



Universidade Federal  
do Espírito Santo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CAMPUS DE VITÓRIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FERNANDO RAMOS ORIQUE

**CÁLCULO DE DERIVADAS ESPACIAIS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO  
COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL NO CONTEXTO DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Vitória  
2022

FERNANDO RAMOS ORIQUE

CÁLCULO DE DERIVADAS ESPACIAIS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO  
COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL NO CONTEXTO DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Vitória  
2022

FERNANDO RAMOS ORIQUE

CÁLCULO DE DERIVADAS ESPACIAIS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO  
COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL NO CONTEXTO DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

---

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Dr. Eng. André Bulcão  
Centro de Pesquisas da PETROBRAS

---

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara  
Universidade Federal do Espírito Santo

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica

Vitória  
2022

Dedicado a todos aqueles que me apoiaram, incentivaram e participaram de alguma forma.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas portas abertas em minha vida.

Agradeço a minha esposa, Lisandra, por todo carinho, compreensão e estar sempre presente durante toda minha jornada até aqui.

Agradeço a minha família, em especial meus pais, Edigar e Rosangela, pela educação que me foi dada, e a minha irmã Sara pelo carinho de sempre.

Agradeço também ao professor Loeffler por toda a orientação, paciência e pela troca de experiências e conhecimentos durante todo processo.

Toda a nossa ciência, comparada com a realidade,  
é primitiva e infantil – e, no entanto, é a coisa mais  
preciosa que temos.

Albert Einstein

# Resumo

Inicialmente aplicadas no contexto do Método dos Elementos de Contorno como ferramenta auxiliar, interpolando o núcleo das integrais de domínio e permitindo a transformação destas em integrais de contorno, as funções de base radial ampliaram seu campo de aplicação e, atualmente, são muito utilizadas como técnica de solução de equações diferenciais parciais, gerando as formulações denominadas *meshless* do Método dos Elementos finitos. Recentemente, mostraram-se também como ferramenta numérica para o cálculo mais simples de derivadas espaciais. Naturalmente, nestes casos há uma perda de precisão relacionada à interpolação; mas, mesmo assim, sua utilização pode ser vantajosa em razão da complexidade de certas técnicas envolvendo a derivação analítica das variáveis primais e outros procedimentos mais clássicos especialmente no âmbito do Método dos Elementos de Contorno. Neste sentido, este trabalho avalia uma série de características peculiares ao procedimento de derivação com funções de base radial, como a influência das dimensões do problema nos resultados, o efeito do refinamento do contorno, o efeito do adensamento interno de pontos interpolantes e a variações na precisão em razão do tipo de função de base radial utilizadas. Para avaliar tais características, essa dissertação simula três problemas-teste bidimensionais que possuem solução analítica conhecida, realizando as comparações de desempenho necessárias e chegando a algumas conclusões importantes quanto a sua aplicabilidade.

**Palavras-chave:** Método dos elementos de contorno. Funções de base radial. Técnicas de interpolação.

# Abstract

Initially applied in the context of the Boundary Element Method as an auxiliary tool, interpolating the core of domain integrals and allowing their transformation into boundary integrals, the radial basis functions have expanded their field of application and are currently widely used as a technique. solution of partial differential equations, generating the so-called meshless formulations of the Finite Element Method. Recently, they have also been shown to be a numerical tool for the simpler calculation of spatial derivatives. Naturally, in these cases there is a loss of precision related to interpolation; but even so, its use can be advantageous due to the complexity of certain techniques involving the analytical derivation of primal variables and other more classical procedures, especially within the Boundary Element Method. In this sense, this work evaluates a series of characteristics peculiar to the derivation procedure with radial basis functions, such as the influence of the dimensions of the problem on the results, the effect of the contour refinement, the effect of the internal consolidation of interpolating points and the variations in the accuracy due to the type of radial basis function used. To evaluate such characteristics, this dissertation simulates three two-dimensional test problems that have a known analytical solution, performing the necessary performance comparisons and reaching some important conclusions regarding its applicability.

**Keywords:** Boundary elements method. Radial basis functions. Interpolation techniques.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de funcionamento de suporte compacto . . . . .	8
Figura 2 – Aproximação de uma função por um conjunto de funções lineares por partes . . . . .	9
Figura 3 – Gráfico de comparação de soluções . . . . .	14
Figura 4 – Ângulo interno do contorno . . . . .	19
Figura 5 – Vetores S e Q no contorno . . . . .	22
Figura 6 – Esquema típico de posicionamento dos pontos interpolantes . . . . .	25
Figura 7 – Croqui Representativo do Caso I . . . . .	26
Figura 8 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial cúbica . . . . .	27
Figura 9 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função radial cúbica . . . . .	28
Figura 10 – Derivada normal para malha 1x1 e função radial cúbica . . . . .	28
Figura 11 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial logarítmica . . . . .	29
Figura 12 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função radial logarítmica . . . . .	30
Figura 13 – Derivada normal para malha 1x1 e função radial logarítmica . . . . .	30
Figura 14 – Croqui Representativo do Caso II . . . . .	31
Figura 15 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial cúbica . . . . .	33
Figura 16 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função radial cúbica . . . . .	33
Figura 17 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função radial cúbica . . . . .	34
Figura 18 – Derivada normal para malha 1x1 e função radial cúbica . . . . .	34
Figura 19 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial cúbica nos pontos internos . . . . .	36
Figura 20 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função radial cúbica nos pontos internos . . . . .	36
Figura 21 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função logarítmica . . . . .	37
Figura 22 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função logarítmica . . . . .	38
Figura 23 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função logarítmica . . . . .	38
Figura 24 – Derivada normal para malha 1x1 e função logarítmica . . . . .	39
Figura 25 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial logarítmica nos pontos internos . . . . .	40
Figura 26 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função radial logarítmica nos pontos internos . . . . .	40
Figura 27 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função radial cúbica . . . . .	41
Figura 28 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função radial cúbica . . . . .	42
Figura 29 – Derivada tangencial para malha 5x5 e função radial cúbica . . . . .	42
Figura 30 – Derivada normal para malha 5x5 e função radial cúbica . . . . .	43

