

Eric Barcelos Rangel Junior

UMA POSSÍVEL CORRELAÇÃO ENTRE A
ENERGIA DE CASIMIR E OS HIDRETOS
SUPERCONDUTORES

Vitória

2022

Eric Barcelos Rangel Junior

UMA POSSÍVEL CORRELAÇÃO ENTRE A ENERGIA DE CASIMIR E OS HIDRETOS SUPERCONDUTORES

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito essencial para obtenção do título de Mestrado em Física.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Física

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando

Vitória

2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

R196p Rangel Junior, Eric Barcelos, 1995-
Uma possível correlação entre a energia de Casimir e os hidretos supercondutores / Eric Barcelos Rangel Junior. - 2022. 59 f. : il.

Orientador: Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Supercondutividade. 2. Efeito Casimir. 3. Hidretos. I. Orlando, Marcos Tadeu D'Azeredo. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**"UMA POSSÍVEL CORRELAÇÃO ENTRE A ENERGIA DE
CASIMIR E OS HIDRETOS SUPERCONDUTORES"**

ERIC BARCELOS RANGEL JUNIOR

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.
Aprovada por:



Prof. Dr. João Francisco Justo Filho
(USP/SP)



Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando
(Orientador - PPGFis)



Prof. Dr. Bernardo Brunoro Dilem
(IFES/ES)



Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
(PPGFis/UFES)



Prof. Dr. Carlos Augusto Cardoso Passos
(DFis/UFES)

Vitória-ES, 28 de setembro de 2022

Agradecimentos

Neste momento especial em que se fecha um ciclo e se inicia uma nova jornada, eu gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram para que eu alcançasse este objetivo.

Assim, agradeço...

a Deus.

A minha família, por ser meu suporte, minha fortaleza, fonte de apoio e compreensão, por nunca me deixarem fraquejar nos momentos mais difíceis. Pai, mãe e irmãs eu os agradeço e amo profundamente.

Ao Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando, meus sinceros agradecimento pelo seu tempo dedicado a me orientar.

Aos meus professores por partilharem, comigo, seus conhecimentos e aos funcionários da UFES pelo tratamento recebido.

Aos meus colegas de faculdade que me ajudaram quando necessitei, em especial ao Pedro e a Bruna que me acompanharam ao longo de toda essa trajetória.

"Se não puder voar, corra. Se não puder correr, ande. Se não puder andar, rasteje, mas continue em frente de qualquer jeito..."
(Martin Luther King)

Resumo

Desde de sua descoberta em 1911, a supercondutividade possui grande relevância científica devido ao seu alto potencial de aplicação tecnológica em diversas áreas, tais como produção e transmissão de eletricidade, medicina, transporte coletivo etc. A descoberta de materiais que sejam supercondutores à temperatura ambiente e de uma teoria microscópica que explique totalmente esse fenômeno são uns dos principais desafios da ciência moderna. Nos últimos anos, a supercondutividade em altas temperaturas têm sido observada em materiais ricos em hidrogênio submetidos a altas pressões, como o hidreto de enxofre carbonáceo, que apresentou o estado supercondutor à temperatura ambiente quando submetido a uma pressão de aproximadamente 267 GPa. Neste trabalho, estudamos uma possível correlação entre a energia de Casimir e o estado supercondutor dos Hidretos que apresentam a supercondutividade. Utilizamos o modelo da energia de Casimir entre duas folhas finas de plasma com a finalidade de estimar sua massa efetiva e comparamos com os resultados na bibliografia obtidos para outros supercondutores não convencionais.

Palavras-chave: Supercondutividade, Efeito Casimir, Hidretos.

Abstract

Since its discovery in 1911, superconductivity has great scientific relevance due to its high potential of technological application in several areas, such as production and transmission of electricity, medicine, public transportation, etc. The discovery of materials that are superconducting at room temperature and of a microscopic theory that fully explains this phenomenon are one of the main challenges of modern science. In the last years, superconductivity at high temperatures has been observed in hydrogen rich materials submitted to high pressures, like the carbonaceous sulfur hydride, which presented the superconducting state at room temperature when submitted to a pressure of approximately 267 GPa. In this work a possible correlation between the Casimir Energy and the superconducting state of hydrides presenting superconductivity was developed. We apply the Casimir Energy model between two thin plasma sheets in order to estimate their effective mass and compare it with the results in the bibliography obtained for other non-conventional superconductors.

Keywords: Superconductivity, Casimir effect, Hydride.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Resistência elétrica em função da temperatura do mercúrio (Hg). Gráfico publicado por Onnes em seu artigo, no qual reporta a descoberta da supercondutividade [6].	12
Figura 2 – Efeito Meissner em um supercondutor [8].	13
Figura 3 – À esquerda, comportamento de um condutor perfeito que obedece a Lei de Faraday-Lenz. À direita, Efeito Meissner em um supercondutor. . .	14
Figura 4 – (a) Magnetização em função do campo magnético aplicado para um supercondutor do tipo I. Acima de H_c o material passa do regime supercondutor para o regime normal, onde o diamagnetismo é desprezível (b) Magnetização em função do campo magnético aplicado para um supercondutor do tipo II. Até H_{c1} o material é um supercondutor com Efeito Meissner completo. Acima de H_{c1} as linhas de indução magnética penetram o material (estado de Vórtices) até que em H_{c2} , o material deixa de ser supercondutor. Adaptado de [9].	15
Figura 5 – Representação do campo magnético no interior de um material no estado supercondutor.	17
Figura 6 – Tabela periódica indicando os hidretos binários com previsão teórica de se tornarem supercondutores quando submetidos a altas pressões e os confirmados experimentalmente. Adaptada de [11].	22
Figura 7 – Estrutura cristalina do sistema C-S-H submetido a 4 GPa. Em destaque, circulado em vermelho, é observado os sítios da rede cúbica de corpo centrado, no qual o hidreto de enxofre carbonáceo se cristaliza. Adaptada de [3].	23
Figura 8 – Estrutura cristalina do sistema C-S-H submetido a 4 GPa. Em destaque, tracejado em preto, é observado os planos de hidrogênio onde supomos que ocorram a condução dos portadores de carga. Adaptada de [3]. . .	24
Figura 9 – Cavidade retangular de lados L_x , L_y e L_z	27
Figura 10 – Placas perfeitamente condutoras e neutras de lado L separadas por uma distância d no vácuo.	30
Figura 11 – Representação da interação entre os planos de plasma onde ocorre a condução.	34
Figura 12 – Ilustração da reflexão e transmissão dos plasmons entre dois planos de plasmas separados por uma distância d . Os coeficientes r , a , b e t são os coeficientes de reflexão e coeficientes de transmissão da onda que incide nas placas.	36

Figura 13 – Massa efetiva, α , em função da temperatura crítica, $T_c(K)$. Os destacados em vermelho, são os cupratos, resultados obtidos por Orlando [5]. Os resultados adquiridos para os hidretos supercondutores estão destacados em azul.	46
Figura 14 – Variações do potencial nos planos supercondutores. As regiões em vermelho representam as de máximo potencial, servindo de barreira para os elétrons. As regiões azuladas são as de potencial mínimo, onde os elétrons tendem a se acumular, formando os pares de Cooper para $T < T_c$. Adaptada de [18].	47
Figura 15 – (a) e (b) Continuidade dos campos \vec{E}_\perp e \vec{E}_\parallel . Continuidade do potencial escalar numa interface [20].	53
Figura 16 – Continuidade dos campos \vec{B}_\perp (a) e \vec{B}_\parallel (b) numa interface [20].	55

Lista de tabelas

Tabela 1 – Estimativa da massa efetiva α dos hidretos supercondutores.	45
---	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	SUPERCONDUTIVIDADE	12
2.1	Efeito Meissner	13
2.2	Supercondutores do tipo I e do tipo II	14
2.3	Comprimento de penetração de London	15
2.4	A Teoria BCS	18
2.5	Energia de Condensação do Estado Supercondutor	18
3	HIDRETOS SUPERCONDUTORES	22
4	EFEITO CASIMIR	25
4.1	Efeito Casimir para folhas finas de plasma	34
4.2	Massa efetiva dos portadores de carga	43
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
6	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICE A – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA UMA FO- LHA PLANA DE PLASMA	51

1 Introdução

A primeira teoria microscópica que obteve êxito na explicação da supercondutividade foi proposta em 1957 por Bardeen, Cooper e Schrieffer [1]. Esta teoria sugere que os portadores de carga no regime supercondutor são dois elétrons, nomeados pares de Cooper, interagindo entre si por intermédio dos fônons da rede cristalina em que estão inseridos. Entretanto, a teoria BCS, como ficou conhecida, não explica a supercondutividade nos materiais que surgiram na década de 1980 e foram designados como supercondutores não convencionais. Os supercondutores de alta temperatura crítica são não convencionais e dentre eles se destacam os cupratos, descoberta por Bednorz e Müller em 1986 [2]. Nos cupratos supercondutores a condução dos pares de Cooper (que são pares de buracos) ocorrem em camadas de óxido de cobre. Por muito tempo eles foram os supercondutores com as maiores temperaturas críticas registradas.

Dado o grande potencial de aplicação dos supercondutores, diversas pesquisas, sejam teóricas ou experimentais, vêm sendo desenvolvidas ao longo dos últimos anos. Recentemente, foi sintetizado o primeiro supercondutor à temperatura ambiente: o hidreto de enxofre carbonáceo [3]. Hidretos tornarem-se supercondutores quando submetidos à pressão extrema e combinados com outros elementos é previsto desde a década de 60, quando Ashcroft sugeriu que propriedades semelhantes ao do hidrogênio metálico poderiam ser observadas, em pressões mais acessíveis, em materiais ricos em hidrogênio quando estes eram combinados com outros elementos [4]. Entretanto, esta teoria só ganhou força recentemente com o avanço das simulações computacionais e da física de altas pressões.

Considerando essa recente descoberta, estudar os hidretos tornou-se essencial na busca de supercondutores de alta temperatura crítica. Neste trabalho nosso objetivo é explorar a relação entre massa efetiva dos portadores de carga dos hidretos supercondutores e a energia de Casimir. Para isto, supomos que a condução nos hidretos supercondutores ocorrem em planos de hidrogênio e estimamos a massa efetiva dos portadores de carga por meio da associação da energia de Casimir à energia do estado supercondutor. Além disso, comparamos os resultados encontrados neste trabalho com os obtidos por Orlando e colaboradores [5] para os cupratos supercondutores a fim de verificar uma coerência entre os resultados.

2 Supercondutividade

Constatada pela primeira vez em 1911 por Heike Kamerlingh Onnes, a supercondutividade é um fenômeno quântico em que materiais abaixo de uma temperatura característica, denominada crítica, exibem duas características que os definem como supercondutores: resistência elétrica nula e diamagnetismo perfeito. O primeiro material supercondutor descoberto foi o mercúrio, após Onnes realizar o feito de liquefazer o hélio, obtendo temperaturas inferiores a 4 K [6]. Em seu laboratório, em Leiden, ele observou uma queda brusca para zero na resistência do mercúrio em uma temperatura abaixo de 4,15 K (Figura 1). Por sua contribuição no estudo das propriedades da matéria em baixas temperaturas, incluindo a descoberta da supercondutividade e a liquefação do hélio, Onnes foi agraciado com um Prêmio Nobel em 1913.

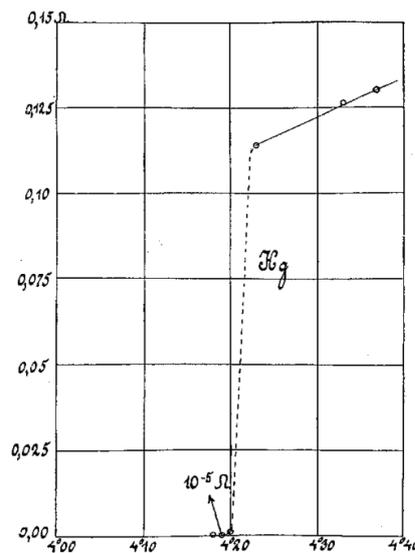


Figura 1 – Resistência elétrica em função da temperatura do mercúrio (Hg). Gráfico publicado por Onnes em seu artigo, no qual reporta a descoberta da supercondutividade [6].

Após a revelação de Onnes, iniciou-se uma busca por materiais que fossem supercondutores a temperaturas mais elevadas e de teorias capazes de explicar todos os detalhes desse fenômeno. Essa busca ainda persiste, pois, apesar de possuir bases bem estabelecidas, o fenômeno da supercondutividade não é totalmente explicado, existindo classes de supercondutores que não dispõem de uma teoria satisfatória. Nas próximas seções, discutiremos alguns pilares do fenômeno.

2.1 Efeito Meissner

Na presença de um campo magnético fraco, observa-se que o fluxo magnético no interior dos materiais supercondutores é nulo. Essa propriedade, chamada de Efeito Meissner, revela que os supercondutores se comportam como um diamagneto perfeito na presença de um campo externo (Figura 2). Este efeito foi notado pela primeira vez por Walther Meissner e Robert Ochsenfeld enquanto estudavam o comportamento de amostras de Estanho em função da temperatura e na presença de um campo magnético em 1933 [7].

