Lucas Venâncio da Silva Santos

Descrição de sistemas impulsivos e um estudo de propriedades recursivas.

Vitória-ES

2022

Lucas Venâncio da Silva Santos

Descrição de sistemas impulsivos e um estudo de propriedades recursivas.

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-MAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr$^{\underline{a}}$. Ginnara Mexia Souto
Coorientador: Prof. Dr$^{\underline{a}}$. Daniela Paula Demuner

Vitória-ES
2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Sobrenome do autor, Nome do autor, 1989-
S677t Título da obra : Subtítulo da obra / Nome do autor Sobrenome do autor. - 2021.
Total de folhas f. : il.

Orientador: Nome do orientador Sobrenome do orientador.
Coorientador: Nome do coorientador Sobrenome do coorientador.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Análise matemática. I. Sobrenome do orientador, Nome do orientador. II. Sobrenome do coorientador, Nome do coorientador. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 51

Lucas Venâncio da Silva Santos

Descrição de sistemas impulsivos e um estudo de propriedades recursivas.

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-MAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Vitória-ES, 25 de setembro de 2022:

Prof. Drª. Ginnara Mexia Souto
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientadora

Prof. Drª. Daniela Paula Demuner
Universidade Federal do Espírito Santo
Coorientadora

Prof. Drª. Jaqueline da Costa Ferreira
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr. Manuel Francisco Zuloeta Jimenez
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Membro Externo

Vitória-ES
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Credenciamento/Portaria MEC nº 609 de 14/03/2019

65ª ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Ata da sessão da 65ª defesa de Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT), do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, do discente Lucas Venâncio da Silva Santos, candidato ao título de Mestre em Matemática, realizada às 14:00h do dia primeiro de setembro de dois mil e vinte e dois, por meio de vídeoconferência. A Srª presidente da comissão examinadora, Profª. Drª. Ginnara Mexia Souto apresentou os demais membros da comissão examinadora, constituída pelos Doutores: Daniela Paula Demuner (UFES – Coorientadora), Jaqueline da Costa Ferreira (UFES - Membro Interno) e Manuel Francisco Zuloeta Jimenez (UTFPR – Membro Externo). Em seguida cedeu a palavra ao candidato, que em cinquenta minutos apresentou sua dissertação, intitulada “Descrição de sistemas impulsivos e um estudo de propriedades recursivas”. Terminada a apresentação do aluno, a presidente retomou a palavra e a cedeu aos membros da Comissão Examinadora, um a um, para procederem a arguição. A presidente convidou a Comissão Examinadora a se reunir em separado para deliberação. Ao final, a Comissão Examinadora retornou e a presidente informou aos presentes que a dissertação havia sido aprovada e que o aluno deve providenciar dentro do período de 3 (três) meses a versão final da Dissertação. Nada mais havendo, a Srª Presidente, então, deu por encerrada a sessão, e lavrou a presente ata, que é assinada pelos membros da Comissão Examinadora. Vitória-ES, 01 de setembro de 2022.

____
Profª Drª Ginnara Mexia Souto - Orientadora
Universidade Federal do Espírito Santo

____
Profª Drª Daniela Paula Demuner - Coorientadora
Universidade Federal do Espírito Santo

____
Profª Drª Jaqueline da Costa Ferreira - Membro Interno
Universidade Federal do Espírito Santo

____
Prof. Dr. Manuel Francisco Zuloeta Jimenez - Membro Externo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON)
Certificado de assinaturas gerado em
03/09/2022 às 01:36:09

Ata da defesa Lucas Venancio APROVADO REMOTO (1)

Data e Hora de Criação: 02/09/2022 às 13:04:48

Documentos que originaram esse envelope:
- Ata da defesa Lucas Venancio APROVADO REMOTO (1).pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 891603f82b5cc88a51bf72acf1f3a7a344716298a7f997f48809ca6eb85c00bf
[SHA512]: 195e6b40e90b47c84ff892d79da8e7ddc18de70a4ac439da1d3259679425c4c60151cafc4f291296e51b9ac726c0de5ca43e9f514a8a565239b61c7910f2c22c

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Ginnara Mexia Souto (ginnara.souto@ufes.br)
Data/Hora: 02/09/2022 - 14:02:20, IP: 189.115.211.208
[SHA256]: c38dcc812cd405c96d7b64ff6ebe97d3825326a83b6f0180bdc33981443b49ed

ASSINADO - Daniela Demuner (daniela.demuner@ufes.br)
Data/Hora: 02/09/2022 - 15:04:52, IP: 179.178.254.50, Geolocalização: [-20.310264, -40.290717]
[SHA256]: 5ad5fc7911e4ac49da4ed481bb9acff8207f529325a297794345d6d5e31279fb

ASSINADO - Jaqueline Ferreira (jaqueline.c.ferreira@ufes.br)
Data/Hora: 02/09/2022 - 15:22:42, IP: 181.222.246.187, Geolocalização: [-18.938142, -48.285477]
[SHA256]: 8ac38a65d9830c8f8814278491ca1e7c9e8f075522feb571f74d65df4790e85b

Jaqueline da Costa Ferreira

ASSINADO - Manuel Francisco Zuloeta Jimenez (manzulji@gmail.com)
Data/Hora: 03/09/2022 - 01:36:09, IP: 187.94.138.44
[SHA256]: 063626b98e90b18e180db7e3b04dc9e4a77507ed9557dd82396537af8cf22620

Manuel Francisco Zuloeta Jimenez

Histórico de eventos registrados neste envelope

03/09/2022 01:36:09 - Envelope finalizado por manzulji@gmail.com, IP 187.94.138.44
03/09/2022 01:36:09 - Assinatura realizada por manzulji@gmail.com, IP 187.94.138.44
03/09/2022 01:20:17 - Envelope visualizado por manzulji@gmail.com, IP 187.94.138.44
02/09/2022 15:22:42 - Assinatura realizada por jaqueline.c.ferreira@ufes.br, IP 181.222.246.187
02/09/2022 15:04:52 - Assinatura realizada por daniela.demuner@ufes.br, IP 179.178.254.50
02/09/2022 14:02:20 - Assinatura realizada por ginnara.souto@ufes.br, IP 189.115.211.208
02/09/2022 13:10:15 - Envelope registrado na Blockchain por edilane.schirma@ufes.br, IP 200.137.65.104
02/09/2022 13:10:14 - Envelope encaminhado para assinaturas por edilane.schirma@ufes.br, IP 200.137.65.104
02/09/2022 13:04:48 - Envelope criado por edilane.schirma@ufes.br, IP 200.137.65.104

Agradecimentos

Primeiramente agradeço, meu pai Manoel, minha mãe Vanuza e meu irmão Douglas por sempre me incentivaram em todos os momentos da minha vida, vocês são minha motivação para que eu sempre procure fazer o melhor. Obrigado de verdade por serem meu apoio e por se dedicarem tanto para que eu pudesse chegar onde eu estou, espero um dia retribuir tanto quanto recebo de vocês. Amo muito voçês.

Quero agradecer a professora Ginnara, que apesar da distância imposta pela pandemia, desde o final de 2020 tem se dedicado tanto para que eu pudesse melhorar como pesquisador. Muito obrigado professora por ter aceito me orientar, pelos conselhos, pela paciência, correções, pelo carinho, pela atenção, por me apoiar e motivar nos momentos difíceis que passei durante o curso, depois de sua orientação eu posso dizer com certeza que sou um profisional melhor. Admiro muito você e espero que você seja muito feliz, lamento muito não termos tido mais encontros pessoalmente.

Agradeço a professora Daniela que prontamente aceitou me coorientar, obrigado também por me ajudar sempre que a procurei, pela confiança no meu trabalho, pelo respeito, paciência e principalmente pela disponibilidade dada à mim, você é uma ótima professora e pesquisadora, te admiro muito.

Aos amigos da minha família Rubens, Nanci e Roberto desejo tudo de bom e agradeço por toda ajuda, motivação e todo crédito dado a mim.

Agradeço à Micaeli, minha pequena, pela confiança e ajuda que sempre me deu, obrigado pelos conselhos e pelas palavras de ânimo nos momentos em que tudo pareceu não ter saída, me desculpa por nem sempre ter sido o melhor para você, porém, saiba que o homem que me tornei é fruto do que você sempre esperou de mim. Obrigado por ser assim do seu jeitinho, com você tudo fica mais tudo simplifica, espero que você tenha muito sucesso na sua vida.

Para concluir esse curso uma pessoa foi muito especial e importante para mim, muito obrigado Cari, sempre vou ser grato por ter conhecido você, de verdade obrigado por sempre me apoiar, por tornar meus dias mais alegres, por ter as palavras certas para me dizer quando passei por dificuldades e principalmente obrigado por ser minha amiga, quero ter você sempre em minha vida.

Quero agradecer aos professores do curso Pós-Graduação em Matemática (PPG-MAT) da Ufes pela dedicação e ensinamentos que tanto contribuíram para a minha jornada.

Por fim não posso deixar de agradecer Gustavo Panin, Matheus Haddad, Matheus

Lima e Ramon Aleixo, pessoas muito competentes, meus colegas, parceiros de estudos, professores em horas de dúvida e com certeza figuras essenciais no meu mestrado.

Agradeço à FAPES por todo apoio financeiro.

Resumo

A teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos é um importante instrumento para descrever a evolução de sistemas em que o desenvolvimento contínuo de um processo é interrompido bruscamente por uma mudança de estado. Tais sistemas são uma generalização natural da teoria clássica dos sistemas dinâmicos contínuos. O objetivo desse trabalho é apresentar um texto que compreenda a teoria fundamental dos sistemas semidinâmicos impulsivos e algumas de suas propriedades topológicas. Além disso, mostraremos também condições para construir conjuntos impulsivos em $\mathbb{R}^n$ que satisfaçam a condição forte de tubo. Para finalizar o presente trabalho, discutiremos resultados sobre conjuntos minimais, movimentos recorrentes, movimentos quase periódicos, movimentos fracamente quase periódicos, estabilidade de Lyapunov e a quase estabilidade de Zhukovskij.

Palavras-chave: Sistemas semidinâmicos; Sistemas impulsivos; Conjuntos impulsivos; Estabilidade; Recorrência; Minimalidade.

Abstract

The theory of impulsive semidynamic systems is an important tool to describe the evolution of systems in which the continuous development of a process is interrupted abruptly by a change of state. Such systems are a natural generalization of the classical theory of continuous dynamical systems. The objective of this work is to present a text that understands the fundamental theory of impulsive semidynamic systems and some of their topological properties. In addition, we will also show conditions for building impulsive sets in $\mathbb{R}^n$ that satisfy the strong tube condition. To conclude the present work, we will discuss results on minimal sets, recurrent motions, quasi-periodic motions, weakly quasi-periodic motions, Lyapunov stability and Zhukovskij quasi-stability.

Keywords: Semidynamic systems; Impulsive systems; Impulsive sets; Stability; recurrence; minimality.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos nasceu do estudo da teoria qualitativa de equações diferenciais. Atualmente este ramo representa um campo diversificado tanto nas áreas de aplicações de seus conceitos, quanto nas ferramentas utilizadas para seu estudo. Sobre a conceitualização e formalização da teoria de sistemas dinâmicos sugerimos que o leitor consulte o que está escrito em [2].

Sistemas semidinâmicos impulsivos constituem uma importante generalização da teoria de sistemas dinâmicos, nessa abordagem a dinâmica contínua é interrompida por mudanças bruscas de estado, ou seja, ainda são basicamente sistemas dinâmicos que são munidos com uma condição para descrever descontinuidades, sobre essas descontinuidades daremos o nome de impulsos. A utilização dos impulsos as vezes é necessário para provocar uma mudança na evolução de um modelo real afim de evitar algum resultado inconsistente.

Neste trabalho estudamos propriedades topológicas de sistemas semidinâmicos impulsivos, sistemas desse tipo serão nosso objeto principal de estudo. Essa estrutura é denotada por (X, π, M, I) e consiste de três elementos: um sistema semidinâmico contínuo num espaço de fase X, um conjunto fechado M, o conjunto impulsivo, que está no espaço de fase e por fim uma função I definida em M, chamada de função impulsiva, responsável pelas descontinuidades do sistema, lembrando que os impulsos variam no tempo.

Na literatura a escolha do conjunto impulsivo pode ser feita de forma abstrata, nesse sentido, destacamos como um dos objetivos deste trabalho construir conjuntos impulsivos em $\mathbb{R}^n$ e apresentar condições para que tais conjuntos satisfaçam a condição forte de tubo, para alcançarmos esse objetivo baseamos nossos estudos no que foi feito no artigo [3]. Dando continuidade ao estudo de sistemas com impulsos, apresentamos resultados envolvendo conjuntos minimais, movimentos recorrentes, movimentos quase periódicos e movimentos fracamente quase periódicos. Apresentamos também a teoria da estabilidade de Lyapunov e a quase-estabilidade de Zhukovskij para sistemas impulsivos. Em [2], estudamos que muitos conceitos recursivos (minimalidade, recorrência e movimentos periódicos) são definidos para sistemas dinâmicos contínuos, apresentaremos a versão desses conceitos no contexto de sistemas impulsivos.

Sobre a estrutura da dissertação, descreveremos nas próximas linhas a forma que organizamos o trabalho.

No primeiro capítulo começamos exibindo definições fundamentais, resultados e notações referentes a teoria elementar de sistemas semidinâmicos com impulso. As definições e resultados serão úteis na demonstração dos teoremas, lemas e proposições apresentados posteriormente. Em resumo, nas seções que compõe esse capítulo, definiremos sistemas semidinâmicos, sistemas semidinâmicos com impulso e a função que representa o menor tempo positivo que uma órbita sofre impulso, também conhecida como função tempo de impacto, tal função é denotada por ϕ.

No Capítulo 2 focamos em apresentar condições suficientes para que conjuntos impulsivos satisfaçam a condição forte de tubo. Definimos a condição de tubo e condição forte de tubo, conceitos importantes nos sistemas semidinâmicos, pois, são base para que possamos garantir a continuidade da função ϕ em pontos que não pertençam ao conjunto impulsivo. Neste capítulo as referências utilizadas foram [5], [6], [10] e [14]. Na útima seção do capítulo explanamos com mais detalhes o que foi feito em [3], os conjuntos impulsivos em $\mathbb{R}^n$ em sistemas dinâmicos são gerados por equações diferencias autonômos. O resultado principal desse capítulo é o teorema 2.2.1, onde apresentamos condições suficientes para que uma superfície impulsiva satisfaça a condição forte de tubo. A primeira condição que devemos ter, é que o conjunto impulsivo precisa ser de alguma forma transversal ao fluxo, além disso, a fim de obter importantes propriedades topológicas para o sistema ele também precisa satisfazer o que chamamos de "condições do tubo".

No Capítulo 3 estudaremos conceitos topológicos de sistemas semidinâmicos impulsivos, tais como periodicidade, recorrência e minimalidade, muitos desses conceitos são estudados para sistemas dinâmicos contínuos como pode ser visto em [1] e [2], mostraremos que alguns resultados são generalizados para o contexto impulsivo. Neste capítulo baseamos nos artigos [6], [5], [10] e [11]. Os primeiros conceitos recursivos importantes para os sistemas apresentados, são $\tilde{\pi}$-invarância e conjuntos limites positivos. No final do capítulo apresentamos conclusões acerca de propriedades topológicas de sistemas semidinâmicos impulsivos destacamos que o resultado principal desse capítulo é mostrar que sob certas condições se $\tilde{\pi}^+(x) \cup \{x_k\}$ é minimal então x é eventualmente periódico.

No último capítulo estudamos vários resultados que relacionam os conceitos de estabilidade de Lyapunov e quase estabilidade de Zhukovskij com movimentos fracamente quase periódicos, recorrência e minimalidade. A maioria desses resultados podem ser vistos no contexto de sistemas impulsivos, veja [[4], [5], [6], [7], [9], [10] e [11]] por exemplo. Apresentaremos um estudo de movimentos recorrentes via teoria da estabilidade (de Lyapunov e quase estabilidade de Zhukovskij) e a quase estabilidade de Zhukovskij em sistemas semidinâmicos impulsivos que foi apresentada inicialmente no artigo [8]. Queremos ao final deste capítulo, utilizando a estabilidade de Zhukovskij, demonstrar o teorema 4.3.1 que apresenta condições suficientes para que um conjunto limite positivo de um ponto seja um atrator.

No Apêndice A estaremos preocupados em apresentar conceitos e resultados básicos sobre superfícies diferenciáveis, essa parte do texto é importante pois demonstramos resultados que serão importantes para o esclarecimento do que será discutido na Seção 2.2 do Capítulo 2.

Notações

Descreveremos abaixo algumas notações que aparecerão neste trabalho.

- $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}_+$ representa o conjunto dos números reais não negativos;
- $\mathbb{R}_-$ representa o conjunto dos números reais não positivos;
- $\mathbb{N}$ representa os conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Z}_+$ representa o conjunto dos números inteiros não negativos;
- $\mathbb{K}^*$ a inserção do $*$ significa dizer que tal conjunto numérico não tem o 0.
- $\mathbb{K}_+$ esse é o conjunto dos elementos não negativos pertecentes ao conjunto $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{K}_-$ esse é o conjunto dos elementos não positivos pertecentes ao conjunto $\mathbb{K}$;
- $\inf A$ é o ínfimo do conujnto $A \subset \mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}^n$ representa o espaço euclidiano n-dimesional;
- X representa um espaço métrico munido da métrica d;
- A^C é o complementar de A em X;
- $\overline{A}$ representa o fecho de A em X;
- ∂A representa a fronteira de A em X;
- $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$;
- $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$;
- $B(A, \epsilon) = \{y \in X : d(x, A) < \epsilon\}$

Quando se tratar de uma sequência em um espaço métrico X onde n pertence ao conjunto dos números naturais utilizaremos a notação $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Nesse sentido quando nos referirmos ao limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ podemos representar apenas por

$$x_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} x \, .$$

1 Sistemas Semidinâmicos Impulsivos

Neste capítulo apresentaremos a teoria elementar de sistemas semidinâmicos impulsivos. Na primeira seção é dada a definição de sistema semidinâmicos. Já na segunda seção definimos o principal tema desse trabalho: sistemas semidinâmicos impulsivos. Nessa seção também explicaremos com mais detalhes todos os aspectos que acompanham sistemas impulsivos, como por exemplo, a definição semitrajetória impulsiva e a função ϕ. Na última seção mostraremos sob quais condições a função tempo de impacto é contínua. A maior parte dos resultados deste capítulo podem ser encontrados nas referências [4], [5], [6] e [14].

1.1 Sistemas Semidinâmicos

Para o estudo da teoria de sistemas semidinâmicos com impulso precisamos de conhecimentos acerca de sistemas semidinâmicos, nesse sentido, sugerimos para conhecimento de mais informações sobre o assunto, a leitura de [1]. Considere, nos resultados que se seguem, X sendo um espaço métrico com uma métrica d.

Definição 1.1.1. *Um **sistema semidinâmico** sobre X é uma tripla $(X, \pi, \mathbb{K}_+)$, onde π é uma função definida do espaço $X \times \mathbb{K}_+$ no espaço X satisfazendo os seguintes axiomas:*

- $\pi(x, 0) = x \ \forall x \in X$ (Axioma da identidade)
- $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) \ \forall x \in X$ e $t, s \in \mathbb{K}_+$ (Axioma de grupo)
- $\pi : X \times \mathbb{K}_+ \to X$ é uma função contínua.

No caso em que $\mathbb{K}_+ = \mathbb{R}_+$, a tripla $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ será chamada de **sistema semidinâmico contínuo**, já no caso em que $\mathbb{K}_+ = \mathbb{Z}_+$ dizemos que $(X, \pi, \mathbb{Z}_+)$ é um **sistema semidinâmico discreto**. O caso onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ é chamado de **sistema dinâmico** e para mais detalhes indicamos a leitura de [2].

De agora em diante com o intuito de simplificarmos a notação, denotaremos um sistema semidinâmico $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ como sendo (X, π).

Seja (X, π) um sistema semidinâmico. O espaço X é chamado de **espaço de fase** e a função contínua π é chamada de **função de fase**. A partir da função de fase podemos definir duas novas funções contínuas que serão importantes em resultados futuros.

1. Fixe $x \in X$ e obtemos a função conhecida como **movimento** $\pi_x : \mathbb{R}_+ \to X$ definida por $\pi_x(t) = \pi(x, t)$.

2. Fixe agora $t \in \mathbb{R}_+$ obtemos uma função, $\pi^t : X \to X$, que chamaremos de **transição** definida por $\pi^t(x) = \pi(x,t)$.

A seguir podemos verificar alguns exemplos de sistemas semidinâmicos.

Exemplo 1.1.1. (***Equações Diferenciais Ordinárias autônomas***). *Aqui temos um exemplo de sistema semidinâmico. Consideremos a seguinte equação diferencial autonônoma*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.1}$$

onde a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é contínua. Neste ponto se assumirmos que para cada* $x \in \mathbb{R}^n$ *existe uma única solução* $\varphi(t,x)$ *da Equação (1.1) com* $t \in \mathbb{R}_+$*, percebemos que a função* $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ :\to \mathbb{R}^n$ *dada por* $\pi(x,t) = \varphi(t,x)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}_+$*, define um sistema semidinâmico.*

Exemplo 1.1.2. (***Equações Diferenciais Ordinárias autônomas***). *Consideremos a seguinte equação diferencial não autonônoma*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.2}$$

onde a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é contínua. Assumiremos que para cada* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ *existe uma única solução* $\varphi(t, t_0, x_0)$ *da Equação (1.2) com* $t \in \mathbb{R}_+$*,* $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0$*. Pela unicidade da solução obtemos*

$$\varphi(t + s_1 + s_2, t, x) = \varphi(t + s_1 + s_2, t + s_1, \varphi(t + s_1, t, x)), \text{ com } t, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ e } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definindo o espaço de fase como sendo $X = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$*. Então a função de fase* $\pi : X \times \mathbb{R}_+ \to X$ *dada por*

$$\pi((t,x), s) = (s + t, \phi(s + t, t, x)), \text{ onde } s \in \mathbb{R}_+ \text{ e } (t,x) \in X,$$

define um sistema semidinâmico em X*.*

Definição 1.1.2. *Seja* (X, π) *um sistema semidinâmico e* $x \in X$*. A* ***órbita positiva*** *de* x *é dada por*

$$\pi^+(x) = \{\pi_x(t) : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Além disso, dado $A \subset X$ *e* $\Delta \subset \mathbb{R}_+$ *definimos os seguintes conjuntos*

$$\pi^+(A) = \{\pi^+(x) : x \in A\} \text{ e } \pi(A, \Delta) = \{\pi(x,t) : x \in A \text{ e } t \in \Delta\}.$$

Definição 1.1.3. *Seja* (X, π) *um sistema semidinâmico. Para* $t \geq 0$ *e* $x \in X$*, escrevemos* $F(x,t) = \{y \in X : \pi(y,t) = x\}$ *e para* $\Delta \subset [0, +\infty)$ *e* $D \subset X$*, definimos*

$$F(D, \Delta) = \{F(x,t) : x \in D \text{ e } t \in \Delta\}.$$

*Então diremos que $x \in X$ é um **ponto inicial** se $F(x,t) = \emptyset$ para todo $t > 0$.*

Para ilustrar melhor o que foi definido anteriormente considere o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1.3. *Seja $(\mathbb{R}^2, \pi)$ um sistema semidinâmico, onde*

$$\pi((x,y),t) = (x+t, y) \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } t \geq 0.$$

Considere $(x,y) = (1,1)$ e $t = 1$, temos que $F((1,1),1) = (0,1)$, com efeito

$$(1,1) = \pi((x,y),1) = (x+1, y). \tag{1.3}$$

Por essa equação percebemos que $x = 0$ e $y = 1$ e concluímos facilmente que $(0,1)$ é o único ponto tal que $\pi((x,y),1) = (1,1)$. Agora tomando $\Delta = [0,1]$ percebemos que $F((1,1),\Delta) = [0,1] \times \{1\}$. Com efeito fixando um tempo $t \in \Delta$ obtemos

$$(1,1) = \pi((x,y),t) = (x+t, y), \tag{1.4}$$

o que implica em $x = 1 - t$ e $y = 1$, donde $x \in [0,1]$. Por fim considere $D = \{1\} \times [0,1]$ e ainda definindo $\Delta = [0,1]$ e pelos mesmos argumentos descritos acima concluímos que $F(D,\Delta) = [0,1] \times [0,1]$.

