UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Maressa Alves Lima

Soluções de Equações Diferenciais Parciais Lineares via Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev

VITÓRIA
2022

Maressa Alves Lima

Soluções de Equações Diferenciais Parciais Lineares via Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev

Dissertação de mestrado apresentada ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Profº Drº Fábio Júlio Valentim

VITÓRIA
2022

Ficha Catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Alves, Maressa, 1995
Soluções de Equações Diferenciais Parciais Lineares via Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev. / Maressa Alves - 2022.

78 f.

Orientador: Fábio Júlio Valentim.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Matemática. 2. Análise. 3. Equações Diferenciais Parciais. I. Valentim, Fábio Júlio. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ata da sessão da 64ª defesa de Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT), do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, da discente Maressa Alves Lima, candidata ao título de Mestre em Matemática, realizada às 14:15h do dia vinte e cinco de maio de dois mil e vinte e dois, por meio de videoconferência. O presidente da banca, Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim apresentou os demais membros da comissão examinadora, constituída pelos Doutores: Daniela Paula Demuner (UFES – Membro Interno) e Luiz Gustavo Farah Dias (UFMG - Membro Externo). Em seguida cedeu a palavra à candidata, que em cinquenta minutos apresentou sua dissertação, intitulada "Soluções de Equações Diferenciais Parciais Lineares via Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev". Terminada a apresentação da aluna, o presidente retomou a palavra e a cedeu aos membros da Comissão Examinadora, um a um, para procederem a arguição. O presidente convidou a Comissão Examinadora a se reunir em separado para deliberação. Ao final, a Comissão Examinadora retornou e o presidente informou aos presentes que a dissertação havia sido aprovada e que a aluna deve providenciar dentro do período de 3 (três) meses a versão final da Dissertação. Nada mais havendo, foi encerrada a sessão da qual se lavra a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão Examinadora. Vitória-ES, 25 de maio de 2022.

Prof Dr Fábio Júlio da Silva Valentim - Orientador
Universidade Federal do Espírito Santo

Daniela Paula Demuner
Profª Drª Daniela Paula Demuner - Membro Interno
Universidade Federal do Espírito Santo

Luiz Gustavo Farah Dias
Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah Dias - Membro Externo
Universidade Federal de Minas Gerais

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo - Av. Fernando Ferrari , 514, Goiabeiras, Vitória – ES | 29075-910 |
(27) 4009-2474 | www.cce.ufes.br/ppgmat - ppgmat.ufes@gmail.com

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
FABIO JULIO DA SILVA VALENTIM - SIAPE 2545870
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 04/08/2022 às 17:45

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/530988?tipoArquivo=O

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
DANIELA PAULA DEMUNER - SIAPE 2716856
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 02/09/2022 às 15:20

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/554438?tipoArquivo=O

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado sabedoria, capacidade, saúde e por guiar os meus passos, pois dEle provém todo o conhecimento e todo o poder. Agradeço aos meus pais Carlos Roberto e Debbie que não mediram esforços para realizar essa conquista e pelo amor incondicional que sempre tiveram por mim. Agradeço ao meu esposo Cristiano Emanuel por todo apoio e carinho em todos os momentos, principalmente nos momentos difíceis. Agradeço aos meus irmãos, Filipe e Talita, juntamente com meus cunhados, Filipe e Flaviane e meu sobrinho Heitor por sempre estarem presentes e ajudarem quando foi necessário. Agradeço aos meus sogros Cristiano e Valdeane pelo suporte e pelos conselhos, juntamente com meu cunhado Calebe Abner. Agradeço também a minha avó(em memória) por ter feito tudo que estava ao seu alcance para me auxiliar e colaborar nessa conquista. Agradeço aos meus tios e tias, primos e primas por toda cooperação, em especial Olimpia, Bianca e Luiza. Também quero agradecer ao meu orientador Fábio Júlio por todas as orientações, reuniões, conselhos e ajuda que me permitiram concluir essa dissertação. No geral agradeço a todos os meus familiares, amigos, colegas e professores que me ajudaram a todo momento, me incentivaram nos momentos dificeis e entenderam a minha ausência durante todo o mestrado. Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) pela concessão de bolsa de estudos durante o curso de Mestrado e toda á compreensão durante esse período de pandemia.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma introdução sobre equações diferenciais parciais (EDPs) e algumas técnicas para as suas soluções. Dentre as técnicas que foram exploradas duas se destacam, a transformada de Fourier que nos permite converter equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias e os espaços de Sobolev que nos permitem enfraquecer a noção de derivada abrangendo um conjunto maior de soluções para as EDPs.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, transformada de Fourier, espaços de Sobolev, soluções fracas, equações elípticas, equações parabólicas.

Abstract

In this work we present a introdution about the partial differential equations (PDE) and some techniques for their solutions. Among the techniques explored we detach, the Fourier transform that convert partial differential equations (PDE) in ordinary differential equations (PDO), and the Sobolev spaces, which allows weaken the notion of derived reaching a larger set of solutions for PDEs.

Key-Words: partial differential equations, Fourier transform, Sobolev spaces, weak solutions, elliptic equations, parabolic equations.

Sumário

Introdução

O estudo das equações diferenciais tem atraído a atenção de grande parte da comunidade científica desde o século XVII com as contribuições de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) até os dias atuais sendo uma área de pesquisa de grande interesse da comunidade científica da matemática pura e aplicada.

Na matemática aplicada, as equações diferenciais no geral cumprem o papel de ponte com outras ciências, pois se originam em problemas ligados à física, biologia, engenharia, química e economia. Grande parte das equações diferenciais parciais surgem de modelos físicos ou problemas da geometria diferencial, podendo ser encontrados em áreas como: aerodinâmica, elasticidade, geofísica, circulação de fluidos, transferência de calor e crescimento de tumores.

Na matemática pura, as equações diferenciais tem fomentado o desenvolvimento de novos conceitos e ferramentas que propiciem um melhor entendimento e avanço da teoria. Em particular, novas equações, novos métodos para encontrar solução, o comportamento e a regularidade das soluções são alguns dos temas de interesse. Nesse sentido, surge o principal objetivo dessa dissertação.

Esta dissertação é fruto de um estudo sobre equações diferenciais parciais lineares (EDPs) e algumas técnicas para as suas soluções. Dedicamos a nossa atenção no estudo de propriedades básicas de transformada de Fourier e os espaços de Sobolev, os quais nos proporcionam fortes resultados dentro da matemática.

As ideias de Fourier são vistas em todos os ramos da matemática e da física matemática, desde a teoria dos números até a mecânica quântica. As séries e integrais de Fourier possuem uma surpreendente variedade de aplicações nas quais ela é a principal ferramenta. Entre essas aplicações, destacamos a sua contribuição para a resoluções de algumas EDPs. A resolução de EDPs através da transformada de Fourier, como veremos, ocorre por uma propriedade da transformada que converte derivadas em multiplicações ($\widehat{(D^\alpha u)} = (iy)^\alpha \hat{u}$), onde ($\hat{}$) representa a transformada de Fourier. Essa propriedade é muito poderosa porque nos permite transformar equações diferenciais parciais para equações mais simples de serem resolvidas. Para alguns livros didáticos contendo um estudo detalhado da transformada de Fourier sugerimos [5], [6] e [7].

Os espaços de Sobolev levam esse nome devido ao matemático russo Sergei Lvovich Sobolev, um dos principais matemáticos a desenvolver essa teoria. A origem desses espaços ocorreu durante o estudo das equações diferenciais parciais e a necessidade de uma nova teoria, a necessidade de um espaço de soluções mais abrangente que não exigiam tanto destas funções, surgindo o conceito de derivada fraca. A ideia de derivada fraca se desenvolveu da fórmula de integração por partes,

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1) \int_U \phi D^\alpha u dx,$$

para $u \in C^k(U)$ e $\phi \in C_c^\infty(U)$, foi observado que essa igualdade poderia ser aplicada em equações diferenciais parciais, onde a solução dessa equação não dependeria mais de derivadas, gerando as soluções fracas. Um estudo detalhado pode ser visto no livro [6].

Em cada capítulo da dissertação buscamos desenvolver esses tópicos e relacioná-los. No Capítulo 1 realizaremos uma introdução de conceitos básicos necessários para a compreensão dessas equações e de suas soluções, posteriormente daremos alguns exemplos de EDPs e a dedução das respectivas soluções. No Capítulo 2, veremos um pouco sobre como podemos obter e aplicar a transformada e a série de Fourier para domínios diferentes e também resolveremos alguns exemplos de EDPs com a ajuda da transformada de Fourier, convertendo equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias.

O estudo sobre os espaços de Sobolev será no Capítulo 3, primeiro iremos considerar uma definição mais fraca de derivada que nos permitirá definir os espaços de Sobolev originando a ideia de soluções fracas para as equações diferenciais parciais. Ainda no Capítulo 3 apresentaremos alguns teoremas clássicos, como a Caracterização de H^k pela Transformada de Fourier e o Teorema da Imersão de Sobolev.

Para finalizar a dissertação, no Capítulo 4 faremos uma introdução as equações diferenciais lineares de segunda ordem, onde será realizado um estudo sobre as equações elípticas e as equações parabólicas, suas propriedades e soluções, este estudo ocorre utilizando principalmente os espaços de Sobolev. Além disso, adicionamos um apêndice com algumas definições e teoremas que utilizaremos no decorrer texto e que notamos a necessidade de enunciá-los.

Capítulo 1

Introdução as Equações Diferenciais Parciais(EDP)

Neste capítulo abordaremos algumas definições e conceitos básicos que vão nortear o nosso estudo. Além disso, trabalharemos com equações que nos possibilitarão entender melhor o conceito de equação diferencial parcial e a busca por suas soluções. As principais referências bibliográficas são os livros [6] e [7].

1.1 Alguns Conceitos Básicos e Resultados Importantes

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação que envolve uma função desconhecida de duas ou mais variáveis e suas derivadas parciais. Como veremos no decorrer desse estudo, essas equações são importantes pois descrevem fenômenos físicos, geométricos e probabilísticos e abrem um leque para novos estudos dentro da matemática e em outras áreas.

Afim de escrevermos a forma de uma EDP, vamos definir alguns conceitos preliminares para a sua compreensão. Para as próximas definições considere um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e a função real $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

- O *conjunto* $C^k(U)$ para k inteiro positivo, é o conjunto

$$C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \text{ é } k \text{ vezes diferenciável e } u^k \text{é contínua}\}.$$

- O *índice múltiplo n-dimensional* é o vetor

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

onde as componentes α_i são inteiros não negativos. Denominamos a sua ordem como:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

- A *derivada parcial* de u considerando um índice múltiplo α é definida por:

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x).$$

Sendo assim, para um inteiro $k \geq 0$, definimos

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\},$$

ou seja, $D^k u(x)$ é o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem k avaliadas no ponto x e definimos

$$D^0 u(x) := u(x).$$

Note que $D^k u(x)$ é um ponto de $\mathbb{R}^{n^k}$.

Observação 1.1.1. Ao longo do texto utilizaremos diferentes notações para representar derivadas, o uso dessas notações ocorre porque em cada caso uma notação se encaixa melhor no conteúdo, ajudando a simplificar a escrita ou para facilitar a compreensão do que esta sendo a apresentado. As notações são

- Para $n = 1$
$$\frac{du}{dx} = u' = u_x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = u'' = u_{xx}, \quad \cdots ;$$
- Derivadas Parciais
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \partial_{x_i} u = u_{x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_{x_i}\partial_{x_j} u = u_{x_i x_j}, \quad \cdots ;$$
- Para $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, com $u = u(x, y)$ denotamos
$$D_x u = u_x = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n}) \quad \text{e} \quad D_y u = u_y = (u_{y_1}, u_{y_2}, \cdots, u_{y_n}).$$

Exemplos:

(i) Para $k = 1$ temos que $D^1u(x) = Du(x)$ é o vetor gradiente
$$Du(x) = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}).$$

(ii) Para $k = 2$ temos que $D^2u(x)$ é a matriz Hessiana
$$D^2u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}.$$

Depois das definições e exemplos sobre derivadas de uma função, definiremos agora conceitualmente uma equação diferencial parcial, as classes em que são divididas e daremos alguns exemplos.

Definição 1.1.1. *(Equação Diferencial Parcial)* Considerando um inteiro $k \geq 1$, U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e a função $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$. Dado $x \in U$, a expressão da forma
$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right) = 0 \tag{1.1}$$
é denominada uma equação diferencial parcial de ordem k, onde a função desconhecida
$$u : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
é a solução da EDP.

Podemos também definir um sistema de equações diferenciais parciais como um conjunto de equações diferenciais parciais.

Definição 1.1.2. Considerando um inteiro $k \geq 1$, U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e a função $F : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Dado $x \in U$, a expressão da forma:
$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right) = 0 \tag{1.2}$$
é denominada um sistema de equações diferenciais parciais de ordem k, onde a função desconhecida
$$u : U \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad u = (u_1, \cdots, u_m)$$
é a solução do sistema.

Na definição acima, estamos considerando um sistema que tenha a mesma quantidade de equações e de incógnitas (m). Apesar de ser o caso mais comum, podemos encontrar outros casos.

Soluções de Equações Diferenciais Parciais

Nas definições acima citamos que a função u é a solução de uma equação diferencial parcial, mas não identificamos como essa solução precisa ser e nem como encontrá-la. Veremos que não existe uma teoria geral para encontrar a solução de EDPs, apenas alguns métodos distintos que podem ou não funcionar para cada equação. Ao longo desse trabalho abordaremos alguns desses métodos.

Uma questão a se pensar é sobre o que devemos esperar dessa função u, que seja infinitamente diferenciável, por exemplo? É fácil perceber que quanto mais propriedades pedirmos de uma solução, mais difícil e até mesmo impossível será encontrá-la. Vamos dizer que uma equação diferencial parcial tem uma *solução clássica*, quando existe uma solução, a solução é única e para um problema de ordem k a solução é $C^k(U)$. Portanto, resolver uma equação diferencial parcial no sentido clássico significa encontrar a fórmula para a sua solução clássica, ou apenas mostrar que ela existe e encontrar algumas de suas propriedades, pois nem sempre vamos conseguir expressar a fórmula da solução de uma EDP.

Durante o nosso estudo veremos algumas estratégias para encontrar soluções para equações diferenciais parciais, que podem ou não funcionar para uma determinada EDP. Podemos citar algumas estratégias como o método de separação de variáveis, ou supor que existe solução para ver o que podemos encontrar sobre a solução e até mesmo buscar novas soluções a partir de uma solução conhecida.

Geralmente a busca por soluções clássicas não é um trabalho fácil, afim de encontrar novos caminhos e novas estratégias para solucionar essas equações surge a ideia de ”enfraquecer” as soluções para resolver algumas EDPs, surgindo o conceito de solução fraca, derivada fraca e os Espaços de Sobolev que abordaremos mais adiante.

Tipos de Equações Diferenciais parciais

As equações diferenciais parciais podem ser classificadas do seguinte modo

- Uma equação diferencial parcial é chamada *linear* se a sua expressão é da forma:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(x) D^i u(x) = f(x)$$

  onde as funções $f, a_1, \cdots, a_k$ são conhecidas. A EDP linear é dita *homogênea* se $f \equiv 0$

- Uma equação diferencial parcial é chamada *semilinear* se a sua expressão é da forma:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(x) D^i u(x) + a_0\left(D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

  onde as funções $a_0, a_1, \cdots, a_k$ são conhecidas.

- Uma equação diferencial parcial é chamada *quase linear* se a sua expressão é da forma:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\left(D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right) D^i u(x) + a_0\left(D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

  onde as funções $a_0, a_1, \cdots, a_k$ são conhecidas.

- Uma equação diferencial parcial é chamada *totalmente não linear* se não é linear, semilinear ou quaselinear.

  Observação 1.1.2. A classificação do sistema de equações diferenciais parciais em linear, semilinear, quaselinear e totalmente não linear ocorre pelas EDPs que o compõem.

1.2 Exemplos

Agora, iremos estudar e resolver três importantes EDPs que nos permitirão compreender melhor as definições apresentadas anteriormente, também veremos métodos simples e eficazes para solucionar essas equações.

1.2.1 Equação do Transporte

A equação do Transporte é dada por:

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = f, \tag{1.3}$$

onde
∘ $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, é a função que resolve a equação;
∘ O vetor $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ é fixado;
∘ $D_x u = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$ é o gradiente em relação a x;
∘ $f : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada.

Para encontrarmos a fórmula da solução u, uma boa estratégia é supor que existe uma solução e tentar encontrar a sua forma, então vamos supor que u existe e que é uma função suave, ou seja, uma função infinitamente diferenciável. Além disso, considere inicialmente o caso homogêneo $f \equiv 0$ e tome $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ fixos e defina

$$z(s) := u(x + sb, t + s), \quad t, s \in [0, +\infty).$$

Então,

$$z'(s) = u_t(x + sb, t + s) + bD_x u(x + sb, t + s) = 0.$$

Assim, $z(s)$ é constante para todo $s \in \mathbb{R}$, ou seja, u é constante na linha (x,t) na direção de $(b,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Logo, a partir de um valor inicial e uma função $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada, obtemos o problema:

$$\begin{cases} u_t + bD_x u &= 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Tomando $s = -t$, temos

$$z(s) = u(x + sb, t + s) = u(x - tb, 0) = g(x - tb).$$

Portanto, quando a função g é C^1 conseguimos encontrar a nossa função u.

Agora, podemos nos questionar quais as propriedades a função u deve satisfazer para que de fato seja uma solução. Note que, a função u não precisa necessariamente ser suave, visto que só utilizamos a sua primeira derivada, note também que a regularidade de u depende da função g, pois se a função g não for derivável, não podemos obter uma solução para o problema, e se $g \in C^1$ implica que u existe e $u \in C^1$ e assim sucessivamente.

Para o caso não homogêneo seguiremos os mesmos passos. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + bD_x u &= f, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}.$$

Escolhendo a mesma função $z(s)$ anteriormente definida, agora temos que

$$z'(s) = f(x + sb, t + s).$$

Então

$$u(x,t) - u(x - bt, 0) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} z'(r)dr = \int_{-t}^{0} f(x + rb, t + r)dr$$

e substituindo r por $s - t$, temos

$$u(x,t) = g(x - bt) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s)ds.$$

Portanto, como conhecemos g e f conseguimos encontrar a função u que resolve o sistema.

Analogamente, a existência e regularidade da função u dependem das funções dadas f e g.

1.2.2 Equação de Laplace

Agora, vamos estudar sobre uma EDP que constitui um campo de estudo de funções muito importantes, as funções harmônicas. Mas antes, definiremos alguns conceitos que encontraremos adiante.

- O *laplaciano* de uma função u é dado por:

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

- Considerando um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e a função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definimos o *divergente* de f como:

$$divf := tr(Df) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_i}$$

A Equação de Laplace é dada por:

$$\Delta u = 0 \tag{1.4}$$

onde a função desconhecida u é dada por $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, com U um aberto do $\mathbb{R}^n$, onde $\overline{U}$ é o fecho de U.

Definição 1.2.1. *(Função harmônica)* Quando uma função C^2 satisfaz a Equação de Laplace é chamada de função harmônica.

Equação de Poisson

Uma equação que surge da equação de Laplace, pelo caso não homogêneo, que analisaremos e estudaremos ao mesmo tempo é a Equação de Poisson, dada por:

$$-\Delta u = f, \tag{1.5}$$

onde a função desconhecida u é dada por $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, com U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e a função conhecida $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Interpretação Física

Antes de prosseguirmos o estudo detalhado para a Equação de Laplace, veremos uma maneira de aplicar essa equação. Uma das interpretações mais utilizadas da Equação de Laplace é o caso em que u representa uma densidade de uma certa quantidade que está em equilíbrio, essa quantidade pode ser vista como uma concentração química, uma temperatura ou um potencial eletrostático.

Considerando V uma região suave no interior de U qualquer, pela suposição de equilíbrio o fluxo líquido u sobre ∂V é zero

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu \; dS = 0,$$

onde F é o fluxo da densidade e ν é o campo normal unitário externo de u. Pelo Teorema de Gauss-Green, temos

$$\int_V divF \; dx = \int_{\partial V} F \cdot \nu \; dS = 0.$$

como V é qualquer, segue que $divF = 0$ em U.

Nesses problemas é comum assumir que o fluxo é proporcional ao gradiente Du em direções opostas, ou seja, o fluxo tende a ir para os lugares que tem uma menor concentração. Assim,

$$F = -aDu,$$

essa equação, dependendo da quantidade representada, pode ser vista como a lei de difusão de Fick, a lei da condução de calor de Fourier ou a lei da condução elétrica de Ohm, e dela temos que,

$$divF = div(Du) = \Delta u = 0$$

direcionando a solução para a equação de Laplace. Esta interpretação física pode ser encontrada na página 20 e 21 do livro [6].

Solução Fundamental

Uma vez vista a interpretação para a Equação de Laplace, vamos estudar adiante como podemos encontrar uma solução. Sabemos que temos mais facilidade em encontrar soluções mais simples, logo restringiremos nossa busca inicialmente por funções simétricas, ou seja, uma função que não se altera por permutações de suas variáveis.

