta t) \quad \text{e} \quad d2_i = 2\sqrt{2d1_i} - d1_i - 1$$

Nº operações = $10m$

- 1.6. Formar a matriz de rigidez efetiva \hat{K} :

$$\hat{K} = M + \frac{\Delta t}{2} C + \frac{\Delta t^2}{2} D_1 K$$

Nº operações = $5m^2 + 3$

- 1.7. Triangularizar a matriz \hat{K} :

$$\hat{K} = LDL^T$$

Nº operações = $\frac{m^3}{3}$

Tabela 4 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Soares

(continuação)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Soares

1.8. Número total de operações dos cálculos iniciais:

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ total de operações da etapa 1} = \frac{m^3}{3} + 5m^2 + 12m + 3$$

2. Para cada passo de tempo2.1. Calcular o vetor de carregamento efetivo no tempo $t + \Delta t$:

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{P}_t)\Delta t + \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t - \Delta t\mathbf{K}\mathbf{u}_t - \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{D}_2\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}_t$$

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ operações} = 9m^2 + 5m + 4$$

2.2. Resolver o sistema linear para obter a velocidade no tempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{LDL}^T \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}$$

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ operações} = 2m^2 + m$$

2.3. Calcular o deslocamento no tempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \frac{\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_t$$

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ operações} = 5m + 2$$

2.4. Número total de operações para cada passo de tempo:

$$\mathbf{N}^{\circ} \text{ total de operações da etapa 2} = 11m^2 + 11m + 6$$

Tabela 4 – Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Soares

(conclusão)

Algoritmo passo-a-passo e FLOP para o método de Soares

3. Repetir a etapa 2 para os próximos passos de tempo $t + n\Delta t$

$$\text{N}^\circ \text{ total de operações do algoritmo} = \left(\frac{m^3}{3} + 5m^2 + 12m + 3\right) + n(11m^2 + 11m) + 6$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo será apresentada a comparação das propriedades numéricas do método de Bathe - β_1/β_2 e de Soares, seção 4.1, bem como serão apresentados os resultados de três exemplos numérico, resolvidos com os métodos em estudo.

O método de Bathe - β_1/β_2 e de Soares foram escolhidos para realizar a comparação por apresentarem precisão de segunda ordem, L-estabilidade, propriedades semelhantes de acurácia, apresentarem também o número total de operações matemáticas para obter a solução numérica de ordem de grandeza similar, além da possibilidade de controlar as propriedades numéricas com apenas um parâmetro.

Nesta seção, todos os resultados apresentados foram gerados a partir da implementação computacional dos métodos em estudo no software MATLAB ® 2018.

4.1.COMPARAÇÃO DAS PROPRIEDADES NUMÉRICAS DOS ALGORITMOS DE BATHE- β_1/β_2 E SOARES

Para avaliar a capacidade de aproximação do método de Bathe - β_1/β_2 e de Soares, serão comparadas as principais propriedades numéricas: estabilidade, acurácia (alongamento do período e decaimento da amplitude), *overshoot* e custo computacional.

Para a avaliação de todas as propriedades numéricas dessa seção será considerada a resposta dinâmica de um sistema homogêneo de um grau de liberdade (1GL) e sem amortecimento ($\xi = 0$).

4.1.1. Estabilidade

Para a verificação e comparação da estabilidade do algoritmo de Bathe - β_1/β_2 e de Soares, foi calculado o raio espectral através do maior valor absoluto dos autovalores da matriz de amplificação de cada método ($\rho(A) = \max|\lambda_i|$, $i = 1,2,3$), para diversos valores $\frac{\Delta t}{T}$. Diz-se que o método de integração é incondicionalmente estável quando $\rho(A) \leq 1.0$.

A estabilidade do método de Bathe - β_1/β_2 será avaliada para o parâmetro $\beta_1 \in (0; \frac{1}{2})$, $\beta_2 = 2(1 - \beta_1) - \frac{1}{2}(16\beta_1^2 - 24\beta_1 + 8)^{\frac{1}{2}}$ e para $\mu = \frac{(\beta_2 - 1)}{(2\beta_1 - 2 + \beta_2)}$ com $0 < \mu < 1$, quando o método apresenta L-estabilidade e precisão de segunda ordem. (27). Desta forma o método de Bathe - β_1/β_2 necessita da escolha de apenas um parâmetro (β_1) para controle das propriedades numéricas.

Já a estabilidade do método de Soares será avaliada para valores do parâmetro $a \geq 0$, quando o método é incondicionalmente estável e apresenta precisão de segunda ordem. (21).

A Figura 5 apresenta as curvas do raio espectral em função de $\frac{\Delta t}{T}$ para o método de Bathe - β_1/β_2 para $\beta_1 = [0.01; 0.333; 0.3964; 0.49; 0.4995; 0.4999]$ com $\beta_2 = 2(1 - \beta_1) - \frac{1}{2}(16\beta_1^2 - 24\beta_1 + 8)^{\frac{1}{2}}$ e $\mu = \frac{(\beta_2 - 1)}{(2\beta_1 - 2 + \beta_2)}$ e do método de Soares para $a = [0; 0.001; 0.01; 0.025; 0.05; 0.1]$.

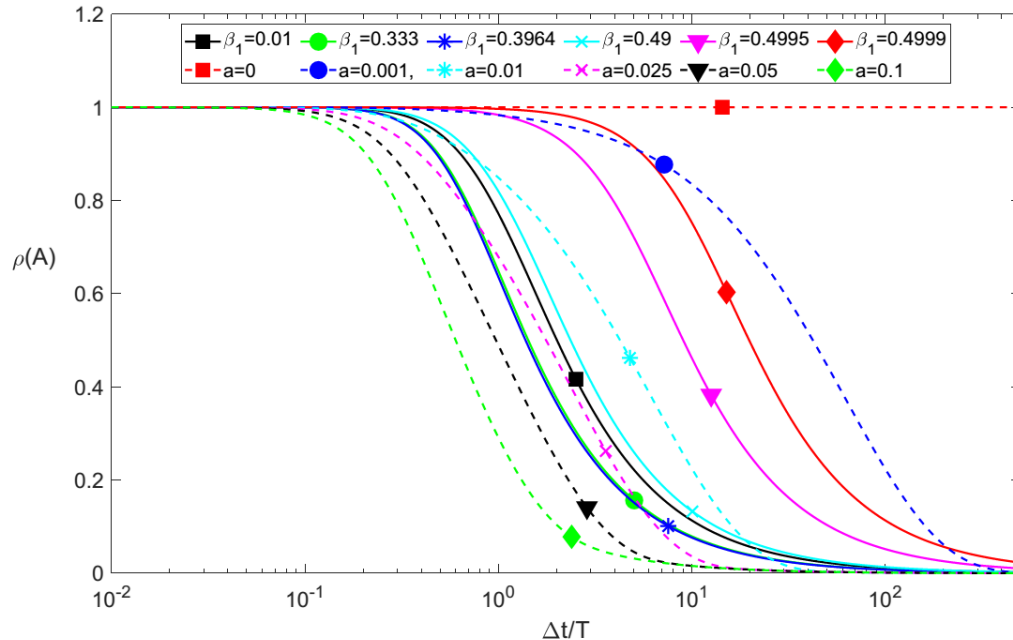
Observa-se na Figura 5 que o método de Soares para $a = 0$ apresenta $\rho(A) = 1$ (não apresenta amortecimento numérico) para qualquer $\frac{\Delta t}{T}$, fato que ocorre devido a esse método representar o a Regra Trapezoidal para este parâmetro. Para $\beta_1 = \frac{1}{3}$, o que

implica em $\beta_2 = \frac{2}{3}$ e $\mu = \frac{1}{2}$ o método de Bathe - β_1/β_2 representa o método padrão de Bathe e para $\beta_1 = 0.3964 = 0.75 - 0.25\sqrt{2}$ o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta as matrizes de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$ idênticas, necessitando a fatoração desta matriz apenas uma vez (para análises lineares) para obtenção da resposta dinâmica.

A Figura 5 mostra ainda, para os parâmetros utilizados, que os dois métodos são incondicionalmente estáveis ($\rho(\mathbf{A}) \leq 1.0$) e ainda apresentam raio espectral infinito nulo ($\rho_\infty = \lim_{\frac{\Delta t}{T} \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{A}) = 0$), portanto possuem aniquilação assintótica das respostas de alta frequência, ou ainda, são L-estáveis, sendo os dois algoritmos efetivos no amortecimento de altas frequências espúrias.

Conforme Malakiyeh *et al.* (27), o valor de $\frac{\Delta t}{T}$ no qual o raio espectral $\rho(\mathbf{A})$ cai abaixo de 1.0 pode ser chamado de valor de queda (“*fall-value*”). Para o método de Soares, observa-se na Figura 5 que o valor de queda do raio espectral diminui com o aumento do valor do parâmetro de controle “a”, aumentando assim a capacidade de amortecimento numérico para menores valores de $\frac{\Delta t}{T}$. Já para o método de Bathe - β_1/β_2 se observa que o valor de queda de $\rho(\mathbf{A})$ para os valores de $0.01 < \beta_1 < 0.49$ é próximo, sendo mais efetivo para os valores de $\beta_1 = 1/3$ e 0.3964.

Figura 5 – Raio espectral para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a)

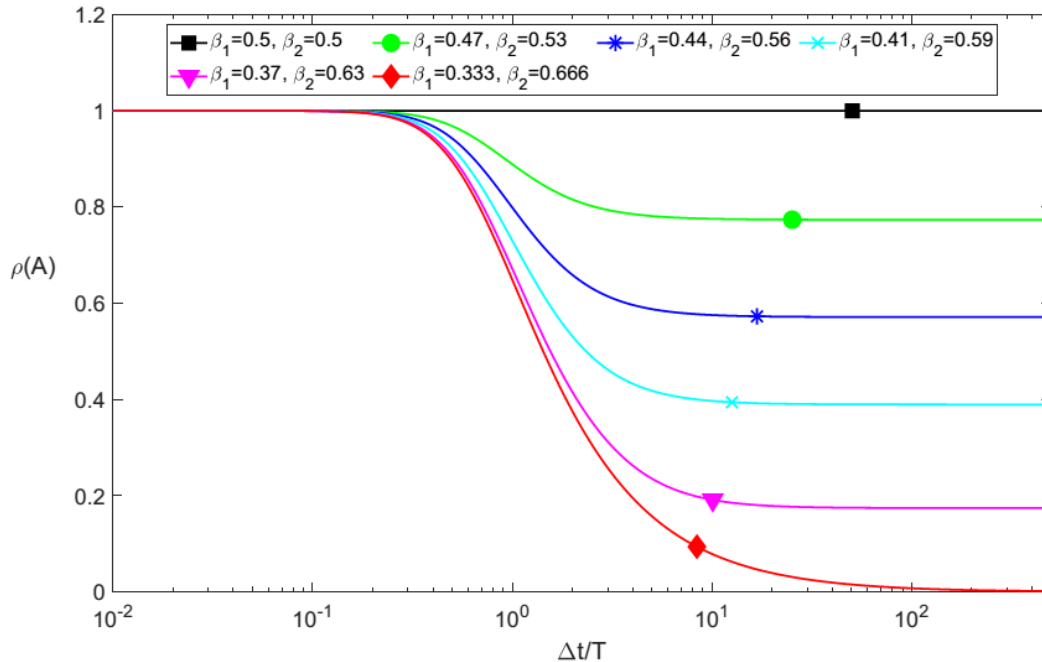


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o método de Bathe - β_1/β_2 , outros valores de β_1 e β_2 são possíveis. A Figura 6 mostra as curvas de $\rho(A)$ em função de $\frac{\Delta t}{T}$ para $\beta_1 \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ com $\beta_2 = 1 - \beta_1$ e $\mu = \frac{1}{2}$. Pode-se verificar que para estes parâmetros o método de Bathe - β_1/β_2 é incondicionalmente estável, porém não é L-estável, com exceção da curva para $\beta_1 = 1/3$, $\beta_2 = 2/3$ e $\mu = \frac{1}{2}$ (Bathe padrão), além de apresentar precisão de primeira ordem apenas.

Para $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$, e $\mu = \frac{1}{2}$ o método de Bathe - β_1/β_2 representa o método da Regra Trapezoidal para os dois sub-passos, o que também pode ser visto na Figura 6, uma vez que este método é conhecido por não apresentar amortecimento numérico ($\rho(A) = 1 \forall \Delta t/T$).

Figura 6 – Raio espectral para o método de Bathe - β_1/β_2 ($\beta_2 = 1 - \beta_1$) e de Soares (parâmetro α)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, com a escolha do parâmetro adequado, ambos os métodos apresentam estabilidade incondicional e amortecimento de altas frequências espúrias (L-estável), além de precisão de segunda ordem.

4.1.2. Acurácia

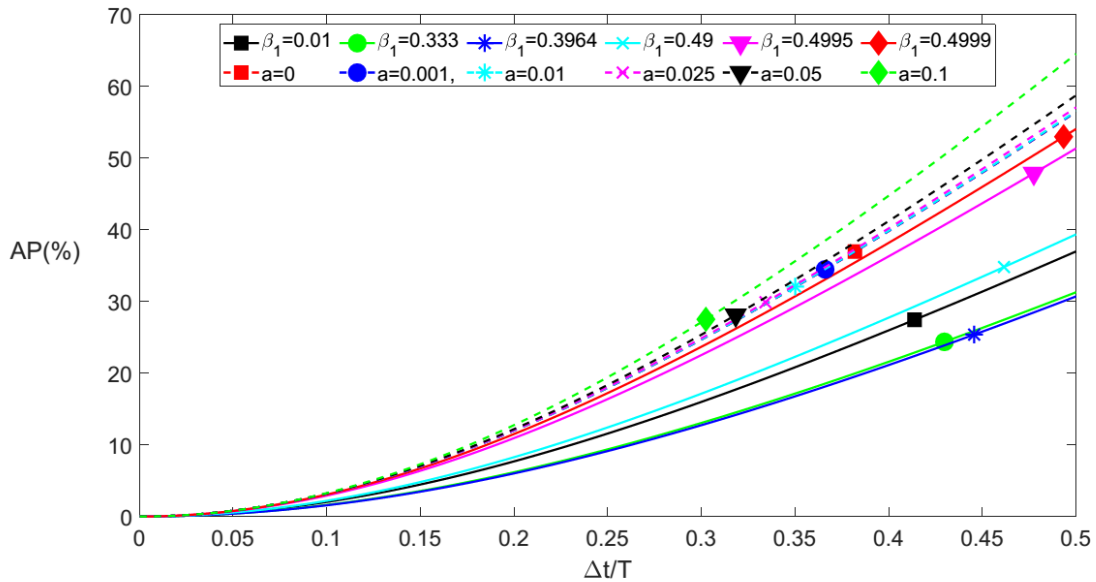
Para a verificação dos erros entre a solução numérica e a solução exata do método de Bathe - β_1/β_2 e de Soares foram calculados o decaimento da amplitude (medida de dissipação) e alongamento do período (medida de dispersão) conforme as equações (2.42) e (2.44).

Para o cálculo da taxa de amortecimento numérico, foi utilizada a expressão $\bar{\xi} = -\frac{1}{2\Omega} \ln(A^2 + B^2)$ para o método de Bathe - β_1/β_2 (26) e $\bar{\xi} = -\frac{1}{2\Omega} \ln(A^2 + B^2)$ para o método de Soares (20), onde A e B são a parte real e imaginária dos autovalores principais da matriz de amplificação.

A Figura 7 e a Figura 8 apresentam as curvas de alongamento do período (AP) e decaimento da amplitude (DA) em função de $\frac{\Delta t}{T}$ para o método de Bathe - β_1/β_2 considerando $\beta_1 \in (0; \frac{1}{2})$, $\beta_2 = 2(1 - \beta_1) - \frac{1}{2}(16\beta_1^2 - 24\beta_1 + 8)^{\frac{1}{2}}$ e para $\mu = \frac{(\beta_2 - 1)}{(2\beta_1 - 2 + \beta_2)}$ com $0 < \mu < 1$, e para o método de Soares utilizando o parâmetro $a \geq 0$, da mesma forma que o estudo de estabilidade da seção 4.1.1.

Para os parâmetros β_1, β_2 do método de Bathe e o parâmetro a do método de Soares considerados, observa-se na Figura 7, para todos os casos avaliados, que algoritmo de Bathe - β_1/β_2 apresenta menores valores de alongamento do período (AP) quando comparado ao algoritmo de Soares. O método de Bathe - β_1/β_2 para $\beta_1 = \frac{1}{3}$ (Bathe padrão) e para $\beta_1 = 0.3964 = 0.75 - 0.25\sqrt{2}$ apresenta os menores valores de alongamento do período (AP).

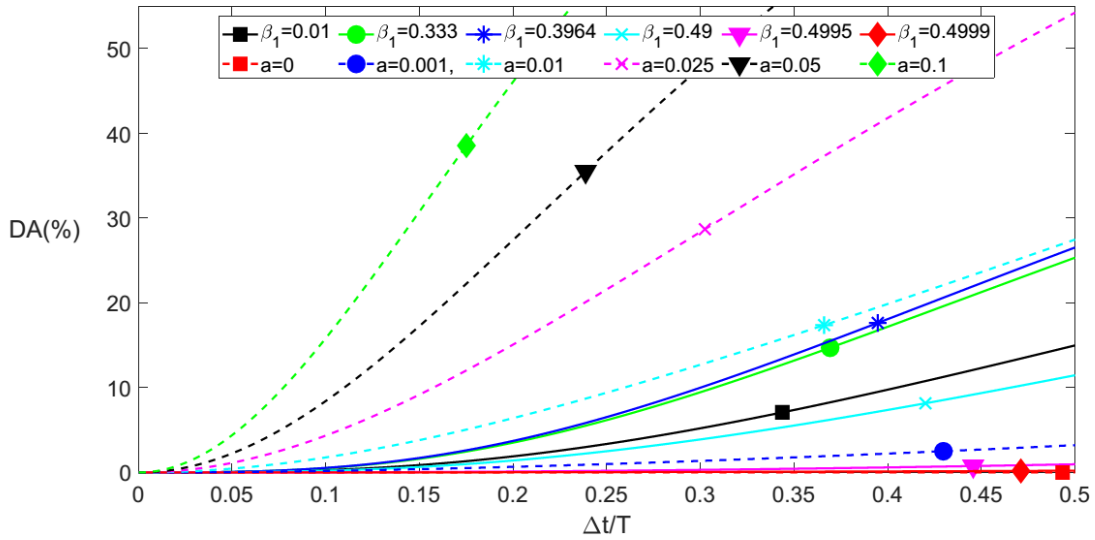
Figura 7 – Alongamento do Período para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a)



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 8 mostra que o método de Soares, para $0 \leq a \leq 0.01$ e o método de Bathe - β_1/β_2 apresentam valores de decaimento da amplitude (DA) similares. Entretanto, para os valores utilizados de $a > 0.01$, o decaimento da amplitude (DA) do método de Soares aumenta com o acréscimo de a . Já o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta valores de decaimento da amplitude (DA) próximos de zero quando $\beta_1 \rightarrow 0.5$ (Regra Trapezoidal), com os maiores valores de (DA) para $\beta_1 = \frac{1}{3}$ e $\beta_1 = 0.3964 = 0.75 - 0.25\sqrt{2}$.