Figura 31 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função radial cúbica nos pontos internos . . . . .	43
Figura 32 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função radial cúbica nos pontos internos . . . . .	44
Figura 33 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função logarítmica . . . . .	45
Figura 34 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função logarítmica . . . . .	45
Figura 35 – Derivada tangencial para malha 5x5 e função logarítmica . . . . .	46
Figura 36 – Derivada normal para malha 5x5 e função logarítmica . . . . .	46
Figura 37 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função radial logarítmica nos pontos internos . . . . .	47
Figura 38 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função radial logarítmica nos pontos internos . . . . .	47
Figura 39 – Derivada direcional X1 para malha 1x0,5 e função radial cúbica . . . . .	48
Figura 40 – Derivada direcional X2 para malha 1x0,5 e função radial cúbica . . . . .	49
Figura 41 – Derivada tangencial para malha 1x0,5 e função radial cúbica . . . . .	49
Figura 42 – Derivada normal para malha 1x0,5 e função radial cúbica . . . . .	50
Figura 43 – Derivada direcional X1 para malha 1x0,5 e função radial cúbica nos pontos internos . . . . .	51
Figura 44 – Derivada direcional X2 para malha 1x0,5 e função radial cúbica nos pontos internos . . . . .	51
Figura 45 – Croqui Representativo do Caso III . . . . .	52
Figura 46 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=1$ . . . . .	54
Figura 47 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=1$ . . . . .	54
Figura 48 – Derivada tangencial para malha 1x1, FBR cúbica e $m=1$ . . . . .	55
Figura 49 – Derivada normal para malha 1x1, FBR cúbica e $m=1$ . . . . .	55
Figura 50 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=1$ nos pontos internos . . . . .	56
Figura 51 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=1$ nos pontos internos . . . . .	57
Figura 52 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=\pi$ . . . . .	58
Figura 53 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=\pi$ . . . . .	58
Figura 54 – Derivada tangencial para malha 1x1, FBR cúbica e $m=\pi$ . . . . .	59
Figura 55 – Derivada normal para malha 1x1, FBR cúbica e $m=\pi$ . . . . .	59
Figura 56 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=\pi$ nos pontos internos . . . . .	60
Figura 57 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=\pi$ nos pontos internos . . . . .	61
Figura 58 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=3\pi$ . . . . .	62
Figura 59 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=3\pi$ . . . . .	62

Figura 60 – Derivada tangencial para malha 1x1, FBR cúbica e $m=3\pi$ . . . . .	63
Figura 61 – Derivada normal para malha 1x1, FBR cúbica e $m=3\pi$ . . . . .	63
Figura 62 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=3\pi$ nos pontos internos . . . . .	64
Figura 63 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e $m=3\pi$ nos pontos internos . . . . .	65

# Lista de abreviaturas e siglas

MEC: Método dos Elementos de Contorno

MEF: Método dos Elementos Finitos

MDF: Método das Diferenças Finitas

MVF: Método dos Volumes Finitos

FBR: Função de Base Radial

FBRSC: Funções de Base Radial de Suporte Compacto

MECDR: Método de Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade

# Lista de símbolos

$\xi$	Ponto fonte
$X$	Ponto campo
$r$	Distância Euclidiana entre $X$ e $\xi$
$r_x$	Distância horizontal entre $X$ e $\xi$ para problemas bidimensionais
$r_y$	Distância vertical entre $X$ e $\xi$ para problemas bidimensionais
$F(X : \xi)$	Função de base radial
$f$	Função analítica qualquer
$S(x)$	Função aproximada para a função $f$
$S(x)_{,i}$	Derivada de $S$ em relação a $K$ -ésima dimensão
$\alpha_i$	Coefficientes de influência
$N$	Número máximo de pontos conhecidos ou pontos nodais
$A$	Matriz de interpolação
$e$	Constante de Euler
$u(x)$	Condição essencial ou de Dirichlet
$q(x)$	Condição de Neumann
$u^*(\xi; X)$	Solução fundamental ou função de Green
$q^*(\xi; X)$	Derivada espacial de $u^*(\xi; X)$
$\bar{u}$	Potenciais no ponto base
$\mathbf{F}$	Matriz construída pela distância euclidiana entre os pontos bases e os pontos campo
$u_{,x_1}$	Derivada direcional na direção $x_1$
$u_{,x_2}$	Derivada direcional na direção $x_2$
$u_{,n}$	Derivada normal
$u_{,s}$	Derivada tangencial

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Comentários Preliminares	1
1.2	Retrospectiva Bibliográfica	2
1.3	Objetivo da Dissertação	3
<b>2</b>	<b>FUNÇÕES DE BASE RADIAL</b>	<b>5</b>
2.1	Interpolação Com Funções De Base Radial	5
2.2	Definição E Propriedades Das Funções De Bases Radiais	6
2.3	Funções de Base Radial no Método Sem Malha	8
<b>3</b>	<b>FUNÇÕES DE BASE RADIAL NO ÂMBITO DAS DERIVADAS</b>	<b>11</b>
3.1	Exemplo Matemático Unidimensional	12
3.1.1	Exemplo Físico Unidimensional	13
<b>4</b>	<b>CÁLCULO DE DERIVADAS POR INTERPOLAÇÃO NO MEC</b>	<b>16</b>
4.1	Motivação	16
4.2	Modelagem Matemática	21
<b>5</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>24</b>
5.1	Análise de Resultados e Discussões	24
5.1.1	Caso I - Problema Bidimensional com comportamento unidimensional	25
5.1.1.1	Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Cúbica	27
5.1.1.2	Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Logarítmica	29
5.1.2	Caso II - Problema Bidimensional com Natureza Exponencial	31
5.1.2.1	Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Cúbica	32
5.1.2.2	Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Logarítmica	37
5.1.2.3	Malha Quadrada 5x5 e Função de Base Radial cúbica	41
5.1.2.4	Malha Quadrada 5x5 e Função de Base Radial Logarítmica	44
5.1.2.5	Malha Esbelta 1x0,5 e Função de Base Radial Cúbica	48
5.1.3	Caso III - Problema Bidimensional com Natureza Trigonométrica	52
5.1.3.1	Malha Quadrada 1x1 com FBR cúbica e fator modificador $m=1$	53
5.1.3.2	Malha Quadrada 1x1 com FBR cúbica e fator modificador $m=\pi$	57
5.1.3.3	Malha Quadrada 1x1 com FBR cúbica e fator modificador $m=3\pi$	61
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>68</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Comentários Preliminares

Sabe-se que soluções analíticas, quando disponíveis, em boa parte são extensas e trabalhosas para serem obtidas. sequer existem para a maioria dos complexos problemas gerados pela engenharia moderna, em todas as suas modalidades. Essa limitação implica numa enorme vantagem para os métodos aproximados, que trazem agilidade numérica para a solução, com precisão conveniente para cada caso. Obviamente ainda existem esforços no desenvolvimento de soluções analíticas, a grande parte na forma de séries infinitas, visando principalmente o estabelecimento de soluções de referência, mas estas são limitadas a contornos simples. Tais restrições justificam cada vez mais o emprego de métodos aproximados, que utilizam processamento computacional.

Progressivamente as aplicações de métodos numéricos crescem em engenharia, buscando soluções aproximadas com precisão satisfatória na representação da solução física do problema; em sua grande maioria, visam aproximar soluções de problemas bidimensionais e tridimensionais.

