

Diego Santos de Jesus

**Determinando o acoplamento gravitacional de  
ondas gravitacionais à matéria utilizando  
pulsares binários**

Vitória

2022

Diego Santos de Jesus

**Determinando o acoplamento gravitacional de ondas gravitacionais à matéria utilizando pulsares binários**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr.Hermano Endlich Schneider Velten

Vitória

2022

Diego Santos de Jesus

## **Determinando o acoplamento gravitacional de ondas gravitacionais à matéria utilizando pulsares binários**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Vitória, 10 de agosto de 2022:

---

**Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider**  
**Velten**  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Orientador

---

**Prof. Dr. Jaziel Goulart Coelho**  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Membro Interno

---

**Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella**  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Membro Interno

---

**Prof. Dr. André Herkenhoff Gomes**  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Membro Externo

---

**Prof. Dr. Nelson de Oliveira Yokomizo**  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Membro Externo

Vitória  
2022

*A minha mãe, pois com seus esforços e experiência na ciência chamada vida e sem nenhum conhecimento científico me trouxe aqui.*

# Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus que esteve comigo ao longo de todo este percurso e tornou possível a realização do meu sonho.

Quero agradecer à CAPES pelo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Hermano Endlich Schneider Velten, pela paciência e acima de tudo, pelo incentivo.

Aos professores agradeço por toda orientação e disponibilidade, pois sem eles não teria superado esta etapa.

Um dos agradecimentos mais especiais é dedicado à minha mãe, que me acompanha desde que vim ao mundo, me apoia e sempre acreditou em mim.

Agradeço à minha família, que sempre me incentivou e garantiu que eu não desistisse nunca, em especial a minha tia Eliane.

Aos meus amigos pelo apoio, ajuda e sugestões durante este trabalho, o meu agradecimento fica aqui.

A todas as pessoas que interferiram nesta minha grande viagem eu agradeço, porque de alguma forma influenciaram meu percurso.

*“Todas as vitórias ocultam uma abdicação.”*  
*(Simone de Beauvoir)*

# Resumo

A detecção direta de ondas gravitacionais permitiu que o universo pudesse ser observado sob outra perspectiva e mais uma vez a Relatividade Geral foi testada e aprovada. Neste trabalho revisitamos o setor de ondas gravitacionais, onde derivamos a equação do decaimento do período orbital para sistemas binários que ocorre devido à emissão de ondas gravitacionais e a partir de uma teoria genérica de gravidade modificada ([JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016](#)), surge uma nova constante de acoplamento gravitacional à matéria que tem origem no setor radiativo gravitacional. Em seguida, utilizando os parâmetros orbitais mais precisos de pulsares binários, o do Pulsar Duplo, inferimos um intervalo de valores para essa nova constante  $G_{\text{gw}}$  e determinamos que o acoplamento gravitacional de ondas gravitacionais à matéria pode diferir em um nível de  $10^{-4}$  do acoplamento gravitacional habitual. Trata-se do melhor vínculo já obtido para esta quantidade.

**Palavras-chave:** pulsar binário, ondas gravitacionais, gravitação

# Abstract

The direct detection of gravitational waves allowed the universe to be observed from another perspective and once again General Relativity has been tested and has passed this test. In this work we revisit the gravitational wave sector, where we derive the equation for the decay of the orbital period in binary systems that occurs due to the emission of gravitational waves in the context of a generic modified theory of gravity ([JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016](#)), in which a new constant of gravitational coupling to matter that originates in the gravitational radiative sector appears. Then, using the most precise orbital parameters of binary pulsars, the Double Pulsar, we infer a range of values for this new constant  $G_{\text{gw}}$  and determine that the gravitational coupling of gravitational waves to matter can differ only at a level of  $10^{-4}$  in comparison to the usual gravitational coupling. This is the best constraint obtained for this quantity.

**Keywords:** binary pulsar, gravitational waves, gravitation



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de um sistema em um referencial não inercial acelerado com um pulso de luz se propagando em uma direção perpendicular a aceleração. . . . .	16
Figura 2 – Esquema para o cálculo da curvatura da luz. . . . .	16
Figura 3 – Efeito de uma onda gravitacional com polarização <i>plus</i> em um conjunto de partículas distribuídas de forma circular. . . . .	37
Figura 4 – Efeito de uma onda gravitacional com polarização <i>cross</i> em um conjunto de partículas distribuídas de forma circular. . . . .	37
Figura 5 – Perturbações no campo gravitacional em $(t, x^i)$ são calculadas em termos de eventos no cone de luz passado. . . . .	39
Figura 6 – Massa de algumas estrelas de nêutrons em $M_{\odot}$ . . . . .	49
Figura 7 – Esquema simplificado de um pulsar. . . . .	50
Figura 8 – Diagrama de processo de cronometragem de pulsares. . . . .	51
Figura 9 – Decaimento do período orbital causado pela perda de energia por radiação gravitacional. A parábola representa o deslocamento esperado do tempo do periastro em relação a uma órbita imutável, de acordo com a relatividade geral. . . . .	64
Figura 10 – Diagrama massa - massa para o Pulsar Duplo. . . . .	66
Figura 11 – Aparato de Cavendish. . . . .	73
Figura 12 – Representação do Pulsar Duplo. . . . .	76
Figura 13 – Deslocamento cumulativo dos tempos de passagem do periastro em relação a um modelo não dissipativo. . . . .	77
Figura 14 – Diagrama de massa - massa para o Pulsar Duplo . . . . .	78
Figura 15 – Região de encontro das massas no diagrama de massa - massa para o Pulsar Duplo, baseado nos parâmetros pós-keplerianos: $\dot{\omega}$ (preto), $\dot{P}_b$ (azul), $\gamma$ (vermelho) e $s$ (verde). . . . .	79
Figura 16 – Variação permitida de $\dot{P}_b$ (azul pontilhado) para determinar $G_{\text{gw}}/G_N$ . A região em azul são os valores de $\dot{P}_b$ , onde temos que $G_{\text{gw}} = G_N$ , as áreas quadriculadas são os limites máximo e mínimo para a relação estudada, onde próximo a área azul, temos que o limite mínimo permitido é tal que $G_{\text{gw}} = 0,99975G_N$ e para o limite máximo, um pouco mais afastado da área azul, este limite é de $G_{\text{gw}} = 1,00007G_N$ . . . . .	80
Figura 17 – Diagrama de Massa-Massa para o pulsar PSR B1534+12 . . . . .	82
Figura 18 – Diagrama de Massa-Massa para o pulsar PSR J1141-6545 . . . . .	83
Figura 19 – Variação permitida de $\dot{P}_b$ (azul pontilhado) de $G_{\text{gw}}/G_N$ , para Pulsar de Hulse-Taylor (esquerda) e para o Pulsar Duplo (direita). . . . .	84

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Alguns efeitos relativísticos medidos e razão entre o observado e predito pela Relatividade Geral. . . . .	76
Tabela 2 – Parâmetros Orbitais para PSR J0737 3039 AB . . . . .	78
Tabela 3 – Parâmetros Orbitais para PSR B1534+12 . . . . .	81
Tabela 4 – Parâmetros Orbitais para PSR J1141-6545 . . . . .	82

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>14</b>
2.1	Princípio da equivalência	14
2.2	Equações de campo de Einstein	17
2.2.1	Gravitação newtoniana	17
2.2.2	Limite Newtoniano	20
2.2.3	Gravitação de Einstein	21
<b>3</b>	<b>ONDAS GRAVITACIONAIS</b>	<b>26</b>
3.1	Gravidade linearizada	26
3.2	Norma transversa e de traço nulo	29
3.3	Estados de polarização	33
3.4	Produção de ondas gravitacionais	37
3.5	Energia transportada por ondas gravitacionais	41
<b>4</b>	<b>PULSAR BINÁRIO</b>	<b>48</b>
4.1	Estrela de nêutrons	48
4.2	Pulsar binário	49
4.3	Cronometrando pulsares	50
4.4	Parâmetros pós-keplerianos	52
4.4.1	Atraso de Einstein	53
4.4.2	Taxa de avanço do periastro	56
4.4.3	Atraso de Shapiro	60
4.4.4	Decaimento do período orbital	60
4.5	Testando a gravidade com pulsares binários	64
<b>5</b>	<b>MODIFICANDO O SETOR RADIATIVO DAS TEORIAS GRAVITACIONAIS</b>	<b>68</b>
5.1	Teorias de gravidade modificada	68
5.1.1	Mecanismos de blindagem	69
5.2	Constante $G_{\text{gw}}$	70
5.3	Constante $G_N$	72
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>75</b>
6.1	Pulsar Duplo	75
6.2	Medidas de $G_{\text{gw}}/G_N$ para outros pulsares binários	80

6.2.1	PSR B1534+12 . . . . .	80
6.2.2	PSR J1141-6545 . . . . .	81
<b>6.3</b>	<b>Discussão</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>85</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE A – TENSOR LAMBDA</b> . . . . .	<b>92</b>

# 1 Introdução

A gravidade é a força mais fraca conhecida na natureza e, portanto, não desempenha nenhum papel na determinação das propriedades internas da matéria cotidiana. Por outro lado, através de seu longo alcance e ação universal, controla as trajetórias dos corpos no sistema solar e em outros lugares do universo, as estruturas e evolução das estrelas, galáxias e todo o cosmos.

Na teoria de Einstein, a força que experimentamos como gravidade surge da curvatura do espaço e do tempo na presença de matéria. Essa teoria foi uma profunda revolução conceitual e ofereceu muitas previsões testáveis que foram posteriormente verificadas experimentalmente. Essas previsões variaram de correções precisas à dinâmica orbital no sistema solar, à introdução de novos fenômenos como a curvatura da luz por objetos massivos e a existência de buracos negros e ondas gravitacionais, que são ondulações de curvatura no espaço-tempo que se propagam através do espaço vazio na velocidade da luz. Em particular, evidências muito fortes para ondas gravitacionais foram descobertas em 1981 quando Russel Hulse e Joseph Taylor publicaram sua análise do pulsar binário PSR B1913+16 mostrando que o decaimento de seu período orbital combinava perfeitamente com a previsão devido à perda de energia do sistema emitindo ondas gravitacionais ([TAYLOR; WEISBERG, 1982](#)). Esta foi a primeira detecção indireta deste fenômeno previsto pela Relatividade Geral.

Na virada do século XX, cientistas perceberam que em escalas muito pequenas, no domínio das partículas atômicas e subatômicas, o mundo parecia muito diferente do que esperavam. A teoria da mecânica quântica surgiu dessa percepção e apresentou um novo desafio: as descrições das forças fundamentais da natureza agora tinham que ser adaptadas aos novos *insights* da mecânica quântica, elas precisavam ser quantizadas. O problema é que a Relatividade Geral se recusa obstinadamente a cumprir esse compromisso, o problema de encontrar uma teoria quântica da gravidade é tão desafiador e tão importante que muitos a consideram o Santo Graal da física moderna.

Outro mistério surge quando você olha para o Universo como um todo. Desde 1929 os físicos sabem que o Universo está se expandindo, fato que foi um choque até para Einstein: estrelas e galáxias estão se afastando umas das outras ([HUBBLE, 1929](#)). Quase 70 anos depois, na década de 1990, observações de objetos distantes como Supernovas tipo Ia também mostraram que essa expansão está acelerando. A Relatividade Geral não pode explicar o que causa essa aceleração utilizando apenas partículas do modelo padrão. Há algo mais lá fora, uma misteriosa forma de energia que impulsiona a aceleração. Entende-se que esse fenômeno é um tipo de energia, chamado de energia escura. Para buscar explicações

para estes fenômenos surgem extensões da Relatividade Geral, amplamente denominadas teorias de gravidade modificada.

Pulsares binários se tornaram então, ferramentas para a validação da teoria de Einstein e outras do setor de gravidade modificada, pois a partir de uma técnica chamada *pulsar timing* podemos medir parâmetros destes sistemas e comparar com valores preditos por estas teorias.

Este trabalho será baseado no trabalho de Jiménez, Piazza e Velten, intitulado *Evading the Vainshtein Mechanism with Anomalous Gravitational Wave Speed: Constraints on Modified Gravity from Binary Pulsars* (JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016) de 2016, onde os autores apresentam uma modificação no setor radiativo de uma teoria gravitacional genérica em que a velocidade de propagação das ondas gravitacionais,  $c_T$  e a constante de acoplamento gravitacional,  $G_{\text{gw}}$ , podem ser diferentes dos valores habituais,  $c$ , e  $G_N$ , respectivamente.

Utilizando os parâmetros orbitais do pulsar de Hulse-Taylor, Jiménez, Piazza e Velten concluíram que esta nova velocidade de propagação de ondas gravitacionais poderia ser diferente em um nível de  $10^{-2}$  da velocidade da luz. Para realizar esta análise os autores atribuíram o valor de acoplamento gravitacional das ondas gravitacionais igual ao acoplamento gravitacional newtoniano, ou seja,  $G_{\text{gw}} = G_N$ . Porém, em 2017, a partir de novas observações de ondas gravitacionais (MONITOR et al., 2017), foi inferido que eles se propagam com velocidade igual à da luz.

Com isso, o presente trabalho tem por objetivo determinar um intervalo de valores permitidos para a razão  $G_{\text{gw}}/G_N$ , derivadas de uma modificação do setor radiativo de ondas gravitacionais emitidas por sistemas binários, onde  $G_{\text{gw}}$  é uma constante com as mesmas propriedades de  $G_N$ . No entanto, enquanto a constante newtoniana provém da fórmula das órbitas (o setor potencial da teoria),  $G_{\text{gw}}$  está atrelado à própria emissão de ondas gravitacionais (o setor radiativo da teoria).

Para tal feito, contamos com os melhores dados de parâmetros orbitais de pulsares binários medidos até o momento. Em dezembro de 2021, Michael Kramer e colaboradores publicaram o artigo *Strong-Field Gravity Tests with the Double Pulsar* (KRAMER et al., 2021) com dados do Pulsar Duplo. Este pulsar, em comparação com outros até então estudados, é o melhor para testes gravitacionais e até o momento possui a maior precisão na medição dos seus parâmetros.

## 2 Relatividade Geral

As teorias da Relatividade Especial e Geral publicadas por Albert Einstein em 1905 e 1915, respectivamente, representam uma nova e radical visão de espaço, tempo e gravidade em relação ao nosso “senso comum” construído pela teoria de Newton. A relatividade substitui a teoria newtoniana, mas se reduz a esta teoria no limite de velocidades que são pequenas em relação à velocidade da luz e campos gravitacionais que são fracos.

A Relatividade Geral revisa fundamentalmente o próprio significado de espaço, tempo e gravidade porque os efeitos da gravidade não são mais representados por meio de uma força, mas como o movimento de partículas livres que se movem em um espaço-tempo curvo, ou seja, a Relatividade Geral identificará os efeitos da gravidade como decorrentes de curvatura do próprio espaço-tempo. Na afirmação clássica de John Wheeler, “a massa diz ao espaço como se curvar, o espaço diz à matéria como se mover” ([TELLER; WHEELER, 1992](#)). Observe que implícito na circularidade desta afirmação está outra característica básica da Relatividade Geral: trata-se de uma teoria altamente não linear. Falando livremente, apenas quando a curvatura do espaço é conhecida, a distribuição e o movimento da matéria podem ser determinados, mas a curvatura do espaço só pode ser determinada quando a distribuição e o movimento da matéria são conhecidos.

### 2.1 Princípio da equivalência

O princípio da equivalência tem historicamente desempenhado um papel importante no desenvolvimento da teoria da gravitação. Em 1907, Einstein usou este princípio como elemento básico em seu desenvolvimento da Relatividade Geral ([EINSTEIN, 1907](#)). Com isso, consideramos então o princípio da equivalência como o fundamento, não da gravidade newtoniana ou da Relatividade Geral, mas da ideia mais ampla de que o espaço-tempo é curvo.

Iniciaremos nossa discussão a partir de Newton, logo será útil olhar para algumas definições que o mesmo apresenta. Newton define a massa como a “quantidade da matéria obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume” ([NEWTON, 2016a](#)). Para ele esta quantidade seria a massa, a qual é conhecida através do peso de cada corpo, pois a massa é proporcional ao peso. Na verdade quando ele fala em densidade, está se referindo ao peso do corpo, conforme consta no apêndice histórico e explicativo do Principia.

O princípio da equivalência aparece de forma mais explícita na quarta proposição no volume 3 do livro de Newton, onde:

Que todos os corpos gravitam em direção a todos os planetas e que os

pesos dos corpos em direção a qualquer um dos planetas, a distâncias iguais do centro do planeta, são proporcionais às quantidades de matéria que eles contêm (NEWTON, 2016b).

Podemos escrever esta proposição matematicamente na seguinte forma,

$$m_g \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \kappa m_i \mathbf{g}(\mathbf{x}) , \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é a intensidade de um campo gravitacional de um planeta na posição  $\mathbf{x}$ ,  $m_g$  e  $m_i$ , são as massas inercial e gravitacional respectivamente e  $\kappa$  uma constante que deve ser universal, ou seja tem que ser igual para todos os corpos. Escolhendo um sistema de unidades adequado onde podemos ter  $\kappa = 1$ , a equação (2.1), se torna:

$$m_g = m_i . \quad (2.2)$$

Em princípio, as massas  $m_g$  e  $m_i$  representam propriedades diferentes das partículas e não precisam necessariamente serem iguais.

Embora existam experimentos que atualmente comprovem o princípio da equivalência como, por exemplo, o experimento de Loránd Eötvös que verificou uma razão entre as massas gravitacional e inercial com uma sensibilidade de  $10^{-9}$ , não havia explicação para a igualdade entre as massas. Experimentos mostraram que  $m_g = m_i$  com um alto grau de precisão (ROLL; KROTKOV; DICKE, 1964), de modo que, independentemente das propriedades específicas da matéria, o seu movimento no campo gravitacional não será afetado. Este é o Princípio da Equivalência Fraco e demonstra uma característica geral da gravidade: não importa que tipo particular de matéria ou energia componha um objeto, seu movimento em um campo gravitacional será independente dessas propriedades internas.

Einstein já havia publicado o seu trabalho sobre a relatividade especial, porém observou que havia incompatibilidade entre a sua teoria e a gravitação newtoniana, pois embora sua teoria estabeleça uma conexão entre energia e inércia, nada se tinha sobre a relação entre peso e inércia. Einstein no entanto sabia que deveria se apoiar sobre o princípio da equivalência para conseguir organizar suas ideias sobre a sua teoria da gravitação (ACEVEDO; MORAIS; PIMENTEL, 2019).

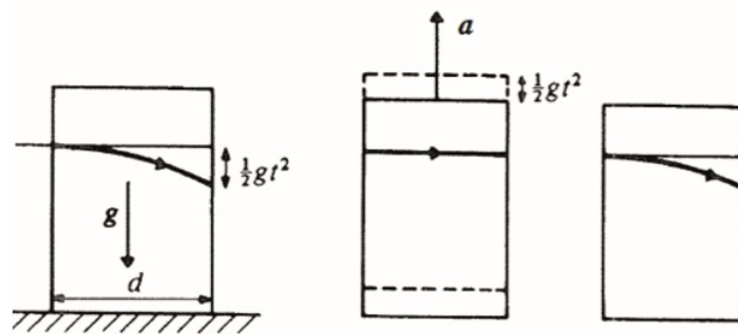
Em seu artigo de 1907, Einstein propõe o seguinte pensamento. Considere dois observadores, um fixo no referencial  $K$  e outro fixo em um referencial não inercial  $K'$  que se move com uma aceleração constante  $\mathbf{g}$ . O efeito sofrido pelo observador em  $K'$  será idêntico ao efeito sofrido por ele caso  $K$  estivesse em repouso num campo gravitacional (EINSTEIN, 1907). Com esse experimento mental, Einstein resolveu o problema da igualdade entre as massas inercial e gravitacional e concluiu que todos os sistemas de referência  $K$ ,  $K'$ , etc,



são equivalentes para a descrição da Natureza (ou para a formulação das leis gerais da Natureza) qualquer que seja seu estado de movimento.

Vamos agora considerar que um observador no referencial não inercial  $K'$  está sendo acelerado e um pulso de luz é emitido com direção perpendicular a essa aceleração. O que será observado é que a luz não terá uma trajetória retilínea, mas em forma de uma parábola, tal que em um instante  $t$  o deslocamento será igual a  $gt^2/2$ , conforme a Figura 1.

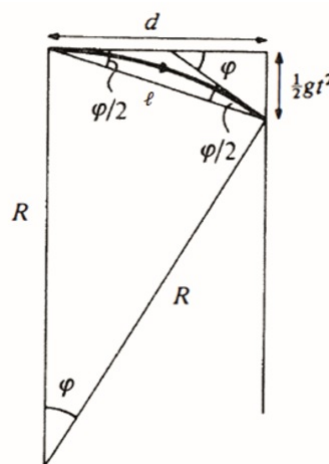
Figura 1 – Representação de um sistema em um referencial não inercial acelerado com um pulso de luz se propagando em uma direção perpendicular a aceleração.



Fonte: (AMADO, 2021)

Considerando que o caminho de luz é aproximadamente um arco circular de raio  $R$ , a partir do diagrama da Figura 2 chegamos a

Figura 2 – Esquema para o cálculo da curvatura da luz.



Fonte: (AMADO, 2021)

$$R \cong \frac{c^2}{g} . \tag{2.3}$$

Portanto, o raio de curvatura  $R$  da trajetória do pulso de luz depende apenas da aceleração gravitacional local. Este argumento simples mostra que, de acordo com o princípio da equivalência, a geometria do caminho da luz que se propaga no referencial acelerado define a geometria da estrutura do espaço, que não é um espaço plano, mas um espaço curvo, dependendo do valor do campo gravitacional local. Tais argumentos convenceram Einstein de que ele deveria levar a sério a geometria não euclidiana para derivar uma teoria relativista da gravidade (AMADO, 2021).

## 2.2 Equações de campo de Einstein

Segundo Einstein, “o destino mais belo que uma teoria física pode ter é quando ela abre caminho para o estabelecimento de uma teoria mais ampla, na qual continua a viver como um caso particular” (EINSTEIN, 2007). Para a construção das equações de campo da Relatividade Geral de Einstein, partimos do princípio da correspondência, onde sob as restrições de campo fraco e baixa velocidade a gravitação de Newton deve ser incluída nesta teoria. Assim, iniciaremos esta seção com um breve estudo sobre os principais pilares da teoria da gravitação de Newton.

### 2.2.1 Gravitação newtoniana

Em 1687, Sir Isaac Newton publicou uma lei da gravitação universal em seu influente trabalho *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Em sua forma mais simples, a lei da gravitação universal de Newton (2.4) afirma que corpos com massa se atraem com uma força que varia diretamente como o produto de suas massas e inversamente como o quadrado da distância entre eles,

$$\mathbf{F} = -\frac{G_N M m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} . \quad (2.4)$$

Esta lei matematicamente elegante, no entanto, oferecia uma visão extraordinariamente racional e profunda da mecânica do mundo natural, porque revelava um cosmos unido pela atração gravitacional mútua de suas partículas constituintes. Além disso, juntamente com as leis do movimento de Newton, a lei da gravitação universal tornou-se o modelo orientador para o desenvolvimento futuro do que chamamos hoje de teoria gravitação padrão, a Relatividade Geral.