Figura 8 – Decaimento da Amplitude para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a)



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.3. Overshoot

Para a comparação das propriedades de *overshoot* do método de Bathe - β_1/β_2 e de Soares utilizou-se a equação (2.47), apresentada novamente abaixo:

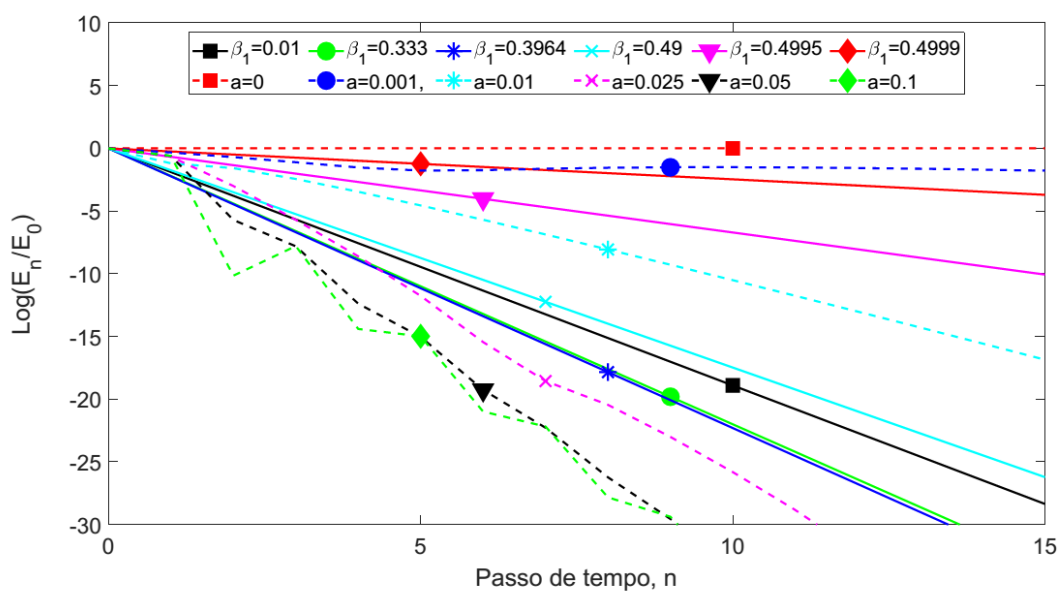
$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{\|(u_n, \dot{u}_n)\|^2}{\|(u_0, \dot{u}_0)\|^2} = \frac{(\dot{u}_n^2 + \omega^2 u_n^2)}{(\dot{u}_0^2 + \omega^2 u_0^2)} \tag{4.1}$$

Buscando verificar o critério $\frac{E_n}{E_0} < 1.0$, ou ainda $\log\left(\frac{E_n}{E_0}\right) < 0$. Quando esta condição é atendida diz-se que o algoritmo em análise não apresenta características de *overshooting*. (17,23).

Para o cálculo da norma da energia e verificação da ocorrência de *overshoot* considera-se a resposta de um sistema de apenas um grau de liberdade, onde o deslocamento e velocidade iniciais são $u_0 = 1$ e $\dot{u}_0 = 0$ e $\frac{\Delta t}{T} = 10$, conforme também apresentado em Malakiyeh (17).

A Figura 9 apresenta os resultados de $\log\left(\frac{E_n}{E_0}\right)$ em função do tempo discreto $n\Delta t$. Os parâmetros considerados para o método de Bathe - β_1/β_2 e de Soares são os mesmos utilizados nas seções 4.1.1 e 4.1.2. Observa-se que os dois métodos em avaliação não apresentam tendência de *overshoot* pois atenderam ao critério $\log\left(\frac{E_n}{E_0}\right) < 0$.

Figura 9 – Energia de *Overshoot* para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a) para $u_0 = 1$, $\dot{u}_0 = 0$ e $\frac{\Delta t}{T} = 10$

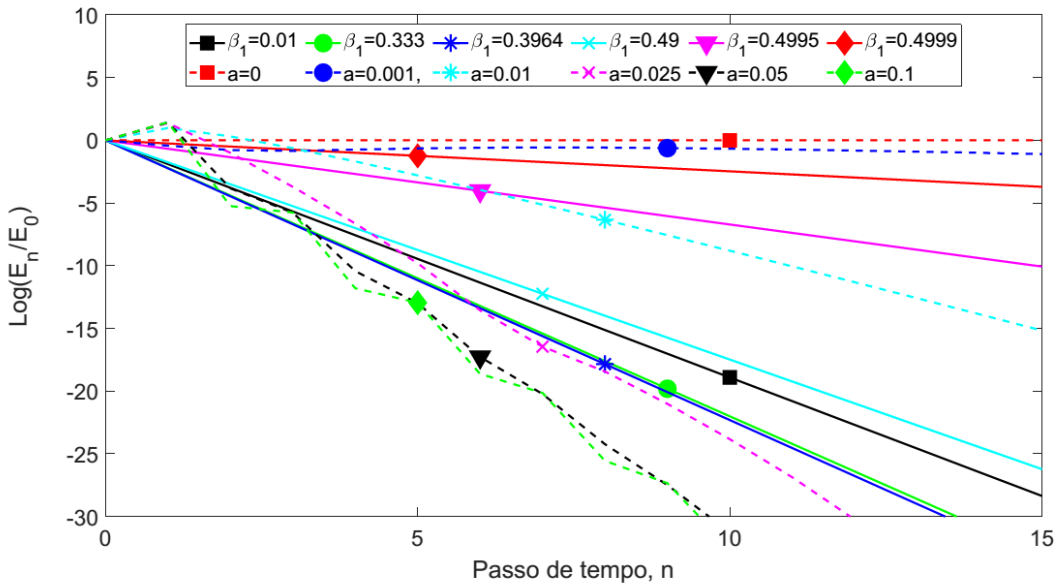


Fonte: Elaborado pelo autor.

Já na Figura 10 são apresentados os resultados de $\log\left(\frac{E_n}{E_0}\right)$ em função do tempo discreto $n\Delta t$ para as condições iniciais $u_0 = 1$ e $\dot{u}_0 = 1$ e $\frac{\Delta t}{T} = 10$. Para esses parâmetros o método de Bathe - β_1/β_2 não apresenta tendência de *overshoot*, enquanto que o método de Soares apresenta tendência de *overshoot* no primeiro passo de tempo ($n = 1$), sendo eliminado nos passos de tempo seguintes.

Esse resultado está de acordo com o apresentado na seção 3.4.3, onde foi demonstrado que no primeiro passo de tempo o método de Soares tem a tendência de apresentar *overshooting* do deslocamento com variação linear em função de Δt e em função da velocidade inicial.

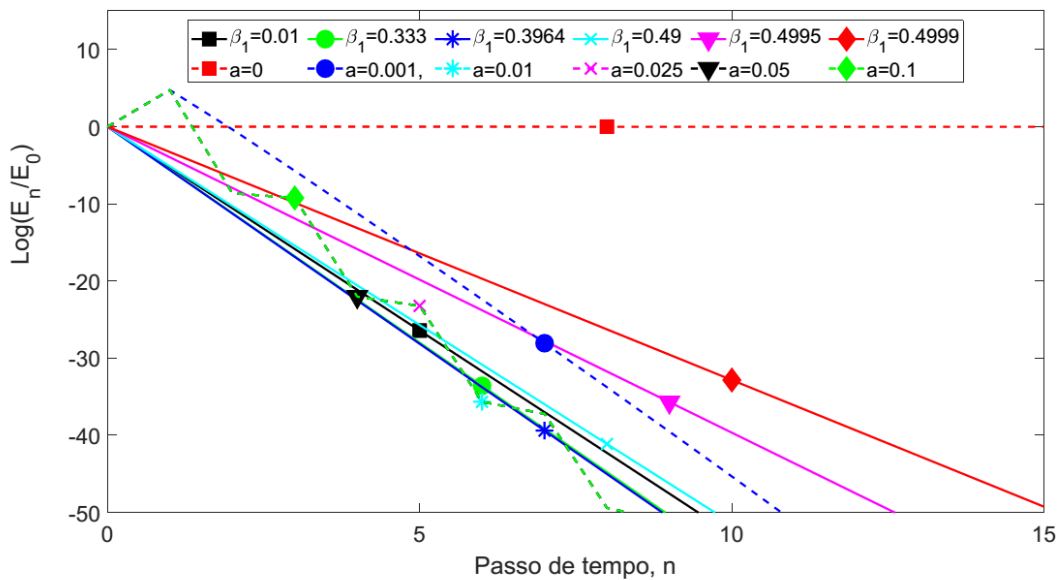
Figura 10 – Energia de *Overshoot* para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a) para $u_0 = 1, \dot{u}_0 = 1$ e $\frac{\Delta t}{T} = 10$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 11 apresenta os resultados de $\log\left(\frac{E_n}{E_0}\right)$ em função do tempo discreto $n\Delta t$ para as condições iniciais $u_0 = 1$ e $\dot{u}_0 = 1$ e $\frac{\Delta t}{T} = 500$. Com o aumento de $\frac{\Delta t}{T} = 10$ para $\frac{\Delta t}{T} = 500$ o método de Bathe - β_1/β_2 continua não apresentando a tendência de *overshoot*, enquanto que o método de Soares apresenta tendência de *overshoot* no primeiro passo de tempo ($n = 1$) com intensidade maior que para $\frac{\Delta t}{T} = 10$, também sendo eliminado nos passos de tempo subsequentes, corroborando com a tendência do deslocamento apresentar *overshoot* com variação linear em função de Δt , estando de acordo com o apresentado na seção 3.4.3.

Figura 11 – Energia de *Overshoot* para o método de Bathe - β_1/β_2 (parâmetro β_1) e de Soares (parâmetro a) para $u_0 = 1$, $\dot{u}_0 = 1$ e $\frac{\Delta t}{T} = 500$



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.4. Custo computacional

Na seção 2.2.6 definiu-se a forma de estimar o custo computacional dos métodos em avaliação: contagem do número de operações matemáticas (FLOP – *Floating Point Operation*) realizadas pelos algoritmos em estudo para se obter a solução numérica.

A Tabela 2, Tabela 3 e Tabela 4 apresentam o algoritmo do método de Bathe padrão, Bathe - β_1/β_2 e de Soares, respectivamente, juntamente com a contagem de FLOP para cada processo, resultando no custo total devido a operações matemáticas realizadas por cada método para obtenção da resposta dinâmica.

A Tabela 5 apresenta o resumo do número total de FLOP para cada algoritmo em estudo.

Tabela 5 – Número total de FLOP para os métodos de integração em estudo

Método	N° total de FLOP
Bathe padrão	$\left(\frac{2m^3}{3} + 8m^2 + 37\right) + [n(12m^2 + 42m) + 3]$
Bathe - β_1/β_2	$\left(\frac{2m^3}{3} + 8m^2 + 20\right) + [n(12m^2 + 46m) + 104]$
Soares	$\left(\frac{m^3}{3} + 5m^2 + 12m + 3\right) + [n(11m^2 + 11m) + 6]$

Na Tabela 5, a variável m corresponde à dimensão da matriz de massa, amortecimento ou rigidez do sistema, ou seja, ao número de graus de liberdade. Já a variável n corresponde ao número de passos de tempo utilizados na análise.

Entretanto, para sistemas com um grande número de graus de liberdade, a ordem do número total de operações matemáticas pode ser aproximada conforme a Tabela 6. As

equações para a ordem do número de FLOP da Tabela 6 serão utilizadas para avaliação do custo computacional dos exemplos numéricos da seção 4.2.

Tabela 6 – Ordem do número total de FLOP

Método	Ordem do número de FLOP
Bathe padrão	$\left(\frac{2m^3}{3}\right) + n(12m^2)$
Bathe - β_1/β_2	$\left(\frac{2m^3}{3}\right) + n(12m^2)$
Soares	$\left(\frac{m^3}{3}\right) + n(11m^2)$

O primeiro termo da ordem do número total de FLOP de cada método, apresentado na Tabela 6, é devido principalmente pela formação da matriz de rigidez efetiva e sua fatoração. A fatoração da matriz de rigidez efetiva ($\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$) é a etapa com maior número de FLOP individual do algoritmo. Observa-se que o custo devido ao número de operações matemáticas da primeira parcela é o dobro para os métodos de Bathe, quando comparado com o método de Soares.

Entretanto, conforme apresentado na seção 3.3.3, o método de Bathe - β_1/β_2 possui as matrizes de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}_1$ e $\hat{\mathbf{K}}_2$ idênticas para $\beta_1 = 0.75 - 0.25\sqrt{2}$, $\beta_2 = 2(1 - \beta_1) - \frac{1}{2}(16\beta_1^2 - 24\beta_1 + 8)^{\frac{1}{2}}$ e para $\mu = \frac{(\beta_2 - 1)}{(2\beta_1 - 2 + \beta_2)}$, necessitando a fatoração de apenas uma matriz rigidez, reduzindo a ordem do número de operações da primeira parcela para $\frac{m^3}{3}$. O mesmo ocorre para o método de Bathe Padrão quando $\mu = 2 - \sqrt{2}$, conforme apresentado na seção 3.2.3.

Já segunda parcela da ordem do número total de FLOP apresentada na Tabela 6 é devida a formação do vetor de carregamento efetivo e solução do sistema linear para cada passo de tempo. Para esta parcela, o método de Soares apresenta a ordem do número total de operações matemáticas 8.3% menor do que os métodos de Bathe, por passo de tempo Δt .

Esse resultado pode gerar estranheza, já que a família de algoritmos de Bathe apresenta dois sub-passos por passo de tempo Δt . Porém, o método de Soares necessita, em um único passo de tempo Δt , realizar quantia aproximada de multiplicação de matrizes por vetores que a família de algoritmo de Bathe em seus dois sub-passos de tempo.

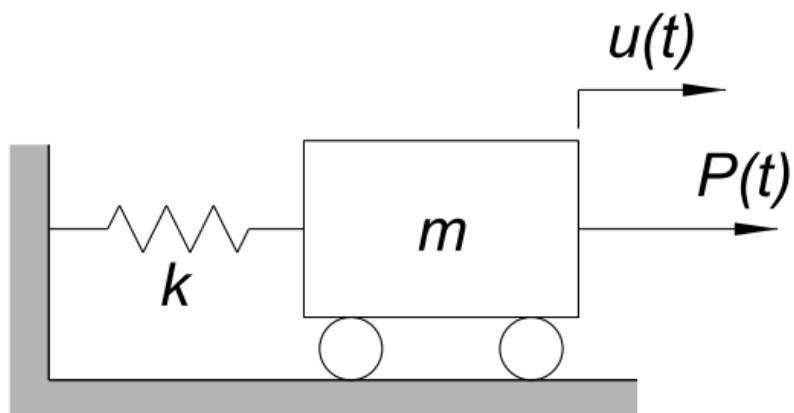
4.2. EXEMPLOS

Nesta seção serão resolvidos três exemplos numéricos com a utilização dos métodos de integração direta de Bathe - β_1/β_2 e de Soares em estudo, onde os resultados serão avaliados e comparados.

4.2.1. Sistema massa mola de 1 grau de liberdade

Este exemplo numérico diz respeito a um sistema homogêneo de 1 grau de liberdade, sem amortecimento, retirado de Malakiyeh *et al.* (17) e conforme a Figura 12, onde $m = 1$, $k = 4$ e condições iniciais $u(0) = 1$ e $\dot{u}(0) = 0$.

O objetivo deste problema é destacar as considerações já feitas em relação às propriedades numéricas do método de Bathe - β_1/β_2 e de Soares na seção 4.1

Figura 12 – Sistema massa mola com um grau de liberdade

Fonte: Elaborado pelo autor.

A equação do movimento que rege este problema tem forma:

$$\ddot{u}(t) + 4u(t) = 0 \quad (4.2)$$

Os métodos utilizados para a obtenção das respostas e os parâmetros considerados na análise numérica são apresentados na Tabela 7. As respostas dos algoritmos em estudo serão comparadas com a resposta exata do problema. Para a solução do problema foi utilizado o passo de tempo $\Delta t = 0.2s$, onde $\frac{\Delta t}{T} = 0.0637$. A solução exata do sistema é dada por $u(t) = \cos(2t)$.

Tabela 7 – Métodos e parâmetros utilizados para a solução numérica

Método	Parâmetros
Bathe - β_1/β_2	$\beta_1 \in \left(0; \frac{1}{2}\right), \quad \beta_2 = 2(1 - \beta_1) - \frac{1}{2}(16\beta_1^2 - 24\beta_1 + 8)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = \frac{(\beta_2 - 1)}{(2\beta_1 - 2 + \beta_2)}$
Soares	$a \geq 0, \quad \omega_i = \sqrt{K_{ii}/M_{ii}}$

Para o método de Bathe - β_1/β_2 foram utilizados $\beta_1 = [0.333; 0.3964; 0.49; 0.4999]$ para o método de Soares o parâmetro $a = [0; 0.001; 0.01; 0.025]$.

A Figura 13 até a Figura 15 mostram as respostas aproximadas obtidas com a utilização dos métodos de integração em estudo e a solução exata (referência) para o deslocamento, onde as linhas contínuas e o parâmetro β_1 se referem ao método de Bathe - β_1/β_2 , enquanto que as linhas tracejadas e o parâmetro a dizem respeito ao método de Soares.

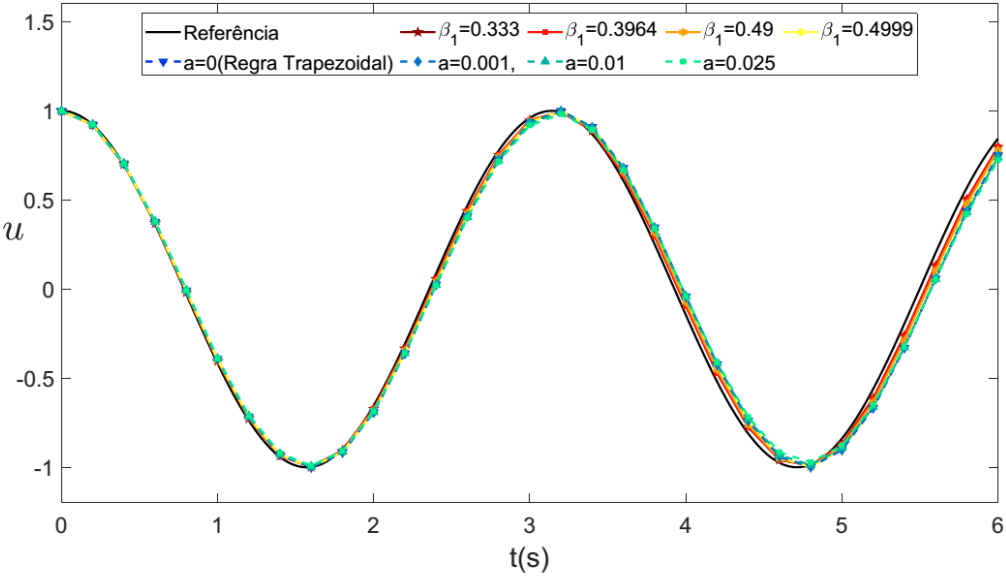
De forma geral, observa-se na Figura 13 que a resposta de curto prazo ($t = 0$ a $6s$) obtida pelos métodos de integração direta representa adequadamente o deslocamento. Entretanto, para a resposta de longo prazo ($t = 49$ a $55s$) apresentada na Figura 14, se destaca os elevados alongamentos do período para os dois métodos utilizados.