Sabe-se que problemas físicos são representados principalmente por equações diferenciais, ordinárias ou parciais. Existem casos governados por equações algébricas; entretanto são bem mais simples e menos numerosos quanto aos demais casos. Portanto, é importante destacar os processos de manipulação e os conjuntos de propriedades e conceitos matemáticos que fazem a conversão de forma aproximada, de equações diferenciais em equações algébricas através do processo de discretização [1]. Entende-se como processo de discretização a transformação de modelos matemáticos diferenciais em modelos matemáticos algébricos e, nesse contexto, se impõem métodos discretos como o método dos elementos de contorno (MEC), método dos elementos finitos (MEF), método das diferenças finitas (MDF) e o método dos volumes finitos (MVF) [2][3]. Foge do escopo deste trabalho descrever os detalhes desse processo de conversão, mas a base matemática está fundamentada em princípios das equações integrais, destacando-se o Método dos Resíduos ponderados [3].

Porém, no contexto dos métodos citados, existe um grupo de problemas ou até mesmo etapas dentro da solução destes, que requerem aproximações relacionadas à interpolação de dados, a extrapolação e à obtenção de derivadas. Para tal, as primeiras e mais clássicas metodologias envolvem interpolação polinomial. Entretanto, a utilização de interpolações baseadas em funções radiais possuem grande atrativo, devido à generalidade, à facilidade de implementação computacional, à utilização de números reais positivos, à

simetria matricial, entre outras propriedades matemáticas importantes.

Dentro das várias possibilidades de aplicação das funções de bases radiais, destaca-se para esta dissertação em particular, sua utilização no método dos elementos de contorno. Para a discretização deste método, necessita-se a realização de manipulações matemáticas considerando formulações diferenciais com intuito de eliminar integrais de domínio e transformá-las em integrais de contorno. Neste sentido, ressaltam-se os casos em que a equação de governo do problema apresenta um termo não homogêneo, como a equação de Poisson. Com o uso de primitivas de funções de base radial e um adequado manejo algébrico dos termos, é possível transformar integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes. Formulações como a Dupla Reciprocidade e a Técnica de Interpolação Direta fazem exatamente esta transformação [2].

Certas técnicas numéricas de interpolação polinomial são bastante eficientes em problemas unidimensionais, mas não apresentam a generalidade necessária, o que os impedem de ser aplicados satisfatoriamente em casos bi ou tridimensionais [4]. Não é o caso das funções de base radial, que podem ser aplicadas em duas ou três dimensões e possuem outros grandes atrativos: versatilidade matemática, extrema facilidade de implementação além de importantes características matemáticas, como a utilização de apenas números reais positivos. Além disso, conforme exposto, as funções de base radial (FBR) podem ser utilizadas em conjunto com os métodos anteriormente mencionados – o MEC e o MEF em sua formulação *meshless* [5].

## 1.2 Retrospectiva Bibliográfica

Não é muito simples descobrir a autoria da primeira proposição do uso das funções radiais como ferramenta de interpolação, pois as publicações mais acessíveis e abrangentes na área não são claras quanto a esta questão. Buhmann[6] é uma das maiores autoridades no assunto e em seu livro é mundialmente reconhecido como tal. Neste, Buhmann aponta como trabalhos precursores, datados desde 1966 referentes à interpolação, os trabalhos de Cheney[7], Davis[8], Duchon[9] e Powell et al.[10].

Autores muito citados no estudo de funções radiais como Wendland[11] e Fashauer[5] já abordam tais funções como ferramenta para discretizar e resolver numericamente equações diferenciais parciais. Neste sentido, a literatura é unânime em reconhecer o trabalho de E. J. Kansa em 1990 por desenvolver o primeiro método numérico baseado nas funções de base radial. É chamado de método de Kansa[12] e foi usado para resolver a equação elíptica de Poisson e a equação de difusão-advectação linear.

Contudo, as funções de base radial foram pioneiramente aplicadas na engenharia com o trabalho de Nardini e Brebbia[13] para resolver integrais de domínio relacionadas à força de inércia em problemas elastodinâmicos. O método utilizado recebeu a denominação



de Dupla Reciprocidade (MECDR) e foi desenvolvido para diversos problemas de campo escalar por Loeffler[14]. Este autor definiu a importância de pontos inteiros interpolantes, de recursos auxiliares como as subregiões e o adequado tratamento de forças de corpo, que ainda não tinha sido estudado na literatura. Posteriormente, em 1992, foi lançado o livro de Partridge e Brebbia[15], dando complementação a pesquisa iniciada em 1990 [16] fazendo uma síntese sobre a Dupla Reciprocidade e estendendo sua aplicação a problemas difusivo-advectivos, em que se destaca o uso das funções radiais para descrever derivadas espaciais. Este tipo de emprego havia sido apresentado preliminarmente em 1990 por Partridge e Brebbia[17]. O livro citado também faz a apresentação de diversas classes de funções radiais, exploradas inicialmente na tese de Loeffler[14], mas que não haviam sido ainda amplamente testadas. Dois artigos de Partridge[18][19] exploram bastante o comportamento das diversas classes de funções radiais no Método dos Elementos de Contorno.

Recentemente, foi proposta uma nova abordagem para transformar integrais de domínio em integrais de contorno usando funções de base radial. O objetivo foi melhorar a precisão e o condicionamento matricial do modelo de aproximação composto pelas funções de base radial. Esta nova abordagem, chamada técnica de interpolação direta (MECID) [20] é baseada em uma aproximação de todo o núcleo da integral de domínio, ao contrário da Dupla Reciprocidade, que aproxima apenas parte do núcleo. Esta técnica foi aplicada a modelos de campo escalar bidimensionais e tridimensionais relevantes, como os problemas de Poisson [20], Helmholtz [21] e outros tipos de problemas aplicados a vibração livre e domínios homogêneos como [22] e [23] respectivamente. Comparativamente à abordagem com Dupla Reciprocidade, apresentou resultados mais precisos em todos os casos e elimina a necessidade de duas matrizes auxiliares. Sua similaridade com um simples procedimento de interpolação resulta em maior robustez numérica. No entanto, o MECID é mais sensível à densidade de pontos de interpolação internos conforme os trabalhos apresentados por Barbosa e Loeffler[23].

Dada as características do método, mas também da linha de pesquisa e dos pesquisadores, na Universidade Federal do Espírito Santo, há uma série de dissertações de mestrado e teses de doutorado sobre o tema, onde se destacam os trabalhos de Bertolani[4], Pinheiro[24], Souza[25], Barcelos[26], dentre outros.

### 1.3 Objetivo da Dissertação

O objetivo deste trabalho é avaliar uma série de características do procedimento de derivação espacial das funções de base radial, como a influência das dimensões do problema nos resultados e a importância da densidade de pontos interpolantes no contorno e no interior na precisão dos resultados. Neste trabalho, inicialmente algumas diferentes funções

radiais são testadas, porém devido a referências apresentadas nos trabalhos desenvolvidos na Universidade Federal do Espírito Santo, uma ênfase é dada para a função radial cúbica, devido aos seus resultados superiores.