A força gravitacional  $\mathbf{F}$  é uma força central, ou seja, ela é puramente radial e possui simetria esférica que pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_r = f(r) \mathbf{r} .$$

No entanto, uma força com esta forma funcional possui rotacional nulo, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{F}_r = 0 .$$

Portanto, apoiado no Teorema de Stokes, temos que este sistema é conservativo, pois

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} ,$$

logo

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 .$$

Assim, o trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}$  é independente da trajetória e pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = -\nabla U ,$$

onde  $U$  é a energia potencial

$$U(r) = -\frac{G_N M m}{r} . \quad (2.5)$$

Para o sinal de menos, podemos dar a seguinte explicação: a natureza prefere o sistema de energia mais baixa, então a força resultante sobre o objeto deve apontar para a região de energia mais baixa.

Se um corpo de massa  $M$  é um corpo extenso cuja distribuição de massa é contínua e tem uma forma arbitrária e finita, a energia potencial de uma partícula de massa  $m$  a uma distância  $\mathbf{r}$  da origem do sistema de coordenadas é

$$U(\mathbf{r}) = -\int_V \frac{G_N m \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' , \quad (2.6)$$

onde  $\rho$  é a densidade do corpo.

A intensidade do campo gravitacional  $\mathbf{g}$  é definida como a força por unidade de massa exercida sobre uma partícula no campo gravitacional produzido por uma partícula de massa  $M$ ,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{G_N M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} , \quad (2.7)$$

ou, para um corpo extenso, o campo gravitacional gerado por uma distribuição de massa  $M$  é,

$$\mathbf{g} = -G_N \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' . \quad (2.8)$$

Se existe um campo vetorial conservativo, pode-se introduzir uma função potencial (a qual é uma quantidade escalar) para representar este campo. Esta quantidade, para um campo gravitacional, é chamada de função potencial gravitacional e a denotaremos por  $\Phi$ . A condição para isso é que  $\nabla \times \mathbf{g} = 0$ . Como

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad (2.9)$$

temos

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0,$$

assim, podemos definir

$$\mathbf{g} \equiv -\nabla\Phi. \quad (2.10)$$

O potencial gravitacional se relaciona com a energia potencial gravitacional dada a seguinte relação

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{m}U(\mathbf{r}).$$

Portanto, o potencial gravitacional  $\Phi(\mathbf{r})$  pode ser escrito na forma integral como

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G_N \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.11)$$

Dada a Lei de Gauss para o campo gravitacional  $\mathbf{g}$ ,

$$\Phi_g = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G_N m', \quad (2.12)$$

que relaciona o fluxo do campo gravitacional  $\Phi_g$ , através de uma superfície esférica fechada  $S$ , a região que contém uma massa  $m$ .

Vamos considerar uma distribuição volumétrica de massa dada por,

$$m' = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Portanto a Lei de Gauss se torna

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G_N \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (2.13)$$

Fazendo uso do teorema do divergente o lado esquerdo pode ser escrito como

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV = -4G_N \int_V \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (2.14)$$

ou

$$\int_V [\nabla \cdot \mathbf{g} + 4\pi G_N \rho(\mathbf{r})] dV = 0 . \quad (2.15)$$

Para que o resultado acima seja sempre nulo, o integrando deve ser nulo, portanto

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G_N \rho(\mathbf{r}) . \quad (2.16)$$

Substituindo (2.10) em (2.16),

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G_N \rho(\mathbf{r}) . \quad (2.17)$$

A equação (2.17) é conhecida como equação de Poisson.

### 2.2.2 Limite Newtoniano

Considere uma partícula que se move numa região onde o campo gravitacional é fraco e estacionário, de tal forma que possamos fazer com que sua velocidade seja irrelevante (WEINBERG, 1972). Nesse caso a equação da geodésica para essa partícula é

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 . \quad (2.18)$$

Como o tensor métrico não possui dependência temporal, pois estamos em um caso estacionário, temos

$$\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} . \quad (2.19)$$

Dada a condição de campo fraco, podemos considerar o tensor métrico como uma aproximação do tensor de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 . \quad (2.20)$$

Para soluções de primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$ ,

$$\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00} . \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.18), obtemos as equações de movimento para a partícula, porém estamos interessados apenas na parte espacial, logo

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} c^2 . \quad (2.22)$$

O correspondente Newtoniano deste resultado é

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = -\nabla\phi, \quad (2.23)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional discutido na Seção 2.2.1.

Comparando estes resultados podemos concluir que

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} + \text{constante}. \quad (2.24)$$

Para grandes distâncias  $h_{00}$  se anula, logo a constante é nula, de modo que tendo  $\eta_{00} = 1$ ,

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \quad (2.25)$$

A equação (2.25) nos mostra que na teoria gravitacional de Newton ainda faltam algumas informações, pois o potencial newtoniano contém apenas informação sobre a componente  $g_{00}$  do tensor métrico.

### 2.2.3 Gravitação de Einstein

Para construir as equações de campo de Einstein, devemos primeiro encontrar uma maneira apropriada de expressar a fonte do campo gravitacional. Em outras palavras, devemos identificar um tensor que descreva a distribuição da matéria em cada evento no espaço-tempo (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). O tensor energia-momento é um tensor do tipo  $(0, 2)$  que contém em sua estrutura matemática as informações referentes à energia e momento do campo. Cada componente deste tensor possui um significado físico:

- Componente temporal ( $T_{00}$ ): densidade de energia do campo;
- Componentes espaço-temporais ( $T_{0i} = T_{i0}$ ): densidade de fluxo de energia e momento;
- Componentes espaciais ( $T_{ij}$ ): pressão dos constituintes (componentes diagonais) e cisalhamento (componentes não diagonais).

Vamos derivar as equações de campo de Einstein seguindo a seção 7 do livro *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity* do autor Steven Weinberg (WEINBERG, 1972).

Recapitulando o que foi feito até agora, temos:

- Em um campo gravitacional estático e fraco produzido por densidade de massa  $\rho$  não relativística, a componente temporal da métrica é dada por

$$g_{00} \simeq - \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) ; \quad (2.26)$$

- O potencial gravitacional  $\phi$  é obtido a partir da equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G_N \rho ; \quad (2.27)$$

- A densidade de energia, dada pela componente temporal do tensor energia-momento para matéria não relativística é dada por

$$T_{00} \simeq \rho c^2 . \quad (2.28)$$

Com isso, temos ao combinar essas três equações

$$\nabla^2 g_{00} = - \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{00} . \quad (2.29)$$

Ao considerarmos localmente um referencial inercial, podemos supor que as equações de campo fraco para uma distribuição geral do tensor energia momento assumem a forma

$$G_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (2.30)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o chamado tensor de Einstein.

Para determinar  $G_{\mu\nu}$ , vamos impor que certas propriedades devem ser satisfeitas:

- Por definição  $G_{\mu\nu}$  deve ser um tensor do tipo  $(0, 2)$ ;
- $G_{\mu\nu}$  contém apenas termos que são lineares na segunda derivada ou quadráticos na primeira derivada do tensor métrico;
- Como  $T_{\mu\nu}$  é simétrico,  $G_{\mu\nu}$  também deve ser;
- Como  $T_{\mu\nu}$  deve ser conservado, logo  $G_{\mu\nu}$  também deve ser conservado

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 ; \quad (2.31)$$

- Para campos fracos, estacionários e que sejam produzidos por matéria não relativística, esperamos que a componente temporal do tensor de Einstein seja tal que

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00} . \quad (2.32)$$

Para satisfazer as duas primeiras propriedades devemos utilizar o tensor de Riemann. Sabemos que os únicos tensores que podemos construir a partir do tensor de Riemann são o tensor de Ricci

$$R_{\mu\rho} = R_{\mu\nu\rho}{}^{\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - \partial_{\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} \quad (2.33)$$

e o escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} . \quad (2.34)$$

De modo que

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R , \quad (2.35)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Ao reescrevermos (2.35) como

$$G^{\mu}{}_{\nu} = C_1 R^{\mu}{}_{\nu} + C_2 \delta^{\mu}{}_{\nu} R , \quad (2.36)$$

podemos ver que  $G_{\mu\nu}$  é simétrico, portanto a terceira propriedade é satisfeita.

Aplicando a derivada covariante em (2.35), temos

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = \nabla_{\mu} (C_1 R^{\mu\nu} + C_2 g^{\mu\nu} R) . \quad (2.37)$$

Da quarta propriedade e utilizando a identidade de Bianchi, obtemos o seguinte resultado

$$\left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R = 0 . \quad (2.38)$$

Como queremos o tensor  $T_{\mu\nu}$  não nulo, rejeitamos que  $R$  seja nulo, e temos que  $C_2 = -C_1/2$ , logo podemos escrever

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) . \quad (2.39)$$

Por fim, vamos fazer uso da última propriedade e determinar  $C_1$ . Para um sistema não relativístico,  $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$ , por isso devemos considerar  $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$  então de (2.39), concluímos que

$$G_{ij} = C_1 \left( R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \simeq 0 , \quad (2.40)$$

portanto



$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R . \quad (2.41)$$

Considerando que para uma aproximação newtoniana o campo deve ser aproximadamente Minkowski, ou seja,  $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ , temos

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &\simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &\simeq R_{kk} - R_{00} \\ &\simeq \frac{1}{2} \eta_{kk} R - R_{00} \\ &\simeq \frac{3}{2} R - R_{00} , \end{aligned} \quad (2.42)$$

logo

$$R \simeq 2R_{00} . \quad (2.43)$$

Substituindo agora a equação (2.41) na equação (2.39) e por meio das últimas considerações obteremos

$$G_{00} \simeq 2C_1 R_{00} . \quad (2.44)$$

Para obtermos a componente temporal  $R_{00}$  na aproximação de campo fraco, vamos considerar a forma completamente covariante do tensor de Riemann

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} [\partial_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} - \partial_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} + \partial_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa}] . \quad (2.45)$$

A partir de (2.45), temos

$$R_{0000} \simeq 0 \quad \text{e} \quad R_{i0j0} \simeq \frac{1}{2} \partial_{ij} g_{00} , \quad (2.46)$$

portanto

$$\begin{aligned} R_{00} &= g^{ij} R_{i0j0} \\ &\simeq \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{ij} g_{00} \\ &\simeq \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Substituindo (2.47) em (2.44)

$$G_{00} \simeq C_1 \nabla^2 g_{00} \quad (2.48)$$

e, pela última propriedade, temos que  $C_1 = 1$ , portanto o tensor de Einstein é dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.49)$$

e a equação de campo de Einstein finalmente tem a seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (2.50)$$

## 3 Ondas gravitacionais

Assim como a teoria de Maxwell admite soluções correspondentes à propagação de ondas no campo eletromagnético, a Relatividade Geral prevê que as flutuações na métrica do espaço-tempo podem propagar-se com a velocidade da luz como ondas gravitacionais. Até recentemente, esta era uma discussão teórica, uma vez que as ondas gravitacionais foram inferidas indiretamente, mas nunca observadas diretamente. A ausência de observação direta não foi porque ondas gravitacionais são raras, mas sim porque interagem tão fracamente com a matéria, tornando sua detecção um enorme desafio técnico. Esta situação mudou drasticamente quando o Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser (sigla LIGO em inglês) detectou uma onda gravitacional em 2015. A análise detalhada indicou que essa onda gravitacional foi produzida pela fusão de dois buracos negros. Assim, em uma única medição, de precisão sem precedentes, o LIGO confirmou a existência de ondas gravitacionais.

### 3.1 Gravidade linearizada

A teoria da gravidade linearizada parte do pressuposto de que em toda região do espaço-tempo ou vizinhança da fonte gravitacional, onde o campo é fraco, a métrica se desvia levemente de Minkowski, ou seja, a métrica do espaço-tempo é quase plana. Na prática, esta é uma excelente aproximação na natureza, exceto para fenômenos que lidam com colapso gravitacional, buracos negros e fenômenos que lidam com a estrutura em grande escala do universo (STEPHANI; STEWART, 1982).

Portanto,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3.1)$$

onde (3.1) é descrita como uma perturbação linear de primeira ordem na métrica de Minkowski.

Para compreender melhor esta perturbação nesse regime, a equação de Einstein linearizada pode ser obtida de maneira direta como segue. Como os  $\eta_{\mu\nu}$  são constantes, não é difícil verificar que as conexões são dadas por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) . \quad (3.2)$$

Logo, temos que o tensor de Riemann para primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  se torna,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho}) \quad (3.3)$$

e o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) , \quad (3.4)$$

com o operador de D'Alembert definido como

$$\square \equiv - \left( \frac{\partial_0}{c} \right)^2 + \nabla^2 \quad (3.5)$$

e o traço de  $h$

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} . \quad (3.6)$$

O tensor de curvatura é obtido ao contrairmos o tensor de Ricci com a métrica,

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h . \quad (3.7)$$

Substituindo (3.1), (3.4) e (3.7) em (2.49), obtemos o tensor de Einstein linearizado

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h) . \quad (3.8)$$

Vamos introduzir uma nova variável  $\bar{h}_{\mu\nu}$  a fim de simplificar o tensor de Einstein e escrever a equação que procuramos de uma forma já conhecida, onde

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h . \quad (3.9)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \bar{h} &\equiv \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} \\ &= h - 2h \\ &= -h . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Portanto a equação (3.9) pode ser invertida tornando-se

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} . \quad (3.11)$$

Com isso, podemos escrever o tensor de Einstein linearizado como

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho}) \quad (3.12)$$

e finalmente temos que as equações de campo de Einstein linearizadas são dadas por (MAGGIORE, 2008)

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (3.13)$$

Esta expressão pode ser simplificada ainda mais escolhendo um sistema de coordenadas apropriado, ou calibre. As transformações de medida na Relatividade Geral são apenas transformações de coordenadas (FLANAGAN; HUGHES, 2005). uma transformação de coordenadas infinitesimal geral pode ser escrita como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) , \quad (3.14)$$

onde  $\xi^\mu(x)$  é um campo vetorial infinitesimal arbitrário. Essa transformação altera a métrica por meio de

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) . \quad (3.15)$$

De onde podemos deduzir que

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho) . \quad (3.16)$$

Derivando a equação (3.16),

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu \quad (3.17)$$

e caso tenhamos

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = \square \xi_\mu , \quad (3.18)$$

implica que podemos impor a seguinte condição <sup>1</sup>

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.19)$$

Esta condição é conhecida como norma de Einstein, condição de Donder, de Hilbert ou de Fock, ou ainda condição harmônica (HENRIQUES, 2009).

Substituindo (3.19) em (3.13) temos

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (3.20)$$

<sup>1</sup> Esta condição é análoga a feita na teoria eletromagnética chamada calibre de Lorentz, no qual  $\partial^\mu A_\mu = 0$ , onde  $A_\mu$  é o vetor potencial.

Esta é a equação de Einstein linearizada contendo uma equação de onda para cada uma das componentes da perturbação.

Em princípio,  $h_{\mu\nu}$  possui dez componentes independentes, pois pode ser representada por uma matriz simétrica  $4 \times 4$ . No entanto, (3.19) reduz o número de componentes independentes para seis. Portanto ao escolhermos utilizar a norma de Einstein, estamos transformando a métrica de perturbação de acordo com a relação (3.16), onde  $\xi_\mu$  é a solução da equação (3.18).

Observe também que ao adicionarmos a  $\xi_\mu$  um vetor  $\chi_\mu$  que satisfaça

$$\square\chi_\mu = 0 \quad (3.21)$$

ainda estamos na norma de Einstein. Logo há ainda alguns graus de liberdade do medidor restantes e precisamos escolher mais quatro funções para corrigir totalmente o medidor. Isso reduz o número de componentes independentes da métrica de seis para duas. Portanto, a Relatividade Geral tem dois graus de liberdade (FABRIS; TONIATO; VELTEN, 2021).

## 3.2 Norma transversa e de traço nulo

Longe da fonte de campo, o tensor momento energia pode ser considerado nulo, ou seja,  $T_{\mu\nu} = 0$ , portanto podemos escrever (3.20) como

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.22)$$

Esta equação diferencial de segunda ordem tem solução na seguinte forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\rho x^\rho) \quad (3.23)$$

que representa uma onda plana, onde  $A_{\mu\nu}$  é chamado tensor de polarização que contém informações sobre a amplitude e a polarização, enquanto  $k_\rho$  determina a direção de propagação da onda e sua frequência, chamado vetor de onda (KOKKOTAS, 2008).

Podemos escrever a equação de onda como

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = 0 , \quad (3.24)$$

e substituindo (3.24) em (3.23) temos

$$\eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.25)$$

Para que essa relação seja verdadeira temos que ter

$$k_\rho k^\rho = 0 ,$$

ou seja, o quadrivetor  $k^\mu$  é um quadrivetor nulo.

Como o valor de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  não se altera sobre a hiper-superfície,

$$k^0 x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x} = \text{constante} \quad (3.26)$$

observe que a componente  $k^0$  nos fornece a frequência angular ( $\omega$ ) e  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda

$$k^\mu = (\omega, \mathbf{k}) . \quad (3.27)$$

A norma de Einstein implica que

$$k^\mu A_{\mu\nu} = 0 \quad (3.28)$$

portanto  $k^\mu$  e  $A_{\mu\nu}$  são ortogonais.

Retornamos agora a equação (3.21), cuja solução é

$$\chi^\mu = B^\mu \exp(ik_\rho x^\rho) , \quad (3.29)$$

onde  $B^\mu$  é constante.

Adicionando  $\chi^\mu$  à transformação de calibre, temos que  $h_{\mu\nu}$  se transforma como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu) , \quad (3.30)$$

de onde podemos deduzir que

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - i\eta_{\mu\nu} B^\rho k_\rho) . \quad (3.31)$$

Como temos a solução para  $\chi_\mu$  podemos deduzir que  $A_{\mu\nu}$  se transforma como

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - iB_\mu k_\nu - iB_\nu k_\mu + i\eta_{\mu\nu} B_\rho k^\rho . \quad (3.32)$$

A condição de ortogonalidade  $k^\mu A_{\mu\nu} = 0$ , implica que  $A'_{\mu\nu}$  também satisfaz a condição de ortogonalidade.

Considerando que cada coordenada  $B_\mu$  é arbitrária, podemos fixá-las fazendo que nas novas coordenadas quase lorentzianas e harmônicas  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$  as seguintes condições são satisfeitas

$$\bar{h}'_{\mu\nu} U'^\mu = 0 \quad (3.33)$$

e

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0 , \quad (3.34)$$

onde  $U^\nu$  é um quadrivetor fixo do tipo tempo.

As equações (3.33) e (3.34) definem uma norma transversa e de traço nulo, chamada norma TT. A equação (3.33) mostra que dada a mudança de coordenadas,  $\bar{h}'_{\mu\nu}$  é transversa, ou seja, possui apenas componentes espaciais. Essa conjuntura vem da condição de ortogonalidade entre  $A_{\mu\nu}$  e  $k^{\mu\nu}$ . A equação (3.34) por sua vez mostra que o traço é nulo na parte espacial.

Ao tomarmos essas condições temos que

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} . \quad (3.35)$$

Assim, concluímos que as componentes de  $B^\mu$  nos fornecem condições para determinar uma norma tal que, escrevendo com um outro formato temos

$$h^{0\mu} = 0 \quad \text{e} \quad h^i{}_i = 0 , \quad (3.36)$$

enquanto que  $\xi^\mu$  nos permite impor a norma de Einstein

$$\partial^i h_{ij} = 0 . \quad (3.37)$$

Os  $\chi^\mu$  permitiram encontrar uma solução que satisfaça a norma TT. A partir de agora iremos denotar a métrica na norma TT como  $h_{ij}^{TT}$ , portanto a equação 3.9 pode ser escrita como

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT} . \quad (3.38)$$

Para compreender melhor, vamos escolher uma onda que se propague paralelamente ao eixo  $z$ , logo

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) , \quad (3.39)$$

pois como  $k^\mu$  é um quadrivetor nulo, temos que  $\omega^2 = |\mathbf{k}|^2$ , portanto para uma onda que se propague na direção  $z$ , temos

$$k^0 = k^3 = \omega \quad \text{e} \quad k^1 = k^2 = 0 . \quad (3.40)$$

Dadas as equações (3.23) e (3.9), a norma de Einstein (3.19) implica que



$$\partial_\mu \left( h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = 0 . \quad (3.41)$$

Logo temos

$$k^\mu A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k_\nu A , \quad (3.42)$$

onde  $A$  é o traço de  $A_{\mu\nu}$ .

A equação (3.42) nos fornece que

$$\begin{aligned} A_{00} + A_{30} &= -\frac{1}{2} (-A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33}) , \\ A_{01} + A_{31} &= 0 , \\ A_{02} + A_{32} &= 0 , \\ A_{03} + A_{33} &= -\frac{1}{2} (-A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33}) . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando a simetria dos coeficientes do tensor de polarização, esse sistema possui como solução

$$A_{01} = -A_{31} , \quad (3.44)$$

$$A_{02} = -A_{32} , \quad (3.45)$$

$$A_{03} = -\frac{1}{2} (A_{00} + A_{33}) , \quad (3.46)$$

$$A_{22} = -A_{11} . \quad (3.47)$$

Pela lei de transformação dada por (3.32),

$$\begin{aligned} A'_{11} &= A_{11} \\ A'_{12} &= A_{12} \\ A'_{13} &= A_{13} - iB_1 k_3 \\ A'_{23} &= A_{23} - iB_2 k_3 \\ A'_{33} &= A_{33} - 2iB_3 k_3 \\ A'_{00} &= A_{00} - 2iB_0 k_0 . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Escolhendo

$$B_0 = \frac{A_{00}}{2ik_0}, \quad B_1 = \frac{A_{13}}{ik_3}, \quad B_2 = \frac{A_{23}}{ik_3}, \quad B_3 = \frac{A_{33}}{ik_3}, \quad (3.49)$$

temos que

$$A'_{00} = A'_{13} = A'_{23} = A'_{33} = 0. \quad (3.50)$$

Portanto as únicas componentes não nulas são  $A_{11}$ . Por (3.47), temos  $A_{11} = -A_{22}$  e  $A_{12} = A_{21}$ . Portanto para uma onda se propagando na direção  $z$ ,  $h_{\mu\nu}$  pode ser expressa como

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{21} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \cos[\omega(t - z)]. \quad (3.51)$$

Escrita na forma matricial, fica mais claro que  $h_{\mu\nu}$  é transversa e com traço nulo. De maneira similar, podemos escrever esta quantidade de forma ainda mais simples na norma TT como (SAULSON, 1994)

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad (3.52)$$

onde  $h_+$  e  $h_\times$  são chamados de amplitudes de polarização *plus* e *cross*, respectivamente.

### 3.3 Estados de polarização

Nesta seção vamos entender os efeitos físicos da interação de ondas gravitacionais com massas teste. Consideremos uma partícula com quadrivelocidade  $u^\mu$ . Temos que a sua equação da geodésica é dada por

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} u^\sigma u^\nu = 0, \quad (3.53)$$

onde

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.54)$$

De imediato podemos tentar resolver (3.53) na métrica correspondente a uma onda gravitacional na norma TT, porém a partir desta abordagem não conseguiríamos determinar os efeitos físicos (PADMANABHAN, 2010).

Para demonstrar isso, vamos considerar que nossa métrica seja

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{TT} . \quad (3.55)$$

Suponha que nossa partícula esteja em repouso e em um determinado instante  $\tau = \tau_0$  a geodésica é dada por

$$\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i{}_{00} = 0 \quad \text{em} \quad (\tau = \tau_0) . \quad (3.56)$$

Utilizando as equações (3.2) e (3.36) em (3.56), temos

$$\frac{du^i}{d\tau} = 0 \quad \text{em} \quad (\tau = \tau_0) , \quad (3.57)$$

portanto (3.57) nos diz que a aceleração é nula, logo uma partícula que estava em repouso permanecerá em repouso após a passagem de uma onda gravitacional. Embora esse método não seja útil para estudarmos os efeitos físicos, podemos tirar como conclusão que a partir da Relatividade Geral é possível estudá-los e mensurar.