O detalhe “A” da Figura 14 é apresentado na Figura 15, da qual se conclui que:

- As respostas obtidas para o método de Bathe - β_1/β_2 com $\beta_1 = 0.333$ (método de Bathe Padrão) e para $\beta_1 = 0.3964$ (Matrizes de rigidez efetiva idênticas) são muito próximas e apresentam os menores valores de alongamento do período;
- Com o aumento do valor de β_1 o alongamento do período para o método de Bathe também aumenta, sendo maior para $\beta_1 = 0.4999$. Porém a resposta com maior alongamento do período para o método de Bathe - β_1/β_2 ($\beta_1 = 0.4999$) apresenta menor valor de alongamento do período do que o método de Soares, para qualquer valor do parâmetro a .
- Para o método de Soares o alongamento do período varia pouco com o aumento do parâmetro a .
- Quanto ao decaimento da amplitude, os maiores valores são apresentados pelo método de Soares para o parâmetro $a = 0.1$ e $a = 0.025$.
- Os melhores resultados em termos do decaimento da amplitude são obtidos pelo método de Soares para o parâmetro $a = 0$ (Regra Trapezoidal), seguido pelo método de Bathe - β_1/β_2 com $\beta_1 = 0.4999$.

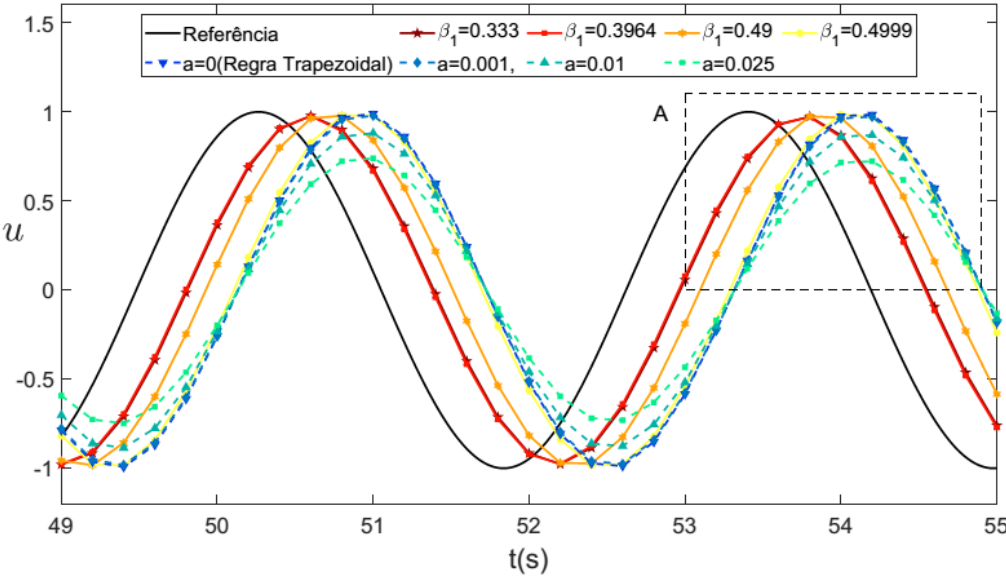
Todas as conclusões acima, baseadas na Figura 13 a Figura 15, estão de acordo com as propriedades de alongamento do período e decaimento da amplitude apresentadas na seção 4.1.2, Figura 7 e Figura 8.

Figura 13 – Deslocamento de 0 a 6s



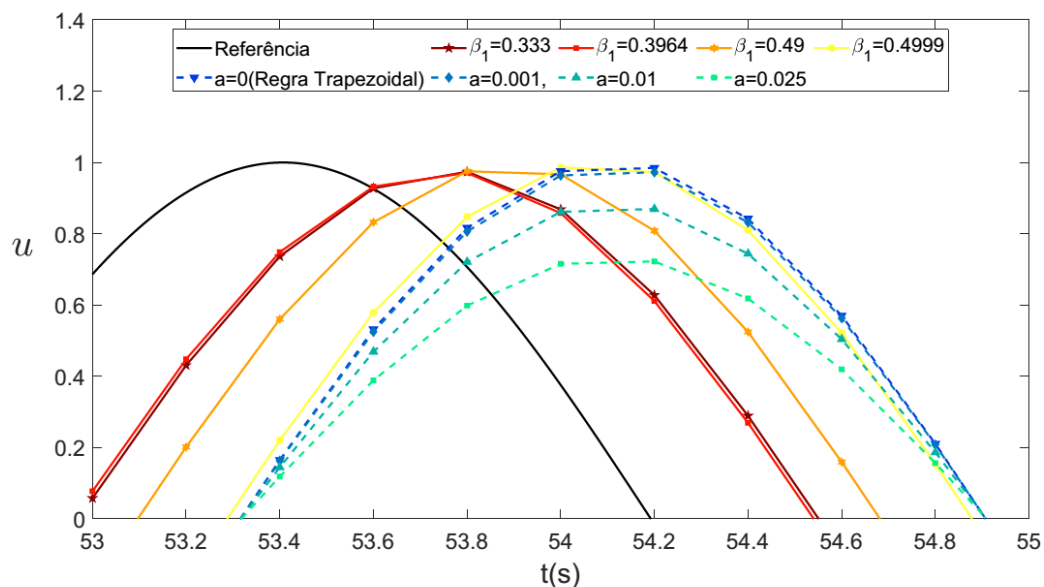
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 – Deslocamento de 49 a 55s



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Detalhe A

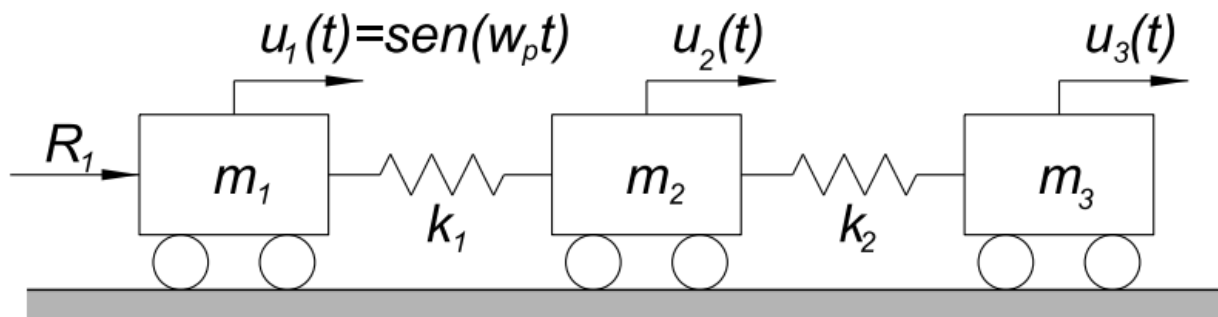


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.2. Sistema massa mola de 3 graus de liberdade

O segundo exemplo numérico trata de um sistema de 3 graus de liberdade comum de ser encontrado na literatura, (23,25,26), o qual é apresentado na Figura 16. Com esta simples aplicação é possível avaliar e verificar importantes propriedades e diferenças entre os métodos em estudo.

Figura 16 – Sistema massa mola com três graus de liberdade



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para este problema se considera $m_1 = 0$, $m_2 = m_3 = 1$, $k_1 = 10^7$, $k_2 = 1$, $m_1 = 0$, $\omega_p = 1.2$ e o deslocamento prescrito do nó 1:

$$u_1 = \text{sen}(\omega_p t) \quad (4.3)$$

A grande diferença entre as rigidezes das molas k_1 e k_2 busca representar de forma simples sistemas estruturais complexos que incluem partes flexíveis e partes com grande rigidez, as quais tem o papel de gerar restrições ao sistema e cuja resposta não deve ser incluída na resposta global do sistema, conforme explica Bathe e Noh (25). Dessa forma, este problema é excelente para verificar a capacidade de amortecimento numérico de frequências espúrias dos métodos em estudo.

Este sistema é governado pela equação do movimento da forma:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Como o deslocamento e aceleração do nó 1 são conhecidos, o sistema pode ser reduzido a um problema de 2 graus de liberdade, da forma:

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Para este sistema os períodos naturais de vibração são aproximadamente $T_1 = 6.283s$, $T_2 = 0.002s$ e o passo de tempo utilizado é de $\Delta t = 0.2618$. Portanto, $\Delta t / T_1 = 0.0417$ e $\Delta t / T_2 = 131.76$ (valores arredondados).

Com o objetivo de validar os algoritmos implementados e comparar as respostas dos métodos de Bathe - β_1/β_2 e de Soares, inicialmente, a mesma análise desenvolvida por Soares (21) e Bathe e Noh (25) foi realizada. Dessa forma, foi considerado o passo de tempo $\Delta t = 0.2618s$, com 304 passos de tempo (n) e as condições iniciais para os nós 2 e 3 nulas, $u_2 = u_3 = \dot{u}_2 = \dot{u}_3 = 0$.

Os métodos utilizados para a obtenção das respostas e os parâmetros considerados na análise numérica são os mesmos já apresentados anteriormente na Tabela 7. As respostas dos algoritmos em estudo serão comparadas com a resposta obtida com o uso do método da superposição modal mais a correção estática com base na menor frequência natural, de forma que as altas frequências espúrias simuladas devido à grande rigidez k_1 não sejam incluídas na resposta do sistema. (6,25).

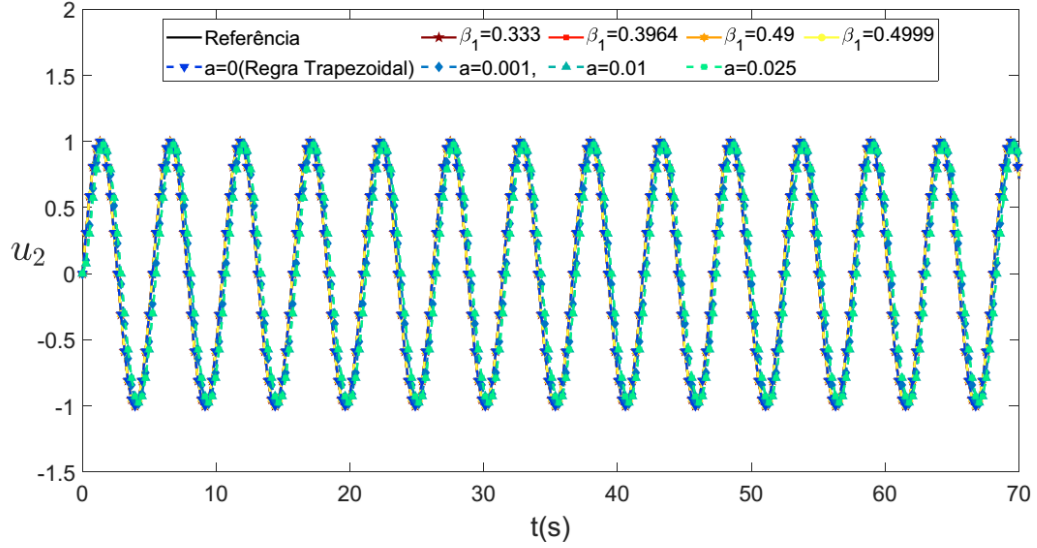
Na Figura 17 até a Figura 24 são apresentadas a resposta aproximada e de referência em termos de deslocamento e velocidade para os nós 2 e 3, onde as linhas contínuas e o parâmetro β_1 se referem ao método de Bathe - β_1/β_2 , enquanto que as linhas tracejadas e o parâmetro a dizem respeito ao método de Soares.

A Figura 17 e a Figura 18 mostram que os dois métodos de integração fornecem boas respostas para o deslocamento do nó 2 para o todo o tempo em análise, com decaimento da amplitude e alongamento satisfatórios. Entretanto, para o passo de tempo escolhido, observa-se que a precisão do método de Soares é inferior ao do método de Bathe - β_1/β_2 .

O mesmo ocorre para a velocidade do nó 2, Figura 19 e Figura 20. Para o método de Soares com $a = 0$ (Regra Trapezoidal), o algoritmo não apresenta amortecimento numérico e não consegue dissipar as altas frequências, resultado também apresentado em Bathe e Noh (25). Para os outros parâmetros o método de Soares e o método de Bathe - β_1/β_2 foram capazes de dissipar as altas frequências espúrias artificialmente induzidas no problema.

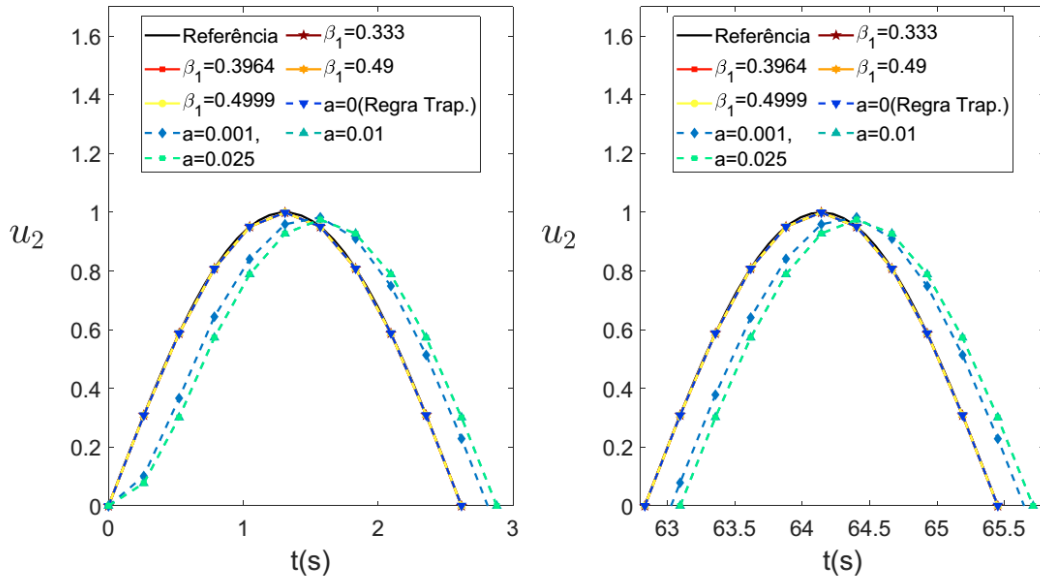
A Figura 21 até a Figura 24 apresentam o deslocamento e velocidade do nó 3, onde pode ser visto que no curto prazo ambos os métodos apresentam uma boa aproximação da resposta, e no longo prazo percebe-se a acentuação do decaimento da amplitude e alongamento do período, com maior intensidade para o método de Soares.

Figura 17 – Deslocamento do nó 2 de 0 a 70s



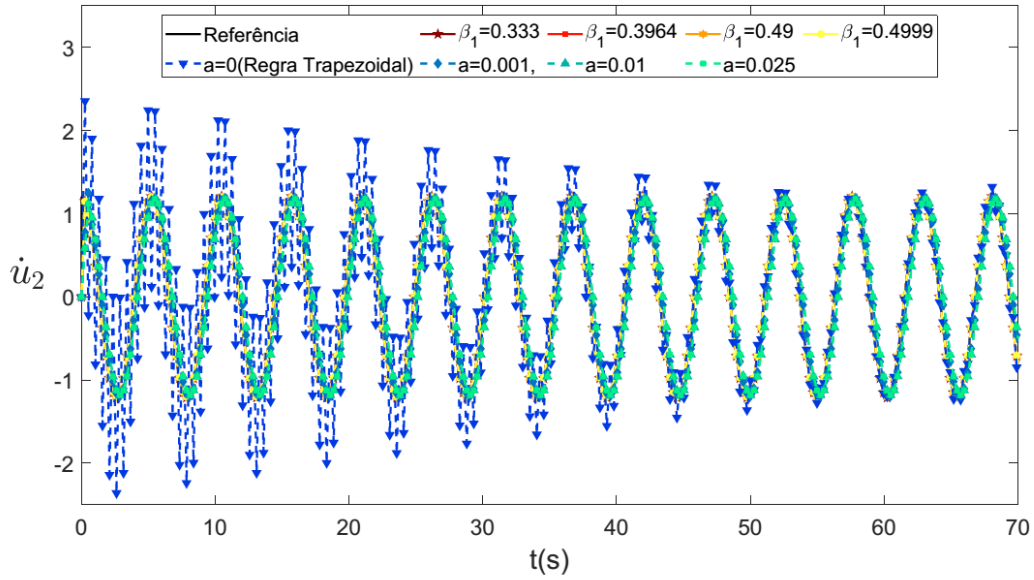
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 – Deslocamento do nó 2 de 0 a 3s e de 62.8 a 65.8s



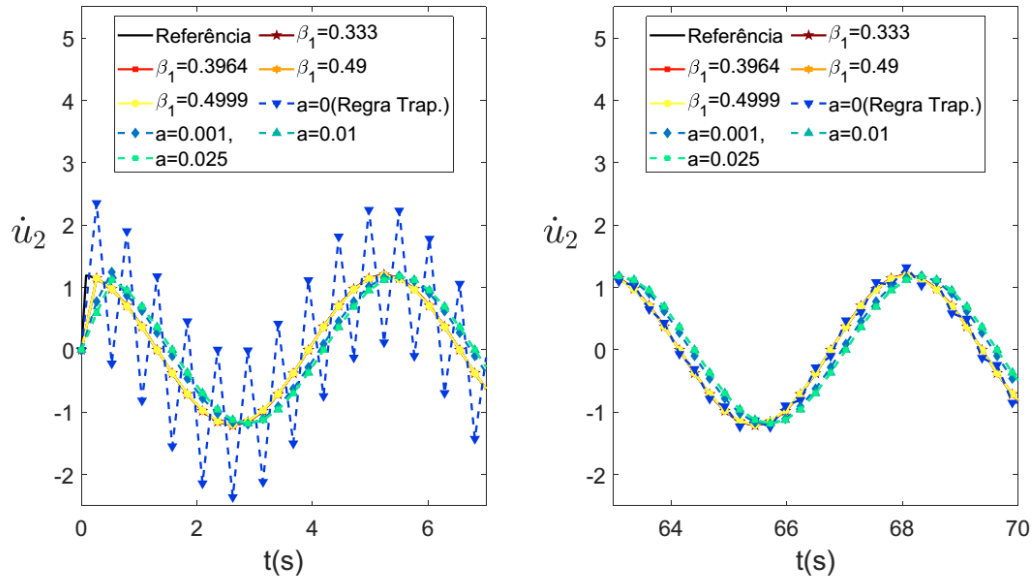
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Velocidade do nó 2 de 0 a 70s