Primeiro vamos provar que a Equação de Laplace é invariante por rotações, ou seja, precisamos mostrar que se $u(x)$ é solução então $u(Rx)$ também é solução, para R uma matriz ortogonal ($RR^t = I$). Para isso, suponha que u seja solução de (1.4) e considere R uma matriz ortogonal. Tomando $v(x) = u(Rx)$ e $y = Rx$ segue que

$$v_{x_i} = (u(y))_{x_i} = u_y(y) \cdot y_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k}(y)(y_k)_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k}(y)(r_k x)_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} r_{k,i} u_{y_k}(y)$$

onde r_k é a k-ésima linha de R e $r_{k,i}$ é o i-ésimo termo da linha r_k, então

$$v_{x_i x_i} = \left(\sum_{k=1}^{n} r_{k,i} u_{y_k}(y) \right)_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} r_{k,i} \left(u_{y_k}(y) \right)_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} r_{k,i} u_{y_k y}(y) \cdot (y_k)_{x_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_{k,i} \sum_{l=1}^{n} u_{y_k y_l}(y) \cdot (r_l x)_{x_i} = \sum_{k,l=1}^{n} r_{k,i} r_{l,i} u_{y_k y_l}(y).$$

Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} r_{k,i} r_{l,i} u_{y_k y_l}(y) = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}(y) \sum_{i=1}^{n} r_{k,i} r_{l,i} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}(y) \sum_{i=1}^{n} r_{l,i} (r^T)_{i,k}$$

onde $(r^T)_{i,k}$ representa os termos de R^T. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}(y) r_l (r^T)_k = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}(y) (RR^T)_{k,l} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}(y) (I)_{k,l}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}(y) \delta_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k y_k}(y) = 0.$$

Portanto, v também é solução de (1.4) e assim a Equação de Laplace é invariante por rotações.

Visto isso, iremos buscar soluções radiais, ou seja, soluções que tem a forma

$$u(x) = v(r),$$

com $r = |x|$ e escolher v de forma que $\Delta u = 0$ se mantenha.
Assim, se $r \neq 0$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Agora, calculando as derivadas parciais de u e utilizando as igualdades acima, temos

$$u_{x_i} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}.$$

Logo,

$$u_{x_i x_i} = \left(\frac{\partial v'}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \frac{x_i}{r} + v'(r) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \right) = v''(r) \frac{{x_i}^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{{x_i}^2}{r^3} \right).$$

Então, calculando o laplaciano temos

$$\Delta u = v''(r) \cdot 1 + v'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n-1}{r} \right) = 0.$$

Supondo que $v' \neq 0$, temos

$$(\ln(v'))' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$$

e assim,

$$\ln v' = \int \frac{1-n}{r} dr = (1-n)\ln r + C_1.$$

Portanto

$$v'(r) = \frac{C_2}{r^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad v(r) = \int \frac{C_2}{r^{n-1}} dr = \begin{cases} a_1 \ln r + b_1 & n = 2 \\ \frac{a_2}{r^{n-2}} + b_2 & n \geq 3 \end{cases},$$

com a_1, a_2, b_1 e b_2 constantes.

Solução Fundamental em $\mathbb{R}$

Na solução acima consideramos apenas as soluções em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, agora faremos o caso em $\mathbb{R}$. Para $n = 1$, segue que

$$\Delta u = u'' = 0 \Rightarrow u' = C_1 \Rightarrow u = C_1 x + C_2.$$

Logo, as funções harmônicas com domínio em $\mathbb{R}$ são retas.

Definição 1.2.2. *(Solução Fundamental de Laplace)* Definimos como solução fundamental da Equação de Laplace a função:

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases} \tag{1.6}$$

onde, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $\alpha(n)$ é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Como a solução fundamental é radial, podemos abusar da notação e escrever que $\Phi(x) = \Phi(|x|)$. Assim, pela construção podemos estimar a primeira e a segunda derivada de Φ por:

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C_1}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C_2}{|x|^n},$$

para $C_1, C_2 > 0$ e $x \neq 0$.

Observação 1.2.1. A escolha destas constantes para a solução fundamental ocorre devido a solução da Equação de Poisson, como veremos mais adiante.

Solução da Equação de Poisson

Como a Equação de Laplace e de Poisson são parecidas é esperado que as suas soluções estejam interligadas, de fato isso ocorre, como provaremos a seguir. Dada uma função f, definimos a função u como uma convolução da solução fundamental com a função f, ou seja,

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy, \tag{1.7}$$

veremos que u é solução da Equação de Poisson.

Antes de demonstrarmos, note que a função $\Phi(x)$ não está definida em 0, assim, a função $\Phi(x-y)$ não está definida para $x = y$.

Para o teorema abaixo considere as definições.

Definição 1.2.3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos o conjunto

$$supp f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

como o suporte da função f.

Definição 1.2.4. Definimos o conjunto $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ como

$$C_c^2(\mathbb{R}^n) := \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u \in C^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } u \text{ tem suporte compacto}\}.$$

Teorema 1.2.1. *Definindo u como na equação (1.7) e $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, segue que*

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $-\Delta u = f$ *em* $\mathbb{R}^n$

Demonstração. Provaremos inicialmente a primeira afirmação:

(i) Como

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)f(x-y)dy,$$

considerando o Teorema da Derivação Dominada (A.2.6) e tomando uma função g que é constante no compacto e se anula fora dele, a derivada pode ir para dentro da integral, então

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)dy.$$

Com o mesmo argumento temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x-y)dy, \qquad \forall\, i,j\in\{1,\cdots,n\}.$$

Portanto, como Φ é integrável e $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, segue que $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) De acordo com os resultados obtidos anteriormente, temos que

$$\Delta u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy.$$

Mas, como Φ explode em 0, precisamos isolar a singularidade, ou seja, dado $\epsilon>0$, temos que

$$\Delta u(x)=\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\epsilon)}\Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy+\int_{B(0,\epsilon)}\Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy \;:= A_\epsilon+B_\epsilon,$$

onde $B(0,\epsilon)$ é a bola de centro 0 e raio ϵ. Inicialmente vamos nos concentrar em B_ϵ, como f é contínua e tem suporte compacto, temos que:

$$|B_\epsilon|\le C\|D^2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B(0,\epsilon)}|\Phi(y)|dy.$$

Para estimar o valor da integral vamos separar nos dois casos que a função Φ é definida. Para $n=2$, segue que

$$\int_{B(0,\epsilon)}\Phi(y)dy=\int_{B(0,\epsilon)}C\cdot\ln|y|dy=C\int_{B(0,\epsilon)}\ln\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)dy.$$

Utilizando coordenadas polares, ou seja, $y_1=r\cos\theta$ e $y_2=r\sin\theta$, onde $0<r<\epsilon$ e $0<\theta<2\pi$, segue que

$$\int_{B(0,\epsilon)}\Phi(y)dy=C\int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon}r\ln r\,drd\theta\le C\epsilon^2\ln\epsilon.$$

Assim,

$$\left|\int_{B(0,\epsilon)}\Phi(y)dy\right|\le C\epsilon^2|\ln\epsilon|.$$

Para $n\ge 3$, temos

$$\int_{B(0,\epsilon)}\Phi(y)dy=\int_{B(0,\epsilon)}C\frac{1}{|y|^{n-2}}dy=\int_{B(0,\epsilon)}C\frac{1}{\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\right)^{n-2}}dy.$$

Utilizando coordenadas polares, ou seja,

$$\begin{aligned}
y_1 &= r\cos\theta_1\\
y_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2\\
&\vdots\\
y_{n-1} &= r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\
y_n &= r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

onde $0<r<\epsilon$, $0<\theta_i<\pi$ para $1\le i\le n-2$ e $0<\theta_{n-1}<2\pi$. Então a última expressão é igual a

$$C\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\epsilon}\frac{r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}}{r^{n-2}}drd\theta_1\cdots d\theta_{n-2}d\theta_{n-1},$$

simplificando, obtemos que

$$C\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\epsilon} r\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}drd\theta_1\cdots d\theta_{n-2}d\theta_{n-1}.$$

Logo

$$\left|\int_{B(0,\epsilon)}\Phi(y)dy\right| \leq C\cdot\frac{\epsilon^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}d\theta_1\cdots d\theta_{n-2}d\theta_{n-1} = C\cdot\frac{\epsilon^2}{2}\cdot 2\pi^{n-1} = K\epsilon^2$$

assim $B_\epsilon \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Agora vamos analisar o valor de A_ϵ. Como $\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$, então

$$A_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)}\Phi(y)\Delta_y f(x-y)dy.$$

Utilizando a Fórmula de Integração por Partes A.2.3, temos

$$A_\epsilon = -\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)} D\Phi(y)D_y f(x-y)dy + \int_{\partial B(0,\epsilon)}\Phi(y)\frac{\partial f}{\partial\nu}(x-y)dS(y) := C_\epsilon + D_\epsilon$$

onde ν denota o vetor normal unitário interior a bola $B(0,\epsilon)$. Novamente vamos estudar separadamente as integrais. Observando D_ϵ, como f é duas vezes derivável com suporte compacto. a derivada de f é contínua e tem suporte compacto. Assim, segue que

$$|D_\epsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{\partial B(0,\epsilon)}|\Phi(y)|dS(y) = \begin{cases} C\epsilon|\ln\epsilon|, & n=2 \\ C\epsilon, & (n\geq 3)\end{cases}$$

ou seja, $D_\epsilon \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Agora analisando C_ϵ e utilizando novamente integração por partes, temos que

$$C_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\epsilon)}\Delta\Phi(y)f(x-y)dy - \int_{\partial B(0,\epsilon)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS(y).$$

Como $\Delta\Phi = 0$ fora de $B(0,\epsilon)$, tem-se

$$C_\epsilon = -\int_{\partial B(0,\epsilon)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS(y).$$

Além disso, $\nu = \frac{-y}{|y|}$, assim

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y) = \nu D\Phi(y) = \frac{-y}{|y|}\cdot\frac{-1}{n\alpha(n)}\cdot\frac{y}{|y|^n} = \frac{|y|^2}{|y|^{n+1}}\cdot\frac{1}{n\alpha(n)} = \frac{1}{n\alpha(n)}\cdot\frac{1}{\epsilon^{n-1}}$$

como $n\alpha(n)\epsilon^{n-1}$ é a área da superfície da esfera $\partial B(0,\epsilon)$ segue que

$$C_\epsilon = -\frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}}\int_{\partial B(0,\epsilon)}f(x-y)dS(y) = -⨍_{\partial B(x,\epsilon)}f(y)dS(y),$$

onde $⨍$ é denominada a integral média de f sobre a esfera $\partial B(x,\epsilon)$. Utilizando os cálculos acima temos que

$$\Delta u(x) = -⨍_{\partial B(x,\epsilon)}f(y)dS(y) + r(\epsilon),$$

onde $r(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, e fazendo $\epsilon \to 0$

$$\Delta u(x) \longrightarrow -f(x),$$

pois

$$\left\|⨍_{\partial B(x,\epsilon)}f(y)dS(y) + f(x)\right\| \leq ⨍_{\partial B(x,\epsilon)}|f(y)+f(x)|dS(y) \leq \delta⨍_{\partial B(x,\epsilon)}dS(y) = \delta$$

pelo fato de f ser contínua. Note que $\delta \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Portanto $-\Delta u(x) = f(x)$ como queríamos provar.

$\square$

Fórmula do Valor Médio

Agora estudaremos resultados que nos permitem caracterizar as funções harmônicas.

Teorema 1.2.2. *(Teorema do Valor Médio) Seja $u \in C^2(U)$ harmônica no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, então:*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy$$

para cada $B(x,r) \subset U$, onde

$$\fint_{B(x,r)} f dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(0,r)} f dy$$

é a média de f sobre a bola $B(x,r)$ e

$$\fint_{\partial B(x,r)} f dS = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} f dS$$

é a média de f sobre a esfera $\partial B(x,r)$.

Demonstração. Inicialmente vamos provar a primeira igualdade. Defina

$$\Psi(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y).$$

Tomando $y = x + rv$, com $v \in \partial B(0,1)$ e $dS(y) = r^{n-1}dS(v)$, obtemos

$$\Psi(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rv)r^{n-1}dS(v) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rv)dS(v).$$

Utilizando o Teorema da Derivação Dominada A.2.6, o fato de u ser uma função C^2 e a integração ser sobre o compacto $\partial B(0,1)$, podemos considerar a função g como o supremo de u no compacto $\partial B(0,1)$ e 0 fora dele. Então

$$\Psi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} Du(x+rv) \cdot v dS(v).$$

Voltando para a variável y, segue que

$$\Psi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{r} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} Du(y)\nu dS(y)$$

pois $\frac{y-x}{r}$ é o vetor normal unitário exterior a $\partial B(x,r)$. Logo

$$\Psi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y).$$

Utilizando a Fórmula de Green, temos que

$$\Psi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)dy = 0,$$

pois $\Delta u = 0$. Logo Ψ é constante, assim

$$\Psi(r) = \lim_{t\to 0} \Psi(t) = \lim_{t\to 0} \fint_{\partial B(x,t)} u(y)dS(y) = u(x)$$

e portanto

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y).$$

Agora vamos provar a segunda igualdade, utilizando coordenadas polares, temos que

$$\fint_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,t)} u(y)dS(y) \right) dt.$$

Utilizando a igualdade anterior, segue que

$$\fint_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_0^r u(x)n\alpha(n)t^{n-1}dt = \frac{u(x)}{r^n} \int_0^r nt^{n-1}dt = \frac{u(x)}{r^n} r^n = u(x),$$

como queríamos provar. $\square$

Teorema 1.2.3. *(Propriedade Inversa do Valor Médio) Se $u \in C^2(U)$ e satisfaz*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$$

para toda $B(x,r) \subset U$, então u é harmônica.

Demonstração. Suponha que u não seja harmônica, então existe alguma bola pequena $B(x,r) \subset U$ tal que $\Delta u(y) \neq 0$ para $y \in B(x,r)$, sem perda de generalidade, suponha que $\Delta u > 0$ na bola $B(x,r)$.

Utilizando a mesma função Ψ definida acima, temos que Ψ é constante, pois dado $x \in U$ segue que $u(x) = \Psi(r)$ para todo r. Além disso, utilizando a Formúla de Green A.2.4, temos que

$$\Psi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} Du(y)dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \cdot \frac{r}{r} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)dy = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)dy$$

assim

$$0 = \Psi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)dy > 0,$$

uma contradição. Portanto u é harmônica. □

Observação 1.2.2. Esses dois últimos teoremas nos permitem caracterizar as funções harmônicas, além de fornecer uma propriedade muito importante para ser utilizada em seu estudo.

Propriedades de Funções Harmônicas

Veremos a seguir mais alguns resultados sobre as funções harmônicas que o Teorema do Valor Médio nos fornece.

Teorema 1.2.4. *(Princípio Forte do Máximo) Se $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ e é harmônica no interior de U, então:*

(i)

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u;$$

(ii) Além disso, se U é conexo e existe um ponto $x_0 \in U$ tal que

$$u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$$

então u é constante no interior de U.

Demonstração. Suponha que exista $x_0 \in U$ com $u(x_0) = M := \max_{\overline{U}} u$, então tomando r tal que $B(x_0,r) \subset U$, pelo princípio do valor médio, segue que

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(y)dy \leq M$$

pois $u(x_0)$ é o máximo em $B(x_0,r)$. Logo, para que a igualdade seja verdadeira, segue que $u(y) = M$ para todo $y \in B(x_0,r)$. Considerando o conjunto

$$A = \{x \in U : u(x) = M\}$$

que como observado acima precisa ser aberto, esse conjunto também é fechado, pois tomando uma sequência de pontos $x_n \in A$ que converge para $x \in U$, temos que $u(x_n) = M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como u é contínua, segue que $u(x) = M$, logo $x \in A$. Assim, A é aberto e fechado, então U é conexo, segue que $A = U$, o que implica que u é constante, o que prova (ii).

Para provar (i), observamos que se o máximo é atingido no interior de U, u é constante na componente conexa de U, então o máximo também é atingido no bordo. □

Corolário 1.2.1. *(Princípio Forte do Mínimo) Trocando u por $-u$ no teorema acima obtemos o princípio forte do mínimo, que é similar ao princípio forte do máximo. Logo, uma função u descrita como no caso acima, atinge o máximo e o mínimo no bordo.*

Corolário 1.2.2. *Pelo Teorema do Princípio Forte do Máximo 1.2.4, se $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ com U é conexo e satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & em & U \\ u &= g, & em & \partial U \end{cases}$$

tal que $g \geq 0$, então u é positivo em todo U se g é positivo em algum lugar de ∂U.

Agora, vamos obter algumas regularidades que uma função harmônica deve satisfazer.

Teorema 1.2.5. *(Unicidade de Solução) Considerando $g \in C(\partial U)$ e $f \in C(U)$, então existe no máximo uma solução $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & em & U \\ u &= g, & em & \partial U. \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que existam u e $\tilde{u}$ soluções, assim tomando $v := u - \tilde{u}$, temos que

$$\begin{cases} \Delta v &= 0, & \text{em} & U \\ v &= 0, & \text{em} & \partial U. \end{cases}$$

Utilizando o Teorema do Princípio Forte do Máximo 1.2.4 e do Mínimo 1.2.1, temos que $v \equiv 0$, portanto $u = \tilde{u}$. □

Teorema 1.2.6. *(Suavidade) Se $u \in C(U)$ e satisfaz a Teorema do Valor Médio 1.2.2 para cada bola $B(x, r) \subset U$, então $u \in C^\infty(U)$.*

Demonstração. Seja η a função padrão aproximação da identidade, ou seja,

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{se} & |x| < 1 \\ 0, & \text{se} & |x| \geq 1, \end{cases} \tag{1.8}$$

onde a constante $C > 0$ é escolhida de forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$. Note que $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e é uma função radial, ou seja, $\eta(x) = \eta(|x|)$. Como $u \in C^\infty(U)$ é uma propriedade local, tome $x \in U$ e $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$ e defina

$$\eta_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \tag{1.9}$$

Segue que, $\eta_\epsilon \in C^\infty$ e satisfaz $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)dx = 1$ (supp $\eta \subset B(0, 1) \Rightarrow$ supp $\eta_\epsilon \subset B(0, \epsilon)$). Então tome $u^\epsilon := \eta_\epsilon * u$, assim

$$u^\epsilon(x) = \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x - y)u(y)dy.$$

Note que $u^\epsilon \in C^\infty(B(x, \epsilon))$, pois podemos aplicar o Teorema da Derivação Dominada (A.2.6), porque temos que $\eta_\epsilon \in C^\infty$, e basta considerar a função dominante como

$$h(x) := \begin{cases} 1, & \text{se} & |x| < 1 \\ 0, & \text{se} & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Agora, vamos provar que $u \equiv u^\epsilon$ em $B(x, \epsilon)$

$$u^\epsilon(x) = \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x - y)u(y)dy = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) u(y)dy.$$

Aplicando coordenadas polares, temos que

$$u^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \left(\int_{\partial B(x,t)} \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) u(y)dS(y) \right) dt = \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,t)} u(y)dS(y) \right) dt,$$

pois se $y \in \partial B(x, t)$ então $|x - y| = t$, sabendo que u satisfaz a propriedade do valor médio e que $\int_{\partial B(x,t)} 1dS(y)$ é a área da esfera $\partial B(x, t)$, ou seja, $n\alpha(n)t^{n-1}$, segue que

$$u^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{t}{\epsilon}\right) u(x) \left(\int_{\partial B(x,t)} 1dS(y) \right) dt = u(x) \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) dy,$$

então

$$u^\epsilon(x) = u(x) \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(z)dz = u(x) \cdot 1 = u(x).$$

Portanto $u \equiv u^\epsilon$ e como $u^\epsilon \in C^\infty(B(x, \epsilon))$, segue que $u \in C^\infty(U)$. □

Agora a fórmula do valor médio será utilizada para calcular cuidadosamente estimativas de derivadas parciais de uma função harmônica. Esse cálculo será necessário mais adiante quando provaremos que funções harmônicas são analíticas.