Para compreender melhor estes efeitos físicos é necessário compreender o desvio geodésico. Inicialmente considere duas partículas em queda livre localizadas em  $z = 0$ , mas separadas ao longo do eixo  $x$  por uma distância  $l$ . Na presença de uma onda gravitacional na norma TT que se propaga ao longo do eixo  $z$ , a distância apropriada correspondente a  $L$  entre essas duas partículas é dada por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l dx \sqrt{g_{xx}} \\ &= \int_0^l dx \left[ 1 + h_{xx}^{TT}(t, z = 0) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq \int_0^l dx \left[ 1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t, z = 0) \right] \\ &= l \left[ 1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t, z = 0) \right] . \end{aligned} \quad (3.58)$$

É óbvio a partir deste resultado, a separação adequada entre as duas partículas irá oscilar com uma mudança dada por

$$\frac{\delta L}{L} \simeq \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t, z = 0) . \quad (3.59)$$

Estas variações que serão dadas pela equação de desvio geodésico (PADMANABHAN, 2010).

Suponhamos duas partículas, A e B, onde para a partícula A, temos que sua geodésica é parametrizada por  $x^\mu$ , dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 . \quad (3.60)$$

Para a partícula B temos que sua geodésica é parametrizada por  $x^\mu + \xi^\mu$ , tal que

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}(x + \xi) \frac{d(x^\sigma + \xi^\sigma)}{d\tau} \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} = 0. \quad (3.61)$$

Se considerarmos que  $|\xi^\mu|$  é muito menor que uma variação típica do campo gravitacional e fazendo a diferença entre (3.60) e (3.61), ao expandirmos para primeira ordem com relação a  $\xi$ , temos que

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\sigma\nu}(x) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \xi^\rho \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu}(x) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.62)$$

A equação (3.62) é chamada de desvio geodésico (MAGGIORE, 2008), porém podemos reescrevê-la ao introduzirmos a derivada covariante do campo vetorial  $V^\mu(x)$  ao longo da curva  $x^\mu(\tau)$ , onde

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} V^\sigma \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.63)$$

Logo em termos do tensor de Riemann, a equação (3.63) se torna

$$\frac{D^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\sigma\nu\rho} \xi^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (3.64)$$

ou em termos da quadrivelocidade,

$$\frac{D^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\sigma\nu\rho} \xi^\rho u^\sigma u^\nu. \quad (3.65)$$

Na teoria linearizada, o tensor de Riemann é invariante, em vez de apenas covariante como na Relatividade Geral, desse modo podemos calculá-lo na norma que escolhermos (MAGGIORE, 2008). Claramente, a melhor escolha é calcular na norma TT, pois nessa norma as ondas gravitacionais têm a forma mais simples. Então, da equação (3.3) encontramos imediatamente

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{\mu\sigma}^{TT}. \quad (3.66)$$

Como  $\Gamma^\mu_{\sigma\nu} V^\sigma$  em (3.63) é nulo no sistema de coordenadas próprio, podemos fazer a seguinte aproximação

$$\frac{D^2\xi^\mu}{d\tau^2} \approx \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2}. \quad (3.67)$$

Deste modo a equação (3.65) com o valor do tensor de Riemann encontrado em (3.66) se torna

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{TT}^{\mu\sigma} \xi_\sigma, \quad (3.68)$$

onde  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ .

Como podemos escrever  $h_{TT}^{\mu\sigma}$  em termos das amplitudes de polarização  $h_+$  e  $h_\times$ , vamos entender os efeitos físicos de forma separada onde faremos  $h_+ \neq 0$  e  $h_\times = 0$ , logo a equação (3.68) se torna (CARROLL, 2004)

$$\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^1 \partial_0^2 [h_+ \exp(ik_\sigma x^\sigma)] \quad (3.69)$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \xi^2 \partial_0^2 [h_+ \exp(ik_\sigma x^\sigma)] . \quad (3.70)$$

Cujas soluções são

$$\xi^1 = \left[ 1 + \frac{1}{2} h_+ \exp(ik_\sigma x^\sigma) \right] \xi^1 \quad (3.71)$$

e

$$\xi^2 = \left[ 1 - \frac{1}{2} h_+ \exp(ik_\sigma x^\sigma) \right] \xi^2 . \quad (3.72)$$

As equações (3.71) e (3.72) nos dizem que partículas separadas na direção de  $\xi^1$  irão oscilar ao longo de  $\xi^1$ , quando passar uma onda gravitacional que se propaga na direção de  $\xi^3$ . O mesmo acontece para  $\xi^2$ .

Agora para a polarização *cross*, teremos  $h_\times \neq 0$  e  $h_+ = 0$ , logo as soluções para a equação (3.68) são (CARROLL, 2004)

$$\xi^1 = \xi^1 + \frac{1}{2} h_\times \exp(ik_\sigma x^\sigma) \xi^2 \quad (3.73)$$

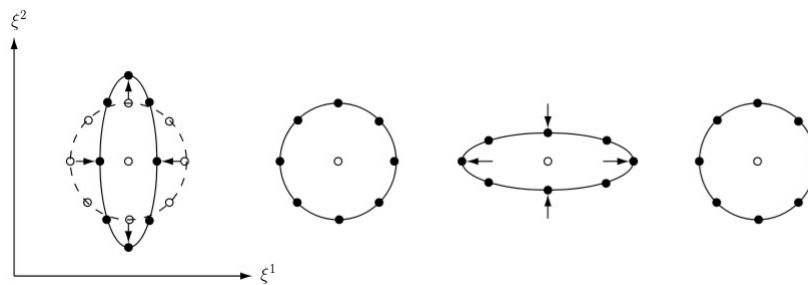
e

$$\xi^2 = \xi^2 + \frac{1}{2} h_\times \exp(ik_\sigma x^\sigma) \xi^1 . \quad (3.74)$$

Nessa polarização as mesma partículas, distribuídas na mesma forma que anteriormente oscilam ao longo de uma linha imaginária diagonal entre  $\xi^1$  e  $\xi^2$ . As Figuras 3 e 4 mostram como partículas se comportam pela passagem de uma onda gravitacional que se propaga em direção a  $\xi^3$ .

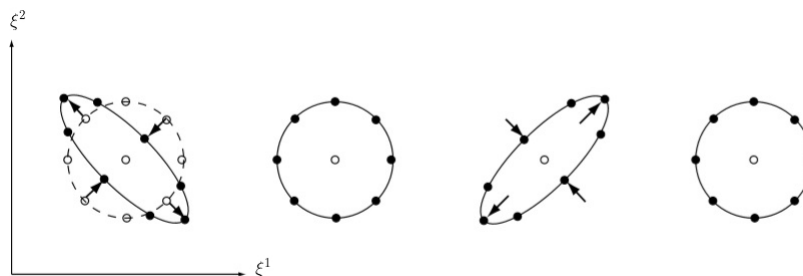
Existe ainda um outro efeito físico das ondas gravitacionais sobre um conjunto de partículas que consiste na combinação da polarização *plus* e *cross*, onde o deslocamento dessas partículas ocorre em epiciclos.

Figura 3 – Efeito de uma onda gravitacional com polarização *plus* em um conjunto de partículas distribuídas de forma circular.



Fonte: (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

Figura 4 – Efeito de uma onda gravitacional com polarização *cross* em um conjunto de partículas distribuídas de forma circular.



Fonte: (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

### 3.4 Produção de ondas gravitacionais

Nesta seção iremos discutir sobre a produção de ondas gravitacionais e a natureza quadrupolar da radiação gravitacional. Diferente da seção anterior estudaremos o caso onde temos a fonte, ou seja, existe uma distribuição de matéria e energia tal que

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (3.75)$$

A solução para (3.75) é análoga a encontrada para o campo eletromagnético a partir das equações de Maxwell que pode ser obtida a partir das funções de Green (JACKSON, 1999). A função de Green  $G(x^\sigma - x'^\sigma)$  para o operador de D'Alembert é a solução para equação da onda na presença de uma fonte de função delta

$$\square_x G(x^\sigma - x'^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - x'^\sigma) , \quad (3.76)$$

onde  $\square_x$  denota o operador de D'Alembert com respeito às coordenadas  $x^\sigma$ . A equação (3.76) é útil, pois a partir dela podemos escrever a solução geral (3.75) como

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -\frac{16\pi G_N}{c^4} \int G(x^\sigma - x'^\sigma) T_{\mu\nu}(x'^\sigma) d^4x' . \quad (3.77)$$

As soluções para (3.76) podem ser consideradas “retardadas” ou “avanzadas”, dependendo se representarem ondas viajando para frente ou para trás no tempo (CARROLL, 2004). Como a equação é análoga ao caso da radiação no eletromagnetismo, podemos impor as mesmas condições e usar as funções de Green retardadas dadas por,

$$G(x^\sigma - x'^\sigma) = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta \left[ |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - (x^0 - x'^0) \right] \Theta(x^0 - x'^0) . \quad (3.78)$$

Aqui nós temos que

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' = (x'^1, x'^2, x'^3) , \quad (3.79)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \left[ \delta_{ij} (x^i - x'^i) (x^j - x'^j) \right]^{1/2} \quad (3.80)$$

e

$$\Theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^0 > x'^0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (3.81)$$

Substituindo (3.78) em (3.77) e utilizando a função delta para integrar com relação a  $x'^0$ , finalmente temos

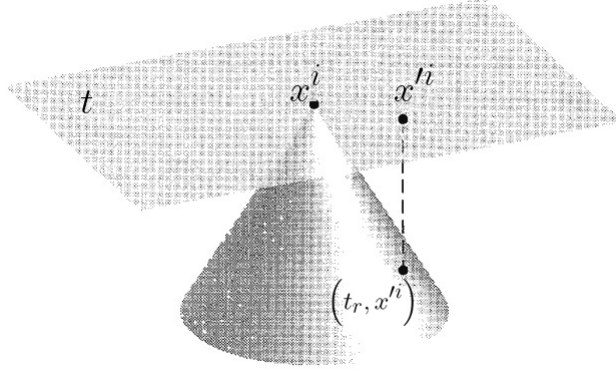
$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G_N}{c^4} \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{x}') , \quad (3.82)$$

onde  $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ , é chamado de tempo retardado e seu significado físico implica que a perturbação gravitacional se propaga com velocidade constante, onde assumimos ser a velocidade da luz. Vale ressaltar que ainda existe uma outra solução para (3.82) relacionada ao tempo avançado, onde  $t_a = t + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ , porém a descartamos, pois viola a causalidade (RAMOS; MALUF, 2017).

A equação (3.82) pode ser interpretada como a perturbação no campo gravitacional em  $(t, \mathbf{x})$ , sendo uma soma das influências das fontes de energia e momento no ponto  $(t_r, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  no cone de luz passado, conforme ilustrado na Figura 5.

Para obter informações sobre a radiação gravitacional emitida por uma fonte a partir de  $T_{\mu\nu}$  da equação (3.82) requer um árduo trabalho, porém ao fazermos algumas considerações podemos obter resultados com uma boa aproximação.

Figura 5 – Perturbações no campo gravitacional em  $(t, x^i)$  são calculadas em termos de eventos no cone de luz passado.



Fonte: Adaptado de (CARROLL, 2004)

Inicialmente nossa fonte está isolada, composta de matéria não relativística e está muito distante. Antes de começarmos será conveniente eliminar a dependência de  $T_{\mu\nu}$  no tempo retardado. Podemos conseguir isso através de uma transformada de Fourier no tempo (RAMOS; MALUF, 2017).

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \exp(i\omega t) \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) . \quad (3.83)$$

Substituindo (3.82) em (3.83),

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{4G_N}{\sqrt{2\pi}c^4} \int dt \exp(i\omega t) \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.84)$$

e fazendo uma substituição na variável de integração  $t \rightarrow t_r$  temos,

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{4G_N}{\sqrt{2\pi}c^4} \int dt_r \exp(i\omega t_r) \int d^3x' \frac{\exp(i\omega |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{x}') . \quad (3.85)$$

Aplicando novamente a transformada de Fourier temos,

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{4G_N}{c^4} \int d^3x' \frac{\exp(i\omega |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tilde{\tilde{T}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}') , \quad (3.86)$$

onde  $\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}$  e  $\tilde{\tilde{T}}_{\mu\nu}$  são as transformadas de Fourier de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  e  $T_{\mu\nu}$ , respectivamente.

Ao colocarmos a origem do sistema de coordenadas próximo a fonte, podemos trocar  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  por  $r = |\mathbf{x}|$  em (3.86), portando vamos ter

$$\frac{\exp(i\omega |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\exp(i\omega r)}{r} . \quad (3.87)$$



Essa troca é válida, pois ao considerarmos uma fonte que possui tamanho  $\delta r$  e um observador a uma distância  $r$  desta fonte, tal que  $r \gg \delta r$ , para esse observador a fonte parece ser puntiforme, portanto podemos desprezar suas dimensões e realizar a troca acima. A aproximação de baixas velocidades nos permite dizer que  $r$  é praticamente constante, pois demora muito tempo para que a distância entre a fonte e o observador tenha alguma variação significativa (CARROLL, 2004). Substituindo (3.87) em (3.86),

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{4G_N}{c^4} \frac{\exp(i\omega r)}{r} \int d^3x' \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}') . \quad (3.88)$$

Observe que pela lei de conservação ( $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ), as integrais sobre  $T^{0\nu}$  são conservadas e independentes do tempo, ou seja, a transformada de Fourier de  $T^{0\nu}$  em relação à coordenada tempo terá apenas os termos estáticos ( $\omega = 0$ ). Isso implica que a parte dependente do tempo da métrica, onde estão as informações da radiação, está contida nas componentes espaciais da métrica (PADMANABHAN, 2010).

A partir da norma de Einstein (3.19), podemos estabelecer uma relação entre as componentes da perturbação no espaço de Fourier dada por

$$\tilde{h}^{0\nu}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{i}{\omega} \partial_j \tilde{h}^{j\nu}(\omega, \mathbf{x}) . \quad (3.89)$$

Logo podemos obter  $\tilde{h}^{0j}$  a partir de  $\tilde{h}^{ij}$  e podemos utilizar também o fato de que  $\tilde{h}^{0i} = \tilde{h}^{i0}$  para determinar  $\tilde{h}^{00}$  a partir de (3.89). Com tudo isso temos motivos físicos e matemáticos para resolver apenas as componentes espaciais de (3.88).

Tomamos portanto

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}') , \quad (3.90)$$

e resolvemos pela integração por partes

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}') = \int d^3x' \partial_k (x'^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3x' x'^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) . \quad (3.91)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade é uma integral de superfície, porém como a fonte está isolada, o resultado dessa integral é nulo. O segundo termo pode ser relacionado com  $\tilde{T}^{0j}$ , pois ao escrevermos a lei de conservação no espaço de Fourier, temos

$$\partial_k T^{\tilde{k}\mu} = -i\omega \tilde{T}^{0\mu} . \quad (3.92)$$

Logo

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}') = i\omega \int d^3x' x'^i \tilde{T}^{0j} . \quad (3.93)$$

Dada a simetria dos índices  $i$  e  $j$ , podemos escrever (3.93) como

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}') = \frac{i\omega}{2} \int d^3x' (x'^i \tilde{T}^{0j} + x'^j \tilde{T}^{0i}) . \quad (3.94)$$

Aplicando integração por partes e a equação (3.92), temos

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}') = \frac{i\omega}{2} \int d^3x' [\partial_k (x'^i x'^j \tilde{T}^{0k}) - x'^i x'^j (\partial_k \tilde{T}^{0k})] , \quad (3.95)$$

por fim

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}') = -\frac{\omega^2}{2} \int d^3x' x'^i x'^j \tilde{T}^{00} . \quad (3.96)$$

Definimos aqui o chamado tensor momento de quadrupolo sendo dado por (PADMANABHAN, 2010), (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006),

$$Q^{ij}(t) = \int d^3x' x'^i x'^j T^{00}(t, \mathbf{x}') . \quad (3.97)$$

A partir dos resultados encontrados até aqui, a equação (3.88) pode ser escrita como

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2 \frac{G_N}{c^4} \frac{\exp(i\omega r)}{r} \omega^2 \tilde{Q}_{ij}(\omega) . \quad (3.98)$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa, temos que

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G_N}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}(t_r) . \quad (3.99)$$

Observe que a radiação gravitacional emitida por uma fonte isolada, composta de matéria não relativística e muito distante é proporcional à segunda derivada temporal do momento de quadrupolo, logo em primeira ordem se o momento de quadrupolo do sistema variar com o tempo, haverá a geração de ondas gravitacionais.

### 3.5 Energia transportada por ondas gravitacionais

Ao discutir sobre ondas gravitacionais, um problema que se torna fundamental é a sua energia. As dificuldades que aparecem não envolvem apenas questões técnicas, mas conceituais, pois o Princípio da Equivalência elimina qualquer definição para energia de um campo gravitacional.

Na década de 1950, houve uma discussão se ondas gravitacionais poderiam ou não transportar energia. Essa controvérsia foi resolvida por Hermann Bondi em seu artigo de

1957, onde o mesmo demonstrou que ondas gravitacionais transportam energia, embora não tenha sido possível relacionar a intensidade da onda com a quantidade de energia transportada (BONDI, 1957).

Uma descrição matemática para a energia de ondas gravitacionais não havia sido provada até as obras de Richard A. Isaacson, em que um tensor de energia-momento efetivo de ondas gravitacionais foi obtido pela média do quadrado do gradiente da onda em vários comprimentos de onda, esta técnica ficou conhecida como aproximação de ondas curtas (ISAACSON, 1968).

Como estamos trabalhando em um regime linear, a perturbação é interpretada como um campo tensorial definido como um *background* fixo (MACEDO, 2011). Para avaliar quanta energia e momento são transportados em ondas gravitacionais por um sistema dinâmico, precisamos de um tensor que descreva adequadamente essas quantidade para o campo gravitacional.

Até este momento escrevemos as equações para as ondas gravitacionais em primeira ordem, porém em primeira ordem  $h_{\mu\nu}$  não exerce interação. Logo se faz necessário incluir os termos de segunda ordem, assim sempre aparecerá uma auto-interação, pois a energia e momento transportados contribuem para modificar a si próprios. Logo nossa métrica será,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (3.100)$$

e o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (3.101)$$

onde  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  é da mesma ordem que  $h_{\mu\nu}^{(1)}$ , enquanto que  $h_{\mu\nu}^{(2)}$  e  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  são da mesma ordem que  $(h_{\mu\nu}^{(1)})^2$ .

Embora seja válido aproximar a métrica como a equação (3.100), nos deparamos com o problema de distinguir a perturbação de fundo. Na verdade, não existe uma maneira geralmente inequívoca de distinguir uma perturbação de fundo. Consequentemente, a noção de densidade de energia local associada às ondas gravitacionais não existe.

No entanto, a distinção entre os comprimentos característicos pode ser feita para a detecção de ondas gravitacionais na Terra. Introduzimos duas escalas de comprimento:  $\lambda^2$  denota a escala na qual  $h_{\mu\nu}$  varia, enquanto  $L_B$  denota a escala na qual  $\eta_{\mu\nu}$  varia. Assumimos que as ondas gravitacionais medidas na Terra possuem escalas de comprimento características muito menores do que a métrica de fundo, ou seja,  $\lambda \ll L_B$ . Isso é frequentemente chamado de aproximação de ondas curtas. Dentro da aproximação de ondas curtas, podemos introduzir um esquema para separar a perturbação de fundo. Tal

---

<sup>2</sup> Definimos  $\tilde{\lambda} = \lambda/2\pi$ .

divisão pode ser realizada introduzindo uma escala de comprimento  $l$  tal que  $\lambda \ll l \ll L_B$  (LI, 2015).

Podemos agora introduzir a média sobre um volume espacial com lados de comprimento  $l$ , denotados por  $\langle \dots \rangle$ . O efeito de tal esquema de média é que os termos que variam na escala de  $\lambda$  tendem a zero, enquanto os termos que variam na escala de  $L_B$  permanecem constantes. Por exemplo, a parte de  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  que varia na escala de  $L_B$  pode ser escrita como  $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$ . Por outro lado, a parte que flutua na escala de  $\lambda$  pode ser identificada como o resto,  $R_{\mu\nu}^{(2)} - \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$  (LI, 2015).

Da mesma forma, o tensor de Ricci se divide em duas partes: uma parte para baixas frequências (associada a  $L_B$ ),

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = - [R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{BF}} + \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{BF}} \quad (3.102)$$

e uma parte para altas frequências (associada a  $\lambda$ )

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = - [R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{AF}} + \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{AF}}, \quad (3.103)$$

onde  $T$  é o traço de  $T_{\mu\nu}$  (MAGGIORE, 2008) e o sobrescrito “BF” denota o modo de baixas frequências e “AF” para altas frequências.

Como queremos estudar o efeito das ondas gravitacionais sobre a métrica de fundo, iremos considerar apenas o tensor de Ricci para baixas frequências. Podemos escrever (3.102) como

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = - \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \frac{8\pi G_N}{c^4} \left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right\rangle. \quad (3.104)$$

Agora definimos um tensor de energia-momento efetivo da matéria, que denotamos por  $\bar{T}^{\mu\nu}$ , logo

$$\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right\rangle = \bar{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{T} \quad (3.105)$$

onde  $\bar{T} = \eta_{\mu\nu} \bar{T}^{\mu\nu}$ . Por definição  $\bar{T}^{\mu\nu}$  é uma quantidade que aparece em baixas frequências, uma parte macroscópica de  $T_{\mu\nu}$ .

Definimos uma quantidade  $t_{\mu\nu}$  como,

$$t_{\mu\nu} = - \frac{c^4}{8\pi G_N} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(2)} \right\rangle, \quad (3.106)$$

onde

$$R^{(2)} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (3.107)$$

e definimos o traço de  $t_{\mu\nu}$  como

$$t = \eta^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G_N} \langle R^{(2)} \rangle . \quad (3.108)$$

Substituindo (3.108) em (3.106), temos

$$-\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} t \right) . \quad (3.109)$$

A partir de (3.105) e (3.109), podemos reescrever (3.104), como

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} t \right) + \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{T} \right) \quad (3.110)$$

ou

$$R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(0)} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( \bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu} \right) . \quad (3.111)$$

A equação (3.111) é uma forma “grosseira” das equações de Einstein. Essas equações determinam a dinâmica de  $\eta_{\mu\nu}$ , que é a parte de comprimento de baixa frequência da métrica, em termos da parte de comprimento de baixa frequência do tensor energia-momento da matéria,  $\bar{T}_{\mu\nu}$ , e de um tensor  $t_{\mu\nu}$  que não depende da matéria externa, mas apenas do próprio campo gravitacional, e é quadrático em  $h_{\mu\nu}$  (MAGGIORE, 2008).

A correção de ordem quadrática para o tensor de Ricci é dada por

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \right. \\ \left. - h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \right. \\ \left. - \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} \right) . \end{aligned} \quad (3.112)$$

Podemos simplificar a equação (3.112), fazendo as seguintes considerações (LI, 2015):

- assumimos que o *background* é quase plano de modo que se pode escrever  $D_\mu A \sim \partial_\mu A$ , onde A pode ser um vetor ou um tensor;
- os termos de fronteira podem ser ignorados na integração por partes, pois  $\lambda \ll l$ ;
- derivadas de tempo e espaço podem ser trocadas, pois soluções de  $\square h_{\alpha\beta} = 0$  dependem do tempo retardado  $t_r$ ;
- usar a equação de campo  $\square h_{\mu\nu} = 0$ , e as condições de calibre  $\partial^\mu h_{\mu\nu}$  e  $h = 0$ .