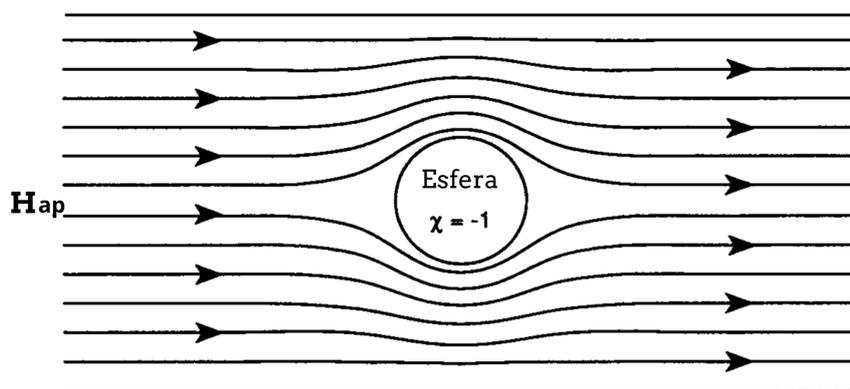


Figura 2 – Efeito Meissner em um supercondutor [8].

Esse comportamento revelou que um material supercondutor não é apenas um condutor perfeito, mas um novo estado da matéria, com propriedades peculiares. Por exemplo, na presença de um campo magnético, ao resfriar um condutor perfeito a uma temperatura em que sua resistividade é zero, é visto campo magnético no interior da amostra. Em seguida reduzindo o campo aplicado a zero é observado, como consequência da Lei de Faraday-Lenz, um campo magnético em seu interior de forma a manter o fluxo que existia anteriormente (Figura 3-ii). Em contrapartida, resfriando um supercondutor na presença de campo não nulo até uma temperatura abaixo da crítica, ao contrário do que é visto no condutor perfeito, não é notado nenhum fluxo de campo magnético em seu interior. Novamente, diminuindo o campo magnético aplicado a zero, nenhum campo induzido aparece como consequência da variação do campo aplicado, como é observado no condutor perfeito (Figura 3-iv).

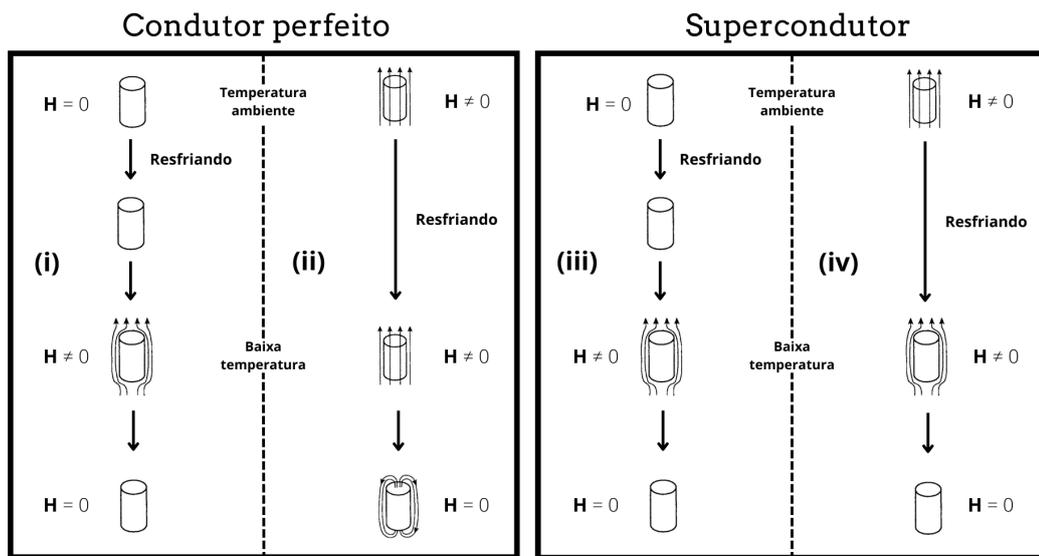


Figura 3 – À esquerda, comportamento de um condutor perfeito que obedece a Lei de Faraday-Lenz. À direita, Efeito Meissner em um supercondutor.

2.2 Supercondutores do tipo I e do tipo II

Além da conclusão de que um supercondutor se comporta como um diamagneto perfeito, o Efeito Meissner nos permite classificá-los em dois tipos: tipo I e tipo II. No primeiro, aumentando o campo magnético aplicado, vemos que em um dado momento o regime supercondutor deixa de existir, passando o material para o estado normal (Figura 4-a). O valor de campo para o qual isso ocorre é denominado campo crítico H_c . Nos supercondutores do tipo II, antes de ser observado a mudança completa do estado supercondutor para o estado normal, após um primeiro campo crítico, H_{c1} , ocorre um estado intermediário (Figura 4-b). Neste estado, o Efeito Meissner não é completo, linhas de indução magnética penetram no material, até o valor de campo aplicado atingir um segundo campo crítico H_{c2} , fazendo a amostra voltar ao estado normal em sua totalidade. O valor de H_{c2} pode ser mais de 100 vezes maior do que o valor de H_c calculado a partir da termodinâmica da transição [9]. As linhas de indução que penetram o tipo II, o fazem por meio de vórtices, chamados de vórtices de Abrikosov e por isso denominamos essa fase entre H_{c1} e H_{c2} como Estado de Vórtices.

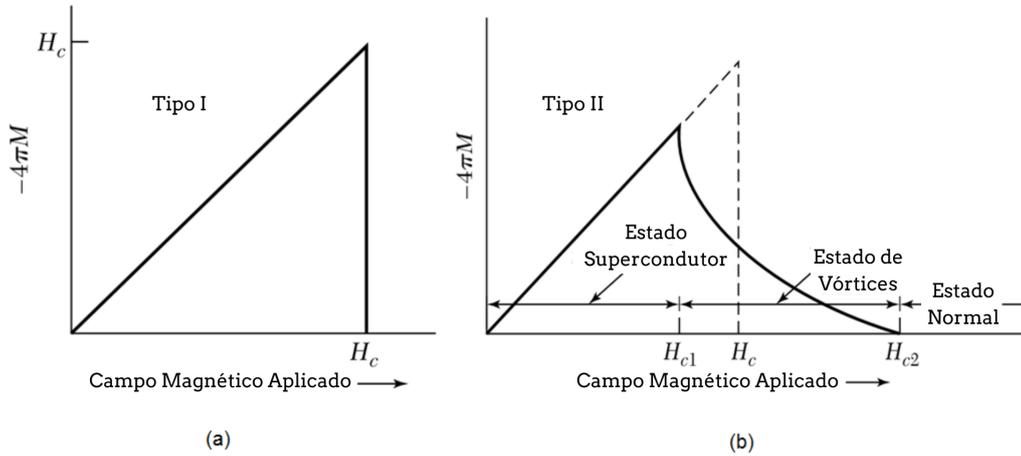


Figura 4 – (a) Magnetização em função do campo magnético aplicado para um supercondutor do tipo I. Acima de H_c o material passa do regime supercondutor para o regime normal, onde o diamagnetismo é desprezível (b) Magnetização em função do campo magnético aplicado para um supercondutor do tipo II. Até H_{c1} o material é um supercondutor com Efeito Meissner completo. Acima de H_{c1} as linhas de indução magnética penetram o material (estado de Vórtices) até que em H_{c2} , o material deixa de ser supercondutor. Adaptado de [9].

2.3 Comprimento de penetração de London

Um das teorias mais importantes na tentativa de explicar a supercondutividade foi proposta pelos irmãos London [10]. A partir de uma abordagem fenomenológica, a teoria de London indica a existência de um parâmetro considerado fundamental: o comprimento de penetração London, representado por λ_L . Essa grandeza mede a penetração (característica de cada material) do campo magnético na superfície lateral do supercondutor. A teoria parte do pressuposto de que alguns elétrons do material comportam-se de maneira normal, aproximadamente como elétrons livres (elétrons normais), enquanto outros exibem comportamento "anômalo" (os super elétrons). Da densidade total de elétrons n , há uma fração n_s , que se comporta de uma maneira "anormal" e representa os super elétrons. Eles não são espalhados nem por impurezas ou vibrações da rede, portanto, não contribuem com a resistividade. Eles são acelerados livremente por um campo elétrico. Sua equação de movimento, então, dada pela 2ª lei de Newton é:

$$m \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt} \right) = e\vec{E}, \quad (2.1)$$

onde $e\vec{E}$ é a força elétrica resultante sobre os super elétrons e \vec{v}_s sua velocidade. Se há n_s super elétrons por unidade de volume se movendo com velocidade \vec{v}_s , há, então, uma

densidade de corrente associada:

$$\vec{j}_s = n_s e \vec{v}_s. \quad (2.2)$$

Derivando (2.2) em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = n_s e \frac{d\vec{v}_s}{dt}. \quad (2.3)$$

Comparando as equações (2.2) e (2.3) chegamos à Primeira Equação de London:

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}. \quad (2.4)$$

Tomando o rotacional dos dois lados da equação e considerando a independência das variáveis tempo e espaço teremos da equação (2.4):

$$\frac{d(\vec{\nabla} \times \vec{j}_s)}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (2.5)$$

As equações diferenciais de Maxwell no vácuo e com fontes podem ser escritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Para um campo elétrico estático (sem variação no tempo), a equação (2.9) se reduz à lei de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s. \quad (2.10)$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{j}_s). \quad (2.11)$$

Substituindo (2.7) e (2.11) em (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}) \frac{1}{\mu_0} \right] &= -\frac{n_s e^2}{m} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}) \frac{1}{\mu_0} + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por fim, como a derivada temporal é igual a zero, o termo entre os colchetes deve ser constante em relação ao tempo. London concluiu que para descrever o efeito Meissner essa constante deveria ser zero [10]. Portanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} \vec{B} = 0. \quad (2.13)$$

Aplicando a equação (2.8) e a propriedade vetorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}), \quad (2.14)$$

a equação (2.13) se reduz a

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} = 0, \quad (2.15)$$

onde λ_L é um comprimento característico, chamado de comprimento de penetração de London, definido por

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}. \quad (2.16)$$

Supondo que um material supercondutor preencha a região entre $x > 0$ e que o campo seja perpendicular ao eixo x , a equação (2.15) torna-se

$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} B_z = 0. \quad (2.17)$$

A solução desta equação diferencial de segunda ordem é conhecida e dada por

$$B_z(x) = B_0 e^{-x/\lambda_L}. \quad (2.18)$$

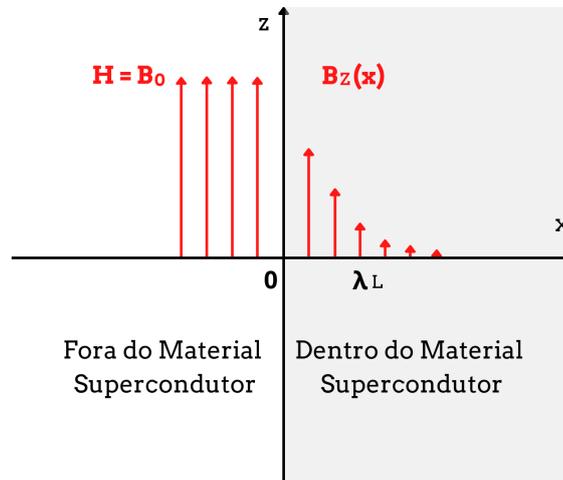


Figura 5 – Representação do campo magnético no interior de um material no estado supercondutor.

Da equação (2.18), temos que o campo magnético \vec{B} decresce exponencialmente quando age sobre um supercondutor e deve ser apreciável somente até uma distância λ_L medida a partir da superfície do supercondutor (Figura 5).

2.4 A Teoria BCS

A primeira teoria microscópica que obteve êxito em explicar a origem microscópica da supercondutividade foi proposta em 1957 pelos pesquisadores John Bardeen, Leon Cooper, e Robert Schrieffer [1]. A teoria BCS, como ficou conhecida, se baseia na interação elétron-fônon, onde por meio do quantum da energia de vibração da rede cristalina, ocorre uma "atração mútua" entre dois elétrons. Um primeiro elétron se deslocando por uma rede cristalina gera uma perturbação ao interagir com os cátions da rede. Essa perturbação leva a um aumento, localizado e momentâneo, da densidade de cargas positivas. Um segundo elétron, visando a minimização de sua energia é atraído por essa perturbação produzida pelo primeiro elétron. Assim, o segundo elétron interage com o primeiro através dessa perturbação, formando um par de Cooper, que é o portador de carga do material no regime supercondutor. Essa interação elétron-fônon leva a uma banda proibida com gap de energia maior ao de um elétron normal em um condutor. Segundo a teoria BCS, esse sistema de partículas composto por dois elétrons interagindo por meio de um fônon, possui características semelhantes ao de um bóson, uma vez que o spin atribuído ao sistema é zero. Isso ocorre devido ao fato da função de onda ser formada por um elétron no estado $\vec{k} \uparrow$ e outro no estado $\vec{k} \downarrow$, permitindo que esses pares permaneçam num mesmo estado.