Teorema 1.2.7. *(Estimativas para Derivadas) Seja u harmônica em U, um aberto do $\mathbb{R}^n$. Então*

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_{k,n}}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x,r))},$$

para cada bola $B(x,r) \subset U$ e cada índice múltiplo de ordem $|\alpha| = k$, onde

$$C_{0,n} = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_{k,n} = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre k.
Para $k = 0$, temos que

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{r^n \alpha(n)} \int_{B(x,r)} u(y)dy$$

assim

$$|u(x)| \leq \frac{1}{r^n \alpha(n)} \|u\|_{L^1(B(x,r))}.$$

Para $k = 1$ note inicialmente que u_{x_i} é harmônica, então

$$u_{x_i}(x) = \fint_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u_{x_i}(y)dy = \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^n \alpha(n)} \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u_{x_i}(y)dy.$$

Pelo Teorema de Gauss-Green A.2.2, temos que

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^n \alpha(n)} \int_{\partial B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u\nu^i dS(y)$$

para $i = 1, \cdots, n$. Logo

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^\infty\left(\partial B\left(x,\frac{r}{2}\right)\right)} \int_{\partial B\left(x,\frac{r}{2}\right)} 1 dS(y)$$

Assim

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{2^n n\alpha(n)}{\alpha(n) r^n} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \|u\|_{L^\infty\left(\partial B\left(x,\frac{r}{2}\right)\right)} = \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty\left(\partial B\left(x,\frac{r}{2}\right)\right)}.$$

Note que se $y \in \partial B\left(x, \frac{r}{2}\right)$, então $B\left(y, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,r) \subset U$ e

$$u(y) = \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B\left(y,\frac{r}{2}\right)} u(z)dz \leq \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B(x,r)} u(z)dz.$$

Logo,

$$|u(y)| \leq \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^1(B(x,r))}.$$

Portanto

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{2n}{r} \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^1(B(x,r))} = \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n) r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x,r))}.$$

Agora, vamos provar que vale para k. Supondo que vale para todo inteiro positivo menor do que k, considere $D^\alpha u$ com $|\alpha| = k$, então existe β tal que $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$, com $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $|\beta| = k - 1$. Como $D^\alpha u$ é harmônica, segue que

$$D^\alpha u(x) = \fint_{B\left(x,\frac{r}{k}\right)} D^\alpha u(y)dy = \frac{1}{\left(\frac{r}{k}\right)^n \alpha(n)} \int_{B\left(x,\frac{r}{k}\right)} (D^\beta u)_{x_i}(y)dy.$$

Utilizando o Teorema de Gauss-Green A.2.2, temos que

$$D^\alpha u(x) = \frac{k^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B\left(x,\frac{r}{k}\right)} (D^\beta u)\nu^i dS(y).$$

Logo

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{k^n}{\alpha(n)r^n}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x,\frac{r}{k}))}\int_{\partial B(x,\frac{r}{k})} 1dS(y)$$

$$\leq \frac{k^n n\alpha(n)}{\alpha(n)r^n}\left(\frac{r}{k}\right)^{n-1}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x,\frac{r}{k}))} = \frac{kn}{r}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x,\frac{r}{k}))}.$$

Note que se $y \in \partial B\left(x, \frac{r}{k}\right)$, então $B\left(y, \frac{r(k-1)}{k}\right) \subset B(x,r)$. Assim, podemos utilizar a hipótese sobre $D^\beta u(x)$, ou seja,

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{r(k-1)}{k}\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1 B\left(x,\frac{r(k-1)}{k}\right)} \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{r(k-1)}{k}\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x,r))}.$$

Então

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{nk}{r}\cdot\frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{r(k-1)}{k}\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1 B(x,r)} \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}}\|u\|_{L^1 B(x,r)},$$

portanto, por indução segue a prova do teorema. □

1.2.3 Equação do Calor

Nesta seção veremos um pouco sobre a equação do calor com condições iniciais, dada por:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t,x) \in \Omega \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0, & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x), & x \in [0,\ell], \end{cases} \tag{1.10}$$

onde

∘ $t \in (0,+\infty)$ representa o tempo;
∘ $\Omega = (0,\infty)\times(0,\ell)$;
∘ $f \in C^2((0,\ell)) \cap C([0,\ell])$;
∘ $f(0) = f(\ell) = 0$.

Precisamos encontrar $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ que satisfaça a equação. A interpretação física dessa equação é conseguir medir a variação da temperatura ao longo de uma barra de comprimento ℓ. Mais detalhes encontrados no caítulo 2 do livro [7].

Método de Separação de Variáveis

Um método simples e útil para encontrarmos solução de EDPs é o método de separação de variáveis, que consiste em encontrar alguma solução u que seja da forma

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{1.11}$$

Nem toda equação diferencial parcial vai ter uma solução dessa forma, mas para essa candidata o método funciona.

Utilizando o método de separação de variáveis, substituindo a solução (1.11) no problema (1.10) e utilizando o fato que não queremos uma solução $u \equiv 0$, temos

$$\begin{cases} T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \\ T(t)X(0) = T(t)X(\ell) = 0 \\ T(0)X(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \\ T(0)X(x) = f(x). \end{cases}$$

Analisando a primeira linha da equação, desconsiderando os valores de x e t nos quais $T(t)$ e $X(x)$ são nulos e separando de acordo com as variáveis, segue que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Perceba que como cada lado da igualdade somente depende de variáveis diferentes eles devem ser iguais a uma constante λ. Sendo assim, para encontrar uma solução para (1.10) basta resolver as equações abaixo

$$\begin{cases} T \in C^1((0,\infty)) \cap C([0,\infty)) \\ T'(t) = \lambda T(t) \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} X \in C^2((0,\ell)) \cap C([0,\ell]) \\ X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \\ T(0)X(x) = f(x) \end{cases} \tag{1.13}$$

e descobrir para quais valores de λ tem solução.

A Equação (1.12) é uma EDO bem conhecida, onde sua solução é dada por

$$T(t) = Ce^{\lambda t}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Para encontrarmos a solução de (1.13) precisamos analisar os possíveis valores de λ. Pela propriedade de produto interno de funções complexas que fornece

$$\langle f'', g \rangle = \langle f, g'' \rangle$$

segue que

$$\lambda\langle X, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \langle X'', X\rangle = \langle X, X''\rangle = \langle X, \lambda X\rangle = \overline{\lambda}\langle X, X\rangle.$$

Sendo assim, para X não nula $\lambda = \overline{\lambda}$, ou seja, $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, basta analizar os casos, $\lambda = 0, \lambda > 0$ e $\lambda < 0$. Para $\lambda = 0$, temos que

$$X''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = Ax + B.$$

Utilizando as condições de (1.13), concluímos que

$$X(0) = B = 0 \quad \text{e} \quad X(\ell) = A\ell + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = 0.$$

Assim obtemos que

$$X \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0$$

uma solução que não queremos, então descartamos $\lambda = 0$. Para $\lambda > 0$, temos uma EDO com solução dada por

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Aplicando as condições de (1.13), temos que

$$X(0) = A + B = 0 \quad \text{e} \quad X(\ell) = Ae^{\sqrt{\lambda}\ell} + Be^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = 0.$$

Novamente teríamos $u \equiv 0$, então descartamos $\lambda > 0$. Para $\lambda < 0$, a derivada troca o sinal, então a solução é dada por

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\text{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

e assim, aplicando as condições de (1.13), temos que

$$X(0) = A = 0 \quad \text{e} \quad X(\ell) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\ell) + B\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0.$$

Para não obtermos novamente uma solução nula, vamos considerar que

$$\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-\lambda}\ell = k\pi \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-\lambda} = \frac{k\pi}{\ell}$$

com $k \in \mathbb{N}$, então temos que cada

$$X_k(x) = B_k\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

é solução de (1.13). Portanto cada

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t}\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

é solução de (1.10), desde que

$$f_k(x) = T_k(0)X_k(x) = C_k\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right).$$

Assim, conseguimos resolver uma infinidade de problemas de Equação do Calor para funções f dessa forma.

Principio da Superposição de Soluções

Pensando em formas de abranger as soluções que já obtivemos, podemos utilizar o principio da superposição de soluções, que diz que se $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são soluções de uma EDP e $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são constantes complexas, então

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x,t)$$

é solução da EDP. Podemos estender a soma para uma soma infinita desde que ela convirja, ou seja, se $u_1, u_2, \cdots$ são soluções de uma EDP e $a_1, a_2, \cdots$ são contantes complexas, então

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x,t)$$

é solução da EDP, de uma maneira informal, sem considerarmos as questões de convergência e diferenciabilidade termo a termo. Sendo assim, analisando a Equação (1.10), temos que

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

é solução de (1.10), desde que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

e as séries convirjam.

Outra questão que podemos refletir nos cálculos acima é que a solução da função X ficou dependente da função seno por causa das condições iniciais, assim, conforme mudamos as condições iniciais encontramos funções que dependem de cosseno, ou ainda ambos. Um exemplo é a equação do calor com as seguintes condições

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t,x) \in \Omega \\ u_x(t,0) = u_x(t,\ell) = 0, & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x), & x \in [0,\ell], \end{cases} \tag{1.14}$$

que tem solução dada por

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t\right)} \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

para $k \in \mathbb{N}$, desde que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

e as séries convirjam.

Sendo assim, para entendermos melhor essas soluções, somos levados a um estudo sobre quais funções podem ser representadas por somas de senos e cossenos, e quais as propriedades dessas funções, como veremos no próximo capítulo. Concluímos ainda ressaltando que não consideramos o problema de convergência das séries, para maiores detalhes sugerimos o capitulo 2 do livro [7].

Capítulo 2

Série e Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma ferramenta muito útil para o trabalho com equações diferenciais parciais. Neste capítulo, inicialmente faremos algumas definições afim de construir a ideia de transformada de Fourier em domínios diferentes, posteriormente veremos como podemos utilizar esse conceito para a resolução de EDPs. As principais referências bibliográficas são [5], [6], [7] e [8].

2.1 Séries de Fourier

Nessa seção vamos apresentar alguns conceitos e definições que nos permitem construir e entender a transformada e a série de Fourier. Seguiremos a abordagem do livro [5], que define a Transformada de Fourier associada a uma base, diferente de estudos mais recentes que associam a Transformada de Fourier apenas a senos e cossenos, mas escolheremos valorizar a abordagem do autor. Na segunda seção a Transformada de Fourier será abordada da maneira mais moderna. Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

Definição 2.1.1. (*Espaço $L^2(I)$*)

$$L^2(I) := \{f : I \to \mathbb{C} : f \text{ é Lebesgue mensurável}, \|f\| < \infty\},$$

onde

$$\|f\| = \left(\int_I |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 2.1.1. A norma apresentada acima é proveniente de um produto interno, ou seja,

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_I f\bar{f}dx = \int_I |f|^2 dx.$$

Assim, vamos considerar essa igualdade e todas as propriedades provenientes do produto interno no nosso estudo.

Definição 2.1.2. *(Família Ortonormal)* Uma família de funções $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(I)$ é dita ortogonal se $\langle e_k, e_l\rangle = 0$ para $k \neq l$. Se também ocorre que $\|e_n\| = 1$ dizemos que é família ortonormal.

Exemplo 2.1.1. As funções $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi, \pi)$, tais que

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

formam uma família ortonormal.

Para verificar a afirmação, para $k \neq l$ note que

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_l\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ilx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(k-l)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ix(k-l)}}{i(k-l)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(k-l)}\left(e^{i\pi(k-l)} - e^{-i\pi(k-l)}.\right).
\end{aligned}$$

Como $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_l \rangle &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(k-l)}\left[\cos(\pi(k-l)) + i\sin(\pi(k-l)) - \cos(-\pi(k-l)) - i\sin(-\pi(k-l))\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\pi i(k-l)}\left[\cos(\pi(k-l)) + i\sin(\pi(k-l)) - \cos(\pi(k-l)) + i\sin(\pi(k-l))\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para $k = l$ note que

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_k \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{0}dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\|e_n\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{inx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)^2 + \sin(nx)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Definição 2.1.3. Dizemos que uma família de funções $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(I)$ gera $L^2(I)$ quando para quaisquer $f \in L^2(I)$ e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right\| < \varepsilon,$$

onde $c_1, \ldots, c_N$ são coeficientes complexos. Dizemos nesse caso que a família $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é densa em $L^2(I)$.

Definição 2.1.4. *(Transformada de Fourier)* Seja $f \in L^2(I)$, chamamos de Transformada de Fourier a função $\hat{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$$

e $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é qualquer família ortonormal de $L^2(I)$ fixada.

Observação 2.1.2. A Transformada de Fourier também pode ser definida em $L^1(I)$ e estendida para $L^2(I)$, visto que em um domínio periódico $L^2(I) \subset L^1(I)$, mas optamos por utilizar o $L^2(I)$ pelas propriedades geométricas que ele fornece.

Teorema 2.1.1. *Seja $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ qualquer família ortonormal de $L^2(I)$, então para $f \in L^2(I)$ e quaisquer números complexos $c_1, \ldots, c_N$, segue que*

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right\|.$$

Além disso, a igualdade só é válida se, e somente se,

$$c_n = \hat{f}(n),$$

para todo $n \leq N$.

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\|A + B\|^2 = \langle A + B, A + B \rangle = \langle A, A \rangle + \langle A, B \rangle + \langle B, A \rangle + \langle B, B \rangle = \langle A, A \rangle + \langle A, B \rangle + \overline{\langle A, B \rangle} + \langle B, B \rangle$$

e assim

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + 2Re(\langle A, B \rangle) + \|B\|^2,$$

onde $Re(.)$ representa a parte real do número complexo. Após essa consideração, temos que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n + \sum_{n=1}^{N} (\hat{f}(n) - c_n) e_n \right\|^2,$$

tomando

$$A = f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n \quad \text{e} \quad B = \sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n)e_n$$

segue que $\left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right\|^2$ é igual a

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n \right\|^2 + 2Re\left(\left\langle f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n, \sum_{k=1}^{N}(\hat{f}(k) - c_k)e_k \right\rangle\right) + \left\| \sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n)e_n \right\|^2.$$

Abrindo as contas, obtemos que

$$\left\langle f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n, \sum_{k=1}^{N}(\hat{f}(k) - c_k)e_k \right\rangle = \overline{\sum_{k=1}^{N}(\hat{f}(k) - c_k)} \langle f, e_k\rangle - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) \cdot \overline{\sum_{n=k}^{N}(\hat{f}(k) - c_k)} \langle e_n, e_k\rangle$$

então

$$\left\langle f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n, \sum_{k=1}^{N}(\hat{f}(k) - c_k)e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \overline{(\hat{f}(k) - c_k)}\hat{f}(k) - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)\overline{(\hat{f}(n) - c_n)} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n)e_n \right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n)e_n, \sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n)e_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n) \cdot \overline{\sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n)} \langle e_n, e_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n) - c_n) \cdot \overline{(\hat{f}(n) - c_n)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}|\hat{f}(n) - c_n|^2.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n \right\|^2 + \sum_{n=1}^{N}|\hat{f}(n) - c_n|^2.$$

Observe que a igualdade acima prova o teorema. □

Observação 2.1.3. Tendo em vista o teorema anterior, podemos reformular a Definição (2.1.3) considerando os números complexos como sendo os coeficientes da Transformada de Fourier.

Definição 2.1.5. *(Base ortonormal)* Uma família ortonormal de funções $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(I)$ que gera $L^2(I)$ é denominada base ortonormal.

Proposição 2.1.1. *Dada uma família ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(I)$ qualquer.*

(i) Se

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)e_n$$

para todo $f \in L^2(I)$, essa família é uma base. A soma deve convergir em $L^2(I)$.

(ii) Para todo $f \in L^2(I)$,

$$0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N}|\hat{f}(n)|^2.$$

Concluindo que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2.$$

Demonstração. (i) Basta provar que a família $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ gera $L^2(I)$. Assim, seja $f \in L^2(I)$, pelo enunciado existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N_1} \hat{f}(n) e_n \right\| \leq \frac{1}{N_1}.$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N_2} \leq \varepsilon.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, segue que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\| \leq \varepsilon,$$

como queríamos provar.

(ii) Inicialmente, note que

$$\|A - B\|^2 = \langle A - B, A - B\rangle = \langle A, A\rangle - \langle A, B\rangle - \langle B, A\rangle + \langle B, B\rangle = \langle A, A\rangle - \langle A, B\rangle - \overline{\langle A, B\rangle} + \langle B, B\rangle$$

e assim

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 - 2Re(\langle A, B\rangle) + \|B\|^2.$$

Considerando

$$A = f \quad \text{e} \quad B = \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\|^2 &= \|f\|^2 - 2Re\left(\left\langle f, \overline{\sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n} \right\rangle\right) + \left\| \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2Re\left(\sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}(n)} \langle f, e_n\rangle\right) + \left\langle \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e_n, \sum_{k=1}^{N} \hat{f}(k) e_k \right\rangle \\
&= \|f\|^2 - 2Re\left(\sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}(n)} \hat{f}(n)\right) + \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) \cdot \overline{\sum_{k=1}^{N} \hat{f}(k) \langle e_n, e_k\rangle} \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) \overline{\hat{f}(n)} \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^2
\end{aligned}$$

□

Definição 2.1.6. *(Série de Fourier)* A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) e_n$$

é denominada série de Fourier.

Definição 2.1.7. *(O Espaço ℓ_p)* O conjunto ℓ_p é o espaço formado pelas sequências $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que

$$\left\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

ou seja,

$$\ell_p := \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Teorema 2.1.2. *Os espaços $L^2(I)$ e ℓ_2 são isomorfos, ou seja, existe um aplicação linear bijetiva preservando a norma de $L^2(I)$ em ℓ_2. Essa aplicação é dada por*

$$\begin{array}{rrcl} T: & L^2(I) & \to & \ell_2 \\ & f & \mapsto & \hat{f}, \end{array}$$

para alguma base ortonormal $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n=1}^{\infty} = (\langle f, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração. Inicialmente, note que a aplicação é linear, tendo em vista que é definida pelo produto interno. Note também que a aplicação é injetiva, pois

$$T(f) = T(g) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f} = \hat{g} \quad \Leftrightarrow \quad \langle f, e_n \rangle = \langle g, e_n \rangle \ \ \forall\, n = 1, 2, \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \langle f - g, e_n \rangle = 0 \ \ \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

que acontece apenas se $f - g \equiv 0$, que implica que $f = g$ q.t.p. Para provar que T é sobrejetora, considere $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, então existe $f \in L^2(I)$ tal que

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$$

definindo $a_n = \hat{f}(n)$, segue que $T(f) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$. Além disso, utilizando a Proposição 2.1.1, obtemos que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|\hat{f}\|^2,$$

logo T preserva a norma. Portanto $L^2(I)$ e ℓ_2 são isomorfos. □

Ao longo dessa seção obtivemos alguns resultados relevantes que convêm destacarmos

- *Desigualdade de Bessel*
$$\|f\|^2 = \int_I |f(x)|^2 dx \geq \|\hat{f}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$
que obtemos da Proposição 2.1.1.

- *Teorema de Plancherel*
$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$$
que também obtemos da Proposição 2.1.1 e que veremos adiante que é válido para o caso mais geral.

- *Igualdade de Parseval*
$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_I f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_1(n) \overline{\hat{f}_2(n)}.$$
Para mostrar essa igualdade, considere
$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_1(n) e_n(x) \quad \text{e } f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_2(n) e_n(x)$$
e assim
$$\langle f_1, f_2 \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_1(n) e_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_2(n) e_n(x) \right\rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_1(n) \overline{\hat{f}_2(n)} \langle e_n(x), e_n(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_1(n) \overline{\hat{f}_2(n)}.$$
Obtendo que
$$\langle f_1, f_2 \rangle = \left\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \right\rangle.$$

Afim de concluir essa parte inicial de teoremas e resultados vamos enunciar um teorema importante sobre a convergência uniforme da série de Fourier.

Teorema 2.1.3. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f \in C^p(0,1)$, então a soma parcial*

$$S_n = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e_k$$

converge para f uniformemente quando n tende para infinito, e temos que

$$\|S_n - f\|_\infty \leq n^{-p+\frac{1}{2}}.$$

Para alguma base ortonormal fixada $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Observação 2.1.4. A demonstração do Teorema 2.1.3 pode ser encontrado em [5].

2.1.1 Exemplos

Exemplo 2.1.2. A família ortonormal

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{N}$$

é uma base para $L^2(-\pi, \pi)$. Note que essa afirmação já foi provada considerando o Exemplo 2.1.1 e a Proposição 2.1.1.

Observação 2.1.5. Essa família é a mais utilizada para expressar os coeficientes de Fourier da forma

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{e_n} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Para o estudo da Transformada de Fourier consideraremos apenas ela.

Exemplo 2.1.3. As funções x^n com $n \in \mathbb{N}$ geram $L^2(-1,1)$. Além disso, utilizando a técnica de Gram-Schmidh podemos calcular uma base ortonormal a partir dessas funções, dada por

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad e_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x,$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right), \quad e_4 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right),$$

e assim por diante. Os polinômios formados nesse processo são conhecidos como os polinômios de Legendre, esses polinômios são muito utilizados na física de reatores nucleares, para soluções de equações de transporte de nêutrons e definição das funções de espalhamento adequadas de nêutrons, também são utilizados para determinar as funções de onda dos elétrons nas órbitas de um átomo e as funções potenciais na geometria esfericamente simétrica.