Aplicando as condições acima, podemos observar que apenas o primeiro termo de (3.112) não é nulo, logo

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle . \quad (3.113)$$

Com isso podemos escrever  $t_{\mu\nu}$  como

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G_N} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle . \quad (3.114)$$

Até o momento tratamos  $t_{\mu\nu}$  como um tensor, porém se trata de um pseudo-tensor. Outro fator que deve ser observado é quanto a invariância de  $t_{\mu\nu}$  sob transformações de calibre. Além disso, outra questão importante é quanto a sua localidade, pois como depende das derivadas primeiras da métrica, podemos zerá-lo ao escolhermos um sistema de coordenadas conveniente (MACEDO, 2011). Para contornar esses problemas se faz necessário do uso da média ao longo de vários comprimentos de onda, pois a média é uma propriedade global. Na norma TT, a equação (3.114), pode ser escrita como

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G_N} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta}^{TT} \partial_\nu h^{\alpha\beta}_{TT} \rangle . \quad (3.115)$$

Agora iremos determinar a taxa de energia perdida por unidade de tempo por um sistema que emite ondas gravitacionais através de uma superfície a uma grande distância da fonte, de acordo com a equação (3.99). Dada a conservação

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0 , \quad (3.116)$$

temos que

$$\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0 , \quad (3.117)$$

onde  $V$  é um volume espacial em uma região distante, limitado por uma superfície  $S$ .

A energia incidente sobre  $V$  é

$$E_V = \int_V d^3x t^{00} , \quad (3.118)$$

logo a equação (3.117), pode ser reescrita como

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = - \int_V d^3x \partial_i t^{0i} = - \int_S dA n_i t^{0i} , \quad (3.119)$$

onde  $n_i$  é ortonormal a  $S$  e  $dA$  é um elemento de superfície.

Sendo  $S$  uma superfície esférica a uma distância  $r$  da fonte, temos que  $dA = r^2 d\Omega$  e  $\hat{n} = \hat{r}$ , assim a equação (3.119) se reduz a

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{0r} , \quad (3.120)$$

onde, utilizando (3.115), temos

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G_N} \langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \partial_r h_{ij}^{TT} \rangle . \quad (3.121)$$

Uma onda gravitacional, a uma distância suficientemente grande, pode ser escrita de forma geral como (MAGGIORE, 2008)

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r} f_{ij}(t_r) , \quad (3.122)$$

onde  $f_{ij}$  depende apenas do tempo retardado  $t_r$ .

Derivando (3.122) com respeito a  $r$ ,

$$\partial_r h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r} \partial_r f_{ij}(t_r) - \frac{1}{r^2} f_{ij}(t_r) , \quad (3.123)$$

e da definição de tempo retardado, temos que

$$\partial_r f_{ij}(t_r) = -\frac{1}{c} \partial_t f_{ij}(t_r) . \quad (3.124)$$

Substituindo (3.124) em (3.123) e desprezando os termos de segunda ordem, temos

$$\partial_r h_{ij}^{TT}(t, r) = \partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r) . \quad (3.125)$$

Observe que para grandes distâncias, temos que  $t^{0r} = t^{00}$ , logo a taxa de energia por tempo, pode ser escrita como

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{00} . \quad (3.126)$$

A partir de (3.115) e usando  $\partial_t = \partial_0/c$ , temos

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G_N} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle . \quad (3.127)$$

Portanto

$$\frac{dE_V}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G_N} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle . \quad (3.128)$$

A potência irradiada por sistemas físicos devido a emissão de ondas gravitacionais, é dada por

$$P = \frac{1}{c} \int_V d^3x t^{0k} . \quad (3.129)$$

Ao fazermos as mesmas considerações que foram feitas para determinar (3.128), temos

$$c\partial_0 P = \int_V d^3x \partial_0 t^{0k} = - \int_S dA t^{0k} . \quad (3.130)$$

Logo,

$$P = - \int_S r^2 d\Omega t^{0k} , \quad (3.131)$$

onde  $dA = r^2 d\Omega$ .

Como a onda se propaga em uma direção radial temos que  $t^{0k} = t^{0r}$ . Usando (3.121), (3.125), (3.99) e a propriedade (A.9) do tensor Lambda (ver Apêndice A), temos

$$t^{0r} = \frac{G_N}{8\pi r^2} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \langle \ddot{Q}_{ij}^{TT} \ddot{Q}_{kl}^{TT} \rangle . \quad (3.132)$$

Portanto a potência irradiada é dada por

$$P = - \frac{G_N}{8\pi} \langle \ddot{Q}_{ij}^{TT} \ddot{Q}_{kl}^{TT} \rangle \int_S d\Omega \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) . \quad (3.133)$$

Para resolver a integral basta observar que a dependência de  $\hat{\mathbf{n}}$  está apenas em  $\Lambda_{ij,kl}$ . Usando as seguintes relações abaixo

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} , \quad (3.134)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (3.135)$$

Podemos escrever

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik} \delta_{jl} - 4\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (3.136)$$

Por fim, em módulo

$$P_{\text{quad}} = \frac{G_N}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle , \quad (3.137)$$

onde  $\ddot{Q}_{ij}$  está avaliado no tempo retardado  $t_r$ .



## 4 Pulsar binário

Mais de cem anos depois de Einstein ter formulado sua teoria da Relatividade Geral, esforços para testar a relatividade e seus conceitos ainda estão sendo feitos por muitos pesquisadores ao redor do mundo, usando muitas abordagens diferentes.

Os pulsares provaram ser laboratórios notavelmente bem sucedidos para testes das previsões relativísticas. Os testes de Relatividade Geral que são possíveis através do tempo de pulsar se enquadram em duas grandes categorias: estabelecer limites nas magnitudes dos parâmetros que descrevem a violação dos princípios de equivalência, muitas vezes usando um conjunto de pulsares, e verificar se os parâmetros pós-keplerianos medidos de um determinado sistema binário correspondem às previsões de Relatividade Geral de campo forte melhor do que as de outras teorias.

### 4.1 Estrela de nêutrons

Em 1934, Walter Baade e Fritz Zwicky propuseram a ideia de estrelas de nêutrons, apontando que elas teriam densidade muito alta e raio pequeno, e seriam muito mais gravitacionalmente ligadas do que as estrelas comuns. Eles também fizeram a sugestão notavelmente presciente de que estrelas de nêutrons seriam formadas em explosões de supernovas ([BURROWS, 2015](#)).

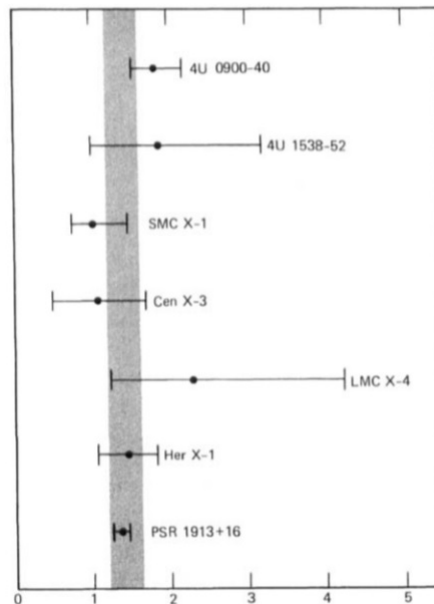
As estrelas de nêutrons são, grosso modo, como um núcleo gigantesco, com densidade semelhante à da matéria nuclear. Sua densidade média é  $6,7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ , em comparação com a densidade da matéria nuclear  $2,7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Geralmente possuem raio de 10 km e massa  $\approx 1,4M_{\odot}$  (ver Figura 6). A maior parte da estrela é um fluido de nêutrons em equilíbrio, com cerca de 5% de prótons e elétrons. Essa proporção é determinada por um equilíbrio entre decaimento de nêutrons e associação próton/elétron. Uma crosta externa, com cerca de 1 km de espessura, na forma de uma rede cristalina sólida, feita de núcleos pesados: ferro perto da superfície, com núcleos pesados cada vez mais ricos em nêutrons abaixo ([TAKIBAYEV; BOSHKAYEV, 2017](#)).

Sendo um dos possíveis estágios finais da vida estelar, uma estrela de nêutrons é formada durante o colapso do núcleo de estrelas massivas, tipicamente com massas entre 8 e 40 vezes a massa solar. Estrelas menos massivas se tornam anãs brancas e as mais massivas, buracos negros. Durante este colapso, a forte pressão exercida pela força gravitacional favorece um processo denominado decaimento beta inverso, onde um próton ( $p^+$ ) e um elétron ( $e^-$ ) se combinam e formam um nêutron ( $n$ ) e um neutrino ( $\nu$ )



Os neutrinos escapam da estrela, levando parte da energia gravitacional, mas com a densidade crescente, alguns ficam presos, o objeto resultante é denominado estrela de nêutrons (GONCALVES; LAZZARI, 2020) (MENDES, 2021).

Figura 6 – Massa de algumas estrelas de nêutrons em  $M_{\odot}$ .



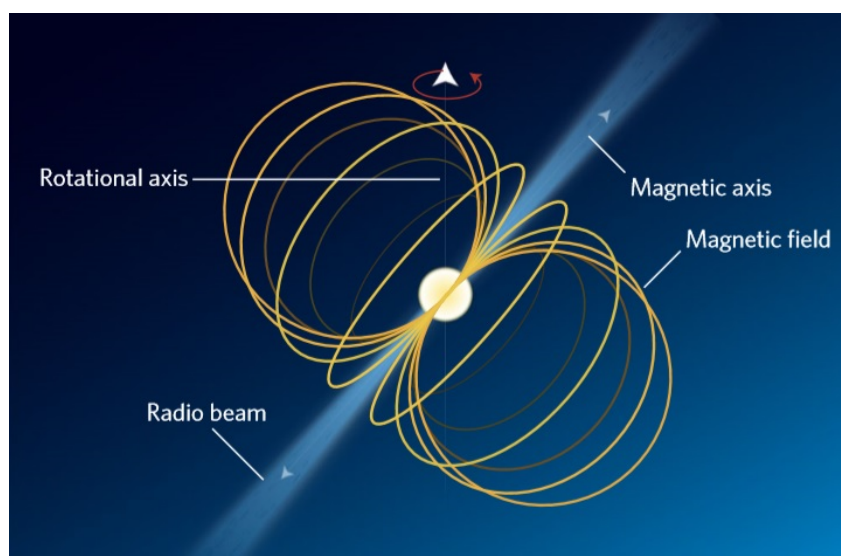
Fonte: (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008)

## 4.2 Pulsar binário

Em 1967, a primeira estrela de nêutrons foi detectada por Jocelyn Bell e Anthony Hewish (HEWISH et al., 1969). A princípio, eles acreditavam que eles estavam capturando sinais de uma civilização extraterrestre. A fonte desses pulsos foi inicialmente chamada de LGM1, *Little Green Man 1*. Uma vez estabelecido que os sinais não eram dessa origem, o objeto não identificado de onde eles vinham foi chamado de pulsar porque a emissão foi “pulsada”. O pulsar descoberto por Bell e Hewish é agora chamado PSR B1919+21: PSR significa Fonte Pulsante de Rádio (do inglês *Pulsating Source of Radio*) e B1919+21 indica a posição do pulsar no céu.

Estrelas de nêutrons que giram muito rapidamente, cerca de uma vez por segundo, são conhecidas como pulsares, e esses são os objetos que Bell e Hewish detectaram. Essa rotação faz com que partículas eletricamente carregadas ao redor da estrela de nêutrons se movam rapidamente nos campos magnéticos intensos. Isso faz com que a radiação eletromagnética (como ondas de rádio) seja emitida em dois feixes em forma de cone ao longo dos polos magnéticos Norte e Sul do pulsar, mostrados na Figura 7.

Figura 7 – Esquema simplificado de um pulsar.



Fonte: (BURNELL, 2017)

O primeiro pulsar binário a ser descoberto, PSR B1913+16, foi encontrado por Russell Alan Hulse e Joseph Hooton Taylor Júnior em 1974 durante uma busca sistemática utilizando o radiotelescópio de Arecibo. Ainda é um dos sistemas mais notáveis, e muitas vezes é conhecido pelo nome como o Pulsar de Hulse-Taylor (HULSE; TAYLOR, 1975).

Um constatação muito importante foi feita quando o sistema ficou sob observação por alguns anos. Descobriu-se que o período orbital estava diminuindo, ou seja, os dois corpos astronômicos estavam girando cada vez mais rápido um sobre o outro em uma órbita cada vez mais estreita. Esta mudança foi presumida ocorrer porque o sistema está emitindo energia na forma de ondas gravitacionais de acordo com a Relatividade Geral. O primeiro relato deste efeito foi feito por Taylor e colaboradores no final de 1978, quatro anos após a descoberta do pulsar binário (TAYLOR; FOWLER; MCCULLOCH, 1979). A boa concordância entre o valor observado e o valor teoricamente calculado da trajetória orbital pode ser visto como uma prova indireta da existência de ondas gravitacionais. A Figura 9 faz referência a este fenômeno.

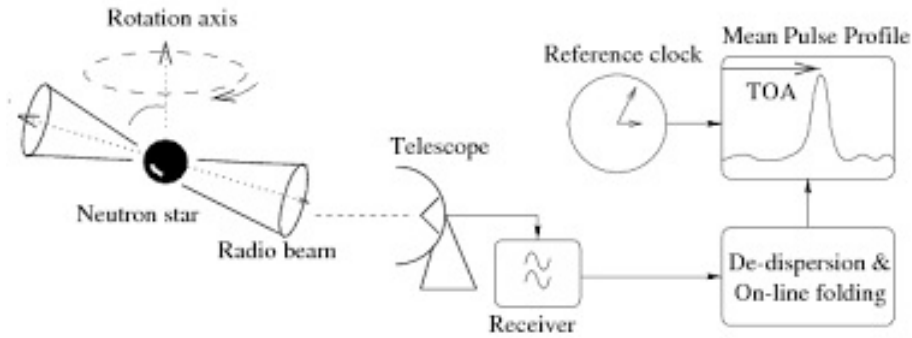
### 4.3 Cronometrando pulsares

Uma das características que tornam os pulsares objetos astrofísicos únicos é a emissão periódica de ondas eletromagnéticas. A estrutura da ciência do pulsar é baseada nessa propriedade e os pulsares com uma precisão surpreendente permitem medidas de várias quantidades físicas. A cronometragem de pulsares é em si uma tarefa complexa e descreveremos nesta seção os princípios gerais deste estudo.

Ao fazer a cronometragem de um pulsar, tenta-se essencialmente associar os pulsos

observados de um pulsar, ou mais estritamente falando, seus tempos de chegada (TOA's do inglês *time of arrival*), com um modelo que descreve seu comportamento passado, a partir do qual os TOA's futuros podem ser previstos (BRETON, 2009).

Figura 8 – Diagrama de processo de cronometragem de pulsares.



Fonte: (LORIMER; KRAMER, 2005)

Em um primeiro momento, aparentemente é fácil fazer a cronometragem de pulsares. Eles giram e emitem feixes de luz que cruzam nossa linha de visão uma vez por rotação e são captados pelos nossos receptores. Porém, na realidade, trata-se de algo mais engenhoso.

Vamos supor por enquanto que alguns pulsares emitem intrinsecamente sinais perfeitamente periódicos. Como visto de um observador na Terra, o intervalo de tempo entre os pulsos varia ao longo de um ano devido ao movimento da Terra ao redor do Sol. No caminho para a Terra, os pulsos eletromagnéticos se dispersam à medida que passam pela matéria ionizada do meio interestelar, então a velocidade de propagação depende da frequência: as altas frequências viajam mais rápido que as baixas frequências e chegam mais cedo, então temos uma dispersão dependente da frequência. A Terra não é, portanto, uma escolha adequada para o tempo de pulsar e escolher o baricentro do sistema solar (SSB, do inglês *solar system baricenter*) é certamente mais apropriado, pois a Terra se move com relação o baricentro do sistema solar. Logo, precisamos transformar os intervalos de tempo medidos aqui na Terra para o baricentro do sistema solar (COSTA, 2020).

Pode-se relacionar o TOA de um pulso recebido por um observador na Terra ( $\tau$ ) com um medido no SSB ( $t_{\text{SSB}}$ ), como

$$t_{\text{SSB}} = \tau - \frac{\Delta D}{\nu^2} + \Delta_{R_{\odot}} + \Delta_{E_{\odot}} + \Delta_{S_{\odot}} , \quad (4.2)$$

onde o primeiro parâmetro de correção  $\Delta D/\nu^2$  é a correção da medida de dispersão, como foi discutido anteriormente a luz viaja a uma velocidade diferente em um meio ionizado.

O segundo  $\Delta_{R_{\odot}}$  é chamado de atraso de Roemer, uma correção clássica para explicar o atraso temporal para a viagem da luz entre os dois referenciais,

$$\Delta_{R_{\odot}} = -\frac{\mathbf{r}_{\text{ob}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{r}_{\text{ob}}$  é a distância entre a Terra e o SSB, e  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário do SSB ao pulsar (LYNE; GRAHAM-SMITH, 2012).

A terceira correção,  $\Delta_{E_{\odot}}$ , é chamada de atraso de Einstein, resultado da combinação da dilatação temporal devido ao movimento da Terra em sua órbita e do *redshift* gravitacional causado pelas massas presentes no sistema solar

$$\Delta_{E_{\odot}} = \int^t dt' \left[ \frac{v_{\text{obs}}^2(t')}{2c^2} - \phi(x_{\text{obs}}(t')) \right], \quad (4.4)$$

onde  $v_{\text{obs}}$  e  $x_{\text{obs}}$  são a velocidade e posição do observador, respectivamente e  $\phi$  dá o *redshift* gravitacional (MAGGIORE, 2008).

A última correção,  $\Delta_{S_{\odot}}$  é chamada de atraso de Shapiro. Sabe-se da Relatividade Geral que a matéria curva o espaço-tempo, devido a essa curvatura acontece um “aumento” de caminho que retarda o sinal. Tem-se

$$\Delta_{S_{\odot}} = -\frac{2G_N M_{\odot}}{c^3} \ln(1 + \cos \theta), \quad (4.5)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o Pulsar, a Terra e o Sol (LYNE; GRAHAM-SMITH, 2012).

A equação (4.2) é suficiente para vincular os referenciais do sistema solar e do pulsar, uma vez que o efeito de paralaxe é ignorado, dada a distância entre a Terra e a maioria dos pulsares. No entanto, quando o pulsar está em um sistema binário, são necessárias novas correções devido aos efeitos relativísticos semelhantes ao que acontece no sistema solar, logo a relação de tempos é dada por

$$t_{\text{SSB}} = \tau - \frac{\Delta D}{\nu^2} + \Delta_{R_{\odot}} + \Delta_{E_{\odot}} + \Delta_{S_{\odot}} + \Delta_R + \Delta_E + \Delta_S. \quad (4.6)$$

Os novos termos descrevem um atraso adicional de Roemer devido à órbita binária, um atraso de Einstein e Shapiro devido ao campo gravitacional do companheiro e mudanças causadas pelo movimento orbital (LORIMER; KRAMER, 2005).

Quando a velocidade orbital é muito menor que a velocidade da luz, a dinâmica newtoniana explica com precisão o comportamento dos pulsares binários. Nesta situação, o atraso de Roemer se reduz essencialmente ao deslocamento Doppler induzido pelo movimento orbital em torno do centro de massa e é descrito pelas leis de Kepler.

## 4.4 Parâmetros pós-keplerianos

Cinco parâmetros, chamados de parâmetros keplerianos, são usados para caracterizar órbitas de pulsares e outros corpos do universo:

- Período orbital,  $P_b$ ;
- Excentricidade,  $e$ ;
- Projeção do semi-eixo maior,  $x = a \sin(i)$ ;
- Longitude do periastro,  $\omega$ ;
- Época da passagem do periastro,  $T_0$ ,

onde  $a$  é o tamanho do semi-eixo maior e  $i$  a inclinação.

Na presença de campo forte outros parâmetros são utilizados em função dos parâmetros keplerianos, estes são conhecidos como parâmetros pós-keplerianos.

#### 4.4.1 Atraso de Einstein

Os atrasos de Roemer e Shapiro são calculados em relação a coordenada  $t$ , porém um observador na posição  $\mathbf{x}$  mede seu tempo próprio  $\tau$ , que na métrica, está relacionado a  $t$  por (MAGGIORE, 2008)

$$c^2 d\tau^2 = [1 + 2\phi(\mathbf{x})] c^2 dt^2 - [1 - 2\phi(\mathbf{x})] d\mathbf{x}^2, \quad (4.7)$$

onde o potencial newtoniano é dado por

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{G_N m_p}{c^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|} - \frac{G_N m_c}{c^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|}, \quad (4.8)$$

e  $m_p$  é a massa do pulsar,  $\mathbf{x}_p$  é posição do centro do pulsar e  $m_c$  e  $\mathbf{x}_c$  são a massa e posição do companheiro, respectivamente.

Então, em primeira ordem nos parâmetros  $\phi(x)$  e  $v = dx/dt$ , temos

$$\frac{d\tau}{dt} \simeq 1 + \phi(x) - \frac{v^2}{2c^2}. \quad (4.9)$$

O segundo termo do lado direito da igualdade (4.8) é pequeno e portanto a aproximação de campo fraco é legítima. No entanto, a auto-gravidade do pulsar é forte em sua superfície. Para uma estrela de nêutrons típica, com raio  $r_{NS} \simeq 10$  km e massa  $m_{NS} \simeq 1,4M_\odot$ , temos  $G_N m_{NS}/(c^2 r_{NS}) \simeq 0,2$ . Porém, este termo não muda ao longo da trajetória do pulsar em órbita ao redor de seu companheiro, portanto, não introduz uma modulação do tempo de chegadas. Seu efeito é simplesmente reabsorvido em uma constante do tempo próprio  $T$ , que não é observável. Assim, a parte dependente do tempo do atraso de Einstein pode ser calculada simplesmente usando (MAGGIORE, 2008).

$$\frac{dT}{dt} = 1 - \frac{G_N m_c}{c^2 |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_c|} - \frac{v_p^2}{2c^2}, \quad (4.10)$$

onde  $v_p$  é a velocidade do pulsar dado por

$$v_p = \frac{m_c}{m_p + m_c} v , \quad (4.11)$$

e  $v$  é a velocidade relativa no centro de massa do sistema.