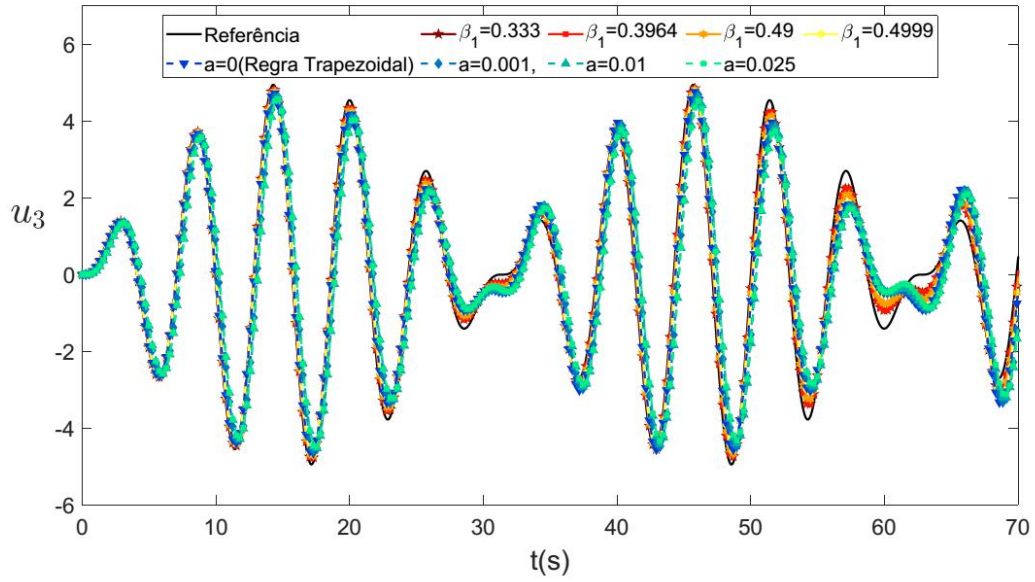
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 – Velocidade do nó 2 de 0 a 7s e de 63 a 70s



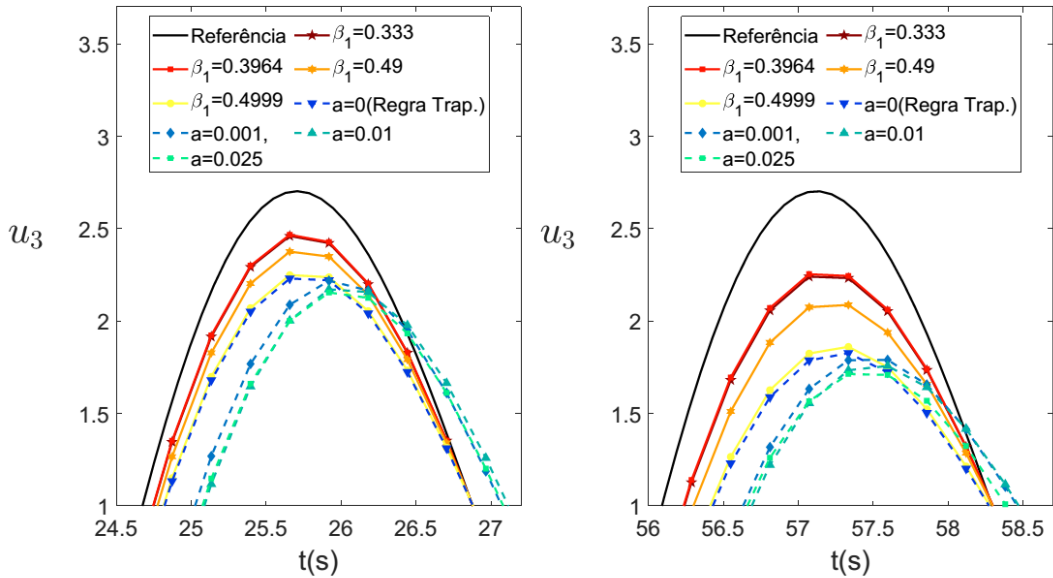
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – Deslocamento do nó 3 de 0 a 70s



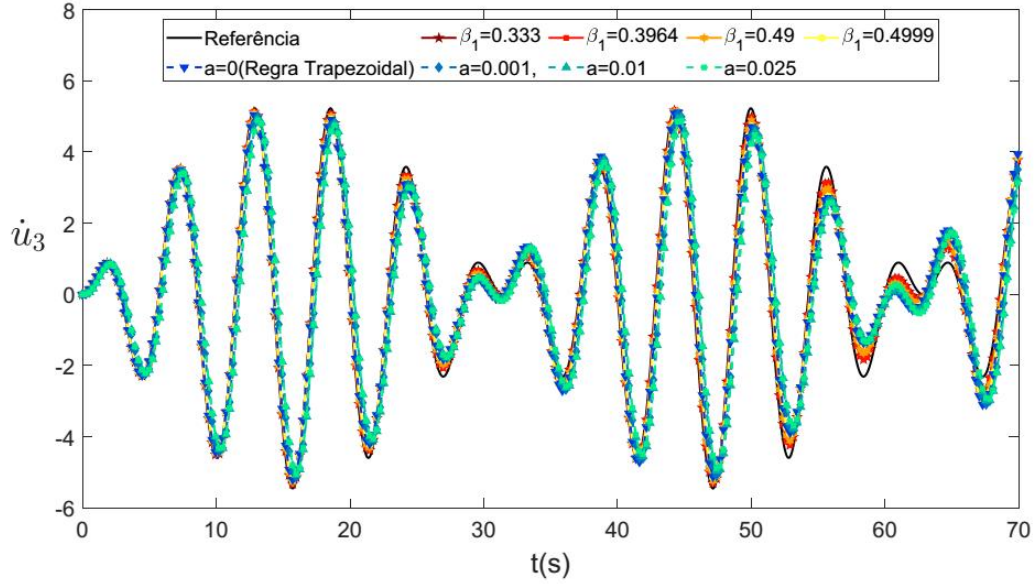
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 – Deslocamento do nó 3 de 24.5 a 27.2s e de 56 a 58.7s



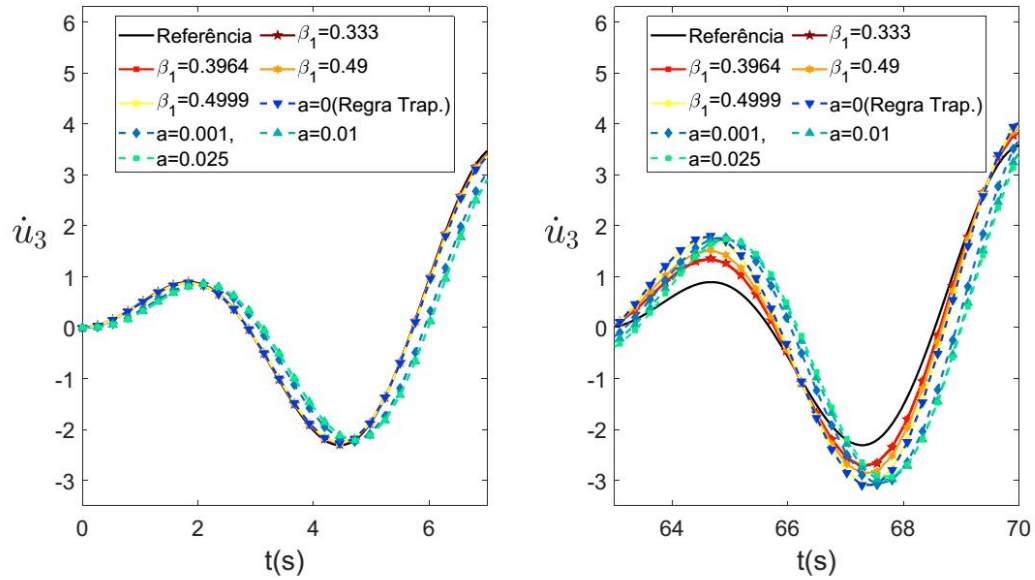
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Velocidade do nó 3 de 0 a 70s



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 24 – Velocidade do nó 3 de 0 a 7s e de 63 a 70s



Fonte: Elaborado pelo autor.

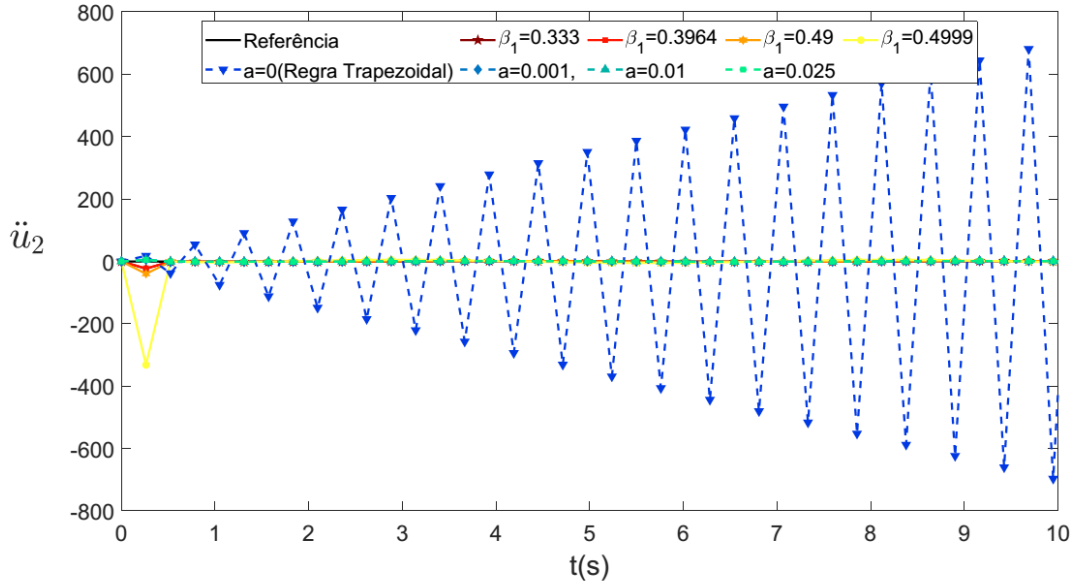
Já a Figura 25 até a Figura 27 apresentam a resposta aproximada e de referência da aceleração para os nós 2 e 3. Para o método de Soares não é necessário o cálculo da aceleração no tempo t para obter a resposta no próximo passo de tempo $t + \Delta t$. Desta forma, foi considerada variação linear da velocidade no intervalo de tempo Δt , (2), sendo a aceleração em $t + \Delta t$ calculada por:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} (\dot{u}_{t+\Delta t} - \dot{u}_t) - \ddot{u}_t \quad (4.6)$$

A Figura 25 mostra que o método de Soares com $\alpha = 0$ (Regra Trapezoidal) não é capaz de dissipar a alta frequência espúria artificialmente induzida no problema, como também evidenciado em Bathe e Noh (25), fornecendo uma resposta instável para a aceleração deste nó.

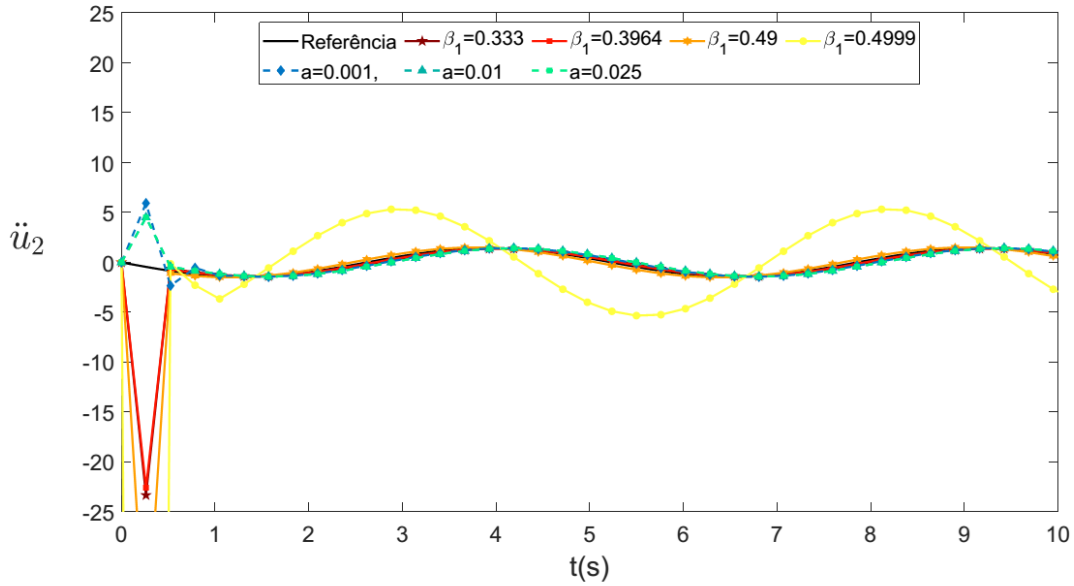
A Figura 26 indica que o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta um pico na resposta do primeiro passo de tempo, possuindo maior intensidade para os maiores valores do parâmetro β_1 e para $\beta_1 = 0.4999$ este método não fornece resposta próxima da de referência. Para o método de Soares com $\alpha = [0.001, 0.01, 0.25]$ se observa que também ocorre um pico na resposta do primeiro passo de tempo, de menor intensidade quando comparado ao método de Bathe - β_1/β_2 , porém estabilizando rapidamente para próximo da solução de referência.

Figura 25 – Aceleração do nó 2 de 0 a 10s



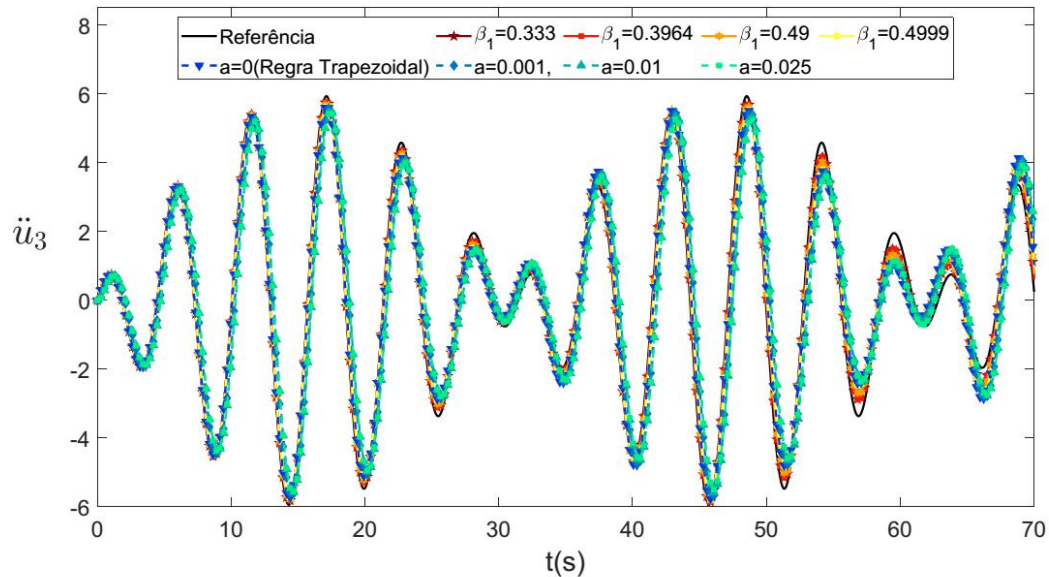
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Aceleração do nó 2 de 0 a 10s, excluindo a resposta da Regra Trapezoidal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 – Aceleração do nó 3 de 0 a 70s



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para auxiliar a visualização da precisão das respostas aproximadas em relação às de referência, foi calculado o erro através da equação (4.7), retirada de Soares (20), onde $u(t_i)$ e $\bar{u}(t_i)$ são a resposta aproximada e de referência no tempo t_i , respectivamente, e n_t é o número total de passos de tempo.

$$Erro = 100\% \times \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_t} (u(t_i) - \bar{u}(t_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_t} \bar{u}(t_i)^2} \right]^{1/2} \quad (4.7)$$

A Tabela 8 apresenta os erros relativos para o deslocamento, velocidade e aceleração dos nós 2 e 3. Observa-se que o método de Bathe - β_1/β_2 apresentou menores erros relativos percentuais do que o método de Soares, com exceção da aceleração do nó 2, com melhor resultado com a utilização de $\beta_1 = 0.3964 = 0.75 - 0.25\sqrt{2}$ (matrizes de

rigidez efetiva \hat{K}_1 e \hat{K}_2 idênticas). Esse resultado pode ser explicado pela característica do método de Bathe - β_1/β_2 sempre apresentar menores alongamentos do período do que o método de Soares, para os parâmetros avaliados.

O número total de operações matemáticas também é apresentado na Tabela 8. Pode-se notar que o método de Soares necessitou de 8.3% menos operações que método de Bathe - β_1/β_2 . Essa diferença é devida principalmente ao baixo número de graus de liberdade ($m = 2$), sendo o número total de FLOP dominado pela formação do vetor de carregamento efetivo e solução do sistema linear para cada passo de tempo.

Para este exemplo o caso em que o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta matrizes de rigidez efetiva \hat{K}_1 e \hat{K}_2 idênticas ($\beta_1 = 0.3964 = 0.75 - 0.25\sqrt{2}$) traz uma redução do número de operações desprezível, devido ao pequeno número de graus de liberdade do problema proposto ($m = 2$).

Tabela 8 – Erro relativo (%) para o deslocamento, velocidade e aceleração

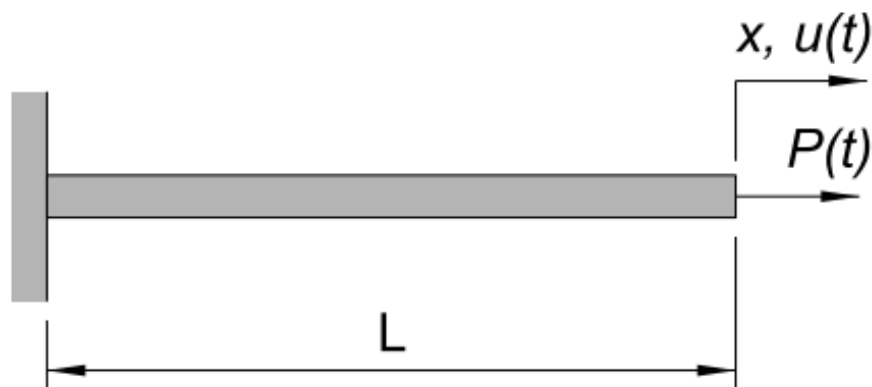
	Bathe - β_1/β_2				Soares			
	$\beta_1 = 0.333$	$\beta_1 = 0.3964$	$\beta_1 = 0.49$	$\beta_1 = 0.4999$	$a = 0$	$a = 0.001$	$a = 0.01$	$a = 0.025$
u_2	2.4E-05	2.3E-05	3.6E-05	2.7E-04	0.06	23.29	31.03	31.03
u_3	10.09	9.79	13.70	19.06	19.87	36.54	42.42	41.86
\dot{u}_2	0.82	0.68	0.23	0.10	67.77	23.46	31.23	31.23
\dot{u}_3	9.05	8.78	12.28	17.08	17.81	34.12	40.04	39.48
\ddot{u}_2	129.80	125.08	221.60	1897.37	1.5E+05	43.76	41.80	41.80
\ddot{u}_3	8.40	8.16	11.41	15.88	16.56	33.26	39.41	38.81
FLOP	14598	14595	14598	14598	13379	13379	13379	13379

4.2.3. Barra homogênea

Este último exemplo foi retirado de Malakiyeh *et al.* (17) e diz respeito a uma barra engastada em uma de suas extremidades, enquanto a outra extremidade é livre e com

um carregamento $P(t)$ aplicado na direção axial da barra, conforme Figura 28. Outras literaturas também apresentam variações deste exemplo, (3,20,21,44). As propriedades físicas e geométricas adotadas são: módulo de elasticidade $E = 40000N/m^2$, massa específica $\rho = 1kg/m^3$, comprimento total da barra $L = 2m$ e área da seção transversal $A = 1m^2$.