Exemplo 2.1.4. As funções

$$e_0^0(x) = 1, \text{ se } 0 \leq x \leq 1$$

$$e_n^k(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{se} \quad \dfrac{k-1}{2^n} \leq x < \dfrac{k-\frac{1}{2}}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{se} \quad \dfrac{k-\frac{1}{2}}{2^n} \leq x < \dfrac{k}{2^n} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

conhecidas como funções Haar, definida para $1 \leq k \leq 2^n$ com $n \geq 1$ formam uma base ortonormal em $L^2(0,1)$. Inicialmente, note que

$$\|e_n^k\|^2 = \int_0^1 |e_n^k(x)|^2 dx = \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}} 2^n dx - \int_{\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} 2^n dx = 2^n \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} \right) - 2^n \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n} - \frac{k}{2^n} \right)$$

e assim

$$\|e_n^k\|^2 = \frac{2^n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \|e_n^k\| = 1.$$

Agora, para provar que é ortonormal considere $e_{n_1}^{k_1}$ e $e_{n_2}^{k_2}$ tais que $n_1 \leq n_2$, $1 \leq k_1 \leq 2^{n_1}$ e $1 \leq k_2 \leq 2^{n_2}$ e observe que

$$supp(e_{n_1}^{k_1}) \cap supp(e_{n_2}^{k_2}) = \emptyset \quad \text{ou} \quad supp(e_{n_1}^{k_1}) \cap supp(e_{n_2}^{k_2}) = supp(e_{n_2}^{k_2})$$

então

$$e_{n_1}^{k_1} \cdot e_{n_2}^{k_2} = 0 \quad \text{ou} \quad e_{n_1}^{k_1} \cdot e_{n_2}^{k_2} = 2^{\frac{n_2}{2}} e_{n_2}^{k_2}.$$

Sendo assim

$$\langle e_{n_1}^{k_1}, e_{n_2}^{k_2} \rangle = \int_0^1 e_{n_1}^{k_1}(x) e_{n_2}^{k_2}(x) dx = \begin{cases} 0 \\ \pm \int_0^1 2^{\frac{n_2}{2}} e_{n_2}^{k_2}(x) dx \end{cases} = 0$$

pois

$$\int_0^1 2^{\frac{n_2}{2}} e_{n_2}^{k_2}(x) dx = 2^{\frac{n_2}{2}} \int_{\frac{k_2 - 1}{2^{n_2}}}^{\frac{k_2 - \frac{1}{2}}{2^{n_2}}} 2^{n_2} dx - \int_{\frac{k - \frac{1}{2}}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} 2^{n_2} dx = 0$$

como vimos acima. Para finalizar basta provar para para a função e_0^0, onde

$$\|e_0^0\|^2 = \int_0^1 |e_n^k(x)|^2 dx = \int_0^1 dx = 1$$

e temos também que

$$\langle e_0^0, e_n^k \rangle = \int_0^1 e_n^k(x) dx = 0.$$

Portanto as funções e_n^k são ortonormais em $L^2(0,1)$. O fato de ser base vem da Proposição 2.1.1. As funções de Haar são utilizadas no estudo de wavelet, uma função capaz de decompor e descrever outra função ou dados, esse estudo é utilizado para desenvolver algoritmos.

2.1.2 Caso Real

No caso de uma função $f : I \to \mathbb{R}$, com $f \in L^2(-\ell, \ell)$ a série de Fourier é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right),$$

essa função é periódica, e de período 2ℓ.

Inicialmente, vamos mostrar que $\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ e o $\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ funcionam como uma base ortogonal em $L^2(-\ell, \ell)$, note que

$$\left\langle \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \right\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \overline{\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)} dx = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{k\pi \overline{x}}{\ell}\right) dx.$$

Utilizando propriedades de integrais para funções pares e o fato da multiplicação de funções pares ser uma função par e que $x \in \mathbb{R}$, então a última expressão é igual a

$$2 \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Para resolver o produto interno vamos separar em dois casos, $k = m$ e $k \neq m$. Para $k = m$, segue que

$$\left\langle \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \right\rangle = 2 \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx = 2 \int_0^{\ell} \cos^2\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx$$

utilizando a fórmula de arco duplo, temos que

$$\left\langle \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \right\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\cos\left(\frac{2k\pi x}{\ell}\right) + 1\right) dx$$

$$= \left[\frac{\ell}{2k\pi} \text{sen}\left(\frac{2k\pi x}{\ell}\right) + x\right]_0^{\ell} = \ell$$

e para $k \neq m$, pela fórmula de Prostaférese temos que

$$\cos p + \cos q = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Assim, utilizando a igualdade acima, segue que

$$\left\langle \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{\pi(m+k)x}{\ell}\right) + \cos\left(\frac{\pi(m-k)x}{\ell}\right) dx$$

$$= \left[\frac{\ell}{\pi(m+k)}\text{sen}\left(\frac{\pi(m+k)x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{\pi(m-k)}\text{sen}\left(\frac{\pi(m-k)x}{\ell}\right)\right]_{-\ell}^{\ell} = 0.$$

Então, em resumo,

$$\left\langle \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right\rangle = \begin{cases} \ell, & \text{se } k = m \\ 0, & \text{se } k \neq m. \end{cases}$$

O caso para o seno é análogo e obtemos que

$$\left\langle \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right\rangle = \begin{cases} \ell, & \text{se } k = m \\ 0, & \text{se } k \neq m. \end{cases}$$

Além disso, temos que

$$\left\langle \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx = 0$$

pois resulta em uma função ímpar, analogamente

$$\left\langle \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\right\rangle = 0.$$

Logo, obtemos que o $\frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ e o $\frac{1}{\sqrt{\ell}}\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ são uma família ortonormal. Obtemos ainda que

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}}\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right\}, \quad \text{com } k \in \mathbb{N}$$

formam uma base ortonormal de $L^2(-\ell, \ell)$.

Assim, dado

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

temos que

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\langle f, 1\rangle = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \tag{2.1}$$

$$a_k = \frac{1}{\ell}\left\langle f, \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right\rangle = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\left\langle f, \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right\rangle = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.3}$$

Aplicações

Agora que expressamos os coeficientes da série de Fourier em termos de uma função f, note que dada uma função com as características necessárias, contínua e periódica, podemos encontrar a série de Fourier dessa função. Destacamos que os cálculos e resultados realizados nessa seção ocorrem de maneira informal, sem considerarmos a convergência e problemas que podem decorrer desta. O objetivo dessa seção é motivar e mostrar ao leitor resultados interessantes que podemos obter com o estudo da Transformada de Fourier. Para os cálculos abaixo, usaremos algumas propriedades de integrais de função ímpar e função par.

Exemplo 2.1.5. Seja a função $f(x) = x$ definida no intervalo $(-\pi, \pi)$. Então

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)dx = 0,$$

pois é uma integral de uma função ímpar e

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\text{sen}(kx)dx.$$

Utilizando que a função resultante é par e integral por partes, temos que

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\text{sen}(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)dx\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k}\left(\frac{\text{sen}(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi}\right)\right) = \frac{2(-\cos(k\pi))}{k} = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Assim, a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\text{sen}\,(kx)\,, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Note que mesmo a f estando definida apenas em $(-\pi, \pi)$, a série está bem definida em toda a reta, ou seja,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\text{sen}\,(kx)\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde S é uma função periódica, contínua por partes e que coincide com a f em $(-\pi, \pi)$.

Através desse exemplo podemos observar algumas características de funções pares ou ímpares, note que sempre que tivermos uma função ímpar os coeficientes a_k serão nulos, como no exemplo acima, e analogamente, para uma função par, os coeficientes b_k serão nulos.

Outra maneira de utilizar esse fato é que podemos escrever uma função como soma de senos ou cossenos como veremos no exemplo a seguir

Exemplo 2.1.6. Considere a função $g(x) = x$ definida no intervalo $(0, \pi)$. Pelo Exemplo 2.1.5 temos que

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\text{sen}\,(kx)\,, \quad x \in (0, \pi).$$

Sendo assim, para escrever g como soma de cossenos, basta considerarmos uma extensão que seja par, como $\widetilde{g}(x) = |x|$, então

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)dx.$$

Utilizando que a função resultante é par, para $k = 0$, temos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}\right) = \pi.$$

Utilizando novamente que a função resultante é par e integral por partes, para $k \neq 0$, temos que

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\text{sen}(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\text{sen}(kx)dx\right)$$
$$= \frac{2}{\pi k}\left(\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \begin{cases} 0, & k \quad \text{par} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \quad \text{ímpar.}\end{cases}$$

Além disso, temos ainda que

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\text{sen}(kx)dx = 0,$$

pois resulta em uma função ímpar. Logo, a série de Fourier de $\widetilde{g}$ é dada por

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Assim, para g estando definida apenas em $(0, \pi)$, temos que

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\text{sen}\,(kx)\,.$$

Uma das motivações para expressar funções através da sua série de Fourier é o fato de conseguirmos obter o valor de algumas séries, como no exemplo (2.1.6), onde

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

sendo assim

$$0 = \widetilde{g}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)0\right)}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Então

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8},$$

ou seja, obtemos um valor para a soma infinita do quadrado dos inversos de números ímpares.

Exemplo 2.1.7. Considere a função

$$h(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ x(-\pi - x), & \text{se } -\pi \leq x \leq 0, \end{cases}$$

note que essa função é uma função par, sendo assim, calculando a série de Fourier temos que

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(kx)dx.$$

Para $k = 0$, temos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\pi - x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{6}\right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Para $k \neq 0$, temos que

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(kx)dx = 2\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)dx = A - B.$$

Note que calculamos a primeira integral no exemplo (2.1.6), basta multiplicar por π

$$A = 2\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \pi\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \begin{cases} 0, & k \quad \text{par} \\ -\frac{4}{k^2}, & k \quad \text{ímpar} \end{cases}.$$

Agora basta calcular a segunda integral

$$B = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\text{sen}(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\text{sen}(kx)dx\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi k}\int_0^{\pi} x\text{sen}(kx)dx = -\frac{4}{\pi k}\left(-\frac{x\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)dx\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi k}\left(-\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k}\left(\frac{\text{sen}(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi}\right)\right) = \frac{4\cos(k\pi)}{k^2}$$

$$B = \begin{cases} \frac{4}{k^2}, & k \quad \text{par} \\ -\frac{4}{k^2}, & k \quad \text{ímpar.} \end{cases}$$

Então

$$a_k = A - B = \begin{cases} 0 - \frac{4}{k^2}, & k \quad \text{par} \\ -\frac{4}{k^2} + \frac{4}{k^2}, & k \quad \text{ímpar} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{4}{k^2}, & k \quad \text{par} \\ 0, & k \quad \text{ímpar.} \end{cases}$$

Além disso, temos ainda que

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\text{sen}(kx)dx = 0$$

pois resulta em uma função ímpar. Assim, a série de Fourier de h é dada por

$$h(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k)^2}\cos(2kx) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Logo, para $x = 0$,

$$0 = h(0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\cdot 0)}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

então

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ou seja, obtemos um valor para a soma infinita do quadrado dos inversos de números naturais.

Retornando ao Caso Complexo

Agora, considerando o espaço $L^2(-\pi,\pi)$ podemos voltar a escrita mais geral de série de Fourier, como já vimos, seja

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\text{sen}(kx).$$

Utilizando a Fórmula de Euler, temos que

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(kx) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}.$$

Então

$$\begin{aligned} a_k\cos(kx) + b_k\text{sen}(kx) &= \frac{a_k}{2}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) - \frac{ib_k}{2}\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right) \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikx} + \frac{a_k+ib_k}{2}e^{i(-k)x}, \end{aligned}$$

substituindo a série de Fourier pode ser escrita como

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad \text{onde} \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad \text{e } c_{-k} = \frac{a_k+ib_k}{2},$$

assim

$$\begin{aligned} c_k = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}kx dx\right)/\,2 &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\text{sen}kx)dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$\hat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \tag{2.4}$$

onde a sequência complexa $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ é a transformada de Fourier de f e $\hat{f}(k)$ é o coeficiente de Fourier de f em k.

2.2 Transformada de Fourier em $\mathbb{R}^n$

Nessa seção iremos considerar a ideia de Transformada de Fourier em $\mathbb{R}^n$ e resolver EDPs com essa ferramenta. Inicialmente vamos considerar o caso uni-dimensional.

2.2.1 Caso $n = 1$

A motivação da definição da Transformada de Fourier na reta é parecida com a parte periódica, com uma versão modificada da equeção do calor, onde consideramos a função u sendo limitada.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t,x) \in \Omega \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\Omega = (0,\infty) \times \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$ limitada, assim precisamos encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ limitada que satisfaça a equação.

Novamente utilizando o método de separação de variáveis, onde consideramos

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

e assim obtemos duas EDOs

$$\begin{cases} T \in C^2((0,\infty)) \cap C([0,\infty)), & \text{limitada} \\ T'(t) = \lambda T(t) \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} X \in C^2(\mathbb{R}), & \text{limitada} \\ X''(x) = \lambda X(x) \\ T(0)X(x) = f(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

onde obtemos que

$$T(t) = Ce^{\lambda t},$$

onde λ é real, com já vimos, e nesse caso é não positivo porque a função T é limitada. Então

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Sendo assim, tomando $\xi^2 = -\lambda$ e utilizando a Fórmula de Euler para simplificar a expressão, temos que

$$X(x) = Le^{i\xi x} + Me^{-i\xi x}.$$

Logo

$$u_\xi(t,x) = (Le^{i\xi x} + Me^{-i\xi x})Ce^{\xi^2 t}.$$

Fazendo uma superposição de soluções, como $\xi \geq 0$ a superposição ocorre na forma de uma integral

$$u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty (g_1(\xi)e^{i\xi x} + g_2(\xi)e^{-i\xi x})e^{-\xi^2 t} d\xi,$$

onde $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ aparece para tornar os resultados que vamos obter mais limpos. Para simplificar a expressão, consideramos

$$g(\xi) = \begin{cases} g_1(\xi), & \xi \geq 0 \\ g_2(-\xi), & \xi < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty g(\xi)e^{i\xi x}e^{-\xi^2 t} d\xi \tag{2.8}$$

é solução de (2.5) quando

$$u(x,0) = f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty g(\xi)e^{i\xi x} d\xi. \tag{2.9}$$

Para conhecermos melhor a função f e como podemos escrevê-lá, convêm encontrarmos como podemos expressar essa função g. Assim como fizemos anteriormente, note que a função f é dada por uma expansão de

$$\phi_\xi(x) = e^{i\xi x},$$

então

$$g(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\phi_\xi(x)}dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{2.10}$$

onde $g(\xi)$ é a Transformada de Fourier de f em ξ, denotamos $g(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

2.2.2 Caso $n \geq 1$

Agora abordaremos a Transformada de Fourier em um contexto geral e veremos sua utilidade para encontrar as soluções de algumas EDPs, pois através dela podemos simplificar essas EDPs.

Inicialmente, para $1 \leq p < \infty$ e U aberto de $\mathbb{R}^n$ considere o espaço de funções

$$L^p(U) := \{u : U \to \mathbb{R} : u \text{ é Lebesgue mensurável}, \|u\|_{L^p(U)} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

E

$$L^\infty(U) := \{u : U \to \mathbb{R} : u \text{ é Lebesgue mensurável}, \|u\|_{L^\infty(U)} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{L^\infty(U)} = \sup_U |u|.$$

Definição 2.2.1. *(Transformada de Fourier)* Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a Transformada de Fourier é dada por

$$\hat{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-ixy}dx, \tag{2.11}$$

com $x, y \in \mathbb{R}^n$ e xy o produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.2. *(Transformada Inversa de Fourier)* A transformada inversa de Fourier, para $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\check{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{ixy}dx. \tag{2.12}$$

Note que as integrais acima convergem para todo $y \in \mathbb{R}^n$, pois $|e^{\pm ixy}| = 1$ e $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.2.1. *(Teorema de Plancherel) Assuma que $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Observação 2.2.1. Antes de iniciarmos a prova do teorema, convém fazer algumas observações que serão utilizadas na demonstração do teorema e também mais adiante.

(a) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$|\hat{u}(y)| = \left|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-ixy}dx\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\, dx < \infty.$$

(b) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\hat{v}(y)dy.$$

pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)v(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x)e^{-ixy}dydx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\hat{v}(y)dy.$$

(c) Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy - t\|y\|^2} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t\|y\|^2} dy = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

Para iniciar essa demonstração considere $x_j, y_j, t \in \mathbb{R}$ com $t > 0$, tomando $z = t^{\frac{1}{2}} x_j - \frac{y_j}{2t^{\frac{1}{2}}} i$, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j y_j - t x_j^2} dx_j = \frac{e^{-\frac{y_j^2}{4t}}}{t^{\frac{1}{2}}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz,$$

onde Γ denota o contorno $\left\{ \mathrm{Im}(z) = \frac{-y_j}{2t^{\frac{1}{2}}} \right\}$ no plano complexo. Deformando Γ no eixo real, segue que

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j y_j - t x_j{}^2} dx_j = e^{-\frac{y_j^2}{4t}} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t\|x\|^2} dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j y_j - t x_j^2} dx_j = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{y_j^2}{4t}} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}.$$

Demonstração. Pelas considerações feitas acima, note que definindo $v_\varepsilon(x) := e^{-\varepsilon\|x\|^2}$, por (c), temos que

$$\hat{v}_\varepsilon(y) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy - \varepsilon\|x\|^2} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\varepsilon}} = \frac{e^{-\frac{\|y\|^2}{4\varepsilon}}}{(2\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}.$$

Então para todo $w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por (b), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(x) e^{-\varepsilon\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(x) v_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} w(y) \hat{v}_\varepsilon(y) dy = \frac{1}{(2\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} w(y) e^{-\frac{\|y\|^2}{4\varepsilon}} dy. \tag{2.13}$$

Agora, seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e considere $v(x) := \bar{u}(-x)$. Defina $w := v * u$ então $w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ e utilizando o Teorema 2.2.2 item (iii) que provaremos a seguir, temos que

$$\hat{w} = (v * u)\hat{} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{v}\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Como

$$\hat{v}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \bar{u}(-x) dx = \bar{\hat{u}}(y),$$

então

$$\hat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{u}|^2.$$

Temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(2\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{\frac{-\|x\|^2}{4\varepsilon}} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w(0).$$

Então, utilizando (2.13) e tomando o limite $\varepsilon \to 0^+$, temos que

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w(0),$$

portanto

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 dy = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dy = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

A demonstração de que $\|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é similiar.

$\square$

Transformada de Fourier em L^2.

Inicialmente definimos a Transformada de Fourier apenas em $L^1(\mathbb{R}^n)$, mas com base no teorema anterior (2.2.1) é possível estender essa definição para o $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Considere $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e seja $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ sequência em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to u$. Utilizando o *Teorema de Plancherel* temos que

$$\|\hat{u_k} - \hat{u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

logo $(\hat{u})_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e então converge para uma função $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por ser completo, definiremos como a Transformada de Fourier de u

$$\hat{u}_k \to \hat{u}.$$

Agora, vamos provar que esse definição não depende da sequência escolhida, ou seja, a transformada é única q.t.p.. Sejam $u_k, \tilde{u}_k$ sequências em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k, \tilde{u}_k \to u$ então existem $\hat{u}$ e $\hat{\tilde{u}}$ tais que $\hat{u}_k \to \hat{u}$ e $\hat{\tilde{u}}_k \to \hat{\tilde{u}}$. Agora defina

$$v_k := \begin{cases} u_k, & \text{se } k \text{ é par} \\ \tilde{u}_k, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

então $v_k \to u$ e v_k é uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, existe $\hat{v}$ tal que $\hat{v}_k \to \hat{v}$, mas

$$\hat{v}_k = \begin{cases} \hat{u}_k, & \text{se } k \text{ é par} \\ \hat{\tilde{u}}_k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, $\hat{u} = \hat{\tilde{u}} = \hat{v}$.

Observação 2.2.2. A definição de $\check{u}$ é feito de maneira análoga.

Teorema 2.2.2. *(Propriedades da Transformada de Fourier) Assuma que $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}dx;$

(ii) $\widehat{(D^\alpha u)} = (iy)^\alpha \hat{u}$ *para cada multiíndice α, tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$;*

(iii) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $(u * v)\hat{} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}\hat{v}$;

(iv) $u = \check{\hat{u}}$.

Observação 2.2.3. Note que a afirmação (ii) mostra que a transformada de Fourier converte a α-ésima derivada de uma função em um produto, isso nos permite Transformar uma EDP em uma EDO.

Observação 2.2.4. Note também que a afirmação (iv) confirma que a fórmula (2.12) é de fato a inversa da Transformada de Fourier.