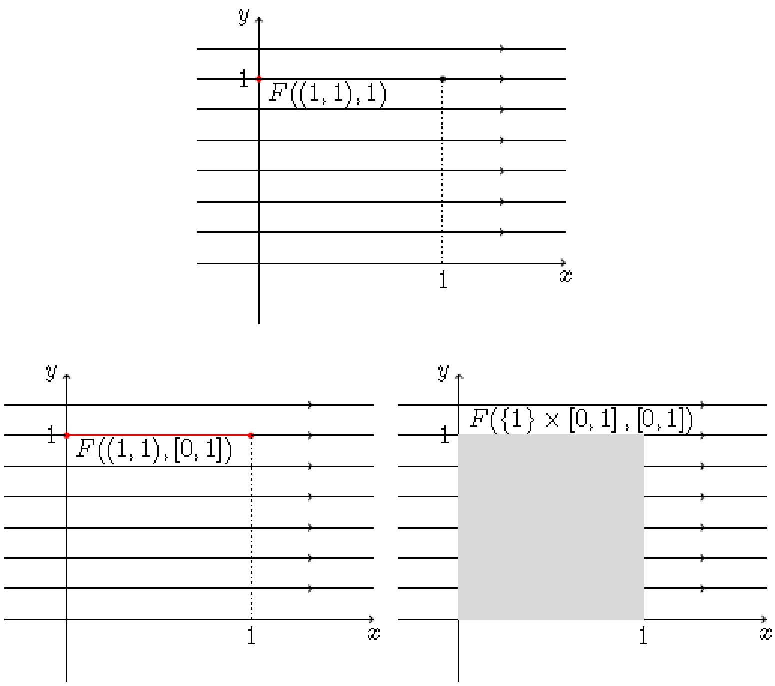

Figura 1 – Conjuntos $F((1,1),1)$, $F((1,1),\Delta)$ e $F(D,\Delta)$.

1.2 Sistemas Semidinâmicos Impulsivos

Apresentaremos nesta seção sistemas semidinâmicos com uma condição que descreve descontinuidades. Tais sistemas serão nosso objeto principal de estudos e nesta seção descrevemos o que é uma trajetória impulsiva e apresentamos a função que caracteriza o menor momento de tempo para o qual uma órbita encontra o conjunto impulsivo. Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [5], [6], [10] e [14].

Definição 1.2.1. *Um* ***sistema semidinâmico impulsivo*** (X, π, M, I) *consiste de um sistema semidinâmico* (X, π)*, um conjunto não vazio e fechado* $M \subset X$ *e uma função contínua* $I : M \to X$*, além disso, para cada* $x \in M$ *existe* $\epsilon_x > 0$ *satisfazendo*

$$F(x, (0, \epsilon_x)) \cap M = \emptyset \text{ e } \pi(x, (0, \epsilon_x)) \cap M = \emptyset. \tag{1.5}$$

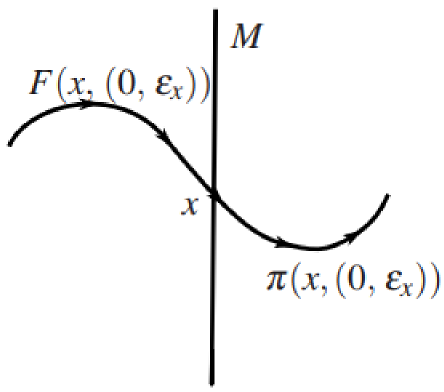

Figura 2 – A Trajetória de π sobre x.

Chamaremos o conjunto Mde **conjunto impulsivo** e a função I de **função impulsiva**. As condições apresentadas em (1.5) mostram que os pontos de M são isolados em todas as trajetórias do sistema, ou seja, se $x \in M$ existe um intervalo em que podemos avançar ou retroceder o sistema e não encontraremos o conjunto M, neste sentido, considere o seguinte conjunto

$$M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} \pi(x, t) \right) \cap M, \text{ com } x \in X.$$

O próximo lema apresenta condições para obtermos a existência do menor tempo, $s > 0$, tal que a trajetória $\pi(x, t)$ intercepta o conjunto M.

Lema 1.2.1. *Seja* (X, π, M, I) *um sistema semidinâmico impulsivo. Dado* $x \in X$*, se* $M^+(x) \neq \emptyset$ *então existe um número* $s > 0$ *tal que* $\pi(x, t) \notin M$ *para todo* $0 < t < s$ *e* $\pi(x, s) \in M$*.*

Demonstração. Considere $x \in X$. Por hipótese temos que $M^+(x) \neq \emptyset$, ou seja, existe $t_x \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(x, t_x) \in M$. Usando também o fato de que (X, π, M, I) é um sistema semidinâmico impulsivo, existe um $\epsilon_x \in \mathbb{R}_+$ onde

$$\pi(x,t) \notin \ M \text{ sempre que } t \in (0, \epsilon_x).$$

Observando o que foi apresentado acima concluímos que $t_x \in \mathbb{R}_+ \backslash (0, \epsilon_x)$. Dessa forma definimos o seguinte conjunto

$$S = \{t_x : t_x \in \mathbb{R}^+ \backslash (0, \epsilon_x)\}.$$

Percebemos que $S \neq \emptyset$ e limitado inferiormente, assim tomando $s = \inf S$ concluímos a demonstração do lema. □

Pelo Lema 1.2.1 é possível definir a **função tempo de impacto** ϕ da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \begin{cases} s, & \text{se } \pi(x,s) \in M \text{ e } \pi(x,t) \notin M \text{ para } 0 < t < s, \\ +\infty, & \text{se } M^+(x) = \emptyset. \end{cases}$$

O número $\phi(x)$, com $x \in X$, é o menor tempo para o qual a trajetória de x encontra M. Portanto para cada $x \in X$, chamamos $\pi(x, \phi(x))$ de **ponto impulsivo** de x.

Definição 1.2.2. ***Semitrajetória impulsiva*** *de x em (X, π, M, I) é a função $\tilde{\pi}_x$ definida em um subconjunto $[0, s)$ de $\mathbb{R}_+$, onde s pode ser $+\infty$. A descrição de tal trajetória segue indutivamente da seguinte maneira:*

Caso 1. *Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\tilde{\pi}_x(t) = \pi(x,t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $\phi(x) = +\infty$, neste caso, significa que a trajetória contínua e a impulsiva são as mesmas.*

Caso 2. *Contudo se $M^+(x) \neq \emptyset$, então $\phi(x) < +\infty$, $\pi(x, \phi(x)) = x_1 \in M$ e $\pi(x,t) \notin M$ para $0 < t < \phi(x)$. Neste 2º caso definimos $\tilde{\pi}_x$ em $[0, \phi(x)]$ por*

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x,t), & se\ , 0 \leq t < \phi(x), \\ x_1^+, & se\ t = \phi(x), \end{cases}$$

onde $x_1^+ = I(x_1)$.

O processo continua com x_1^+. Se $M^+(x_1^+) = \emptyset$ então definimos $\tilde{\pi}_x(t) = \pi(x_1^+, t - \phi(x))$, para $\phi(x) \leq t < +\infty$ e temos $\phi(x_1^+) = +\infty$. Por outro lado, quando $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$ segue que $\phi(x_1^+) < +\infty$ e assim denotamos $\pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) = x_2 \in M$ e $\pi(x_1^+, t - \phi(x)) \notin M$ para $\phi(x) < t < \phi(x) + \phi(x_1^+)$. Definimos assim $\tilde{\pi}_x$ em $[\phi(x), \phi(x) + \phi(x_1^+)]$ por

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_1^+, t - \phi(x)), & se\ , \phi(x) \leq t < \phi(x) + \phi(x_1^+), \\ x_2^+, & se\ t = \phi(x) + \phi(x_1^+), \end{cases}$$

onde $x_2^+ = I(x_2)$. *O processo segue assim por diante. Notemos que* $\tilde{\pi}_x$ *está definida em cada intervalo* $[t_n(x), t_{n+1}(x)]$, *onde* $t_0(x) = 0$ *e* $t_{n+1}(x) = \sum_i^n \phi(x_i^+)$, *com* $n = 0, 1, 2, ...$ *e*$x_0^+ = x$. *Portanto,* $\tilde{\pi}_x$ *está definido em* $[0, t_{n+1}(x)]$.

O processo apresentado anteriormente finaliza após um número finito de etapas sempre que $M^+(x) = \emptyset$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$. *No entanto, se* $M^+(x) \neq \emptyset$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *o processo continua infinitamente e neste caso* $\tilde{\pi}_x$ *está definida em cada intervalo* $[0, T(x))$, *onde* $T(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi(x_i^+)$.

Para entender melhor a definição apresentada acima, observe a figura a seguir.

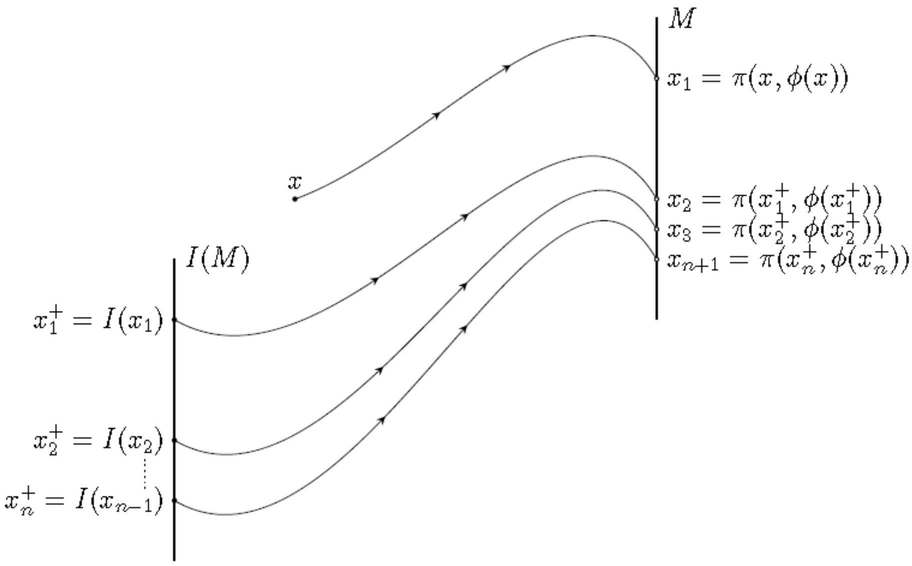

Figura 3 – Trajetória impulsiva de $x \in X$.

Na sequência apresentamos dois exemplos de sistemas dinâmicos impulsivos.

Exemplo 1.2.1. *Seja* $(\mathbb{R}, \pi)$ *um sistema semidinâmico dado por*

$$\pi(x, t) = x + t,\ x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}_+,$$

onde o conjunto impulsivo e a função impulsiva são respectivamente $M = \{1\}$ *e* $I(1) = 0$. *Portanto* $(\mathbb{R}, \pi, M, I)$ *é um sistema semidinâmico impulsivo.*

Exemplo 1.2.2. *Seja* $(\mathbb{R}^2, \pi, M, I)$ *um sistema semidinâmico impulsivo, onde* $(\mathbb{R}^2, \pi)$ *é dado por*

$$\pi((x, y), t) = (x + t, y) \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } t \geq 0.$$

Considere $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ *e defina a função impulsiva como sendo* $I : M \to X$ $I(x, y) = (0, \frac{y}{2})$ *onde* $(x, y) \in M$. *Caso* $p \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$ *então a trajetória* *impulsiva de p é igual à trajetória contínua pois $M^+(p) = \emptyset$. Por outro lado, se $q \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$ então $M^+(q_n^+) \neq \emptyset$ para cada $n = 0, 1, 2, ...$, e a trajetória de q sofre um número infinito de impulsos. Observe a Figura 4*

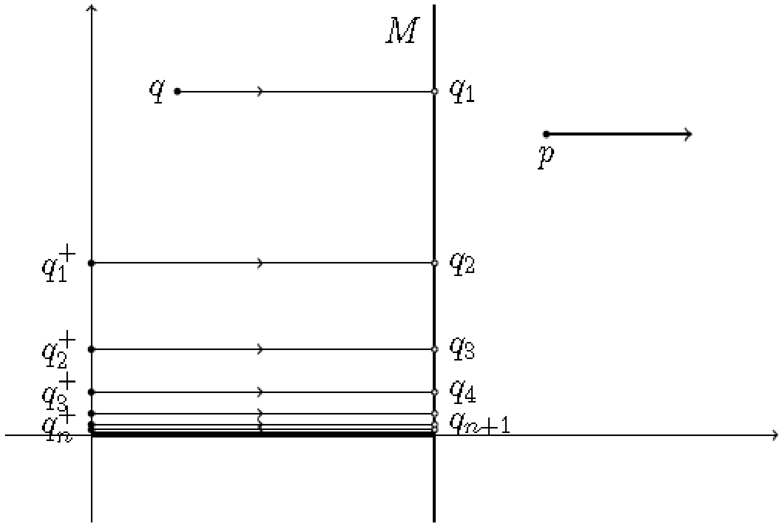

Figura 4 – Trajetória impulsiva de p e q.

Definição 1.2.3. *A **órbita impulsiva positiva** de um ponto $x \in X$ é dada por*

$$\tilde{\pi}^+(x) = \{\tilde{\pi}(x, t) : t \in [0, T(x))\}.$$

Além disso, para $A \subset X$ e $\Delta \subset \mathbb{R}_+$, definiremos

$$\tilde{\pi}^+(A) = \{\tilde{\pi}^+(x, t) : x \in A\} \text{ e } \tilde{\pi}(A, \Delta) = \{\tilde{\pi}(x, t) : x \in A \text{ e } t \in \Delta\}.$$

Observação 1.2.1. *Seja $x \in X$. Ao longo do texto denotaremos*

$$t_0(x) = 0,\ x_0^+ = x \text{ e } t_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i^+),\ n = 1, 2, ...$$

Além disso, temos

$$x_n^+ = \tilde{\pi}(x, t_n(x)) \text{ e } x_n = \pi(x_{n-1}^+, \phi(x_{n-1}^+)) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Na próxima observação descrevemos um argumento técnico que será útil em demonstrações futuras.

Observação 1.2.2. *Sejam $x \in X$ e $t \in [0, T(x))$ arbitrários. Pela forma que definimos um sistema semidinâmico impulsivo, podemos obter um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_k(x) \leq t < t_{k+1}(x)$. Fazendo $s = t - t_k(x)$ obtemos*

$$\tilde{\pi}(x,t) = \pi(x_k^+, s),\ 0 \leq s < \phi(x_k^+).$$

No próximo resultado podemos observar que, com exceção da continuidade, a função $\tilde{\pi}$ satifaz os axiomas da identidade e de grupo.

Proposição 1.2.1. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Então:*

(i) $\tilde{\pi}(x, 0) = 0$*, para todo* $x \in X$*;*

(ii) $\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t), s) = \tilde{\pi}(x, t+s)$*, para todo* $x \in X$ *e* $t, s \in [0, T(x))$ *tal que* $t+s \in [0, T(x))$*.*

Demonstração. Se $\phi(x) = +\infty$, então $\tilde{\pi}(x,t) = \pi(x,t)$ para todo $t \geq 0$ e dessa forma a conclusão é imediata. Suponha agora que $\phi(x) < +\infty$, neste caso observamos que o item (i) é consequência direta de como definimos $\tilde{\pi}(x,t)$.

Para demonstrarmos o item (ii) tome $t, s \in [0, T(x))$ de tal forma que $t + s \in [0, T(x))$, fazendo $y = \tilde{\pi}(x,t)$, pela Observação 1.2.2 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t = t_k(x) + t'$ onde $0 \leq t' < \phi(x_k^+)$ e assim podemos escrever

$$y = \tilde{\pi}(x,t) = \pi(x_k^+, t').$$

Analogamente, existe $l \in \mathbb{N}$ onde podemos escrever $s = t_l(y) + s'$ com $0 \leq s' < \phi(y_l^+)$ e assim denotaremos

$$\tilde{\pi}(y,s) = \pi(y_l^+, s').$$

Desde que $y = \pi(x_k^+, t')$ concluímos que

$$\phi(y) = \phi(x_k^+) - t',\ y_j^+ = x_{k+j}^+ \text{ e } \phi(y_j^+) = \phi(x_{k+j}^+),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, donde

$$t_l(y) = \sum_{j=k}^{k+l-1} \phi(x_j^+) - t',$$

e $t+s = t_k(x) + t' + t_l(y) + s' = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(x_j^+) + t' + \sum_{j=k}^{k+l-1} \phi(x_j^+) + s' - t' = t_{k+l}(x) + s'$. Desde que $0 \leq s' < \phi(y_l^+) = \phi(x_{k+l}^+)$, e assim concluímos que

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t), s) = \tilde{\pi}(y,s) = \tilde{\pi}(y_l^+, s') = \pi(x_{k+l}^+, s') = \tilde{\pi}(x, t+s)$$

e isto finaliza a prova da proposição. $\square$

1.3 Continuidade da função ϕ

A função ϕ, definida na seção anterior, determina o menor instante estritamente positivo para o qual a órbita positiva de $x \in X$ sofre impulso, essa função é de suma importância para a teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos e no que segue, vamos apresentar condições para que a função ϕ seja contínua, antes porém vamos dar algumas definições e resultados auxiliares. Nesta seção nos baseamos no que está apresentado em [7], [9] e [14].

Definição 1.3.1. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser* ***semicontínua superiormente*** *(**inferiormente**) em um ponto $a \in X$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ para cada $x \in X$ então,*

$$f(x) < f(a) + \varepsilon \ (f(a) - \varepsilon < f(x)).$$

Dizemos que f é semicontínua superiormente (inferiormente) quando f é superiormente (inferiormente) em cada ponto de X.

Observação 1.3.1. *Em termos de sequências, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua seperiormente (inferiormente) em um ponto $a \in X$, se cada sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} a$, temos*

$$\limsup_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(a) \ (\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(a)).$$

Pela definição anterior podemos afirmar que uma função f é contínua em X se, e somente se, for simultaneamente semicontínua superiormente e inferiormente em X. O próximo teorema oferece uma importante característica sobre a função ϕ.

Teorema 1.3.1. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Então para $x \in X \backslash M$ a função ϕ é semicontínua inferiormente em x.*

Demonstração. Se $\phi(x) = +\infty$ o resultado é imediato. Assumiremos que $\phi(x) = c \in (0, +\infty)$ e tomaremos uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que

$$x_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} x \ \text{ e } \ \phi(x_n) \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} t \, .$$

Sendo M um conjunto fechado e $x \in X\backslash M$ temos que $x_n \notin M$ para n muito grande. Note, porém, que $\pi(x_n, \phi(x_n)) \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e pela continuidade da função π em $X\backslash M$ deduzimos que

$$\pi(x_n, \phi(x_n)) \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} \pi(x, t) \ \in M,$$

o que significa $t \geq \phi(x)$ e a prova do teorema está finalizada. □

O próximo teorema mostra quando a função $\phi(x)$ não é semicontínua inferiormente.

Teorema 1.3.2. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in M$ não é um ponto inicial, então ϕ não é semicontínua inferiormente em x.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $y \in X$ tais que $\pi(y, \epsilon) = x$ e $\pi(y, [0, \epsilon)) \cap M = \emptyset$. Considere agora uma sequência decrescente $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $0 < \epsilon_n < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\epsilon_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} 0$. Definindo $y_n = \pi(y, \epsilon_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$y_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} y \;\text{ e }\; \phi(y_n) = \phi(\pi(y, \epsilon_n)) = \epsilon - \epsilon_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \epsilon < \phi(x) \; .$$

Portanto ϕ não é semicontínua inferiormente em x. □

2 Conjuntos impulsivos

Neste capítulo direcionaremos nosso foco em construir conjuntos impulsivos em $\mathbb{R}^n$. Na primeira seção apresentaremos os conceitos de condição de tubo e condição forte de tubo, essas definições desempenham um papel importante nos sistemas semidinâmicos com impulso, pois são utilizadas como base para que possamos garantir a continuidade da função ϕ fora do conjunto impulsivo. Na segunda seção apresentaremos condições suficientes para caracterizar conjuntos impulsivos em $\mathbb{R}^n$ que satisfaçam a condição forte de tubo. Baseamos nossos estudos no que está apresentado nos artigos [5], [6], [10] e [14], além disso, na última seção utilizamos como base o artigo [3]. Como complemento e para um melhor entendimento sobre definições e resultados referentes a teoria de hiperfíceis diferenciáveis, sugerimos a leitura do Apêndice A.

2.1 Condição de tubo e Condição forte de tubo

O conceito de seção é de fundamental importância na teoria dos sistemas semidinâmicos impulsivos.

Definição 2.1.1. *Um conjunto fechado $S \subset X$ contendo $x \in X$ é chamado de **seção** ou λ-**seção** sobre x, com $\lambda > 0$, se existe um conjunto fechado L tal que:*

(i) $F(L, \lambda) = S$;

(ii) $F(L, [0, 2\lambda])$ *é vizinhança de x;*

(iii) $F(L, \mu) \bigcap F(L, \eta) = \emptyset$, *para $0 \leq \mu < \eta \leq 2\lambda$.*

O conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ é chamado de **tubo** ou (λ-**tubo**). Observemos a seguinte figura:

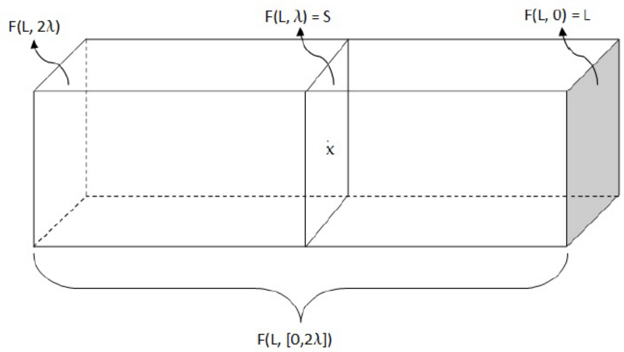

Figura 5 – Tubo $F(L, [0, 2\lambda])$

As seções ilustram localmente como se comporta um ponto não estacionário. A seguir provaremos lemas essenciais para discutirmos sobre a continuidade da função ϕ.

Lema 2.1.1. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo, $\mu \leq \lambda$ e $x \in X$. Se S é uma λ-seção sobre x, então S é uma μ-seção sobre x.*

Demonstração. Se $\mu = \lambda$ nada temos a provar. Sejam $0 < \mu < \lambda$ e $L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu)$. Como π é uma função contínua, então L_μ é um conjunto fechado. Diante disso, mostraremos que S é uma μ-seção através de x.

A condição (i) da Definição 2.1.1 é satisfeita pois

$$y \in F(L_\mu, \mu) \Leftrightarrow \pi(y, \mu) \in L_\mu \Leftrightarrow \pi(\pi(y, \mu), \lambda - \mu) \in L_\lambda \Leftrightarrow \pi(y, \lambda) \in L_\lambda \Leftrightarrow y \in S.$$

Donde $F(L_\mu, \mu) = S$.

Agora mostraremos que a condição (ii) é válida. Por hipótese S é uma λ-seção através de x, dessa forma existe um conjunto aberto U_1, com $x \in U_1 \subset F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$. Considere $T = F(L_\lambda, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])$. Afirmamos que T é um conjunto fechado, com efeito, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ com $z_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} z$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ tal que $\pi(z_n, t_n) \in L_\lambda$. Observe que $[0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ é um conjunto compacto e assim podemos tomar, sem perca de generalidade, $t_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \bar{t} \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$, usando a continuidade da aplicação π, obtemos

$$\pi(z_n, t_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \pi(z, \bar{t})$$

Notemos que $S \subset T^C = X \backslash T$ e T^C é aberto. Então existe um aberto $U_2 \subset T^C$ contendo x. Assim, $x \in U_1 \cap U_2$ com $U_1 \cap U_2$ aberto. Neste ponto mostraremos que $U_1 \cap U_2 \subset F(L_\mu, [0, 2\lambda])$, dado $w \in U_1 \cap U_2$, temos que $w \in F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ e que $w \in T^C$. O que implica que $\pi(w, t) \in L_\lambda$ para algum $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$. Definimos o número $s = t + \mu - \lambda$. Segue de $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$ que $s = t + \mu - \lambda$ e $0 < t + \mu - \lambda < 2\lambda$. Dessa forma podemos usar

$$\pi(\pi(w, t + \mu - \lambda), \lambda - \mu) = \pi(w, t) \in L_\lambda,$$

o que implica em

$$\pi(w, t + \mu - \lambda) \in L_\mu.$$

Portanto, $w \in F(L_\mu, [0, 2\mu])$.

Provemos que (iii) é verdadeira. Supondo por absurdo que existam $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\mu$ tais que $F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta) \neq \emptyset$. Tomando $\gamma \in F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta)$, assim $\pi(\gamma, \alpha) \in L_\mu$ e $\pi(\gamma, \beta) \in L_\mu$, o que implica

$$\pi(\gamma, \alpha + \lambda - \mu) = \pi(\pi(\gamma, \alpha), \lambda - \mu) \in L_\lambda \text{ e } \pi(\gamma, \beta + \lambda - \mu) = \pi(\pi(\gamma, \beta), \lambda - \mu) \in L_\lambda.$$

Então, $\gamma \in F(L_\lambda, \alpha + \lambda - \mu) \cap F(L_\lambda, \beta + \lambda - \mu)$ com $0 \leq \alpha + \lambda - \mu < \beta + \lambda - \mu \leq 2\lambda$, isso é um absurdo, pois L_λ é uma seção. Portanto, vale o item (iii) e o lema está provado. $\square$

Na próxima definição introduziremos os conceitos de TC-tubo e STC-tubo.

Definição 2.1.2. *Um tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dada pela seção S sobre $x \in X$ é chamado de* ***TC-tubo*** *se tivermos*

$$S \subset M \cap F(L, [0, 2\lambda])$$

Além disso, um ponto $x \in M$ satisfaz a ***condição de tubo*** *(**TC**) se existe um TC-tubo sobre x. Em particular, se*

$$S = M \cap F(L, [0, 2\lambda])$$

o tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dado pela seção S sobre $x \in M$ é dito ser ***STC-tubo****. Dizemos que um ponto $x \in X$ cumpre a* ***condição forte de tubo*** *(**STC**) se existe um STC-tubo sobre x.*

Veremos no próximo exemplo a diferença entre as condições **(TC)** e **(STC)**.