2.5 Energia de Condensação do Estado Supercondutor

Para estimar a energia do estado supercondutor em um plano fino de plasma, objeto de nosso estudo, iniciamos utilizando a equação de Schrödinger para um elétron livre num espaço bidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r}), \quad (2.19)$$

sendo m^* a massa efetiva do elétron, $\hbar = h/2\pi$ a constante de Planck cortada e ϵ o autovalor da energia do elétron. Podemos reescrever a equação (2.19), como

$$-\nabla^2 \psi(\vec{r}) = \frac{2m^* \epsilon}{\hbar^2} \psi(\vec{r}).$$

Fazendo

$$k^2 = \frac{2m^* \epsilon}{\hbar^2}, \quad (2.20)$$

obtemos

$$-\nabla^2 \psi(\vec{r}) = k^2 \psi(\vec{r}). \quad (2.21)$$

Para determinar as autofunções, soluções da equação de Schrödinger, aplicamos o método da separação de variáveis, onde presumimos que a solução da equação diferencial (2.21) é o produto de duas funções, independentes entre si, de suas variáveis,

$$\psi(\vec{r}) = X(x)Y(y). \quad (2.22)$$

Substituindo o resultado acima na equação (2.21) resulta em

$$\begin{aligned} -Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= k^2 XY \\ -\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= k^2 \\ \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sendo a equação (2.23) igual a zero, os termos dela devem ser constantes, portanto

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2, \quad (2.24)$$

onde $-k_x^2$ e $-k_y^2$ são constantes. As soluções das equações (2.24) são conhecidas e determinadas por

$$X(x) = C_x e^{ik_x x} + D_x e^{-ik_x x} \quad \text{e} \quad Y(y) = C_y e^{ik_y y} + D_y e^{-ik_y y}. \quad (2.25)$$

Considerando que os plasmons estão limitados às placas de lado L , as condições de contorno periódicas são as mais adequadas:

$$X(x) = X(x + L) \quad \text{e} \quad Y(y) = Y(y + L).$$

Aplicando as condições acima em (2.25), para $x = 0$, obtemos que

$$X(0) = X(L) \quad \text{e} \quad Y(0) = Y(L). \quad (2.26)$$

Desenvolvendo as condições (2.26) para a variável x , temos

$$\begin{aligned} X(0) &= X(L), \\ C_x e^{ik_x 0} + D_x e^{-ik_x 0} &= C_x e^{ik_x L} + D_x e^{-ik_x L}, \\ C_x + D_x &= C_x e^{ik_x L} + D_x e^{-ik_x L}. \end{aligned}$$

Para esta equação ser satisfeita devemos ter que

$$\begin{cases} e^{ik_x L} = 1 \\ e^{-ik_x L} = 1, \end{cases}$$

Aplicando a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta), \quad (2.27)$$

temos que

$$\begin{cases} \cos(k_x L) + i\text{sen}(k_x L) = 1 \\ \cos(k_x L) - i\text{sen}(k_x L) = 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

A solução do sistema de equações (2.28) resulta nos valores possíveis de k_x :

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x \quad \text{onde } n_x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

Analogamente, obtemos os valores possíveis para k_y :

$$k_y = \frac{2\pi}{L}n_y \quad \text{onde } n_y = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

O número de estados $N(\epsilon)$ entre zero e ϵ é determinado calculando o número de vetores de onda \vec{k} tais que

$$\epsilon_k \leq \frac{\hbar^2}{2m^*}(k_x^2 + k_y^2). \quad (2.31)$$

Se associarmos a cada possível vetor um ponto no espaço (k_x, k_y) , então o número de vetores de onda que satisfazem (2.31) é igual ao número de áreas elementares $(2\pi/L)^2 = 4\pi^2/A$ dentro do círculo de raio $k = \sqrt{2m^*\epsilon/\hbar^2}$. O número de estados é a área total de todos os estados, dividido pela área de um único estado, portanto

$$N(\epsilon) = 2 \frac{\pi \left(\sqrt{\frac{2m^*\epsilon}{\hbar^2}} \right)^2}{\frac{4\pi^2}{A}} = \frac{m^* A \epsilon}{\pi \hbar^2}, \quad (2.32)$$

onde o fator 2 vem da soma sobre os spins eletrônicos. Desse resultado obtemos a densidade de estados dada por $D(\epsilon) = dN(\epsilon)/d\epsilon$:

$$D(\epsilon) = \frac{m^* A}{\pi \hbar^2}. \quad (2.33)$$

Da teoria BCS, a energia de condensação à temperatura nula é dada por [1]

$$E_{cond} = -\frac{1}{2}D(\epsilon)\Delta^2(0), \quad (2.34)$$

$$E_{cond} = -\frac{m^* A}{2\pi \hbar^2}\Delta^2(0), \quad (2.35)$$

onde $\Delta(0)$ é a energia do gap supercondutor dada por

$$\Delta(0) = \eta k_b T_c. \quad (2.36)$$

Substituindo esta última na equação (2.35), temos:

$$E_{cond} = -\frac{m^*A}{2\pi\hbar^2}\eta^2k_b^2T_c^2. \quad (2.37)$$

A massa efetiva dos portadores de carga no estado supercondutor pode ser escrita como um escalar multiplicado pela massa do elétron:

$$m^* = \alpha m_e. \quad (2.38)$$

Escrevendo a massa efetiva dos portadores de carga em função da massa do elétron por meio de (2.38), a equação (2.37) assume a forma

$$E_{cond} = -\frac{m_eA}{2\pi\hbar^2}\eta^2k_b^2T_c^2\alpha. \quad (2.39)$$

Mais a frente este resultado será retomado para obter a massa efetiva dos portadores de carga supercondutores por meio de uma relação deste com a energia de Casimir entre dois planos finos de plasma.

3 Hidretos Supercondutores

A supercondutividade dos hidretos, quando estes estão submetidos a altas pressões, foi prevista na década de 60 por Ashcroft, o qual teorizou que um composto rico em hidrogênio combinado com outros elementos químicos poderia exibir propriedades semelhantes a da fase metálica do hidrogênio [4]. Apesar da previsão, só foi visto um avanço significativo dessa teoria no anos 2000, quando o avanço no campo da física teórica, devido em grande parte à evolução da velocidade do processamento de dados dos computadores, permitiu que simulações computacionais de redes cristalinas de hidretos previssem quais combinações apresentariam o fenômeno da supercondutividade e até mesmo, sua temperatura crítica (Figura 6).

Tabela periódica de hidretos binários supercondutores

H																	He
LiH ₆ 82	BeH ₂ 44											BH 21	C	N	O	F	Ne
Na	MgH ₄ 30											AlH ₃ 140	SiH ₄ -20	PH ₃ 90	SH ₂ 200	Cl	Ar
KH ₁₀ 140	CaH ₆ 235	ScH ₉ 233	TiH ₁₄ 54	VH ₈ 72	CrH ₃ 81	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	GaH ₃ 123	GeH ₄ 220	AsH ₃ 90	SeH ₃ 120	BrH ₂ 12	Kr
Rb	SrH ₁₀ 259	YH ₁₀ 240	ZrH ₁₄ 88	NbH ₄ 47	Mo	TcH ₂ 11	RuH ₃ 1.3	RhH 2.5	PdH 5	Ag	Cd	InH ₃ 41	SnH ₁₄ 90	SbH ₃ 95	TeH ₄ 100	IH ₂ 30	XeH 29
Cs	BaH ₆ 38		HfH ₂ 76	TaH ₆ 136	WH ₅ 60	Re	OsH 2	IrH 7	PtH 25	AuH 21	Hg	Tl	PbH ₈ 107	BiH ₃ 110	PoH ₄ 50	At	Rn
FrH ₇ 63	RaH ₁₂ 116		Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Nh	Fl	Mc	Lv	Ts	Og
Lantanídeos		LaH ₁₀ 250	CeH ₈ 117	PrH ₈ 31	NdH ₈ 6	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	HoH ₄ 37	ErH ₁₅ 30	TmH ₈ 21	Yb	LuH ₁₂ 7	
Actinídeos		AcH ₁₀ 250	ThH ₁₀ 170	PaH ₉ 62	UH ₈ 35	NpH ₇ 10	Pu	AmH ₈ 0.3	CmH ₈ 0.9	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	

T_c (K) **Confirmados experimentalmente**
T_c (K) **Previstos teoricamente**

Figura 6 – Tabela periódica indicando os hidretos binários com previsão teórica de se tornarem supercondutores quando submetidos a altas pressões e os confirmados experimentalmente. Adaptada de [11].

Ainda que sejam previstos teoricamente, a sintetização e constatação dos hidretos supercondutores não é fácil, uma vez que eles não existem em condições normais de pressão, isto é, só se estabilizam quimicamente sob ação de alta pressão, portanto, sendo necessário equipamentos capazes de aplicar pressões extremamente altas. A título de exemplo, o H_3S , supercondutor a uma temperatura crítica de 203 K, só foi possível sintetizar por meio da ação de 155 GPa sobre a amostra [12]. Além disso, a aplicação dessas altas pressões dificulta o estudo das estruturas cristalinas desses compostos na fase supercondutora,

tornando difícil a sua completa caracterização.

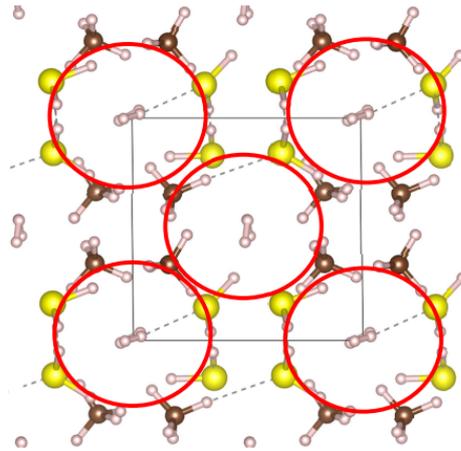


Figura 7 – Estrutura cristalina do sistema C-S-H submetido a 4 GPa. Em destaque, circulado em vermelho, é observado os sítios da rede cúbica de corpo centrado, no qual o hidreto de enxofre carbonáceo se cristaliza. Adaptada de [3].

Recentemente, em 2020, mais um grande passo foi dado no estudo da supercondutividade quando Snider publicou a descoberta do primeiro supercondutor à temperatura ambiente, o hidreto de enxofre carbonáceo (sistema C-S-H) [3]. Em sua publicação, por meio do método computacional DFT (Teoria do funcional da densidade), Snider simulou como seria a estrutura deste material estabilizado a uma pressão inicial de 4 GPa. Nesta condição, o sistema C-S-H se cristaliza em uma rede cúbica de corpo de centrado (Figura 7).

A estrutura que representa o hidreto de enxofre carbonáceo possui planos de hidrogênio e entre estes planos estão os compostos $(H_2S)(CH_4)(H_2)$ (Figura 8). Neste trabalho, consideramos uma condução anisotrópica para os hidretos supercondutores, onde os planos de hidrogênio são as regiões em que ocorrem o transporte dos portadores de carga. Esses planos seriam o equivalente aos planos de óxido de cobre em que ocorrem a condução dos pares de Cooper nos cupratos supercondutores. Supomos essa possibilidade baseado na teoria de Ashcroft [4], que presumia que a aplicação de altas pressões em compostos de hidrogênio combinados com outros elementos viabiliza ao composto propriedades semelhantes ao do hidrogênio metálico, tornando os planos deste elemento um local favorável para a ocorrência da condução dos portadores de carga supercondutora. Além disso, o fato dos cupratos supercondutores, que antes dos hidretos detinham os recordes de temperatura crítica, terem por características a condução em planos de óxidos de cobres, indica que a condução em planos deve ser um sistema capaz de potencializar o estado supercondutor. Por consequência, materiais com temperatura crítica mais alta tenderiam a seguir esse padrão.