Demonstração. (i) Com o resultado do *Teorema de Plancherel* 2.2.1, para $a \in \mathbb{C}$ temos que

$$\|u + av\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u} + a\hat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u + av|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u} + a\hat{v}|^2 dx,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 + |av|^2 + \bar{u}av + u\bar{a}\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 + |a\hat{v}|^2 + \bar{\hat{u}}a\hat{v} + \hat{u}\bar{a}\bar{\hat{v}}dx.$$

Utilizando novamente o Teorema 2.2.1 para u e av, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} a\bar{u}v + \bar{a}u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} a\bar{\hat{u}}\hat{v} + \bar{a}\hat{u}\bar{\hat{v}}dx,$$

assim, analisando os casos para $a = 1$ e $a = i$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}v + u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{u}}\hat{v} + \hat{u}\bar{\hat{v}}dx$$

e

$$i\int_{\mathbb{R}^n}\bar{u}v-u\bar{v}dx=i\int_{\mathbb{R}^n}\bar{\hat{u}}\hat{v}-\hat{u}\bar{\hat{v}}dx \quad\Rightarrow\quad \int_{\mathbb{R}^n}\bar{u}v-u\bar{v}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\bar{\hat{u}}\hat{v}-\hat{u}\bar{\hat{v}}dx.$$

Subtraindo as equações, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n}u\bar{v}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\bar{\hat{v}}dx.$$

(ii) Temos que

$$\widehat{D^\alpha u}(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ixy}D^\alpha u(x)dx.$$

Tomando $u\in C_c^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ e utilizando a fórmula de integração por partes, segue que

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha u}(y) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}D_x^\alpha(e^{-ixy})u(x)dx\\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}(-iy)^\alpha e^{-ixy}u(x)dx\\ &= (iy)^\alpha\hat{u}(y)\end{aligned}$$

como o espaço de funções suaves são densos em $L^2(\mathbb{R}^n)$, por aproximação obtemos que a igualdade é válida para $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Temos que

$$\begin{aligned}(u*v)\hat{\ }(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ixy}(u*v)(x)dx\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ixy}\int_{\mathbb{R}^n}u(z)v(x-z)dzdx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}e^{-izy}u(z)\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x-z)y}v(x-z)dx\right)dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}e^{-izy}u(z)dz\ \hat{v}(y)\\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}(y)\hat{v}(y).\end{aligned}$$

(iv) Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\check{u}vdx=\int_{\mathbb{R}^n}u\check{v}dx \quad \text{e} \quad \check{v}=\bar{\hat{\bar{v}}},$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n}\check{\hat{u}}vdx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\check{v}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\bar{\hat{\bar{v}}}dx.$$

Utilizando o item (i) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\check{\hat{u}}vdx=\int_{\mathbb{R}^n}u\bar{\bar{v}}dx=\int_{\mathbb{R}^n}uvdx,$$

como a igualdade é válida para todo $v\in L^2(\mathbb{R}^n)$, segue que $u=\check{\hat{u}}$.

□

Observação 2.2.5. Note que a prova do Teorema 2.2.2 utiliza o Teorema 2.2.1 e vice-versa, mas isso não causa uma contradição, visto que o item (iii) do Teorema 2.2.2 utilizado para provar o Teorema 2.2.1 não utiliza este Teorema e nem os demais itens.

2.2.3 Aplicação em EDP

Agora veremos alguns exemplos de como podemos utilizar a Transformada de Fourier para resolver EDPs.

Potenciais de Bessel

Vamos resolver a equação:

$$-\Delta u + u = f \tag{2.14}$$

onde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a Transformada de Fourier em ambos os lados da equação e utilizando o item (ii) do Teorema (2.2.2), temos que

$$(1+|y|^2)\hat{u}(y) = \hat{f}(y)$$

com $y \in \mathbb{R}^n$, assim obtemos uma equação algébrica com solução

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1+|y|^2}.$$

A solução de (2.14) é dada por:

$$u = (\hat{u})\check{} = \left(\frac{\hat{f}}{1+|y|^2}\right)\check{}.$$

Tomando $\hat{B} = \frac{1}{1+|y|^2}$, pelo Teorema 2.2.2 item (iii), temos que

$$(f * B) = ((f * B)\hat{})\check{} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\hat{f}\hat{B})\check{}$$

o que implica que

$$u = \frac{(f * B)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.15}$$

Assim, basta encontrar B para resolver a equação. Para isso, note que

$$\frac{1}{1+|y|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|y|^2)}dt,$$

sendo assim

$$B = \left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)\check{} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2}dy\right)dt$$

Note também que para $x, p, q \in \mathbb{R}$ e $q > 0$, tomando $z = q^{\frac{1}{2}}x - \frac{p}{2q^{\frac{1}{2}}}i$, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx - qx^2}dp = \frac{e^{-\frac{p^2}{4q}}}{q^{\frac{1}{2}}}\int_\Gamma e^{-z^2}dz,$$

onde Γ denota o contorno $\left\{\mathrm{Im}(z) = \frac{-p}{2q^{\frac{1}{2}}}\right\}$ no plano complexo. Deformando Γ no eixo real, segue que

$$\int_\Gamma e^{-z^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \pi^{\frac{1}{2}}$$

e assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx - qx^2}dp = e^{-\frac{p^2}{4q}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2}},$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2}dy = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_jy_j - ty_j^2}dy_j = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{x_j^2}{4t}}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

sendo assim

$$B = \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2t)^{\frac{n}{2}}}dt.$$

B é chamado *Potencial de Bessel*. Substituindo B em (2.15) a solução da equação (2.14) é dada por:

$$u(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-t-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}}f(y)dydt \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Equação do calor

Agora, voltando a equação do calor de uma forma mais geral, vamos procurar uma solução. Seja a equação dada por:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.16}$$

com $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a Transformada de Fourier, temos

$$\begin{cases} \hat{u}_t + |y|^2 \hat{u} = 0, & t \in (0,\infty) \\ \hat{u} = \hat{f}, & t = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Resolvendo a EDO acima, obtemos

$$\hat{u} = e^{-t|y|^2} \hat{f}.$$

Então para encontrarmos a solução de (2.16) basta resolver

$$u = (\hat{u})\check{} = \left(e^{-t|y|^2} \hat{f}\right)\check{}.$$

Logo, tomando $\hat{A} = e^{-t|y|^2}$ segue que

$$u = \frac{f * A}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Assim, para resolver a equação basta encontrar o valor de A,

$$A = \left(e^{-t|y|^2}\right)\check{} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2} dy,$$

como resolvemos essa integral acima, temos que

$$A = \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Portanto,

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy \tag{2.18}$$

é solução de (2.16).

Equação de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.19}$$

onde u e g assumem valores complexos e $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Note que essa equação é similar a Equação do Calor (2.16), esse fato nos motiva a refletir se substituirmos t por it na solução da Equação do Calor encontraremos uma candidata a solução desse problema. Realizando essa substituição informalmente, segue que

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

De fato a solução mostrada acima, é uma solução para a Equação de Schrödinger, no entanto ressaltamos que o método utilizado para provar esse fato não é o mesmo da equação do calor, visto que as definições realizadas nesse capítulo se restringem a funções reais e nesse caso nos deparamos com uma função complexa. Podemos ainda considerar $i^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $g \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$ afim de melhorarmos essa solução podemos reescrever a equação acima como

$$u(x,t) = \frac{e^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{xy}{2t}} e^{i\frac{|y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

E é válido que se $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ então

$$\|u(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim, o mapa $g \mapsto u(.,t)$ preserva a norma L^2. Perceba que podemos estender a fórmula para $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de maneira análoga a que estendemos a definição de transformada de Fourier.

Definimos a solução fundamental da equação de Schrödinger como

$$\psi(x,t) := \frac{e^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi i)^{\frac{n}{2}}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \neq 0. \tag{2.20}$$

Note que a solução anterior é dada por $u = g * \psi$ e que essa solução tem sentindo para todo $t \neq 0$. Novamente ressaltamos que os cálculos realizados acima servem como uma motivação, para obter os cálculos com rigor e validar as afirmações ver a seção 4.5.3 do livro [6].

Capítulo 3

Espaços de Sobolev

Neste capítulo vamos estudar sobre os espaços de Sobolev, através desses espaços abrimos um novo caminho para a resolução de EDPs criando mais possibilidades para encontrar uma solução, a qual denotaremos por soluções fracas, usando ferramentas de análise funcional. Neste capítulo também abordaremos alguns teoremas clássicos, como o Teorema da caracterização de H^k pela transformada de Fourier, o Teorema da imersão de Sobolev, entre outros. Vamos considerar $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e com fronteira suave. As principais referências se encontram no livro [6] utilizando resultados de [3].

3.1 Espaço de Sobolev

Antes de definirmos quem é o espaço de Sobolev iremos apresentar uma nova noção de derivada.

Definição 3.1.1. *(Função Teste)* Considerando o conjunto $C_c^\infty(U)$ o conjunto das funções definidas no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tomando valores em $\mathbb{R}$, infinitamente diferenciável e com suporte compacto, ou seja,

$$C_c^\infty(U) := \{\phi \in C^\infty(U) : supp(\phi) = \overline{\{x : \phi(x) \neq 0\}} \text{ é compacto } \}.$$

Chamamos ϕ de função teste se $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Motivação da Derivada Fraca

Sejam $u \in C^1(U)$ e uma função teste $\phi \in C_c^\infty(U)$. Utilizando a fórmula de integral por partes temos que

$$\int_U u\phi_{x_i} dx = -\int_U u_{x_i}\phi dx, \qquad (i = 1, \ldots, n) \text{ e } x \in \mathbb{R}^n,$$

pois como ϕ tem suporte compacto a integral no bordo é nula. Podemos generalizar ainda mais essa fórmula, considerando k inteiro não negativo, $u \in C^k(U)$ e o índice múltiplo α tal que $|\alpha| = k$, aplicando a fórmula de integração por parte k vezes, temos que

$$\int_U uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U \phi D^\alpha u dx, \qquad (i = 1, \ldots, n) \text{ e } U \in \mathbb{R}^n.$$

As fórmulas acima nos levam a perguntar se precisamos exigir tanto da função u para obtermos essa propriedade e através dessa pergunta surge o conceito de derivada fraca.

Antes de definirmos o conceito de Derivada fraca, iremos definir o conjunto $L^1_{loc}(U)$ que será o conjunto das funções que iremos considerar.

Definição 3.1.2. Definimos o conjunto

$$L^1_{loc}(U) := \left\{u \in L^1(V) : \text{ para todo } V \subseteq \overline{V} \subseteq U \text{ com } \overline{V} \text{ compacto } \right\}.$$

Denominamos o conjunto $L^1_{loc}(U)$ do conjunto de funções localmente somáveis.

Definição 3.1.3. (*Derivada Fraca*) Sejam $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e α índice múltiplo, dizemos que v é uma $\alpha-$ésima derivada parcial fraca de u se

$$\int_U uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U v\phi dx,$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(U)$ e escrevemos

$$D^\alpha u = v.$$

Observação 3.1.1. Note que quando uma função possui de fato uma derivada, a derivada fraca também existe e a derivada tradicional coincide com a derivada fraca.

Exemplo 3.1.1. Sejam $n = 1$ e $U = (0, 2)$ e considere as funções

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

tomando $\phi \in C_c^\infty(U)$ e realizando os cálculos temos que

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = -\int_0^1 \phi dx + \phi(1) + \phi(2) - \phi(1) = -\int_0^1 \phi dx = -\int_0^2 v\phi dx$$

então $u' = v$ no sentido fraco.

Lema 3.1.1. *(Unicidade de Derivadas Fracas) Se existe uma $\alpha-$ésima derivada fraca de u ela é única q.t.p.*

Demonstração. Suponha que existam $v, \tilde{v} \in Ł^1_{loc}(U)$ tais que

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v}\phi dx, \quad \forall\ \phi \in C_c^\infty(U).$$

Então

$$(-1)^{|\alpha|} \int_U (v - \tilde{v})\phi dx = 0, \quad \forall\ \phi \in C_c^\infty(U).$$

Como $C_c^\infty(U)$ é denso em $L^1(U)$, obtemos

$$v = \tilde{v} \ \ q.t.p.$$

□

Agora, vamos definir os espaços de Sobolev, para isso fixe $1 \leq p \leq \infty$ e k inteiro não negativo.

Definição 3.1.4. (*Espaços de Sobolev*) O espaço de Sobolev é o espaço de todas as funções localmente somáveis $u : U \to \mathbb{R}$ tais que para cada índice múltiplo α, com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe em um sentido fraco e pertence a $L^p(U)$, denotamos por

$$W^{k,p}(U).$$

Observação 3.1.2.

- Se $p = 2$, escrevemos $W^{k,2}(U) = H^k(U)$. Nesse caso $W^{k,2}(U)$ é um espaço de Hilbert.
- Analogamente aos espaços L^p, identificamos duas funções $W^{k,p}(U)$ que coincide q.t.p..
- Note que $W^{k,p}(U) \subset L^p(U)$, para observar esse fato basta considerar $\alpha = (0, \ldots, 0)$.

Definição 3.1.5. (*Norma*) Seja $u \in W^{k,p}(U)$, definimos a norma de u como

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } \ 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)}, & \text{se } \ p = \infty. \end{cases}$$

Vamos verificar que $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ é de fato uma norma, facilmente podemos obter que

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)=0} \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \ \text{ q.t.p}$$

e que

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

sendo assim, tomando $u, v \in W^{k,p}(U)$ para $1 \leq p < \infty$ e utilizando a Desigualdade de Minkowski segue que

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)},
\end{aligned}
$$

e para $p = \infty$ é uma consequência direta da norma em L^∞.

Após essas definições iremos entender melhor esses espaços bem como as propriedades que possuem.

Teorema 3.1.1. *(Propriedades) Sejam $u, v \in W^{k,p}(U)$ e o índice múltiplo α tal que $|\alpha| \leq k$, então:*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo índice múltiplo β tal que $|\alpha|+|\beta| \leq k$;

(ii) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, segue que $au + bv \in W^{k,p}(U)$ e $D^\alpha(au+bv) = aD^\alpha u + bD^\alpha v$;

(iii) Se V é um subconjunto aberto de U, então $u \in W^{k,p}(V)$;

(iv) Se $\psi \in C_c^\infty(U)$, então $\psi u \in W^{k,p}(U)$ e

$$
D^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} u,
$$

onde $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$. Essa equação é conhecida como Fórmula de Leibniz.

Demonstração. (i) Considere $\phi \in C_c^\infty(U)$, como $D^\alpha u$ existe e $D^\beta \phi \in C_c^\infty(U)$ segue que

$$
\int_U D^\alpha u D^\beta \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^{\alpha+\beta} \phi dx = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx
$$

e assim

$$
\int_U D^\alpha u D^\beta \phi dx = (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx.
$$

Então $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$, o caso $D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ é análogo. Tomando $|\beta| = k - |\alpha|$ obtemos que $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$.

(ii) Considere $\phi \in C_c^\infty(U)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_U (au+bv) D^\alpha \phi dx &= a\int_U u D^\alpha \phi dx + b \int_U v D^\alpha \phi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} a \int_U D^\alpha u \phi dx + (-1)^{|\alpha|} b \int_U D^\alpha v \phi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha (au+bv) \phi dx,
\end{aligned}
$$

então segue o resultado.

(iii) Defina a função

$$
\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in V \\ 0, & \text{se } x \notin V. \end{cases}
$$

Note que $\tilde{u} \in W^{k,p}(U)$ e assim considere $\phi \in C_c^\infty(V)$, e defina $\tilde{\phi} : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$
\tilde{\phi}(x) := \begin{cases} \phi(x), & \text{se } x \in V \\ 0, & \text{se } x \in U - V. \end{cases}
$$

Note que $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(U)$. Então

$$\int_V uD^\alpha \phi dx = \int_U \tilde{u} D^\alpha \tilde{\phi} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha \tilde{u} \tilde{\phi} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_V D^\alpha u \phi dx,$$

portanto segue o resultado.

(iv) Vamos provar por indução sobre $|\alpha|$.

1. Suponha que $|\alpha| = 1$ tomando $\phi \in C_c^\infty(U)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_U \psi u D^\alpha \phi dx &= \int_U \psi u D^\alpha \phi + u(D^\alpha \psi)\phi - u(D^\alpha \psi)\phi dx \\
&= \int_U u D^\alpha(\psi\phi) dx - \int_U u(D^\alpha \psi)\phi dx \\
&= -\int_U D^\alpha u(\psi\phi) dx - \int_U u(D^\alpha \psi)\phi dx \\
&= -\int_U (\psi D^\alpha u + u D^\alpha \psi)\phi dx,
\end{aligned}$$

então $D(\psi u) = \psi D u + u D\psi$ e $\psi u \in W^{1,p}(U)$.

2. Agora, suponha que é verdade para todo $|\alpha| \leq l$, com $l < k$, ou seja,

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} u, \qquad \forall\ |\alpha| \leq l.$$

3. Sendo assim considere $|\alpha| = l+1$, então $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = l$ e $|\gamma| = 1$, logo para $\phi \in C_c^\infty(U)$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_U \psi u D^\alpha \phi dx &= \int_U \psi u D^\beta (D^\gamma \phi) dx \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_U D^\beta(\psi u) D^\gamma \phi dx \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_U \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta} D^\delta \psi D^{\beta-\delta} u D^\gamma \phi dx \\
&= (-1)^{|\beta|}(-1)^{|\gamma|} \int_U \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta} D^\gamma (D^\delta \psi D^{\beta-\delta} u)\phi dx \\
&= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_U \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta} [D^{\gamma+\delta}\psi D^{\beta-\delta} u + D^\delta \psi D^{\gamma+\beta-\delta} u]\phi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta} [D^{\gamma+\delta}\psi D^{\alpha-\gamma-\delta} u + D^\delta \psi D^{\alpha-\delta} u]\phi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} D^\delta \psi D^{\alpha-\delta} u \phi dx,
\end{aligned}$$

então

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} u.$$

□

Teorema 3.1.2. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ é um espaço de Banach, para todo inteiro positivo k e todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Considere $(u_m)_{m=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(U)$, assim para cada $|\alpha| \leq k$ temos que $(D^\alpha u_m)_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(U)$, pois

$$\|u_m - u_l\|_{W^{k,p}(U)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_l\|_{L^p(U)}^p \geq \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_l\|_{L^p(U)}^p$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u_m - u_l\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_l\|_{L^p(U)} \geq \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_l\|_{L^p(U)}$$

para $p=\infty$. Como o espaço $L^p(U)$ é completo, temos que existe $u_\alpha \in L^p(U)$ tal que

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Sendo assim, em particular

$$u_m \to u = u_{(0,0,\dots,0)},$$

com $u \in L^p(U)$, assim basta provar que $u \in W^{k,p}(U)$. Para isso, seja $\phi \in C_c^\infty(U)$, então

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^\alpha \phi dx = \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi dx.$$

Portanto $u \in W^{k,p}(U)$ e $D^\alpha u = u_\alpha$, logo $W^{k,p}(U)$ é um espaço de Banach. □

Teorema 3.1.3. *(Aproximação por Funções Suaves) Suponha $U \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $u \in W^{k,p}(U)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então existe função $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ tal que*

$$u_m \to u \quad em \quad W^{k,p}(U).$$

Antes de provarmos o Teorema 3.1.3, vamos definir a noção de compactamente imerso que será utilizada na demonstração.

Definição 3.1.6. Seja X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$, dizemos que X é *Compactamente Imerso* em Y, denotando por $X \subset\subset U$, se e somente se,

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$, para todo $u \in X$ e alguma constante C.

(ii) Se toda sequência limitada em X é pré compacta em Y.

Demonstração. Inicialmente, considere

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

com

$$U_i := \left\{ x \in U : dist(x, \partial U) > \frac{1}{i} \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Agora, tome

$$V_i := U_{i+3} - \overline{U}_{i+1}$$

e escolha algum conjunto aberto $V_0 \subset\subset V$ de modo que

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i.$$

Seja $\{\zeta_i\}$ uma partição suave da unidade subordinada aos conjuntos abertos $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$, ou seja,

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, & \zeta_i \in C_c^\infty(V_i) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1, & \text{em } U. \end{cases}$$

Agora, considere $u \in W^{k,p}(U)$, de acordo com o Teorema 3.1.1 no item (iv), temos que $\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$ e note que $supp(\zeta_i u) \subset V_i$. Fixando $\delta > 0$ e tomando $\varepsilon_i > 0$ tão pequeno que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$ satisfaz

$$\begin{cases} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} < \frac{\delta}{2^{i+1}}, & (i = 1, 2, \dots) \\ supp(u^i) \subset w_i, & (i = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

onde η_{ε_i} é a função padrão identidade (1.9) e $W_i := U_{i+4} - \overline{U}_i \supset V_i$ para $i = 1, 2, \dots$. Definindo $v := \sum_{i=0}^{\infty} u^i$ esta função pertence a $C^\infty(U)$, pois para cada conjunto aberto $V \subset\subset U$ existe no máximo um número finito de termos diferentes de zero na soma. Desde que $u = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u$, então para cada $V \subset\subset U$ segue que

$$\|v - u\|_{W^{k,p}}(V) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}}(U) \leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta.$$

Considerando o supremo sobre os conjuntos $V \subset\subset U$ concluímos que

$$\|v - u\|_{W^{k,p}}(U) \leq \delta.$$

□

3.2 Espaço H_0^1

Nessa seção vamos definir o espaço de Sobolev H_0^1 e entender algumas de suas propriedades, este será o espaço das soluções das EDPs que veremos mais adiante.

Definição 3.2.1. O conjunto $W_0^{k,p}(U)$ é o fecho de $C_c^\infty(U)$ em $W^{k,p}(U)$, ou seja, $u \in W_0^{k,p}(U)$, se e somente se, existem funções $u_m \in C_c^\infty(U)$ tais que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(U)$.

Observação 3.2.1. Vamos denotar $H_0^1(U) = W_0^{k,2}(U)$

Definição 3.2.2. O produto interno para $u, v \in H_0^1(U)$ é dado por

$$(u,v) := \int_U DuDv + uvdx = \int_U \langle (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), (v_{x_1}, \dots, v_{x_n}) \rangle + u(x)v(x)dx. \tag{3.1}$$

Note que é de fato um produto interno.

Observação 3.2.2. O espaço H_0^1 é um espaço de Hilbert.