Exemplo 2.1.1. *Considere o sistema semidinâmico em $\mathbb{R}^2$ dado por $\pi((x, y), t) = (x+y, t)$, onde o conjunto impulsivo $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y, x \geq 0\}$. O ponto $(0, 0)$ satisfaz a condição TC mas não satisfaz a condição STC.*

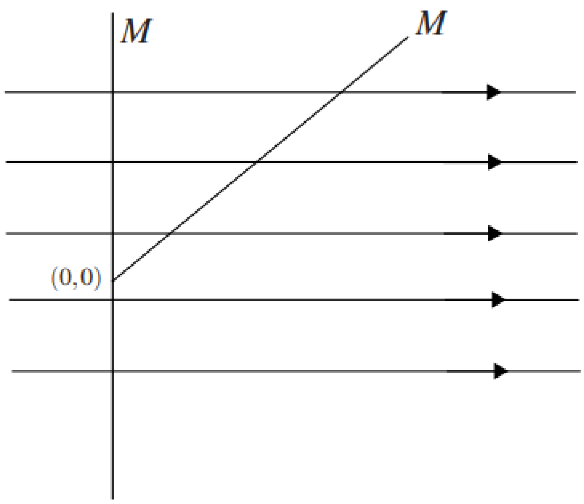

Figura 6 – $(0, 0)$ satisfaz TC mas não STC.

Lema 2.1.2. *Seja $x \in X$ um ponto satisfazendo TC (ou STC) com uma λ-seção S. Então para $0 < \mu < \lambda$ o conjunto S é uma μ-seção com um TC-tubo (STC-tubo).*

Demonstração. Suponhamos que $0 < \mu < \lambda$. Pelo Lema 2.1.1, S é uma μ-seção através de $x \in X$ com o tubo $F(L_\mu, [0, 2\mu])$, isto é, $F(L_\mu, \mu) = S$. Tomando $S \subset M \cap F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ temos, em particular, que $S \subset M$. Portanto, $S \subset M \cap F(L_\mu, [0, 2\mu])$. □

O teorema a seguir estabelece condições suficientes para que a função ϕ seja semicontínua superiormente em pontos de X.

Teorema 2.1.1. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo tal que cada ponto de M satisfaz TC. Então ϕ é semicontínua superiormente em X.*

Demonstração. Seja $x \in X$. O caso onde $\phi(x) = +\infty$ é imediato. Consideremos o caso onde $\phi(x) < +\infty$, ou seja, podemos definir $\phi(x) = u$ e isso implica que $\pi(x, u) = y \in M$ e $\pi(x, (0, u)) \bigcap M = \emptyset$. Pelo lema anterior é possível escolher $\lambda < u$ tal que $U = F(L, [0, 2\lambda])$ é um TC-tubo sobre y dado pela seção $F(L, \lambda)$. Dessa forma, existe uma vizinhança V de x tal que $\pi(V, u) \subset U$. Portanto, para todo $z \in V$, temos que $\pi(z, u) \in F(L, [0, 2\lambda])$ e assim existe $\eta_z \in [0, 2\lambda]$ tal que $\pi(z, u + \eta_z) \in L$. Desde que $\lambda < u$, obtemos $u - \lambda + \eta_z > 0$ o que implica em

$$\pi(\pi(z, u - \lambda + \eta_z), \lambda) = \pi(z, u + \eta_z) \in L.$$

Então $\pi(z, u - \lambda + \eta_z) \in F(L, \lambda) = S \subset M$. Concluímos que $\phi(z) \leq u + \eta_z - \lambda < u + \lambda = \phi(x) + \lambda$ e portanto ϕ é semicontínua superiormente em X. □

O último teorema dessa seção é um resultado que merece destaque, pois será crucial para desenvolvermos demonstrações de resultados apresentados em capítulos posteriores. A conclusão apresentada a seguir diz que para garantirmos a continuidade da função ϕ devemos exigir que x seja um ponto não inicial e que $x \in X \backslash M$.

Teorema 2.1.2. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que um ponto não inicial do sistema (X, π) pertença ao conjunto impulsivo M e que M satisfaça TC. Então, a função ϕ é contínua em x se, e somente se, $x \in X \backslash M$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.1 a função ϕ é semicontínua inferiormente em $x \in X \backslash M$. De acordo com o Teorema 2.1.1 cada ponto em M satisfaz TC, então ϕ é semicontínua superiormente em X. Portanto ϕ é uma função contínua para todo $x \in X \backslash M$ e isso conclui a demonstração. □

Na próxima seção apresentaremos condições suficientes para construir conjuntos impulsivos em $\mathbb{R}^n$ que satisfaçam STC a partir de sistemas dinâmicos gerados por EDO's autônomas.

2.2 Superfícies Impulsivas em Sistemas Dinâmicos

De acordo com o que foi feito em [3] apresentaremos condições suficientes para caracterizar conjuntos impulsivos satisfazendo a condição de tubo e a condição forte de tubo. No final exibiremos alguns exemplos para ilustrar os resultados teóricos. Sugerimos a leitura do Apêndice A para conhecer definições e conceitos sobre superfícies diferenciáveis.

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função tal que possamos definir a seguinte equação diferencial autonôma

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Considere que a Equação diferencial 2.1 define um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^n$, ou seja, suponha que tal equação satisfaça as condições para a existência, unicidade e extensibilidade para toda a reta real de suas soluções para todos os pontos iniciais em $\mathbb{R}^n$, além de assumir a dependência contínua das condições iniciais.

Exibiremos em sequência uma classe de sistemas dinâmicos impulsivos $(\mathbb{R}^n, \pi, M, I)$ associado a $(\mathbb{R}^n, \pi)$ tal que M satisfaz STC, para que isso ocorra o conjunto impulsivo precisa ser um conjunto fechado e em algum sentido, transversal ao fluxo definido pela Equação 2.1, daqui em diante neste capítulo vamos assumir que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma hiperfície em $\mathbb{R}^n$ de classe C^k com $k \geq 1$ satisfazendo a seguinte condição de transversalidade

$$\text{para cada } p \in M \text{ temos } \langle \vec{n_p}, f(p) \rangle \neq 0, \qquad \textbf{(T)}$$

onde $\vec{n_p}$ denota o vetor normal de M em p e $\langle .,. \rangle$ é o produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma hiperfície em $\mathbb{R}^n$. A função diferenciável $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma **submersão em um ponto** $p \in S$ se a diferencial $dg(p) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear sobrejetiva, caso g seja uma submersão em cada ponto de S diremos que g é uma **submersão**. Um ponto $c \in \mathbb{R}$ é um **valor regular** de g se para cada ponto $p \in g^{-1}(c)$, onde g é uma submersão em p. Em seguida enunciaremos dois lemas fundamentais para as conclusões apresentadas nesta seção.

Lema 2.2.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma hiperfície de classe C^k em $\mathbb{R}^n$. Então para cada $p \in S$, existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, $p \in V$ e uma submersão $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que $S \cap V = g^{-1}(0)$. Além disso, $T_pS = ker(dg(p))$.*

Usando o Lema 2.2.1 e a condição de transversalidade obtemos os seguintes resultado.

Lema 2.2.2. *Sejam $p \in M$, $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com $p \in V$ e $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sendo uma submersão de classe C^k tais que $M \cap V = g^{-1}(0)$. Então $f(p) \notin ker(dg(p))$.*

As demonstrações detalhadas dos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 estão feitas no Apêndice A juntamente com mais alguns conceitos referentes a teoria de hiperfícies diferenciáveis. Em sequência verificamos que hiperfícies em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição de transversalidade são conjuntos impulsivos satisfazendo STC.

Lema 2.2.3. *Sejam M satisfazendo ($\boldsymbol{T}$) e $x \in M$, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $F(x,(0,\epsilon_x)) \cap M = \emptyset$ e $\pi(x,(0,\epsilon_x)) \cap M = \emptyset$.*

Demonstração. Num primeiro momento suponha, por contradição, que exista uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ onde $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, tal que $\pi(x,t_n) \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.2.1, existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $x \in V$ e uma submersão $\beta : V \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$ tais que $V \cap M = \beta^{-1}(0)$. Nesse ponto podemos assumir que exista $\lambda > 0$ tal que $\pi(x,[0,\lambda]) \subset V$ e defina também $t_n < \lambda$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Considere $h : [0,\lambda] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \beta(\pi(x,t)) = \beta \circ \pi_x(t)$.

Note que, $h(0) = h(t_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e pelo Teorema de Rolle existe $\tau_n \in (0,t_n)$ tal que

$$0 = h'(\tau_n) = \frac{\partial \beta}{\partial x_1}\frac{d\pi_x(\tau_n)}{d\tau_n} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}\frac{d\pi_x(\tau_n)}{d\tau_n} + \ldots + \frac{\partial \beta}{\partial x_n}\frac{d\pi_x(\tau_n)}{d\tau_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{d\pi_x(\tau_n)}{d\tau_n} = \langle \nabla\beta(\pi(x,\tau_n)), f(\pi(x,\tau_n))\rangle.$$

Donde $\tau_n \xrightarrow{k\to+\infty} 0$, obtemos que $\langle \nabla\beta(x), f(x)\rangle = 0$, como T_pM é o plano ortogonal ao gradiente isso implica que $f(x) \in T_pM = ker(dg(p))$ o que contradiz o Lema 2.2.2.

Analogamente, se existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ onde $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, tal que $F(x,t_n) \cap M \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir que existe $\lambda > 0$ tal que $F(x,[0,\lambda]) \subset V$ e $t_n < \lambda$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n \in F(x,t_n) \cap M$ definimos agora a função $h_n : [0,t_n] \to \mathbb{R}$ por $h_n = \beta(\pi(y_n,t))$. Usando novamente o Teorema de Rolle, obtemos que $\tau_n \in (0,t_n)$ onde $h'_n(\tau_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como visto anteriormente, isso implica que $\langle \nabla\beta(x), f(x)\rangle = 0$ o que novamente é uma contradição. Portanto o resultado está provado. □

Lema 2.2.4. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\beta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma submersão tais que $\beta^{-1}(0) = V \cap M \neq \emptyset$. Se $x \in V \cap M$ e $t > 0$ são tais que $\pi(x,(0,t]) \subset V - M$ e $\pi(x,[-t,0]) \subset V - M$ então $\beta(\pi(x,t))\beta(\pi(x,-t)) < 0$.*

Demonstração. Considere $x \in M \cap V$ e $t > 0$ satisfazendo as condições do lema. Vamos dividir a demonstração nos seguintes passos:

1. Note que $\beta(\pi(x,t))\beta(\pi(x,s)) > 0$ para $0 < s \leq t$, isso é verdade, pois caso contrário, seria possível pela continuidade da função β encontrar s' com $0 < s' < t$ tal que $\beta(\pi(x,t))\beta(\pi(x,s')) < 0$ dessa forma teríamos $\tau \in (s',t)$ e consequentemente $\beta(\pi(x,\tau)) = 0$ o que implica $\pi(x,\tau) \in M$ o que é uma contradição.

2. De forma análoga mostramos que $\beta(\pi(x,-t))\beta(\pi(x,-s)) > 0$, $\forall\ 0 < s \leq t$.

3. Por fim suponha que $\beta(\pi(x,t))\beta(\pi(x,-t)) > 0$, nesse caso ou $\beta(\pi(x,t)) > 0$ ou então $\beta(\pi(x,t)) < 0$ $\forall t \in [-t,t]$ com $t \neq 0$, suponha que $\beta(\pi(x,t)) > 0$ $\forall t \neq 0$, como $\beta(t)$, por hipótese, tem 0 como valor mínimo o que implica que $h'(0) = \langle \nabla\beta(x), f(x)\rangle = 0$ o que, pelo Lema 2.2.2, é uma contradição.

□

Teorema 2.2.1. *O conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo ($\boldsymbol{T}$) é um conjunto impulsivo no qual satisfaz STC.*

Demonstração. Como visto no Lema 2.2.3 o conjunto fechado M é um conjunto impulsivo, agora mostraremos que M satisfaz STC. Pelo Lema 2.2.1 mostramos que existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ com $x \in V$ e uma submersão $\beta : V \to \mathbb{R}$ tais que $V \cap M = \beta^{-1}(0)$. Pelo o que mostramos no Lema 2.2.3, temos também, para todo $x \in V \cap M$ existe ϵ_x tal que $\pi(x,(0,\epsilon_x)) \in V\backslash M$, nesse sentido podemos construir um conjunto compacto $S \subset V \cap M$ no qual para cada $x \in S$ podemos exigir que exista um único ϵ_x tal que $\pi(0,\epsilon_x) \in V\backslash M$, definimos assim, $\lambda = \min\{\epsilon_x \in \mathbb{R}_+ \mid x \in S\}$.

De acordo com a forma que construimos S e λ temos $\pi(S,(0,2\lambda)) \subset V\backslash M$ e $F(S,(0,2\lambda)) \subset V\backslash M$ defina $L = \pi(S,\lambda)$. Queremos mostrar que $F(L,[0,2\lambda])$ é um λ-tubo sobre x.

Afirmamos que $F(L,\lambda) = S$, com efeito utilizando o fato que $\pi(x,t)$ é um fluxo contínuo e usando os axiomas de grupo e da identidade, obtemos

$$F(L,\lambda) = F(\pi(S,\lambda),\lambda) = \{y \in X \|\ \pi(y,\lambda) = \pi(x,\lambda), x \in S\} = S.$$

Agora suponha por contradição que $F(L,[0,2\lambda])$ não contenha uma vizinhança de x, isto é, suponha que existe uma sequência $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$ tal que $x_n \notin F(L,[0,2\lambda])$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 2.2.4 existe $0 < s < \lambda$ tal que $\beta(\pi(x,s)) \cdot \beta(\pi(x,-s)) < 0$, consequentemente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(x_n,[-s,s]) \subset V$ e $\beta(\pi(x_n),s) \cdot \beta(\pi(x_n),-s) < 0$ para todo $n \geq n_0$. Portanto para $n \geq n_0$, exista $\tau_n \in (-s,s)$ tal que $\beta(\pi(x_n,\tau_n)) = 0$ o que implica que $\pi(x_n,\tau_n) \in M$, no qual é uma contradição.

Para finalizar a prova mostraremos que $F(L,\nu) \cap F(L,\mu) = \emptyset$, novamente suponha por contradição, que existe $y \in F(L,\nu) \cap F(L,\mu)$ para algum $0 \leq \nu < \mu \leq 2\lambda$. Tome $a = \pi(y,\nu-\mu) \in S$ e $b = \pi(y,\mu-\lambda) \in S \subset M$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} b &= \pi(y,\mu-\lambda) \\ &= \pi(\pi(y,\nu-\lambda),\mu-\lambda) \\ &= \pi(a,\mu-\nu) \in \pi(S,(0,2\lambda]) \text{ e } b \in M. \end{aligned}$$

Isso é uma contradição desde que $a \in S$ e $\pi(S,(0,2\lambda)) \subset V\backslash M$ o que conclui a prova. □

Observemos o seguinte corolário.

Corolário 2.2.1. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma hiperfície em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição de transversalidade ($\boldsymbol{T}$) e $I : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então $(\mathbb{R}^n, \pi, M, I)$ é um sistema dinâmico impulsivo com M satisfazendo STC.*

Exemplo 2.2.1. *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha y + yz - x^3 \\ \dot{y} = x - \beta xz - \gamma y^3 \\ \dot{z} = \theta xy - z^3 \end{cases}$$

onde α, β, γ e $\theta > 0$, $\alpha\beta > 1$ M é o conjunto impulsivo e $I : M \to \mathbb{R}^3$ é uma função impulsiva. Considere o seguinte conjunto,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \alpha y^2 + \frac{\alpha\beta - 1}{\theta} z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

onde $r > 0$ é constante, então M é um conjunto satisfazendo STC. De fato, defina $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \frac{\alpha\beta - 1}{\theta} z^2 - r^2.$$

Observamos que 0 é valor regular de g então sabemos que $M = g^{-1}(0)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Verificaremos que M satisfaz a condição de transversalidade. Tal condição nos diz que nenhum vetor normal a M pode ser perpendicular ao campo vetorial definido por f, em outras palavras, nenhum vetor perpendicular ao plano tangente pode ser perpendicular a $f(p)$ isso quer dizer que f é transversal a M. No exemplo em questão estamos considerando $f(x, y, z) = (-\alpha y + yz - x^3, x - \beta xz - \gamma y^3, \theta xy - z^3)$. Note que:

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x$
2. $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2\alpha y$
3. $\dfrac{\partial g}{\partial z} = \dfrac{2(\alpha\beta - 1)z}{\theta}$

Observe ainda,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla g(x,y,z), f(x,y,z)\rangle &= \langle (2x, 2\alpha y, \frac{2(\alpha\beta-1)z}{\theta}), (-\alpha y + yz - x^3, x - \beta xz - \gamma y^3, \theta xy - z^3)\rangle \\
&= 2x(-\alpha y + yz - x^3) + 2\alpha y(x - \beta xz - \gamma y^3) + \frac{2(\alpha\beta-1)z}{\theta})(\theta xy - z^3) \\
&= -2x\alpha y + 2xyz - 2x^4 + 2\alpha xy - 2\alpha\beta xyz - 2\alpha y^4\gamma + 2\alpha\beta zxy - 2zxy - \\
\frac{2(\alpha\beta-1)z^4}{\theta} & \\
&= -2x^4 - 2\alpha y^4\gamma - \frac{2(\alpha\beta-1)z^4}{\theta} \\
&< 0
\end{aligned}$$

para todo $(x,y,z) \in M$. *Portanto* M *satisfaz a condição de transversalidade e assim pelo Teorema 2.2.1 o conjunto* M *impulsivo safistaz* (STC).

Exemplo 2.2.2. *Sejam* $(\mathbb{R}^n, \pi)$ *o sistema dinâmico dado por* $\dot{x} = f(x)$ *e* $x_i f_i(x) < 0$ *para* $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, i = 1, 2, ..., n$.

Seja $a_1, ..., a_n, r \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ *e* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}$ *números pares, considere também* $M = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1^{\alpha_1} + ... + a_n x_n^{\alpha_n} = r\}$.

Como feito, no exemplo anterior podemos definir

$$g(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{\alpha_i} - r. \tag{2.2}$$

Note que para todo $v \in M$ *temos* $g(v) = 0$, *sendo assim* $M = g^{-1}(0)$, *ou seja,* 0 *é valor regular. Para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *calculamos*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \alpha_i a_i x_i^{\alpha_i - 1} \tag{2.3}$$

E assim

$$\begin{aligned}
\langle \nabla g(x,y,z), f(x,y,z)\rangle &= \alpha_1 a_1 x_1^{\alpha_1 - 1} f_1(x) + ... + \alpha_n a_n x_n^{\alpha_n - 1} f_n(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i x_i^{\alpha_i - 1} f_i(x) < 0.
\end{aligned}$$

Portanto M *satisfaz a condição de transversalidade e assim pelo Teorema 2.2.1 o conjunto* M *é impulsivo safistazendo* (STC).

A caracterização de conjuntos impulsivos satisfazendo STC é importante no estudo da teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos.

3 Invariância e movimentos recursivos

Tendo em vista que alguns conceitos recursivos, tais como peridiocidade, minimalidade e recorrência por exemplo, são apresentados primeiramente no contexto de sistemas dinâmicos contínuos, como pode ser visto em [2], destacamos a importância de estudar a generalização de tais conceitos na condição impulsiva. Na primeira seção discutiremos sobre a convergência de sequências avaliadas por $\tilde{\pi}$, isso é importante porque nem sempre podemos garantir a continuidade da função $\tilde{\pi}$. Nas seções seguintes discutiremos os conceitos de invariância, conjuntos limites positivos, conjuntos minimais e movimentos quase periódicos. Neste capítulo nos baseamos nos artigos [5], [6], [10] e [11].

3.1 Convergência das sequências avaliadas por $\tilde{\pi}$

Na teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos em que estamos imersos nem sempre temos a continuidade da função $\tilde{\pi}$. Nesta seção apresentaremos resultados sobre a convergência das sequências avaliadas por $\tilde{\pi}$.

Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo, ao longo desse trabalho assumiremos as seguintes condições gerais:

- **(H1)** Os pontos de M não são pontos inciais que satisfazem STC, consequentemente ϕ é contínua em $X\backslash M$;
- **(H2)** $M \cap I(M) = \emptyset$;
- **(H3)** Para cada $x \in X$, o movimento $\tilde{\pi}(x,t)$ é definido para cada $t \geq 0$.

As condições acima são necessárias para obter propriedades qualitativas em sistemas semidinâmicos impulsivos. A condição (H1) controla como as órbitas encontram ou saem do conjunto impulsivo garantindo a continuidade da função ϕ em $X\backslash M$. A condição (H2) nos diz que uma trajetória impulsiva somente pode interceptar M quando essa trajetória começa em M o que ocorre quando $t = 0$. A última condição é importante para estudar o comportamento assintótico das órbitas.

A seguir, mencionamos alguns resultados importantes que serão muito úteis posteriormente. Discutiremos a seguir convergência das sequências em $(X\backslash M) \times \{0\}$ avaliadas por $\tilde{\pi}$.

Lema 3.1.1. *Sejam $z \in X\backslash M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $X\backslash M$ tais que $z_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} z$. Se $\alpha_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} 0$ e $\alpha_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\tilde{\pi}(z_n, \alpha_n) \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} z$.*

Demonstração. Como ϕ é uma função contínua em $X\backslash M$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\phi(z)}{2} < \phi(z_n) < \frac{3\phi(z)}{2}, \text{ para todo, } n \geq n_0.$$

Desta forma, como $\alpha_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\alpha_n \geq 0$, podemos assumir que $0 < \alpha_n < \phi(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pela continuidade de π, temos

$$\tilde{\pi}(z_n, \alpha_n) = \pi(z_n, \alpha_n) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pi(z, 0) = z$$

e a prova está completa. □

O próximo lema investiga a convergência das sequências em $(X\backslash M) \times \mathbb{R}_+$ avaliadas por $\tilde{\pi}$.

Lema 3.1.2. *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X que converge para $x \in X\backslash M$. Então dado $t \geq 0$, existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ e*

$$\tilde{\pi}(x_n, t + \epsilon_n) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x, t) .$$

Demonstração. Temos quatro casos para analisar:

Caso 1. Suponhamos que $\phi(x) = +\infty$. Desde que $x \in X\backslash M$ podemos garantir que ϕ é contínua em x, isto implica que $\phi(x_n) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$ e dessa forma existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(x_n) > t$ para todo $n > s_0$. Então no intervalo $[0, t]$ não tem ação impulsiva para $n > s_0$, isto é, $\tilde{\pi}(x_n, t) = \pi(x_n, t)$ para todo $n > s_0$. Escolhendo $\{\varepsilon_n = 0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(x_n, t) = \pi(x_n, t) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, t) = \tilde{\pi}(x, t) .$$

Caso 2. Suponhamos agora, que $0 \leq t < \phi(x) < +\infty$. Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \phi(x) - t$, temos que, $t < \phi(x) - \varepsilon$ e com isso podemos afirmar que existe $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(x_n) > \phi(x) - \varepsilon > t$ para todo $n > s_1$, isso é verdade pois ϕ é um função contínua em x e $x_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$.