Por fim, o hidrogênio, combinado a outro elemento, submetido a uma pressão alta desempenha um papel semelhante ao do hidrogênio puro metálico, idealizado como o estado

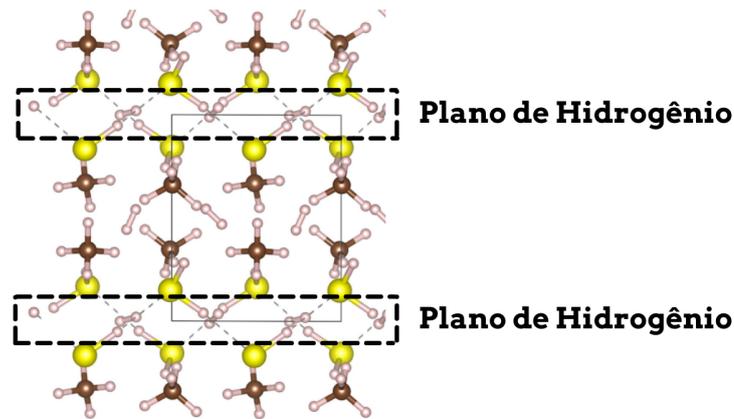


Figura 8 – Estrutura cristalina do sistema C-S-H submetido a 4 GPa. Em destaque, tracejado em preto, é observado os planos de hidrogênio onde supomos que ocorram a condução dos portadores de carga. Adaptada de [3].

líquido do elemento, que se comporta como um metal. Estendendo essa ideia para os outros hidretos, temos um sistema de condução planar similar ao visto nos cupratos, sendo que nestes a condução ocorre em planos de CuO_2 , enquanto que nos hidretos a condução ocorre nos planos de hidrogênio. Essa ideia oferece uma nova perspectiva desses materiais, dado que ainda não há uma concordância absoluta na comunidade científica acerca da classificação dos hidretos supercondutores. Na literatura, é comum encontrá-los sendo classificados como convencionais, entretanto existem questionamentos quanto a essa categorização devido a características únicas que esses hidretos supercondutores apresentam. Uma parte da comunidade científica os classificam como supercondutores não padrão [13].

4 Efeito Casimir

O Efeito Casimir, previsto por Hendrik Casimir, consiste na atração entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras, separadas por uma distância da ordem de micrômetros dentro de uma câmara perfeitamente selada, na qual um vácuo perfeito foi estabelecido [14]. Ainda que as placas sejam neutras, a presença delas alteram o vácuo eletromagnético, há flutuações de campo eletromagnético entre elas, onde a média dessas flutuações é igual a zero e sendo a energia de ponto zero é dada por

$$E_0 = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}. \quad (4.1)$$

Definindo a energia de Casimir como a alteração da energia do vácuo de um campo quântico, quando este é submetido a condições de contorno, como por exemplo a introdução de duas placas metálicas neutras, escrevemos

$$E_c = \left[\sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2} \right]_{\text{com cond. de contorno}} - \left[\sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2} \right]_{\text{sem cond. de contorno}} \quad (4.2)$$

onde ω é a frequência do campo EM e n é um determinado conjunto de índices do espectro, que são o quantum de energia da onda EM. As somatórias presentes na equação (4.2) são divergentes, assim devemos obter a energia renormalizada do vácuo quântico sob condições de contorno.

O potencial vetor \vec{A} associado a uma onda eletromagnética no vácuo pode ser descrito pela equação de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0. \quad (4.3)$$

Aplicando o método de separação de variáveis

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})q(t) \quad (4.4)$$

onde $\vec{v}(\vec{r})$ e $q(t)$ são funções que dependem apenas de \vec{r} e t , respectivamente. substituindo (4.4) em (4.3) resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [\vec{v}(\vec{r})q(t)]}{\partial t^2} - \nabla^2 [\vec{v}(\vec{r})q(t)] &= 0, \\ \vec{v}(\vec{r}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} - q(t) \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dividindo ambos os lados da equação (4.5) por $\vec{v}(\vec{r})q(t)$, obtemos

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\vec{v}(\vec{r})} \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) = 0,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\vec{v}(\vec{r})} \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}). \quad (4.6)$$

Como tanto o lado esquerdo quanto o direito dependem de apenas uma variável, t e \vec{r} , respectivamente, os dois lados devem ser igualados a um constante $-k^2$. O sinal de negativo da constante é atribuído devido aos autovalores do Laplaciano serem negativos. Igualando o lado direito de (4.6) à constante, resulta

$$\frac{1}{\vec{v}(\vec{r})} \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) = -k^2,$$

$$\nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) + k^2 \vec{v}(\vec{r}) = 0. \quad (4.7)$$

Agora, igualando o lado esquerdo de (4.6) à constante, obtemos

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = -k^2,$$

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + c^2 k^2 q(t) = 0. \quad (4.8)$$

Fazendo

$$\omega = ck \quad (\text{relação de dispersão}), \quad (4.9)$$

(4.8) toma a forma

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q(t) = 0. \quad (4.10)$$

Neste momento iremos encontrar as soluções da equação (4.7). Para isto, devemos considerar uma cavidade retangular de lados L_x , L_y e L_z (Figura 9), de modo que $\vec{v}(\vec{r})$ pode ser escrito em função de suas coordenadas,

$$v(r) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (4.11)$$

substituindo (4.11) em (4.7) e derivando obtemos

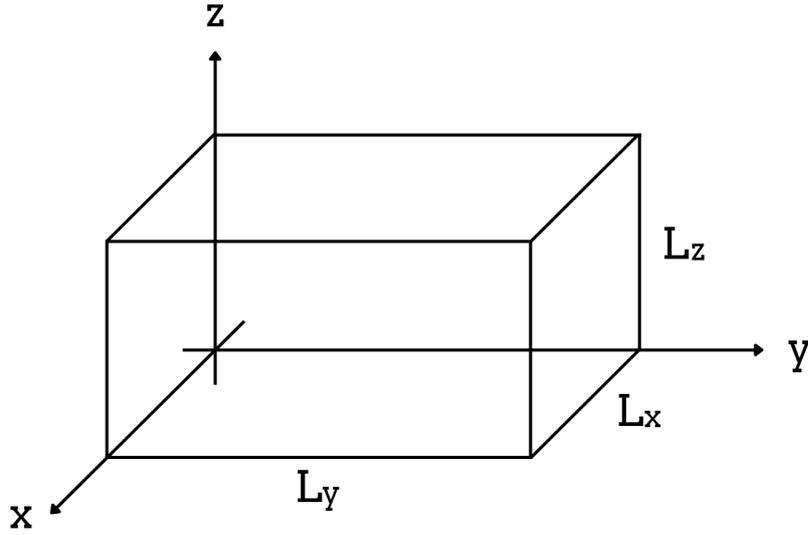


Figura 9 – Cavidade retangular de lados L_x , L_y e L_z .

$$\nabla^2 XYZ + k^2 XYZ = 0,$$

$$YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 XYZ = 0.$$

Dividindo ambos os lados desta por $X(x)Y(y)Z(z)$, resulta

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0. \quad (4.12)$$

Sendo a equação (4.12) igual a zero, os termos dela devem ser constantes, portanto

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^2, \quad (4.13)$$

onde k_x , k_y e k_z são constantes. De (4.12) e (4.13), temos que

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (4.14)$$

As soluções das equações (4.13) são conhecidas e determinadas por

$$\begin{cases} X(x) = C_x e^{ik_x x} + D_x e^{-ik_x x} \\ Y(y) = C_y e^{ik_y y} + D_y e^{-ik_y y} \\ Z(z) = C_z e^{ik_z z} + D_z e^{-ik_z z}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Como a $v(r)$ deve se anular nas fronteiras da cavidade retangular de dimensões L_x , L_y e L_z , as condições de contorno serão dadas por

$$\begin{cases} X(0) = X(L_x) = 0 \\ Y(0) = Y(L_y) = 0 \\ Z(0) = Z(L_z) = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Considerando apenas a variável x , aplicando a condições de contorno $X(0) = 0$ em (4.15) obtemos

$$X(0) = 0,$$

$$C_x e^{ik_x 0} + D_x e^{-ik_x 0} = 0,$$

$$C_x + D_x = 0,$$

$$C_x = -D_x. \quad (4.17)$$

Agora, aplicando a condição de contorno $X(L_x) = 0$ em (4.15) obtemos

$$X(L_x) = 0,$$

$$C_x e^{ik_x L_x} + D_x e^{-ik_x L_x} = 0,$$

$$C_x e^{ik_x L_x} = -D_x e^{-ik_x L_x}.$$

Aplicando (4.17),

$$C_x e^{ik_x L_x} = C_x e^{-ik_x L_x},$$

$$e^{ik_x L_x} = e^{-ik_x L_x},$$

$$e^{ik_x L_x} - e^{-ik_x L_x} = 0. \quad (4.18)$$

Utilizando a fórmula de euler (2.27), reescrevemos (4.18) como

$$\cos(k_x L_x) + i \operatorname{sen}(k_x L_x) - \cos(k_x L_x) + i \operatorname{sen}(k_x L_x) = 0,$$

$$\operatorname{sen}(k_x L_x) = 0. \quad (4.19)$$

De (4.19) extraímos os valores possíveis de k_x :

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x} \quad \text{onde } l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

Repetindo os mesmos passos para as variáveis y e z , obtemos os valores possíveis para k_y e k_z :

$$k_y = \frac{m\pi}{L_y} \quad \text{onde } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.21)$$

$$k_z = \frac{n\pi}{L_z} \quad \text{onde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.22)$$

Substituindo (4.20), (4.21) e (4.22) em (4.14), obtemos

$$k = \sqrt{\frac{l^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_z^2}}. \quad (4.23)$$

Utilizando a relação de dispersão (4.9), temos

$$\omega_{l,m,n} = ck_{l,m,n} = \pi c \sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2}. \quad (4.24)$$

A energia de ponto zero entre as placas, será dada por

$$E_0 = (2) \frac{1}{2} \sum_{l,m,n} \hbar \omega_{l,m,n} = \hbar \pi c \sum_{l,m,n} \sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2}. \quad (4.25)$$

O fator 2 deve-se ao fato da existência de duas polarizações possíveis para o campo eletromagnético quando $l, m, n \neq 0$.

A situação física de nosso interesse corresponde à Figura 10 e pode ser obtida da Figura 9 no limite em que se faz $L_x = L_y = L$ e $L_z = d$ com $L \gg d$. Portanto, a energia de ponto zero entre as placas será dada por

$$E_0 = (2) \frac{1}{2} \sum_{l,m,n} \hbar \omega_{l,m,n} = \hbar \pi c \sum_{l,m,n} \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2}. \quad (4.26)$$

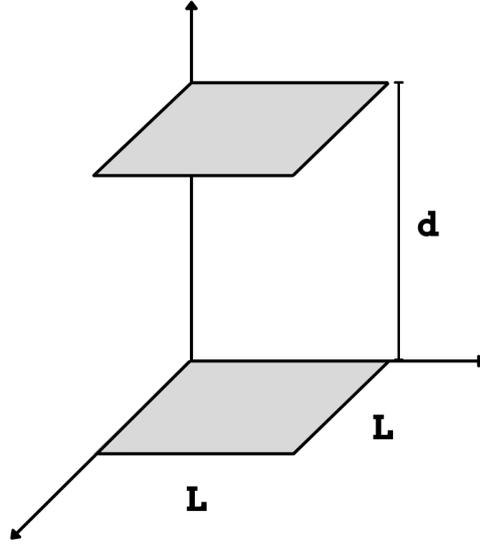


Figura 10 – Placas perfeitamente condutoras e neutras de lado L separadas por uma distância d no vácuo.

Para L muito grande pode-se considerar k_x e k_y como variáveis contínuas [15]. Portanto, o somatório sobre l e m pode ser substituído pela integral

$$\sum_{l,m} \rightarrow \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int \int dk_x dk_y. \quad (4.27)$$

Portanto,

$$E(d) = (2)\frac{1}{2} \sum_{l,m,n} \hbar\omega_{l,m,n} \rightarrow \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \hbar c \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] dk_x dk_y. \quad (4.28)$$

Da mesma forma, para $L_z = d$ muito grande, a soma em n pode ser substituída pela integral [15]

$$\sum_n \rightarrow \frac{d}{\pi} \int dk_z. \quad (4.29)$$

Assim, temos que

$$E(\infty) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \hbar c \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right] dk_x dk_y dk_z. \quad (4.30)$$

A energia potencial do sistema quando as placas são separadas por uma distância d é $U(d) = E(d) - E(\infty)$. Esta é a energia de interação entre duas placas paralelas separadas por uma distância d . Logo,

$$U(d) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \hbar c \left\{ \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] dk_x dk_y - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right] dk_x dk_y dk_z \right\} \quad (4.31)$$

Utilizando coordenadas polares no plano $k_x k_y$, onde r é o raio polar e θ é o ângulo polar, com $dk_x dk_y = r dr d\theta$, $k_x = r \cos\theta$ e $k_y = r \sin\theta$, a equação (4.31) pode ser reescrita como

$$U(d) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \hbar c \left\{ \sum_n \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] r dr d\theta - \frac{d}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2} \right] r dr d\theta dk_z \right\} \quad (4.32)$$

$$U(d) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \hbar c \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] r dr - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2} \right] r dr dk_z \right\} \quad (4.33)$$

Com a intenção de limitar o comportamento da integral, se introduz uma função de corte

$$f(k) = f(\sqrt{r^2 + k_z^2}). \quad (4.34)$$

Fisicamente, as placas não exercem muita influência no sistema, pois não oferecerem obstáculo para ondas com comprimento de onda pequeno. Agora, com o intuito de contornar a divergência da somatória se faz