Figura 28 – Barra engastada



Fonte: Elaborado pelo autor.

O carregamento $P(t)$ é um carregamento axial aplicado instantaneamente da forma:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P_0 = 100N & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Como condições iniciais do problema, considera-se que qualquer posição da barra se encontra em repouso para $t = 0$, ou seja:

$$u(x, 0) = 0 \quad \dot{u}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.9)$$

A solução analítica para o deslocamento axial, (3,20,21), é dada por:

$$u(x, t) = \frac{8P_0L}{\pi^2EA} \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \left[1 - \cos \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L} \right) \right] \right\} \quad (4.10)$$

Portanto, a velocidade axial pode ser calculada facilmente pela equação (4.11).

$$\dot{u}(x, t) = \frac{8P_0L}{\pi^2EA} \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \left[1 + \frac{(2n-1)\pi c}{2L} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L} \right) \right] \right\} \quad (4.11)$$

Onde a variável $c = \sqrt{E/\rho} = 20m/s$ é a velocidade de propagação da onda no meio.

Foi utilizado o método de elementos finitos para a discretização do problema, utilizando 500 elementos de barra, totalizando 501 nós, sendo o deslocamento horizontal o grau de liberdade de cada nó. As matrizes de massa inconsistente e rigidez de um elemento são dadas por:

$$M_e = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad K_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Foi considerado amortecimento nulo e as matrizes de massa, rigidez e o vetor carregamento do problema são:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & 2 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 2 & & & & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{501 \times 501} \\
 K &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & & & & -1 & 2 & -1 & & 1 \end{bmatrix}_{501 \times 501} \\
 F &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P(t) \end{bmatrix}_{501 \times 1}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Como o deslocamento é conhecido no nó localizado no engaste da barra, pode-se eliminar a linha e coluna referente a este nó, ficando as matrizes de massa, rigidez e vetor carregamento da forma:

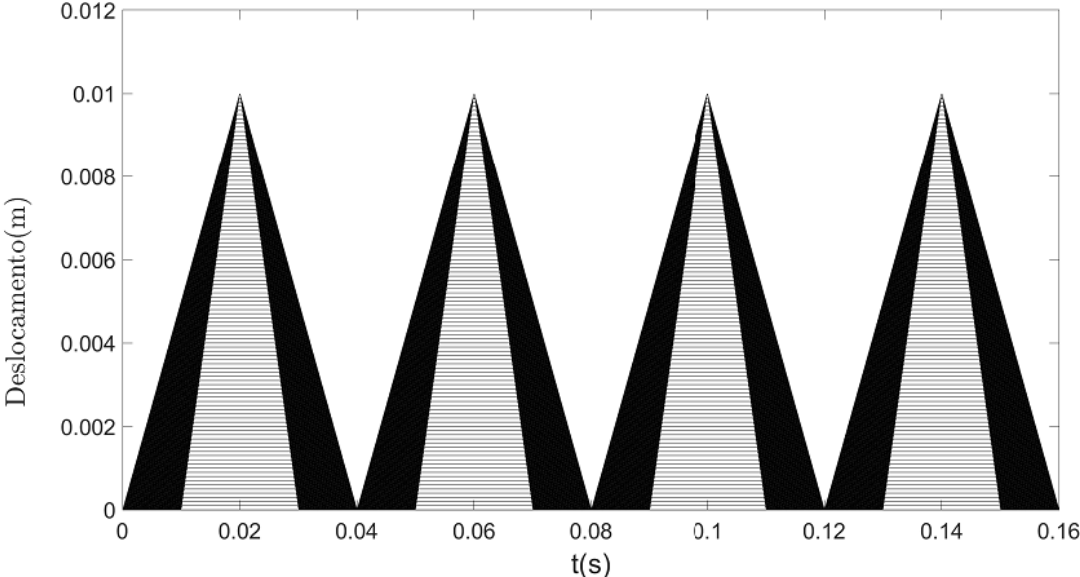
$$M = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & & 0 \\ & 2 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 2 & & & & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{500 \times 500} \tag{4.14}$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & & & & -1 & 1 & \end{bmatrix}_{500 \times 500}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P(t) \end{bmatrix}_{500 \times 1}$$

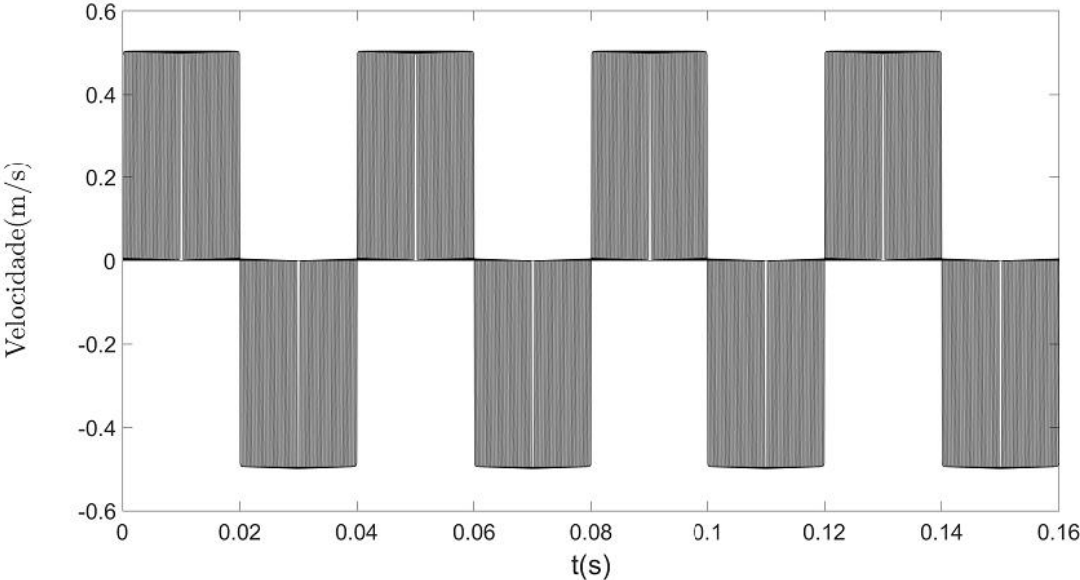
Os métodos utilizados para a obtenção das respostas dinâmicas e os parâmetros considerados na análise numérica são apresentados na Tabela 7. As respostas dos algoritmos em estudo serão comparadas com as respostas analíticas do problema, apresentadas nas equações (4.10) e (4.11) e na Figura 29 e Figura 30 considerando 100 posições igualmente espaçadas ao longo do comprimento da barra engastada. O tempo total da análise foi de $t_f = 0.16s$, o passo de tempo utilizado foi de $\Delta t = 8 \times 10^{-5}s$ e os parâmetros do método de Bathe - β_1/β_2 foram utilizados inicialmente $\beta_1 = [0.1; 0.333; 0.3964; 0.49]$ e para o método de Soares o parâmetro $a = [0; 0.001; 0.01; 0.025]$. Considerando a maior frequência natural do sistema tem-se $\frac{\Delta t}{T} = 1.273$.

Figura 29 – Solução analítica para o deslocamento horizontal para todos os nós



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30 – Solução analítica para a velocidade horizontal para todos os nós



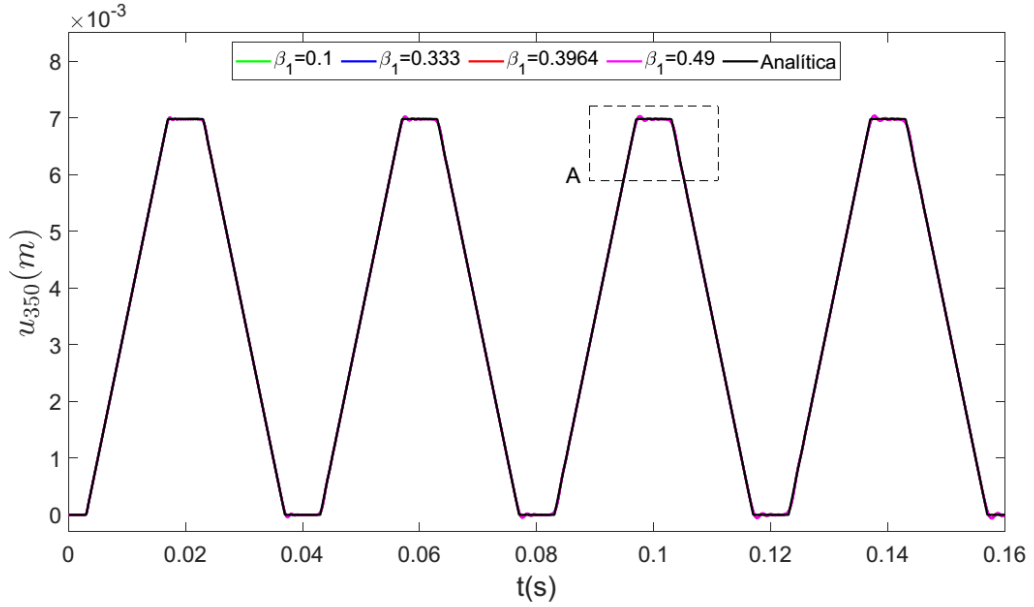
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 31 apresenta o deslocamento do nó 350 ($x = 1.396m$) para o método de Bathe - β_1/β_2 e a Figura 32 apresenta o detalhe A indicado na Figura 31. Observa-se que o método de Bathe - β_1/β_2 obtém uma boa aproximação da solução analítica.

Já a Figura 33 e Figura 34 apresentam a velocidade e detalhe A para o método de Bathe - β_1/β_2 , nas quais se observa que para todos os parâmetros utilizados, altas frequências espúrias são obtidas na solução numérica.

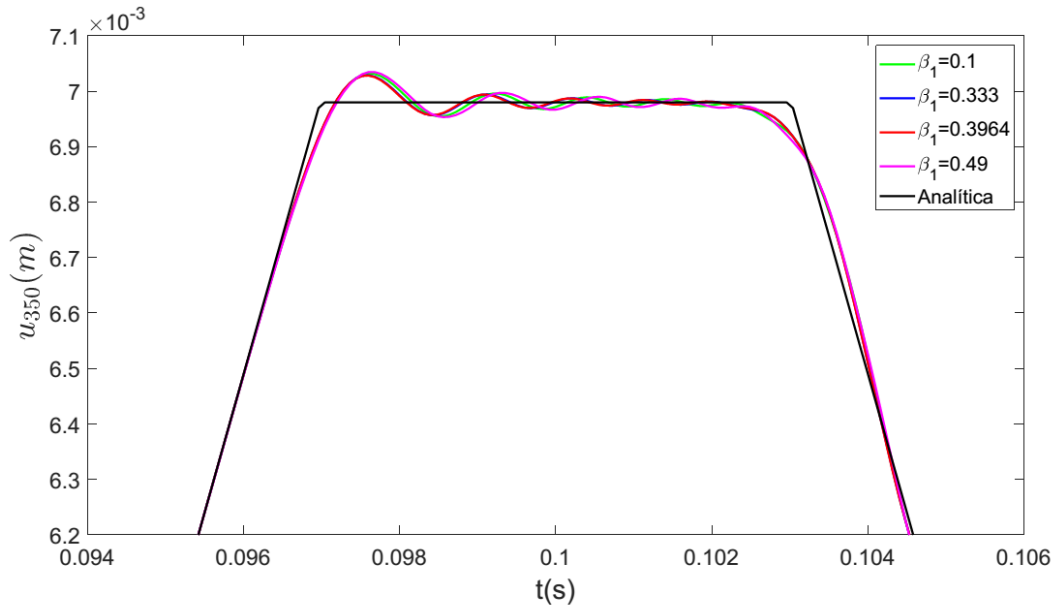
Para contornar este problema e tentar amortecer estas frequências espúrias com o método de Bathe - β_1/β_2 , será adotada a relação $\beta_2 = 2\beta_1$, $\mu = 0.5$ e β_1 o parâmetro escolhido pelo usuário ($\frac{1}{3} < \beta_1 < 0.5$ e $\beta_1 > 0.5$). O objetivo da adoção destas relações e novos parâmetros β_1/β_2 é obter maior amortecimento numérico, como é apresentado na Figura 35, onde o raio espectral mostra o valor de queda (“*fall-value*”) para menores valores de $\frac{\Delta t}{T}$. Entretanto, para estes novos parâmetros o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta precisão de primeira ordem. (27).

Figura 31 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o método de Bathe - β_1/β_2 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$



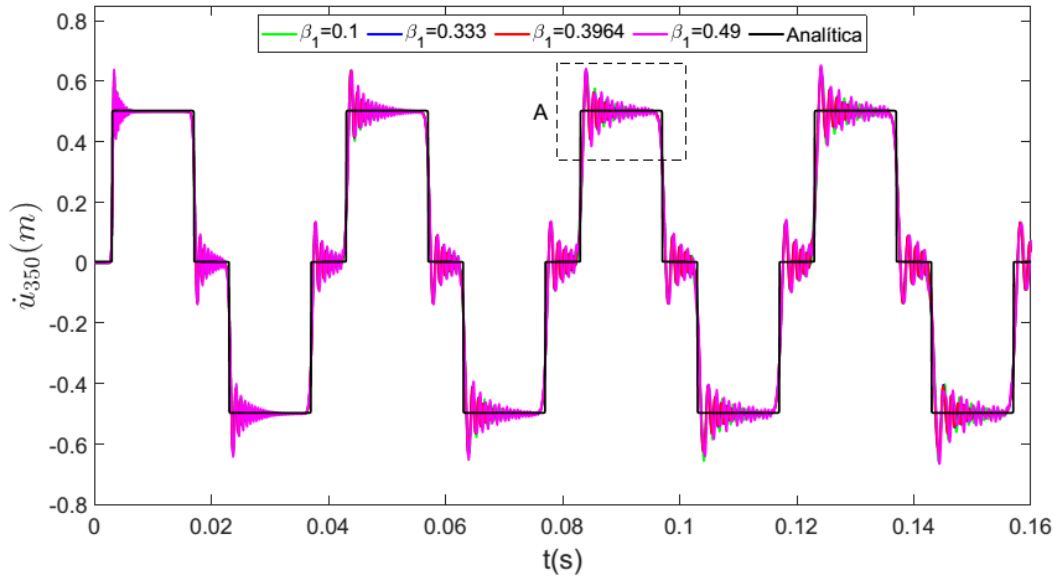
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 – Deslocamento horizontal para o nó 350, detalhe A



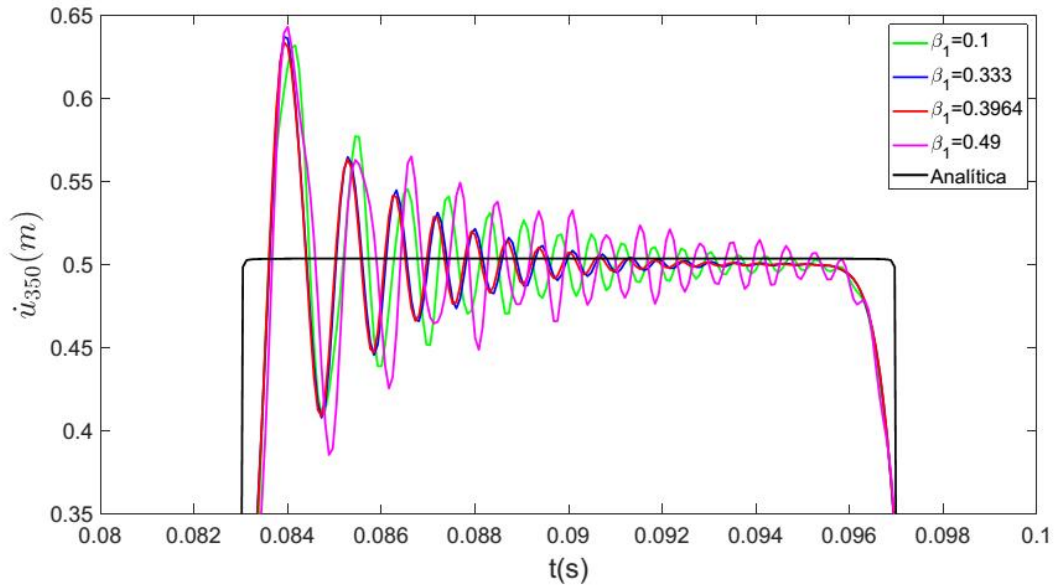
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 33 – Velocidade horizontal do nó 350 para o método de Bathe - β_1/β_2 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$



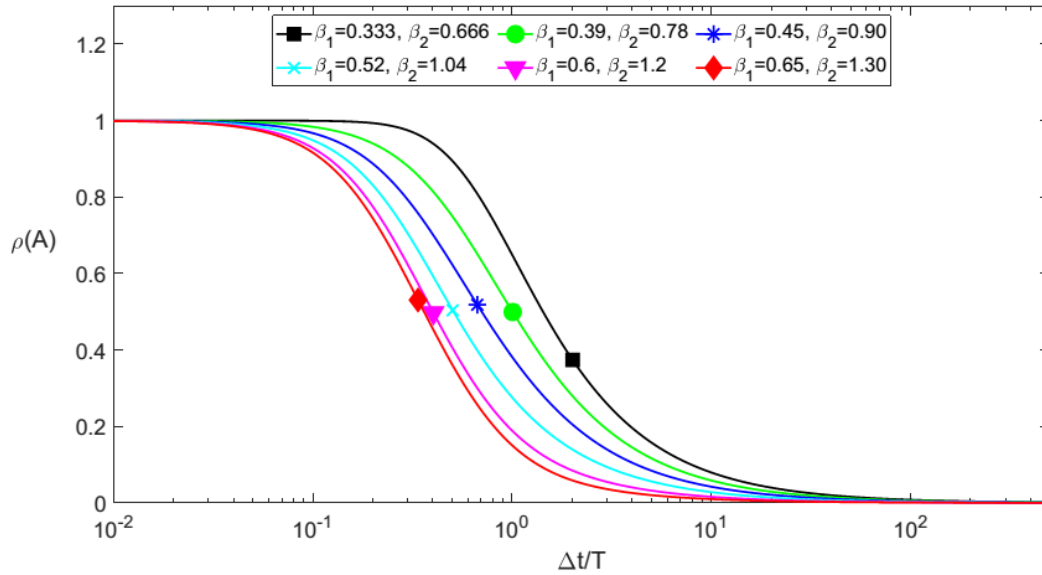
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 – Velocidade horizontal para o nó 350, detalhe A



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 – Raio espectral para o método de Bathe - β_1/β_2 com $\beta_2 = 2\beta_1$ e $\mu = \frac{1}{2}$

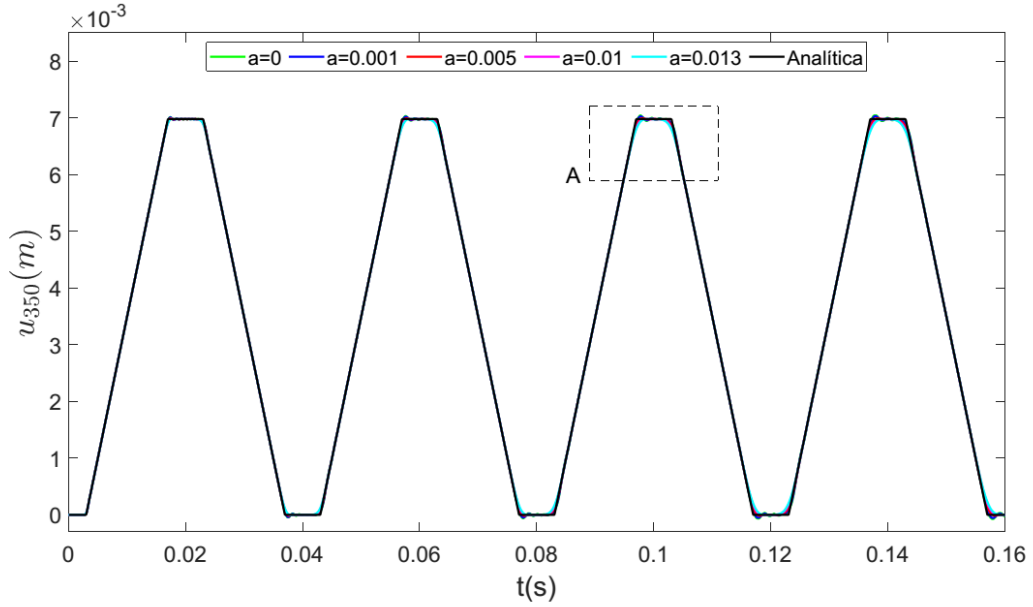


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o método de Soares, a Figura 36 e Figura 37 apresentam o deslocamento do nó 350, o qual se mostra eficiente e alcança uma boa aproximação para o problema.