Utilizando a seguinte relação kepleriana

$$v^2 = G_N \left[ \frac{2(m_p + m_c)}{r} - \frac{(m_p + m_c)}{a} \right] \quad (4.12)$$

e substituindo em (4.10), temos

$$\frac{dT}{dt} = 1 - \frac{G_N}{c^2} \left[ \frac{m_c(m_p + 2m_c)}{m_p + m_c} \frac{1}{r} - \frac{m_c^2}{m_p + m_c} \frac{1}{2a} \right] . \quad (4.13)$$

Fazendo uso da parametrização da órbita kepleriana em termos da anomalia excêntrica  $u$ , com  $u$  relacionado ao tempo  $t$  (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 1980)

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{P_b} (t - t_0) , \quad (4.14)$$

onde  $t_0$  é um tempo de referência da passagem do periastro. Diferenciando, temos

$$\frac{du}{dt} (1 - e \cos u) = \frac{2\pi}{P_b} , \quad (4.15)$$

logo

$$\frac{dT}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{dT}{du} = \frac{2\pi}{P_b} \frac{1}{1 - e \cos u} \frac{dT}{du} . \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) em (4.13) e usando a expressão kepleriana da anomalia (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 1980)

$$r = a(1 - e \cos u) , \quad (4.17)$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{P_b} \frac{dT}{du} &= \left( 1 - \frac{G_N}{c^2} \frac{2m_c m_p + 3m_c^2}{2a(m_p + m_c)} \right) - e \cos u \left( 1 + \frac{G_N}{c^2} \frac{m_c^2}{2a(m_p + m_c)} \right) \\ &\simeq \left( 1 - \frac{G_N}{c^2} \frac{2m_c m_p + 3m_c^2}{2a(m_p + m_c)} \right) \times \left[ 1 - e \cos u \left( 1 + \frac{G_N}{c^2} \frac{m_c(m_p + 2m_c)}{a(m_p + m_c)} \right) \right] , \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde na segunda linha estão apenas os termos de primeira ordem em  $G_N$ . O fator geral é um reescalamento multiplicativo constante do tempo próprio do pulsar  $T$ . Como

foi citado anteriormente, tal fator é inobservável, pois relaciona o tempo próprio (não observável) que o pulsar teria na presença apenas de seu próprio campo gravitacional, ao seu tempo próprio real que inclui o efeito gravitacional do companheiro e a velocidade orbital do pulsar. Em vez disso, a correção proporcional a  $\cos u$  produz uma modulação ao longo da órbita, portanto é observável. Podemos reabsorver o fator multiplicativo na definição do tempo próprio, redimensionando

$$T \rightarrow \left(1 - \frac{G_N}{c^2} \frac{2m_c m_p + 3m_c^2}{2a(m_p + m_c)}\right) T, \quad (4.19)$$

e a equação (4.18) se torna

$$\frac{dT}{du} = \frac{P_b}{2\pi} (1 - e \cos u) - \gamma \cos u, \quad (4.20)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de Einstein dado por

$$\gamma = e \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{1/3} \frac{G_N^{2/3} m_c (m_p + 2m_c)}{c^2 (m_p + m_c)^{4/3}}. \quad (4.21)$$

Escrevendo

$$T = t - \Delta_E \quad (4.22)$$

onde  $t$  é o tempo da emissão do pulso, temos da equação (4.14) que

$$\left(\frac{2\pi}{P_b}\right) \frac{dt}{du} = 1 - e \cos u, \quad (4.23)$$

logo

$$\frac{d\Delta_E}{du} = \gamma \cos u. \quad (4.24)$$

Assim obtemos o atraso de Einstein como

$$\Delta_E = \gamma \sin u, \quad (4.25)$$

o parâmetro  $\gamma$  denota a amplitude dos atrasos nos tempos de chegada causados pelos efeitos variados do *redshift* e da dilatação do tempo (Doppler de segunda ordem) à medida que o pulsar se move em sua órbita elíptica a distâncias variadas do companheiro e com velocidades variadas.



### 4.4.2 Taxa de avanço do periastro

Considerando uma órbita kepleriana, desprezando as correções relativísticas gerais e utilizando as coordenadas polares  $(r, \psi)$  no plano da órbita, a equação de movimento kepleriana é dada em forma paramétrica, em termos de anomalia excêntrica  $u$ , por

$$r(u) = a(1 - e \cos u) , \quad (4.26)$$

e

$$\cos \psi(u) = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} . \quad (4.27)$$

Por causa da conservação do momento angular, a equação para a coordenada relativa  $\mathbf{r}$  descreve um movimento em um plano. Assim como no caso newtoniano, há duas quantidades conservadas, a energia total  $E$  e o momento angular total  $\mathbf{J}$ . Definindo

$$M = m_p + m_c \quad (4.28)$$

para a massa total, e

$$\mu = \frac{m_p m_c}{M} \quad (4.29)$$

para a massa reduzida, e

$$\nu = \frac{\mu}{M} = \frac{m_p m_c}{M^2} \quad (4.30)$$

para a razão de massa simétrica, onde  $0 \leq \nu \leq 1/4$ .

O problema de resolver o movimento do sistema binário é reduzido ao problema mais simples de resolver, o movimento relativo no referencial pós-newtoniano do centro de massa, onde as equações de movimento derivam do seguinte lagrangiano com termos até  $O(1/c^2)$  (DAMOUR; DERUELLE, 1986).

$$L = \frac{1}{2}v^2 + \frac{G_N M}{r} + \frac{1}{8}(1 - 3\nu)\frac{v^4}{c^2} + \frac{G_N M}{2rc^2} \left[ (3 + \nu)v^2 + \nu(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v})^2 - \frac{G_N M}{r} \right] , \quad (4.31)$$

onde  $v$  é a velocidade relativa e  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ .

Também é conveniente introduzir a energia e o momento angular por valor unitário de  $\mu$ ,  $\varepsilon = E/\mu$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{J}/\mu$ . Aplicando o teorema de Noether à lagrangiana (4.31), encontramos as expressão explícita das quantidades conservadas,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 + \frac{G_N M}{r} + \frac{3}{8}(1 - 3\nu)\frac{v^4}{c^2} + \frac{G_N M}{2rc^2} \left[ (3 + \nu)v^2 + \nu(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v})^2 - \frac{G_N M}{r} \right] \quad (4.32)$$

e

$$\mathbf{j} = \left[ 1 + \frac{1}{2} (1 - 3\nu) \frac{v^2}{c^2} + (3 + \nu) \frac{G_N M}{r c^2} \right] \mathbf{r} \times \mathbf{v} . \quad (4.33)$$

Com as equações (4.32), (4.33) e utilizando as identidades

$$v^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 , \quad (4.34)$$

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = r^2 \frac{d\psi}{dt} , \quad (4.35)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \frac{dr}{dt} , \quad (4.36)$$

obtemos as equações de movimento

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3} , \quad (4.37)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{H}{r^2} + \frac{I}{r^3} , \quad (4.38)$$

onde foram negligenciados os termos de segunda ordem pós-newtoniana  $O(1/c^4)$  e  $A, \dots, I$  são polinômios dados por

$$A = 2\varepsilon \left[ 1 + \frac{3}{2} (3\nu - 1) \frac{\varepsilon}{c^2} \right] , \quad (4.39)$$

$$B = G_N M \left[ 1 + (7\nu - 6) \frac{\varepsilon}{c^2} \right] , \quad (4.40)$$

$$C = -j^2 \left[ 1 + 2(3\nu - 1) \frac{\varepsilon}{c^2} \right] + (5\nu - 10) \frac{G_N^2 M^2}{c^2} \quad (4.41)$$

$$D = (8 - 3\nu) \frac{G_N M j^2}{c^2} , \quad (4.42)$$

$$H = j \left[ 1 + (3\nu - 1) \frac{\varepsilon}{c^2} \right] , \quad (4.43)$$

$$I = (2\nu - 4) \frac{G_N M j}{c^2} . \quad (4.44)$$

No limite  $c \rightarrow \infty$  temos  $D = I = 0$ , enquanto os demais coeficientes se reduzem aos seus valores newtonianos. A solução da equação (4.37) pode ser reduzido de forma

muito simples à integração de um movimento radial auxiliar não relativístico (DAMOUR; DERUELLE, 1986). Considere a seguinte mudança da variável radial

$$\bar{r} = r + \frac{D}{2j^2} . \quad (4.45)$$

Em termos de  $\bar{r}$ , a equação (4.37) se torna

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = A + \frac{2B}{\bar{r}} + \frac{\bar{C}}{\bar{r}^2} , \quad (4.46)$$

com  $\bar{C} = C + (BD/j^2)$ .

O movimento angular relativístico, ou seja, a solução da equação (4.38) também pode ser simplesmente reduzido à integração de um movimento angular auxiliar não relativístico

$$\tilde{r} = r - \frac{I}{2H} . \quad (4.47)$$

Em termos de  $\tilde{r}$ , a equação (4.38) se torna

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{H}{\tilde{r}^2} . \quad (4.48)$$

Como resultado, as equações de movimento para a ordem 1PN podem ser integradas analiticamente, e a solução pode ser colocada em uma forma semelhante à órbita kepleriana. Em particular, as equações (4.14) e (4.26) tornam-se

$$u - e_t \sin u = \frac{2\pi}{P_b} t , \quad (4.49)$$

e

$$r = a_r (1 - e_r \cos u) , \quad (4.50)$$

onde

$$a_r = -\frac{G_N M}{2\varepsilon} \left[ 1 - (\nu - 7) \frac{\varepsilon}{2c^2} \right] , \quad (4.51)$$

$$e_r^2 = 1 + \frac{2\varepsilon}{G_N^2 M^2} \left[ 1 + (5\nu - 15) \frac{\varepsilon}{2c^2} \right] \left[ j^2 + (\nu - 6) \frac{G_N^2 M^2}{c^2} \right] , \quad (4.52)$$

$$e_t^2 = 1 + \frac{2\varepsilon}{G_N^2 M^2} \left[ 1 + (17 - 7\nu) \frac{\varepsilon}{2c^2} \right] \left[ j^2 + (2 - 2\nu) \frac{G_N^2 M^2}{c^2} \right] , \quad (4.53)$$

$$\frac{2\pi}{P_b} = \frac{(-2\varepsilon)^{3/2}}{G_N M} \left[ 1 - (\nu - 15) \frac{\varepsilon}{4c^2} \right]. \quad (4.54)$$

Observe que a excentricidade  $e$  das soluções keplerianas agora é dividida em uma “excentricidade radial”,  $e_r$ , e uma “excentricidade no tempo”,  $e_t$ . Da mesma forma, a solução para  $\psi(u)$  é escrita em termos de uma “excentricidade angular”,  $e_\theta$

$$\psi = \omega_0 + (1 + k) A_{e_\theta}(u), \quad (4.55)$$

onde

$$k = \frac{3G_N M}{c^2 a (1 - e^2)}, \quad (4.56)$$

e

$$\omega_0^2 = \frac{G_N M}{a^3}. \quad (4.57)$$

Ao escolhermos a origem do tempo tal que, em  $t = 0$ , temos  $\psi = 0$  e fazendo uso de identidades trigonométricas, a equação (4.27) pode ser reescrita como

$$\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \tan\left(\frac{u}{2}\right), \quad (4.58)$$

ou seja,

$$\psi = A_e(u) \equiv 2 \arctan \left[ \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \right]. \quad (4.59)$$

A função  $A_{e_\theta}(u)$  é a mesma que na equação (4.59), com  $e \rightarrow e_\theta$  (MAGGIORE, 2008), portanto

$$e_\theta^2 = 1 + \frac{2\varepsilon}{G_N^2 M^2} \left[ 1 + (\nu - 15) \frac{\varepsilon}{2c^2} \right] \left[ j^2 - 6 \frac{G_N^2 M^2}{c^2} \right]. \quad (4.60)$$

Observe que, quando  $c \rightarrow \infty$ ,  $e_\theta^2$ ,  $e_r^2$  e  $e_t^2$  se reduzem ao mesmo  $e^2$  (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 1980)

$$e^2 = 1 + \frac{2EJ}{G_N^2 M^2 \mu}. \quad (4.61)$$

Finalmente, observamos da equação (4.50) que as passagens do periastro (ou seja, os mínimos  $r$ ) são alcançadas para  $u = u_n \equiv 2\pi n$ , com  $n$  inteiro. Como  $A_{e_\theta}(u_n) = 2\pi n$ , vemos pela equação (4.55) que  $2\pi k$  é o ângulo do periastro. Observe que na solução relativística geral, o avanço do periastro não é uniforme ao longo da órbita, mas é uma

função de  $u$ . Como a posição  $\omega$  do periastro avança  $2\pi k$  ao longo de um período, a derivada de  $\omega$ , calculada ao longo da órbita, é

$$\dot{\omega} = \frac{2\pi}{P_b} k, \quad (4.62)$$

ou seja,

$$\dot{\omega} = 3 \frac{G_N^{2/3}}{c^2} \left( \frac{P_b}{2\pi} \right)^{-5/3} (1 - e^2)^{-1} (m_p + m_c)^{2/3}. \quad (4.63)$$

#### 4.4.3 Atraso de Shapiro

O atraso de tempo de Shapiro é devido ao efeito do campo gravitacional do companheiro no sinal do pulsar (observe que o campo gravitacional do próprio pulsar entra na relação entre o tempo próprio do pulsar e o tempo coordenado, assim como o campo gravitacional da Terra quando computamos as correções do sistema solar).

Usando a equação kepleriana da órbita dada nas equações (4.26) e (4.27), e levando em consideração sua orientação em relação ao observador dada pelo ângulo do periastro e pela inclinação  $i$ , obtém-se

$$\Delta_S = -2r \log \left\{ (1 - e \cos u) - s \left[ \sin \omega (\cos u - e) + \sqrt{1 - e^2} \cos \omega \sin u \right] \right\}, \quad (4.64)$$

onde

$$r \equiv \frac{G_N m_c}{c^3} \quad (4.65)$$

e

$$s \equiv \sin i, \quad (4.66)$$

são chamados de intervalo e forma do atraso Shapiro, respectivamente ([MAGGIORE, 2008](#)).

#### 4.4.4 Decaimento do período orbital

Primeiro iremos calculamos a potência total irradiada em ondas gravitacionais integrada sobre todas as frequências e sobre o ângulo sólido. Escolhemos um referencial onde a órbita está no plano  $(x, y)$ . Portanto o momento de inércia é dado pela matriz  $2 \times 2$

$$M_{ab} = \mu r^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{bmatrix}_{ab} \quad (4.67)$$

onde  $a, b = 1, 2$  são índices no plano  $(x, y)$ . Para calcular a potência total emitida na aproximação do quadrupolo devemos calcular  $\ddot{M}_{ab}$ , e podemos usar a fórmula do quadrupolo na forma

$$P_{\text{quad}} = \frac{G_N}{5c^5} \left\langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{kk})^2 \right\rangle . \quad (4.68)$$

Esta equação é obtida ao substituirmos  $Q_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{kk}$  na equação (3.137) (MAGGIORE, 2008).

Na equação (4.67), a dependência do tempo está tanto em  $r(t)$  quanto em  $\psi(t)$ . A maneira mais simples para calcular essas derivadas é escrever  $M_{ab}$  como uma função de  $\psi$  apenas, eliminando  $r$  com a ajuda da primeira lei de Kepler em coordenadas polares (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 1980)

$$r(\psi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi} . \quad (4.69)$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu r^2 \cos^2 \psi \\ &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Como estamos em um referencial onde a órbita está no plano  $(x, y)$ , o momento angular é conservado tal que o módulo é dado por

$$L = \mu r^2 \dot{\psi} . \quad (4.71)$$

A partir da equação da órbita temos que

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{(G_N M R)^{1/2}}{r^2} \\ &= \left( \frac{G_N M}{a^3} \right)^{1/2} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \psi)^2 , \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde  $R$  é o raio médio da órbita.

Portanto temos que

$$\ddot{M}_{11} = \beta (1 + e \cos \psi)^2 (2 \sin 2\psi + 3 e \sin \psi \cos^2 \psi) , \quad (4.73)$$

$$\ddot{M}_{22} = \beta (1 + e \cos \psi)^2 [-2 \sin 2\psi - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)] , \quad (4.74)$$

$$\ddot{M}_{12} = \beta (1 + e \cos \psi)^2 \left[ -2 \cos 2\psi + e \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi) \right] , \quad (4.75)$$

onde

$$\beta \equiv \frac{4G_N^3 \mu^2 M^3}{a^5 (1 - e^2)^5} . \quad (4.76)$$

Substituindo (4.73), (4.74) e (4.75) na equação (4.68) obtemos a potência irradiada na aproximação quadrupolar, em função da posição  $\psi$  ao longo da órbita

$$P(\psi) = \frac{G_N}{5c^5} \left[ \ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 2\ddot{M}_{12}^2 - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22})^2 \right] ,$$

$$P(\psi) = \frac{2G_N}{15c^5} \left( \ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 3\ddot{M}_{12}^2 - \ddot{M}_{11}\ddot{M}_{22} \right) ,$$

$$P(\psi) = \frac{8}{15} \frac{G_N^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5 (1 - e^2)^5} (1 + e \cos \psi)^4 \left[ 12 (1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi \right] . \quad (4.77)$$

Conforme foi discutido na Seção 3.5, a energia das ondas gravitacionais só é bem definida tomando uma média temporal ao longo de vários períodos da onda. Como veremos abaixo, uma partícula em uma órbita elíptica kepleriana emite ondas gravitacionais em frequências que são múltiplos inteiros da frequência  $\omega_0$  definida na equação (4.57) e portanto, o período das ondas gravitacionais é uma fração do período orbital  $P_b$  dado por (MAGGIORE, 2008)

$$P_b = \frac{2\pi}{\omega_0} . \quad (4.78)$$

Então, uma quantidade bem definida é a média de  $P(\psi(t))$  em um período  $P_b$ . Podemos agora realizar esta média de tempo, escrevendo

$$P \equiv \frac{1}{P_b} \int_0^{P_b} dt P(\psi) ,$$

$$P = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\dot{\psi}} P(\psi) ,$$

$$P = (1 - e^2)^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} (1 + e \cos \psi)^{-2} P(\psi) ,$$

$$P = \frac{8}{15} \frac{G_N^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \left[ 12 (1 + e \cos \psi)^4 + e^2 (1 + \cos \psi)^2 \sin^2 \psi \right] . \quad (4.79)$$

Por fim a potência total irradiada é dada por

$$P = \frac{32 G_N^4 \mu^2 M^3}{5 c^5 a^5} f(e) , \quad (4.80)$$

onde

$$f(e) = (1 - e^2)^{-7/2} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) . \quad (4.81)$$

Combinando as equações (4.78), (4.57) e a equação que relaciona  $a$  com  $E$  (GOLDS-TEIN; POOLE; SAFKO, 1980) dada por

$$a = \frac{G_N M \mu}{2 |E|} . \quad (4.82)$$

Concluimos que o período orbital  $P_b$  está relacionado com a energia orbital  $E$  por  $P_b = \text{const.} \times (-E)^{-3/2}$ , logo

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{3 \dot{E}}{2 E} . \quad (4.83)$$

Da equação (4.80) encontramos a perda de energia média ao longo de um período orbital,  $\dot{E} = -P$  e, portanto

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{96 G_N \mu M^2}{5 c^5 a^4} f(e) , \quad (4.84)$$

onde utilizamos (4.82) para expressar  $E$  em termos de  $a$ .

Expressando  $a$  em termos de  $P_b$  usando as equações (4.78) e (4.57), podemos reescrever (4.84) como

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{96 G_N^{5/3} \mu M^{2/3}}{5 c^5} \left( \frac{P_b}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e) . \quad (4.85)$$

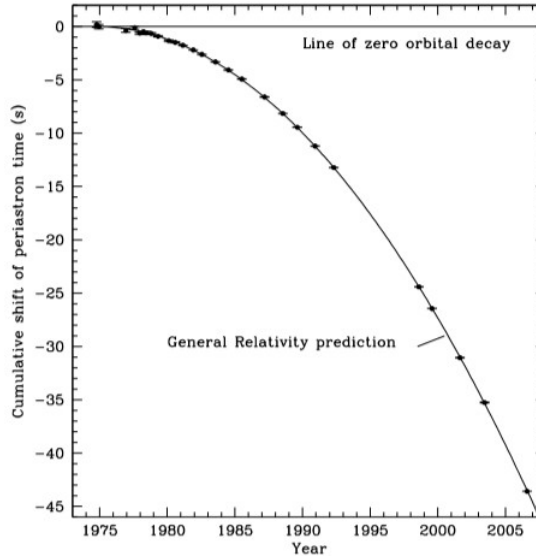
De forma geral para um sistema binário, temos

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi G_N^{5/3}}{5 c^5} \left( \frac{P_b}{2\pi} \right)^{-5/3} (1 - e^2)^{-7/2} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}} . \quad (4.86)$$

A concordância entre o decaimento do período orbital observado e a previsão relativística geral é ilustrada na Figura 9 para o Pulsar de Hulse-Taylor.



Figura 9 – Decaimento do período orbital causado pela perda de energia por radiação gravitacional. A parábola representa o deslocamento esperado do tempo do periastro em relação a uma órbita imutável, de acordo com a relatividade geral.



Fonte: (WEISBERG; NICE; TAYLOR, 2010)

## 4.5 Testando a gravidade com pulsares binários

Embora a Relatividade Geral pareça ser a melhor descrição do regime de campo forte até o momento, teorias alternativas da gravidade devem ser consideradas e testadas contra ela. Um meio direto de comparação é a utilização dos parâmetros pós-keplerianos. Para massas pontuais com contribuições insignificantes de spin, os parâmetros pós-keplerianos em cada teoria devem ser apenas funções da massa do pulsar, da massa de seu companheiro e dos parâmetros keplerianos.

Com as duas massas como os únicos parâmetros livres, uma observação de dois parâmetros pós-keplerianos já determinará as massas de forma única no quadro da teoria dada. A medição de um terceiro ou mais parâmetros pós-keplerianos fornece uma verificação de consistência para a teoria assumida (KRAMER, 2004).

Na Relatividade Geral, os cinco parâmetros pós-keplerianos mais importantes são:

- Taxa de avanço do periastro:

$$\dot{\omega} = 3 \frac{G_N^{2/3}}{c^2} \left( \frac{P_b}{2\pi} \right)^{-5/3} (1 - e^2)^{-1} (m_p + m_c)^{2/3}; \quad (4.87)$$

- Amplitude do atraso de Einstein:

$$\gamma = e \left( \frac{P_b}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{G_N^{2/3} m_c (m_p + 2m_c)}{c^2 (m_p + m_c)^{4/3}}; \quad (4.88)$$

- Decaimento do período orbital:

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5} \frac{G_N^{5/3}}{c^5} \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-5/3} (1-e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}} ; \quad (4.89)$$

- Intervalo do atraso de Shapiro:

$$r = \frac{G_N m_c}{c^3} ; \quad (4.90)$$

- Forma do atraso de Shapiro:

$$s = \frac{G_N^{-1/3}}{c} \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-2/3} x \frac{(m_p + m_c)^{2/3}}{m_c} . \quad (4.91)$$

Devido à curvatura do espaço-tempo próximo a corpos gravitantes, o próprio referencial de um objeto em queda livre sofre uma precessão em relação a um observador distante, chamada de precessão geodésica. Em um pulsar binário, a precessão geodésica leva a um acoplamento spin-órbita relativístico, análogo ao acoplamento spin-órbita na física atômica. Como consequência, a rotação do pulsar muda seu eixo de rotação em torno do momento angular total, alterando a orientação relativa do pulsar em direção ao observador.