## 2 FUNÇÕES DE BASE RADIAL

### 2.1 Interpolação Com Funções De Base Radial

Na engenharia e na ciência aplicada usualmente deseja-se conhecer soluções a partir de dados amostrais definidos pela observação ou coleta experimental em regiões circunscritas, a fim de definir, com precisão satisfatória, o comportamento em toda a extensão de um domínio.

Em uma aplicação prática, em grande maioria dos casos, não se tem minimamente a condição da reconstrução da solução exata ou analítica. Uma análise de solo a quilômetros de distância de profundidade, por exemplo, nos fornece apenas resultados de testes aplicados pontualmente.

O processo de encontrar valores intermediários nesse domínio, a partir dos dados amostrais, chama-se interpolação. Nesse caso, a função aproximada construída a partir dos dados amostrais deve obrigatoriamente ter que reproduzir exatamente a solução obtida nos pontos que foram utilizados para a sua construção, denominados comumente de pontos base.

A título de exemplo, conforme Chapra e Canale[27], o método do polinômio de Newton é um dos mais populares métodos de interpolação, tornando-o um grande exemplo de método aproximado, entretanto, conforme os mesmos autores, certos métodos numéricos convergem mais rápidos do que outros, dessa forma, exige-se informações iniciais refinadas ou programações mais complexas do que métodos com convergência mais lenta. Tem-se então uma busca constante de metodologias mais precisas, ágeis e com menor gasto computacional.

São cada vez mais comuns os problemas nos quais se demanda uma aproximação válida, a partir de dados esparsos, mas que precisa ser implementada envolvendo duas ou mais variáveis, em domínios bi ou tridimensionais. Nestes casos, existem fortes dificuldades operacionais e imperiosas restrições matemáticas. A generalização de procedimentos unidimensionais pode, então, não ser viável. O procedimento numérico baseado no conceito de diferença finita tem sido o recurso mais comumente empregado nestes casos, com significativa vantagem sobre as aproximações polinomiais globais; o tratamento de domínios irregulares e certas condições no contorno podem tornar o procedimento igualmente proibitivo nestes casos.

A principal alternativa nestes casos, e que é tratada neste estudo, é a utilização de funções de base radial para interpolação, que reproduz funções desconhecidas a partir

de dados conhecidos. Para o desenvolvimento da metodologia para interpolação, deve-se possuir os dados conhecidos em  $N$  pontos, encontrados em locais  $\xi$  que pertencem ao domínio. De forma resumida nós temos  $F(\xi) \in R$ .

É possível usar a mesma ideia de funções radiais para realizar regressões ou ajustes. Conforme Epperson[28], um importante campo de estudo nos problemas de aproximação é o ajuste de curvas dado os dados experimentais. Parte-se do princípio que os dados obtidos experimentalmente possuem erros e, portanto, devem ser ajustados.

O ajuste de curvas é uma família de técnicas matemáticas que buscam encontrar padrões de comportamento num conjunto de dados. O objetivo é estudar o fenômeno físico na forma de uma tendência [29]. Onde, de acordo com Seiffert, Chiquetti e Avila[29] dentre as categorias de ajustes de curvas e regressões, existe a categoria por interpolação, quando se possui dados esparsos com boa precisão e confiabilidade, o que corrobora com a utilização de funções de bases radiais também para essa aplicação, porém, este texto trata apenas do procedimento de interpolação.

## 2.2 Definição E Propriedades Das Funções De Bases Radiais

Segundo Fasshauer[5] uma função  $F : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$  é dita radial desde que exista uma função, de único argumento,  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$F(X : \xi) = F(r) \text{ onde, } r = \|X\| \quad (2.1)$$

Deste modo, de acordo com exposto anteriormente o valor de  $F$  é o mesmo para qualquer ponto que esteja a uma mesma distância fixa até a origem, de modo que  $F$  é radialmente simétrica em relação ao centro.

Um extenso conjunto de funções de bases radiais [30] tem sido utilizados, dentre eles alguns exemplos mais usuais:

Tabela 1 – Exemplo de Funções de Bases Radiais

<b>FBR's</b>	<b>F(X)</b>
Spline de placas finas	$r^2 \ln(r)$
Multiquadrática FBR	$(r^2 + c^2)^k$
Gaussiana	$e^{-(r^2/c^2)}$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Desta forma, procura-se uma função aproximada para a função  $F$ , doravante  $S$ , que pode significar vários fenômenos, como a medida de temperatura, de potencial magnético, dentre vários outros. O que ela representa neste momento não é objeto de escopo.

Considera-se como definição da aproximação por funções de base radial à sequência:

$$S(X) \approx \sum_{\xi=1}^N \alpha^{\xi} F^{\xi}(r) \quad (2.2)$$

Portanto, usando a notação indicial, onde os índices mudos se somam, tem-se:

$$S(X) \approx \alpha_i F_i(\xi; X) \quad (2.3)$$

Sendo a aproximação por funções radiais uma sequência, cada uma das funções radiais com mesmo ponto base, mas pontos campo diferentes são linearmente independentes. Formam uma base no espaço funcional num espaço finito.

Sendo N o número máximo de pontos interpolantes,  $X \in R^n$ , r como a distância Euclidiana entre X e  $\xi$ ,  $F^{\xi}(r)$  são as funções interpolantes de base radial e  $\alpha_i$  são coeficientes de influência, desconhecidos, que são determinados impondo-se:

$$S(X_i) = f(x_i), i = 1, 2, 3...N \quad (2.4)$$

Depreende-se que a combinação das equações, resulta em um sistema de equações lineares que seria adequadamente apresentado em sua forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\xi_1) & \cdots & F_N(\xi_1; x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1(\xi_N; x_1) & \cdots & F_N(\xi_N; x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Pode-se expressar de forma sintetizada a equação 2.5 como:

$$\mathbf{A}\Psi = \mathbf{F} \quad (2.6)$$

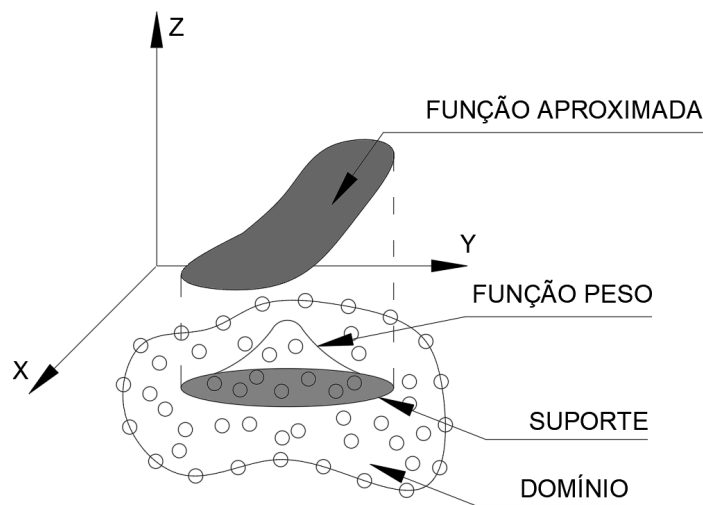
Onde A é a matriz simétrica A(N x N) chamada de matriz de interpolação,  $\Psi$  e F são matrizes colunas  $\Psi(N \times 1)$  e  $F(N \times 1)$  respectivamente.