Por hipótese $t < \phi(x)$ e novamente como ϕ é contínua em x e $x_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$ obtemos $\tilde{\pi}(x_n, t) = \pi(x_n, t)$ para todo $n > s_1$. Coonsiderando $\{\varepsilon_n = 0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(x_n, t) = \pi(x_n, t) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, t) = \tilde{\pi}(x, t) .$$

Caso 3. Para este caso vamos considerar a situação onde $t = \phi(x) < +\infty$. Sejam $x_1 = \pi(x, t)$ e $x_1^+ = \tilde{\pi}(x, t) = I(x_1)$. Como ϕ é contínua em x e $x_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$ podemos supor que $\phi(x_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso $(x_n)_1 = \pi(x_n, \phi(x_n)) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, \pi(x)) = x_1$. Neste ponto da demonstração usaremos a continuidade da função impulsiva I e assim obtemos

$$(x_n)_1^+ = I((x_n)_1) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} I(x_1) = x_1^+ .$$

O fato de que $|\phi(x_n) - \phi(x)| \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\varepsilon_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ implica que $\varepsilon_n = \phi(x_n) - t > 0$, portanto

$$\tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(x_n, \phi(x_n)) = I((x_n)_1) = x_{n_1}^+ \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x_1^+ = \tilde{\pi}(x, t).$$

Caso 4. Neste último caso consideraremos $0 < \phi(x) < t$. Para este caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+) + t'$, onde $0 \leq t' < \phi(x_m^+)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a sequência $\{(x_n)_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(x_n)_1 &= \pi(x_n, \phi(x_n)) \\
(x_n)_2 &= \pi((x_n)_1^+, \phi(x_n)_1^+) \\
&\vdots \\
(x_n)_k &= \pi((x_n)_{k-1}^+, \phi((x_n)_{k-1}^+). \text{ com } k > 2.
\end{aligned}$$

Seja $t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((x_n)_i^+)$, onde $(x_n)_0^+ = x_n$. Usando o fato de que $\phi(x_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, temos

$$(x_n)_1 = \pi(x_n, \phi(x_n)) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \pi(x, \phi(x)) = x_1 .$$

Pela continuidade da função I, obtemos

$$(x_n)_1^+ = I((x_n)_1) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} I(x_1) = x_1^+ .$$

Com isso,

$$(x_n)_2 = \pi((x_n)_1^+, \phi((x_n)_1^+)) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) = x_2 ,$$

já que ϕ é contínua em $X \backslash M$ e $(x_n)_1^+ \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x_1^+$ em $X \backslash M$, repetindo esse raciocínio obtemos

$$(x_n)_k \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Usando continuidade de I temos

$$(x_n)_k^+ = I((x_n)_k^+) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} I(x_k) = x_k^+ \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Então, novamente pela continuidade de ϕ, temos

$$t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((x_n)_i^+) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{m-1} \phi((x)_i^+) = t - t' . \tag{3.3}$$

Definimos agora a sequência

$$\varepsilon_n = t_n + t^{'} - t \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\varepsilon_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ uma vez que $t_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} t - t^{'}$. Como ϕ é contínua em $x^+_{m_k}$ e $(x_n)^+_{m_k} \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x^+_{m_k}$., com $k \in \mathbb{N}$, para n suficientemente grande vale, $0 \leq t^{'} < \phi((x_n)^+_m)$, com isso obtemos,

$$\tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(x_n, t_n + t^{'}) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_n, t_n), t^{'}) = \pi((x_n)^+_m, t^{'}).$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$, concluímos por fim o seguinte

$$\pi((x_n)^+_m, t^{'}) \longrightarrow \pi(x^+_m, t^{'}) = \tilde{\pi}(x^+_m, t^{'}) = \tilde{\pi}\Big(\tilde{\pi}\Big(x, \sum_{i=0}^{m-1} \phi\Big(x^+_i\Big)\Big), t^{'}\Big) = \tilde{\pi}(x, t).$$

□

Lema 3.1.3. *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X na qual converge para $x \in X\backslash M$. Dados $t \geq 0$, tal que $t \neq t_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência com $\lambda_n \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} t$ então $\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n) \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x, t)$.*

Demonstração. Se $t = 0$ o resultado segue do Lema 3.1.1. Seja $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ tal que

$$t_k(x) < t < t_{k+1}(x_n).$$

Desde que $\phi((x_n)^+_j) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \phi(x^+_j)$ para cada $j = 0, 1, 2, ...$ e $\lambda_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} t$ podemos assumir que $\lambda_n \in (t_k(x_n), t_{k+1}(x_n))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n) = \pi((x_n)^+_k, \lambda_n - t_k(x_n)) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pi(x^+_k, t - t_k(x)) = \tilde{\pi}(x, t) .$$

E isso conclui a prova do lema. □

Lema 3.1.4. *Sejam $x \in X\backslash M$ e $t \geq 0$. Assuma que a sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ seja tal que $\lambda_n \geq t$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} t$. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\backslash M$ é uma sequência na qual converge para x então existe uma sequência $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\beta_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ e*

$$\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n + \beta_n) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x, t) .$$

Demonstração. Se $t \neq t_k(x)$, para cada $k = 1, 2, ...,$, então em virtude do Lema 3.1.1, obtemos o resultado. Contudo, se $t = t_k(x)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e como $\lambda_n \geq t$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $\lambda_n = t + s_n$ com $s_n \geq 0$ e $s_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$. Agora, desde que tenhamos $\phi((x_n)^+_j) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \phi(x^+_j)$, para todo $j = 0, 1, 2, ...$, temos

$$t_k(x_n) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} t_k(x) .$$

Definimos agora $T_n = t_k(x_n) - t_k(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\lambda_n = t + s_n = t_k(x) + s_n = t_k(x_n) - T_n + s_n.$$

Considerando $\beta_n = |T_n|$ e usando o Lema 3.1.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n + \beta_n) &= \tilde{\pi}(x_n, \lambda_n + \beta_n) \\
&= \tilde{\pi}(x_n, t_k(x_n) - T_n + |T_n| + s_n) \\
&= \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_n, t_k(x_n)), -T_n + |T_n| + s_n) \\
&= \tilde{\pi}((x_n)_k^+, -T_n + |T_n| + s_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \pi(x_k^+, 0) \\
&= \tilde{\pi}(x, t).
\end{aligned}$$

□

Veremos agora que dado um ponto $x \in M$ e uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida em $F(L, (\lambda, 2\lambda])$ sempre podemos extrair uma sequência de tal modo que exista uma sequência de números reais positivos de onde podemos obter a convergência no conjunto M.

Lema 3.1.5. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in M$ satisfazendo a condição STC com λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$. Suponha que exista uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $z_n \in F(L, [0, 2\lambda])$ com $z_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$. Então existem uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\epsilon_k \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, onde $x_k = \pi(z_{n_k}, \epsilon_k) \in M$, $\phi(z_k) = \varepsilon_k$ e $x_k \overset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$.*

Demonstração. Seja $x \in M$ satisfazendo STC com o λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$. Suponha que exista uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F(L, [0, 2\lambda])$ tal que $z_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$. Como $z_n \in F(L, [0, 2\lambda])$ existe $\lambda_n \in (\lambda, 2\lambda]$ tal que

$$\pi(z_n, \lambda_n) \in L \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definindo a sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, podemos escolher uma subsequência $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente tal que $\lambda_{n_k} \overset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda} \in [\lambda, 2\lambda]$. Pela continuidade de π e usando o fato de que L é um conjunto fechado, temos que

$$\pi(z_{n_k}, \lambda_{n_k}) \overset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \pi(x, \overline{\lambda}) \in L. \tag{3.4}$$

Assim $x \in F(L, \lambda) \bigcap F(L, \overline{\lambda})$, o que implica que $\lambda = \overline{\lambda}$. Definimos agora $\varepsilon_k = \lambda_{n_k} - \lambda > 0$ e $x_k = \pi(z_{n_k}, \varepsilon_k)$ obtemos

$$\pi(x_k, \lambda) = \pi(\pi(z_{n_k}, \varepsilon_k), \lambda) = \pi(z_{n_k}, \varepsilon_k + \lambda) = \pi(z_{n_k}, \lambda_{n_k}) \in L.$$

Como $x \in F(L, \lambda) = S \subset M$ e $\varepsilon_k \overset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, utilizando novamente a continuidade da função π observamos o seguinte

$$\pi(z_{n_k}, \lambda_{n_k}) \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} \pi(x, \overline{\lambda}) .$$

Afirmamos que $\phi(z_{n_k}) = \varepsilon_k$. Suponha que existe um número real $t_0 \in (0, \varepsilon_k)$ tal que $w_{n_k} = \pi(z_{n_k}, t_0) \in M$. Assim

$$\pi(w_{n_k}, \lambda_{n_k} - t_0) = \pi(\pi(z_{n_k}, t_0), \lambda_{n_k} - t_0) = \pi(z_{n_k}, \lambda_{n_k}) \in L.$$

Como $0 < \lambda_{n_k} - t_0 < 2\lambda - t_0 < 2\lambda$, então $w_{n_k} \in F(L, [0, 2\lambda]) \bigcap M = S$. Com isso $w_{n_k} \in F(L, \lambda) \bigcap F(L, \lambda_{n_k} - t_0)$ o que implica em $\lambda = \lambda_{n_k} - t_0$. Consequentemente $t_0 = \lambda_{n_k} - \lambda = \varepsilon_k$ o que é uma contradição. Portanto $\phi(z_{n_k}) = \varepsilon_k$. □

Observação 3.1.1. *Seja $a \in M$. Pela hipótese (**H1**) estamos supondo que M satisfaz STC, então existe um STC-tubo $F(L_a, [0, 2\lambda_a])$ sobre a dado pela seção S_a. Além disso, sabemmos que o tubo é uma vizinhança de a, então existe $\eta_a > 0$ tal que*

$$B(a, \eta_a) \subset F(L_a, [0, 2\lambda_a]).$$

De agora em diante denotaremos

$$H_1 = F(L_a, (\lambda_a, 2\lambda_a]) \cap B(a, \eta_a) \text{ e } H_2 = F(L_a, [0, \lambda_a]) \cap B(a, \eta_a).$$

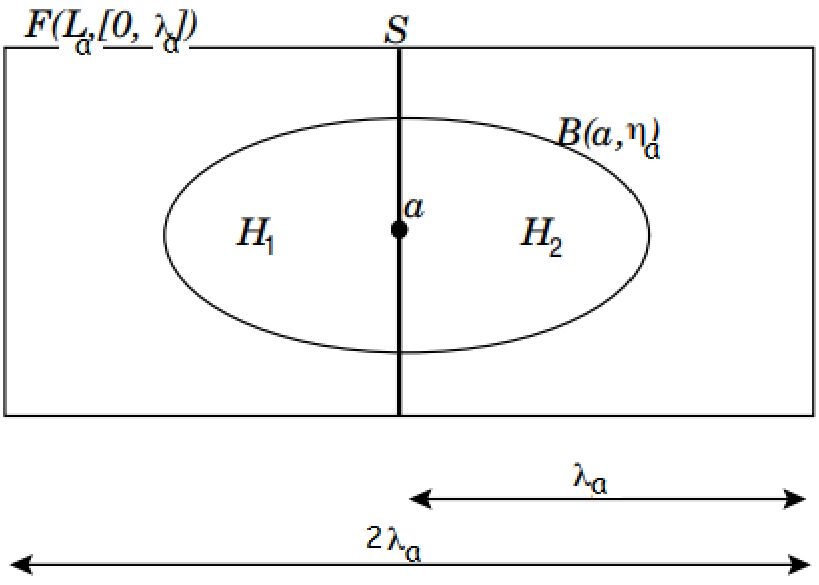

Figura 7 – Conjuntos H_1 e H_2.

Apresentaremos à seguir condições para obtermos a compacidade relativa do conjunto $\tilde{\pi}(A, [0, l])$, para $l > 0$ e $A \subset X$.

Lema 3.1.6. *Seja $A \subset X$ um conjunto não vazio e relativamente compacto. Então o conjunto $\tilde{\pi}(A, [0, l])$ é relativamente compacto em X para cada $l > 0$.*

Demonstração. Considere $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\pi}(A,[0,l])$, disso garantimos a existência de sequências $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ e $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,l]$ tais que $y_n = \tilde{\pi}(a_n, \lambda_n), n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{A}$ e $[0,l]$ são conjuntos compactos em X e em $\mathbb{R}_+$, respectivamente, podemos supor que

$$a_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} a \;\text{ e } s_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} s\ ,$$

com $a \in \overline{A}$ e $s \in [0,l]$. Dessa forma temos dois casos para analisar: $a \notin M$ e $a \in M$.

Caso 1. Supondo $a \notin M$ e se $s \neq t_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ ao usarmos o Lema 3.1.3 concluímos que

$$y_n = \ \tilde{\pi}(a_n, s_n) \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} \tilde{\pi}(a,s) \ \in \overline{\tilde{\pi}(A,[0,l])}.$$

Se por acaso tenhamos $s = t_k(x)$, para algum $k \in \mathbb{N}$, o resultado segue imediatamente do Lema 3.1.7.

Caso 2. $a \in M$. Uma vez que M satisfaça STC existe um STC-tubo $F(L_a,[0,2\lambda_a])$ sobre a dado pela seção S_a. Como o tubo é uma vizinhaça de a, existe $\eta_a > 0$ tal que

$$B(a,\eta_a) \subset F(L_a,[0,2\lambda_a]),$$

e pela observação 3.1.1 podemos considerar os seguintes conjuntos

$$H_1 = F(L_a,(\lambda_a,2\lambda_a]) \cap B(a,\eta_a) \text{ e } H_2 = F(L_a,[0,\lambda_a]) \cap B(a,\eta_a).$$

Neste caso precisamos analisar o que acontece quando $a_n \in H_1$ e quando $a_n \in H_2$ para n suficientemente grande. Sem perca de generalidade temos que considerar os casos quando $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ e quando $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$. Primeiro assumamos que $\{a_n\} \subset H_2$. Se $s < \phi(a)$ então $s_n < \phi(a_n)$ para n grande. Portanto

$$\tilde{\pi}(a_n,s_n) = \ \pi(a_n,s_n) \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} \pi(a,s) = \tilde{\pi}(a,s)\ .$$

Mas, se $s \geq \phi(a)$ podemos definir $s_0 = \dfrac{\phi(a)}{2}$. Então

$$\tilde{\pi}(a_n,s_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(a_n,s_0), s_n - s_0),$$

dessa forma o resultado segue do Caso 1.

Finalmente assumindo que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$. Então $\phi(a_n) \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} 0$. Consideraremos sem perca de generalidade os casos: $\lambda_n < \phi(a_n)$ e $\lambda_n \geq \phi(a_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Quando $\lambda_n < \phi(a_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, então $\lambda_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} 0$ e consequentemente $\tilde{\pi}(a_n,\lambda_n) = \pi(a_n,\lambda_n) \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} a$. Agora se $\lambda_n \geq \phi(a_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$\tilde{\pi}(a_n,\lambda_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(a_n,\phi(a_n))), \lambda_n - \phi(a_n)), n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ usando a continuidade de I em M e de π em $X \times \mathbb{R}_+$ obtemos

$$\tilde{\pi}(a_n, \phi(a_n)) = I(\pi(a_n, \phi(a_n))) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} I(\pi(a, 0)) = I(a)\ .$$

Notemos que $I(a) \in X \backslash M$ pela condição (**H2**). Agora pela igualdade 3.5, pelos Lemas 3.1.4 e 3.1.7 e pelo Caso 1 concluímos assim a prova. □

Lema 3.1.7. *Sejam $x \in X \backslash M$ e $t = t_k(x)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ seja uma sequência que converge para t e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é uma sequência que converge para x.*

a) *Se $\lambda_n < t$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x_k$.*

b) *Se $\lambda_n \geq t$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\{\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge em $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$.*

Demonstração. Para a prova do item (a) considere que $\lambda_n < t$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \phi(x_n)^+_{k+1})$ com $s_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \phi(x^+_{k-1})$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda_n = t_{k-1}(x_n) + s_n, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{3.6}$$

Dessa forma

$$\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n) = \pi((x_n)^+_{k-1}, s_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \pi(x^+_{k-1}, \phi(x^+_{k-1})) = x_k \ \in M.$$

Para finalizar a demonstração do item (b), coonsidere o que foi feito na prova do Lema 3.1.4, tomando $t = t_k(x)$ e usando o fato de que se $\{s_n - T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{s_{n_l} - T_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $s_{n_l} - T_{n_l} \geq 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$ pelo Lema 3.1.1, temos

$$\tilde{\pi}(x_{n_l}, \lambda_{n_l}) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_{n_l}, t_k(x_{n_l})), -T_{n_l} + s_{n_l}) \overset{l \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x^+_k \ \in \overline{\tilde{\pi}^+(x)}. \tag{3.7}$$

Contudo se $\{s_n - T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{s_{m_l} - T_{m_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $s_{m_l} - T_{m_l} < 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$ dessa forma podemos escrever $\lambda_{m_l} = t_{k-1}(x_{m_l}) + \phi((x_{m_l})^+_{k-1}) - T_{m_l} + s_{m_l}$. Percebemos que $\phi((x_{m_l})^+_{k-1}) - T_{m_l} + s_{m_l} > 0$ quando l é suficientemente grande. Então

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(x_{m_l}, \lambda_{m_l}) &= \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_{m_l}, t_{k-1}(x_{m_l})), \phi((x_{m_l})^+_{k-1}) - T_{m_l} + s_{m_l}) \\
&= \tilde{\pi}((x_{m_l})^+_{k-1}, \phi((x_{m_l})^+_{k-1}) - T_{m_l} + s_{m_l}) \overset{l \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \pi(x^+_{k-1}, \phi(x^+_{k-1})) \\
&= x_k \in \overline{\tilde{\pi}^+(x)}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Conjuntos invariantes e conjuntos limites positivos

A $\tilde{\pi}$-invarância, assim como conjuntos limites impulsivos $\tilde{L}^+(x)$, $\tilde{J}^+(x)$ e $\tilde{D}^+(x)$, são de grande relevância para nossos estudos, pois, através deles podemos extrair informações importantes acerca do sistema. Esses conceitos são inicialmente apresentadas no contexto de sistemas dinâmicos sem impulsos, como pode ser visto em [1] e [2], porém podem ser generalizados no contexto impulsivo e é isso que estaremos preocupados em mostrar. A maior parte dos resultados desta seção podem ser encontrados nos artigos e trabalhos [4], [5], [6] e [14].

Nesta seção definiremos os conceitos de conjuntos invariantes e conjuntos limites positivos no contexto de sistemas impulsivos. O conceito de invariância positiva para sistema semidinâmicos com impulsos é definido de forma análoga ao caso contínuo, veja em [1] e [2].

Definição 3.2.1. *Dizemos que $A \subset X$ é* ***positivamente $\tilde{\pi}$-invariante*** *se $\tilde{\pi}(A,t) \subset A$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. O conjunto A é chamado* ***$\tilde{\pi}$-invariante*** *se $\tilde{\pi}(A,t) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

Podemos ver em [2] que no contexto de sistemas dinâmicos sem impulso $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sendo uma coleção de subconjuntos positivamente invariantes de X, então a interseção e a união desse conjuntos também são conjuntos positivamente invariantes. O resultado também vale para sistemas semidinâmicos impulsivos.

Exemplo 3.2.1. *Seja $(\mathbb{R}^2, \pi, M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo dado pelo Exemplo 1.2.1.*

Percebemos que o conjunto $A = [0, +\infty)$ é positivamente π-invariante, pois $\pi(A,t) \subset A$, mas não é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, pois $\tilde{\pi}(A,t) \not\subset A$. Entretanto, considere o conjunto $B = [-1, 1) = \overline{B}\backslash\{1\}$, tal conjunto é claramente $\tilde{\pi}$-invariante pois $\tilde{\pi}(B,t) \subset B$.

No próximo lema demonstraremos o fato de que o fecho de um conjunto positivamente $\tilde{\pi}$-invariante excluído dos pontos de M obtêm-se ainda um conjunto positivamente $\tilde{\pi}$-invariante.

Lema 3.2.1. *Seja $B \subset X$ um conjunto positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, então $\overline{B}\backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante.*

Demonstração. Considere $b \in \overline{B}\backslash M$ e $t \geq 0$. Nesse sentido existe uma subsequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} b$ pelo Lema 3.1.2 existe uma sequência $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_n, t+\varepsilon_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{\pi}(b,t) \subset \overline{B}.$$

Como B é um conjunto positivamente $\tilde{\pi}$-invariante $\{\tilde{\pi}(x_n, t+\varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e vale a condição (**H2**) concluímos que $\tilde{\pi}(b,t) \in \overline{B}\backslash M$. □

Definição 3.2.2. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Dado $x \in X$, dizemos que*

$$\tilde{L}^+(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\tilde{\pi}(x, [t, +\infty))}.$$

é o ***conjunto limite positivo*** *impulsivo de x. O* ***prolongamento do conjunto limite positivo*** *é dado por*

$$\tilde{J}^+(x) = \bigcap_{t>0} \bigcap_{\epsilon>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \tilde{\pi}(B(x, \epsilon), \tau)}.$$

O ***conjunto prolongado de*** $\boldsymbol{x}$ *é*

$$\tilde{D}^+(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{\bigcup_{t \geq 0} \tilde{\pi}(B(x, \epsilon), t)}.$$

Podemos ainda observar que para cada $x \in X$ os conjuntos $\tilde{L}^+(x)$, $\tilde{L}^+(x)$ e $\tilde{D}^+(x)$ são conjuntos fechados para todo $x \in X$.

Lema 3.2.2. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Então,*

a) $\tilde{L}^+(x)$ =$\{y \in X$: *existe uma sequência* $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, *com* $t_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *e* $\tilde{\pi}(x, t_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y$ $\}$;

b) $\tilde{J}^+(x)$ =$\{y \in X$: *existem sequências* $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *e* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, *com* $t_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $x_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y$ $\}$;

c) $\tilde{D}^+(x)$ =$\{y \in X$: *existem sequências* $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *e* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *tais que,* $x_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y$ $\}$.

Demonstração. **a)** Para a prova do item a), considere o seguinte conjunto

Γ=$\{y \in X$: existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\tilde{\pi}(x, t_n) \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} y$ $\}$.

Mostraremos primeiro que $\Gamma \subset L^+(x)$. Dado $y \in \Gamma$, existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x, t_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y$. Observamos que para cada $\tau \in (0, +\infty)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in [\tau, +\infty)$, para todo $n > n_0$. Assim $\tilde{\pi}(x, t_n) \in \tilde{\pi}(x, [\tau, +\infty)$, para todo $n > n_0$. Dessa forma temos que $y \in \overline{\tilde{\pi}(x, [\tau, +\infty)}$ para todo $\tau \in \mathbb{R}_+$, isso implica que $y \in \bigcap_{t>0} \overline{\tilde{\pi}(x, [\tau, +\infty)}$ e assim concluímos que $\Gamma \subset L^+(x)$.

Agora mostraremos a outra inclusão. Dado $z \in \tilde{L}^+(x)$, então $z \in \overline{\tilde{\pi}(x, [t, +\infty)}$ para todo $t > 0$, em particular observamos que $z \in \overline{\tilde{\pi}(x, [t_n, +\infty)}$ para a sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Nesse ponto da demonstração sendo $n \in \mathbb{N}$, podemos garantir que existe $\lambda_n \in [t_n, +\infty)$ tal que $d(\tilde{\pi}(x, \lambda_n), z) < \dfrac{1}{n}$, e por construção, $\lambda_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ em $\mathbb{R}_+$ e além disso,

$$\tilde{\pi}(x, \lambda_n) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} z \,.$$

Assim, $z \in \Gamma$ e, portanto, $\tilde{L}^+(x) \subset \Gamma$.

b) Para a demonstração do item b) considere o seguinte conjunto:

$$\Lambda = \{y \in X : \text{existem sequências } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \text{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ com } t_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} +\infty \,,$$
$$x_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} x \text{ e } \tilde{\pi}(x_n, \lambda_n) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} y \,\}.$$

Vamos provar incialmente que $\Lambda \subset \tilde{J}^+(x)$. Tome $y \in \Lambda$, existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $t_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} +\infty$, $x_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} x$ e $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} y$. Vamos supor, sem perca de generalidade, que $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente. Considere $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \in \bigcup_{\tau \geq t} \tilde{\pi}(B(x, \varepsilon), \tau)$ para todo $n > n_0$, logo, $y \in \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \tilde{\pi}\Big(B(x, \varepsilon), \tau\Big)}$ para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t \geq 0$, em particular, percebemos que $x \in \overline{\{\bigcup_{\tau \geq t} \tilde{\pi}\Big(B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big), \tau\Big)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{\tilde{\pi}(x_m^n, t_m^n)\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $x_m^n \in B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big)$, $m \in \mathbb{N}$ com $t_m^n \xrightarrow{m \longrightarrow +\infty} +\infty$ e $(x_m^n, t_m^n) \xrightarrow{m \longrightarrow +\infty} z$. Podemos denotar para $n \in \mathbb{N}$ os termos $x_{m_n}^n = y_n$, $t_{m_n}^n = \lambda_n$ tais que $y_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} x$, $\lambda_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} +\infty$ e $d(\tilde{\pi}(y_n, h_n), x) < \dfrac{1}{n}$. Isso implica que $\tilde{\pi}(y_n, h_n) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} x$. Portanto $\tilde{J}^+(x) \subset \Lambda$.

c) A prova desse item se baseia nos mesmos argumentos utilizados no item anterior.

□

O próximo resultado nos garante que quando o conjunto limite é não vazio então tem pelo menos um elemento não pertencente a M.

Lema 3.2.3. *Se $\tilde{L}^+(x) \neq \emptyset$ para algum $x \in X$, então $\tilde{L}^+(x) \backslash M \neq \emptyset$.*

Demonstração. O caso onde $\tilde{L}^+(x) \bigcap M = \emptyset$ não precisa de demonstração.

Vamos começar supondo que existe $y \in \tilde{L}^+(x) \bigcap M$. Pela hipótese (**H2**) sabemos que existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dada pela seção S sobre y. Portanto existe $\eta > 0$ tal que $B(y, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$.

Considere os seguintes conjuntos

$$H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B(y, \eta) \text{ e } H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(y, \eta),$$

como na Observação 3.1.1. Sabendo que $y \in \tilde{L}^+(x)$, existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n \to +\infty} y$. Daí existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_n) \in B(y, \eta)$ para todo $n \geq n_0$.

Suponha que $\{t_n\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência $\{t_{n_k}\}_{n\geq 1}$ onde $\tilde{\pi}(x, t_{n_k}) \in H_1$ para todo $k \geq 1$ e dessa forma obtemos

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t_{n_k}), \phi(\tilde{\pi}(x, t_{n_k}))) \xrightarrow{k\to+\infty} I(y) \notin M. \tag{3.8}$$

Agora, vamos analisar o caso em que a sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{t_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_{n_r}) \in H_2$ para todo $r \geq 1$, tomando $\varepsilon_y > 0$ tal que $\pi(y, (0, \varepsilon_y]) \bigcap M = \emptyset$ o que resulta em

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t_{n_r}), \varepsilon_y) \xrightarrow{k\to+\infty} \pi(y, \varepsilon_y) \notin M. \tag{3.9}$$

Pelo o que analisamos em 3.8 e 3.9 conluímos que $\tilde{L}^+(x) \backslash M \neq \emptyset$. $\square$

A seguir apresentaremos um resultado auxiliar sobre o prolongamento do conjunto limite positivo.