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k \ll k_m \\ 0 & \text{para } k \gg k_m \\ \frac{1}{2} & \text{para } k = k_m. \end{cases} \quad (4.35)$$

Portanto,

$$U(d) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \hbar c \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] f\left(\sqrt{r^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}\right) r dr - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2} \right] f\left(\sqrt{r^2 + k_z^2}\right) r dr dk_z \right\}. \quad (4.36)$$

Segue que,

$$U(d) = \frac{L^2}{2\pi} \hbar c \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 r^2 + n^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 r^2 + n^2} \right) r dr \right. \\ \left. - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 r^2 + \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 k_z^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 r^2 + \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 k_z^2} \right) r dr dk_z \right\} \quad (4.37)$$

Fazendo as substituições

$$x = \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 r^2 \longrightarrow dx = \frac{2d^2}{\pi^2} r dr \quad (4.38)$$

$$\kappa = \frac{d}{\pi} k_z \longrightarrow d\kappa = \frac{d}{\pi} dk_z \quad (4.39)$$

a equação (4.40) se torna

$$U(d) = \frac{L^2}{2\pi} \hbar c \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{x + n^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + n^2} \right) \frac{\pi^2}{2d^2} dx \right. \\ \left. - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right) \frac{\pi^2}{2d^2} dx \frac{\pi}{d} d\kappa \right\}. \quad (4.40)$$

Simplificando,

$$U(d) = \frac{L^2}{4\pi} \hbar c \frac{\pi^3}{d^3} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{x + n^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + n^2} \right) dx \right. \\ \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{x + \kappa^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right) dx d\kappa \right\}. \quad (4.41)$$

Fazendo

$$F(\kappa) \equiv \int_0^\infty \left[\sqrt{x + \kappa^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right) dx \quad (4.42)$$

a equação (4.41) fica

$$U(d) = \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{4d^3} \left\{ \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty F(\kappa) d\kappa \right\}. \quad (4.43)$$

O fator meio multiplicando $F(0)$ na equação (4.43) deve-se a uma única liberdade de polarização quando $n = 0$. De acordo com a fórmula do somatório de Euler-Maclaurin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(\kappa) = -\frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{12}F'(0) + \frac{1}{720}F'''(0)\dots \quad (4.44)$$

Fazendo a substituição $u = x + \kappa^2$, se obtém

$$F(\kappa) = \int_{\kappa^2}^{\infty} \sqrt{u} f\left(\frac{\pi}{d}\sqrt{u}\right) du. \quad (4.45)$$

Utilizando o método de integração por partes em (4.45) obtemos

$$F(\kappa) = \left[\frac{2}{3}u^{3/2} f\left(\frac{\pi}{d}u^{1/2}\right) \right] \Big|_{\kappa^2}^{\infty} - \int_{\kappa^2}^{\infty} \frac{2}{3}u^{3/2} \underbrace{f'\left(\frac{\pi}{d}u^{1/2}\right)}_0 du \quad (4.46)$$

$$F(\kappa) = -\frac{2}{3}\kappa^3 f\left(\frac{\pi}{d}\kappa\right). \quad (4.47)$$

Portanto,

$$F'(\kappa) = -2\kappa^2 f\left(\frac{\pi}{d}\kappa\right) - \frac{2}{3}\kappa^3 \underbrace{f'\left(\frac{\pi}{d}\kappa\right)}_0 \longrightarrow F'(0) = 0,$$

$$F''(\kappa) = -4\kappa f\left(\frac{\pi}{d}\kappa\right) - 2\kappa^2 \underbrace{f'\left(\frac{\pi}{d}\kappa\right)}_0 \longrightarrow F''(0) = 0,$$

$$F'''(\kappa) = -4f\left(\frac{\pi}{d}\kappa\right) - 4\kappa \underbrace{f'\left(\frac{\pi}{d}\kappa\right)}_0 \longrightarrow F'''(0) = -4.$$

As demais derivadas de ordens superiores serão nulas assumindo que todas as derivadas da função de corte desaparecem quando $\kappa = 0$ [15]. Portanto, a equação (4.44) fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(\kappa) = -\frac{1}{2}F(0) - \frac{4}{720}. \quad (4.48)$$

Substituindo a equação 4.48 em (4.43) resulta em

$$U(d) = \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{4d^3} \left\{ \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}F(0) - \frac{4}{720} \right\},$$

$$U(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} L^2 \quad (4.49)$$

Como $F(d) = -\vec{\nabla}U(d)$, temos que

$$F(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4} L^2. \quad (4.50)$$

Assim, a força atrativa por unidade de área entre as placas é

$$f(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4}. \quad (4.51)$$

Sendo assim, existe uma força atrativa entre duas placas metálicas que independe do material das placas que pode ser interpretada como uma pressão de ponto zero das ondas eletromagnéticas [14].

4.1 Efeito Casimir para folhas finas de plasma

Em um de seus trabalhos, Bordag estudou dois modelos em sua investigação a respeito da energia de Casimir [16]. O primeiro foi o de dois corpos dielétricos descritos pelo modelo de plasma, já o segundo o de folhas finas de plasma. Este último é de nosso interesse, uma vez que dois planos finos de plasma podem ser aproximados para dois planos supercondutores.

A energia de ponto zero entre as folhas de plasma do modelo proposto podem ser descritas como a contribuição da energia consequente aos plasmons mais a energia devido aos fótons:

$$E_0 = E_{plasmons} + E_{foton}. \quad (4.52)$$

Para o regime de pequenas distâncias, assumimos que a energia relacionada aos plasmons prevalece sobre a energia dos fótons. Para descrever o modelo proposto por Bordag, devemos considerar duas folhas paralelas e finas de plasma (Figura 11).

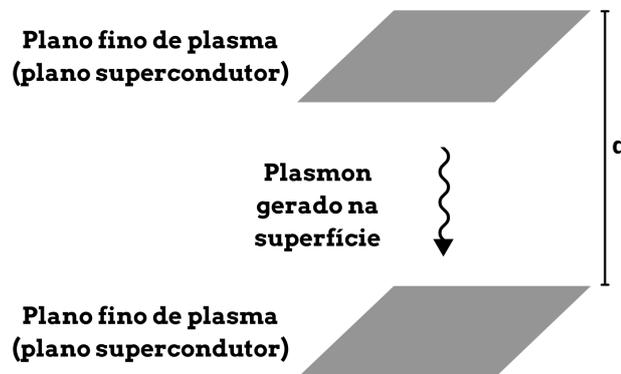


Figura 11 – Representação da interação entre os planos de plasma onde ocorre a condução.

Os plásmons gerados nas superfícies dessas folhas possuem natureza ondulatória, assim partimos da equação de movimento de onda:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (4.53)$$

A solução geral da equação de onda (4.53) é conhecida e pode ser representada na forma expandida de uma transformada de Fourier

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int d\omega \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (4.54)$$

Substituindo a solução geral (4.54) na equação de onda (4.53) obtemos

$$\nabla^2 \int d\omega \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d\omega \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = 0.$$

Consideramos as placas finas de plasma posicionadas no plano xy e aplicamos o laplaciano e a derivada temporal

$$(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \int d\omega \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \frac{1}{c^2} \omega^2 \int d\omega \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = 0.$$

Agora, colocando os termos semelhantes em evidência, temos

$$\left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) \int d\omega \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = 0.$$

Podemos observar que o termo em parênteses é multiplicado pela solução geral (4.54)

$$\left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) \Phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.55)$$

Uma vez que as placas estão no plano xy, os vetores de onda k_x e k_y são paralelos a elas, portanto é adotada a notação

$$k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (4.56)$$

Substituindo (4.56) em (4.55), resulta em

$$\left(-k_z^2 - k_{\parallel}^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) \Phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.57)$$

Da equação (4.57), obtemos o vetor k_z ,

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \quad (4.58)$$

e de $\omega(k_z, k_{\parallel})$,

$$\omega(k_z, k_{\parallel}) = c \sqrt{(k_z^2 + k_{\parallel}^2)}. \quad (4.59)$$

Os plásmons, por sua natureza ondulatória, são transmitidos ou refletidos ao interagirem com as placas finas de plasma, como apresentado na figura (12).

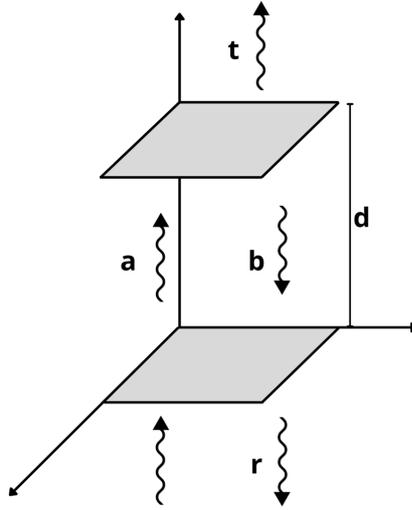


Figura 12 – Ilustração da reflexão e transmissão dos plasmons entre dois planos de plasmas separados por uma distância d . Os coeficientes r , a , b e t são os coeficientes de reflexão e coeficientes de transmissão da onda que incide nas placas.

Assim, em termos de propagação dos plásmons entre os planos de plasmas, a solução da equação de onda tem a forma:

$$\Phi(k_{\parallel}, z) = \begin{cases} e^{ik_z z} + r e^{-ik_z z} & \text{para } z < 0 \\ a e^{ik_z z} + b e^{-ik_z z} & \text{para } 0 < z < d, \\ t e^{ik_z z} & \text{para } z > 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

onde os coeficientes r e b são os coeficientes de reflexão e a e t coeficientes de transmissão da onda que incide nas placas, como indicado na Figura 12.

Outro ponto importante a ser destacado, é a condição de continuidade das ondas EM na superfície das placas finas de plasma. Essa condição, deduzida no apêndice B, nos induz a quatro equações que o potencial vetor de onda dos plásmons deve satisfazer:

$$\Phi_{acima}(0) - \Phi_{abaixo}(0) = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi(0)}{\partial z}, \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{acima}(0) - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{abaixo}(0) = 0, \quad (4.62)$$

$$\Phi_{acima}(d) - \Phi_{abaixo}(d) = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi(d)}{\partial z}, \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{acima}(d) - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{abaixo}(d) = 0. \quad (4.64)$$

Podemos obter o coeficiente de transmissão t aplicando o potencial vetor (4.60), nas condições de continuidade acima. Substituindo a equação (4.60) em (4.62), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel}}(ae^{ik_{zz}} + be^{-ik_{zz}}) - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}}(e^{ik_{zz}} + re^{-ik_{zz}}) = 0,$$

$$ika - ikb - ik + kr = 0,$$

$$a - b - 1 + r = 0,$$

$$r = 1 - a + b, \quad (4.65)$$

$$a - b = 1 - r. \quad (4.66)$$

Substituindo a equação (4.60) na equação (4.64),

$$ikte^{ikd} - ikae^{ikd} + ikbe^{-ikd} = 0,$$

$$te^{ikd} - ae^{ikd} + be^{-ikd} = 0,$$

$$te^{ikd} - ae^{ikd} = -be^{-ikd},$$

$$t - a = -b \frac{e^{-ikd}}{e^{ikd}},$$

$$a - t = be^{-2ikd}. \quad (4.67)$$

Substituindo a equação (4.60) na equação (4.61)

$$a + b - 1 - r = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} (ik - ikr),$$

$$a + b = 1 + r - 2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} (ik - ikr),$$

$$a + b = 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + r + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} r,$$

$$a + b = 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) r. \quad (4.68)$$

Substituindo a equação (4.60) em (4.63),

$$\begin{aligned}
te^{ikd} - ae^{ikd} - be^{-ikd} &= -2\frac{\Omega c^2}{\omega^2}ikte^{ikd}, \\
te^{ikd} + 2\frac{\Omega c^2}{\omega^2}ikte^{ikd} &= ae^{ikd} + be^{-ikd}, \\
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)te^{ikd} &= ae^{ikd} + be^{-ikd}, \\
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= a + b\frac{e^{-ikd}}{e^{ikd}}, \\
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= a + be^{-2ikd}.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Agora, substituindo a equação (4.67) na equação (4.69),

$$\begin{aligned}
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= a + be^{-2ikd}, \\
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= a + a - t, \\
\left(2 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= 2a, \\
\left(1 + ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= a.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Portanto, substituindo a equação (4.70) na equação (4.69),

$$\begin{aligned}
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= a + be^{-2ikd}, \\
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= \left(1 + ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t + be^{-2ikd}, \\
\left(1 + 2ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t - \left(1 + ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right)t &= be^{-2ikd}, \\
ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}t &= be^{-2ikd}, \\
ik\frac{\Omega c^2}{\omega^2}te^{2ikd} &= b.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Substituindo a equação (4.65) na equação (4.68) obtemos

$$\begin{aligned}
 a + b &= 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) (1 - a + b), \\
 a + b &= 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) - \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) a + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) b, \\
 a + b &= 2 - \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) a + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) b, \\
 a + b &= 2 - a - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} a + b + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b. \tag{4.72}
 \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
 2a &= 2 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} a + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b, \\
 2a + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} a - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b &= 2, \\
 2a \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b &= 2, \\
 a \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) - ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b &= 1. \tag{4.73}
 \end{aligned}$$