Considera-se que a solução existirá e será única se e somente se a matriz de interpolação for não-singular, ou seja, se seu determinante for diferente de zero. Sabe-se que para uma matriz ter essa característica, a função  $F_i(\xi; X)$  deverá ser definida como positiva, o que contribui para a utilização de funções de bases radiais, pois são várias as funções definidas como positivas.

## 2.3 Funções de Base Radial no Método Sem Malha

Com o desejo crescente de cada vez mais obter uma solução com menor erro e com um menor custo computacional, métodos numéricos clássicos foram desenvolvidos e aprimorados, e continuam em constante evolução, especialmente o método dos elementos finitos (MEF). Sobretudo em problemas tridimensionais, este método sofre problemas de elevado custo computacional se técnicas de reestruturação de malha (métodos adaptativos) precisam ser empregados, porque os elementos finitos são conectados entre si por meio de compatibilidade entre nós. Qualquer alteração no sentido de adensar a malha ou redefini-la implica em significativo esforço computacional. Neste sentido, a proposição de técnicas nas quais o conceito de conectividade é abolido passou a ocupar enorme esforço de pesquisa. Para eliminar interconectividade entre numerosos pontos de discretização, as funções de base radiais de suporte compacto (FBRSC) foram necessariamente empregadas. Assim, delimitam-se domínios de influência, onde apenas um conjunto reduzido de nós interage entre si, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de funcionamento de suporte compacto



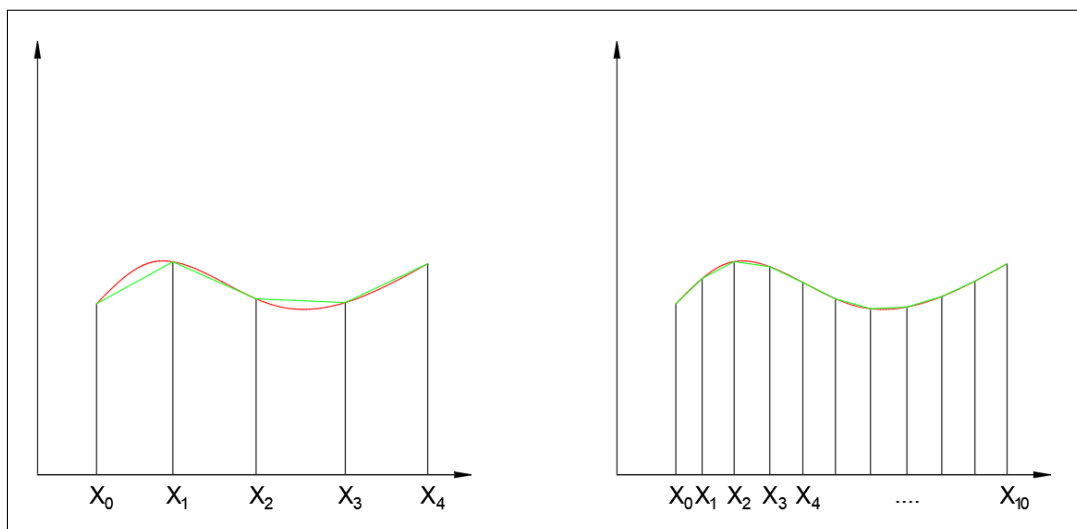
Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Buhmann[6] menciona que as funções de base radial de suporte compacto podem ser computacionalmente eficientes para o método dos elementos finitos na solução das equações diferenciais parciais e também ser utilizado juntamente com o método sem malha. Buhmann[6] ressalta também, que uma aplicação típica de elementos finitos utiliza Galerkin para resolver numericamente equações diferenciais parciais elípticas lineares ou mesmo não lineares, onde a equação diferencial dada é reformulada em uma forma fraca que contém produtos internos das funções de teste. Neste caso, a quadratura das integrais que formam os produtos internos é o gargalo computacional, porque as integrais devem ser calculadas com precisão, e existem muitas delas em uma matriz de rigidez de alta

dimensão. Por outro lado, as FBRSC podem resultar em uma matriz de interpolação em faixas esparsas e efetivamente evita a matriz densa e mal condicionada na interpolação clássica [30], fornecendo celeridade computacional ao método.

Métodos como MEF, MEC, MVF são técnicas ditas discretas por possuírem, em seus respectivos processos, a transformação de um domínio contínuo (a função original está definida num domínio que é uma região não-enumerável de pontos) para um conjunto discreto, ou seja, o domínio passa a ter uma região finita de intervalos [31]. A Figura 2 apresenta uma função sendo discretizada em seu domínio por uma equação linear por partes.

Figura 2 – Aproximação de uma função por um conjunto de funções lineares por partes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Nota-se evidentemente que quanto menor o comprimento da norma da partição, mais a função discretizada (em verde) se aproximará da função original (em vermelho).

No âmbito das formulações *meshless*, as funções de bases radiais (FBR) aparecem para evitar esse esforço de geração de malha e demais esforços geométricos, resultando em um método sem elementos conectados que utiliza da distância euclidiana entre os pontos analisados. O fato é que a geração de malhas divide o domínio em pequenas partes que se conectam, onde a solução que se deseja conhecer é aproximada utilizando esses elementos através de interpolações, conhecidas como funções de forma. Conforme aumenta a complexidade geométrica do domínio analisado, as funções de forma se tornam menos precisas resultando na necessidade de ajuste da malha nessas regiões, que encontram sérios problemas devido a premissa de manter a conectividade de todos os elementos da malha.

A aplicação das FBR evita problemas de malha encontrados em problemas tridimensionais envolvendo contornos irregulares, justamente por não depender da dimensionalidade e complexidade geométrica. Os nós podem ser distribuídos arbitrariamente e cada região que se deseja conhecer deve se sobrepor sobre as demais, discretizando um domínio de

interesse através de um conjunto de nós, onde não necessariamente exista uma malha determinada.



# 3 FUNÇÕES DE BASE RADIAL NO ÂMBITO DAS DERIVADAS

A relevância desse estudo se aplica, por exemplo, nas formulações meshless baseadas no Método dos Elementos Finitos, que utilizam da formulação forte de um problema e o transformam para sua forma fraca e que comumente necessitam da derivada da função analítica ou a derivada dupla da mesma e mesmo outras formulações meshless que utilizam a própria forma forte do problema.