Lema 3.2.4. *Sejam $x \notin M$ e $y \in \tilde{L}^+(x)$ então $\tilde{J}^+(x) \subset \tilde{J}^+(y)$.*

Demonstração. Sejam $y \in \tilde{L}^+(x)$ e $z \in \tilde{J}^+(x)$, podemos afirmar que existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ onde

$$t_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty \ , \ \tau_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty \ \text{ e } \ x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x \ ,$$

tais que

$$\tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n\to+\infty} y \ \text{ e } \ \tilde{\pi}(x_n, \tau_n) \xrightarrow{n\to+\infty} z \ .$$

Podemos assumir sem perca de generalidade que $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências crescentes satisfazendo $\tau_n - t_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada t_k com $k = 1, 2, 3, ...$ temos, pelo Lema 3.1.2, que existe uma sequência $\{\varepsilon_n^k\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $\varepsilon_n^k \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(x_n, t_k + \varepsilon_n^k) \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{\pi}(x, t_k) \ .$$

Portanto para cada $k > 0$ existe $n_k > k$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_n^k), \tilde{\pi}(x, t_k)) \leq \tfrac{1}{n}.$$

Note também que

$$\begin{aligned} d(y, \tilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_n^k)) &\leq d(y, \tilde{\pi}(x, t_n)) + d(\tilde{\pi}(x, t_k), \tilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_{n_k}^k)) \\ &\leq d(y, \tilde{\pi}(x, t_k)) + \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Sendo assim $\tilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_n^k) \xrightarrow{k\to+\infty} y$ pois $\tilde{\pi}(x, t_k) \xrightarrow{k\to+\infty} y$. Temos que

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},\tau_{n_k}) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_{n_k},t_k+\varepsilon_{n_k}^k),\tau_{n_k}-t_k-\varepsilon_{n_k}^k) \xrightarrow{k\to+\infty} z\ ,$$

com $\tilde{\pi}(x_{n_k},t_k+\varepsilon_{n_k}^k) \xrightarrow{k\to+\infty} y$ e $(\tau_{n_k}-t_k+\varepsilon_{n_k}^k) \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$. Isto implica que $z \in \tilde{J}^+(y)$. □

Pelo Lema 3.2.1 sabemos que o fecho de um conjunto positivamente $\tilde{\pi}$-invariante é também positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. A próxima proposição mostraremos que $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ é um conjunto positivamente $\tilde{\pi}$-invariante.

Proposição 3.2.1. *Seja (X,π,M,I) um sistema semidinâmico impulsivo. Então o conjunto $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ é posistivamente $\tilde{\pi}$-invariante para todo $x \in M$.*

Demonstração. Suponha que $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ seja um conjunto não vazio. Seja $y \in \tilde{L}^+(x)\backslash M$ e $t \geq 0$ sendo um número arbitrário, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n\geq1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ tal que $\tilde{\pi}(x,t_n) \xrightarrow{n\to+\infty} y$. Desde que $y \notin M$ podemos assumir que para n suficientemente grande $\{\tilde{\pi}(x,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\backslash M$. Utilizando o Lema 3.1.2 existe uma sequência $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ com $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(x,t_n+t+\varepsilon_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t_n),t+\varepsilon_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{\pi}(y,t)\ .$$

Claramente $\{t_n+t+\varepsilon_n\}_{n\geq1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n+t+\varepsilon_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$. Portanto concluímos que $\tilde{\pi}(y,t) \in \tilde{L}^+(x)\backslash M$ pois $I(M)\cap M = \emptyset$. Desde que a escolha do $t \geq 0$ seja arbitrária a demonstração do lema está finalizada. □

3.3 Conjuntos Minimais

Nesta seção apresentaremos a teoria de conjuntos minimais para sistemas semidinâmicos impulsivos, nesta parte do trabalho nos baseamos no que está apresentado em [5], [6] e [10]. Em [10] Kaul define o conceito de minimalidade para um sistema semidinâmico impulsivo (X,π,M,I) da seguinte maneira:

$$A \text{ é minimal em } (X,\pi,M,I) \text{ se } A = \overline{\tilde{\pi}^+(x)} \text{ para todo } x \in A\backslash M.$$

Contudo, como pode ser visto em [1] e [2], no contexto da teoria clássica de sistemas dinâmicos contínuos, um conjunto A é chamado minimal se é não vazio, fechado, invariante e não contém nenhum subconjunto próprio com essas propriedades. Um resultado decorrente é que um conjunto não vazio $A \subset X$ é minimal se, e somente se, $\overline{\pi^+(x)} = A$ para cada $x \in A$.

A seguir apresentaremos a definição de conjunto minimal.

Definição 3.3.1. *Um conjunto $A \subset X$ é **minimal** em (X, π, M, I) se as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) $A \backslash M \neq \emptyset$;

(b) *A é fechado;*

(c) *$A \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante;*

(d) *A não contém nenhum subconjunto próprio satisfazendo (a), (b) e (c).*

O resultado seguinte, apresentado por Kaul em [10], é equivalente a Definição 3.3.1.

Teorema 3.3.1. *Um subconjunto $A \subset X$ é minimal em (X, π, M, I) se, e somente se, $A = \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ para todo $x \in A \backslash M$.*

Demonstração. Primeiro suponha que o conjunto A seja minimal. Como $x \in A \backslash M$ e $A \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, temos que $\tilde{\pi}^+(x) \subset A$ para todo $x \in A$. Pelo fato de que A é um conjunto fechado vale a seguinte inclusão

$$\overline{\tilde{\pi}^+(x)} \subset \overline{A} = A. \tag{3.10}$$

Por 3.10 obtemos que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)} \backslash M \neq \emptyset$. Concluímos que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é fechado, $\overline{\tilde{\pi}^+(x)} \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante e pela minimalidade de A temos que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)} = A$.

Reciprocamente, considere $B \subset A$ tal que B seja um conjunto fechado, com $B \backslash M \neq \emptyset$ e positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. Se $b \in B \backslash M$ então $b \in A \backslash M$ e por hipótese $A = \overline{\tilde{\pi}^+(b)}$. Como $B \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante temos que $B \subset A = \overline{\tilde{\pi}^+(b)} \subset \overline{B} = B$ e consequentemente, $A = B$. Portanto A é minimal em (X, π, M, I). □

Teorema 3.3.2. *Seja $A \subset X$ e suponha que $\tilde{L}^+(x) \backslash M \neq \emptyset$ para todo $x \in A$. Então A é minimal em (X, π, M, I) se, e somente se, $A = \tilde{L}^+(x)$ para todo $x \in A \backslash M$.*

Demonstração. Para mostrarmos a condição necessária considere $x \in A \backslash M$. Pelo Teorema 3.3.1, temos que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)} = A$ e dessa forma $\tilde{L}^+(x) \subset A$. Como A é um conjunto minimal, $\tilde{L}^+(x) \backslash M \neq \emptyset$, $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto fechado e $\tilde{L}^+(x) \backslash M$ positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, pela Proposição 3.2.1 concluímos que $\tilde{L}^+(x) = A$.

Agora mostraremos a condição suficiente. Suponha que A não seja um conjunto minimal, então existe um subconjunto fechado e próprio B de A tal que $B \backslash M \neq \emptyset$ e $B \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. Dado $b \in B \backslash M$ segue que $b \in A \backslash M$. Por hipótese $A = \tilde{L}^+(b)$ e pelo fato de que $B \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, obtemos que $B \subset A = \tilde{L}^+(b) \subset \overline{B} = B$. Portanto $A = B$, o que é uma contradição e por conclusão A é minimal. E isto finaliza a prova do teorema. □

No próximo lema garantimos a continuidade da órbita impulsiva positiva de um ponto $x \in X$ sempre que $\tilde{\pi}^+(x)$ for um conjunto minimal.

Lema 3.3.1. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Se $\tilde{\pi}^+(x)$ é minimal então $\tilde{\pi}^+(x) = \pi^+(x)$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\phi(x) = +\infty$. Suponha que $\phi(x) < +\infty$, desse modo, consideremos $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in M$. Claramente $x_1 \in \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$, pela minimalidade de $\tilde{\pi}^+(x)$, temos que, $\tilde{\pi}^+(x)$ é fechado e assim $x_1 \in \tilde{\pi}^+(x)$, o que é uma contradição pela hipótese **H2**, pois $I(M) \cap M = \emptyset$. Portanto $\phi(x) = +\infty$. □

No final dessa seção apresentaremos alguns resultados e definições sobre movimentos quase periódicos e movimentos recorrentes em sistemas semidinâmicos impulsivos.

Definição 3.3.2. *Um ponto $x \in X$ é dito ser $\tilde{\pi}$-**recorrente** se para cada $\varepsilon > 0$ existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para cada $t, s \geq 0$, o intervalo $[0, T]$ contém um número $\tau > 0$ tal que*

$$d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(x, s + \tau)) < \varepsilon.$$

Uma órbita positiva $\tilde{\pi}^+(x)$ é dita ser $\tilde{\pi}$-recorrente se $x \in X$ é $\tilde{\pi}$-recorrente.

Observação 3.3.1. *Se $x \in X$ é $\tilde{\pi}$-recorrente então dado $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tal que $\tilde{\pi}^+(x) \subset B(\tilde{\pi}(x, [t, t + T]), \varepsilon)$ para todo $t \geq 0$.*

No teorema abaixo apresentaremos condições suficientes para que um ponto seja $\tilde{\pi}$-recorrente.

Teorema 3.3.3. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ um conjunto compacto e minimal. Se $x \in A \backslash M$, então x é $\tilde{\pi}$-recorrente.*

Demonstração. Suponhamos que x não seja $\tilde{\pi}$-recorrente, nesse sentido existem, $\varepsilon > 0$ e sequências de números reais positivos $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $T_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e satisfazendo a seguinte desigualdade

$$d(\tilde{\pi}(x, t_n), \tilde{\pi}(x, s_n + \tau)) \geq \varepsilon \ \text{ para todo } \tau \in [0, T_n]. \tag{3.11}$$

Desde que $x \in A \backslash M$ e $A \backslash M$ sendo positivamente $\tilde{\pi}$-invariante temos que

$$\{\tilde{\pi}(x, t_n)\}_{n \geq 1} \subset A \backslash M \subset A \text{ e } \{\tilde{\pi}\Big(x, s_n + \frac{T_n}{2}\Big)\} \subset A \backslash M \subset A.$$

Pela compacidade do conjunto A podemos assumir sem perca de generalidade que

$$\tilde{\pi}(x, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \in A \ \text{ e } \ \tilde{\pi}\Big(x, s_n + \frac{T_n}{2}\Big) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b \in A\,.$$

Neste ponto da prova temos alguns casos para analisar.

Caso 1. Suponha que $b \notin M$. Seja $t \geq 0$ fixo e escolhido arbitrariamente. Suponha que $t \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+)$ com $k \in \mathbb{Z}_+$. Neste caso, pela continuidade da π e I, existe $\delta > 0$ tal que se $d(y, b) < \delta$ então

$$d(\tilde{\pi}(y, t), \tilde{\pi}(b, t)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.12}$$

Por outro lado podemos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$, onde sempre que $\frac{T_{n_0}}{2} > t$ tenhamos as seguintes desigualdades

$$d(\tilde{\pi}(x, t_n), a) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } d\Big(\tilde{\pi}\Big(x, s_n + \frac{T_n}{2}\Big)\Big) < \delta \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{3.13}$$

Usando (3.11), (3.12) e (3.13) obtemos

- $d(\tilde{\pi}(b, t), a) \geq d(\tilde{\pi}(b, t), \tilde{\pi}(x, t_{n_0})) - d(\tilde{\pi}(x, t_{n_0}), a)$;
- $d(\tilde{\pi}(b, t_{n_0}), \tilde{\pi}(x, t_{n_0})) \geq d\Big(\tilde{\pi}(x, t_{n_0}), \tilde{\pi}\Big(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t\Big)\Big) - d\Big(\tilde{\pi}(b, t), \tilde{\pi}\Big(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t\Big)\Big)$;
- $d(\tilde{\pi}(b, t), a) \geq d\Big(\tilde{\pi}(x, t_{n_0}), \tilde{\pi}\Big(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t\Big)\Big) - d\Big(\tilde{\pi}(b, t), \tilde{\pi}\Big(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t\Big)\Big) - d(\tilde{\pi}(x, t_{n_0}), a) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$.

Como a escolha do t foi arbitrária obtemos $d(\tilde{\pi}(b, t), a) > \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $t \geq 0$ tal que $t \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+)$. Agora suponha que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+)$. Podemos tomar uma sequência de números reais $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ onde

$$\lambda_n \xrightarrow{n \to +\infty} t = \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+) \text{ com } \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+) < \lambda_n < \sum_{j=0}^{k+1} \phi(b_j^+).$$

Usando o fato que $d(\tilde{\pi}(b, t), a) > \frac{\varepsilon}{3}$ temos $d(\tilde{\pi}(b, \lambda_n), a) > \frac{\varepsilon}{3}$ e consequentemente $d(\tilde{\pi}(b, \sum_{j=0}^{k+1} \phi(b_j^+)), a) \geq \frac{\varepsilon}{3}$, graças ao Lema 3.1.7.

Portanto, podemos concluir que $d(\tilde{\pi}(b, t), a) \geq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $t \geq 0$, o que implica que $a \notin \overline{\tilde{\pi}^+(b)}$ e isto contradiz o fato de A ser um conjunto minimal.

Caso 2. No segundo caso suponhamos que $b \in M$. Desde que M satisfaça a condição STC, existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ sobre b dado pela seção S. Como o tubo é uma vizinhança de b, existe $\eta > 0$ tal que $B(b, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Considere $H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B(b, \eta)$ e $H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(b, \eta)$ como na Observação 3.1.1.

Definindo $w_n = \tilde{\pi}(x, s_n + \dfrac{T_n}{2})$ e lembrando que $w_n \xrightarrow{n \to +\infty} b$. Precisamos analisar duas situações: a primeira se refere ao caso onde $\{w_n\}_{n \geq 1}$ admite subsequência em H_1 e a segunda o caso onde $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência em H_2.

Primeiro suponhamos que $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admita uma subsequência $\{w_{n_r}\}_{r \in \mathbb{N}1}$ em H_1. Neste caso percebemos que, $\phi(w_r) \xrightarrow{r \to +\infty} 0$ e isso implica em

$$\tilde{\pi}\Big(x, s_{n_r} + \frac{T_{n_r}}{2} + \phi(w_r)\Big) \xrightarrow{r \to +\infty} I(b)\ .$$

Desde que $A \backslash M$ seja um conjunto positivamente $\tilde{\pi}$-invariante e $x \in A \backslash M$, temos que $I(b) \in \overline{A} = A$. Considerando que $I(M) \cap M = \emptyset$ temos que $I(b) \notin M$. Utilizando os mesmos argumentos do Caso 1, concluímos que $d(\tilde{\pi}(I(b), t), a) \geq \dfrac{\varepsilon}{3}$ para todo $t \geq 0$, o que implica $a \notin \overline{\tilde{\pi}^+(I(b))}$, o que é uma contradição pois A é minimal e por conseguinte $A = \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ para todo $x \in A \backslash M$ e assim $A = \overline{\tilde{\pi}^+(I(b))}$.

Suponha agora que $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em H_2. Considere $0 < \lambda < \phi(b)$, desde que $w_{n_s} \xrightarrow{s \to +\infty} b$, temos

$$\tilde{\pi}(x, s_n + \frac{T_{n_s}}{2} + \lambda) \xrightarrow{s \to +\infty} \tilde{\pi}(b, \lambda)\ .$$

Tomando $x \in A \backslash M$ e sendo $A \backslash M$ positivamente $\tilde{\pi}$-invariante, podemos tomar $b_1 = \tilde{\pi}(b, \lambda) \in \overline{A} = A$. Notemos que $b_1 \notin M$ e ainda como $I(M) \cap M = \emptyset$ usando os argumentos do Caso 1 em $\tilde{\pi}(b_1, t)$ obtemos uma contradição. Finalizamos a demonstração do teorema. □

No próximo teorema apresentamos condições para que o fecho da órbita positiva de um ponto fora do conjunto M seja um conjunto minimal.

Teorema 3.3.4. *Considerando X um espaço métrico completo. Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Se $\tilde{\pi}^+(x)$ é $\tilde{\pi}$-recorrente então $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é compacto. Além disso, se $x \notin M$ então $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é minimal.*

Demonstração. Num primeiro momento mostraremos que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é um conjunto compacto. Seja $\varepsilon > 0$ dado, desde que $\tilde{\pi}^+(x)$ seja $\tilde{\pi}$recorrente existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(x, [0, T])) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.14}$$

Tomando $y \in \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$, sabemos que existe uma sequência $\{y_n\} \subset \tilde{\pi}^+(x)$ tal que

$$y_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} y\ . \tag{3.15}$$

Observamos que $y_n = \tilde{\pi}(x, t_n)$ com $t_n \in \mathbb{R}_+$. Usando a desigualdade (3.14) obtemos

$$d(y_n, \tilde{\pi}(x, [0, T])) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.16}$$

Quando $n \longrightarrow +\infty$ percebemos que

$$d(y, \tilde{\pi}[0,T]) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.17}$$

Por outro lado, como $\overline{\tilde{\pi}(x,[0,T])}$ é compacto e totalmente limitado existem pontos $x_1, x_2, ..., x_n \in \overline{\tilde{\pi}(x,[0,T])}$, tais que

$$\overline{\tilde{\pi}(x,[0,T])} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\Big(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{3.18}$$

Pela compacidade de $\overline{\tilde{\pi}(x,[0,T])}$ existe $z \in \overline{\tilde{\pi}(x,[0,T])}$ onde obtemos

$$d(y,z) = d(y, \overline{\tilde{\pi}^+(x,[0,T])}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.19}$$

Utilizando a inclusão (3.18) podemos tomar um $x_i \in \overline{\tilde{\pi}(x,[0,T])}$ para algum $i \in \{1,...,n\}$ tal que

$$d(z, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.20}$$

Neste ponto da demonstração usaremos o que foi aprensentado em (3.17), (3.19) e (3.20) e dessa forma obtemos

$$d(y,x_i) \leq d(y,z) + d(z,x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Então $\overline{\tilde{\pi}^+(x)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ o que implica que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é um conjunto totalmente limitado. Desde que X seja um conjunto completo segue que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é também um conjunto compacto.

Mostraremos agora a segunda parte do teorema. Considere que $x \notin M$, queremos mostrar que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é um conjunto minimal. Suponha por contradição que existe um subconjunto próprio $A \subset \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ tal que $A \backslash M \neq \emptyset$, A é fechado e $A \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. É claro que $x \in A$, pois $A \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante e A é fechado. Portanto $d(x, A) = d > 0$.

Escolhemos um ε tal que $0 < \varepsilon < \dfrac{d}{2}$, desde que x seja $\tilde{\pi}$-recorrente existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para cada $t, s \in \mathbb{R}_+$ existe $\tau \in [0,T]$ com $d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(x, s+\tau)) < \varepsilon$. Considerando $q \in A \backslash M$, sendo $A \backslash M$ fechado e positivamente $\tilde{\pi}$-invariante obtemos $\overline{\tilde{\pi}^+(q)} \subset A$. Então segue a seguinte desigualdade

$$d(x, \tilde{\pi}(q,t)) \geq d(x, A) = d > 2\varepsilon \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.21}$$

Por outro lado obtemos que $q \in \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ e $q \notin M$ e desde que $q \in \tilde{\pi}^+(x)$ ou $q \in \tilde{L}^+(x)$.

Suponhamos que $q \in \tilde{\pi}^+(x)$ sendo assim $q = \tilde{\pi}^+(x,s)$ para algum $s > 0$ pelo o que observamos em (3.21) temos que $d(x, \tilde{\pi}(x, s+t)) > 2\varepsilon$ para todo $t \geq 0$, e isto é uma contradição pois x é $\tilde{\pi}$-recorrente.

Suponhamos agora que $q \in \tilde{L}^+(x)$. Então existe uma sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x,\lambda_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q$. Pela $\tilde{\pi}$-recorrência de x existe $r_n \in [0,T]$ tal que

$$d(x, \tilde{\pi}(x, \lambda_n + r_n)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.22}$$

Como $[0,T]$ é um intervalo fechado e assim um conjunto compacto, podemos assumir que $r_n \xrightarrow{n\to+\infty} r \in [0,T]$. Desde que seja verdade que $r_n \xrightarrow{n\to+\infty} r$, $\tilde{\pi}(x,\lambda_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q$ e $q \notin M$ segue que $\tilde{\pi}(x,\lambda_n + r_n) \xrightarrow{s\to+\infty} \tilde{\pi}(q,r)$, se $r \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(q_j^+)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se por acaso $r = \sum_{j=0}^{k} \phi(q_j^+)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$\tilde{\pi}(x,\lambda_n + r_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q_{k+1}^+ \ \text{ ou } \ \tilde{\pi}(x,\lambda_n + r_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q_{k+1} \, .$$

Quando o $n \to +\infty$ segue por (3.22) e pelos resultados de convergência as seguintes desigualdades

$$d(x, \tilde{\pi}(q,t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.23}$$

ou

$$d(x, q_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.24}$$

Se (3.23) ocorre, segue por (3.21) que $2\varepsilon < d(x,\tilde{\pi}(q,r)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ no qual é uma contradição.

Se (3.24) ocorre consideraremos uma sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $0 < \lambda_n < \phi(q_k^+)$ e $\lambda_n \xrightarrow{n\to+\infty} \phi(q_k^+)$, então por 3.21 temos

$$d(x, \tilde{\pi}(q, \sum_{j=-1}^{k-1} \phi(q_j^+) + \lambda_n)) = d(x, \pi(q_k^+, \lambda_n)) > 2\varepsilon,$$

onde $\phi(q_{-1}^+) = 0$, então $d(x, q_{k+1}) = \lim_{n\to+\infty} d(x, \pi(q_k^+, \lambda_n)) \geq 2\varepsilon$ o que novamente contradiz (3.24). Portanto, $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é um conjunto minimal. □

Apresentamos a seguir o conceito de conjunto relativamente denso.

Definição 3.3.3. *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}_+$ é chamado* ***relativamente denso*** *se existe um número $L > 0$ tal que*

$$D \cap (\alpha, \alpha + L) \neq \emptyset \ \textit{para todo} \ \alpha \geq 0.$$

O próximo resultado apresenta uma relação entre os conceitos de recorrência e conjuntos relativamentes densos.

Teorema 3.3.5. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ um conjunto compacto para algum $x \in X \backslash M$. A órbita positiva $\tilde{\pi}^+(x)$ é $\tilde{\pi}$-recorrente se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto $K_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}_+ : d(x, \tilde{\pi}(x,t)) < \varepsilon\}$ é relativamente denso.*

Demonstração. Mostraremos primeiro a condição necessária. Supondo que $\tilde{\pi}^+(x)$ seja $\tilde{\pi}$-recorrente, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(x, [\alpha, \alpha + T]) < \varepsilon,$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $\alpha \geq 0$, em particular, temos o seguinte

$$d(x, \tilde{\pi}(x, [\alpha, \alpha + T])) < \varepsilon \text{ para todo } \alpha \geq 0.$$

Então

$$K_\varepsilon \bigcap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset \text{ para todo } \alpha > 0.$$

Portanto, K_ε é relativamente denso e $L = T$ neste caso.

Reciprocamente, para demonstrar a condição suficiente, suponha que K_ε seja um conjunto relativamente denso para todo $\varepsilon > 0$. Desde que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ seja um conjunto compacto, pelo Teorema 3.3.4 é suficiente mostrar que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é também um conjunto minimal.

Suponha que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ não seja um conjunto minimal, dessa forma, existe um subconjunto próprio $A \subset \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ tal que $A \backslash M \neq \emptyset$, A é fechado e $A \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante.

Notemos que $x \notin A$ pois $A \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante e A é fechado. Dessa forma temos $d(x, A) = d > 0$, escolhendo ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{d}{2}$ então existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que

$$K_\varepsilon \cap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset \text{ para todo } \alpha \geq 0 \tag{3.25}$$

Tomando $q \in A \backslash M$ e usando o fato de que $A \backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}-$invariante, temos assim que $\tilde{\pi}^+(q) \subset A$. Então $d = d(x, A) \leq d(x, \tilde{\pi}(q,t))$ para todo $t \geq 0$. Portanto

$$d(x, \tilde{\pi}(q,t)) > 2\varepsilon \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.26}$$

Desde que $q \in \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ e $q \notin M$ segue que $q \in \tilde{\pi}^+(x)$ ou $q \in \tilde{L}^+(x)$.

Primeiro vamos supor que $q \in \tilde{\pi}^+(x)$, então podemos denotar $q = \tilde{\pi}(x,s)$ para algum $s > 0$. De acordo com (3.26) temos que $d(x, \tilde{\pi}(x, s+t)) > 2\varepsilon$ para todo $t > 0$, dessa forma obtemos que $K_\varepsilon \bigcap [s, s+T] = \emptyset$, contradizendo (3.25).