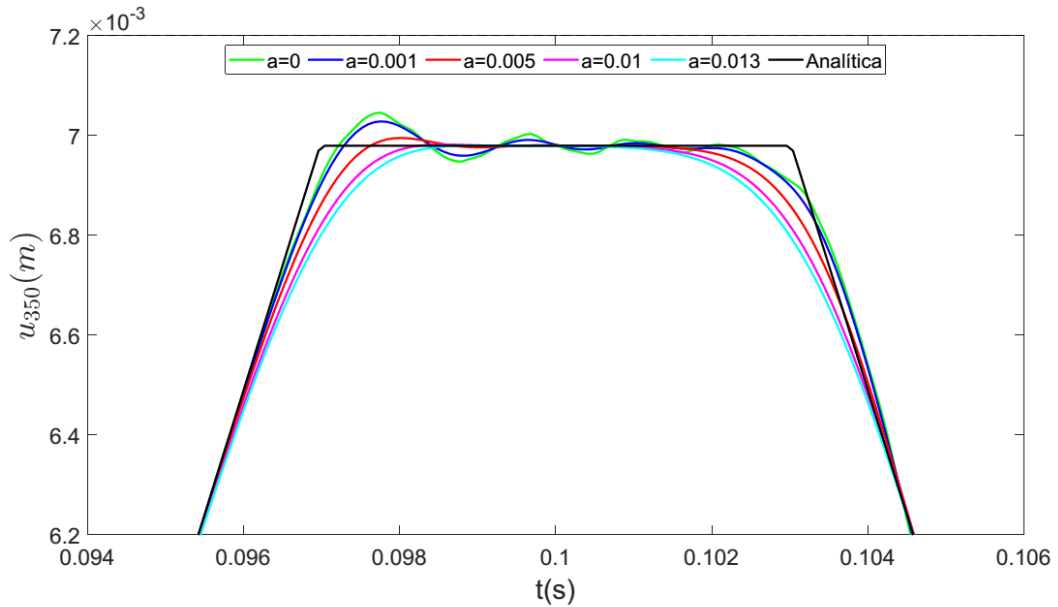
Já para a velocidade do nó 350, a Figura 38 e Figura 39 apresentam a solução analítica e numérica obtidas para o método de Soares. Para $\alpha = 0$ (Regra Trapezoidal) o método não amortece as altas frequências espúrias, como era de se esperar. Entretanto, para valores de $\alpha \geq 0.005$ adotados, o método foi capaz de amortecer as altas frequências espúrias.

Figura 36 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o método de Soares e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$



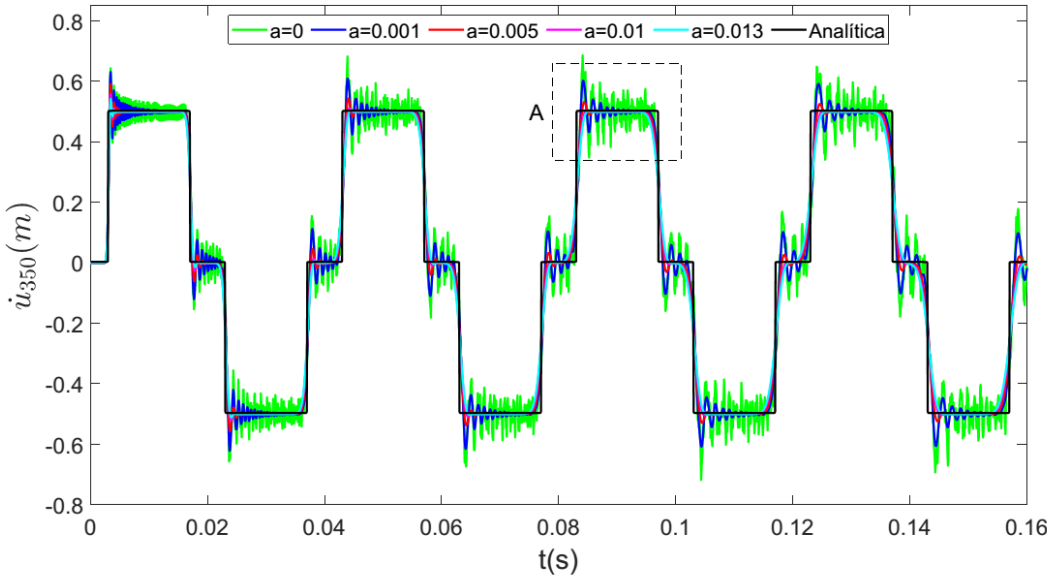
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 – Deslocamento horizontal para o nó 350, detalhe A



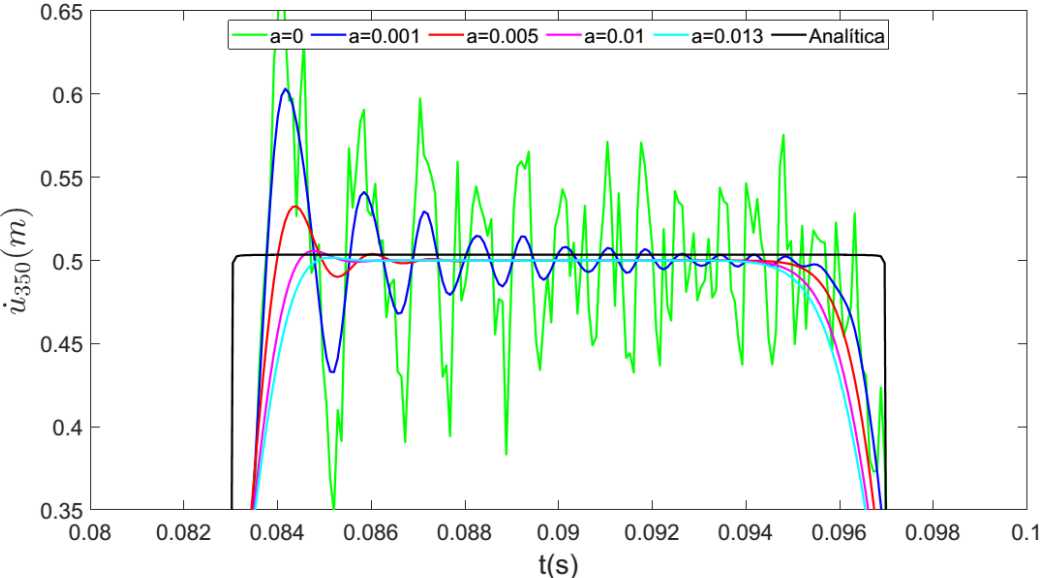
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Velocidade horizontal do nó 350 para o método de Soares e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Velocidade horizontal para o nó 350, detalhe A



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para melhor avaliar as respostas aproximadas, foi calculado o erro relativo de todos os nós para o deslocamento e velocidade e para diversos parâmetros de cada método, considerando os passos de tempo $\Delta t = 8x10^{-5}s$, $\Delta t = 4x10^{-5}s$ e $\Delta t = 2x10^{-5}s$, os quais são apresentados na Tabela 9 até a Tabela 11.

Observa-se nestas tabelas que os dois métodos utilizados apresentaram erros relativos de todos os nós abaixo de 1% para o deslocamento. Para o erro relativo da velocidade, o método de Soares apresentou melhores resultados para $a = 0.004$ ($\Delta t = 8x10^{-5}s$), $a = 0.006$ ($\Delta t = 4x10^{-5}s$) e $a = 0.011$ ($\Delta t = 2x10^{-5}s$). Já para o método de Bathe - β_1/β_2 o menor erro relativo da velocidade foi observado para $\beta_1 = 0.35$, $\beta_2 = 0.7$ e $\mu = 0.5$ para todos os passos de tempo.

Dessa forma, os resultados aproximados do deslocamento e velocidade serão apresentados novamente para os passos de tempo $\Delta t = 8x10^{-5}s$, $\Delta t = 4x10^{-5}s$ e $\Delta t = 2x10^{-5}s$ e para os parâmetros de melhor desempenho para a velocidade, descritos acima, conforme Figura 40 até a Figura 51.

Tabela 9 – Erro relativo para o deslocamento e velocidade de todos os nós e $\Delta t = 8x10^{-5}s$

(continua)

Soares			Bathe - β_1/β_2				
parâmetro	erro (%)		parâmetros			erro (%)	
a	u_t	\dot{u}_t	β_1	β_2	μ	u_t	\dot{u}_t
0.001	0.485	17.589	0.333*	0.667	0.500	0.373	17.018
0.002	0.491	16.631	0.340*	0.680	0.500	0.346	14.689
0.003	0.530	16.314	0.350*	0.700	0.500	0.448	14.519
0.004	0.586	16.305	0.360*	0.720	0.500	0.590	15.249
0.005	0.650	16.460	0.370*	0.740	0.500	0.733	16.124
0.006	0.717	16.704	0.380*	0.760	0.500	0.872	16.97
0.007	0.786	16.997	0.100**	0.600	0.333	0.413	17.987
0.008	0.855	17.313	0.250**	0.634	0.423	0.388	17.377

Tabela 9 – Erro relativo para o deslocamento e velocidade de todos os nós e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$

(conclusão)

Soares			Bathe - β_1/β_2				
parâmetro	erro (%)		parâmetros			erro (%)	
a	u_t	\dot{u}_t	β_1	β_2	μ	u_t	\dot{u}_t
0.009	0.923	17.638	0.400**	0.710	0.592	0.367	16.868
0.010	0.990	17.963	0.490**	0.877	0.860	0.443	18.737

* - Utilizou-se a relação $\beta_2 = 2\beta_1$ e $\mu = 0.5$
** - Utilizou-se a relações conforme a Tabela 7

Tabela 10 – Erro relativo para o deslocamento e velocidade de todos os nós e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$

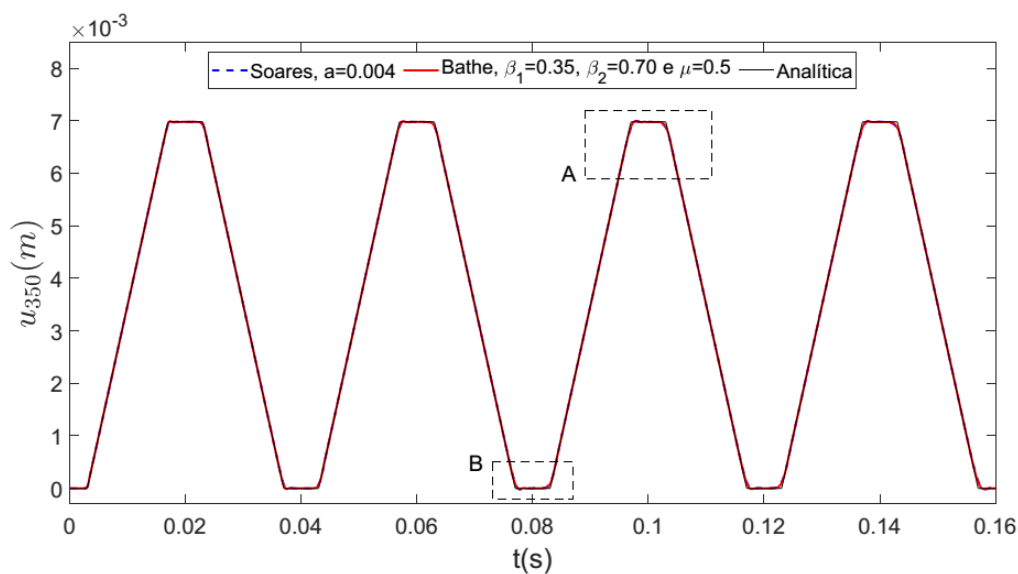
Soares			Bathe - β_1/β_2				
parâmetro	erro (%)		parâmetros			erro (%)	
a	u_t	\dot{u}_t	β_1	β_2	μ	u_t	\dot{u}_t
0.001	0.260	14.636	0.333*	0.667	0.500	0.205	13.980
0.002	0.252	13.782	0.340*	0.680	0.500	0.191	11.762
0.003	0.254	13.326	0.350*	0.700	0.500	0.259	11.778
0.004	0.263	13.080	0.360*	0.720	0.500	0.347	12.518
0.005	0.276	12.964	0.370*	0.740	0.500	0.434	13.327
0.006	0.292	12.936	0.380*	0.760	0.500	0.517	14.078
0.007	0.311	12.969	0.100**	0.600	0.333	0.223	14.663
0.008	0.331	13.044	0.250**	0.634	0.423	0.211	14.231
0.009	0.352	13.148	0.400**	0.710	0.592	0.202	13.875
0.010	0.373	13.273	0.490**	0.877	0.860	0.237	15.200

* - Utilizou-se a relação $\beta_2 = 2\beta_1$ e $\mu = 0.5$
** - Utilizou-se a relações conforme a Tabela 7

Tabela 11 – Erro relativo para o deslocamento e velocidade de todos os nós e $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$

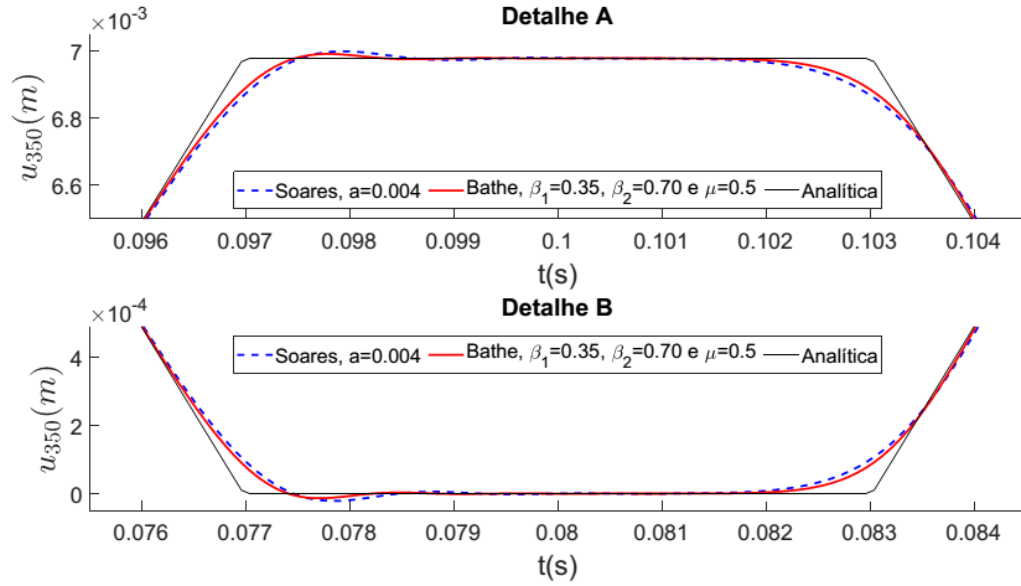
Soares			Bathe - β_1/β_2				
parâmetro	erro (%)		parâmetros			erro (%)	
a	u_t	\dot{u}_t	β_1	β_2	μ	u_t	\dot{u}_t
0.005	0.146	11.057	0.333*	0.667	0.500	0.131	12.226
0.006	0.147	10.897	0.340*	0.680	0.500	0.120	10.042
0.007	0.149	10.781	0.350*	0.700	0.500	0.157	9.908
0.008	0.153	10.699	0.360*	0.720	0.500	0.208	10.456
0.009	0.157	10.645	0.370*	0.740	0.500	0.259	11.101
0.010	0.161	10.613	0.380*	0.760	0.500	0.308	11.717
0.011	0.166	10.600	0.100**	0.600	0.333	0.223	12.628
0.012	0.171	10.602	0.250**	0.634	0.423	0.211	12.371
0.013	0.177	10.616	0.400**	0.710	0.592	0.202	12.166
0.014	0.183	10.641	0.490**	0.877	0.860	0.237	12.958

* - Utilizou-se a relação $\beta_2 = 2\beta_1$ e $\mu = 0.5$
 ** - Utilizou-se a relações conforme a Tabela 7

Figura 40 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$ 

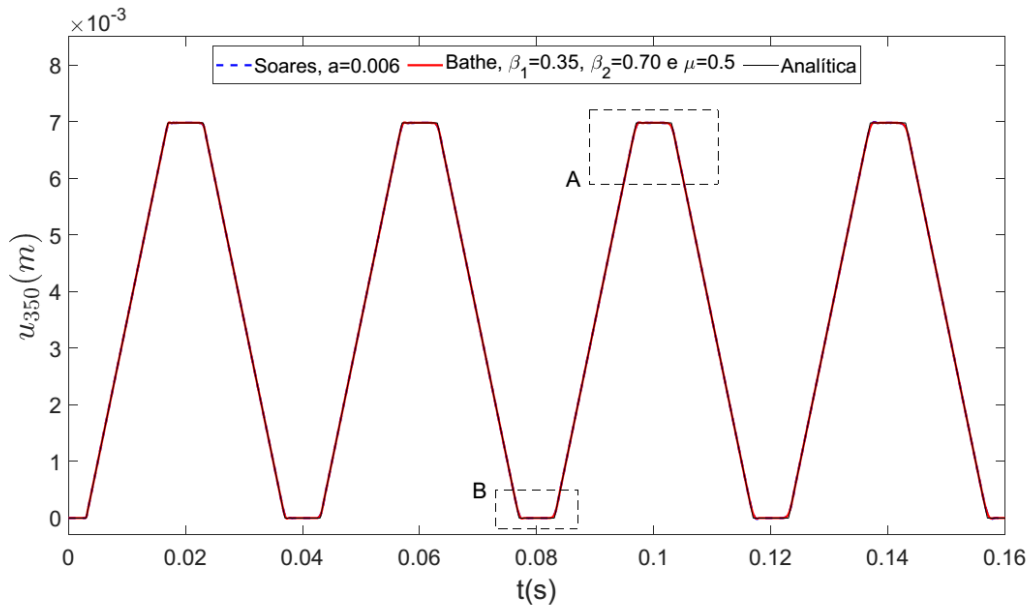
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B