3.2.1 Dual do Espaço H_0^1

Definição 3.2.3. O dual de $H_0^1(U)$ é representado como $H^{-1}(U)$, ou seja, se $f \in H^{-1}(U)$ então f é um funcional linear limitado em $H_0^1(U)$.

Observação 3.2.3. Vamos utilizar $\langle ., . \rangle$ para denotar a ação do funcional de $H^{-1}(U)$ sobre $H_0^1(U)$, ou seja, dados $f \in H^{-1}(U)$ e $u \in H_0^1(U)$, denotamos

$$f(u) = \langle f, u \rangle.$$

Agora, vamos buscar entender melhor esse espaço dual.

Definição 3.2.4. (*Norma*) Seja $f \in H^{-1}(U)$, definimos a norma de f como

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \sup\{\langle f, u \rangle : u \in H_0^1(U) \ \text{ e } \ \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

Observação 3.2.4. Note que $\|f\|_{H^{-1}(U)}$ é dada pela norma usual de espaço de funções.

Teorema 3.2.1. *(Caracterização de H^{-1})*

(i) Se $f \in H^{-1}(U)$ então existem funções $f^0, f^1, \cdots, f^n$ em $L^2(U)$ tais que

$$\langle f, u \rangle = \int_U f^0 u + \sum_{i=1}^n f^i u_{x_i} dx, \qquad u \in H_0^1(U) \tag{3.2}$$

(ii) Temos que

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left(\int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} : f \text{ satisfaz } (3.2) \text{ para } f^0, f^1, \cdots, f^n \in L^2(U) \right\}; \tag{3.3}$$

(iii) Em particular, temos que

$$(v,u)_{L^2(U)} = \langle v, u \rangle, \qquad \forall u \in H_0^1(U), \ v \in L^2(U) \subset H^{-1}(U),$$

onde $(.,.)_{L^2(U)}$ é o produto interno em $L^2(U)$.

Demonstração. (i) Seja $f \in H^{-1}(U)$, pelo Teorema de Representação de Riesz A.2.7 temos que existe uma única função $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$f(v) = \langle f, v \rangle = (u,v) = \int_U \langle (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), (v_{x_1}, \dots, v_{x_n}) \rangle + uvdx = \int_U uv + \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i} dx,$$

$\forall v \in H_0^1(U)$, assim, tomando $f^0 = u$ e $f^i = u_{x_i}$ para $i = 1, \dots, n$, segue o resultado.

(ii) Considere f a mesma função dada anteriormente e sejam $g^0, g^1, \ldots, g^n \in L^2(U)$ tais que

$$\langle f, v\rangle = \int_U g^0 v + \sum_{i=1}^{n} g^i v_{x_i} dx, \qquad \forall v \in H_0^1(U).$$

Tomando $u = v$ na igualdade no produto interno (3.2), temos que

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = (u, u) = \int_U \|Du\|^2 + |u|^2 dx = \langle f, u\rangle.$$

Além disso, tomando $g = (g^0, g^1, \ldots, g^n)$ e $\tilde{u} = (u, u^1, \ldots, u^n)$, segue que

$$\int_U g^0 u + \sum_{i=1}^{n} g^i u_{x_i} dx = (g, \tilde{u})_{L^2(U)^n} \leq \|g\|_{L^2(U)^n} \|\tilde{u}\|_{L^2(U)^n}.$$

Como $\|\tilde{u}\|_{L^2(U)^n} = \|u\|_{H_0^1}$, temos que

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|g\|_{L^2(U)^n} \|u\|_{H_0^1} \quad \Rightarrow \quad \int_U \|Du\|^2 + |u|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx.$$

Considerando que $f^0 = u$ e $f^i = u_{x_i}$, segue que

$$\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx.$$

Utilizando um argumento análogo ao apresentado acima, temos que

$$|\langle f, v\rangle| = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx \quad \Rightarrow \quad |\langle f, v\rangle| \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx$$

para $\|v\|_{H_0^1} \leq 1$, logo

$$\|f\|_{H^{-1}} \leq \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

mas

$$v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1}} \quad \Rightarrow \quad \|f\|_{H^{-1}} = \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} : f \text{ satisfaz (3.2) para } f^0, f^1, \cdots, f^n \in L^2(U) \right\}$$

□

Observação 3.2.5. Por abuso de notação, escrevemos

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i},$$

onde $f^0, f^1, \cdots, f^n \in L^2(U)$.

3.3 Teoremas Clássicos

Nesta seção vamos abordar alguns teoremas importantes no estudo sobre os espaços de Sobolev.
Antes de vermos esses resultados, vamos fazer uma adaptação para a teoria de espaços de Sobolev de um teorema que vimos anteriormente, o Teorema 2.2.2.

Teorema 3.3.1. *(Propriedades da Transformada de Fourier) Assuma que $u, v \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}dx$;

(ii) $\widehat{(D^\alpha u)} = (iy)^\alpha \hat{u}$ *para cada multiíndice α, tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$;*

(iii) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^k$, então $(u * v)\hat{} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}\hat{v}$;

(iv) $u = \check{\hat{u}}$.

Demonstração. Como o teorema acima ja foi provado para funções suaves no capitulo anterior (Teorema 2.2.2), para provar o Teorema 2.2.2 basta utilizar o Teorema 3.1.3 e observar que $H^k(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

3.3.1 Caracterização de H^k pela Transformada de Fourier

Teorema 3.3.2. *(Caracterização de H^k pela Transformada de Fourier) Seja k um inteiro não negativo.*

(i) Uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pertence a $H^k(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $(1 + |y|^k)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Além disso, existe uma constante C positiva tal que

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1 + |y|^k)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall u \in H^k(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. (i) Inicialmente, suponha que $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 3.3.1 vale que

$$\widehat{D^\alpha u}(y) = (iy)^\alpha \hat{u}$$

para todo $|\alpha| \leq k$. Então, $(iy)^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e temos que

$$\|(iy)^\alpha \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{D^\alpha u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $|\alpha| \leq k$, pelo Teorema 2.2.1. Escolhendo $\alpha_j = ke_j$, onde e_j são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(iy)^{\alpha_j}\hat{u}|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha_j} u|^2 dx \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |(iy)^{\alpha_j}|^2 |\hat{u}|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |D^{\alpha_j} u|^2 dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |(iy)^{\alpha_j}|^2 |\hat{u}|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |y_j|^{2k} |\hat{u}|^2 dy \geq \int_{\mathbb{R}^n} |y|_\infty^{2k} |\hat{u}|^2 dy \geq \frac{1}{C_1} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2k} |\hat{u}|^2 dy,$$

onde $|.|_\infty$ é a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$. Note também que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |D^{\alpha_j} u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D^k u|^2 dx.$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2k} |\hat{u}|^2 dy \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |D^k u|^2 dx.$$

Como $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^k)^2 |\hat{u}|^2 dy \leq 2\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^{2k}) |\hat{u}|^2 dy = 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2k} |\hat{u}|^2 dy\right)$$

e assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^k)^2 |\hat{u}|^2 dy \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 dy + C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |D^k u|^2 dy\right) \leq C\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Logo $(1+|y|^k)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Agora, se $(1+|y|^k)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $|\alpha| \leq k$, temos que

$$\|(iy)^\alpha \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2|\alpha|}|\hat{u}|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2k}|\hat{u}|^2 dy \leq \|(1+|y|^k)\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

e $(iy)^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Defina

$$u_\alpha := ((iy)^\alpha \hat{u})\check{}.$$

Então, para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, utilizando o Teorema 2.2.2 segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \phi)\bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{D^\alpha \phi})\bar{\hat{u}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} (iy)^\alpha \hat{\phi}\bar{\hat{u}} dy = \left(i^{|\alpha|} \cdot \bar{i}^{-|\alpha|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\overline{(iy)^\alpha \hat{u}} dy$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\bar{\hat{u}}_\alpha dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \phi \bar{u}_\alpha dx.$$

Então $u_\alpha = D^\alpha u$ em um sentido fraco. Como $(iy)^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, logo $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Pela parte inicial da prova do item i, segue diretamente que

$$\|(1+|y|^k)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}.$$

Da segunda parte da prova anterior, temos que

$$\|(iy)^\alpha \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1+|y|^k)\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Então

$$\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(U)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|(iy)^\alpha \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|(1+|y|^k)\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Logo, para todo $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, vale a desigualdade

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1+|y|^k)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Definição 3.3.1. Assuma $0 < s < \infty$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ se $(1+|y|^s)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, para s não inteiro definimos

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|y|^s)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

3.3.2 Teorema da Imersão de Sobolev

Teorema 3.3.3. *(Teorema da Imersão de Sobolev) Seja $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, então existe $\tilde{u} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = \tilde{u}$ q.t.p., com m, k inteiros não negativos tais que $m > k + \frac{n}{2}$.*

Demonstração. Inicialmente, para $w \in L^1(\mathbb{R}^n)$, note que

$$x^\alpha w \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{w} \in C^k(\mathbb{R}^n)$$

para todo $|\alpha| \leq k$, pois

$$D^\alpha \hat{w}(y) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha y}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)e^{-ixy}dx$$

utilizando o fato de que a função e^{-ixy} é limitada e que $w \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos utilizar o Teorema da Derivação Dominada (A.2.6), e assim

$$D^\alpha \hat{w}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha y}e^{-ixy}dx = (-1)^{|\alpha|}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)x^\alpha e^{-ixy}dx = (-1)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha w)}(y).$$

Logo, se $x^\alpha w \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a igualdade acima está bem definida e assim $\hat{w} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Agora, usando esse resultado para $w := \hat{u}$, vamos mostrar que se $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ com $m > k + \frac{n}{2}$ e $|\alpha| \leq k$ então $x^\alpha \hat{u} = x^\alpha w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e assim $\hat{w} = \widehat{(\hat{u})} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Para isso, pelo Teorema 3.3.1, temos que, $(x^\alpha \hat{u}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo

$|\alpha| \leq m$. Em particular, tome $\alpha = (0, \dots, 0, m, 0, \dots, 0)$, ou seja, com m na i-ésima coordenada e 0 nas outras, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i^{2m} |\hat{u}(y)|^2 dy < \infty.$$

Como

$$1 + x^2 := 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|(1, x_1^2, \dots, x_n^2)\|_1$$

pela desigualdade de Hölder, com $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{m} = 1\right)$, temos que

$$1 + x^2 \leq \|(1, 1, \dots, 1)\|_p \cdot \|(1, x_1^2, \dots, x_n^2)\|_m = (n+1)^{\frac{1}{p}} \left(1 + x_1^{2m} + \cdots + x_n^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + x^2)^m |\hat{u}(y)|^2 dy < \infty.$$

Unindo a desigualdade acima, o fato de que $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \leq (1 + x^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$ e a hipótese de que $m > k + \frac{n}{2}$, para todo $|\alpha| \leq k$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \hat{u}(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + x^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{u}(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + x^2)^{\frac{m}{2}} (1 + x^2)^{-\frac{m-k}{2}} |\hat{u}(y)| dy$$

e assim, por Cauchy-Schwarz obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \hat{u}(y)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + x^2)^m |\hat{u}(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + x^2)^{m+k}} dy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Pois a ultima integral é dada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{m+k}{2}}} dy = n\alpha(n) \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^2)^{m-k}} r^{n-1} dr < \infty,$$

onde $n\alpha(n)$ é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. O que prova que $x^\alpha \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e assim $\widehat{(\hat{u})} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Para finalizar a prova, note que

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ixy} dx \quad \Rightarrow \quad \hat{\hat{u}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-ixy} e^{-ixy} dx dy$$

e, pelo Teorema 3.3.1, temos que

$$u(x) = \check{\hat{u}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-ixy} e^{ixy} dx dy.$$

Logo, $u(-x) = \hat{\hat{u}}(x)$. Portando $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$. □

Observação 3.3.1. A referência para a prova desse teorema e alguns outros resultados podem ser encontrados no artigo [11]. Além disso, o teorema acima pode ser apresentado em outras versões, tanto para espaços mais gerais, como abertos de $\mathbb{R}^n$, por exemplo, ou para imersões em outros espaços, como outro espaço de Sobolev, as referências estão em [1].

3.3.3 Teorema da Compacidade Rellich-Kondrachov

Para finalizar este capítulo, vamos enunciar um resultado importante que utilizaremos adiante, não faremos a prova, mas a sua demonstração pode ser encontrada na seção 5.7 do livro [6].

Definição 3.3.2. Seja X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$, dizemos que uma sequência limitada $(u_k)_{k=1}^\infty$ de X é pré compacta em Y se existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ que converge para algum $u \in Y$, ou seja,

$$\lim_{j \to \infty} \|u_{k_j} - u\|_Y = 0.$$

Definição 3.3.3. Seja X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$, dizemos que X é *Compactamente Imerso* em Y, denotando por $X \subset\subset U$, se e somente se,

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$, para todo $u \in X$ e alguma constante C.

(ii) Se toda sequência limitada em X é pré compacta em Y.

Teorema 3.3.4. *(Teorema da Compacidade Rellich-Kondrachov) Seja U subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, onde ∂U é C^1. Suponha que $1 \leq p < n$, então*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

para cada $1 \leq q < p^*$, onde $p^* = \frac{pn}{n-p}$.

Capítulo 4

Introdução as Equações Diferenciais Lineares

Neste capítulo iremos utilizar os nossos conhecimentos adquiridos para a resolução de alguns tipos de equações diferenciais parciais, as principais referências estão em [6].

4.1 Equações Elípticas

Nesta seção vamos investigar a resolução de EDPs elípticas de segunda ordem, o problema que concentraremos nossa atenção é dado por

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde
∘ $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado;
∘ $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ que queremos encontrar;
∘ $f : U \to \mathbb{R}$ dada;
∘ L um operador diferencial linear de segunda ordem.

Operador L

O operador L pode aparecer de duas formas.

- *Forma divergente*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{4.2}$$

- *Forma não divergente*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{4.3}$$

para funções coeficientes a^{ij}, b^i, c dadas.

Observação 4.1.1. É possível transformar a forma do operador L de divergente em não divergente, de fato

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u &= -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}_{x_j}(x)u_{x_i} + a^{ij}(x)u_{x_i x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}(x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left(b^i(x) - \sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}(x)\right) u_{x_i} + c(x)u. \end{aligned}$$

Logo, utilizaremos apenas a forma divergente.

Definição 4.1.1. *(Uniformemente Elíptico)* Dizemos que o operador diferencial parcial L é uniformemente elíptico se existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \tag{4.4}$$

para quase todo ponto $x \in U$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.1.1. Um caso particular de equação elíptica do problema (4.1) é a Equação de Laplace (1.4), para isso, considere $a^{ij} \equiv \delta_{ij}, b^i \equiv 0, c \equiv 0$ e $f \equiv 0$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \textbf{se } i = j \\ 0, & \textbf{se } i \neq j. \end{cases}$$

E para mostrar que a equação é uniformemente Elíptica, note que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\xi_i = |\xi|^2,$$

então basta tomar $\theta = 1$.

4.1.1 Soluções Fracas

Seguindo a ideia de derivada fraca iremos definir o que vamos entender por soluções fracas, o que nos proporcionará resolver equações elípticas. Vamos considerar $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$ com $i, j = 1, \ldots, n$ e $f \in L^2(U)$.

Definição 4.1.2. (*Solução Fraca*)

(i) A forma bilinear $B[.,.]$ associada ao operador elíptico L na forma divergente é dado por:

$$B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uvdx \tag{4.5}$$

para $u, v \in H_0^1(U)$.

(ii) $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca do problema (4.1) se

$$B[u,v] = (f,v)_{L^2(U)}, \tag{4.6}$$

para todo $v \in H_0^1(U)$. Onde $(.,.)_{L^2(U)}$ denota o produto interno em $L^2(U)$.

Observação 4.1.2. Podemos generalizar a definição acima se considerarmos $f \in H^{-1}(U)$ o espaço dual de $H_0^1(U)$, como vimos no Teorema de Caracterização de H^{-1} 3.2.1

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i},$$

com $f^0, f^1, \ldots, f^n$ em $L^2(U)$. Então

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle = \int_U f^0 v - \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx,$$

onde $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca do problema (4.1).

Agora vamos apresentar alguns teoremas que vão nos possibilitar garantir a existência de soluções fracas para o problema (4.1).

Teorema 4.1.1. *(Teorema de Lax-Milgram) Considere H um espaço de Hilbert real com norma $\|.\|_H$ e produto interno $(.,.)_H$. Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear, para o qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que* *(i)* $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H$ *para todo* $u, v \in H$;

(ii) $\beta \|u\|_H^2 \leq B[u,u]$.

Então, para todo funcional linear limitado $f : H \to \mathbb{R}$ *existe um único elemento* $u \in H$ *tal que*

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle = f(v), \quad \forall\ v \in H.$$

Antes de realizarmos a demonstração do teorema, definiremos o conceito de projeção ortogonal e uma proposição que utilizaremos na demonstração.

Definição 4.1.3. Seja H um espaço com produto interno e A um subconjunto de H. Denominamos o subconjunto

$$A^{\perp} := \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in A\}$$

de complemento ou projeção ortogonal de A.

Proposição 4.1.1. *Seja* H *um espaço com produto interno e* A *um subconjunto de* H*. Se* $A^{\perp} = \{0\}$ *então* $A = H$*.*

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{rl} \varphi_u : & H \to \mathbb{R} \\ & v \mapsto B[u,v], \end{array}$$

note que φ_u é um funcional linear limitado para qualquer u, então pelo Teorema de Representação de Riesz existe um único w_u tal que

$$\varphi_u(v) = B[u,v] = (w_u, v)_H, \quad \forall\ v \in H.$$

Considere o operador $A : H \to H$ definido por $A(u) = w_u$, vamos provar que A é um operador linear limitado e bijetivo.

(i) A é linear.
Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $u_1, u_2 \in H$, então

$$\begin{array}{rcl} (A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v)_H & = & B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\ & = & \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\ & = & \lambda_1 (Au_1, v)_H + \lambda_2 (Au_2, v)_H \\ & = & (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v)_H, \end{array}$$

para todo $v \in H$, logo $A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2$ e assim A é linear.

(ii) A é limitado.
Como

$$\|Au\|_H^2 = (Au, Au)_H = B[u, Au] \leq \alpha \|u\|_H \|Au\|_H,$$

então

$$\|Au\|_H \leq \alpha \|u\|_H,$$

para todo $u \in H$, logo A é limitado.

(iii) A é injetivo.
Temos que

$$\beta \|u\|_H^2 \leq B[u,u] = (Au, u)_H \leq \|Au\|_H \|u\|_H,$$

então

$$\|Au\|_H \geq \beta \|u\|_H$$

para todo $u \in H$, logo A é injetiva.

(iv) A é sobrejetivo.
Inicialmente vamos mostrar que $A(H)$ é fechado. Considere

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A(H), \quad \text{com} \quad a_n \to a \ \text{ e } \ a \in H.$$

Note que existe $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in H$ tal que $A(u_n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\|u_n - u_m\|_H \leq \frac{1}{\beta} \|A(u_n - u_m)\|_H = \frac{1}{\beta} \|A(u_n) - A(u_m)\|_H = \frac{1}{\beta} \|a_n - a_m\|_H.$$

Logo $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é sequência de Cauchy e assim converge para algum $u \in H$, então

$$\|A(u_n) - A(u)\|_H = \|A(u_n - u)\|_H \leq \alpha \|u_n - u\|_H \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

assim $A(u) = a$ e $a \in A(H)$, logo $A(H)$ é fechado. Agora vamos mostrar que $A(H) = H$. Para isso, note que se $b \in (A(H))^{\perp}$, segue que

$$\beta \|b\|_H^2 \leq B[b, b] = (Ab, b)_H = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0,$$

logo $(A(H))^{\perp} = \{0\}$. Portando $A(H) = H$ e A é um bijetiva.

Assim, A é um isomorfismo linear limitado. Se f é um funcional linear limitado, utilizando novamente o Teorema de representação de Riesz, existe um único $w \in H$ tal que

$$f(v) = \langle f, v \rangle = (w, v)_H, \quad \forall v \in H.$$

Sendo assim, tome $u \in H$ satisfazendo $Au = w$, então

$$B[u, v] = (Au, v)_H = (w, v)_H = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H,$$

que prova a existência de u. Para provar que u é único, considere

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad \text{e} \quad B[\tilde{u}, v] = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Então

$$B[u - \tilde{u}, v] = 0, \quad \forall v \in H$$

tomando $v = u - \tilde{u}$, temos que

$$\beta \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] = 0 \Rightarrow u = \tilde{u},$$

logo u é único. Portanto segue o resultado. $\square$

Observação 4.1.3. O Teorema de Lax-Milgram 4.1.1 nos garante uma solução fraca, desde que a forma bilinear cumpra as condições (i) e (ii). Então o nosso objetivo é encaixar a forma bilinear nessas condições para podermos utilizar esse teorema.

Teorema 4.1.2. *(Estimativas de Energia) Seja B a forma bilinear dada por (4.5), então existem constantes $\alpha \geq 0$ e $\beta > 0$ tais que:*

(i) $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$;

(ii) $\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2$,

para todo $u, v \in H_0^1(U)$ e algum $\gamma \geq 0$.