Agora vamos supor que $q \in \tilde{L}^+(x)$. Sendo isso verdade existe uma sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x,\lambda_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q$. Por hipótese, para cada λ_n existe $\eta_n \in [0,T]$ tal que

$$d(x, \tilde{\pi}(x, \lambda_n + \eta_n)) < \varepsilon. \tag{3.27}$$

Podemos assumir sem perca de generalidade que $\eta_n \xrightarrow{n\to+\infty} \eta$. Usando o fato de que $\tilde{\pi}(x,\lambda_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q$ e $q \notin M$ segue da prova do Lema 3.1.3 que $\tilde{\pi}(x,\lambda_n+\eta_n) \xrightarrow{\to+\infty} \tilde{\pi}(q,\eta)$ se $\eta \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(q_j^+)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado se $\eta = \sum_{j=0}^{k} \phi(q_j^+)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ então

$$\tilde{\pi}(x,\lambda_n+\eta_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q_{k+1}^+ = \tilde{\pi}(q,\eta) \ \text{ ou } \ \tilde{\pi}(x,\lambda_n+\eta_n) \xrightarrow{n\to+\infty} q_{k+1} \ .$$

Quando fazemos $n \longrightarrow +\infty$ em (3.27) obtemos seguinte

$$d(x, \tilde{\pi}(q, \eta)) \leq \varepsilon \tag{3.28}$$

ou

$$d(x, q_{k+1}) \leq \varepsilon. \tag{3.29}$$

No caso (3.28) segue pela desigualdade (3.26) que $2\varepsilon < d(x, \tilde{\pi}(q,\eta)) \leq \varepsilon$ o que é uma contradição, contudo, se por acaso (3.29) ocorrer podemos tomar uma sequência $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ onde a mesma satisfaz $0 < \mu_n < \phi(q_k^+)$ e $\mu_n \xrightarrow{n\to+\infty} \phi(q_k^+)$, usando (3.26)

$$d(x, \tilde{\pi}(q, \sum_{j=-1}^{k-1} + \mu_n)) = d(x, \pi(q_k^+, \mu_n)) \geq 2\varepsilon,$$

onde $\phi(q_{-1}^+) = 0$, e dessa forma $d(x, q_{k+1}) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} d(x, \pi(q_k^+, \mu_n)) \geq 2\varepsilon$, o que contradiz a desigualdade (3.29).

Portanto $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é minimal e, pelo Teorema 3.3.3, segue que $\tilde{\pi}^+(x)$ é $\tilde{\pi}$-recorrente. □

3.4 Movimentos quase periódicos

Um ponto $x \in X$ é dito ser **estacionário** com respeito a $\tilde{\pi}$, se $\tilde{\pi}(x,t) = x$ para todo $t \geq 0$, em contrapartida chamaremos um ponto x de ponto **periódico** com respeito a $\tilde{\pi}$ se $\tilde{\pi}(x,t) = x$ para algum $t > 0$ e não é estacionário, por fim diremos que um ponto x é **eventualmemte periódico** com respeito a $\tilde{\pi}$ se é periódico para algum $t \geq 0$. Um ponto $x \in X\backslash M$ é **positivamente Poisson $\tilde{\pi}$-estável** se $x \in \tilde{L}^+(x)$.

Definição 3.4.1. *Um ponto $x \in X$ é dito ser **quase $\tilde{\pi}$-periódico** se para cada $\epsilon > 0$, existe um $T = T_{(\epsilon)} > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha+T]$ contém um número $\tau = \tau_{(\alpha)} > 0$ tal que $d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(x,t+\tau)) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.*

Lema 3.4.1. *Se $x \in X$ é quase $\tilde{\pi}$-periódico, então cada ponto $y \in \tilde{\pi}^+(x)$ é também quase $\tilde{\pi}$-periódico.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ quase $\tilde{\pi}$-periódico e $\varepsilon > 0$. Então existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para todo $\alpha \geq 0$, temos que o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número $\tau = \tau_{(\alpha)} > 0$ onde

$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(x, t+\tau)) < \varepsilon, \text{ para todo } \ t \geq 0. \tag{3.30}$$

Tomando $y \in \tilde{\pi}^+(x)$ temos que $y = \tilde{\pi}(x,s)$ para algum $s \geq 0$. Para cada $\alpha > 0$ consideremos o número $\tau > 0$ definido acima e pelo o que vimos em (3.30) obtemos o seguinte

$$d(\tilde{\pi}(y,t), \tilde{\pi}(y,t+\tau)) = d(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,s),t), \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,s),t+\tau)) = d(\tilde{\pi}(x,s+t), \tilde{\pi}(x,(s+t)+\tau)) < \varepsilon,$$
$$\text{para todo } t \geq 0.$$

Portanto para todo $\alpha > 0$ o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número $\tau = \tau_{(\alpha)} > 0$ tal que $d(\tilde{\pi}(y,t), \tilde{\pi}(y, t+\tau)) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ e assim $y \in \tilde{\pi}^+(x)$ é quase $\tilde{\pi}$-periódico. □

Apresentaremos no teorema que segue condições suficientes para que um ponto $\tilde{\pi}$-periódico seja $\tilde{\pi}$-recorrente.

Teorema 3.4.1. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ um conjunto compacto. Suponha que $x \in X \setminus M$, se x é quase $\tilde{\pi}$-periódico então x é $\tilde{\pi}$-recorrente.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$ o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número $\tau = \tau_{(\alpha)} > 0$ onde

$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(x, t+\tau)) < \varepsilon \text{ para todo } t \geq 0.$$

Considere também $K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{R}_+ : d(x, \tilde{\pi}(x,s)) < \varepsilon\}$ e assim obtemos

$$K_\varepsilon \bigcap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset \text{ para todo } \alpha \geq 0.$$

Como a escolha do $\varepsilon > 0$ é arbitrária segue pelo Teorema 3.3.5 que x é $\tilde{\pi}$-recorrente. □

Nos resultados seguintes tratamos sobre a relação entre movimentos periódicos e eventualmente periódicos. Consideremos a sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como sendo o conjunto de todos os pontos impulsivos, ou seja, $x_{k+1} = \pi(x_k^+, \phi(x_k^+))$.

Teorema 3.4.2. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que X seja completo e $\tilde{L}^+(x) \setminus M \neq \emptyset$ para algum $x \in X \setminus M$. Se $\tilde{\pi}^+(x) \cup \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é minimal então x é eventualmente periódico.*

Demonstração. Suponhamos que $x \in X$ não seja eventalmente periódico. Desde que $\tilde{\pi}^+(x) \bigcup \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é minimal e $\tilde{L}^+(x)\backslash M \neq \emptyset$ segue pelo Teorema 3.3.2 que $\tilde{\pi}^+(x) \bigcup \{x_k\}_{n\in\mathbb{N}} = \tilde{L}^+(x)$. Consequentemente, $x \in \tilde{L}^+(x)$, o que implica que x é positivamente Poisson estável, temos

$$\overline{\tilde{L}^+(x) - \tilde{\pi}^+(x)} = \tilde{L}^+(x).$$

Portanto $\overline{\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}} = \tilde{L}^+(x)$ o que é uma contradição pois $\tilde{L}^+(x)\backslash M \neq \emptyset$. Concluímos assim que x é eventualmente periódico. $\square$

Teorema 3.4.3. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X\backslash M$ tal que $x \in \tilde{L}^+(x)$. Se x é eventualmente periódico então x é periódico.*

Demonstração. Desde que x seja eventualmente periódico existe $t \geq 0$ tal que $\tilde{\pi}(x, t)$ seja periódico, consequentemente existe $T > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x, t + T) = \tilde{\pi}(x, t)$. Consideremos os seguintes casos:

Por hipótese $x \in \tilde{L}^+(x)$, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ onde

$$\tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n\to+\infty} x\ . \tag{3.31}$$

Caso 1. Primeiro suponhamos que $T \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(x_j^+)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando o fato que $x \notin M$ e $T \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(x_j^+)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue pelo Lema 3.1.2 obtemos

$$\tilde{\pi}(x, t_n + T) \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{\pi}(x, T)\ . \tag{3.32}$$

Por outro lado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geq n_0$, além disso temos $\tilde{\pi}(x, t_n + T) = \tilde{\pi}(x, t_n)$ para todo $n \geq n_0$.

Quando $n \longrightarrow +\infty$ e considerando a igualdade acima, obtemos que $\tilde{\pi}(x, T) = x$ e portanto x é periódico.

Caso 2. $T = \sum_{j=0}^{k} \phi(x_j^+)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{\phi(x), \phi(x_{k+1}^+)\}$ e $T + \varepsilon < \sum_{j=0}^{k+1} \phi(x_j^+)$.

Como $x \in \tilde{L}^+(x)$, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n\to+\infty} x$. Desde que $x \notin M$ e $0 < \varepsilon < \phi(z)$ segue pelo Lema 3.1.2 que

$$\tilde{\pi}(x, t_n + \varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{\pi}(x, \varepsilon)\ . \tag{3.33}$$

Também, desde que $\sum_{j=0}^{k} \phi(x_j^+) < T + \varepsilon < \sum_{j=0}^{k+1} \phi(x_j^+)$ segue novamente pelo Lema 3.1.2 que

$$\tilde{\pi}(x, t_n + T + \varepsilon) \xrightarrow{n \to +\infty} \tilde{\pi}(x, T + \varepsilon)\ . \tag{3.34}$$

Por outro lado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n_0$, e isto implica que $t_n + \varepsilon > t$ para todo $n \geq n_0$. Desde que $\tilde{\pi}(x, t)$ é periódico com período T e assim obtemos

$$\tilde{\pi}(x, t_n + \varepsilon + T) = \tilde{\pi}(x, t_n + \varepsilon) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Considerando a igualdade acima e as equações (3.33) e (3.34), se $n \longrightarrow +\infty$ então podemos tomar $\tilde{\pi}(x, T + \varepsilon) = \tilde{\pi}(x, \varepsilon)$. E desde que $\tilde{\pi}$ seja uma função contínua a direita e a escolha do $\varepsilon > 0$ seja arbitrária o limite a seguir é verdadeiro

$$\tilde{\pi}(x, T) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \tilde{\pi}(x, T + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \tilde{\pi}(x, \varepsilon) = x.$$

Portanto x é periódico. □

De acordo como que vimos nos Teoremas 3.4.2 e 3.4.3 finalizamos o capítulo apresentando o seguinte corolário.

Corolário 3.4.1. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que X seja completo e seja $x \in X \backslash M$ sendo tal que $\tilde{L}^+(x) \backslash M \neq \emptyset$. Se $\tilde{\pi}^+(x) \cup \{x_k\}_{k \geq 1}$ é minimal então x é periódico.*

4 Estabilidade de Lyapunov e de Zhukovskij

Neste último capítulo apresentaremos as noções de estabilidade de Lyapunov e quase estabilidade de Zhukovskij de uma trajetória em um sistema semidinâmico impulsivo, tais noções são versões de estabilidades correspondentes estudadas na teoria de sistemas dinâmicos. Estudaremos também propriedades de sistemas semidinâmicos impulsivos, onde estabelecemos resultados que relacionam conceitos como estabilidade, movimentos fracamente quase periódicos, recorrência e minimalidade. No decorrer deste capítulo apresentaremos um estudo de movimentos recursivos via teoria de estabilidade onde o foco da primeira seção é estudar a estabilidade de Lyapunov e na sequência finalizaremos com um estudo sobre a quase estabilidade de Zhukovskij. Neste capítulo nos baseamos no que está em [5], [6], [8], [10] e [11].

4.1 Estabilidade de Lyapunov

Apresentaremos nesta seção o conceito de estabilidade de Lyapunov para sistemas semidinâmicos impulsivos queremos, dessa forma, obter condições suficientes para que um ponto $\tilde{\pi}$-recorrente seja também fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico.

Dado $x \in X$, denotaremos $\mathbb{N}(x)$ por

$$\mathbb{N}(x) = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\} \text{ se } x \in M$$
$$\text{ou}$$
$$\mathbb{N}(x) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\} \text{ se } x \notin M.$$

Dessa forma podemos definir o seguinte conjunto que vai nos auxiliar em resultados futuros.

$$L(x, \varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}_+ : |t - t_n(x)| > \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}(x)\},$$

onde $t_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i^+)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $t_0(x) = 0$. A seguir exibiremos o conceito de pontos fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódicos, tal definição pode ser encontrada no trabalho feito por Kaul em [11].

Definição 4.1.1. *Um ponto é chamado de **fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico**, se dado $\varepsilon > 0$ existe um número $T = T_{(\varepsilon)} > 0$, tal que para algum $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número $\tau = \tau_{(\alpha)} > 0$ tal que*

$$d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(x, t + \tau)) < \varepsilon, \text{ para todo } t \in L(x, \varepsilon).$$

Em sequência o próximo teorema fornece condições para que um ponto fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico seja um ponto $\tilde{\pi}$-recorrente.

Teorema 4.1.1. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X \backslash M$. Suponha que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ seja compacto. Se x é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico, então x é $\tilde{\pi}$-recorrente.*

Demonstração. Sendo $\varepsilon > 0$, podemos assumir que $0 \in L(x, \varepsilon)$ pois $x \in X \backslash M$. Por hipótese existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$ o intervalo contém um número $\tau = \tau_{(\alpha)} > 0$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(x, t + \tau)) < \varepsilon \text{ para todo } t \in L(x, \varepsilon). \tag{4.1}$$

Considere $K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{R}_+ : d(x, \tilde{\pi}(x, s)) < \varepsilon\}$. Portanto pela desigualdade (4.1) temos que $K_\varepsilon \cap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset$ pois $0 \in L(x, \varepsilon)$. Segue do Teorema 3.3.5 que x é $\tilde{\pi}$-recorrente. $\square$

Teorema 4.1.2. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X \backslash M$. Se x é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico então $x \in \tilde{L}^+(x)$.*

Demonstração. Suponhamos que $0 < \varepsilon < \phi(x)$. Como x é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico existe $T = T_{(\varepsilon)}$ tal que tomando $\alpha = n$ o intervalo $[n, n + T]$ contém um número $\tau_n > 0$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(x, t + \tau_n)) < \varepsilon \;\text{ para todo } x \in L(x, \varepsilon). \tag{4.2}$$

Caso 1. Caso $0 < \phi(x) < +\infty$. Como $\varepsilon < \phi(x)$, temos $t = 0 \in L(x, \varepsilon)$ e utilizando a desigualdade (4.2) podemos concluir que

$$d(\tilde{\pi}(x, 0), \tilde{\pi}(x, 0 + \tau_n)) < \varepsilon \tag{4.3}$$

$$d(x, \tilde{\pi}(x, \tau_n)) < \varepsilon \tag{4.4}$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ e tomando $\varepsilon = \dfrac{\phi(x)}{n+1} < \phi(x)$, temos $\dfrac{\phi(x)}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ e assim $\tau_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$, portanto $x \in \tilde{L}^+(x)$.

Caso 2. Caso $\phi(x) = +\infty$. Observamos em (4.2) que $L(x, \varepsilon) = \mathbb{R}_+$ e assim (4.3) é verdade para todo $0 < \varepsilon$ e assim temos que $x \in \tilde{L}^+(x)$. $\square$

No caso contínuo, a recíproca do Teorema 4.1.2 em geral não é verdadeira. Essa observação acontece também com o caso impulsivo vejamos no Exemplo 4.1.1. Mas antes considere a seguinte definição.

Definição 4.1.2. *Considere (X, σ) um sistema discreto. Dizemos que $x \in X$ é um ponto* ***recorrente*** *de σ se dado $\varepsilon > 0$ e qualquer $N \in \mathbb{N}$, existe um número natural $n > N$ tal que $\sigma^n \in B(x, \varepsilon)$. Chamamos um ponto $x \in X$ de* ***ponto quase periódico*** *de σ se dado um $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{\sigma^{n+i}(x) : i = 0, 1, ..., N\} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 4.1.1. *Sejam (Y, d_Y) um espaço métrico completo e (Y, σ) um sistema dinâmico discreto com σ uma função contínua. Suponhamos que todo ponto de Y seja recorrente mas não seja quase periódico.*

Seja $X = \mathbb{R} \times Y$ com a seguinte métrica $d((t, x), (s, y)) = max\{|t - s|, d_Y(x, y)\}$ onde $t, s \in \mathbb{R}$ e $x, y \in Y$. Consideremos o sistema semidinâmico $\pi : X \times \mathbb{R}_+ \to X$ dado por

$$\pi((r, y), t) = (r + t, y).$$

Além disso, considere o conjunto impulsivo $M = \{0\} \times Y$ e a função impulsiva $I : M \to X$ dada por $I(0, y) = (-1, \sigma(y))$. Dado $z = (-1, y) \in X$, fixemos as seguintes notações

$$z_{n+1} = (0, \sigma^n(y)) \text{ e } I(z_{n+1}) = z_{n+1}^+ = (-1, \sigma^{n+1}(y)) \text{ onde } z_0^+ = z.$$

Dado $t, s \in \mathbb{R}_+$, existem $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $t = k + t^{'}$ com $0 \leq t^{'} < 1$, $s = m + s^{'}$, e $0 \leq s^{'} < 1$. o que implica em

$$\begin{aligned} d((\tilde{\pi}(z, t)), (\tilde{\pi}(z, s))) &= d(\pi(z_k^+, t^{'}), \pi(z_m^+, s^{'})) \\ &= d(\pi((-1, \sigma^k(y)), t^{'}), \pi((-1, \sigma^m(y)), s^{'})) \\ &= d((t^{'} - 1, \sigma^k(y)), (s^{'} - 1, \sigma^m(y))) \\ &= max\{|t^{'} - s^{'}|, d_Y(\sigma^k(y), \sigma^m(y))\}. \end{aligned}$$

Mostraremos que $z \in \tilde{L}^+(x)$ e que z não é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico.

1ª afirmativa*. $z \in \tilde{L}^+(z)$.*

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Usando o fato de que y é um ponto recorrente de σ, existe uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $n_k \overset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $d_Y(\sigma^{n_k}(y), y) < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Dessa forma obtemos o seguinte

$$d(\tilde{\pi}(z, n_k), z) = max\{0, d_Y(\sigma^{n_k}(y), y)\} < \varepsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $z \in \tilde{L}^+(z)$.

2ª afirmativa*. O ponto z não é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico. Como y não é quase periódico, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um número*

$n_N \in \mathbb{Z}_+$ *satisfazendo a desigualdade*

$$d_Y(\sigma^{n_N+i}(y), y) \geq \varepsilon_0, \tag{4.5}$$

para todo $i \in \{0, 1, 2, ..., N\}$.

Agora, dado $T > 0$*, existe um número natural* $N_T > 0$ *tal que* $N_T \leq T < N_T + 1$*. Seja* $n_T := n_{N_T}$ *dado por 4.5. Dado qualquer* $s \in [n_T, n_T + T]$*, podemos então escrever* $s = n_T + i_0 + s'$ *para algum* $i_0 \in \{0, 1, 2, ..., N_T\}$ *e* $0 \leq s' < 1$*, o que implica em*

$$d(z, \tilde{\pi}(z, s)) = max\{s', d_Y(y, \sigma^{n_T+i_0}(y))\} \geq \varepsilon_0.$$

Portanto, z *não é fracamente quase* $\tilde{\pi}$*-periódico.*

A seguir apresentaremos o conceito de estabilidade de Lyapunov para sistemas semidinâmicos impulsivos.

Definição 4.1.3. *Um ponto é chamado de* ***Lyapunov*** $\tilde{\pi}$***-estável*** *com respeito a um conjunto* $B \subset X$*, se dado* $\varepsilon > 0$ *existe um número* $\delta > 0$ *tal que para algum* $y \in B$ *com* $d(y, x) < \delta$ *temos*

$$d(\tilde{\pi}(y, t), \tilde{\pi}(x, t)) < \epsilon \text{ para todo } t \in L(x, \epsilon).$$

Claramente, a noção definida acima é uma generalização da estabilidade clássica de Lyapunov. Então, para uma órbita ser Lyapunov $\tilde{\pi}$-estável, os tempos envolvidos e os tempos impulsivos devem estar suficientemente distantes.

Teorema 4.1.3. *Sejam* (X, π, M, I) *um sistema semidinâmico impulsivo e* $x \in X \backslash M$*. Suponha que* $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ *seja compacto. Se* x *é* $\tilde{\pi}$*-recorrente e Lyapunov* $\tilde{\pi}$*-estável com respeito a* $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$*, então* x *é fracamente quase* $\tilde{\pi}$*-periódico.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrário, por hipótese x é Lyapunov $\tilde{\pi}$-estável com respeito a $\tilde{\pi}^+(x)$, então existe um $\delta > 0$ tal que, se $y \in \tilde{\pi}^+(x)$ e $d(x, y) < \delta$ temos

$$d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(y, t)) < \varepsilon \text{ para todo } t \in L(x, \varepsilon). \tag{4.6}$$

Pela $\tilde{\pi}$-recorrência de x, podemos usar o Teorema 3.3.5 e concluir que o conjunto

$$K_\delta = \{r > 0 : d(x, \tilde{\pi}(x, r)) < \delta\}$$

é relativamente denso, e por isso existe $T > 0$ tal que para algum $\alpha \geq 0$ o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número $\tau > 0$ satisfazendo $d(x, \tilde{\pi}(x, \tau)) < \delta$. Então pela definição 4.1.3 obtemos

$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(x,t+\tau)) < \varepsilon \text{ para todo } t \in L(x,\varepsilon).$$

Portanto o ponto x é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico. □

Definição 4.1.4. *Uma órbita $\tilde{\pi}^+(x)$, $x \in X$, é dita ser **uniformemente próxima à um conjunto** A se para algum $\varepsilon > 0$ existe um número positivo $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que*

$$A \subset B(\tilde{\pi}(x,[t,t+T]),\varepsilon) \textit{ para todo } t \in \mathbb{R}_+.$$

Como pode ser visto em [4], Teorema 3.3, se $x \in X\backslash M$ é tal que o conjunto $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é compacto e além disso $\tilde{L}^+(x) \cap M = \emptyset$, então $\tilde{L}^+(x)$ é minimal se, e somente, se $\tilde{\pi}(x)$ é uniformemente próximo ao conjunto limite positivo $\tilde{L}^+(x)$. Mostraremos no Teorema 4.1.5 que o resultado ainda continua sendo verdadeiro mesmo quando tiramos as hipóteses de que $x \notin M$ e $\tilde{L}^+(x) \cap M = \emptyset$. Antes, porém, apresentaremos um resultado auxiliar.

Lema 4.1.1. *Seja A um subconjunto fechado de X tal que $A\backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. Sejam $a \in A\backslash M$ e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tais que $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Se $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}_+$ então dado $\varepsilon > 0$ existem uma subsequência $\{\tau_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, um $n_0 > 0$ e $\bar{a} \in A$ tais que $d(\tilde{\pi}(w_{n_l},\tau_{n_l}),\bar{a}) < \varepsilon$ para todo $n_l \geq n_0$.*

Demonstração. Considere $\varepsilon > 0$ sendo arbitrário. Primeiramente notemos que existe uma subsequência convergente $\{\tau_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\tau_{n_l} \overset{l\to+\infty}{\longrightarrow} \tau$. Dessa forma temos três casos para analisar.

Caso 1. Primeiro considere o caso onde $0 \leq \tau < \phi(a)$. Como $a \notin M$ segue que $\phi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(a)$. Daí existe um inteiro $p_0 > 0$ tal que

$$0 \leq \tau_{n_l} < \phi(w_{n_l}) \text{ para todo } n_l \geq p_0.$$

Portanto,

$$\tilde{\pi}(w_{n_l},\tau_{n_l}) = \pi(w_{n_l},\tau_{n_l}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(a,\tau) = \tilde{\pi}(a,\tau) .$$

Defina $\bar{a} = \tilde{\pi}(a,\tau)$. Pela $\tilde{\pi}$-invariância positiva de $A\backslash M$ temos que $\bar{a} \in A$. Então existe $n_0 > 0$ tal que $d(\tilde{\pi}(w_{n_l},\tau_{n_l}),\bar{a}) < \varepsilon$ para todo $n_l \geq n_0$.

Caso 2. O segundo caso a analisar é onde $\tau > \phi(a)$ e $\tau \neq \sum_{j=0}^{r} \phi(a_j^+)$ para todo $r = 1,2,...$, dessa forma podemos obter um único número $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tau = \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+) + s \text{ com } 0 < s < \phi(a_{k+1}^+).$$

Notamos que $\tilde{\pi}(a,\tau) = \pi(a^+_{k+1}, s)$, pela continuidade das funções π e I obtemos $(w_{n_l})^+_j \overset{l\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} a^+_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Desde que a continuidade da função ϕ seja utilizada em $X\backslash M$, existe uma sequência $\{s_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tau_{n_l} = \sum_{j=0}^{k} \phi((w_{n_l})^+_j) + s_{n_l} \text{ com } s_{n_l} \overset{l\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} s\,.$$

Note que $\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau_{n_l}) = \pi((w_{n_l})^+_{k+1}, s_{n_l})$ para todo $l \in \mathbb{N}$, dessa forma

$$\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau_{n_l}) = \pi((w_{n_l})^+_{k+l}, s_{n_l}) \overset{l\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pi(a^+_{k+l}, s) = \tilde{\pi}(a,\tau)\,.$$

Por fim considere $\bar{a} = \tilde{\pi}(a,\tau)$ e segue o resultado.