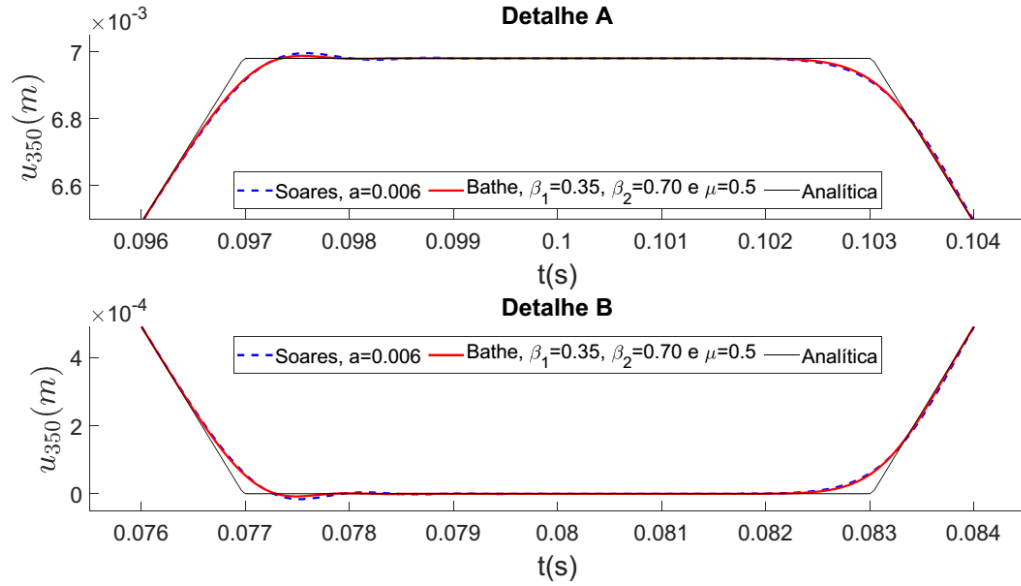
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$



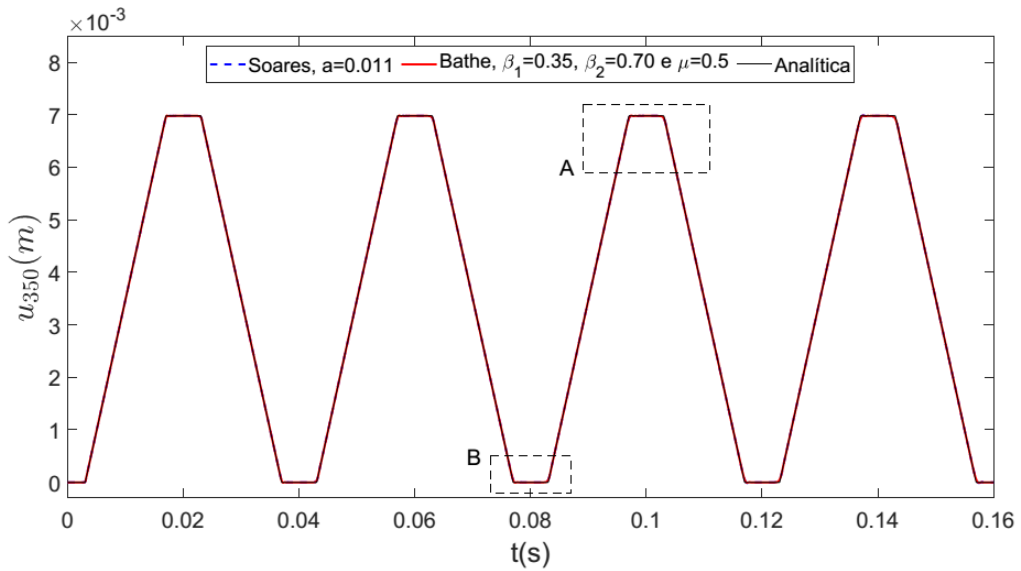
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B



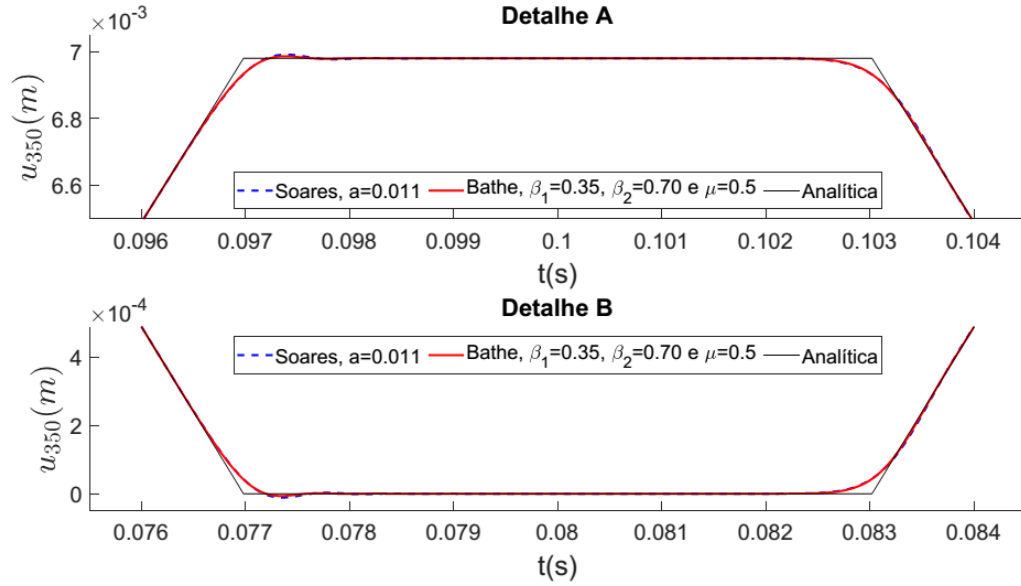
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 – Deslocamento horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$



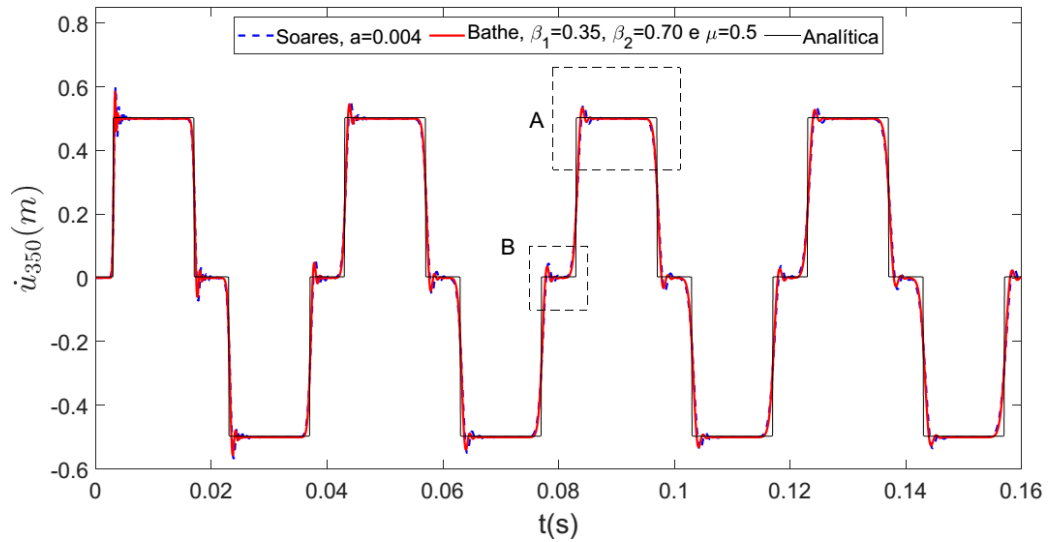
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45 – Deslocamento horizontal do nó 350 e $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B



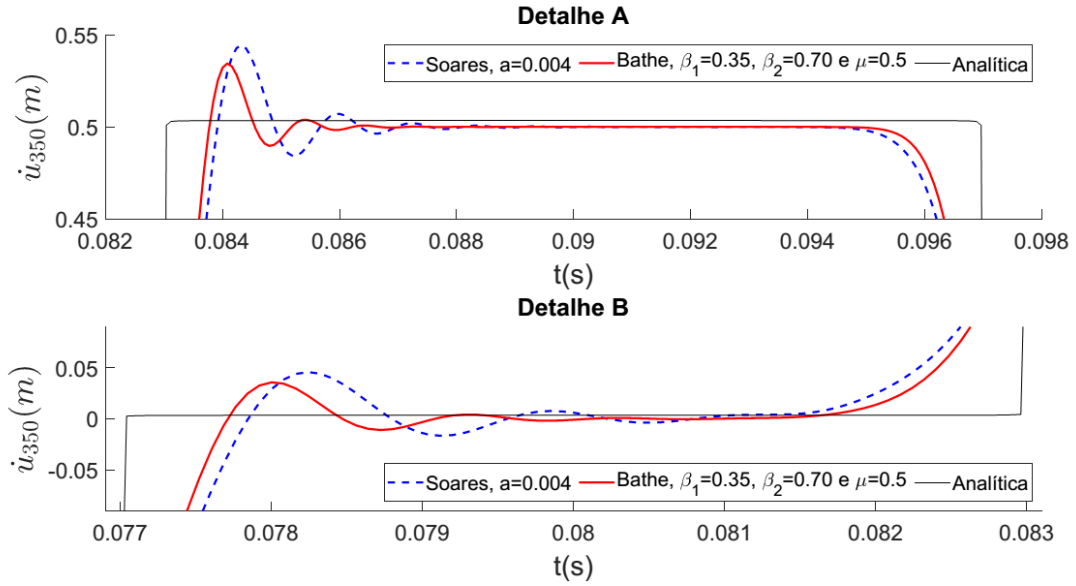
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$



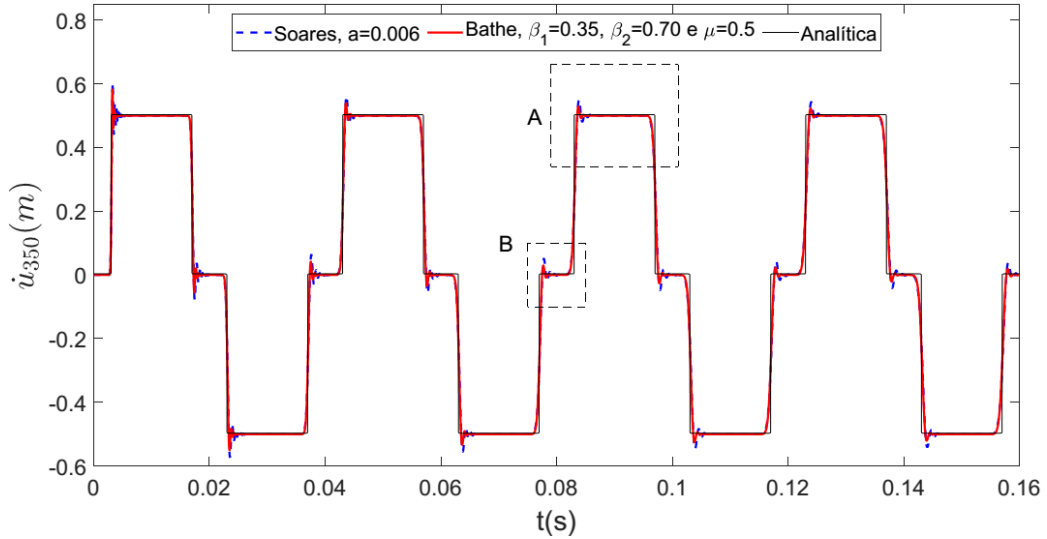
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B



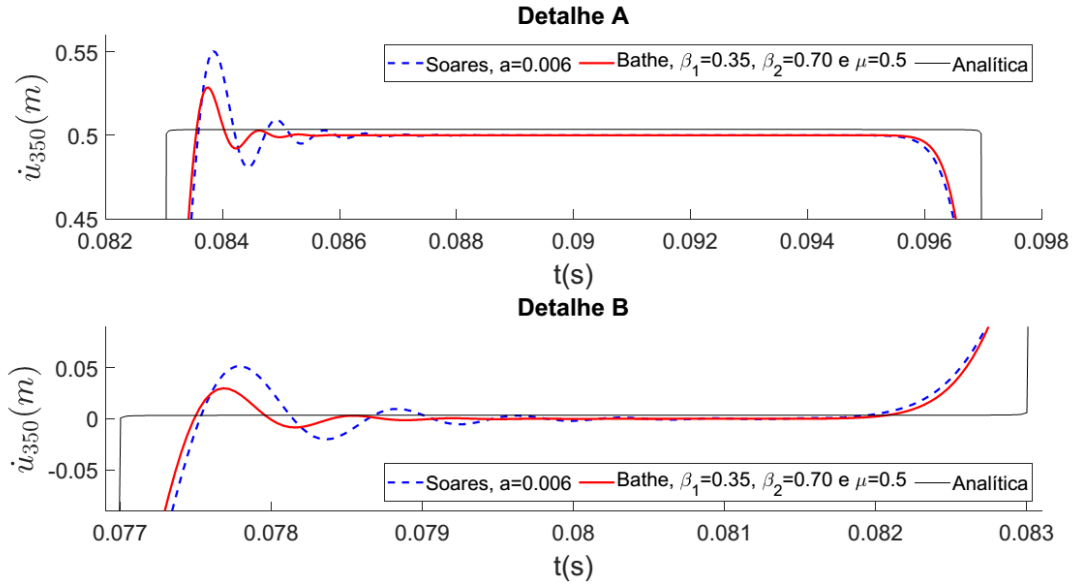
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Velocidade horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$



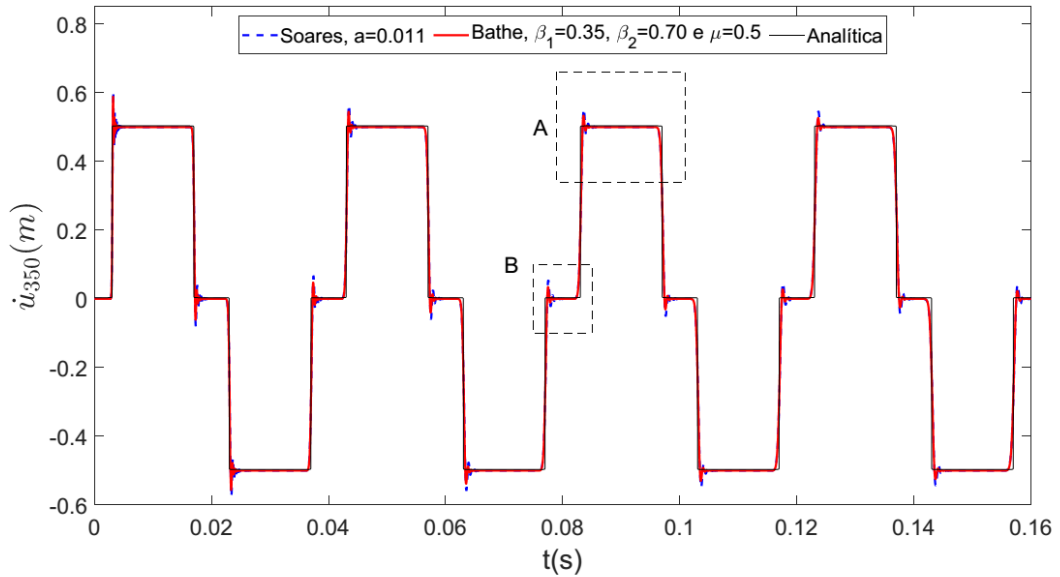
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B



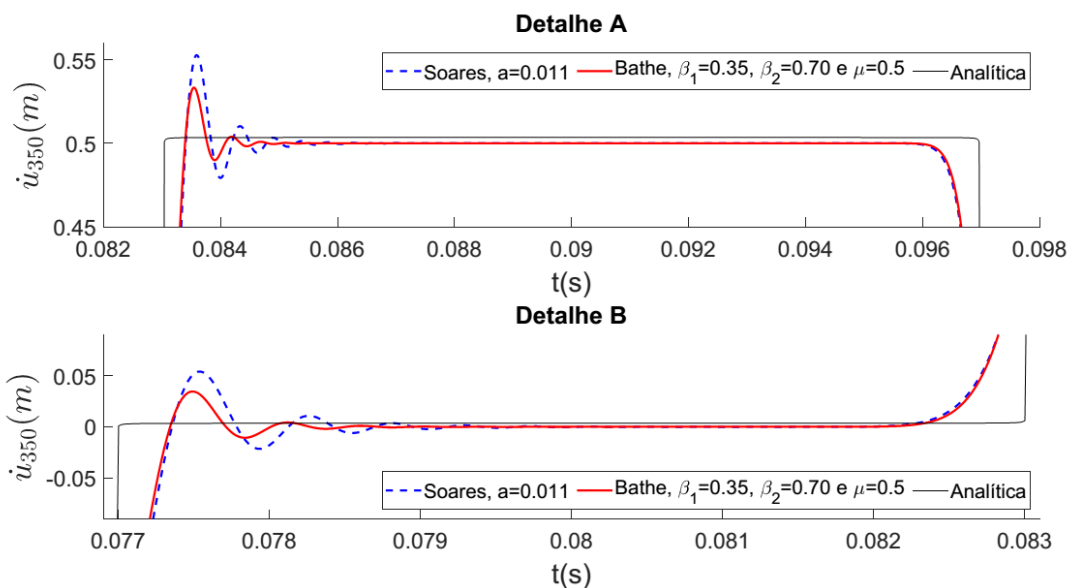
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 50 – Velocidade horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$



Fonte: Elaborado pelo autor.