Como o momento angular orbital é muito maior que o momento angular do pulsar, o spin orbital representa praticamente uma direção fixa no espaço, definida pelo plano orbital do sistema binário. A precessão geodésica do eixo de rotação do pulsar como previsto pela Relatividade Geral é dada por (BARKER; O'CONNELL, 1975)

$$\Omega_{\text{geod}} = \frac{G_N^{2/3}}{c^2} \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-5/3} \frac{m_c (4m_p + 3m_c)}{2(m_p + m_c)^{4/3}} (1-e^2)^{-1} . \quad (4.92)$$

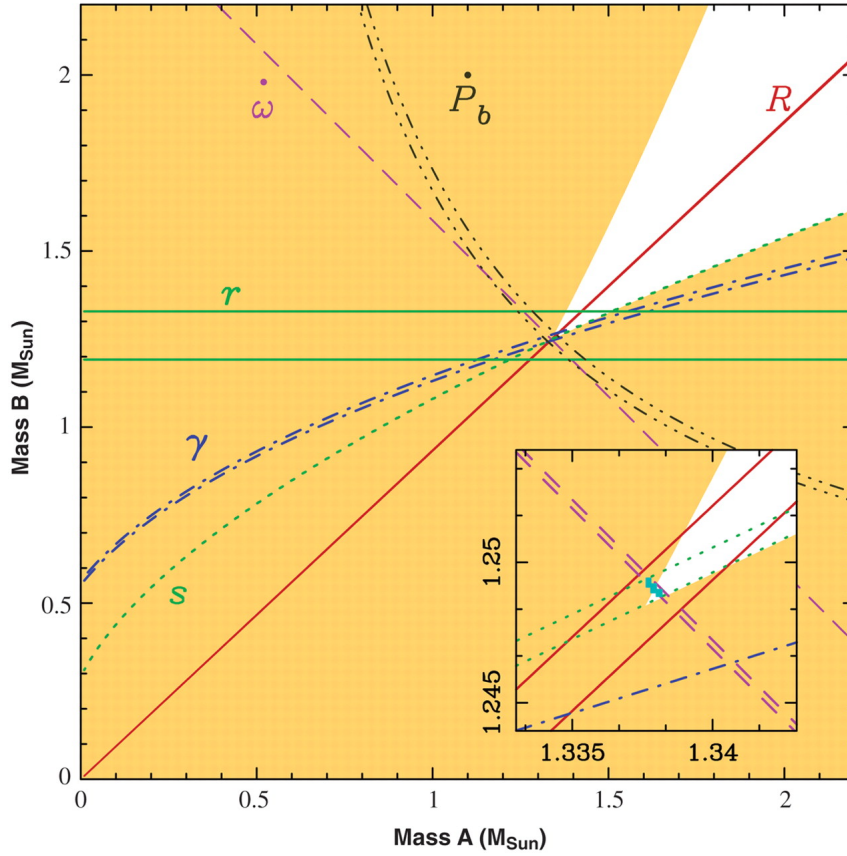
De maneira mais geral, uma medida de  $n$  parâmetros pós-keplerianos descreve  $n$  curvas no plano  $m_p \times m_c$ , cujas formas e posições dependem da teoria da gravidade. Para qualquer teoria da gravidade viável, todas as  $n$  curvas devem se encontrar em um único ponto, permitindo-nos realizar

$$N_{\text{testes}} = n - 2 , \quad (4.93)$$

com relação a Relatividade Geral (LORIMER; KRAMER, 2005). Por exemplo, na Figura 10 as medidas de cinco parâmetros pós-keplerianos,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{P}_b$ ,  $\gamma$ ,  $r$  e  $s$  do Pulsar Duplo, resultam no seguinte diagrama.

Observe que a região azul é uma área que está na interseção entre a grande maioria dos parâmetros pós-keplerianos, portanto podemos usar estes resultados para testar a Relatividade Geral de uma maneira muito elegante. Para cada parâmetro pós-kepleriano,

Figura 10 – Diagrama massa - massa para o Pulsar Duplo.



Fonte: (LORIMER; KRAMER, 2005)

a Relatividade Geral (ou qualquer outra teoria) prevê uma relação única entre as duas massas do pulsar binário. Se a teoria escolhida for uma descrição válida da natureza desse sistema, ao traçar cada uma dessas relações em um diagrama mostrando a massa  $m_p$  em um eixo e  $m_c$  no outro, esperamos que todas as curvas se cruzem em um único ponto. Portanto, ao observamos a Figura 10, vemos que a Relatividade Geral passa nos testes propostos pelo Pulsar Duplo.

Na Figura 10, ainda temos um parâmetro adicional  $R$  que aparece apenas no diagrama para o Pulsar Duplo, pois as pulsações da segunda estrela de nêutrons permitem a medição da projeção do semi-eixo maior de ambos os pulsares. Com isso temos a razão de massa  $R$  das duas estrelas de nêutrons. Este valor confere uma restrição qualitativamente diferente às massas das estrelas, uma vez que a relação

$$R = \frac{x_c}{x_p} = \frac{m_p}{m_c}, \quad (4.94)$$

é amplamente independente da teoria da gravidade adotada (YERLI et al., 2005).

Embora o decaimento orbital devido à emissão de ondas gravitacionais já seja detectado claramente, as incertezas de medição ainda são muito grandes para fornecer

uma restrição útil. Em particular, deve-se notar que o valor observado de  $\dot{P}_b$  possui contribuições decorrente de um movimento e aceleração relativos, é importante notar que a equação para  $\dot{P}_b$  é calculada no referencial do sistema orbital que é acelerado em relação ao referencial do sistema solar. Logo há uma aparente aceleração radial devido ao movimento transversal do pulsar binário em relação ao SSB, o que leva ao efeito Shklovskii (SHKLOVSKII, 1970):

$$\dot{P}_b^{\text{Shk}} = \frac{\mu^2 d}{c} P_b, \quad (4.95)$$

onde  $\mu$  é o movimento próprio do pulsar e  $d$  é a distância entre o observador e o pulsar. E uma aceleração radial física devido ao potencial gravitacional galáctico (KRAMER et al., 2021),

$$\dot{P}_b^{\text{gal}} = \frac{\mathbf{k}_0 (\mathbf{g}_{BP} - \mathbf{g}_{SSB})}{c} P_b, \quad (4.96)$$

onde  $\mathbf{g}_{SSB}$  e  $\mathbf{g}_{BP}$  são as acelerações gravitacionais galácticas do SSB e do pulsar binário, respectivamente, e  $\mathbf{k}_0$  é um vetor unitário direcionado do SSB para o pulsar binário.

Outras contribuições externas para  $\dot{P}_b$ , como as discutidas no contexto do pulsar Hulse-Taylor em (DAMOUR; TAYLOR, 1991), ainda são insignificantes. Combinando as (4.95) e (4.96), as contribuições externas ao decaimento do período orbital é dada por

$$\dot{P}_b^{\text{ext}} = \dot{P}_b^{\text{Shk}} + \dot{P}_b^{\text{gal}} \quad (4.97)$$

e conseqüentemente temos que

$$\dot{P}_b^{\text{obs}} = \dot{P}_b - \dot{P}_b^{\text{ext}}, \quad (4.98)$$

onde  $\dot{P}_b^{\text{obs}}$  é o decaimento do período orbital observado.

## 5 Modificando o setor radiativo das teorias gravitacionais

Os dados observacionais recentes em cosmologia indicam que o universo está atualmente se expandindo de forma acelerada. Esta conclusão inesperada pode ser explicada assumindo a presença de uma constante cosmológica extremamente precisa, ou invocando a existência de uma fonte exótica de energia, a energia escura, que não é observada em experimentos de laboratório, mas parece dominar o balanço energético do universo. Por outro lado, pode ser que essas observações estejam apenas sinalizando o fato de que a Relatividade Geral de Einstein não é a descrição correta da gravidade quando consideramos distâncias da ordem do horizonte atual do universo. Surgem nesse contexto extensões da Relatividade Geral que buscam explicar esses fenômenos, estas teorias são amplamente denominadas de teorias de gravidade modificada.

### 5.1 Teorias de gravidade modificada

A teoria de Einstein diz que a gravitação não é uma força, mas sim uma distorção do espaço-tempo de quatro dimensões em que vivemos. A teoria de Newton permitia que a informação viajasse em velocidades infinitas. No entanto, Einstein demonstrou que nada pode exceder um certo limite de velocidade do universo, a velocidade da luz, nem mesmo a gravidade. A Relatividade Geral é responsável por explicar muitos fenômenos experimentais, incluindo lentes gravitacionais, precessão anômala das órbitas dos planetas e o comportamento das ondas gravitacionais. No entanto, nas últimas décadas, os cientistas encontraram vários problemas que não podem ser explicados adequadamente apenas com a Relatividade Geral. As soluções desses problemas no âmbito da Relatividade Geral demandam grandes quantidades de matéria e energia invisíveis, denominadas matéria escura e energia escura, respectivamente.

Atualmente, o modelo padrão da cosmologia é o modelo  $\Lambda$ CDM. As teorias de gravidade modificada procuram encontrar explicações para os problemas no modelo  $\Lambda$ CDM modificando a Relatividade Geral. A fim de testar a validade das teorias de gravidade modificadas, pode-se comparar as previsões da teoria com o experimento do sistema solar e observações de curvas de rotação de galáxias, a expansão acelerada do universo e o espectro da CMB (radiação cósmica de fundo em micro-ondas).

Uma das tentativas mais famosas de modificar a gravidade foi a *Modified Newtonian Dynamics* (MOND), proposta por M. Milgrom em 1986 ([BEKENSTEIN, 2006](#)). Além do MOND, várias teorias diferentes foram desenvolvidas nas últimas décadas. Alguns

exemplos são

- Teoria de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961);
- Teorias  $f(R)$  (SOTIRIOU; FARAONI, 2010);
- Teorias de Horndeski (HORNDESKI, 1974).

Teorias de gravidade modificada devem ser compatíveis com uma lista de fenômenos observacionais (essa lista pode ser encontrada em (BEKENSTEIN, 2004)). Para pulsares binários a teoria deve prever corretamente os tempos de pulso observados de chegada de pulsares binários. Isso permite a detecção de atraso de tempo relativístico, precessão do periastro e decaimento da órbita devido à radiação gravitacional. As observações podem ser comparadas com a teoria em questão. Se a teoria puder prever corretamente valores para as duas massas orbitando uma à outra com os parâmetros de órbita corretos, a teoria passou no teste. O pulsar binário permite, em contraste com o teste do sistema solar, testar estas teorias em regime de campo forte.

### 5.1.1 Mecanismos de blindagem

Teorias da gravidade modificada têm mecanismos que suprimem seus graus extras de liberdade em regiões onde sabemos que a Relatividade Geral funciona bem.

O que elas têm em comum, pelo menos em parte, é a presença de graus de liberdade escalares adicionais que são os principais responsáveis por tentar explicar a matéria e/ou a energia escura. Portanto, é importante entender como esse grau escalar é blindado nas regiões corretas.

De posse de uma lagrangiana qualquer para este campo, podemos resolvê-la em uma média da região (*background*), onde estamos estudando o campo e estudar as perturbações deste campo em torno de uma solução (VOIVODIC, 2016). A densidade lagrangiana, até segunda ordem, para estas perturbações terá a forma

$$L \supset -\frac{Z(\phi_0)}{2} (\partial_\mu \delta\phi)^2 + \frac{m^2(\phi_0)}{2} \delta\phi^2 + \frac{\beta(\phi_0)}{M_{\text{pl}}} \delta\phi \delta T_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde  $\phi_0$  é a solução no *background*,  $\delta\phi_0$  é a perturbação em torno dessa solução e  $\delta T_{\mu\nu}$  é a perturbação no tensor energia-momento da matéria.

Ao observamos a lagrangiana (5.1), existem três possibilidades de blindagem para o campo extra:

- $Z(\phi_0)$ , ao tornar esta função grande, o campo terá dificuldade de se propagar, conhecido como mecanismo de Vainshtein,

- $m^2(\phi_0)$ , ao tornar esta função grande o campo só conseguirá se propagar por pequenas distâncias,
- $\frac{\beta(\phi_0)}{M_{\text{pl}}}$ , ao tornar esta função pequena, o acoplamento do campo escalar se torna fraco.

Para ser observacionalmente viável, toda teoria de gravitação modificada deve possuir um dos mecanismos acima (VOIVODIC, 2016).

## 5.2 Constante $G_{\text{gw}}$

Vamos tomar como base de nossa análise seguinte o trabalho *Evading the Vainshtein Mechanism with Anomalous Gravitational Wave Speed: Constraints on Modified Gravity from Binary Pulsars* de Jiménez, Piazza e Velten, cujo objetivo foi propor modificações no setor radiativo de uma teoria gravitacional permitindo que a velocidade de propagação das ondas gravitacionais e a constante de acoplamento gravitacional pudessem ser diferentes dos valores adotados na Relatividade Geral (JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016). Assim, considere a seguinte lagrangiana efetiva para ondas gravitacionais

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{64\pi G_{\text{gw}}} \sum_{\alpha=+, \times} \left( \frac{1}{c_T^2} h_\alpha^2 - |\nabla h_\alpha|^2 \right) \quad (5.2)$$

onde  $+$ ,  $\times$  representam as duas polarizações das ondas gravitacionais.

Ao assumirmos que apenas o setor radiativo difere da Relatividade Geral, temos que o setor dos grávitons potenciais, responsável pelo limite gravitacional do sistema, permanece inalterado. É claro que, em uma teoria da gravidade modificada, espera-se que esse setor também seja modificado, mas os experimentos do sistema solar restringem fortemente os parâmetros pós-newtoniano correspondentes para que seja seguro assumir que é o mesmo que encontrado na Relatividade Geral.

A primeira modificação que foi considerada é que as ondas gravitacionais podem se propagar a uma velocidade  $c_T$  diferente da velocidade da luz. Assumimos aqui que tal velocidade é constante, independente de direção e polarização, tal que para as escalas do sistema binário ele pode ser tomado com segurança como uma constante pura.

A segunda modificação é um acoplamento de ondas gravitacionais à matéria,  $G_{\text{gw}}$ , possivelmente diferente de  $G_N$ . Podemos observar que além dos grávitons “radiativos” descritos por (5.2), temos os grávitons potenciais.

Em outras teorias de gravidade modificadas com um grau de liberdade escalar adicional, o setor escalar também se torna radiativo. Porém fazendo uso do mecanismo de Vainshtein (BABICHEV; DEFFAYET, 2013), pode se inferir que a contribuição do escalar irradiado para a variação do período do sistema binário é insignificante.

A partir de agora, vamos revisitar a derivação padrão da fórmula de emissão de quadrupolos. Primeiramente, estimamos o fluxo de energia de uma onda gravitacional através de uma superfície esférica a uma grande distância  $r$  da fonte, como foi feito para (3.128). A expressão padrão pode ser modificada, essencialmente, por análise dimensional. Redimensionando o tempo como  $\partial_t = c_T \partial_{t'}$ , de tal forma que podemos utilizar das mesmas ferramentas do Capítulo 3, temos que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{r^2}{32 c_T \pi G_{\text{gw}}} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle . \quad (5.3)$$

A amplitude irradiada de ondas gravitacionais de uma determinada fonte é obtida com a fórmula usual conhecida (3.99), mas levando em consideração a substituição

$$G_N \rightarrow G_{\text{gw}} \quad (\text{Apenas para o setor radiativo}) \quad (5.4)$$

e o diferente tempo retardado em que a fonte é avaliada,

$$h_{ij} = \frac{2 G_{\text{gw}}}{r} \ddot{Q}_{ij}^{TT}(t_r), \quad (5.5)$$

onde  $t_r = t - r/c_T$ .

Integrando (5.3), a potência irradiada é dada por

$$P_{\text{quad}} = \frac{G_{\text{gw}}}{5 c_T} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle . \quad (5.6)$$

Com a equação quadrupolar modificada acima, podemos obter diretamente a expressão para o decaimento do período orbital como foi feito na subseção 4.4.4 e obtemos

$$\begin{aligned} \dot{P}_b = & - \left( \frac{G_{\text{gw}}}{G_N} \frac{c}{c_T} \right) \frac{192\pi}{5} \frac{G_N^{5/3}}{c^5} \left( \frac{P_b}{2\pi} \right)^{-5/3} \times \\ & \times (1 - e^2)^{7/2} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde foi reintroduzida a velocidade dimensional da luz  $c$ . Assim, agora podemos usar observações de pulsares binários para restringir a combinação

$$\frac{G_{\text{gw}}}{G_N} \frac{c}{c_T}. \quad (5.8)$$

Logo, assume-se que grávitons potenciais e grávitons radiativos podem se acoplar à matéria com diferentes magnitudes. Observe os diferentes papéis na derivação da expressão acima desempenhados por  $G_N$ , proveniente da fórmula das órbitas, e  $G_{\text{gw}}$ , proveniente da própria emissão de ondas gravitacionais.



A partir de (5.7), Jiménez, Piazza e Velten, alcançaram o seguinte resultado utilizando os parâmetros orbitais do Pulsar de Hulse-Taylor (JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016),

$$0,995 \leq \frac{G_{\text{gw}}}{G_N} \frac{c}{c_T} \leq 1,00 . \quad (5.9)$$

Em 2015, os cientistas do *LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration* fizeram a primeira detecção direta de ondas gravitacionais produzidas durante os momentos finais da fusão de dois buracos negros que giravam em sistema binário (ABBOTT et al., 2016). Em 2017, a colaboração *LIGO*, *Virgo* e o *Fermi Gamma-ray Burst Monitor* (MONITOR et al., 2017) detectaram ondas gravitacionais geradas pela fusão de estrelas de nêutrons binárias. Comparando os tempos de chegada da explosão de raios gama (que viaja da fonte para a Terra na velocidade da luz), com o tempo de chegada das ondas gravitacionais (que naturalmente viajam na velocidade das ondas gravitacionais), inferiram que

$$-3 \times 10^{-15} \leq \frac{v_{\text{gw}} - v_\gamma}{v_\gamma} \leq 7 \times 10^{-16} , \quad (5.10)$$

onde  $v_{\text{gw}}$  e  $v_\gamma$  são as velocidades das ondas gravitacionais e radiação gama, respectivamente. Logo, temos que

$$\frac{c}{c_T} \sim 1 .$$

Com isso, as modificações que foram feitas acima na expressão para o decaimento do período orbital se restringem apenas à combinação

$$\frac{G_{\text{gw}}}{G_N} . \quad (5.11)$$

Daqui para frente, nosso foco será vincular essa quantidade.

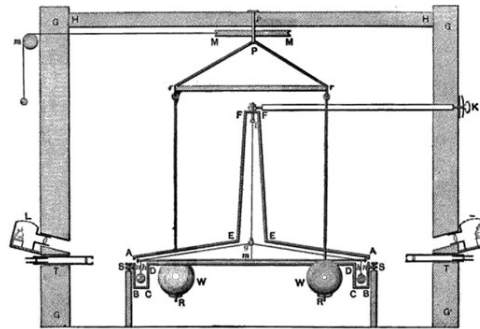
### 5.3 Constante $G_N$

A constante gravitacional newtoniana  $G_N$ , uma das constantes físicas fundamentais mais importantes da natureza, desempenha um papel significativo nos campos da física teórica, geofísica, astrofísica e astronomia. Embora  $G_N$  tenha sido a primeira constante física a ser introduzida na história da ciência, é considerada uma das mais difíceis de medir com precisão até agora (HERRICK, 1971).

Henry Cavendish, um destacado cientista da Universidade de Cambridge, realizou a primeira medição experimental em 1798 da força da gravidade entre massas, em laboratório. O aparelho, mostrado na Figura 11, foi projetado e construído por John Michell, cujo

objetivo inicial era determinar a densidade da Terra. Infelizmente, ele não completou ou realizou nenhum experimento antes de morrer em 1793. O dispositivo foi então encaminhado para Cavendish ([MACKENZIE, 1900](#)).

Figura 11 – Aparato de Cavendish.



Fonte: ([MACKENZIE, 1900](#))

Após a conversão para o sistema internacional de unidades, o valor de Cavendish para a densidade da Terra é  $(5,448 \pm 0,033) \text{ g cm}^{-3}$ , resultando em  $G_N = (6,67 \pm 0,07) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  com um incerteza relativa de  $10^4$  ppm.

Atualmente, o valor recomendado para  $G_N$  publicado pelo Comitê de Dados para Ciência e Tecnologia (CODATA) ([SCIENCE; TECHNOLOGY, 2022](#)) é de

$$G_N = 6,67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} .$$

Algumas razões principais pelas quais medir a constante gravitacional é tão difícil ([XUE et al., 2020](#)):

- A interação gravitacional entre dois objetos é extremamente fraca. Assim, o sinal gravitacional pode ser facilmente sobrecarregado por outros sinais interferentes, como a força eletromagnética, vibração do solo, flutuação de temperatura e assim por diante. Os cientistas precisam gastar muito esforço para projetar e operar o dispositivo experimental para que ele supere tais influências na medição de  $G_N$ .
- A interação gravitacional não pode ser blindada. Esse tipo de fenômeno dificulta a medição gravitacionalmente precisa das influências ambientais, como atividade humana, águas subterrâneas, montanhas, edifícios e outros objetos.
- Até o momento, não há relação quantitativamente teórica entre a constante gravitacional newtoniana e outras constantes fundamentais. Os cientistas só podem medir a constante gravitacional através da lei da gravitação universal de Newton. Uma das

maiores dificuldades em qualquer medição  $G_N$  é determinar com precisão suficiente as dimensões e distribuição de densidade da massa de teste e massa do atrator.

Desde a primeira medição laboratorial por Cavendish de  $G_N$  usando balança de torção há mais de 200 anos, os experimentadores dedicaram enormes esforços para investigar muitas possíveis contribuições para a incerteza da medição, porém a incerteza relativa de  $G_N$  não foi muito melhorada. Especificamente, nos últimos 20 anos, muitos experimentos de alta precisão provaram que a medição precisa de  $G_N$  é uma tarefa extremamente complexa e difícil que requer tecnologia e métodos experimentais de alto nível ([SCHLAMMINGER, 2018](#)).

## 6 Resultados

Buscamos em outros trabalhos os dados disponíveis mais precisos em  $\dot{P}_b$  com os parâmetros orbitais que serão mostrados a seguir. Conforme mostrado na Figura 10 construímos o diagrama massa-massa usual mostrando que todos os parâmetros observados coincidem apenas em uma pequena região, determinando assim as massas do sistema e confirmando as previsões da Relatividade Geral. Os erros nas medições estão no nível percentual e, portanto, apenas desvios da mesma ordem em relação a Relatividade Geral são permitidos. Portanto, os dados binários do pulsar nos darão uma restrição em  $\frac{G_{gw}}{G_N}$  no mesmo nível.

### 6.1 Pulsar Duplo

O Pulsar Duplo, ou PSR J0737 3039 AB, foi descoberto durante uma pesquisa de alta latitude galáctica usando o radiotelescópio Parkes de 64 m na Austrália, porém não foi identificado imediatamente como um pulsar binário. O primeiro dos dois pulsares a ser descoberto foi J0737 3039A, um pulsar de 22,7 milissegundos, o período do pulsar foi visto mudando rapidamente, mesmo dentro do curto período de observação. Isso imediatamente sugeriu que estava acelerando no forte campo gravitacional de um companheiro (LYNE, 2009).

Observações subsequentes no início de 2003 mostraram que estava em uma órbita levemente excêntrica de 2,4 horas ( $e = 0,088$ ). Dentro de alguns dias, descobriu-se que a longitude do periastro estava aumentando a uma taxa de 17,88 graus/ano. Interpretado como decorrente da Relatividade Geral, esse valor indicou que o sistema tinha uma massa total de aproximadamente  $2,6 M_\odot$ , sugerindo que o segundo pulsar também pode ser uma estrela de nêutrons, embora menos massiva do que as massas de estrelas de nêutrons previamente determinadas.

Em outubro de 2003, uma observação de 40 minutos revelou uma breve explosão de pulsos de 10 minutos com um período de repetição de 2,77 segundos. Investigações posteriores revelaram que esses pulsos mostraram as variações Doppler no período apropriado para um companheiro de pulsar, demonstrando incontestavelmente que esse segundo pulsar, J0737 3039 B, era de fato o companheiro e claro, que era outra estrela de nêutrons (BECKER et al., 2009).