Demonstração. (i) Considere $u, v \in H_0^1(U)$, então

$$\begin{aligned}
|B[u, v]| &= \left| \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} v + c(x) uv dx \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_\infty \int_U |Du||Dv| dx + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_\infty \int_U |Du||v| dx + \|c\|_\infty \int_U |u||v| dx \\
&\leq \alpha \int_U |Du||Dv| + |Du||v| + |u||v| dx \\
&\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)},
\end{aligned}$$

para algum α apropriado.

(ii) Considerando a condição elíptica do operador L, segue que

$$\theta \int_U |Du|^2 dx \leq \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx.$$

Sendo assim, temos que

$$\theta \int_U |Du|^2 dx \leq B[u,u] - \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} u + c(x) u^2 dx$$

$$\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du||u| dx + \|c\|_{L^\infty} \int_U u^2 dx.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tão pequeno que

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} < \frac{\theta}{2}$$

e lembrando da desigualdade de Young com ε, $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$, obtemos a desigualdade

$$\int_U |Du||u| dx \leq \varepsilon \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U u^2 dx.$$

Então

$$\frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2 dx \leq B[u,u] + k \int_U u^2 dx$$

para algum k. Logo

$$\frac{\theta}{2} \|Du\|^2_{L^2(U)} \leq B[u,u] + k\|u\|^2_{L^2(U)}.$$

Somando $\|u\|^2_{L^2(U)}$ de ambos os lados e escolhendo constantes β e γ apropriadas, temos que

$$\beta \|u\|^2_{H^1_0(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$$

como queríamos provar.

□

O teorema anterior não satisfaz todas as condições para utilizar o Teorema de Lax-Milgram 4.1.1, logo não podemos diretamente garantir a existência de soluções fracas, mas através dessas estimativas podemos garantir soluções fracas para alguns casos, como veremos nos próximos teoremas.

Teorema 4.1.3. *(Primeiro Teorema de Existência de Soluções Fracas) Existe $\gamma \geq 0$ tal que para cada $\mu \geq \gamma$ e cada função $f \in L^2(U)$ existe uma única solução fraca $u \in H^1_0(U)$ do problema de valor de bordo*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U. \end{cases} \tag{4.7}$$

Demonstração. Seja γ dado pelo teorema anterior (4.1.2), agora tome $\mu \geq \gamma$ e vamos definir o produto bilinear como

$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu(u,v)_{L^2(U)}.$$

Note que

(i)

$$\begin{aligned} |B_\mu[u,v]| &\leq |B[u,v]| + |\mu||(u,v)_{L^2(U)}| \\ &\leq \alpha\|u\|_{H^1_0(U)}\|v\|_{H^1_0(U)} + |\mu|\|u\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} \\ &\leq \tilde{\alpha}\|u\|_{H^1_0(U)}\|v\|_{H^1_0(U)}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \beta\|u\|^2_{H^1_0(U)} &\leq B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{L^2(U)} \\ &\leq B[u,u] + \mu\|u\|^2_{L^2(U)} \\ &= B_\mu[u,u], \end{aligned}$$

então B_μ satisfaz as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram. Fixando $f \in L^2(U)$ e definindo

$$\tilde{f}(v) = \langle f, v \rangle := (f,v)_{L^2(U)},$$

onde

$$(f,v)_{L^2(U)} \leq \|f\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} < \infty,$$

segue que $\tilde{f}$ é um funcional linear limitado em $L^2(U)$ e consequentemente em $H_0^1(U)$. Assim, pelo Teorema de Lax-Milgram 4.1.1 existe uma única função $u \in H_0^1(U)$ satisfazendo

$$B_\mu[u,v] = \langle f, v\rangle = \langle Lu + \mu u, v\rangle$$

para todo $v \in H_0^1(U)$, portanto u é a única solução fraca do problema de bordo (4.7).

□

4.1.2 Alternativa de Fredholm

Agora observaremos a teoria de Fredholm para operadores compactos visando obter mais soluções de EDPs elípticas de segunda ordem. Inicialmente, vamos definir a ideia de problema adjunto.

Definição 4.1.4. (i) O operador L^* adjunto da forma de L é

$$L^*v := -\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(x)v_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)v_{x_i} + \left(c(x) - \sum_{i=1}^{n} b^i_{x_i}(x)\right)v$$

onde $b^i \in C^1(\bar{U})$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) O adjunto bilinear da forma $B^* : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ é definido por

$$B^*[v,u] := B[u,v],$$

para todo $u, v \in H_0^1(U)$.

(iii) Dizemos que $v \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca para o problema adjunto

$$\begin{cases} L^*v = f, & \text{em } U \\ v = 0, & \text{em } \partial U, \end{cases} \tag{4.8}$$

se $B^*[v,u] = \langle f, u\rangle$ para todo $u \in H_0^1(U)$.

Definição 4.1.5. (Operador Compacto) Um operador linear limitado

$$K : X \to Y$$

é chamado de compacto se para cada sequência limitada $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ em X a sequência $\{K_{u_m}\}_{m=1}^{\infty}$ é pré compacta em Y, veja a definição 3.3.2.

Teorema 4.1.4. *(Alternativa de Fredholm) Seja $K : H \to H$ um operador linear compacto, então*

(i) $N(I - K)$ *tem dimensão finita;*

(ii) $R(I - K)$ *é fechado;*

(iii) $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$*;*

(iv) $N(I - K) = \{0\}$ *se, e somente se,* $R(I - K) = H$*;*

(v) $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$

Observação 4.1.4. Note que do teorema acima, para $H = L^2(U)$, obtemos em particular que:

(a) para cada $f \in L^2(U)$ a equação $u - Ku = f$ tem uma única solução,

ou

(b) a equação $u - Ku = 0$ tem soluções diferentes de zero em $L^2(U)$.

Esta dicotomia é chamada *Alternativa de Fredholm*, a demonstração desse teorema pode ser encontrada no apêndice D do livro [6].

Teorema 4.1.5. *(Segundo Teorema de Existência de Soluções Fracas)*

(i) Apenas uma das afirmações abaixo é válida

(α) *para cada $f \in L^2(U)$ existe uma única solução u do problema de valor de bordo*

$$\begin{cases} Lu = f, & em\ \ U \\ u = 0, & em\ \ \partial U. \end{cases} . \tag{4.9}$$

(β) *existe uma única solução fraca u não nula para o problema homogêneo*

$$\begin{cases} Lu = 0, & em\ \ U \\ u = 0, & em\ \ \partial U. \end{cases} . \tag{4.10}$$

(ii) Além disso, se ocorre a afirmação (β) a dimensão do subespaço $N \subset H_0^1$ de soluções fracas de (4.10) é finito e igual a dimensão do subespaço $N^* \subset H_0^1(U)$ de soluções fracas de

$$\begin{cases} L^*v = 0, & em\ \ U \\ v = 0, & em\ \ \partial U. \end{cases} . \tag{4.11}$$

(iii) O problema de valor de bordo (4.9) tem uma solução fraca, se e somente se,

$$\langle f, v\rangle = 0,$$

para todo $v \in N^*$. A dicotomia (α),(β) é a alternativa de Fredholm.

Demonstração. (i) Considerando $\mu = \gamma \geq 0$ do teorema anterior, obtemos que para a equação

$$\begin{cases} L_\gamma u = Lu + \gamma u = g, & \text{em}\ \ U \\ u = 0, & \text{em}\ \ \partial U, \end{cases}$$

com $g \in L^2(U)$, existe uma única solução fraca $\tilde{u} \in H_0^1(U)$ tal que

$$B_\gamma[\tilde{u}, v] = B[\tilde{u}, v] + \gamma\langle\tilde{u}, v\rangle = \langle g, v\rangle$$

para todo $v \in H_0^1(U)$. Seja

$$\tilde{u} = L_\gamma^{-1} g,$$

pois $L_\gamma \tilde{u} = g$. Observe que $u \in H_0^1(U)$, ou seja, u é solução fraca de de (4.9) se, e somente se,

$$B_\gamma[u, v] = \langle \gamma u + f, v\rangle,$$

pois

$$B_\gamma[u, v] = B[u, v] + \gamma\langle u, v\rangle = \gamma\langle u, v\rangle + \langle f, v\rangle = \langle \gamma u + f, v\rangle,\ \forall v \in H_0^1(U),$$

se, e somente se

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in H_0^1(U).$$

Sendo assim

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f).$$

Agora, defina

$$Ku := \gamma L_\gamma^{-1} u$$
$$h := L_\gamma^{-1} f,$$

então

$$u - Ku = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f) - \gamma L_\gamma^{-1} u = L_\gamma^{-1}(f) = h.$$

Por definição $K : L^2(U) \to L^2(U)$ é um operador linear, afirmamos que K limitado e compacto, pois utilizando o teorema (4.1.2) temos que

$$\beta\|\tilde{u}\|^2_{H_0^1(U)} \leq B_\gamma[\tilde{u}, \tilde{u}] = \langle g, \tilde{u}\rangle \leq \|g\|_{L^2(U)}\|\tilde{u}\|_{L^2(U)} \leq \|g\|_{L^2(U)}\|\tilde{u}\|_{H_0^1(U)},$$

e assim

$$\|Kg\|_{H_0^1(U)} = \|\gamma L_\gamma^{-1} g\|_{H_0^1(U)} = |\gamma|\|L_\gamma^{-1} g\|_{H_0^1(U)} = |\gamma|\|\tilde{u}\|_{H_0^1(U)} \leq C\|g\|_{L^2(U)}$$

para uma constante C apropriada, logo K é limitado. Além disso, pelo Teorema (3.3.4) segue que $H_0^1(U) \subset\subset L^2(U)$, o que mostra que K é compacto. Aplicando a Alternativa de Fredholm (4.1.4) se (a) é válida então existe uma única solução do problema (4.9) e assim (α) é válida. Por outro lado, se (b) é válida temos que (β) é válida e segue do Teorema (4.1.4) que o espaço N de soluções tem dimensão finita e a dimensão é igual ao espaço N^* de soluções de

$$v - k^* v = 0,$$

o que prova (ii). Para provar (iii) note que vale (a) se, e somente se, vale (α) e temos que

$$\langle h, v\rangle = \langle u - Ku, v\rangle = \langle u, v - K^* v\rangle = 0,$$

para todo $v \in N^*$. Note também que

$$\langle h, v\rangle = \langle L_\gamma^{-1} f, v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle Kf, v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, K^* v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, v\rangle$$

então se $v \in N^*$, segue que $\langle f, v\rangle = 0$.

□

Teorema 4.1.6. *(Terceiro Teorema de Existência de Soluções Fracas)*

(i) Existe um conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}$ finito ou enumerável tal que o problema de valor de bordo

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U, \end{cases} \tag{4.12}$$

tem uma única solução para cada $f \in L^2(U)$ se, e somente se, $\lambda \notin \Sigma$.

(ii) Se Σ é infinito, então $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, os valores são uma sequência não decrescente com

$$\lambda_k \to +\infty.$$

Demonstração. Seja γ a constante do Teorema 4.1.2 e tome $\lambda > -\gamma$, podemos considerar sem perda de generalidade $\gamma > 0$. De acordo com a alternativa de Fredholm 4.1.4 o problema (4.12) tem uma única solução fraca para cada $f \in L^2(U)$ se, e somente se, $u \equiv 0$ for a única solução de

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U. \end{cases} . \tag{4.13}$$

Isto ocorre se, e somente se, $u \equiv 0$ for a única solução de

$$\begin{cases} L_\gamma u = Lu + \gamma u = (\lambda + \gamma)u, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U. \end{cases} . \tag{4.14}$$

Sendo assim, temos

$$u = L_\gamma^{-1}((\gamma + \lambda)u) = (\lambda + \gamma)L_\gamma^{-1} u = \frac{(\lambda + \gamma)}{\gamma} Ku,$$

onde $Ku = \gamma L_\gamma^{-1} u$ como na demonstração do Teorema 4.1.5, onde mostramos que $K : L^2(U) \to L^2(U)$ é um operador linear compacto e limitado. Assim, se $u \equiv 0$ é a única solução de

$$Ku = \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} u,$$

temos que $\frac{\gamma}{\lambda+\gamma}$ não é autovalor de K. Logo a EDP (4.12) tem uma única solução se e somente se $\frac{\gamma}{\lambda+\gamma}$ não é autovalor de K. Como K é compacto, o conjunto de seus autovalores são finitos ou é uma sequência que converge para 0. Se o segundo caso ocorre temos que

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda_m} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_m \to \infty,$$

onde Σ é o conjunto de λ_m. □

Definição 4.1.6. Σ é chamado de espectro real do operador L, note que em particular que o problema de valor de bordo

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U. \end{cases} \tag{4.15}$$

tem solução não trivial $w \neq 0$ se, e somente se, $\lambda \in \Sigma$. Neste caso λ é chamado de autovalor de L e w uma autofunção correspondente.

Para prosseguimos com o nosso estudo faremos algumas definições e daremos alguns resultados.

Definição 4.1.7. Seja $u \in U$, denotaremos o dual de U por U^*. Além disso, para $u^* \in U^*$ escreveremos

$$\langle u^*, u \rangle,$$

no lugar de $u^*(u)$. E definimos

$$\|u^*\| := \sup\{\langle u^*, u\rangle : \|u\| \leq 1\}.$$

Definição 4.1.8. *(Espaço Reflexivo)* Dizemos que um espaço de Banach U é reflexivo se $(U^*)^* = U$. Ou seja, se para cada $u^{**} \in (U^*)^*$, existe $u^* \in u$ tal que

$$\langle u^{**}, u^* \rangle = \langle u^*, u \rangle,$$

para todo $u^* \in U^*$.

Definição 4.1.9. *(Convergência Fraca)* Seja U um espaço de Banach. Dada uma sequência $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset U$, dizemos que a sequência converge fracamente para $u \in U$ e denotamos por

$$u_m \rightharpoonup u,$$

se $\langle u^*, u_m \rangle \to \langle u^*, u \rangle$ para todo funcional linear limitado $u^* \in U^*$.

Teorema 4.1.7. *Sejam U espaço de Banach reflexivo e $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset U$ uma sequência limitada. Então existem uma subsequência $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$ e $u \in U$ tal que*

$$u_{m_j} \rightharpoonup u.$$

Teorema 4.1.8. *(Limite do Inverso) Se $\lambda \notin \Sigma$, então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq c\|f\|_{L^2(U)},$$

sempre que $f \in L^2(U)$ e $u \in H_0^1(U)$ é a única solução de

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U. \end{cases} \tag{4.16}$$

e a constante c depende somente de λ, U e os coeficientes de L.

Demonstração. Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe uma sequência $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset L^2(U)$ e $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset H_0^1(U)$ tal que u_m é a única solução fraca de

$$\begin{cases} Lu_m = \lambda u_m + f_m, & \text{em } U \\ u_m = 0, & \text{em } \partial U \end{cases} \tag{4.17}$$

e

$$\|u_m\|_{L^2(U)} > m\|f_m\|_{L^2(U)},$$

para $k = 1, 2, \ldots$. Podemos supor que $\|u_m\|_{L^2(U)} = 1$, e vemos que $f_m \to 0$. Além disso, pelo Teorema (4.1.2), temos que

$$\beta\|u_m\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u_m, u_m] + \gamma\|u_m\|^2_{L^2(U)} = B_\lambda[u_m, u_m] + \lambda(u_m, u_m)_{L^2(U)} + \gamma = B_\lambda[u_m, u_m] + \lambda + \gamma$$

pois $\|u_m\|_{L^2(U)} = 1$ e $B_\lambda[u_m, u_m] = B[u_m, u_m] - \lambda(u_m, u_m)_{L^2(U)}$. Como u_m é solução do problema 4.17, segue que

$$|B_\lambda[u_m, u_m]| = |\langle f_m, u_m \rangle_{L^2(U)}| \leq \|f_m\|_{L^2(U)} \cdot \|u_m\|_{L^2(U)},$$

mas $f_m \to 0$, então

$$\beta\|u_m\|^2_{H_0^1(U)} \leq \lambda + \gamma.$$

Logo a sequência $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada e pelo Teorema 4.1.7 possui subsequência convergente $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ e $u \in H_0^1(U)$ tal que $u_{m_j} \rightharpoonup u$. Note que $H_0^1(U)$ é Hilbert, logo é reflexivo. Além disso, como $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ é limitada em $H_0^1(U)$, pelo Teorema 3.3.4, temos que existem $\{u_{m_{j_k}}\}_{k=1}^\infty \subset L^2(U)$ e $\tilde{u} \in L^2(U)$ tal que

$$u_{m_{j_k}} \to \tilde{u}.$$

Assim, temos que $u = \tilde{u}$ e

$$\begin{cases} u_{m_i} \rightharpoonup u, & \text{fracamente em } H_0^1(U) \\ u_{m_i} \to u, & \text{em } L^2(U). \end{cases}$$

Logo, u é solução de

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \text{em } U \\ u = 0, & \text{em } \partial U, \end{cases}$$

pois $\lambda \notin \Sigma$. Então $u \equiv 0$ é solução do problema, o que é uma contradição visto que $\|u\|_{L^2(U)} = 1$. □

4.2 Equações Parabólicas

Nesta seção direcionaremos a nossa atenção para equações parabólicas que é um tipo de equação diferencial parcial que envolve o tempo. As EDPs parabólicas de segunda ordem, como veremos, são generalizações naturais da equação do calor. Estudaremos nessa seção a existência e unicidade de soluções fracas para essas equações.

Antes de iniciarmos o nosso estudo sobre as equações parabólicas é necessário fazer algumas adaptações dos espaços de Sobolev e normas, envolvendo a variável de tempo. Vamos considerar X um espaço de Banach real de norma $\|.\|$.

Definição 4.2.1. O espaço
$$L^p(0,T,X)$$
é o espaço das funções mensuráveis $u:[0,T]\to X$, tais que

-
$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$
para $1 \leq p < \infty$.

-
$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} := ess \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Definição 4.2.2. O espaço
$$C([0,T];X)$$
é o espaço de todas as funções $u:[0,T]\to X$, tais que
$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Definição 4.2.3. *(Derivada fraca)* Seja $u \in L^1(0,T,X)$, dizemos que $v \in L^1(0,T,X)$ é derivada fraca de u se
$$\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = -\int_0^t \phi(t)v(t)dt,$$
para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(0,T)$. Escrevemos
$$u' = v.$$

Definição 4.2.4. *(Espaço de Sobolev)* O espaço de Sobolev
$$W^{1,p}(0,T,X)$$
é o espaço das funções $u \in L^p(0,T,X)$ tais que u' existe no sentido fraco e $u' \in L^p(0,T,X)$. Definimos
$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T,X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{0\leq t\leq T} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|), & \text{se } p = \infty \end{cases}.$$

Observação 4.2.1. Escrevemos $H^1(0,T,X) = W^{1,2}(0,T,X)$.

Teorema 4.2.1. *Seja $u \in W^{1,p}(0,T,X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então*

(i)
$$u \in C([0,T];X)$$
q.t.p.;

(ii)
$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau$$
para todo $0 \leq s \leq t \leq T$;

(iii)
$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)\| \le C\|u\|_{W^{1,p}(0,T,X)},$$

onde a constante C depende apenas de T.

Demonstração. Estendendo a função u para $\mathbb{R}$, como $u(t) = 0$ para $(-\infty, 0) \cup (T, \infty)$, e considerando $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, onde η_ε é a função padrão aproximação da identidade que definimos em (1.9). Assim $(u^\varepsilon)' = \eta_\varepsilon * u'$ pelo Teorema A.2.1 se $\varepsilon \to 0$, então

$$\begin{cases} u^\varepsilon \to u & \text{em} \quad L^p(0,T,X) \\ (u^\varepsilon)' \to u' & \text{em} \quad L^p(0,T,X) \end{cases}.$$

Fixando s, com $0 < s < t < T$, segue que

$$u^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(s) + \int_s^t (u^\varepsilon)'(\tau)d\tau$$

e assim

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau,$$

note que essa igualdade prova as afirmações acima. $\square$

Teorema 4.2.2. *Seja $u \in L^2(0,T,H_0^1(U))$ com $u' \in L^2(0,T,H^{-1}(U))$, então*

(i) $u \in C([0,T]; L^2(U))$ *q.t.p.;*

(ii) A função
$$t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(U)}$$
é absolutamente contínua, com
$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$
q.t.p. com $0 \le t \le T$;

(iii)
$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{L^2(U)} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T,H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T,H^{-1}(U))}\right),$$
onde a constante C depende apenas de T.