Contudo, este estudo se volta principalmente ao Método dos Elementos de Contorno, que em certos problemas de campo escalar, como os problemas difusivos-advectivos e problemas envolvendo meios suavemente heterogêneos, torna-se estratégico aproximar as derivadas da variável básica do problema, utilizando aproximações através de funções de base radial.

Inicialmente, considerando os problemas unidimensionais, por estratégia, as derivadas das funções podem ser facilmente obtidas a partir da definição da aproximação por funções radiais, repetida aqui por conveniência:

$$S(X) \approx \alpha_i F_i(\xi; X) \quad (3.1)$$

Sabendo que  $\alpha_i$  é constante para um dado ponto X. A derivada de S em relação a k-ésima dimensão é dada por:

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x} = \frac{\alpha_i \partial F_i(\xi; X)}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$S(x)_{,x} = \alpha_i F_i(\xi; X)_{,x} \quad (3.3)$$

Sendo assim a derivada dupla pode ser expressa por,

$$\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} = \frac{\alpha_i \partial^2 F_i(\xi; X)}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

$$S(x)_{,,x} = \alpha_i F_i(\xi; X)_{,,x} \quad (3.5)$$

A mesma analogia pode ser utilizada para a coordenada Y, sendo assim:

$$\frac{\partial S(x)}{\partial y} = \frac{\alpha_i \partial F_i(\xi; X)}{\partial y} \quad (3.6)$$

$$S(x)_{,y} = \alpha_i F_i(\xi; y)_{,y} \quad (3.7)$$

É possível, por recorrência, estabelecer expressões para derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 S(x)}{\partial y^2} = \frac{\alpha_i \partial^2 F_i(\xi; X)}{\partial y^2} \quad (3.8)$$

$$S(x)_{,,y} = \alpha_i F_i(\xi; X)_{,,y} \quad (3.9)$$

Para uma utilização onde se necessita de uma derivada dupla, é preciso optar por um tipo de função de base radial em que sua derivada segunda não seja uma constante. Matematicamente isto impossibilitaria de pronto a utilização do método, pois resultaria em uma matriz com determinante nulo, impedindo a solução do sistema resultante.

### 3.1 Exemplo Matemático Unidimensional

Para exemplificar, toma-se a seguinte FBR Gaussiana para a análise:

$$F(r) = e^{-r^2} \quad (3.10)$$

Esta função possui derivadas de alta ordem todas diferentes de zero. Pode, contudo, se anular em alguns pontos, onde  $r$  é nulo, mas isto é natural nas aplicações da FBR. Realizam-se as operações matemáticas expostas anteriormente para encontrar as derivadas da Função de Base Radial estudada, considerando a FBR unidimensional. Sendo assim:

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x} = -2e^{-r^2} r \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 F_i(x)}{\partial x^2} = e^{-r^2} (4r^2 - 2) \quad (3.12)$$

Que pode ser reescrita para um caso bidimensional, como:

$$F_i(r_x, r_y) = e^{-(\sqrt{r_x^2 + r_y^2})^2} \quad (3.13)$$

Sabendo que:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (3.14)$$

Cabe ressaltar que a função Gaussiana é muito citada na literatura, mas não é a mais empregada com o Método dos Elementos de Contorno. Foi aqui apresentada

apenas para exemplificar o calculo de derivadas. As simulações computacionais doravante apresentadas utilizarão outros tipos de funções, que tem melhor desempenho no contexto das aplicações objetivadas com o MEC.

### 3.1.1 Exemplo Físico Unidimensional

Considera-se a função  $y = -\sin(x) + \cos(x)$  e para tal possuímos os seguintes pontos conhecidos.

- $y(0) = 1$
- $y(1) = -0,30$
- $y(2) = -1,33$

Utilizando as funções de bases radiais, tem-se:

$$S(x) = \alpha_i F_i(\xi; X) \quad (3.15)$$

$$S(0) = \alpha_1 F_1(0; 0) + \alpha_2 F_2(1; 0) + \alpha_3 F_3(2; 0) \quad (3.16)$$

$$S(1) = \alpha_1 F_1(0; 1) + \alpha_2 F_2(1; 1) + \alpha_3 F_3(2; 1) \quad (3.17)$$

$$S(2) = \alpha_1 F_1(0; 2) + \alpha_2 F_2(1; 2) + \alpha_3 F_3(2; 2) \quad (3.18)$$

Para os pontos conhecidos, pode-se dizer que  $S(X) = F(\xi)$ , logo:

$$1 = \alpha_1 F_1(0; 0) + \alpha_2 F_2(1; 0) + \alpha_3 F_3(2; 0) \quad (3.19)$$

$$-0,30 = \alpha_1 F_1(0; 1) + \alpha_2 F_2(1; 1) + \alpha_3 F_3(2; 1) \quad (3.20)$$

$$-1,33 = \alpha_1 F_1(0; 2) + \alpha_2 F_2(1; 2) + \alpha_3 F_3(2; 2) \quad (3.21)$$

Inserindo de forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_1(0; 0) & F_2(1; 0) & F_3(2; 0) \\ F_1(0; 1) & F_2(1; 1) & F_3(2; 1) \\ F_1(0; 2) & F_2(1; 2) & F_3(2; 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,30 \\ -1,33 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Para exemplo, será considerada a FBR Gaussiana, sendo:

$$F(r) = e^{-r^2} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,37 & 0,02 \\ 0,37 & 1 & 0,37 \\ 0,02 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,30 \\ -1,33 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Logo:

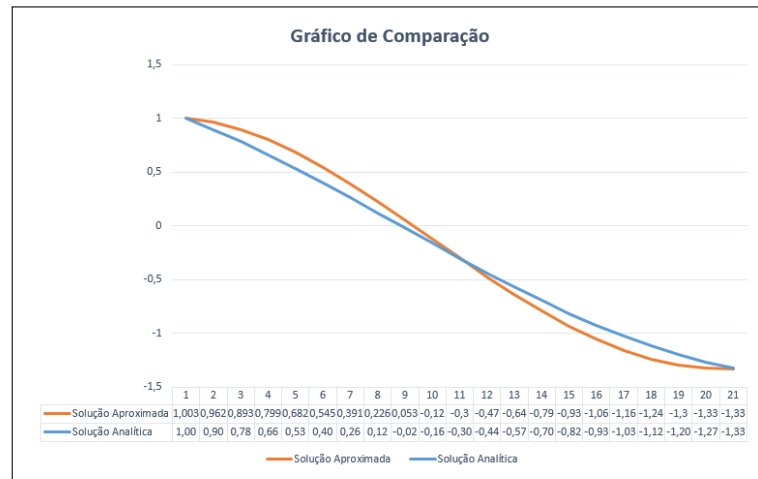
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,116 \\ -0,246 \\ -1,261 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Portanto,

$$S(\xi) = 1,116F_1(0; \xi) - 0,246F_2(1; \xi) - 1,261F_3(2; \xi) \quad (3.26)$$

A Figura 3 apresenta a comparação de soluções entre a função analítica e a função encontrada através do método aproximado baseado em FBR dentro do intervalo de 0 e 2.