Substituindo aqui as equações (4.70) e (4.71),

$$\left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) - ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \left(ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} t e^{2ikd}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{\omega^2 + ik\Omega c^2}{\omega^2}\right)^2 t - \left(ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) e^{2ikd} t = 1,$$

$$[(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2 - (ik\Omega c^2)^2 e^{2ikd}] t = \omega^4, \tag{4.74}$$

$$\left[1 + \frac{(k\Omega c^2)^2}{(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2} e^{2ikd}\right] t = \frac{\omega^4}{(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2}. \tag{4.75}$$

Portanto,

$$t = \frac{\omega^4}{(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2} \left[1 + \frac{(k\Omega c^2)^2}{(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2} e^{2ikd} \right]. \quad (4.76)$$

Na polarização TM, os plásmons de superfície se formam nos pólos de t , no eixo imaginário $k = i\kappa$. O pólo da equação (4.76) será quando

$$(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2 - (ik\Omega c^2)^2 e^{2ikd} = 0,$$

$$(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2 = (ik\Omega c^2)^2 e^{2ikd},$$

$$\omega^2 + ik\Omega c^2 = \pm i^2 k\Omega c^2 e^{ikd},$$

$$\omega^2 - \kappa\Omega c^2 = -\sigma\kappa\Omega c^2 e^{-\kappa d},$$

$$\frac{\omega^2 - \kappa\Omega c^2}{\kappa\Omega c^2} = -\sigma e^{-\kappa d}, \quad (4.77)$$

onde $\sigma = \pm 1$. Para $\sigma = +1$ a função de onda é dita simétrica e para $\sigma = -1$ é anti-simétrica. Para duas placas, a solução para κ pode ser encontrada e é denominada por κ_σ . Para uma única placa, a solução para κ pode ser encontrada fazendo $d \rightarrow \infty$ na equação (4.77), e é denominada por κ_{single} , ou seja,

$$\omega^2 + ik\Omega c^2 = 0,$$

$$\omega^2 = -ik\Omega c^2. \quad (4.78)$$

Utilizando a equação (4.59),

$$c^2(k^2 + k_{||}^2) = ik\Omega c^2,$$

$$((i\kappa)^2 + k_{||}^2) = \Omega\kappa_{single},$$

$$-\kappa_{single}^2 + k_{||}^2 = \Omega\kappa_{single},$$

$$\kappa_{single}^2 + \Omega\kappa_{single} - k_{\parallel}^2 = 0. \quad (4.79)$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima para κ_{single} encontramos

$$\kappa_{single} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega^2 + 4k_{\parallel}^2} - \Omega \right). \quad (4.80)$$

Podemos observar que é obtido os valores da parte imaginária do vetor de onda k para o caso de duas placas, κ_{σ} , e para o caso de uma única placa, κ_{single} . Bordag estimou que a energia do vácuo quântico superficial, mostrada em (4.52), pode ser obtida por meio de

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[\sum_{\sigma=\pm 1} \omega(k_{\parallel}, ik_{\sigma}) + \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi i} \omega(k_{\parallel}, k) \frac{\partial}{\partial k} \ln \frac{t(k)}{t(-k)} \right], \quad (4.81)$$

onde o primeiro termo entre os colchetes é a contribuição dos plasmons. Assim, no regime de pequenas distâncias, supomos que apenas a contribuição dos plasmons é relevante em (4.52)

$$E_{plasmon} = \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \omega(k_{\parallel}, ik_{\sigma}). \quad (4.82)$$

O cálculo da energia de Casimir para o caso de dois planos de plasma paralelos se resume à energia entre os planos reduzida pela contribuição individual de cada plano, isto é:

$$\omega(k_{\parallel}, ik_{\sigma}) \longrightarrow \omega(k_{\parallel}, ik_{\sigma}) - \omega(k_{\parallel}, ik_{single}). \quad (4.83)$$

Agora, aplicando (4.83) em (4.82), obtemos

$$E_{plasmon} = \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \omega(k_{\parallel}, ik_{\sigma}) - \omega(k_{\parallel}, ik_{single}). \quad (4.84)$$

De (4.59), obtemos

$$\begin{cases} \omega(k_{\parallel}, ik_{\sigma}) = c\sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{\sigma}^2} \\ \omega(k_{\parallel}, ik_{single}) = c\sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{single}^2}. \end{cases} \quad (4.85)$$

Substituindo o resultado acima em (4.84), resulta

$$E_{plasmon} = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(\sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{\sigma}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)} - \sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{single}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)} \right). \quad (4.86)$$

Fazendo

$$\omega_{\sigma} = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{\sigma}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)} - \sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{single}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)}, \quad (4.87)$$

podemos reescrever (4.86) como

$$E_{plasmon} = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \omega_{\sigma}(k_{\parallel}, \Omega, d). \quad (4.88)$$

Fazendo a mudança de variável para coordenadas polares, $dk_{||} \rightarrow 2\pi k_{||} dk_{||}$, temos que

$$E_{plasmon} = \frac{\hbar c}{4\pi} \int dk_{||} k_{||} \sum_{\sigma=\pm 1} \omega_{\sigma}(k_{||}, \Omega, d). \quad (4.89)$$

Em seguida, aplicando a substituição $k_{||} \rightarrow k_{||}/d$, resulta em

$$E_{plasmon} = \frac{\hbar c}{4\pi d^3} \int dk_{||} k_{||} d \sum_{\sigma=\pm 1} \omega_{\sigma}(k_{||}/d, \Omega, d). \quad (4.90)$$

Finalmente, fazendo $k_{||} \rightarrow k_{||}\sqrt{\Omega d}$, obtemos

$$E_{plasmon} = \frac{\hbar c \sqrt{\Omega d}}{4\pi d^3} g(\Omega, d), \quad (4.91)$$

onde

$$g(\Omega, d) = \sqrt{\Omega d} \int dk_{||} k_{||} d \sum_{\sigma=\pm 1} \omega_{\sigma}(k_{||}/d, \Omega, d). \quad (4.92)$$

O valor numérico de $g(\Omega, d)$ é calculado por meio de métodos computacionais, assumindo dois valores:

$$g(\Omega, d) = \begin{cases} -0,7022427 & \text{para } \sigma = 1 \\ 0,639449 & \text{para } \sigma = -1. \end{cases} \quad (4.93)$$

Assim, (4.91) assume os valores

$$E_{plasmons, \sigma=1} = 0,05090 \frac{\hbar c}{d^{5/2}} \sqrt{\Omega} \quad (4.94)$$

e

$$E_{plasmons, \sigma=-1} = -0,05589 \frac{\hbar c}{d^{5/2}} \sqrt{\Omega}. \quad (4.95)$$

A contribuição da polarização TM para a energia é a soma da contribuição do plasmon simétrico com o antisimétrico, portanto, para uma onda transversal magnética, a energia associada à polarização TM é dada por

$$E_{TM} = -0,005 \frac{\hbar c}{d^{5/2}} \sqrt{\Omega}. \quad (4.96)$$

Para duas superfícies de plasma, Ω equivale a

$$\Omega = \frac{\mu_0 n_{2D} q^2}{2m}. \quad (4.97)$$

Portanto, temos de (4.96)

$$E_{TM} = -0,005 \frac{\hbar c}{d^{5/2}} \sqrt{\frac{\mu_0 n_{2D} q^2}{2m}}. \quad (4.98)$$

Uma vez que essa é a energia por unidade de área devido aos plásmos de superfície supercondutora, a energia de Casimir resulta do produto dessa energia pela área da superfície, como segue

$$E_{Cas} = -0,005 \frac{\hbar c A}{d^{5/2}} \sqrt{\frac{\mu_0 n_{2D} q^2}{2m}}. \quad (4.99)$$

Podemos reescrever (4.99) como

$$E_{Cas} = -\frac{0,005}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\hbar c A}{d^{5/2}} \sqrt{\frac{\mu_0 n_{2D} q^2}{m}}. \quad (4.100)$$

Além disso, sendo o comprimento de penetração de London um parâmetro característico dos supercondutores dado por

$$\lambda(0) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_{3D} e^2}}, \quad (4.101)$$

e considerando que a condução é em camadas, isto é, superficial, devemos considerar uma densidade de carga superficial e não volumétrica como visto em (4.101). A densidade de carga superficial é obtida pelo produto da volumétrica pela distância entre as placas:

$$n_{2D} = d n_{3D}. \quad (4.102)$$

Agora, substituindo (4.102) em (4.101), obtemos o comprimento de penetração superficial:

$$\lambda_{2D}(0) = \sqrt{\frac{dm}{\mu_0 n_{2D} e^2}}. \quad (4.103)$$

Por fim, substituindo (4.103) em (4.100), obtemos a energia de Casimir para suas placas finas de plasma:

$$E_{Cas} = -\frac{0,005}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\hbar c A}{d^2 \lambda_{2D}(0)}. \quad (4.104)$$

Os planos supercondutores podem ser considerados superfícies de plasma, uma vez que esses planos possuem uma concentração igual de cargas positivas e negativas e o elétron como carga móvel, isto é, um gás de fermi. Oscilações longitudinais em um plasma geram excitações chamadas plásmons, que é o quantum de oscilação do plasma. Essas oscilações são diferenças de densidade de carga que ocorrem por todo o plano supercondutor, portanto podemos associar os plásmons de superfície com a variação da densidade de carga no plano condutor. Na teoria de supercondutividade BCS, o quantum de energia gerado pela vibração da rede cristalina, o fônon, é o responsável pela interação que origina os pares de Cooper, nesse modelo o responsável pela interação entre os planos e consequentemente, entre os elétrons será o plásmon de superfície das camadas onde ocorre a condução. Estas interagem entre si por meio desse quantum de energia concebido pela oscilação das densidades de carga.

4.2 Massa efetiva dos portadores de carga

Em seu artigo, Kempf e outros propuseram a energia de Casimir como um dos mecanismos para a supercondutividade em cupratos de alta temperatura crítica [17], obtendo a temperatura crítica T_c em função de parâmetros característicos dos supercondutores. Orlando

e colaboradores introduziram o conceito de massa efetiva, m^* na discussão da relação do Efeito Casimir com a supercondutividade nos supercondutores de alta temperatura, obtendo uma equação para a massa efetiva destes [5]. Nesta seção, chegaremos no resultado obtido por Orlando, resultado este que aplicamos para os hidretos supercondutores.

Uma vez que estamos estudando estruturas atômicas, trabalhamos com escalas nanométricas. Segundo Bordag e outros, a energia de condensação do supercondutor é igual a energia de Casimir para essas escalas nanométricas. Portanto, igualando a energia do condensado supercondutor obtida para os supercondutores não convencionais (2.39) com a energia de Casimir entre dois planos supercondutores (4.104),

$$E_{cas} = E_{cond}, \quad (4.105)$$

$$\frac{0,005}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\hbar c A}{d^2 \lambda_{2D}(0)} = \frac{\alpha m_e A}{2\pi \hbar^2} \eta^2 k_b^2 T_c^2.$$

Resolvendo para α , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2 \times 0,005}{\eta^2 k_b^2} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m_e} \right] \frac{1}{T_c^2 d^2 \lambda_{2D}(0)}, \\ \alpha &= \frac{0,01}{\eta^2 k_b^2} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m_e} \right] \frac{1}{T_c^2 d^2 \lambda_{2D}(0)}, \\ \alpha &= \frac{1}{100 \eta^2 k_b^2} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m_e} \right] \frac{1}{T_c^2 d^2 \lambda_{2D}(0)}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Definindo a constante M como

$$M = \frac{1}{100 \eta^2 k_b^2} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m_e} \right], \quad (4.107)$$

obtemos de (4.106)

$$\alpha(T_c, d, \lambda_{2D}) = \frac{M}{T_c^2 d^2 \lambda_{2D}(0)}, \quad (4.108)$$

$$\alpha \propto \frac{1}{T_c^2}. \quad (4.109)$$

Em virtude de α ser um fator que representa a massa que o portador de carga efetivamente possui ao percorrer a rede, ele pode ser relacionado à mobilidade da carga.

5 Resultados e Discussões

Em seu artigo, Orlando e colaboradores, por meio da equação (4.108), estimaram a massa efetiva α dos cupratos supercondutores [5]. Foi observado que com o aumento da temperatura crítica, a massa efetiva calculada tende a diminuir, além disso, o material com temperatura crítica mais alta teve valor de massa efetiva igual a $\alpha = 2.0 \pm 0.1$, valor este determinado pela teoria BCS como a massa efetiva dos portadores de carga do regime supercondutor. Considerando que a massa efetiva reflete a mobilidade dos portadores de carga, Orlando e colaboradores concluíram que para $\alpha \simeq 2$ o regime supercondutor é otimizado, havendo uma interação maior entre o par de Cooper e a rede cristalina. Para valores menores que dois, foi considerado que apesar da mobilidade dos portadores ser maior, a interação elétron- fônon é menor.