Caso 3. Considere neste último caso $\tau = \sum_{j=0}^{k} \phi(a^+_j)$ para algum $k = 0, 1, 2....$ Neste passo somos obrigados a analisar dois subcasos, primeiro quando $\{\tau_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{\tau^{'}_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $\tau^{'}_{n_l} < \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \phi(a^+_j)$ para todo $l \in \mathbb{N}$ e consideremos quando $\{\tau_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{\tau^{''}_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $\tau^{''}_{n_l} \geq \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \phi(a^+_j)$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Para o primeiro subcaso é fácil ver que $\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau^{'}_{n_l}) \overset{l\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} a_{k+1} \in A$, isso pois A é um conjunto fechado e $\tilde{\pi}^+(a) \subset A$. Portanto, existe um número inteiro $n^{'}_0 > 0$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau^{'}_{n_l}), a_{k+1}) < \varepsilon \text{ para todo } n_l \geq n_0.$$

Se tomarmos $\bar{a} = a_{k+1}$ concluímos o resultado.

No segundo subcaso, temos $\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau^{''}_{n_l}) \overset{l\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} a_{k+1} = I(a_{k+1}) \in A$, graças a invariância de A. Dessa forma existe um número inteiro $n^{''}_0 > 0$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau^{''}_{n_l}), a^+_{k+1}) < \varepsilon \text{ para todo } n_l \geq n^{''}_0.$$

Tomando $\bar{a} = a^+_{k+1}$ concluímos o resultado. Por conclusão em todos os casos feitos acima encontramos um elemento $\bar{a} \in A$ e um número natural n_0 tal que $d(\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau_{n_l}), \bar{a}) < \varepsilon$ para todo $n_l \geq n_0$. □

Teorema 4.1.4. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$ tal que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é um conjunto compacto. Se $\tilde{\pi}^+(x)$ é uniformemente próximo à $\tilde{L}^+(x)$, então $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto minimal. Além disso, se $y \in \tilde{L}^+(x)$ é Lyapunov $\tilde{\pi}$-estável com respeito a $\tilde{\pi}^+(y)$, então y é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que o conjunto limite é minimal, para isso supomos o contrário, então existe um subconjunto próprio fechado $A \subseteq \tilde{L}^+(x)$ tal que $A\backslash M \neq \emptyset$ e $A\backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. Seja $w \in \tilde{L}^+(x)$ sendo tal que $w \notin A$ e considere $\varepsilon = \dfrac{d(w, A)}{3} > 0$.

Como $\tilde{\pi}^+(x)$ está próximo uniformemente a $\tilde{L}^+(x)$, então existe $T = T_{(\varepsilon)} > 0$ tal que

$$\tilde{L}^+(x) \subset B(\tilde{\pi}(x, [t, t+T]), \varepsilon) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.7}$$

Desde que $a \in A \backslash M \subset \tilde{L}^+(x)$, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tal que

$$\tilde{\pi}(x, t_n) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} a\ . \tag{4.8}$$

Em particular, pelo o que pode ser observado em (4.7) temos que

$$w \in \tilde{L}^+(x) \subset B(\tilde{\pi}(x, [t_n, t_n + T]), \varepsilon) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um número $\tau_n \in [0, T]$ tal que

$$d(w, \tilde{\pi}(x, t_n + \tau_n)) < \varepsilon.$$

Podemos assumir sem perca de generalidade que $\tau_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \tau$ com $\tau \in [0, T]$. Definindo $w_n = \tilde{\pi}(x, t_n), n \in \mathbb{N}$ e pelo Lema 4.1.1 existem $\bar{a} \in A$, uma subsequência $\{\tau_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ e um número inteiro $n_0 > 0$ tais que

$$d(\tilde{\pi}(w_{n_l}, \tau_{n_l}), \bar{a}) < \varepsilon, \text{ para todo } n_l \geq n_0.$$

Dessa forma temos

$$3\varepsilon = d(w, A) \leq d(w, \bar{a}) \leq d(w, \tilde{\pi}(w_{n_0}, \tau_{n_0})) + d(\tilde{\pi}(w_{n_0}, \tau_{n_0}), \bar{a}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

o que é uma contradição, e assim concluímos que $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto minimal. Temos também que $\tilde{L}^+(x)$ é compacto, pois $\tilde{L}^+(x) \subset \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$. Então, pelo Teorema 3.3.3, cada ponto $y \in \tilde{L}^+(x) \backslash M$ é $\tilde{\pi}$-recorrente. Se $y \in \tilde{L}^+(x) \backslash M$ é Lypunov $\tilde{\pi}$-estável com respeito a $\tilde{\pi}^+(x)$ segue, do Teorema 4.1.3, que $y \in \tilde{L}^+(x) \backslash M$ é fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódico. $\square$

Teorema 4.1.5. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$ tal que $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ seja um conjunto compacto. Então $\tilde{L}^+(x)$ é minimal se, e somente se, $\tilde{\pi}^+(x)$ é uniformemente próximo ao conjunto limite $\tilde{L}^+(x)$.*

Demonstração. A condição necessária foi mostrado no Teorema 4.1.4. Mostraremos apenas a condição suficiente. Suponha que $\tilde{\pi}^+(x)$ não seja uniformemente próximo à $\tilde{L}^+(x)$ o que significa que, existem $\varepsilon > 0$ e sequências $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{L}^+(x)$ tais que $T_n \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e

$$d(y_n, \tilde{\pi}(x, [t_n, t_n + T_n])) \geq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Notamos que $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto compacto, pois $\tilde{L}^+(x) \subset \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$, dessa forma podemos assumir que existe $y \in \tilde{L}^+(x)$ tais que

$$y_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y \,. \tag{4.10}$$

Além disso, desde que tenhamos $y_n \in \tilde{L}^+(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então existe uma sequência $\{\tau^n_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tau^n_m \overset{m \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty \;\text{ e }\; \tilde{\pi}(x, \tau^n_m) \overset{m \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y_n \,, \tag{4.11}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma por (4.11) segue que existe $m_n > n$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(x, \tau^n_{m_n}), y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.12}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e usando (4.10) e (4.11) obtemos o seguinte limite

$$\tilde{\pi}(x, \tau^n_{m_n}) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y \,. \tag{4.13}$$

Por outro lado percebemos que $\left\{\tilde{\pi}(x, t_n + \frac{T_n}{2})\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ com $\left(t_n + \frac{T_n}{2}\right) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e como $\overline{\tilde{\pi}^+(x)}$ é um conjunto compacto, podemos assumir que existe $b \in \tilde{L}^+(x)$ tal que

$$\tilde{\pi}\left(x, t_n + \frac{T_n}{2}\right) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} b \,. \tag{4.14}$$

Provaremos que existe um elemento $z \in \tilde{L}^+(x) \backslash M$ tal que $y \notin \overline{\tilde{\pi}^+(z)}$. Isto contradirá a minimalidade de $\tilde{L}^+(x)$ e portanto o teorema será provado. Neste sentido temos dois casos a considerar, quando $b \in M$ e quando $b \notin M$.

Caso 1. Observemos o primeiro caso onde $b \notin M$. Fixando $t \geq 0$ e escolhendo de forma arbitrária tal que $t \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(b^+_j)$ para todo $k = 1, 2, 3, ...$ desde que assumamos o Lema 3.1.2 temos o seguinte limite

$$\tilde{\pi}\left(x, t_n + \frac{T_n}{2} + t\right) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(b, t) \,. \tag{4.15}$$

Como $T_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, existe um número inteiro $n_0 > 0$ tal que $\dfrac{T_n}{2} > t$ para todo $n \geq n_0$. Então $t_n < t_n + \frac{T_n}{2} + t < t_n + T_n$ para todo $n \geq n_0$. Consequentemente usando (4.9) e (4.12) obtemos

$$d(\tilde{\pi}(x, t_n + \tfrac{T_n}{2} + t), \tilde{\pi}(x, \tau^n_{m_n})) \geq d(y_n, \tilde{\pi}(x, t_n + \tfrac{T_n}{2} + t)) - d(y_n, \tilde{\pi}(x, \tau^n_{m_n})) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \geq n_0$.

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ na desigualdade acima, usando o que foi apresentado em (4.13) e (4.15) e finalmente considerando que $d(\tilde{\pi}(b, t), y) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$, desde que t seja arbitrário, concluímos o seguinte

$$d(\tilde{\pi}(b, t), y) \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(b^+_j). \tag{4.16}$$

Neste ponto consideremos $t = \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+)$ para algum $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ dado arbitrariamente, dessa forma podemos tomar uma sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números positivos tal que

$$\lambda_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+) \text{ , com } \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+) < \lambda_n < \sum_{j=0}^{k+1} \phi(b_j^+).$$

Por consequência e usando (4.16) temos a seguinte desigualdade

$$d(\tilde{\pi}(b, \lambda_n), y) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Quando $n \longrightarrow +\infty$ temos que

$$d(\tilde{\pi}(b, \sum_{j=0}^{k} \phi(b_j^+)), y) > \frac{\varepsilon}{2},$$

desde que $\tilde{\pi}$ seja uma função contínua a direita. Concluímos assim que $d(\tilde{\pi}(b, t), y) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \geq 0$ e portanto $y \notin \overline{\tilde{\pi}^+(b)}$ com $b \in \tilde{L}^+(x)\backslash M$.

Caso 2. Neste caso suponhamos que $b \in M$ e desde que M satisfaça a condição STC, existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ sobre b, dado pela seção S. Além disso o tubo é uma vizinhança de b, então existe um $\eta > 0$ tal que

$$B(b, \eta) \subset F(L, (0, 2\lambda)).$$

Denotaremos $w_n = \tilde{\pi}(x, t_n + \frac{T_n}{2})$, $n \in \mathbb{N}$ então por (4.14) obtemos $w_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} b$. Podemos assumir sem perca de generalidade (tomando uma subsequência se necessário) que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ ou $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$ definidos na Observação 3.1.1.

Primeiro analisaremos o caso onde $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$. Notemos que $\phi(w_n) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} 0$, então $\tilde{\pi}(w_n, \phi(w_n)) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} I(b)$, o que implica em

$$\tilde{\pi}(x, t_n + \tfrac{T_n}{2} + \phi(w_n)) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} I(b) \, . \tag{4.17}$$

.

Por conseguinte iremos apresentar que $y \notin \overline{\tilde{\pi}^+(I(b))}$, note ainda que $I(b) \in \tilde{L}^+(x)\backslash M$ pois $(t_n + \frac{T_n}{2} + \phi(w_n)) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} +\infty$ e $I(M) \cap M = \emptyset$. Seja $t \geq 0$ tal que $t \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(I(b)_j^+)$. Pelo Lema 3.1.3 temos

$$\tilde{\pi}(x, t_n + \tfrac{T_n}{2} + \phi(w_n) + t) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} \tilde{\pi}(I(b), t) \, . \tag{4.18}$$

Nessas condições existe $n_0^{'} > 0$ tal que $\dfrac{T_n}{2} > \phi(w_n) + t$ para todo $n \geq n_0^{'}$, então $t_n < t_n + \dfrac{T_n}{2} + \phi(w_n) + t < t_n + T_n$ para todo $n \geq n_0^{'}$. Pelo o que vemos em (4.9) e (4.12) podemos considerar verdadeira a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} d(\tilde{\pi}(x, t_n + \frac{T_n}{2} + \phi(w_n) + t), \tilde{\pi}(x, \tau_{m_n}^n)) &\geq d(y_n, \tilde{\pi}(x, t_n + \frac{T_n}{2} + \phi(w_n) + t)) - d(y_n, \tilde{\pi}(x, \tau_{m_n}^n)) \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0^{'}$. A medida que $n \longrightarrow +\infty$ na desigualdade acima e usando (4.18) e (4.13) temos que $d(\tilde{\pi}(I(b), t), y) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Desde que t seja arbitrário temos

$$d(\tilde{\pi}(I(b), t), y) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } t \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(I(b)_j^+). \tag{4.19}$$

Agora seja $t = \sum_{j=0}^{k} \phi(I(b)_j^+)$ para algum $k = 0, 1, 2, \ldots$. Consideraremos uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais positivos tal que

$$\lambda_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=0}^{k} \phi(I(b)_j^+) \text{ , com } \sum_{j=0}^{k} \phi(I(b)_j^+) < \lambda_n < \sum_{j=0}^{k+1} \phi(I(b)_j^+).$$

Portanto pelo o que foi mostrado em (4.19) temos o seguinte

$$d(\tilde{\pi}(I(b), \lambda_n), y) \geq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

À medida que $n \longrightarrow +\infty$ segue pela continuidade a direita de $\tilde{\pi}$ que

$$d(\tilde{\pi}(I(b), \sum_{j=0}^{k} \phi(I(b)_j^+)), y) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deste modo podemos concluir que

$$d(\tilde{\pi}(I(b), t), y) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Então $y \notin \overline{\tilde{\pi}^+ I(b)}$ com $I(b) \in \tilde{L}^+(x) \backslash M$ o que é uma contradição.

Suponha por fim que $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_2$. Seja $\beta \in (0, \phi(b))$, e como $w_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} b$ temos que

$$\tilde{\pi}(w_n, \beta) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(b, \beta)$$

o que implica em

$$\tilde{\pi}(x, t_n + \tfrac{T_n}{2} + \beta) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(b, \beta)$$

Definindo $b_1 = \tilde{\pi}(b, \beta) \in \tilde{L}^+(x) \backslash M$, desde que $(t_n + \frac{T_n}{2} + \beta) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ e $0 < \beta < \phi(b)$, pelos mesmos argumentos usados acima temos a seguinte desigualdade

$$d(\tilde{\pi}(b_1, t), y) \geq \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Portanto, $y \notin \overline{\tilde{\pi}^+(b_1)}$ o que novamente é uma contradição. Por fim concluímos a prova desse resultado. □

4.2 Quase estabilidade de Zhukovskij

Nesta seção apresentaremos a teoria de quase estabilidade de Zhukovskij em sistemas semidinâmicos impulsivos. Este tipo de estabilidade foi estudada inicialmente e apresentada no trabalho desenvolvido por Ding em [8]. Começaremos esta seção apresentando a definição de reparametrização e posteriormente discutiremos o próprio conceito de quase estabilidade de Zhukovskij. Os resultados desta seção são baseados nos artigos [5] e [6].

A estabilidade de Zhukovskij é um conceito importante na teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos. Para introduzir este conceito, primeiro relembramos a noção de reparametrização do tempo.

Definição 4.2.1. *Uma **reparametrização do tempo** é um homeomorfismo $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(0) = 0$.*

Definição 4.2.2. *Um ponto $x \in X \backslash M$ é dito ser **Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável** se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(x,\varepsilon)} > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então existe uma única reparametrização do tempo τ_y tal que*

$$d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(y, \tau_y(t))) < \varepsilon \textit{ para todo } t \geq 0$$

Além disso, se existir $\lambda > 0$ tal que $d(x, y) < \lambda$ implicar $d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(y, \tau_y(t))) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ então x é chamado assintoticamente Zhukoviskij quase $\tilde{\pi}$-estável.

Um subconjunto $A \subset X \backslash M$ é **Zhukovskij (assintoticamente Zhukovskij)** quase $\tilde{\pi}$-estável se cada ponto $y \in A$ possui tal propriedade.

Exemplo 4.2.1. *Seja $(\mathbb{R}, \pi, M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo dado pelo Exemplo 1.2.1. Seja $x \in [0, 1)$. Note que $\tilde{\pi}^+(x) = [0, 1)$. Percebemos que para cada $y \in [0, 1)$ temos $\phi(y) = 1 - y$, $y_n^+ = x_n^+$ e $\phi(y_n^+) = \phi(x_n^+) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a seguinte reparametrização de tempo*

$$h_y(t) = \begin{cases} \dfrac{1-y}{1-x} t, & se\ , 0 \leq t < 1 - x, \\ t + (x - y), & se\ t \geq 1 - x, \end{cases}$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $y \in \tilde{\pi}^+(x)$ sendo tal que $d(x,y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Suponha que $t < 1 - x = \phi(x)$, então

$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{(}\pi)(y, h_y(t))) = d\left(\pi(x,t), \pi\left(y, \frac{1-y}{1-x}t\right)\right) = \left|x + t - y - \frac{1-y}{1-x}t\right| \leq 2|x-y| < \varepsilon.$$

Para $t \geq 1 - x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + \phi(x) < t < n + 1 + \phi(x)$, por isso, obtemos

$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(y, h_y(t))) = d(\tilde{\pi}(x, \phi(x) + t - \phi(x)), \tilde{\pi}(y, t + x - y + 1 - 1))$$
$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(y, h_y(t))) = d(\tilde{\pi}(x_1^+, t - \phi(x)), \tilde{\pi}(y_1^+, t - \phi(x))) = 0 < \varepsilon.$$

Portanto, $\tilde{\pi}^+(x)$ é Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável com respeito a $\tilde{\pi}^+(x)$.

Definição 4.2.3. *Um ponto $x \in X \backslash M$ é **uniformemente assintoticamente Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável** se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para cada $s \geq 0$ e $y \in B(\tilde{\pi}(x,s), \delta)$ podemos encontrar uma única reparametrização do tempo τ_y tal que $d(\tilde{\pi}(x, s+t), \tilde{\pi}(y, \tau_y(t))) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ e também $d(\tilde{\pi}(x, s+t), \tilde{\pi}(y, \tau_y(t))) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} 0$.*

*Um subconjunto $A \subset X \backslash M$ é **uniformemente assintoticamente Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável** se cada ponto $y \in A$ possui essa propriedade.*

Claramente, a $\tilde{\pi}$-estabilidade de Lyapunov é mais restritiva, no entanto, a quase estabilidade de Zhukovskij implica que órbitas próximas também devem estar próximas no espaço de fase.

Observação 4.2.1. *Se tomarmos $s = \tau_y(t)$ e $h(s) = \tau_y^{-1}(s) = t$, então podemos escrever*

$$d(\tilde{\pi}(x,t), \tilde{\pi}(y, \tau_y(t))) = d(\tilde{\pi}(x, h(s)), \tilde{\pi}(y, s)).$$

De acordo com a observação acima podemos utilizar uma definição equivalente da quase estabilidade de Zhukovskij.

Teorema 4.2.1. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Suponha que o conjunto $\tilde{L}^+(x) \backslash M$ seja Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável. Então $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto minimal.*

Demonstração. Considere $y \in \tilde{L}^+(x) \backslash M$ sendo dado de forma arbitrária. Precisamos mostrar que $\tilde{L}^+(x) = \overline{\tilde{\pi}^+(y)}$, dessa forma suponha que existe $z \in \tilde{L}^+(x)$ tal que $z \notin \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$.

Definimos $\varepsilon = d(z, \overline{\tilde{\pi}^+(x)}) > 0$. Seja $q \in \overline{\tilde{\pi}^+(y)}$, pela $\tilde{\pi}$-invariância positiva do conjunto limite notamos que $\overline{\tilde{\pi}^+(y)} \subset \tilde{L}^+(x)$. Por hipótese existe $\delta = \delta_{(q)} > 0$, tal que se $d(v, q) < \delta$ podemos encontrar uma reparametrização $\tau_{(v)}$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(q,t), \tilde{\pi}(v, \tau_v(t))) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4.20}$$

Como $q \in \tilde{L}^+(x)$, existe $s > 0$ tal que $d(\tilde{\pi}(x,s), q) < \delta$. Desse jeito pela Observação (4.20) econtraremos uma reparametrização $\tau_{(w)}$, $w = \tilde{\pi}(x,s)$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(q,t), \tilde{\pi}(w, \tau_w(t))) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } \ t \geq 0. \tag{4.21}$$

Por outro lado, desde que tenhamos $z \in \tilde{L}^+(x)$ então $z \in \tilde{L}^+(w)$ e assim existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(w,t_n) \xrightarrow{n\to+\infty} z$. Seja $n_0 > 0$ tal que $d(z, \tilde{\pi}(w, t_{n_0})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\tilde{\pi}(q, s_{n_0}) \in \overline{\tilde{\pi}^+(y)} \subset \tilde{L}^+(x) \subset \overline{\tilde{\pi}^+(x)}$.

Consideremos agora $s_n > 0$ sendo tal que $t_n = \tau_w(s_n)$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então

$$d(\tilde{\pi}(q, s_{n_0}), \tilde{\pi}(w, \tau_w(s_{n_0}))) \geq d(\tilde{\pi}(q, s_{n_0}), z)) - d(z, \tilde{\pi}(w, \tau_w(s_{n_0}))) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{3},$$

o que contradiz (4.21) e portanto $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto minimal. □

Corolário 4.2.1. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Suponha que $\tilde{L}^+(x)$ seja um conjunto compacto e $\tilde{L}^+(x) \backslash M \neq \emptyset$.*

(a) *Se $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ é Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável então $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ é $\tilde{\pi}$-recorrente;*

(b) *Se $x \notin M$ e $\tilde{\pi}^+(x)$ é uniformemente assintoticamente Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável então $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ é $\tilde{\pi}$-recorrente.*

Demonstração. **(a)** Pelo Teorema 4.2.1 o conjunto limite $\tilde{L}^+(x)$ é minimal e pelo Teorema 3.3.3, os pontos de $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ são $\tilde{\pi}$-recorrentes.

(b) Neste caso suponha que exista $A \subset \tilde{L}^+(x)\backslash M$ fechado, diferente do conjunto vazio e positivamente $\tilde{\pi}$-invariante. Considere $p \in (\tilde{L}^+(x)\backslash M)\backslash A$, então podemos denotar $\lambda = d(p, A) > 0$. Vamos considerar também um s suficientemente grande e assim podemos encontrar $q \in A$ satisfazendo $d(\tilde{\pi}(x,s), q) < \delta$ desde que $q \in \tilde{L}^+(x)$, onde δ é como na definição de uniformemente assintoticamente Zhukovskij. Também existe uma sequência $t_n \geq s$ com $t_n \longrightarrow +\infty$ onde $\tilde{\pi}(x,t_n) \xrightarrow{n\to+\infty} p$. Desde que A seja positivamente $\tilde{\pi}$-invariante então $\tilde{\pi}^+(q) \subset A$. Contudo, para t_n muito grande temos $d(\tilde{\pi}(x,t_n), p) < \frac{\lambda}{2}$ então

$$d(\tilde{\pi}(x,t_n), \tilde{\pi}^+(q)) \geq d(p, A) - d(\tilde{\pi}(x,t_n), p) \text{ para } t_n \text{ muito grande.}$$

Isto é uma contradição desde que $d(\tilde{\pi}(x,s), q) < \delta$ e pela definição obtemos

$$d(\tilde{\pi}(x, t+s), \tilde{\pi}(q, \tau_q(t))) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \text{ , para todo } t \geq 0,$$

onde $\tau_{(q)}$ é uma reparametrização do tempo. O que é uma contradição. Portanto $\tilde{L}^+(x)$ é minimal pelo Teorema 3.3.3 e concluímos o resultado. □

Teorema 4.2.2. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo com X completo e $x \in X \backslash M$. Assuma $\tilde{L}^+(x) = \tilde{\pi}^+(x) \cup \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}1}$, onde $x_k \in M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então os seguintes itens são verdadeiros*

(a) *Se $\tilde{L}^+(x) \backslash M$ é Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável então x é periódico;*

(b) *Se $x \notin M$ e $\tilde{\pi}^+(x)$ é uniformemente assintoticamente Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável então x é periódico.*

Demonstração. **a)** Primeiro, notamos que $\tilde{L}^+(x) \backslash M \neq \emptyset$. Pelo Teorema 4.2.1 o conjunto $\tilde{L}^+(x)$ é minimal desde que $\tilde{L}^+(x) = \tilde{\pi}^+(x) \bigcup \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Segue do Corolário 3.4.1 que x é periódico.

b) Primeiramente mostraremos que $\tilde{\pi}^+(x)$ é uniformemente assintoticamente Zhukovskij quase estável e assim obtemos que $\tilde{L}^+(x)$ é minimal. Suponha que $\tilde{L}^+(x)$ não seja minimal, ou seja, $\tilde{L}^+(x)$ tem um subconjunto próprio positivamente $\tilde{\pi}$-invariante A com $A \neq \emptyset$. Escolhendo $p \in \tilde{L}^+(x) \backslash A$, então podemos definir $\varepsilon = d(p, A) > 0$.

Agora tomando um s suficientemente grande, podemos encontrar $q \in A$ satisfazendo $d(\tilde{\pi}(x, s), q) < \delta$, onde aqui o δ é o que está na Definição 4.2.3. Sabemos também que existe uma sequência $t_n \geq s$ tal que $t_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} p$, assumindo que A é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante chegamos que $\tilde{\pi}^+(q) \subset A$. Contudo, para t_n grande temos que $d(\tilde{\pi}(x, t_n), p) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e além disso

$$d(\tilde{\pi}(x, t_n), \tilde{\pi}^+(q)) \geq d(p, A) - d(\tilde{\pi}(x, t_n), p) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.22}$$

Desde que $d(\tilde{\pi}(x, s), q) < \delta$ e considerando a Definição 4.2.3 temos que a desigualdade 4.22 é uma contradição, pois, $d(\tilde{\pi}(x, s + t), \tilde{\pi}(q, \tau_q(t))) \xrightarrow{t \longrightarrow +\infty} 0$ com τ_q sendo uma reparametrização do tempo. Portanto $\tilde{L}^+(x)$ é minimal e neste ponto da demonstração basta usarmos a prova do item anterior. $\square$

O próximo lema apresenta uma relação entre os conjuntos $\tilde{L}^+(x)$ e $\tilde{J}^+(x)$.