Demonstração. Considere $\mu > 0$ e estenda a função u, como 0 para o intervalo $[-\mu, T+\mu]$ e defina $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, onde η_ε é a função padrão aproximação da identidade, como fizemos na demonstração anterior. Assim, para $\varepsilon, \delta > 0$, segue que

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\langle u^{\varepsilon\prime}(t) - u^{\delta\prime}(t), u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\rangle,$$

e então

$$\|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|^2_{L^2(U)} = \|u^\varepsilon(s) - u^\delta(s)\|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau) - u^{\delta\prime}(\tau), u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\rangle d\tau$$

para todo $0 \le s \le t \le T$. Fixando s temos que

$$u^\varepsilon(s) \to u(s) \quad \text{em} \quad L^2(U).$$

Logo,

$$\limsup_{\varepsilon,\delta\to 0}\ \sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|^2_{L^2(U)} \le \lim_{\varepsilon,\delta\to 0}\int_0^T \|u^{\varepsilon\prime}(\tau) - u^{\delta\prime}(\tau)\|^2_{H^{-1}(U)} + \|u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\|^2_{H_0^1(U)} d\tau = 0.$$

Então, as funções suaves $\{u^\varepsilon\}_{0\le\varepsilon\le 1}$ convergem em $C([0,1], L^2(U))$ para algum $v \in C([0,1], L^2(U))$, mas sabemos que $u^\varepsilon \to u$ q.t.p., então $u = v$ q.t.p., que prova (i). Obtemos também que

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(U)} = \|u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau), u^\varepsilon(\tau)\rangle d\tau$$

e assim

$$\|u(t)\|^2_{L^2(U)} = \|u(s)\|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau$$

para todo $0 \leq s \leq t \leq T$, o que prova (ii). Para provar (iii), temos que

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C\int_0^T \|u'(t)\|^2_{H^{-1}(U)} + \|u(t)\|^2_{H^1_0(U)} d\tau$$

portanto

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(0,T,H^1_0(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T,H^{-1}(U))}\right).$$

□

Antes de definirmos uma equação parabólica, vamos enunciar um teorema que será útil para demonstrações que veremos adiante.

Teorema 4.2.3. *(Desigualdade de Gronwall) Seja $\eta(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua e não negativa.*

(i) Se $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$, com $\phi(t)$ e $\psi(t)$ funções somáveis não negativas em $[0,T]$, então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

(ii) Em particular, se $\eta' \leq \phi\eta$ em $[0,T]$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0 \quad em \quad [0,T].$$

Observação 4.2.2. A demonstração pode ser encontrado no apêndice C do livro [6].

4.2.1 Equações Parabólicas

Definição 4.2.5. *(Equação Parabólica)* Suponha $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e defina $U_T = U \times (0,T]$ para algum $T > 0$ fixado. Agora, considere o problema com valor de bordo

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & \text{em } U_T \\ u = 0, & \text{em } \partial U \times (0,T] \\ u = g, & \text{em } \partial U \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{4.18}$$

onde, $f : U_T \to \mathbb{R}$ e $g : U \to \mathbb{R}$ são funções dadas, a solução é dada por $u : \overline{U_T} \to \mathbb{R}$, com $u = u(x,t)$ e L denota para cada tempo t um operador diferencial parcial de segunda ordem.

Operador L

O operador L é dado por:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \tag{4.19}$$

para funções coeficientes a^{ij}, b^i, c dadas, com $(i,j = 1,2,\ldots,n)$.

Definição 4.2.6. *(Uniformemente Parabólico)* Dizemos que o operador diferencial parcial $\frac{\partial}{\partial t} + L$ é uniformemente parabólico se existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \tag{4.20}$$

para todo $(x,t) \in U_T$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observação 4.2.3. Para cada tempo fixado $0 \leq t \leq T$ o operador L é um operador uniformemente elíptico.

4.2.2 Soluções Fracas

Seguindo a ideia anterior para equações elípticas, vamos considerar as funções $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T)$ com $i,j = 1,\dots,n$ e $f \in L^2(U_T)$.

Definição 4.2.7. (*Solução Fraca*)

(i) A forma bilinear $B[.,.;.]$ dependendo do tempo associada ao operador parabólico L na forma divergente, por analogia, é dada por

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uvdx, \tag{4.21}$$

para $u, v \in H_0^1(U)$ e $0 \le t \le T$ em quase todo ponto.

(ii) $u \in L^2(0,T,H_0^1(U))$ com $u' \in L^2(0,T,H^{-1}(U))$, é uma solução fraca do problema (4.18) se

$$\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)_{L^2(U)} \tag{4.22}$$

para todo $v \in H_0^1(U)$ para quase todo tempo $0 \le t \le T$ e $u(0) = g$.

4.2.3 Aproximação de Galerkin

Agora, vamos construir uma solução para o problema parabólico 4.18, a ideia inicial é considerar o caso finito e depois calcular o limite, chamamos de método de Galerkin.

Para isso, vamos assumir as funções suaves $w_k = w_k(x)$ com $k = 1, 2, \dots$, onde

- $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ é uma base ortogonal em $H_0^1(U)$;
- $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ é uma base ortonormal em $L^2(U)$.

Fixando um inteiro m, vamos procurar uma função

$$u_m : [0,T] \to H_0^1(U), \quad u_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t)w_k,$$

onde os coeficientes $d_m^k(0) = (g, w_k)$, com $k = 1, 2, \dots, m$ e (g, w_k) é o produto interno de $L^2(U)$.

$$(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k),$$

com $0 \le t \le T$ e $k = 1, 2, \dots, m$.

Assim, buscamos por uma função u_m que satisfaça a equação acima e seja um tipo de projeção no subespaço de dimensão finita gerado por $\{w_k\}_{k=1}^\infty$.

Teorema 4.2.4. *(Construção de soluções aproximadas) Para cada inteiro $m = 1, 2, \dots,$ existe uma única função u_m da forma*

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t)w_k$$

satisfazendo $d_m^k(0) = (g, w_k)$ e $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$.

Demonstração. Suponha que

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t)w_k.$$

Como $\{w_k\}$ é uma base ortonormal de $L^2(U)$, temos que

$$(u_m'(t), w_k) = \left(\sum_{k=1}^m d_m^k(t)' w_k, w_k\right) = \sum_{k=1}^m {d_m^k}'(t)\,(w_k, w_k) = {d_m^k}'(t).$$

Além disso,

$$B[u_m, w_k; t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(.,t)(u_m)_{x_i}(w_k)_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(.,t)(u_m)_{x_i}w_k + c(.,t)u_m w_k dx.$$

Assim, $B[u_m, w_k; t]$ é igual a

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(.,t) \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)(w_l)_{x_i}(w_k)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(.,t) \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)(w_l)_{x_i} w_k + c(.,t) \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) w_l w_k dx.$$

Então

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(.,t)(w_l)_{x_i}(w_k)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(.,t)(w_l)_{x_i} w_k + c(.,t) w_l w_k dx.$$

Logo

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) B[w_l, w_k; t].$$

Tomando $e^{kl} = B[w_l, w_k; t]$ e escrevendo $f^k(t) = (f(t), w_k)$, temos que

$$(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k) \quad \Rightarrow \quad {d_m^k}'(t) + \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) e^{kl} = f^k(t)$$

sujeito a condições iniciais a equação acima se torna um sistema linear de EDOs, sendo assim, de acordo com a teoria de EDO existe uma única função absolutamente contínua $d_m(t) = (d_m^1(t), d_m^2(t), \ldots, d_m^M(t))$ satisfazendo a equação acima e a condição inicial $d_m^k(0) = (g, w_k)$ q.t.p. para $0 \leq t \leq T$. Portanto u_m existe e é única. $\square$

Nos próximos teoremas vamos fazer $M \to \infty$ e mostrar que uma subsequência das soluções u_m dos problemas acima converge para uma solução fraca de (4.18), para isso precisaremos de estimativas uniformes.

Teorema 4.2.5. *(Estimativas de Energia) Existe uma constante C, dependendo somente de U, T e dos coeficientes de L, tal que*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{L^2(0,T,H_0^1(U))} + \|{u_m}'\|_{L^2(0,T,H^{-1}(U))} \leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T,L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}\right)$$

com $m = 1, 2, \ldots$.

Demonstração. Multiplicando a equação

$$(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$$

por $d_m^k(t)$ para $k = 1, \ldots, m$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)(u_m', w_k) + \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) B[u_m, w_k; t] = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)(f, w_k),$$

e assim

$$\left(u_m', \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k\right) + B\left[u_m, \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k; t\right] = \left(f, \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k\right).$$

Como $u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$, segue que

$$(u_m', u_m) + B[u_m, u_m; t] = (f, u_m)$$

q.t.p em $0 \leq t \leq T$. Provamos no Teorema 4.1.2 que existem constantes $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que

$$\beta \|u_m\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u_m, u_m; t] + \gamma \|u_m\|_{L^2(U)}^2$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e $m = 1, 2, \ldots$. Além disso, $|(f, u_m)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_{L^2(U)}^2$ e

$$({u_m}', u_m) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_m\|_{L^2(U)}^2\right)$$

q.t.p. em $0 \leq t \leq T$. Pelas informações acima, da igualdade $({u_m}', u_m) + B[u_m, u_m; t] = (f, u_m)$, obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_m\|^2_{L^2(U)}\right) + \beta\|u_m\|^2_{H^1_0(U)} \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{L^2(U)} + \gamma\|u_m\|^2_{L^2(U)}.$$

E assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_m\|^2_{L^2(U)}\right) + 2\beta\|u_m\|^2_{H^1_0(U)} \leq c_1\|u_m\|^2_{L^2(U)} + c_2\|f\|^2_{L^2(U)}$$

q.t.p. em $0 \leq t \leq T$, com c_1 e c_2 constantes apropriadas. Tomando

$$\begin{cases} \eta(t) = \|u_m(t)\|^2_{L^2(U)} \\ \xi(t) = \|f(t)\|^2_{L^2(U)}, \end{cases}$$

temos que

$$\eta'(t) \leq c_1\eta(t) + c_2\xi(t)$$

q.t.p. em $0 \leq t \leq T$, essa forma diferencial da Desigualdade de Gronwall's 4.2.3 produz a estimativa

$$\eta(t) \leq e^{c_1 t}\left(\eta(0) + c_2\int_0^t \xi(s)ds\right).$$

Como $\eta(0) = \|u_m(0)\|^2_{L^2(U)} \leq \|g\|^2_{L^2(U)}$, segue que

$$\max_{0\leq t\leq T}\|u_m(t)\|^2_{L^2(U)} \leq c_3\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{L^2(0,T,L^2(U))}\right).$$

Assim, obtemos que

$$\|u_m\|^2_{L^2(0,T,L^2(U))} = \int_0^T \|u_m\|^2_{L^2(U)}dt \leq c_3\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{L^2(0,T,L^2(U))}\right).$$

Agora, considere $v \in H^1_0(U)$ com $\|v\|_{H^1_0(U)} \leq 1$ e $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in span\{w_k\}_{k=0}^m$ e $(v_2, w_k) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, m$. Como as funções $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ são ortogonais em H^1_0 e

$$\|v_1\|_{H^1_0(U)} \leq \|v\|_{H^1_0(U)} \leq 1$$

da igualdade $(u'_m, w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$, temos que

$$(u'_m, v_1) + B[u_m, v_1; t] = (f, v_1)$$

e assim

$$\langle u'_m, v\rangle = (u'_m, v) = (u'_m, v_1 + v_2) = (u'_m, v_1) + (u'_m, v_2) = (u'_m, v_1) = (f, v_1) - B[u_m, v_1; t],$$

pois $(u'_m, v_2) = 0$. Utilizando que $\|v\|_{H^1_0(U)} \leq 1$ e que $|B[u_m, v_1; t]| \leq \alpha\|u_m\|_{H^1_0(U)}\|v_1\|_{H^1_0(U)}$, segue que

$$|\langle u'_m, v\rangle| \leq |(f, v_1)| + |B[u_m, v_1; t]| \leq c_4\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{H^1_0(U)}\right).$$

E então

$$\|u'_m\|_{H^{-1}(U)} \leq |(f, v_1)| + |B[u_m, v_1; t]| \leq c_4\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{H^1_0(U)}\right)$$

logo,

$$\|u'_m\|_{L^2(0,T,H^{-1}(U))} = \int_0^T \|u'_m\|_{H^{-1}(U)}dt \leq c_4\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{H^1_0(U)}\right).$$

Portanto,

$$\max_{0\leq t\leq T}\|u_m(t)\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{L^2(0,T,H^1_0(U))} + \|{u_m}'\|_{L^2(0,T,H^{-1}(U))} \leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T,L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}\right).$$

□

Teorema 4.2.6. *(Existência de soluções fracas) Existe uma solução fraca de*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & \text{em } U_T \\ u = 0, & \text{em } \partial U \times (0, T] \\ u = g, & \text{em } \partial U \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{4.23}$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.5 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $L^2(0,T,H_0^1(U))$ e $\{u'_m\}_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $L^2(0,T,H^{-1}(U))$ então existem uma subsequência $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ e funções $u \in L^2(0,T,H_0^1(U))$ e $u' \in L^2(0,T,H^{-1}(U))$ tais que

$$\begin{cases} u_{m_l} \rightharpoonup u & \text{fracamente em} \quad L^2(0,T,H_0^1(U)) \\ u'_{m_l} \rightharpoonup u' & \text{fracamente em} \quad L^2(0,T,H^{-1}(U)). \end{cases}$$

Agora, fixe um inteiro positivo N e escolha uma função $v \in C^1\big([0,1];H_0^1(U)\big)$ com a forma

$$v(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k,$$

onde $\{d^k\}_{k=1}^{N}$ são funções suaves dadas. Utilizando que $(u'_m, w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$ para $m \geq N$ e multiplicando a igualdade pela soma de $d^k(t)$ com $k = 1, \ldots, N$, temos que

$$\sum_{k=1}^{N} d^k(u'_m, w_k) + \sum_{k=1}^{N} d^k B[u_m, w_k; t] = \sum_{k=1}^{N} d^k(f, w_k).$$

Assim, encontramos

$$\langle u'_m, v\rangle + B[u_m, v; t] = (f, v).$$

Passando a integral com respeito a t, obtemos

$$\int_0^T \langle u'_m, v\rangle + B[u_m, v; t]dt = \int_0^T (f, v)dt.$$

Considerando a igualdade acima com a subsequência $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ e passando o limite fracamente, temos que

$$\int_0^T \langle u', v\rangle + B[u, v; t]dt = \int_0^T (f, v)dt.$$

Note que essa igualdade vale para todas as funções $v \in L^2(0,T,H_0^1(U))$, pois as funções da forma $\sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k$ são densas nesse espaço. Em particular, $\langle u', v\rangle + B[u, v; t] = (f, v)$ para todo $v \in H_0^1(U)$ e $0 \leq t \leq T$ q.t.p. pelo Teorema (4.2.2) vemos que $u \in C([0,T];L^2(U))$.

Agora, basta provar que $u(0) = g$, como vimos

$$\int_0^T \langle u', v\rangle + B[u, v; t]dt = \int_0^T (f, v)dt,$$

e assim

$$\int_0^T -\langle v', u\rangle + B[u, v; t]dt = \int_0^T (f, v)dt + (u(0), v(0))$$

para cada $v \in C^1([0,T], H_0^1(U))$ com $v(T) = 0$. Similarmente, da igualdade

$$\int_0^T -\langle v', u_m\rangle + B[u_m, v; t]dt = \int_0^T (f, v)dt + (u_m(0), v(0)),$$

utilizando a subsequência e passando o limite fracamente, obtemos

$$\int_0^T -\langle v', u\rangle + B[u, v; t]dt = \int_0^T (f, v)dt + (g, v(0)),$$

pois $u_{m_l}(0) \rightharpoonup g$ em $L^2(U)$. Como v é qualquer, comparando as igualdades concluímos que $u(0) = g$. □

Teorema 4.2.7. *(Unicidade de soluções fracas) Uma solução fraca de*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & \text{em } U_T \\ u = 0, & \text{em } \partial U \times (0,T] \\ u = g, & \text{em } \partial U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{4.24}$$

é única.

Demonstração. Note que é suficiente provar o caso em que $f = g \equiv 0$ e a solução única é $u \equiv 0$. Para provar essa afirmação, observe que ao definir $u = v$ para

$$\langle u', v\rangle + B[u, v; t] = (f, v),$$

temos que

$$\langle u', u\rangle + B[u, u; t] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(U)}\right) + B[u, u; t] = 0 = (f, u),$$

pois $f \equiv 0$, pelo Teorema (4.1.2), temos que

$$B[u, u; t] \geq \beta\|u\|^2_{H^1_0(U)} - \gamma\|u\|^2_{L^2(U)} \geq -\gamma\|u\|^2_{L^2(U)}$$

e assim

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(U)}\right) = -B[u, u; t] \leq \gamma\|u\|^2_{L^2(U)}$$

pela Desigualdade de Gronwall 4.2.3, segue que

$$\|u\|^2_{L^2(U)} = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

□

Apêndice A

Resultados

Nesse anexo estão mencionados algumas definições e resultados importantes que foram utilizados durante o texto de uma forma breve, em que percebemos a necessidade de enunciá-los com mais detalhes ou rigor. Esses resultados podem ser encontrados nos livros [3], [6] e [10]

A.1 Definições

Definição A.1.1. *(Convolução)* Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}$ com $U \subset \mathbb{R}^n$, localmente integráveis, então definimos a convolução de f e g como

$$h(x) = f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Definição A.1.2. *(Função padrão aproximação da identidade)* Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde a constante $C > 0$ é escolhida de forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$, chamamos η de função padrão aproximação da identidade. Se para cada $\epsilon > 0$ definimos

$$\eta_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \tag{A.2}$$

temos que as funções $\eta_\epsilon \in C^\infty$ e satisfazem $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)dx = 1$ (supp $\eta \subset B(0,1) \Rightarrow$ supp $\eta_\epsilon \subset B(0,\epsilon)$).

A.2 Teoremas

Teorema A.2.1. *(Propriedades da função padrão aproximação da identidade) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $U_\epsilon := \{x \in U : dist(x, \partial U) > \epsilon\}$. Considere $u : U \to \mathbb{R}$ e $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$, então*

(i) $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.

(ii) $u^\epsilon \to u$ *q.t.p, se* $\epsilon \to 0$.

(iii) Se $u \in C(U)$, então $u^\epsilon \to u$ uniformemente em subconjuntos compactos de U.

(iv) Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in L^p_{loc}(U)$, então $u^\epsilon \to u$ em $L^p_{loc}(U)$.

Teorema A.2.2. *(Teorema de Gauss-Green) Seja $u \in C^1(\overline{U})$, então*

$$\int_U u_{x_i}dx = \int_{\partial U} u\nu^i dS, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{A.3}$$

onde ν denota o vetor normal unitário interior a U.

Teorema A.2.3. *(Integração por partes) Sejam $u, v \in C^1(\overline{U})$, então*

$$\int_U u_{x_i}vdx = -\int_U uv_{x_i}dx + \int_{\partial U} uv\nu^i dS, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{A.4}$$

Teorema A.2.4. *(Fórmulas de Green) Sejam $u, v \in C^2(\overline{U})$, então*

(i)

$$\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \tag{A.5}$$

(ii)

$$\int_U DuDv dx = -\int_U u\Delta v dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS. \tag{A.6}$$

(iii)

$$\int_U u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \tag{A.7}$$

Teorema A.2.5. *(Teorema da Convergência Dominada) Sejam as funções $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}$ mensuráveis tais que $f_n \to f$ q.t.p.. Se existe uma função integrável $g : \Omega \to [0, +\infty]$ tal que $g \geq |f_n|$, então f_n e f são integráveis e vale que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu(x) = \int_\Omega f d\mu(x). \tag{A.8}$$

Teorema A.2.6. *(Teorema da Derivação Dominada) Seja J um intervalo de $\mathbb{R}$ e seja $F : \Omega \times J \to \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}$ função tal que:*

(i) Para todo $y \in J$ fixado, a função $x \mapsto F(x, y)$, definida em Ω, é integrável relativamente a μ;

(ii) Em todo ponto de $\Omega \times J$ existe a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$;

(iii) Existe uma função integrável $g : \Omega \to [0, +\infty]$ tal que

$$g(x) \geq \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right|.$$

Então, a função $y \mapsto \int_\Omega F(x, y)d\mu(x)$ é diferenciável, para cada $y \in J$ fixado a função $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, definida em Ω é integrável relativamente a μ e vale que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_\Omega F(x, y)d\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)d\mu(x). \tag{A.9}$$

Teorema A.2.7. *(Teorema de Representação de Riesz) Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ um funcional linear contínuo, então existe um único $h \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, h\rangle_H, \quad \forall x \in H.$$

Além disso, $\|f\| = \|h\|$.

Teorema A.2.8. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos que*

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q.$$

Bibliografia

[1] Adams, Robert A.; Fournier, John JF. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.

[2] Bartle, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.

[3] Botelho, Geraldo; Pellegrino, Daniel; Teixeira, Eduardo. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2012.

[4] Doering, Claus I.; Lopes, Artur O. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA, 2008.

[5] Dym, Harry; Mckean JR, Henry P. *Fourier series and integrals*, 1972.

[6] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. Vol. 19. American Mathematical Soc., 2010.

[7] Iório JR, Rafael J.; Iório, Valéria M. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introduçao*. Projeto Euclides, IMPA/CNPQ, 2010.

[8] Iório, Valéria M. *EDP, Um curso de graduação*. IMPA, 2016.

[9] Isnard, Carlos. *Introdução à medida e integração*. IMPA, 2013.

[10] Lima, Elon L. *Curso de análise*. vol. 2, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[11] Reiter, M.; Schuster, A. *Fourier Transform & Sobolev Spaces*. Summer Term. 2008.