Por quase duas décadas, Michael Kramer, do Instituto Max Planck de Radioastronomia, na Alemanha, e seus colaboradores monitoraram o Pulsar Duplo, a equipe já divulgou 16 anos de seus dados. A comunidade gravitacional aguardou ansiosamente

pela atualização que foi publicada em 13 de dezembro de 2021, pois um estudo anterior, baseado em apenas 2,5 anos de dados, mostrou que o Pulsar Duplo é o melhor para testar gravidade de campo forte (KRAMER et al., 2006).

O artigo *Strong-Field Gravity Tests with the Double Pulsar* não apenas melhora a precisão dos testes de gravidade anteriores em ordens de magnitude, mas também permite alguns novos (KRAMER et al., 2021), ver Tabela 1.

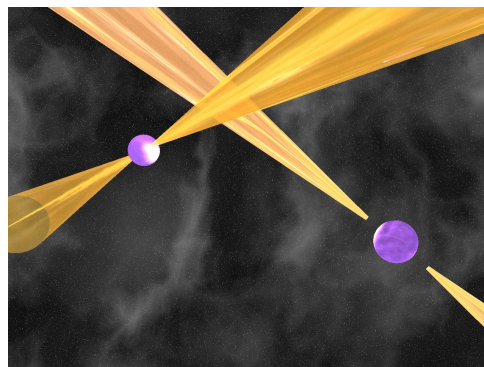
Tabela 1 – Alguns efeitos relativísticos medidos e razão entre o observado e predito pela Relatividade Geral.

Parâmetro	Descrição	Obs./RG pred.
$\dot{\omega}$ (°/ano)	Avanço do Periastro	1,000015(26)
$\gamma$ (ms)	Amplitude do Atraso de Einstein	1,00012(25))
$\dot{P}_b$	Decaimento do Período Orbital	0,999963(63)
$r$ ( $\mu$ s)	Intervalo do Atraso de Shapiro	1,0016(34)
$s$	Forma do Atraso de Shapiro	1,00009(18)

Fonte: (KRAMER et al., 2021)

Em termos de estudo dos efeitos gravitacionais, o Pulsar Duplo é, em muitos aspectos, superior aos seus rivais binários. Primeiro, tem a vantagem de ser o único binário em que ambos os componentes são visíveis como pulsares, Figura 12. Em segundo lugar, está relativamente próximo, a uma distância de cerca de 2400 anos-luz da Terra. Por fim, sua inclinação orbital em relação a nós é de cerca de meio grau a partir de 90 graus, o que é ótimo, pois os sinais do pulsar passam pelo plano orbital, onde eles são mais fortemente influenciados pela curvatura do espaço-tempo gerada pelo próprio sistema, ou seja, o Pulsar Duplo fornece uma janela única para se observar uma situação de gravidade extremamente forte (SHAO, 2021).

Figura 12 – Representação do Pulsar Duplo.



Fonte: (LORIMER; KRAMER, 2005)

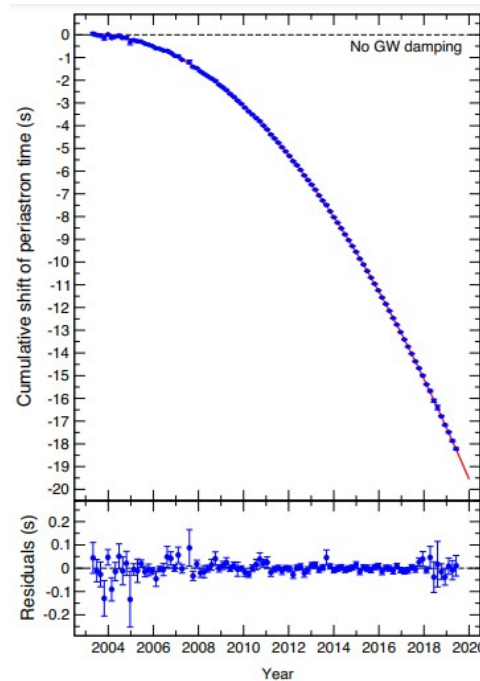
Com os parâmetros orbitais medidos por Michael Kramer e sua equipe, podemos obter o melhor intervalo para a razão  $G_{\text{gw}}/G_N$ , pois em comparação com os valores obtidos

por (JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016), o valor do decaimento do período orbital devido à emissão de ondas gravitacionais é cerca de 25 vezes mais preciso do que no Pulsar de Hulse-Taylor (WEISBERG; HUANG, 2016), que é atualmente limitado pelas incertezas na correção dos efeitos externos.

Para efeito de comparação os dados fornecem uma precisão na perda de energia de 0,013% após a correção dos efeitos do movimento dos pulsares em relação ao Sol, bem como um efeito do *spindown* dos pulsares (lentificação rotacional causada pela perda de energia por radiação eletromagnética), para o pulsar de Hulse-Taylor essa precisão era de 0,3% (WEISBERG; HUANG, 2016), enquanto que a medida pela colaboração LIGO e Virgo para uma fusão binária de estrelas de nêutrons era de 20% (ABBOTT et al., 2019).

A Figura 13 mostra a comparação das duas teorias da gravidade: a teoria da relatividade de Einstein, que prevê a emissão de ondas gravitacionais, e a teoria de Newton, que não. As observações de Kramer e colaboradores mostram uma concordância excepcional com a teoria de Einstein.

Figura 13 – Deslocamento cumulativo dos tempos de passagem do periastro em relação a um modelo não dissipativo.



Fonte: (KRAMER et al., 2021)

Com tudo o que foi mostrado acima, podemos determinar o intervalo de  $G_{gw}/G_N$  utilizando as melhores medidas até o momento deste trabalho, estes dados são apresentados na Tabela 2.

Com os dados da Tabela 2 construímos o seguinte diagrama massa-massa para o Pulsar Duplo, as seis curvas correspondentes às equações (4.87) - (4.91), (4.92) dos

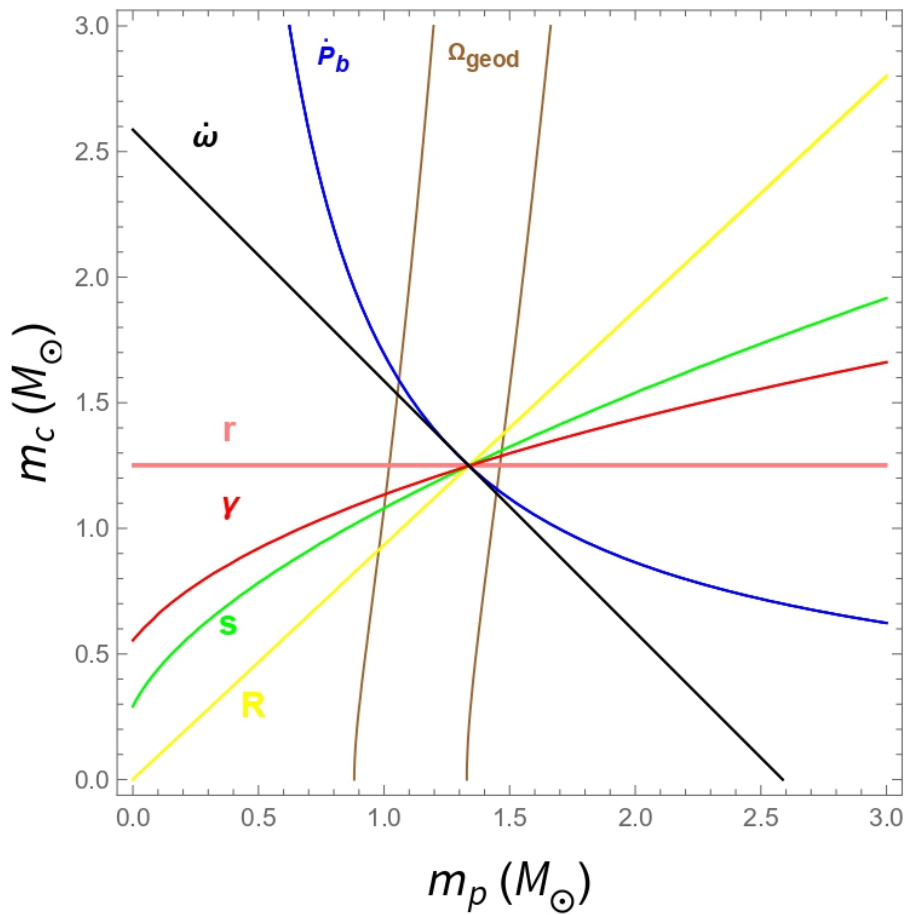
Tabela 2 – Parâmetros Orbitais para PSR J0737 3039 AB

Parâmetro	Descrição	Valor
$P_b$ (dias)	Período Orbital	0,1022515592973(10)
$e$	Excentricidade	0,087777023(61)
$\dot{\omega}$ (°/ano)	Avanço do Periastro	16,899323(13)
$\gamma$ (ms)	Amplitude do Atraso de Einstein	0,384045(94)
$\dot{P}_b$	Decaimento do Período Orbital	$-1,247920(78) \times 10^{-12}$
$r(\mu\text{s})$	Intervalo do Atraso de Shapiro	6,162(21)
$s$	Forma do Atraso de Shapiro	0,999936(+9/-10)
$\dot{P}_b^{\text{ext}}$	Contribuição externa	$-1,68(+11/-10) \times 10^{-16}$

Fonte: (KRAMER et al., 2021)

parâmetros pós-keplerianos e a razão entre as massas, (4.94). Essas curvas são apresentadas na Figura 14.

Figura 14 – Diagrama de massa - massa para o Pulsar Duplo

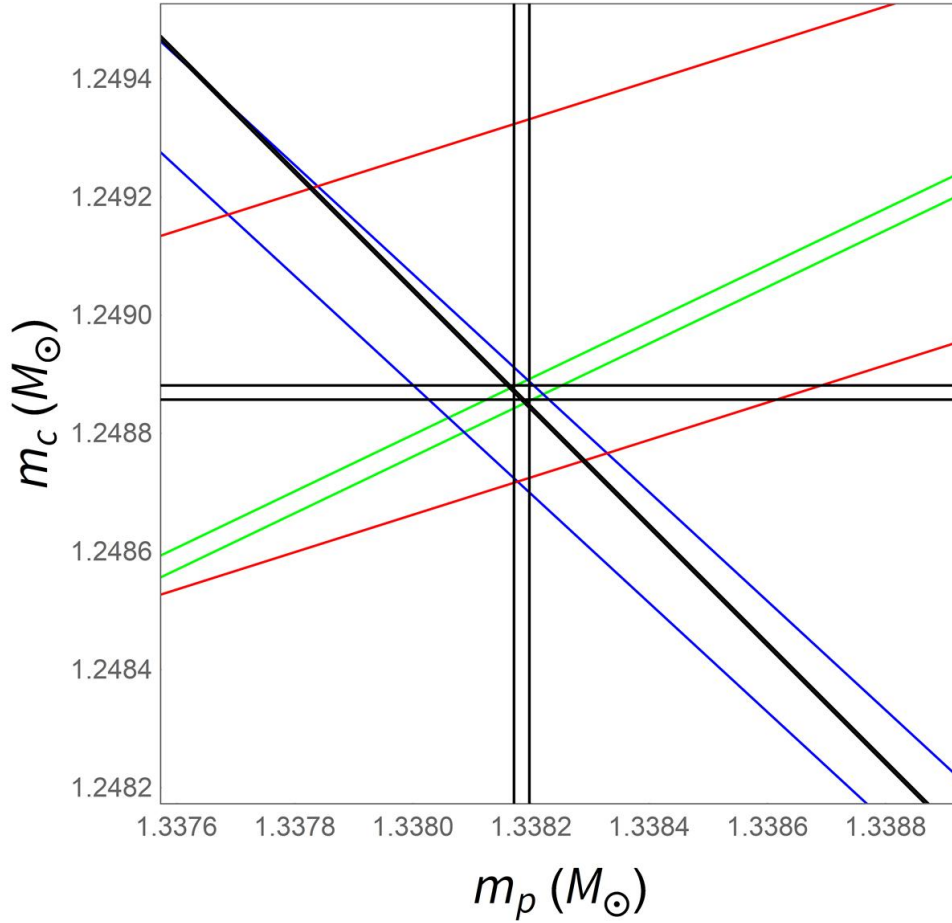


Fonte: Produção do próprio autor.

A massa do pulsar principal do Pulsar Duplo é de  $m_p = 1,338185(+12/-14)M_\odot$  e o pulsar companheiro é  $m_c = 1,248868(+13/-11)M_\odot$ . A espessura das linhas representa

a incerteza nos parâmetros pós-keplerianos medidos. Para todos os parâmetros pós-keplerianos, exceto  $\Omega_{\text{geod}}$ , chegamos a um ponto em que precisamos ampliar para mostrar o ponto de interseção com mais detalhes para reconhecer as incertezas relativas, ver Figura 15 .

Figura 15 – Região de encontro das massas no diagrama de massa - massa para o Pulsar Duplo, baseado nos parâmetros pós-keplerianos:  $\dot{\omega}$  (preto),  $\dot{P}_b$  (azul),  $\gamma$  (vermelho) e  $s$  (verde).



Fonte: Produção do próprio autor.

Para determinar  $G_{\text{gw}}/G_N$  variamos (5.7) ao limite máximo que é determinado pela área de encontro entre as massas, esta variação é tal que o intervalo de valores para  $G_{\text{gw}}/G_N$  é

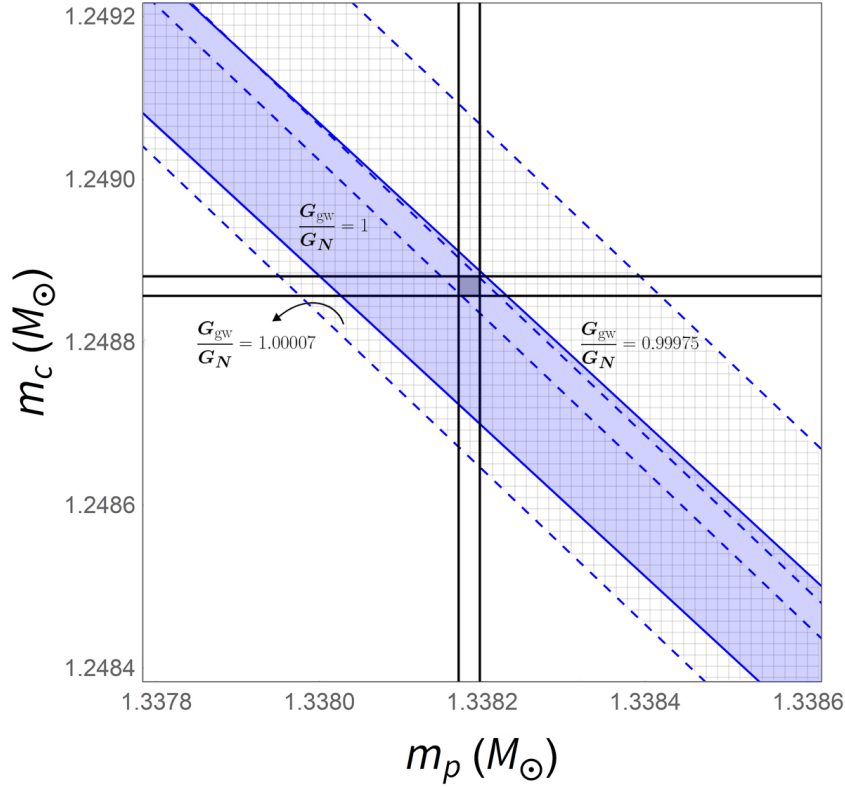
$$0,99975 \leq \frac{G_{\text{gw}}}{G_N} \leq 1,00007, \quad (6.1)$$

obtido a partir do diagrama da Figura 16.

A partir das restrições impostas pelas medidas do Pulsar Duplo em uma modificação do setor radiativo da gravidade, onde a única modificação é uma mudança no valor da



Figura 16 – Variação permitida de  $\dot{P}_b$  (azul pontilhado) para determinar  $G_{\text{gw}}/G_N$ . A região em azul são os valores de  $\dot{P}_b$ , onde temos que  $G_{\text{gw}} = G_N$ , as áreas quadriculadas são os limites máximo e mínimo para a relação estudada, onde próximo a área azul, temos que o limite mínimo permitido é tal que  $G_{\text{gw}} = 0,99975G_N$  e para o limite máximo, um pouco mais afastado da área azul, este limite é de  $G_{\text{gw}} = 1,00007G_N$ .



Fonte: Produção do próprio autor.

constante gravitacional newtoniana, vimos que a constante  $G_{\text{gw}}$  só pode diferir de  $G_N$  em um nível de  $10^{-4}$ .

## 6.2 Medidas de $G_{\text{gw}}/G_N$ para outros pulsares binários

Realizando o mesmo processo que foi feito para o Pulsar Duplo em outros pulsares binários, notamos que a compatibilidade entre o que é previsto pela Relatividade Geral e o observado são determinantes para um afinamento entre  $G_{\text{gw}}$  e  $G_N$ .

### 6.2.1 PSR B1534+12

Descoberto em 1990 pelo astrônomo Alexander Wolszczan usando o radiotelescópio de Arecibo (WOLSZCZAN; FRAIL, 1992). Sua companheira é uma estrela de nêutrons, porém não é detectado como um pulsar, as massas do pulsar e sua estrela de nêutrons

companheira são  $m_p = 1,3332(10) M_\odot$  e  $m_c = 1,3452(10) M_\odot$ , respectivamente (STAIRS et al., 2002).

Tabela 3 – Parâmetros Orbitais para PSR B1534+12

Parâmetro	Descrição	Valor
$P_b$ (dias)	Período Orbital	0,420737299122(10)
$e$	Excentricidade	0,2736775(3)
$\dot{\omega}$ (°/ano)	Avanço do Periastro	1,755789(9)
$\gamma$ (ms)	Amplitude do Atraso de Einstein	2,070(2)
$\dot{P}_b$	Decaimento do Período Orbital	$-0,137(3) \times 10^{-12}$
$r$ ( $\mu$ s)	Intervalo do Atraso de Shapiro	6,7(1)
$s$	Forma do Atraso de Shapiro	0,975(7)
$\dot{P}_b^{\text{ext}}$	Contribuição externa	$0,037(11) \times 10^{-12}$

Fonte: (STAIRS et al., 2002)

Com os dados da Tabela 3 construímos o seguinte diagrama massa-massa para o PSR B1534+12, as cinco curvas correspondentes às equações (4.87) - (4.91) e devem se cruzar em um único ponto no plano. Essas curvas são apresentadas na Figura 17, na qual um par de linhas delimita o limite de confiança de 68% (STAIRS et al., 2002) para cada parâmetro pós-kepleriano (uma única linha é desenhada para  $\dot{\omega}$ , cuja incerteza é muito pequena para mostrar). As curvas  $\dot{\omega}$ ,  $\gamma$ ,  $r$  e  $s$  se cruzam, embora  $r$  ainda seja pouco medido.

Ao impormos a compatibilidade dos 5 parâmetros, obtemos o seguinte limite,

$$0,596 \leq \frac{G_{\text{gw}}}{G_N} \leq 1, \quad (6.2)$$

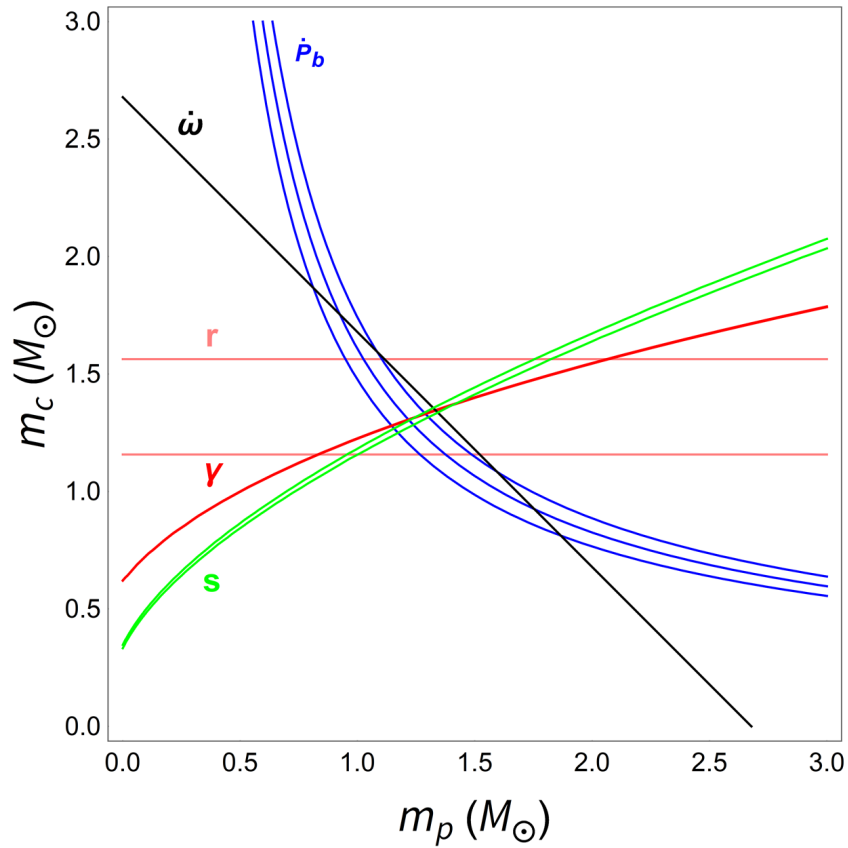
podemos observar pela Figura 17 que o valor de  $\dot{P}_b$  não cruza com os outros parâmetros em um ponto, pois para determinar  $\dot{P}_b^{\text{ext}}$  foi utilizado  $d = 0,7(2)$  kpc. A discrepância entre esta distância e a distância esperada,  $d = 1,051(5)$  kpc impede que a curva cruze as outras curvas (FONSECA; STAIRS; THORSETT, 2014).

### 6.2.2 PSR J1141-6545

O PSR J1141-6545 foi descoberto com o radiotelescópio CSIRO Parkes de 64 m como parte do *Parkes Multibeam Pulsar Survey* (PMPS) em 2000 (KASPI et al., 2000). Tem um período de rotação de  $\sim 394$  milissegundos e está em uma órbita binária em torno de uma anã branca com um período de  $\sim 4,8$  horas. A massa do pulsar é  $m_p = 1,27(1) M_\odot$  e da sua companheira  $m_c = 1,02(1) M_\odot$  (BHAT; BAILES; VERBIEST, 2008).

Com os dados da Tabela 4, temos o seguinte diagrama de massa-massa para o PSR J1141-6545.