Lema 4.2.1. *Se $x \in X \backslash M$ é Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável, então $\tilde{L}^+(x) = \tilde{J}^+(x)$.*

Demonstração. Claramente $\tilde{L}^+(x) \subset \tilde{J}^+(x)$. É suficiente mostrar que $\tilde{J}^+(x) \subset \tilde{L}^+(x)$. Considere $y \in \tilde{J}^+(x) \subset X \backslash M$. Então existem uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ e outra sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X tais que $x_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} x$ e $t_n \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} +\infty$ satisfazendo $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} y$.

Agora dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(x,\varepsilon)} > 0$ tal que para cada $p \in B(x, \varepsilon)$, nesse sentido podemos encontrar uma única reparametrização do tempo τ_p satisfazendo

$$d(\tilde{\pi}(x, \tau_{(p)}(t)), \tilde{\pi}(p, t)) < \varepsilon \text{ para } t \geq 0.$$

Selecionamos um $K > 0$ tal que se $n \geq K$, então

$$d(x, x_n) < \delta \text{ e } d(\tilde{\pi}(x_n, t_n), y) < \varepsilon.$$

Além disso segue pela definição 4.2.2 que $d(\tilde{\pi}(x, \tau_{x_n}(t), \tilde{\pi}(x_n, t)) < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ e $t \geq 0$, onde a reparametrização $\tau_{(x_n)}$ é definido de forma semelhante à τ_p. Portanto obtemos

$$d(\tilde{\pi}(x, \tau_{x_n}(t_n)), y) \leq d(\tilde{\pi}(x, \tau_{x_n}(t_n)), \tilde{\pi}(x_n, t_n)) + d(\tilde{\pi}(x_n, t_n), y) < 2\varepsilon, \tag{4.23}$$

onde $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \infty$ com $t_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \infty$. Isto implica que $y \in \tilde{L}^+(x)$. □

4.3 Atrator Uniforme

O resultado principal desta seção apresenta condições suficientes para que o conjunto limite positivo de um ponto seja um atrator.

Definição 4.3.1. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e A sendo um subconjunto de X, o conjunto*

$$\tilde{P}_u^+(A) = \{x \in X : \textit{para cada vizinhaça } U \textit{ de } A \textit{ existem uma vizinhança } V \textit{ de } x \textit{ e } T > 0 \\ \textit{tais que } \tilde{\pi}(V, t) \subset U \textit{ para todo } t \geq T \},$$

é chamado de ***região de atração uniforme do conjunto A com respeito*** *$\tilde{\pi}$. Se $x \in \tilde{P}_u^+(A)$ dizemos que x é* ***uniformemente*** *$\tilde{\pi}$**-atraído** em A. Finalmente, diremos que A é um conjunto $\tilde{\pi}$**-atrator uniforme** se $\tilde{P}_u^+(A)$ é vizinhança de A.*

Proposição 4.3.1. *Sejam (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ compacto. Supondo que X seja um conjunto localmente compacto, então $\tilde{P}_u^+(A) = \{x \in X : \tilde{J}^+(x) \neq \emptyset$ e $\tilde{J}^+(x) \subset A\}$.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que $\tilde{P}_u^+(A) \subset \{x \in X : \tilde{J}^+(x) \neq \emptyset$ e $\tilde{J}^+(x) \subset A\}$. De fato, considere $x \in \tilde{P}_u^+(A)$ e U uma vizinhança de A tal que $\overline{U}$ é um conjunto compacto, dessa forma, existem uma vizinhança V de x e $T > 0$ tais que

$$\tilde{\pi}(V, [T, +\infty)) \subset \overline{U}.$$

Seja $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência tal que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pela inclusão anterior existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tilde{\pi}(x, t_n) \subset \overline{U} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Pela compacidade de $\overline{U}$ podemos assumir, sem perca de generalidade, que existe $a \in \overline{U}$ tal que

$$\tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n\to+\infty} a \, .$$

Portanto $a \in \tilde{L}^+(x)$ e isto mostra que $\tilde{L}^+(x) \neq \emptyset$, porém, como $\tilde{L}^+(x) \subset \tilde{J}^+(x)$ segue que $\tilde{J}^+(x) \neq \emptyset$. Neste ponto notamos que

$$\tilde{J}^+(x) \subset \overline{\tilde{\pi}^+(V, [T, +\infty])} \subset \overline{U}.$$

Como a escolha do U foi feita de forma arbitrária obtemos

$$\tilde{J}^+(x) \subset \{\overline{U} : U \quad \text{é uma vizinhança de } A \ \} = \overline{A} = A.$$

Agora mostraremos que $\{x \in X : \tilde{J}^+(x) \neq \emptyset \text{ e } \tilde{J}^+(x) \subset A\} \subset \tilde{P}^+_u(A)$. Considere $x \in X$ tal que $\tilde{J}^+(x) \neq \emptyset$ e $\tilde{J}^+(x) \subset A$, seja também U uma vizinhança arbitrária de A. Desde que

$$\tilde{J}^+(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{t>0} \overline{\{\bigcup_{\tau\geq t} \tilde{\pi}(B(x, \varepsilon), \tau) : \tau \geq t\}} \subset A \subset U,$$

então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $t_0 > 0$ tal que $\overline{\{\bigcup_{\tau\geq t} \tilde{\pi}(B(x, \varepsilon_0), \tau) : \tau \geq t_0\}} \subset U$. Portanto $\tilde{\pi}((B(x, \varepsilon_0), [t_0, +\infty))) \subset U$, e concluímos que $x \in \tilde{P}^+_u(A)$ e a prova está completa. □

Lema 4.3.1. *Suponha que X seja um conjunto localmente compacto, $x \in X\backslash M$ é Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável e $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto não vazio. Então $x \in \tilde{P}^+_u(\tilde{L}^+(x))$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.1 sendo $\tilde{L}^+(x) \subset X$ compacto e sendo X localmente compacto, então $\tilde{P}^+_u(\tilde{L}^+(x)) = \{x \in X : \tilde{J}^+(x) \neq \emptyset \ \text{ e } \tilde{J}^+(x) \subset \tilde{L}^+(x)\}$. Pelo Lema 4.2.1 $\tilde{J}^+(x) = \tilde{L}^+(x)$ e assim concluímos que $x \in \tilde{P}^+_u(\tilde{L}^+(x))$. □

A proposição apresentada a seguir apresenta condições suficientes para que um conjunto limite positivo pertença a sua região de atração uniforme.

Proposição 4.3.2. *Suponha que X seja localmente compacto, $\tilde{L}^+(x) \cap M = \emptyset$ e $\tilde{L}^+(x)$ é Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável. Se $\tilde{L}^+(x)$ é compacto, então $\tilde{L}^+(x) \subset \tilde{P}^+_u(\tilde{L}^+(x))$.*

Demonstração. Desde que $\tilde{L}^+(x) \bigcap M = \emptyset$ temos que $\tilde{L}^+(x)\backslash M$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante pela Proposição 3.2.1. Agora seja $y \in \tilde{L}^+(x)\backslash M$. Pelo fato de que $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto fechado e postivamente $\tilde{\pi}$-invariante temos

$$\overline{\tilde{\pi}^+(y)} \subset \tilde{L}^+(x). \tag{4.24}$$

Consequentemente, $\tilde{L}^+(y) \subset \tilde{L}^+(x)$. Note que $\tilde{L}^+(y) \neq \emptyset$, pela compacidade de $\tilde{L}^+(x)$. Desde que y seja Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável segue que $\tilde{L}^+(y) = \tilde{J}^+(y)$. Portanto $\tilde{J}^+(x) \neq \emptyset$ e $\tilde{J}^+(x) \subset \tilde{L}^+(x)$ e assim segue a demonstração. □

O próximo resultado apresenta condições para que um conjunto limite positivo seja um $\tilde{\pi}$-atrator uniforme.

Teorema 4.3.1. *Sejam X localmente compacto e $\tilde{L}^+(x) \cap M = \emptyset$ para algum $x \in X$. Se $\tilde{L}^+(x)$ é um conjunto não vazio e assintoticamente Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável com $\tilde{L}^+(x)$ compacto, então $\tilde{L}^+(x)$ é uniformemente $\tilde{\pi}$-atrator.*

Demonstração. Para cada $y \in \tilde{L}^+(x)$, existe $\delta_y > 0$ tal que $d(z, y) < \delta_y$, assim podemos encontrar uma reparametrização τ_z tal que

$$d(\tilde{\pi}(y, t), \tilde{\pi}(z, \tau_z(t))) \xrightarrow{t \longrightarrow +\infty} 0 .$$

Desde que $\tilde{L}^+(x) \bigcap M = \emptyset$ e $\tilde{L}^+(x)$ é compacto existe $\beta > 0$ tal que $B(\tilde{L}^+(x), \beta) \bigcap M = \emptyset$. Pela compacidade do conjunto limite existem $y_1, ..., y_n \in \tilde{L}^+(x)$ tais que $\tilde{L}^+(x) \subset B(y_1, \frac{\delta_{y_1}}{2}) \bigcup ... \bigcup B(y_n, \frac{\delta_{y_n}}{2})$. Considere

$$2\delta = min\{\delta_{y_1}, ..., \delta_{y_n}\}.$$

Afirmamos que $B(\tilde{L}^+(x), \delta) \subset \tilde{P}^+_u(\tilde{L}^+(x))$. De fato, seja $w \in B(\tilde{L}^+(x), \delta)$. Então $w \in B(y_i, \delta_{y_i})$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$, dessa forma obtemos

$$d(\tilde{\pi}(y_i, t), \tilde{\pi}(w, \tau_w(t))) \xrightarrow{t \longrightarrow +\infty} 0$$
ou
$$d(\tilde{\pi}(y_i, h(t)), \tilde{\pi}(w, t)) \xrightarrow{t \longrightarrow +\infty} 0 ,$$

onde $h(t) = \tau_w^{-1}(t)$. Desde que seja verdade $\tilde{\pi}^+(y_i) \subset \tilde{L}^+(x)$, sabemos que $\tilde{L}^+(x)$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante e assim temos

$$d(\tilde{L}^+(x), \tilde{\pi}(w, t)) \xrightarrow{t \longrightarrow +\infty} 0 .$$

Então $\tilde{L}^+(x) \neq \emptyset$ e $\tilde{L}^+(w) \subset \tilde{L}^+(x)$. É evidente que $\tilde{J}^+(w) \neq \emptyset$.

Agora verificaremos que $\tilde{J}^+(w) \subset \tilde{L}^+(x)$. Tomando $a \in \tilde{L}^+(x)$ e, desde que, $w \notin M(\delta < \beta)$ segue, pelo Lema 3.2.4, que $\tilde{J}^+(w) \subset \tilde{J}^+(x)$. Supondo que $a \in \tilde{L}^+(x)$ seja Zhukovskij quase $\tilde{\pi}$-estável e utilizando o Lema 4.2.1 obtemos $\tilde{J}^+(a) = \tilde{L}^+(a)$, mas $\tilde{L}^+(x)$ é positivamente $\tilde{\pi}$-invariante e fechado e então $\overline{\tilde{\pi}^+(a)} \subset \tilde{L}^+(x)$, consequentemente $\tilde{L}^+(a) \subset L^+(x)$ portanto $\tilde{J}^+(w) \subset \tilde{L}^+(x)$. Concluímos, pela Proposição 4.3.1, que $w \in \tilde{P}^+_u(\tilde{L}^+(x))$. $\square$

5 Conclusão

No fim dos trabalhos conseguimos concluir os objetivos que inicialmente foram propostos, são eles, apresentar conceitos fundamentais sobre sistemas semidinâmicos impulsivos assim como condições suficientes para descrever surperfícies impulsivas em espaços n-dimensionais que satisfaçam a condição forte de tubo, além de, analisar e investigar relações importantes entre as propriedades recursivas. Ao longo do desenvolvimento dos trabalhos percebemos a importância de expor tais condições e as propriedades topológicas, pois, essas são fundamentais para a teoria de sistemas dinâmicos impulsivos.

As ações do plano que nortearam nossas atividades não foram escolhidas de forma aleatória, os critérios para defini-las foram baseados primeiramente na escolha de artigos que pudessem oferecer bases e estrutura condizentes com os objetivos estabelecidos e para tal destacamos que foi de suma importância pesquisar e estudar principalmente [3], [5] e [6], nesses, encontramos teoremas, proposições e lemas importantes do tema de sistemas semidinâmicos impulsivos.

Sobre a introdução de conceitos básicos de sistemas semidinâmicos impulsivos queríamos expor o principal objeto de nossos de estudos além de, o mais importante, generalizar resultados que foram inicialmente abordados no contexto de sistemas dinâmicos sem impulsos, dessa forma o leitor é encaminhado para [1] e [2].

No que diz respeito à caracterização de conjuntos impulsivos, o que é feito em [3] é uma interessante proposta. Observarmos comumente que existem exemplos de sistemas dinâmicos impulsivos cujos conjuntos impulsivos são escolhidos de forma abstrata, nesse sentido exploramos os caminhos que apresentam condições para caracterizar conjuntos impulsivos em $\mathbb{R}^n$ que satisfazem a condição forte de tubo.

Em [2], podemos ver muitos conceitos recursivos (minimalidade, recorrência e movimentos quase periódicos) apresentados para sistemas dinâmicos contínuos. Conseguimos nos dois últimos capítulos restruturar a maioria desses resultados para sistemas impulsivos. Baseados em [5] e [6], apresentamos um estudo de movimentos recorrentes e uma série de resultados que englobam periodicidade, recorrência, minimalidade, atração e estabilidade. Destacamos a prova de resultados como apresentação de condições suficientes para que o conjunto limite positivo de um dado ponto seja minimal, ainda, mostramos que se os pontos do conjunto de limites que estão fora do conjunto impulsivo são Lyapunov $\tilde{\pi}$-estáveis, então esses pontos são fracamente quase $\tilde{\pi}$-periódicos e ainda provamos que o conjunto limite definido por um ponto é minimal se, e somente se a trajetória desse ponto se aproximar uniformemente do seu limite definido.

Por fim para concluir tudo, no último capítulo tratamos da quase estabilidade de

Zhukovskij, mostramos que o conjunto limite de um dado ponto é minimal desde que os pontos desse conjunto limite que não estejam nos conjuntos impulsivos e sejam Zhukovskij quasi $\tilde{\pi}$-estáveis. Como consequência deste resultado, damos condições suficientes para que os pontos de conjunto um limite que não estão no conjunto impulsivo sejam $\tilde{\pi}$-recorrentes. Apresentamos algumas condições para que um ponto seja periódico e por último resultado, a saber, estabelecemos condições suficientes para que um conjunto limite seja um $\tilde{\pi}$-atrator uniforme.

No fim, ressaltamos a importância do que foi feito nessa dissertação, ajudamos a entender uma forma eficiente de caracterizar conjuntos impulsivos determinando condições específicas, além disso, contribuímos para que mais generalizações sejam feitas sobre a teoria clássica de sistemas dinâmicos contínuos.

Referências

[1] N. P. Bhatia and O. Hájek. *Local semi-dynamical systems*, volume 90. Springer, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 11, 13, 40, 44 e 73.

[2] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. *Stability theory of dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 10, 11, 13, 32, 40, 44 e 73.

[3] E. d. M. Bonotto, M. C. Bortolan, and R. Caraballo, T e Collegari. Impulsive surfaces on dynamical systems. *Acta Mathematica Hungarica*, 150(1):209–216, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 23, 27 e 73.

[4] E. d. M. Bonotto and M. Federson. Poisson stability for impulsive semidynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12):6148–6156, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 40 e 60.

[5] E. d. M. Bonotto and M. Z. Jimenez. On impulsive semidynamical systems: Minimal, recorrence and almost periodic motions. *Métodos Topológicos em Análise Não-linear*, 44. Citado 10 vezes nas páginas 11, 13, 16, 23, 32, 40, 44, 56, 66 e 73.

[6] E. d. M. Bonotto and M. Z. Jimenez. Weak almost periodic motions, minimality e stability in impulsive semidynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 256(4):1683–1701, 2014. Citado 10 vezes nas páginas 11, 13, 16, 23, 32, 40, 44, 56, 66 e 73.

[7] K. Ciesielski. On semicontinuity in impulsive dynamical systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, 52(1):71–80, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.

[8] C. Ding. Lyapunov quasi-stable trajectories. *Fundamenta Mathematicae*, 2(220):139–154, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 11, 56 e 66.

[9] S. Kaul. On impulsive semidynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 150. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.

[10] S. K. Kaul. On impulsive semidynamical systems—ii. recursive properties. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 16(7-8):635–645, 1991. Citado 7 vezes nas páginas 11, 16, 23, 32, 44, 45 e 56.

[11] S. K. Kaul. Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 7(4):509–523, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 11, 32 e 56.

[12] E. Lages Lima. Variedades diferenciáveis. *Brasil: Instituto de Matemática*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

[13] E. L. Lima. *Análise real: Funções de n Variáveis*, volume 2. Impa Rio de Janeiro, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

[14] G. M. Souto. *Qualitative properties of impulsive semidynamical systems*. PhD thesis, Universidade de São Paulo. Citado 6 vezes nas páginas 11, 13, 16, 21, 23 e 40.

APÊNDICE A – Hiperfícies diferenciáveis

A noção de superfície de dimensão m num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n(n \geq m)$ é a generalização direta de objetos que trabalhamos em geometria diferencial, tais como curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e superfícies em $\mathbb{R}^3$ que possuem plano tangente. Sobre os resultados que apresentaremos a seguir indicamos a leitura de [12] e [13].

A.1 A noção de superfície

Definição A.1.1. *Seja U_0 um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Uma **imersão** de classe C^k, $\varphi : U_0 \to \mathbb{R}^n$, é dito um **mergulho de classe** C^k de U_0 em $\mathbb{R}^n$, quando φ é um homeomorfismo de U_0 sobre $\varphi(U_0)$, dizemos também que φ é uma **parametrização** de classe C^k e dimensão m do subconjunto $U = \varphi(U_0) \subset \mathbb{R}^n$.*

Em relação à injetividade de $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, lembremos que as seguintes condições são equivalentes:

1. $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora;
2. $\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x^j} = \varphi'(x) \cdot e_j$, com $j = 1, ..., m$ e e_j são vetores linearmente independentes;
3. A matriz jacobiana $n \times m$, tem posto m, isto é, algum de seus determinantes menores $m \times m$ é distinto de zero.

Exemplo A.1.1. *Seja J um intervalo aberto de números reais. Um caminho de classe C^k, $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, é um mergulho se, e somente se, $\varphi : J \to \varphi(J)$ é homeomorfismo e o vetor velocidade $\varphi'(t)$ nunca se anula.*

Definição A.1.2. *Uma **superfície** m**-dimensional** do $\mathbb{R}^n$ (de classe C^k) é um subconjunto não vazio*

$$M = M^m \subset \mathbb{R}^n$$

no qual todo ponto p possui uma vizinhança aberta U dotada de uma parametrização de classe C^k e dimensão m.

Ao número $n - m$ diremos que é a codimensão de M em $\mathbb{R}^n$. Uma superfície de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$ é denominada uma hiperfície e além disso é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição A.1.3. *Seja p um ponto da superfície M, de dimensão m e classe C^k em $\mathbb{R}^n$. O **espaço vetorial tangente** a M no ponto p é um subespaço vetorial $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ que pode ser visto sob dois aspectos:*

1. *T_pM é o conjunto dos vetores-velocidade $v = \lambda'(0)$ dos caminhos difernciáveis $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, tais que $\lambda(0) = p$.*

2. *$T_pM = \varphi'(x_0) \cdot \mathbb{R}^m$ é a imagem da derivada $\varphi'(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, onde $\varphi : V_0 \to V$ é uma parametrização em M, com $\varphi(x_0) = p$.*

Como é de suma importante nos resultados da próxima seção, segue a definição de submersão.

Definição A.1.4. *Seja $f : M \to N$ de classe C^k, $k \geq 1$. Se por acaso $f'(z)$ for sobrejetiva em todo ponto $z \in M$, dizemos que f é uma submersão.*

Para demosntrarmos os Lemas 2.2.1 e 2.2.2, que foram muito importantes para as conclusões apresentadas na Seção 2.2.

Lema A.1.1. . *Seja $M = M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma hiperfície de classe C^k. Então para todo $p \in M$ possui uma vizinhança V, parametrizada por uma aplicação de classe C^k $\psi : V_0 \to V$, da forma $\psi(y) = (y, f(y)), y \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$.*

Para conhecer a demonstração do Lema acima sugerimos a leitura de [12] e [13].

Teorema A.1.1. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma hiperfície de classe C^k em $\mathbb{R}^n$. Então para cada $p \in M$, existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, $p \in V$, e uma submersão $g : V \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que $M \cap V = g^{-1}(0)$. Além disso, $T_pM = ker(dg(p))$.*

Demonstração. Pelo Lema A.1.1, dado $p \in M$, existe uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ em soma direta e uma vizinhança aberta U de p em M tal que a projeção $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (relativa à decomposição acima) aplica U homeomorficamente sobre um aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi = (\beta_{|U})^{-1} : U_0 \to U$ é uma parametrização de classe C^k tendo-se evidentemente $\varphi(x) = (x, f(x))$, onde $f : U_0 \to \mathbb{R}^{n-m}$ é de classe C^k.

Considere $V = U_0 \times \mathbb{R}^{n-m}$. Então V é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Definimos agora a seguinte função $g : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ da seguinte forma

$$g(x, y) = f(x) - y.$$

É imediato que $U = V \cap M = f^{-1}(0)$. Além disso, cada ponto $(x, y) \in V$, a derivada $g' : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ é dada por $g'(x, y) \cdot (u, v) = f'(x) \cdot (u - v)$. Para qualquer

$v \in \mathbb{R}^{n-m}$, temos $v = g^{'}(x, y) \cdot (0, -v)$,logo g é uma submersão. Em particular, $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é um valor regular de g.

Finalmente considere $v \in T_pM$. Consideremos um caminho $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda^{'}(0) = v$. Então $g^{'}(p) \cdot v = g^{'}(\lambda(0), \lambda^{'}(0)) = (g \circ \lambda)^{'}(0) = 0$, pois $g \circ \lambda$ é constante (igual à c). Portanto $v \in ker(dg(p))$. Como T_pM e $ker(dg(p))$ são subespaços m-dimensionais do $\mathbb{R}^{m+n}$ e $T_pM \subset Ker(dg(p))$ segue-se que $T_pM = ker(dg(p))$. □

Teorema A.1.2. *Sejam $p \in M$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com $p \in V$ e $g : V \to \mathbb{R}$ sendo uma submersão de classe C^k tais que $M \cap V = g^{-1}(0)$. Então $f(p) \notin ker(dg(p))$.*

Demonstração. Pelo Lema A.1.1 sabemos que $ker(df_p) = T_pM$. Sabendo que M é uma hiperfície satisfazendo a condição de transversalidade, ou seja,

$$\text{para todo } p \in M \ \langle \vec{n_p}, f(p) \rangle \neq 0.$$

Isso implica que nenhum vetor normal a M em p pode ser perpendicular a $f(p)$, ou seja, nenhum vetor perpendicular ao plano tangente pode ser perpendicular a $f(p)$ isso implica em dizer que f é transversal a M e portanto $f(p) \notin T_pM = Ker(d_g(p))$. □

A.2 Variedades diferenciáveis

De modo resumido uma variedade é como uma superfície, só que não precisa estar contida em um espaço euclidiano.

Definição A.2.1. *Seja M um espaço topológico. Um sistema de **coordenadas locais** ou **cartas locais** em M é um homeomorfismo $x : U \to x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que m é a dimensão de $x : U \to x(U)$. Para cada $p \in U$ tem-se $x(p) = (x^1(p), ..., x^m(p))$. Os números $x^i = x^i(p)$ são chamados de as coordenadas do ponto $p \in M$ no sistema x.*

Dessa forma podemos definir o que é um atlas.

Definição A.2.2. *Um **atlas** de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção $\Im$ de sistemas de coordenadas locais $x : U \to \mathbb{R}^m$ em M, cujos domínios U cobrem M. Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \Im$ são chamados as vizinhanças coordenadas de $\Im$.*

Considere os sistemas de coordenadas locais $x : U \to \mathbb{R}^m$ e $y : V \to \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ reativamente ao sistema y.
A correspondência

$$(x^1(p), ..., x^m(p)) \longleftrightarrow (y^1(p), ..., y^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ que é chamado mudança de coordenadas.

Um atlas $\Im$ sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável de classe C^k $(k \geq 1)$, se todas as mudanças de coordenadas φ_{xy}, $x, y \in \Im$ são aplicações de classe C^k.

Definição A.2.3. *Uma **variedade diferenciável**, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado $(M, \Im)$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\Im$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M.*

Vejamos a seguir alguns exemplos de variedades diferenciáveis.

Exemplo A.2.1. *O Espaço euclidiano n-dimensional constiui um importante exemplo de variedade diferenciável.*

Exemplo A.2.2. *Toda superfície de dimensão m e classe C^k, $M^m \subset \mathbb{R}^n$, é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k, com atlas $\Im$ formado pelos sistemas de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^m$, inversos das parametrizações $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \to U \subset M$ de classe C^k.*