Com base nesta ideia, através de (4.108), calculamos o valor da massa efetiva dos portadores de carga dos hidretos supercondutores (Tabela 1) e confrontamos os nossos resultados com os obtidos por Orlando e colaboradores com a finalidade de investigar a teoria deste e apurar a possibilidade da interação por meio dos plasmons contribuir para a supercondutividade em altas temperaturas.

Composto	T_c (K)	d (Å)	λ_{2D} (nm)	α
C-S-H (267 GPa)	287.7	6.970	75	2.9
LH_{10}	250.0	5.102	147	3.7

Tabela 1 – Estimativa da massa efetiva α dos hidretos supercondutores.

Na Figura 13, plotamos os resultados obtidos por Orlando, destacados em vermelho, e nossos resultados para os hidretos supercondutores, destacados em azul. Os valores para a massa efetiva dos hidretos são maiores que dois, entretanto não são discrepantes dos resultados obtidos por Orlando. Em relação aos hidretos supercondutores, não foi observada uma redução, mas sim, um leve aumento em relação aos supercondutores anteriores, ficando próximo de dois. Como consequência, acreditamos que a redução da massa efetiva com o aumento da temperatura deve ser resultado de uma maior mobilidade dos portadores de carga.

Considerando as placas como membranas plasmáticas que vibram e interagem entre si através do espaço entre os planos, pode haver uma maior interações entre os planos supercondutores com o aumento da temperatura. O modelo que adotamos para explicar a origem da energia do plasmon de superfície nos planos supercondutores se fundamenta em indícios de que esses planos, responsáveis pela condução, possuem variações de densidade de carga ao longo de sua superfície (Figura 14), o que propicia o surgimento dos plasmons de superfície. Assim, com o aumento da temperatura maior seria as variações de carga no

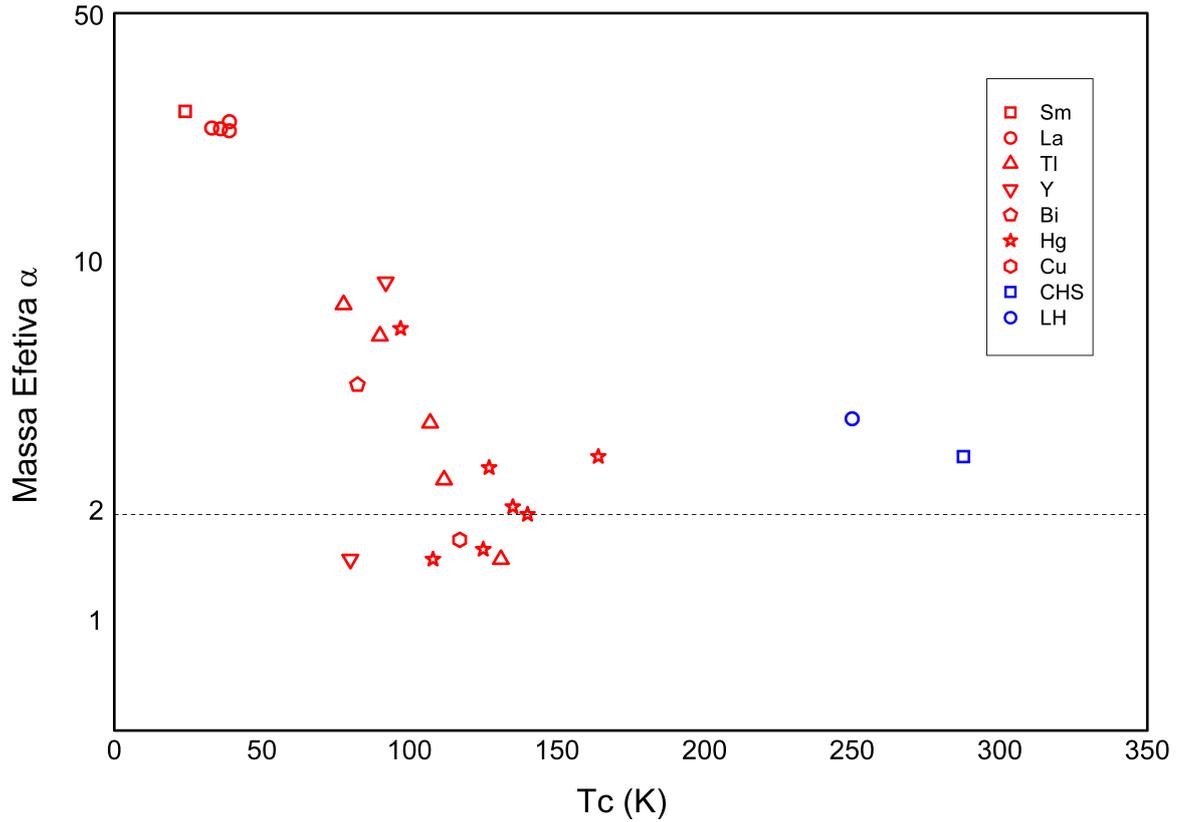


Figura 13 – Massa efetiva, α , em função da temperatura crítica, $T_c(K)$. Os destacados em vermelho, são os cupratos, resultados obtidos por Orlando [5]. Os resultados adquiridos para os hidretos supercondutores estão destacados em azul.

plano. Além disso, o valor mais alto da massa efetiva dos portadores de carga nesta teoria pode ser atribuída ao fato de estarmos lidando com a energia de plasmons, sendo estes relacionados à oscilações de densidade de cargas. Ainda, a energia de interação coulombiana, origem da energia do plasmon, ser superior a energia de vibração da rede, base da energia dos fônons, sendo mais um fator a contar no nosso modelo.

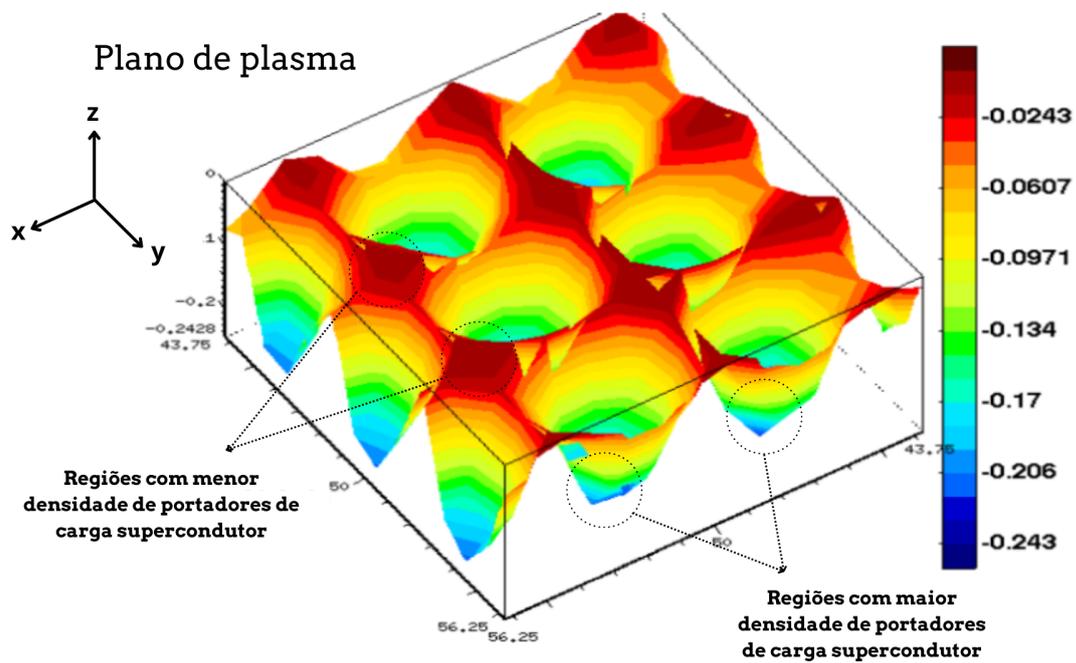


Figura 14 – Variações do potencial nos planos supercondutores. As regiões em vermelho representam as de máximo potencial, servindo de barreira para os elétrons. As regiões azuladas são as de potencial mínimo, onde os elétrons tendem a se acumular, formando os pares de Cooper para $T < T_c$. Adaptada de [18].

6 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi estimar a massa efetiva dos portadores de carga presentes nos hidretos supercondutores, comparando com os resultados obtidos para os cupratos supercondutores através da associação da energia de Casimir ao estado supercondutor, proposta pela primeira vez por Kempf [17] em 2008. Em seu artigo Kempf associou a energia de Casimir à energia do estado supercondutor dos cupratos de alta temperatura crítica utilizando a proposta de Bordag.

Supomos que a condução dos portadores de carga dos hidretos supercondutores se dá em planos de hidrogênio, o que os aproxima da configuração de um cuprato. Nesse sentido, os resultados obtidos mostram coerência do modelo de Orlando e colaboradores na estimativa da massa efetiva dos portadores de carga [5], tendo em vista que assim como ocorre para os cupratos, os hidretos supercondutores, continuam apresentando uma redução de sua massa efetiva com o aumento da temperatura crítica. Além disso, adotando a massa efetiva como uma medida da inércia dos portadores de carga supercondutores, realçamos que os resultados calculados por nós indicam uma correlação entre a massa efetiva e o aumento da temperatura crítica. Nossa conclusão parcial é de que existe uma correlação entre a energia de Casimir e energia do estado supercondutor.

Referências

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Theory of superconductivity,” *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 1175–1204, Dec 1957.
- [2] J. G. Bednorz and K. A. Müller, “Possible high t_c superconductivity in the ba-la-cu-o system,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 64, pp. 189–193, Jun 1986.
- [3] E. Snider, N. Dasenbrock-Gammon, R. McBride, M. Debessai, H. Vindana, K. Vencatasamy, K. V. Lawler, A. Salamat, and R. P. Dias, “Room-temperature superconductivity in a carbonaceous sulfur hydride,” *Nature*, vol. 586, no. 7829, pp. 373–377, 2020.
- [4] N. W. Ashcroft, “Hydrogen dominant metallic alloys: High temperature superconductors?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 187002, May 2004.
- [5] M. Orlando, A. Rouver, J. Rocha, and A. Cavichini, “Correlation among the effective mass m^* , λ_{ab} and t_c of superconducting cuprates in a casimir energy scenario,” *Physics Letters A*, vol. 382, no. 22, pp. 1486 – 1491, 2018.
- [6] H. Kamerlingh Onnes, “The resistance of pure mercury at helium temperatures,” *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden, b*, vol. 120, 1911.
- [7] W. Meissner and R. Ochsenfeld, “Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit,” *Naturwissenschaften*, vol. 21, pp. 787–788, Nov. 1933.
- [8] C. P. Poole, H. A. Farach, R. J. Creswick, and R. Prozorov, “2 - phenomenon of superconductivity,” in *Superconductivity (Second Edition)* (C. P. Poole, H. A. Farach, R. J. Creswick, and R. Prozorov, eds.), pp. 23–59, Amsterdam: Academic Press, second edition ed., 2007.
- [9] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*. Wiley New York, 1976.
- [10] F. London and H. London, “The electromagnetic equations of the supraconductor,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, vol. 149, no. 866, pp. 71–88, 1935.
- [11] J. A. Flores-Livas, L. Boeri, A. Sanna, G. Profeta, R. Arita, and M. Eremets, “A perspective on conventional high-temperature superconductors at high pressure: Methods and materials,” *Physics Reports*, vol. 856, pp. 1–78, 2020. A perspective on conventional high-temperature superconductors at high pressure: Methods and materials.

-
- [12] A. Drozdov, M. Erements, I. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin, “Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system,” *Nature*, vol. 525, no. 7567, pp. 73–76, 2015.
- [13] J. Hirsch and F. Marsiglio, “Nonstandard superconductivity or no superconductivity in hydrides under high pressure,” *Physical Review B*, vol. 103, no. 13, p. 134505, 2021.
- [14] H. B. G. Casimir, “On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates,” *Indag. Math.*, vol. 10, pp. 261–263, 1948. [Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.100N3-4,61(1997)].
- [15] I. efeito Casimir, “O efeito casimir,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 22, no. 1, 2000.
- [16] M. Bordag, “The casimir effect for thin plasma sheets and the role of the surface plasmons,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 39, no. 21, p. 6173, 2006.
- [17] A. Kempf, “On the Casimir effect in the high- t_c cuprates,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 41, no. 16, p. 164038, 2008.
- [18] H. S. Santana and E. V. L. de Mello, “Evidence that cuprate superconductors form an array of nanoscopic josephson junctions,” *Phys. Rev. B*, vol. 105, p. 134513, Apr 2022.
- [19] G. Barton, “Casimir effects for a flat plasma sheet: I. energies,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, no. 13, p. 2997, 2005.
- [20] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall New Jersey, 1962.