Figura 17 – Diagrama de Massa-Massa para o pulsar PSR B1534+12



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4 – Parâmetros Orbitais para PSR J1141-6545

Parâmetro	Descrição	Valor
$P_b$ (dias)	Período Orbital	0,1976509593(1)
$e$	Excentricidade	0,171884(2)
$\dot{\omega}$ ( $^\circ$ /ano)	Avanço do Periastro	5,3096(4)
$\gamma$ (s)	Amplitude do Atraso de Einstein	0,000773(11)
$\dot{P}_b$	Decaimento do Período Orbital	$-0,403(25) \times 10^{-12}$
$s$	Forma do Atraso de Shapiro	0,97(1)
$\dot{P}_b^{\text{ext}}$	Contribuição externa	$(1,660 \pm 1,785) \times 10^{-15}$

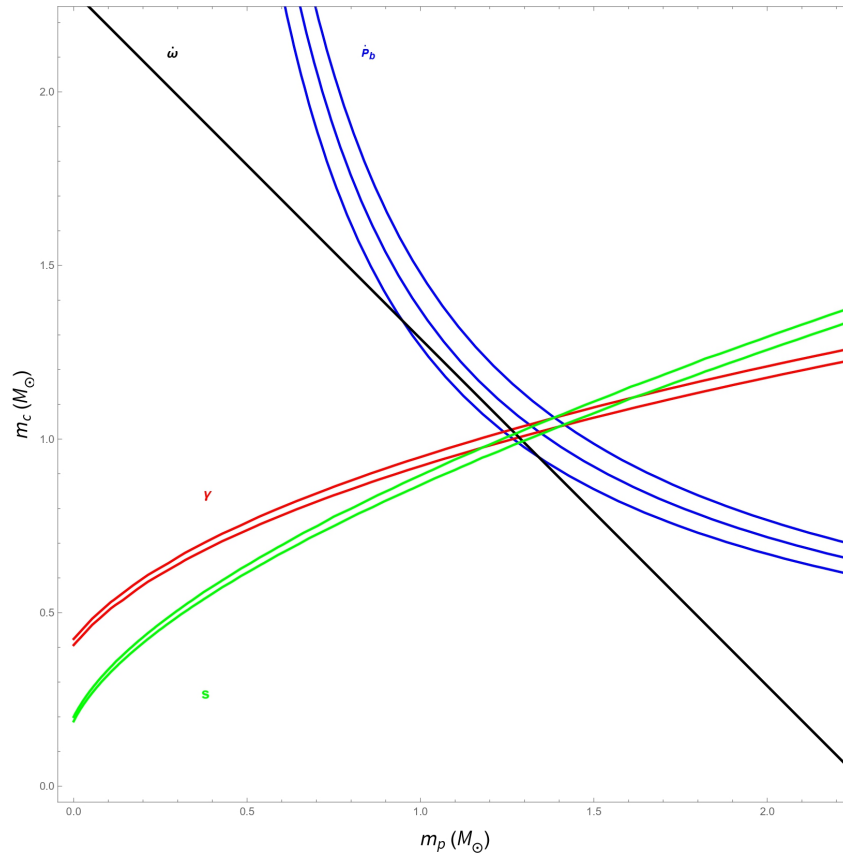
Fonte: (BHAT; BAILES; VERBIEST, 2008)

Ao impormos a compatibilidade dos 4 parâmetros, obtemos o seguinte limite,

$$0,931 \leq \frac{G_{\text{gw}}}{G_N} \leq 1,214, \quad (6.3)$$

onde o decaimento do período orbital foi mostrado ser consistente com a Relatividade Geral (BAILES et al., 2003).

Figura 18 – Diagrama de Massa-Massa para o pulsar PSR J1141-6545



Fonte: Produção do próprio autor.

### 6.3 Discussão

A Relatividade Geral prevê que  $G_{\text{gw}}$  e  $G_N$  sejam iguais. Com os dados do Pulsar Duplo, vemos que em nosso teste estas quantidades são de fato idênticas, podendo a variação máxima de seus valores não ultrapassar um limite de  $10^{-4}$ , ou seja, podemos inferir novamente que a teoria de Einstein está correta no regime em que a estamos testando.

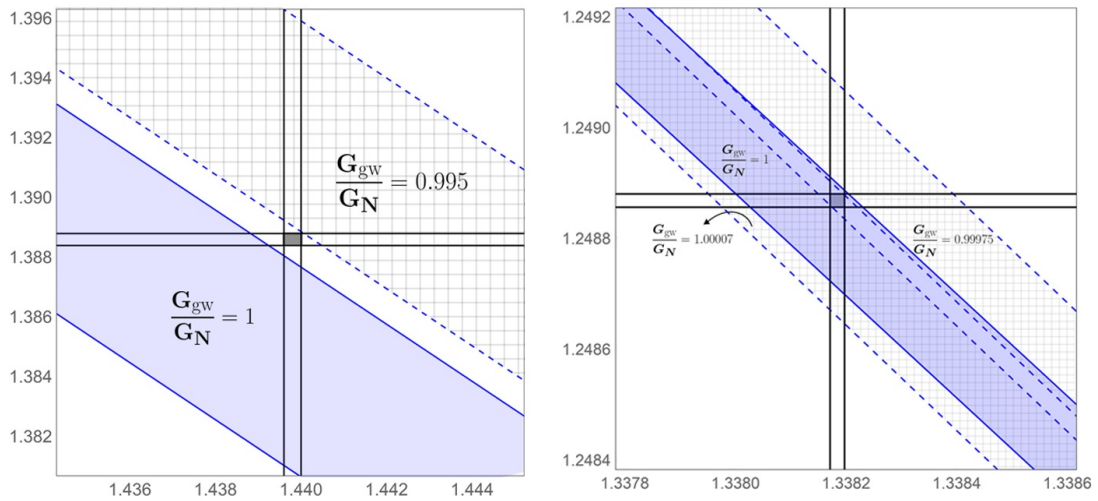
Desde a descoberta de pulsares binários, autores defendem que este sistema é o laboratório perfeito para testar a Relatividade Geral. Os dados do Pulsar Duplo (KRAMER et al., 2021) são 99.99% consistentes com a teoria da Relatividade Geral, portanto todas as observações e testes foram realizados em concordância com a teoria gravitacional de Einstein. Para encontrar alguma falha nesta teoria, os pesquisadores deverão ser mais ambiciosos e propor novos testes, pois os pulsares binários oferecem condições adequadas para a realização dos mesmos.

As medidas do PSR B1534+12, apresentam menor precisão, pois a sua distância até este sistema não é medida com precisão. Logo temos um vínculo de  $10^{-0.394}$  entre as constantes de acoplamento. No sistema PSR J1141-6545 a razão entre as duas constantes,

utilizando os parâmetros orbitais, embora não seja tão precisa quanto o Pulsar Duplo, é mais preciso que o PSR B1534+12.

Comparando os nossos resultados com o do Pulsar de Hulse-Taylor assim como estudado em (JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016), de forma qualitativa através da Figura 19, vemos que as incertezas associadas ao Pulsar Duplo para o decaimento do período orbital são menores, pois como foi mencionado, a precisão na perda de energia é de 0,013% enquanto que para o Pulsar de Hulse-Taylor, este valor é de 0,3%. Esta diferença fica evidente ao observamos a largura das linhas que delimitam  $\dot{P}_b$  na Figura 19.

Figura 19 – Variação permitida de  $\dot{P}_b$  (azul pontilhado) de  $G_{gw}/G_N$ , para Pulsar de Hulse-Taylor (esquerda) e para o Pulsar Duplo (direita).



Fonte: Produção do próprio autor.

Outro fator relevante, é que conseguimos variar  $G_{gw}/G_N$  para um máximo e para um mínimo no Pulsar Duplo, pois as curvas ficam bem próximas à região de massas, o que não é possível para o Pulsar de Hulse-Taylor, por isso o limite superior máximo permitido é igual a um.

## 7 Conclusão

A descoberta em 1974 do primeiro pulsar binário nos deu importantes benefícios científicos. As mais espetaculares dizem respeito à primeira evidência experimental de que a teoria da Relatividade Geral de Einstein é válida além do regime de campo fraco quase-estacionário geralmente testado. De fato, dados binários de pulsar sondaram, pela primeira vez, a gravidade relativística em regimes envolvendo (juntos ou separadamente) efeitos radiativos e efeitos de campo forte. A citação que acompanha a entrega, em outubro de 1993, do Prêmio Nobel de Física a Russell Hulse e Joseph Taylor dizia: “pela descoberta de um novo tipo de pulsar, uma descoberta que abriu novas possibilidades para o estudo da gravitação”.

Vimos no Capítulo 2 uma breve explicação sobre a teoria mais concreta da gravitação partindo das ideias de Isaac Newton e chegando a Albert Einstein, onde consideramos o princípio da equivalência como o fundamento, não da gravidade newtoniana ou da Relatividade Geral, mas da ideia mais ampla de que o espaço-tempo é curvo.

No Capítulo 3 discutimos sobre as ondas gravitacionais, deduzindo as equações fundamentais para o estudo do assunto, onde linearizamos a teoria gravitacional e chegamos a uma equação de onda que a partir dela, derivamos outros parâmetros, principalmente a equação que mostra que a radiação gravitacional emitida por uma fonte é proporcional a segunda derivada temporal do momento de quadrupolo.

No Capítulo 4 os pulsares binários são estudados, porém em uma visão “kepleriana”, onde nosso interesse de estudo é voltado aos parâmetros orbitais keplerianos e pós-keplerianos. Nesse capítulo derivamos as equações mais importantes para este trabalho, especialmente o decaimento do período orbital. Além disso, vimos também como pulsares são cronometrados e como estes parâmetros testam as teorias da gravitação.

Por fim, no Capítulo 5, uma pequena introdução sobre as teorias de gravitação modificada é feita e apresentamos a hipótese de estudo dessa dissertação, uma parametrização genérica para a lagrangiana do setor radiativo, onde são introduzidas duas novas constantes,  $c_T$ , a velocidade de propagação das ondas gravitacionais, e  $G_{\text{gw}}$ , a constante de acoplamento do setor radiativo da teoria. Conforme a metodologia do artigo (JIMÉNEZ; PIAZZA; VELTEN, 2016), fizemos uma variação do intervalo permitido para a razão  $G_{\text{gw}}/G_N$  utilizando os parâmetros orbitais do Pulsar Duplo e chegamos que ambas podem diferir em um nível de  $10^{-4}$ .

Ao compararmos os resultados para o Pulsar de Hulse-Taylor e o Pulsar Duplo, saltamos de um nível de  $10^{-2}$  para  $10^{-4}$  para a distinção entre as constantes de acoplamento. Embora o Pulsar de Hulse-Taylor tenha sido o primeiro pulsar binário a ser descoberto,

alguns de seus parâmetros orbitais ainda são medidos com pouca precisão e portanto atribuímos a este fator ao intervalo encontrado para a razão entre as constantes de acoplamento. Para o Pulsar Duplo, citamos alguns aspectos que fazem deste o melhor pulsar binário para testes de gravitação, entre eles reiteramos que o Pulsar Duplo está mais próximo e ambas as estrelas são pulsares, o que permite medidas mais precisas e por este motivo a razão entre as constantes difere tão pouco.

Esperamos que este trabalho contribua na área das teorias de gravidade modificada, onde a mesma metodologia pode ser aplicada para diferentes teorias e poder comparar os resultados para  $G_{\text{gw}}/G_N$ , pois neste trabalho este intervalo parte da teoria da Relatividade Geral. Sabemos que a teoria de Einstein não é o capítulo final, portanto estudos utilizando pulsares binários são necessários, pois os mesmos se provaram laboratórios perfeitos para testar a Relatividade Geral. Com o avanço tecnológico e telescópios mais potentes, podemos entender os limites da Relatividade Geral e talvez um desvio para a teoria de Einstein. Para o teste que fizemos aqui neste trabalho a Relatividade Geral foi aprovada.

# Referências

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página [72](#).
- ABBOTT, B. P. et al. Tests of general relativity with gw170817. *Physical review letters*, APS, v. 123, n. 1, p. 011102, 2019. Citado na página [77](#).
- ACEVEDO, O.; MORAIS, E. de; PIMENTEL, B. O princípio de equivalência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 41, 2019. Citado na página [15](#).
- AMADO, A. T. F. Testando os fundamentos da teoria relatividade geral: Um experimento no ipeci–unisantos. *LEOPOLDIANUM*, v. 47, n. 133, 2021. Citado 2 vezes nas páginas [16](#) e [17](#).
- BABICHEV, E.; DEFFAYET, C. An introduction to the vainshtein mechanism. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 18, p. 184001, 2013. Citado na página [70](#).
- BAILES, M. et al. Self-consistency of relativistic observables with general relativity in the white dwarf-neutron star binary psr j1141–6545. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 595, n. 1, p. L49, 2003. Citado na página [82](#).
- BARKER, B. M.; O’CONNELL, R. F. Gravitational two-body problem with arbitrary masses, spins, and quadrupole moments. *Physical Review D*, APS, v. 12, n. 2, p. 329, 1975. Citado na página [65](#).
- BECKER, W. et al. *Neutron stars and pulsars*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 357. Citado na página [75](#).
- BEKENSTEIN, J. D. Relativistic gravitation theory for the modified newtonian dynamics paradigm. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 8, p. 083509, 2004. Citado na página [69](#).
- BEKENSTEIN, J. D. The modified newtonian dynamics—mond and its implications for new physics. *Contemporary Physics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 6, p. 387–403, 2006. Citado na página [68](#).
- BHAT, N. R.; BAILES, M.; VERBIEST, J. P. Gravitational-radiation losses from the pulsar–white-dwarf binary psr j1141–6545. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 12, p. 124017, 2008. Citado 2 vezes nas páginas [81](#) e [82](#).
- BONDI, H. Plane gravitational waves in general relativity. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 179, n. 4569, p. 1072–1073, 1957. Citado na página [42](#).
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, APS, v. 124, n. 3, p. 925, 1961. Citado na página [69](#).
- BRETON, R. P. Radio pulsars in binary systems. *arXiv preprint arXiv:0907.2623*, 2009. Citado na página [51](#).



- BURNELL, J. B. The past, present and future of pulsars. *Nature Astronomy*, Nature Publishing Group, v. 1, n. 12, p. 831–834, 2017. Citado na página 50.
- BURROWS, A. S. Baade and zwicky: “super-novae,” neutron stars, and cosmic rays. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 112, n. 5, p. 1241–1242, 2015. Citado na página 48.
- CARROLL, S. M. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 36, 38, 39 e 40.
- COSTA, T. O. F. d. Estrelas de nêutrons com rotação em teorias modificadas da gravidade. Niterói, 2020. Citado na página 51.
- DAMOUR, T.; DERUELLE, N. General relativistic celestial mechanics of binary systems. ii. the post-newtonian timing formula. In: *Annales de l’IHP Physique théorique*. [S.l.: s.n.], 1986. v. 44, n. 3, p. 263–292. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 58.
- DAMOUR, T.; TAYLOR, J. H. On the orbital period change of the binary pulsar psr 1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, v. 366, p. 501–511, 1991. Citado na página 67.
- EINSTEIN, A. On the relativity principle and the conclusion drawn for it. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, n. 4, p. 411–462, 1907. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- EINSTEIN, A. *A Teoria da Relatividade Especial e Geral*. [S.l.]: Contraponto, 2007. Citado na página 17.
- FABRIS, J. C.; TONIATO, J. D.; VELTEN, H. *Gravitação*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2021. v. 1. Citado na página 29.
- FLANAGAN Éanna ; HUGHES, S. A. The basics of gravitational wave theory. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 204, 2005. Citado na página 28.
- FONSECA, E.; STAIRS, I. H.; THORSETT, S. E. A comprehensive study of relativistic gravity using psr b1534+ 12. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 787, n. 1, p. 82, 2014. Citado na página 81.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. Classical mechanics addison-wesley. *Reading, MA*, v. 426, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 54, 59, 61 e 63.
- GONCALVES, V. P.; LAZZARI, L. d. S. Uma introdução às estrelas estranhas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, 2020. Citado na página 49.
- HENRIQUES, A. B. *Teoria da Relatividade Geral: Uma introdução*. [S.l.]: IST Press, 2009. Citado na página 28.
- HERRICK, S. Astrodynamics. volume 1-orbit determination, space navigation, celestial mechanics. 1971. Citado na página 72.
- HEWISH, A. et al. Observation of a rapidly pulsating radio source (reprinted from nature, february 24, 1968). *Nature*, v. 224, n. 5218, p. 472, 1969. Citado na página 49.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General relativity: an introduction for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 21, 37 e 41.

- HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 10, n. 6, p. 363–384, 1974. Citado na página 69.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Citado na página 12.
- HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, v. 195, p. L51–L53, 1975. Citado na página 50.
- ISAACSON, R. A. Gravitational radiation in the limit of high frequency. i. the linear approximation and geometrical optics. *Physical Review*, APS, v. 166, n. 5, p. 1263, 1968. Citado na página 42.
- JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: Berkeley: Hamilton Printing Company, 1999. Citado na página 37.
- JIMÉNEZ, J. B.; PIAZZA, F.; VELTEN, H. Evading the vainshtein mechanism with anomalous gravitational wave speed: constraints on modified gravity from binary pulsars. *Physical Review Letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061101, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 6, 7, 13, 70, 72, 77, 84 e 85.
- KASPI, V. et al. Discovery of a young radio pulsar in a relativistic binary orbit. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 543, n. 1, p. 321, 2000. Citado na página 81.
- KOKKOTAS, K. D. Gravitational wave astronomy. *Reviews in Modern Astronomy: Cosmic Matter*, Wiley Online Library, v. 20, p. 140–166, 2008. Citado na página 29.
- KRAMER, M. General relativity with double pulsars. *SLAC Summer Institute on Particle Physics (SSI04)*, 2004. Citado na página 64.
- KRAMER, M. et al. Strong-field gravity tests with the double pulsar. *Physical Review X*, APS, v. 11, n. 4, p. 041050, 2021. Citado 6 vezes nas páginas 13, 67, 76, 77, 78 e 83.
- KRAMER, M. et al. Tests of general relativity from timing the double pulsar. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 314, n. 5796, p. 97–102, 2006. Citado na página 76.
- LI, T. G. *Extracting physics from gravitational waves: Testing the strong-field dynamics of general relativity and inferring the large-scale structure of the Universe*. [S.l.]: Springer, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- LORIMER, D. R.; KRAMER, M. *Handbook of Pulsar Astronomy*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 51, 52, 65, 66 e 76.
- LYNE, A. A review of the double pulsar - psr j0737-3039. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, v. 6, p. 162, 04 2009. Citado na página 75.
- LYNE, A.; GRAHAM-SMITH, F. *Pulsar astronomy*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado na página 52.
- MACEDO, R. P. *Emissão de ondas gravitacionais por fontes compactas: o regime não-linear*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Universidade de Sao Paulo, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 45.

- MACKENZIE, A. S. *The Laws of Gravitation: Memoirs*. [S.l.]: American Book Company, 1900. v. 9. Citado na página 73.
- MAGGIORE, M. *Gravitational Waves: Theory and Experiments*. [S.l.]: Oxford University Express, 2008. volume 1. Citado 11 vezes nas páginas 28, 35, 43, 44, 46, 52, 53, 59, 60, 61 e 62.
- MENDES, R. Estrelas de nêutrons e seus múltiplos mensageiros. *Cadernos de Astronomia*, v. 2, n. 2, p. 58–70, 2021. Citado na página 49.
- MONITOR, F. G.-R. B. et al. Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: Gw170817 and grb 170817a. *arXiv preprint arXiv:1710.05834*, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 72.
- NEWTON, I. *Principia: Princípios Matemáticos da Filosofia Natural - Livro I*. [S.l.]: Edusp, 2016. Citado na página 14.
- NEWTON, I. *Principia: Princípios Matemáticos da Filosofia Natural - Livro II e III*. [S.l.]: Edusp, 2016. Citado na página 15.
- PADMANABHAN, T. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 40 e 41.
- RAMOS, M. P.; MALUF, R. V. Sobre a teoria de einstein para ondas gravitacionais e sua aplicação no estudo da radiação emitida por um pulsar binário. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- ROLL, P. G.; KROTKOV, R.; DICKE, R. H. The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 442–517, 1964. Citado na página 15.
- SAULSON, P. R. *Fundamentals of interferometric Gravitational Waves detectors*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1994. v. 1. Citado na página 33.
- SCHLAMMINGER, S. *Gravity measured with record precision*. [S.l.]: Nature Publishing Group, 2018. Citado na página 74.
- SCIENCE, C. on Data for; TECHNOLOGY. 2022. Citado na página 73.
- SHAO, L. General relativity withstands double pulsar’s scrutiny. *Physics*, APS, v. 14, p. 173, 2021. Citado na página 76.
- SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 49.
- SHKLOVSKII, I. Possible causes of the secular increase in pulsar periods. *Soviet Astronomy*, v. 13, p. 562, 1970. Citado na página 67.
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V.  $f(R)$  theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 82, n. 1, p. 451, 2010. Citado na página 69.
- STAIRS, I. et al. Studies of the relativistic binary pulsar psr b1534+ 12. i. timing analysis. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 581, n. 1, p. 501, 2002. Citado na página 81.

- STEPHANI, H.; STEWART, J. M. *General relativity : An introduction to the theory of the gravitational field*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1982. Citado na página 26.
- TAKIBAYEV, N.; BOSHKAYEV, K. Neutron stars: Physics, properties and dynamics. In: *Neutron Stars: Physics, Properties and Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–278. Citado na página 48.
- TAYLOR, J. H.; FOWLER, L. A.; MCCULLOCH, P. M. Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar psr1913+ 16. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 277, n. 5696, p. 437–440, 1979. Citado na página 50.
- TAYLOR, J. H.; WEISBERG, J. M. A new test of general relativity-gravitational radiation and the binary pulsar psr 1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, v. 253, p. 908–920, 1982. Citado na página 12.
- TELLER, E.; WHEELER, J. *Spacetime physics: introduction to special relativity*. [S.l.]: WH Freeman, San Fransisco, 1992. Citado na página 14.
- VOIVODIC, R. *Vinculando teorias modificadas de gravitação utilizando propriedades de voids*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.: s.n.], 1972. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- WEISBERG, J. M.; HUANG, Y. Relativistic measurements from timing the binary pulsar psr b1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 829, n. 1, p. 55, 2016. Citado na página 77.
- WEISBERG, J. M.; NICE, D. J.; TAYLOR, J. H. Timing measurements of the relativistic binary pulsar psr b1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 722, n. 2, p. 1030, 2010. Citado na página 64.
- WOLSZCZAN, A.; FRAIL, D. A. A planetary system around the millisecond pulsar psr1257+ 12. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 355, n. 6356, p. 145–147, 1992. Citado na página 80.
- XUE, C. et al. Precision measurement of the newtonian gravitational constant. *National Science Review*, Oxford University Press, v. 7, n. 12, p. 1803–1817, 2020. Citado na página 73.
- YERLI, S. K. et al. *The electromagnetic spectrum of neutron stars*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 210. Citado na página 66.

# APÊNDICE A – Tensor Lambda

Dada uma solução de onda plana  $h_{\mu\nu}$  se propagando na direção  $\hat{\mathbf{n}}$ , longe da fonte, já na norma de Einstein (3.19), mas que ainda não esteja na norma TT, podemos encontrar a forma da onda na norma TT como segue.

Primeiro introduzimos o tensor

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (\text{A.1})$$

este tensor tem as seguintes características

- Simetria:

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ji}(\hat{\mathbf{n}}) ; \quad (\text{A.2})$$

- Transverso:

$$n^i P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = 0 ; \quad (\text{A.3})$$

- Projetor:

$$P_{ik}(\hat{\mathbf{n}}) P_{kj}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) ; \quad (\text{A.4})$$

- Traço não-nulo:

$$P_i^i = 2 . \quad (\text{A.5})$$

A partir de  $P_{ij}$ , definimos o tensor Lambda, onde

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \quad (\text{A.6})$$

este tensor possui as seguintes características

- Simetria com respeito aos índices  $(i, j)$  e  $(k, l)$ :

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = \Lambda_{kl,ij}(\hat{\mathbf{n}}) ; \quad (\text{A.7})$$

- Transverso em todos os índices:

$$n^i \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = 0, \quad n^j \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = 0, \quad \dots \quad (\text{A.8})$$

;

- Projetor:

$$\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} \quad (\text{A.9})$$

- Traço nulo com respeito aos índices  $(i, j)$  e  $(k, l)$ :

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0 . \quad (\text{A.10})$$

Em termos de  $\hat{\mathbf{n}}$ , (A.6), pode ser escrito como

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l . \quad (\text{A.11})$$