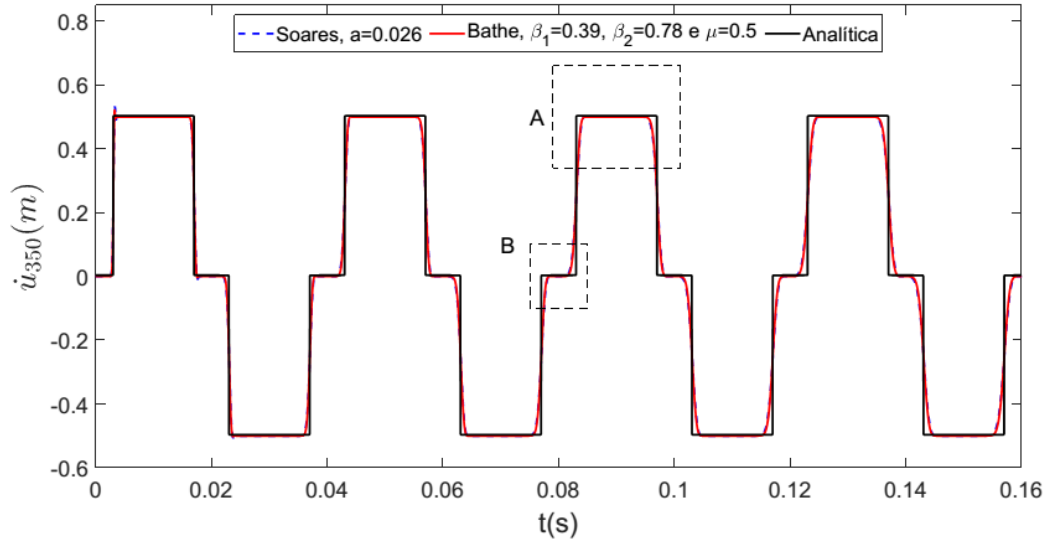
Figura 51 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B



Fonte: Elaborado pelo autor.

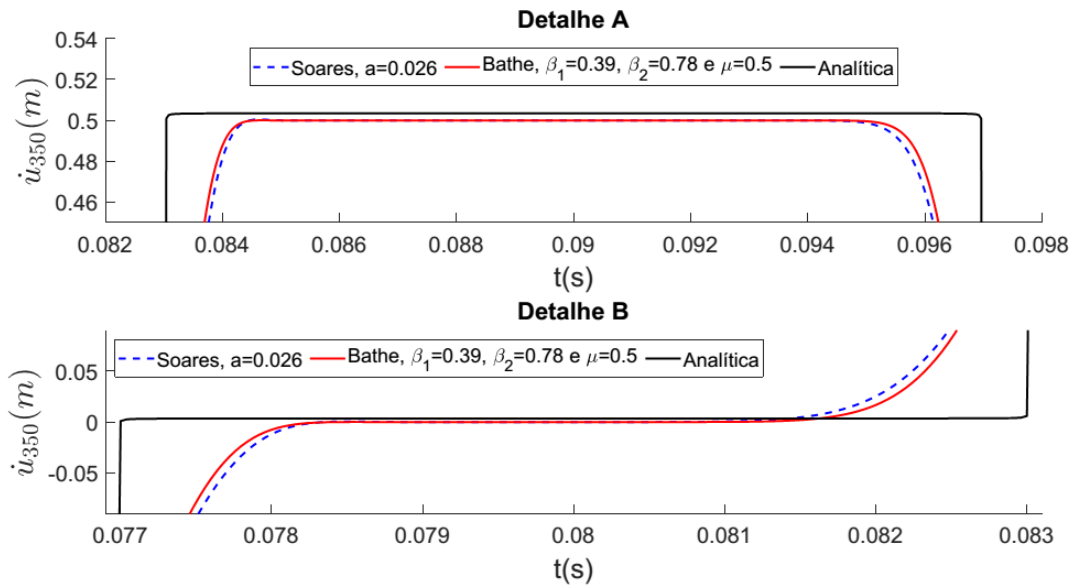
Para a velocidade do nó 350 apresentada na Figura 46 até a Figura 51, observa-se o aparecimento de frequência espúrias, as quais são rapidamente amortecidas pelos dois métodos em estudo. Outros parâmetros de controle dos métodos de Bathe - β_1/β_2 e de Soares podem ser selecionados para prover maiores amortecimento numéricos. Para demonstrar este fato, foi selecionado o parâmetro $a = 0.026$ para o método de Soares e os parâmetros $\beta_1 = 0.39$, $\beta_2 = 0.78$ e $\mu = 0.5$ para o método de Bathe - β_1/β_2 , considerando o passo de tempo $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$. A Figura 52 e Figura 53 apresentam as aproximações obtidas pelos dois métodos para a velocidade do nó 350. Observa-se que as frequências espúrias foram amortecidas, porém o erro relativo à resposta analítica de todos os nós é maior do que os valores apresentados na Tabela 9 a Tabela 11.

Figura 52 – Velocidade horizontal do nó 350 para o passo de tempo $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 53 – Velocidade horizontal do nó 350 e $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$, detalhes A e B



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, ambos os métodos apresentaram excelentes respostas para a aproximação do deslocamento axial da barra (erro relativo global inferior a 1%) e para diversos parâmetros de controle selecionados. Para a velocidade axial, o método de Bathe - β_1/β_2 apresentou os menores erros relativos de todos os nós, considerando a melhor resposta, as quais foram obtidas para os parâmetros $\beta_1 = 0.35$, $\beta_2 = 0.7$ e $\mu = 0.5$ e para os passos de tempo $\Delta t = 8 \times 10^{-5} s$, $\Delta t = 4 \times 10^{-5} s$ e $\Delta t = 2 \times 10^{-5} s$, não necessitando o ajuste do parâmetro β_1 em função de Δt . Já para o método de Soares, foi necessário calibrar o parâmetro a para cada Δt , gerando esforço adicional na obtenção da resposta de melhor desempenho.

Quanto ao número de operações (FLOP) necessárias para obtenção da solução aproximadas, a Tabela 12 resume estes valores em função do número de graus de liberdade (m) e do número de passos de tempo (n), além de apresentar os valores para cada uma das duas parcelas que compõem o número de FLOP da Tabela 5.

Observa-se que o número total de FLOP para ambos os métodos é devido principalmente ao processo de solução dos sistemas lineares de cada passo de tempo (2ª parcela de FLOP). Desta forma, neste exemplo o custo de formação e fatoração das matrizes de rigidez efetiva (1ª parcela de FLOP) não é relevante.

Ainda o número total de FLOP para o método de Soares é aproximadamente 9% menor do que o método de Bathe - β_1/β_2 . Porém, utilizando passos de tempo 9% menores para o método de Soares obtêm-se as mesmas conclusões anteriores quanto aos erros relativos de todos os nós.

Tabela 12 – Número total de FLOP

Método	<i>m</i>	<i>n</i>	1ª Parcela de FLOP	2ª Parcela de FLOP	Total de FLOP
Bathe - β_1/β_2	500	2000	8.33E+07	6.00E+09	6.08E+09
	500	4000	8.33E+07	1.20E+10	1.21E+10
	500	8000	8.33E+07	2.40E+10	2.41E+10
Soares	500	2000	8.33E+07	5.50E+09	5.58E+09
	500	4000	8.33E+07	1.10E+10	1.11E+10
	500	8000	8.33E+07	2.20E+10	2.21E+10

5. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado o estado da arte unificado das principais propriedades numéricas dos algoritmos de integração direta no domínio do tempo: convergência, consistência, estabilidade, acurácia, *overshoot* e custo computacional. Posteriormente, foram descritas as metodologias dos métodos de marcha no tempo em estudo, juntamente com suas propriedades numéricas e algoritmos para implementação.

Ambos os métodos de Bathe - β_1/β_2 e de Soares apresentam, para um conjunto de parâmetros de controle, precisão de segunda ordem, estabilidade incondicional, L-estabilidade e podem ter suas propriedades numéricas, como amortecimento numérico, decaimento da amplitude, alongamento do período, controlados com a definição de apenas um parâmetro pelo usuário, que corresponde ao parâmetro a para o método de Soares e o parâmetro β_1 para o método de Bathe - β_1/β_2 .

Porém, também existem diferenças significativas. Para os parâmetros de controle considerado, o método de Soares apresenta maior alongamento do período do que o método de Bathe - β_1/β_2 . Já para o método de Soares com $0 \leq a < 0.01$ e de Bathe - β_1/β_2 com $0 < \beta_1 < 0.5$, ambos apresentam valores de decaimento da amplitude semelhantes, mas para o método de Soares com $a > 0.01$ os valores de decaimento da amplitude aumentam significativamente quando comparados ao método de Bathe - β_1/β_2 .

Para a verificação de possibilidade de apresentar *overshooting*, os métodos em estudo foram utilizados para obter a resposta de um sistema com um único grau de liberdade e então foi calculada a norma da energia em um passo de tempo $n\Delta t$ (E_n) e comparada com a norma da energia do tempo inicial (E_0) da análise. Nestas condições o método de Bathe - β_1/β_2 não demonstrou tendência de *overshooting* para quaisquer parâmetros de controle, condições iniciais e $\Delta t/T$ utilizados. Para o método de Soares foi

demonstrado que há tendência de *overshooting* para o deslocamento no primeiro passo de tempo, o qual depende da velocidade inicial e apresenta variação linear com o passo de tempo Δt .

Para o método de Soares não há necessidade de calcular a aceleração inicial para iniciar a integração no tempo, há a necessidade de fatorar apenas uma matriz de rigidez efetiva e solucionar apenas um sistema linear de equações por passo de tempo, fato que exige um custo computacional menor desse método. O método de Bathe - β_1/β_2 necessita fatorar duas matrizes de rigidez efetiva, exceto quando se utiliza valores específicos de β_1 , β_2 e μ , e solucionar dois sistemas lineares de equações por passo de tempo.

O custo computacional foi avaliado em termos do número de operações matemáticas realizadas (FLOP) por cada método para se obter a solução. Considerando esta premissa, o processo individual dos algoritmos que apresenta maior custo computacional é a formação e fatoração da matriz de rigidez efetiva ($\hat{K} = LDL^T$), para o qual o método de Bathe - β_1/β_2 apresenta o dobro do custo que o método de Soares, já que há a necessidade de fatorar duas matrizes de rigidez efetiva por passo de tempo. Entretanto, este custo pode ser igualado com a utilização de valores específicos de β_1 , β_2 e μ para o método de Bathe - β_1/β_2 . Já o custo computacional por passo de tempo é aproximadamente 9% menor para o método de Soares quando comparado ao método de Bathe - β_1/β_2 , contrariando Sofiste (44), que afirma que o custo computacional do método de Soares é metade do custo do método de Bathe.

Outra conclusão importante é que o custo computacional, devido ao número de operações matemáticas, depende basicamente do número de graus de liberdade do sistema avaliado (m) e do número de passos de tempo (n) utilizado na análise. Para problemas com número de passos de tempo $n \gg m$ (número de graus de liberdade) o

custo computacional é dominado pelo processo de solução dos sistemas lineares para cada passo de tempo. Já se $m \gg n$, o custo computacional é controlado principalmente pela formação e fatoração da matriz rigidez efetiva.

Por fim, os dois primeiros exemplos numéricos desenvolvidos corroboraram o comportamento das propriedades numéricas de estabilidade, acurácia e *overshoot* citadas anteriormente, ambos os métodos apresentam excelente capacidade de amortecimento de frequências espúrias e, em geral, o método de Bathe - β_1/β_2 apresentou resposta com menores erros relativos em relação à resposta de referência do que o método de Soares, mesmo quando se utilizou valores específicos de β_1 , β_2 e μ para que o método de Bathe - β_1/β_2 tivesse apenas uma matriz de rigidez efetiva.

Para a última aplicação numérica o método de Bathe - β_1/β_2 não foi capaz de dissipar as oscilações da resposta quando apresenta L-estabilidade, precisão de segunda ordem e é controlado por apenas um parâmetro. Para alcançar maior amortecimento numérico para este método foi necessário utilizar outra relação entre os parâmetros de controle, quando o passa a apresentar precisão de primeira ordem, requer vários testes numéricos para encontrar os parâmetros ótimos e necessita de conhecimento avançado do algoritmo por parte do usuário. Nesse mesmo exemplo numérico, o método de Soares foi capaz de amortecer as oscilações da resposta de velocidade axial e obter menores erros numéricos para esta variável com menor custo computacional.

Por fim, de forma geral o método de Bathe - β_1/β_2 , quando utilizado os parâmetros $\beta_1 = 0.75 - 0,25\sqrt{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{3-4\beta_1}$ e $\mu = \frac{(\beta_2-1)}{(2\beta_1-2+\beta_2)}$, apresentou melhores resultados que o método de Bathe padrão e regra trapezoidal. Já o método de Soares apresentou melhores resultados que a regra trapezoidal somente quando houve a necessidade de dissipação de frequências espúrias.

O presente trabalho se concentrou em análises lineares e na avaliação do custo computacional apenas pela contagem de operações matemáticas. Estudos adicionais podem ser desenvolvidos considerando análises não lineares, o efeito do amortecimento, a aplicação dos métodos de integração estudados em sistemas não homogêneos, a adição de outras variáveis do custo computacional e a utilização desses métodos de integração em aplicações numéricas de grande porte.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 CRAIG, R. R., KURDILLA, A. J. Fundamentals of structural Dynamics. 2a ed. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2006;
- 2 CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. Dynamic of Structures. 3 ed. Berkeley, Computers & Structures, Inc., 1995;
- 3 GERADÍN, M., RIXEN, D. J. Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics. 3a ed. John Wiley & Sons, Ltd., 2015;
- 4 FILHO, A. A. Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE / Análise Dinâmica. 2a ed. São Paulo, Érica, 2008;
- 5 RAO, S. Vibrações Mecânicas. 4 ed. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008;
- 6 BATHE, K. J. Finite Element Procedures. 2a ed. New Jersey, Prentice Hall, 2014;
- 7 COOK, R. D. Finite Element Modeling for Stress Analysis. John Wiley & Sons, Inc., 1995;
- 8 HUGUES, T. J. R. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1987;
- 9 CHANDRUPATLA, T. R., BELEGUNDU, A. D., Introduction to Finite Elements in Engineering. 3 ed. New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2002;
- 10 LI, J., YU, K., HE, H. “A second-order accurate three sub-step composite algorithm for structural dynamics”. Applied Mathematical Modeling, v. 77, p. 1391–1412, 2020;
- 11 TAMMA, K. K., ZHOU, X., SHA, D. “The Time Dimension: A Theory Towards the Evolution, Classification, Characterization and Design of Computational Algorithms for Transient/ Dynamic Applications”. Archives of Computational Methods in Engineering, v. 7, n. 2, p. 67–290, 2000;
- 12 BATHE, K. J., BAIG, M. M. I. “On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics”. Computers and Structures, v. 83, p. 2513–2524, 2005;

- 13 SOARES JR, D. "A locally stabilized central difference method". *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 155, p. 1–10, 2019;
- 14 BATHE, K. J. "Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: A simple implicit time integration scheme". *Computers and Structures*, v. 85, p. 437–445, 2007;
- 15 KRIEG, R. D. "Unconditional stability in numerical time integration methods". *Journal of Applied Mechanics*, v. 40, p. 417–421, 1973;
- 16 ZHOU, X., TAMMA, K. K., "Design, analysis, and synthesis of generalized single step single solve and optimal algorithms for structural dynamics". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 59, p. 597–668, 2004;
- 17 MALAKIYEH, M. M., SHOJAEE, S., BATHE, K. J. "The Bathe time integration method revisited for prescribing desired numerical dissipation". *Computers and Structures*, v. 212, p. 289–298, 2019;
- 18 NOH, G., BATHE, K. J. "The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The ρ_∞ -Bathe method". *Computers and Structures*, v. 212, p. 299–310, 2019;
- 19 NOH, G., BATHE, K. J. "For direct time integrations: A comparison of the Newmark and ρ_∞ -Bathe schemes". *Computers and Structures*, v. 225, n. 106079, 2019;
- 20 SOARES JR, D. "A simple and effective new family of time marching procedures for dynamics". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, p. 1138–1166, 2015;
- 21 SOARES JR, D. "An implicit family of time marching procedures with adaptive dissipation control". *Applied Mathematical Modeling*, v. 40, p. 3325–3341, 2016;
- 22 SOARES JR, D. "A simple and effective single-step time marching technique based on adaptive time integrators". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 109, n. 9, pp. 1344–1368, 2017;
- 23 HILBER, H. M., HUGHES, T. J. R. "Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 6, n. 1, p. 99–117, 1978;

- 24 HULBERT, G. M. "Limitations on linear multistep methods for structural dynamics". *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, v. 20, p. 191–196, 1991;
- 25 BATHE, K. J., NOH, G. "Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics". *Computers and Structures*, v. 98-99, p. 1–6, 2012;
- 26 NOH, G., BATHE, K. J. "Further insights into an implicit time integration scheme for structural dynamics". *Computers and Structures*, v. 202, p. 15–24, 2018;
- 27 MALAKIYEH, M. M., SHOJAEI, S., HAMZEHEI-JAVARAN, S., BATHE, K. J. "New insights into the β_1/β_2 -Bathe time integration scheme when L -stable". *Computers and Structures*, v. 245, n. 106443, 2021;
- 28 KROYER, R., NILSSON, K., BATHE, K. J. "Advances in direct time integration schemes for dynamic analysis". *Automotive CAE Companion 2016*, p. 32–35, 2016;
- 29 NEWMARK, N. M. "A method of computation for structural dynamics". *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959;
- 30 BATHE, K. J., WILSON, E. L. "Stability and accuracy analysis of direct integration methods". *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, v. 1, p. 283–291, 1973;
- 31 ZHANG, J., LIU, Y., LIU, D. "Accuracy of a composite implicit time integration scheme for structural dynamics". *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, v. 109, p. 368–406, 2017;
- 32 SOARES JR, D. "A novel family of explicit time marching techniques for structural dynamics and wave propagation models". *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v. 311, p. 838–855, 2016;
- 33 CHUNG, J., HULBERT, G. M. "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method". *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, p. 371–375, 1993;
- 34 HULBERT, G. M., HUGHES, T. J. R. "An error analysis of truncated starting conditions in step-by-step time integration: consequences for structural dynamics". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 15, n. 7, p. 901–910, 1987;

- 35 HULBERT G. M., CHUNG, J. “The unimportance of the spurious root of time integration algorithms for structural dynamics”. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 10, n. 8, p. 591–597, 1994;
- 36 HILBER, H. M., HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L. “Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics”. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 5, n. 3, p. 283–292, 1977;
- 37 BENÍTEZ, J. M., MONTÁNS, F. J. “The value of numerical amplification matrices in time integration methods”. *Computers and Structures*, v. 128, p. 243–250, 2013;
- 38 LAX, P. D., RICHTMYER, R. D. “Survey of the stability of linear finite difference equations”. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 9, n. 2, p. 267–293, 1956;
- 39 HOFF, C., PAHL, P. J. “Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 67, n. 3, p. 367–385, 1988;
- 40 DAHLQUIST, G. G. “A special stability problem for linear multistep methods”. *BIT Numerical Mathematics*, v. 3, n. 1, p. 27–43, 1963;
- 41 SOARES JR, D. “An adaptive semi-explicit/explicit time marching technique for nonlinear dynamics”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 354, p. 637–662, 2019;
- 42 KIRSCH, U. *Reanalysis of Structures: A Unified Approach for Linear, Nonlinear, Static and Dynamic Systems*. Netherlands, Springer, 2008;
- 43 GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. 4a ed. Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 2013;
- 44 SOFISTE, T. V. *Análise dinâmica de estruturas por intermédio de marcha no tempo com parametrização local associada ao método de elementos finitos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, p. 92, 2018;