APÊNDICE A – Condições de contorno para uma folha plana de plasma

Em 2005, Barton [19] propôs o modelo das folhas de plasma como uma folha plana infinitamente fina e indefinidamente estendida no plano xy . Este modelo considera o plasma um fluido contínuo com densidade de massa nm e densidade de carga ne além de uma imóvel carga total nula uniformemente distribuída.

Seja o deslocamento do fluido $\vec{\xi}$, com carga superficial e densidade de corrente dadas, respectivamente, por

$$\sigma = -ne\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{\xi}, \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{J} = ne \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}. \quad (\text{A.2})$$

onde \parallel indica a componente do vetor paralela a placa. Da mesma forma, escreve-se $\vec{s} = r_{\parallel} \vec{e}_{\parallel} = (x,y)$. Nesse caso, a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\xi}(s, t) = e \vec{E}_{\parallel}(s, z = 0, t). \quad (\text{A.3})$$

Como o deslocamento dos elétrons é puramente tangencial ao plano da folha, expressa-se todas as variações temporais por um fator comum

$$\vec{\xi}(s, t) = \vec{\xi}(\vec{x}) e^{-i\omega t}. \quad (\text{A.4})$$

Portanto, a Equação (A.3) fica

$$m \vec{\xi}(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-i\omega t} = e E_{\parallel},$$

$$-m\omega^2 \vec{\xi}(\vec{x}) e^{-i\omega t} = e E_{\parallel},$$

$$-m\omega^2 \vec{\xi}(\vec{x}, t) = e E_{\parallel},$$

$$\vec{\xi}(\vec{x}, t) = -\frac{e \vec{E}_{\parallel}}{m\omega^2}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a Equação (A.5) na Equação (A.1)

$$\alpha = -ne\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \left(-\frac{e\vec{E}_{\parallel}}{m\omega^2} \right)$$

$$\alpha = -\frac{ne^2}{m\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}. \quad (\text{A.6})$$

Agora, substituindo a Equação (A.4) na Equação (A.2),

$$\vec{J} = ne \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t},$$

$$\vec{J} = -i\omega ne \vec{\xi}. \quad (\text{A.7})$$

As equações de Maxwell, já usando a Equação (A.4), são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}, \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}. \quad (\text{A.11})$$

Vale lembrar que no espaço livre, onde ρ e \vec{J} se anulam. As condições de contorno para o campo \vec{E} são obtidas analisando seu comportamento numa distribuição superficial de densidade de carga α , escolhendo uma superfície (Figura 15), sobre a qual é aplicada a lei de Gauss (A.8):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \alpha A, \quad (\text{A.12})$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (\text{A.13})$$

o campo \vec{E}_{\perp} (Figura 15-a), perpendicular a superfície, aplicando a Equação (A.12) fica

$$\vec{E}_{acima}^{\perp} - \vec{E}_{abaixo}^{\perp} = \frac{\alpha}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.14})$$

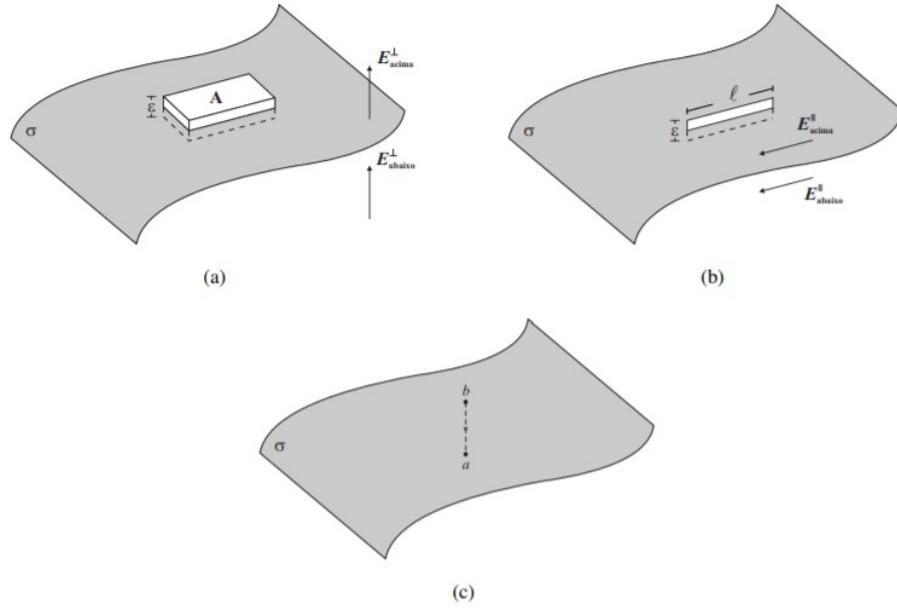


Figura 15 – (a) e (b) Continuidade dos campos \vec{E}_\perp e \vec{E}_\parallel . Continuidade do potencial escalar numa interface [20].

Substituindo a Equação (A.6) em (A.14),

$$\vec{E}_{acima}^\perp - \vec{E}_{abaixo}^\perp = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{ne^2}{m\omega^2} \vec{\nabla}_\parallel \vec{E}_\parallel. \quad (\text{A.15})$$

Multiplicando e dividindo por c^2 ,

$$\vec{E}_{acima}^\perp - \vec{E}_{abaixo}^\perp = \frac{ne^2}{mc^2\epsilon_0} \frac{c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_\parallel \vec{E}_\parallel,$$

$$\vec{E}_{acima}^\perp - \vec{E}_{abaixo}^\perp = \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_\parallel \vec{E}_\parallel, \quad (\text{A.16})$$

onde Ω é um parâmetro com dimensão de número de onda (m^{-1}), por isso chamado de comprimento de onda característico, definido por

$$\Omega = \frac{ne^2}{mc^2\epsilon_0}. \quad (\text{A.17})$$

Como já visto anteriormente, o campo elétrico é o gradiente de um potencial escalar, ou seja, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Portanto

$$\vec{\nabla}\Phi_{acima} - \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} = \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_\parallel \vec{E}_\parallel,$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi_{acima} - \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \left(-\vec{\nabla}\Phi \right), \\ \vec{\nabla}\Phi_{acima} - \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= -\frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}_{\parallel}\Phi \right), \\ \Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} &= -\frac{\Omega c^2}{\omega^2} \left(\vec{\nabla}_{\parallel}\Phi \right), \\ \Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} &= -\frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial\Phi}{\partial z}.\end{aligned}\tag{A.18}$$

Porém, como se trata de duas placas, adiciona-se um fator 2 a Equação anterior. Logo,

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = -2\frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial\Phi}{\partial z}.\tag{A.19}$$

O campo \vec{E}_{\parallel} (Figura 15-b), paralelo a superfície, aplicando a Equação (A.13) no limite em que ϵ tende a zero fica

$$\vec{E}_{acima}^{\parallel} - \vec{E}_{abaixo}^{\parallel} = 0\tag{A.20}$$

Utilizando a definição do potencial escalar dado por

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}.\tag{A.21}$$

Na (Figura 15-c) observa-se que, a medida que o caminho tende a zero, a Equação (A.21) se torna

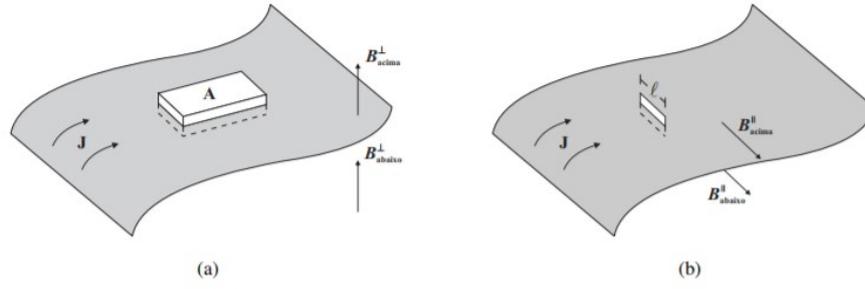
$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = 0.\tag{A.22}$$

As Equações (A.19) e (A.22) são as condições de polarização para o campo eletromagnético. As condições de contorno para o campo \vec{B} são obtidas analisando seu comportamento numa distribuição superficial de corrente \vec{J} , escolhendo uma superfície (Figura 16), sobre a qual é aplicada a lei de Ampère (A.11):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc},\tag{A.23}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0.\tag{A.24}$$

O campo \vec{B}_{\perp} (Figura 16-a), perpendicular a superfície, aplicando a Equação (A.24) é


 Figura 16 – Continuidade dos campos \vec{B}_\perp (a) e \vec{B}_\parallel (b) numa interface [20].

$$\vec{B}_{acima}^\perp - \vec{B}_{abaixo}^\perp = 0. \quad (\text{A.25})$$

Da equação (A.9) se obtém

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega B_z. \quad (\text{A.26})$$

Daí, escreve-se

$$B^\perp = \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial_\parallel} \vec{E}^\parallel. \quad (\text{A.27})$$

Substituindo a Equação (A.27) na Equação (A.25),

$$\vec{B}_{acima}^\perp - \vec{B}_{abaixo}^\perp = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial_\parallel} \vec{E}_{acima}^\parallel - \frac{\partial}{\partial_\parallel} \vec{E}_{abaixo}^\parallel = 0. \quad (\text{A.28})$$

Como já visto anteriormente, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Portanto

$$\frac{\partial}{\partial_\parallel} \vec{\nabla}\Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial_\parallel} \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial_\parallel} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial_\parallel} \Phi_{abaixo} = 0. \quad (\text{A.29})$$

O campo B_\parallel (Figura 16-b), paralelo a superfície, aplicando a Equação (A.23) é

$$\vec{B}_{acima}^\parallel - \vec{B}_{abaixo}^\parallel = \mu_0 \vec{J} \times \vec{z}. \quad (\text{A.30})$$

Substituindo as Equações (A.7) e (A.5) na Equação (A.30),

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= \mu_0(J_y\vec{x} - J_x\vec{y}), \\
 \vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= -i\omega ne\mu_0(\xi_y\vec{x} - \xi_x\vec{y}), \\
 \vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= -i\omega ne\mu_0\left(\frac{eE_y\vec{x}}{m\omega^2} - \frac{eE_x\vec{y}}{m\omega^2}\right), \\
 \vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= -i\frac{\omega ne^2\mu_0}{m\omega^2}(E_y\vec{x} - E_x\vec{y}), \\
 \vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= -\frac{i}{\omega}\frac{ne^2}{mc^2\epsilon_0}(E_y\vec{x} - E_x\vec{y}), \\
 \vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= -\frac{i}{\omega}\Omega(E_y\vec{x} - E_x\vec{y}), \\
 \\
 \vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= -\frac{i}{\omega}\Omega\vec{E}^{\parallel}. \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

Da equação (A.9), se obtém

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = iwB_x + iwB_y.$$

Daí escreve-se

$$\vec{B}^{\parallel} = \frac{i}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}^{\parallel}. \tag{A.32}$$

Agora, substituindo a Equação (A.32) na Equação (A.31), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{E}_{acima}^{\parallel} - \vec{E}_{abaixo}^{\parallel}\right) &= -\frac{i}{\omega}\Omega\vec{E}^{\parallel}, \\
 \frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_{acima}^{\parallel} - \frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_{abaixo}^{\parallel} &= -\Omega\vec{E}^{\parallel}. \tag{A.33}
 \end{aligned}$$

Como já visto anteriormente, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z}\vec{\nabla}\Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z}\vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= \Omega\vec{\nabla}\Phi, \\
 \\
 \frac{\partial}{\partial z}\Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z}\Phi_{abaixo} &= \Omega\Phi. \tag{A.34}
 \end{aligned}$$

Porém, como se trata de duas placas, adiciona-se um fator 2 a Equação anterior. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z}\Phi_{abaixo} = 2\Omega\Phi. \tag{A.35}$$

As Equações (A.29) e (A.35) são as condições de polarização para o campo eletromagnético. Reunindo as quatro equações de polarização para o campo eletromagnético, escreve-se

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (TM), \quad (A.36)$$

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = 0 \quad (TE), \quad (A.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{abaixo} = 0 \quad (TM), \quad (A.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{abaixo} = 2\Omega \Phi \quad (TE). \quad (A.39)$$

As duas polarizações são rotuladas da seguinte maneira: Se $E_z = 0$ as ondas são chamadas de TE (transversais elétricas); se $B_z = 0$ as ondas são chamadas de TM (transversais magnéticas). As condições de contorno da onda TE são semelhantes às de um potencial delta positivo, o qual não admite estados ligados, não havendo superfície de plasmons. Nas condições de contorno da onda TM, devido à existência do parâmetro negativo $\frac{2\Omega c^2}{\omega^2}$, que torna o potencial negativo, é permitido que haja estados ligados, o que leva a concluir que a superfície de plasmons só existe para a polarização TM [19]. As Equações (A.36)-(A.39) são as condições de contorno para o campo eletromagnético para uma folha plana de plasma.