Figura 3 – Gráfico de comparação de soluções



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2021

Ressalta-se que conforme se aumenta o número de dados conhecidos, melhora-se o nível de precisão da função. Além disso, nota-se que nos pontos base, onde os valores são prescritos, os resultados são reproduzidos naturalmente, conforme já se espera.

# 4 CÁLCULO DE DERIVADAS POR INTERPOLAÇÃO NO MEC

## 4.1 Motivação

O método dos elementos de contorno é um método discreto baseado na teoria das equações integrais, voltado para a solução de equações diferenciais parciais. Tem emergido como uma poderosa alternativa ao método dos elementos finitos principalmente em casos que é necessário uma maior precisão dado, por exemplo, problemas de concentração de tensão ou onde o domínio se estende ao infinito [32]. É um método caracterizado por obter as equações integrais apenas com as informações do contorno de um determinado problema. Define-se equação integral como uma equação que contém uma função operada por uma integral. Portanto, tem-se que, diferentemente dos demais métodos discretos, o MEC difere-se principalmente por discretizar apenas a superfície do domínio e não seu volume. Conforme Brebbia, Telles e Wrobel[3], o método dos elementos de contorno possui as seguintes vantagens:

1. Menos tempo de preparação de dados - Este é o resultado direto da modelagem somente da superfície;
2. Alta resolução das tensões - as tensões são precisas porque nenhuma outra aproximação é imposta na solução em pontos interiores, isto é, a solução é exata e totalmente contínua dentro do domínio;
3. Menos tempo de computação e armazenamento - Para o mesmo nível de precisão, o método MEC utiliza um menor número de nós e elementos (mas uma matriz totalmente preenchida), ou seja, para alcançar uma precisão comparável em valores de tensão, as malhas MEF precisam de mais divisões que as malhas equivalentes MEC;
4. Menos informações indesejadas - Na maioria dos problemas de engenharia, a situação "pior" (como fratura, concentração de tensão, choques térmicos, dentre outros) geralmente ocorre na superfície. Assim, modelar um corpo tridimensional inteiro com elementos finitos e calcular a tensão (ou outros estados) em cada ponto nodal é muito ineficiente porque somente alguns destes valores serão incorporados na análise de projeto.;

O MEC possui um recurso específico de grande precisão voltado ao cálculo de derivadas no interior, na forma de um pós-processamento computacional. A partir da

equação integral na forma inversa, considerando pontos fonte internos, que no caso de problemas de potencial escalar estacionários é dada por:

$$u(\xi) = \int q(x)u^*(\xi; X)d\Gamma - \int u(x)q^*(\xi; X)d\Gamma \quad (4.1)$$

Onde:

- $u(x)$  é a condição essencial, também chamada de Dirichlet, que envolve a prescrição da variável básica ou potencial no contorno;
- $q(x)$  é a condição de Neumann, que prescreve a derivada primeira da condição de Dirichlet com relação à normal "x", externa ao contorno;
- $u^*(\xi; X)$  é a solução fundamental ou função de Green associada ao problema. No caso dos problemas estacionários governados pela equação de Laplace [3], essa solução fundamental corresponde a uma solução de um problema correlato com domínio infinito, em que uma fonte concentrada atua num ponto especial denominado ponto fonte.
- $q^*(\xi; X)$  é a derivada espacial de  $u^*(\xi; X)$  na direção normal "x", externa ao contorno;

A derivação da equação 4.1 com as coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  fornece:

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} = \int q(x) \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_1(\xi)} d\Gamma - \int u(x) \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_1(\xi)} d\Gamma \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} = \int q(x) \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_2(\xi)} d\Gamma - \int u(x) \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_2(\xi)} d\Gamma \quad (4.3)$$

Para um domínio isotrópico bidimensional, a solução fundamental que satisfaz a equação de Laplace em problemas de potencial, é:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; X) \quad (4.4)$$

Logo, para coordenadas  $x_1$ , tem-se:

$$\frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_1} = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial x_1} \quad (4.5)$$

E também:

$$\frac{q^*(\xi; X)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u^*(\xi; X)}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2\pi r(\xi; X)^2} \frac{\partial^2 r(\xi; X)}{\partial x_1^2} \quad (4.6)$$

Por recorrência, para a coordenada  $x_2$ , concebe-se:

$$\frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial x_2} \quad (4.7)$$

$$\frac{q^*(\xi; X)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u^*(\xi; X)}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2\pi r(\xi; X)^2} \frac{\partial^2 r(\xi; X)}{\partial x_2^2} \quad (4.8)$$

Nas equações anteriores,  $r$  representa a distância euclidiana do ponto fonte  $\xi$  até o ponto  $X$ , onde a ação do ponto  $\xi$  causa efeito.

Na prática, os valores do potencial  $u(x)$  e das derivadas normais  $q(x)$ , são calculados em pontos discretos do contorno - os pontos nodais - seguindo os procedimentos típicos do MEC, que podem ser encontrados em vasta literatura, na qual se encontra Brebbia, Telles e Wrobel[3]. De acordo com estas fontes bibliográficas, usando um procedimento típico de discretização, pode-se transformar a equação integral 4.1 num sistema composto por equações algébricas dadas por:

1. Considera-se a busca por uma solução para a equação de Laplace em um domínio bi ou tri dimensional.

$$\nabla^2 u = 0 \quad (4.9)$$

Com as condições de contorno:

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad (4.10)$$

$$q(x) = \bar{q}(x) \quad (4.11)$$

2. O erro introduzido pela substituição de  $u$  e  $q$  por uma solução aproximada pode ser minimizado escrevendo a seguinte declaração residual ponderada:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u(x) u^*(\xi, x) d\Omega(x) &= \int_{\Gamma_2} [q(x) - \bar{q}(x)] u^*(\xi, x) | d\Gamma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} [u(x) - \bar{u}(x)] q^*(\xi, x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

3. Realiza-se a integração por partes na equação 4.12 com relação a  $x_i$ .

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i(x)} \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial x_i(x)} d\Omega(x) &= - \int_{\Gamma_1} q(x) u^*(\xi, x) d\Gamma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} \bar{q}(x) u^*(\xi, x) d\Gamma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} [u(x) - \bar{u}(x)] q^*(\xi, x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$



4. Integra-se por partes mais uma vez, chegando a:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^*(\xi, x) u(x) d\Omega(x) = - \int_{\Gamma} q(x) u^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (4.14)$$

5. Sabe-se que  $\nabla u^*(\xi; x) = \delta(\xi; x)$ , sendo  $\delta(\xi; x)$  conhecido como Delta de Dirac, possuindo as seguintes propriedades:

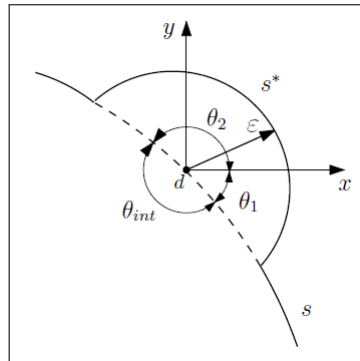
$$\begin{aligned} \Delta(\xi, x) &= 0 & \text{para } \xi \neq x, \\ \Delta(\xi, x) &= \infty & \text{para } \xi = x. \end{aligned} \quad (4.15)$$

E,

$$\int_{\Omega} u(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = C(\xi) u(\xi) \quad (4.16)$$

32 detalham que o ponto  $\xi$  pode ser considerado como um centro de um círculo de raio  $\varepsilon$ , com o valor de  $\varepsilon$  tendendo a zero. Este princípio está em consonância com o Valor Principal de Cauchy, de modo que o valor de  $C(\xi)$  pode ser enxergado como a fração do círculo que está localizada dentro do domínio do problema. A Figura 4 mostra a representação do  $c(\xi)$  no contorno.

Figura 4 – Ângulo interno do contorno



Fonte: Albuquerque e Campos[33], 2017

Sendo assim, conforme 33, considera-se:

$$\begin{aligned} c(\xi) &= 1 & \text{se } \xi \text{ pertence ao domínio} \\ c(\xi) &= \frac{\theta_{int}}{2\pi} & \text{se } \xi \text{ pertence ao domínio} \\ c(\xi) &= 0 & \text{se } \xi \text{ não pertence ao domínio} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Quando o ponto fonte encontra-se em ponto suave do contorno, isto é, não é um canto, tem-se:

$$c(\xi) = \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

Chega-se então na seguinte equação:

$$C(\xi)u(\xi) = - \int_{\Gamma} q(x)u^*(\xi, x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u(x)q^*(\xi, x)d\Gamma(x) \quad (4.19)$$

6. Este item baseia-se a formulação do MEC como técnica numérica propriamente dita. Discretiza-se a equação 4.19 na formulação de um sistema matricial preparado para futura solução computacional. Os pontos discretizados, denominados nós ou pontos nodais, podem se posicionar de diferentes maneiras, em função do nível de refinamento desejado, da ordem de interpolação e outros aspectos.

A equação integral 4.19, quando discretizada, pode ser escrita como:

$$C(\xi)u(\xi)_i = - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q(x)u^*(\xi, x)d\Gamma(x) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(x)q^*(\xi, x)d\Gamma(x) \quad (4.20)$$

Chama-se por conveniência  $C(\xi)u(\xi) = u$ , portanto:

$$u_i = - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q(x)u^*(\xi, x)d\Gamma(x) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(x)q^*(\xi, x)d\Gamma(x) \quad (4.21)$$

Separa-se os dois tipos de integrais distintas  $\int_{\Gamma_j} q^*d\Gamma(x)$  e  $\int_{\Gamma_j} u^*d\Gamma(x)$ . Essas integrais são relativas ao nó "i" que atuam em todos os demais nós "j". Por simplicidade, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} q^*d\Gamma(x) \\ \mathbf{G}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^*d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Que resulta no sistema matricial na forma:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} \quad (4.23)$$

Na equação 4.23, existem valores prescritos (conhecidos) de  $u(x)$  e  $q(x)$  em diferentes partes do contorno, de modo que o sistema dado pela equação 4.23 é resolvível.

Assim, a forma discreta das equações do fluxos direcionais torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{array} \right\}_{2Nx1} = [S]_{2NxN} \{ \bar{q} \}_{Nx1} - [W]_{2NxN} \{ \bar{u} \}_{Nx1} \quad (4.24)$$

Onde  $N$  é a quantidade de pontos nodais.

Porém, em problemas não-estacionários, como os casos transientes e dinâmicos, bem como os casos fisicamente não homogêneos e os problemas difusivo-advectivos, as integrais não são tão simples e muitas vezes são modeladas usando soluções fundamentais complicadas. Para resolver este problema, é possível usar aproximações construídas com o auxílio de funções de base radial. Através das formulações com Dupla Reciprocidade e Interpolação Direta pode se usar uma solução fundamental mais simples.

Além disso, ressaltam-se também os problemas onde se requerem os valores do fluxo tangencial no contorno. A formulação hiper-singular do MEC poderia ser utilizada, mas é bem mais complexa e demanda o uso de funções de suavização no contorno (*splines*) e certos recursos para resultados de boa precisão nos cantos. Este cálculo não é tão simples como o cálculo do potencial no contorno ou mesmos os valores internos, estes últimos dados pelas Equações 4.2 e 4.3. Isto faz com que se precisem usar procedimentos alternativos mais simples para o cálculo destas derivadas. Isto pode ser feito com o uso de interpolações baseadas nas funções radiais. Assim, surgem expressões relacionadas às derivadas direcionais que podem ser resolvidas de modo mais simples e ágil.

Isto só é possível se os potenciais são conhecidos no contorno e também haja um certo número de pontos internos. Então, uma aproximação das derivadas por interpolação resulta em esforço matemático mais acessível.

Cabe ressaltar que o cálculo de derivadas por interpolação com funções de base radial também pode ser aplicado, com certa vantagem, no Método dos Elementos Finitos (MEF) e em associações MEF-MEC, para determinação de fluxos normais no contorno. Estes são calculados como um pós-processamento no MEF, à custa de derivação das funções de forma, com relativa perda de precisão [26].

## 4.2 Modelagem Matemática

O procedimento matemático para o cálculo das derivadas direcionais com o MEC segue basicamente o mesmo padrão apresentado no capítulo 4.1. Porém, aqui particulariza-se ao propósito de aplicação do MEC conforme descrito a seguir.

Seja  $u(x)$  constituído de valores do potencial em pontos base, tanto no contorno como em pontos internos no domínio.

O primeiro passo para calcular valores do potencial em outros pontos, internos ou intermediários aos pontos base, denominados pontos campo, consiste em fazer:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.25)$$

Na equação 4.25,  $\bar{\mathbf{u}}$  são os potenciais no ponto base,  $\mathbf{F}$  é a matriz construída pela distância euclidiana entre os pontos bases e os pontos campo, considerada qualquer função

radial bem conhecida como as mostradas na tabela 1. O cálculo dos coeficientes  $\alpha$ , uma vez que  $\bar{\mathbf{u}}$  são conhecidos, é dado por:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{u}} \quad (4.26)$$

Assim, valores do potencial  $\bar{\mathbf{u}}$  em quaisquer pontos campo  $\underline{\mathbf{X}}$ , pertencentes ao domínio, são obtidos da seguinte forma:

$$u = \bar{\mathbf{F}}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{u}} \quad (4.27)$$

As derivadas direcionais são calculadas derivando as coordenadas dos pontos base. Portanto:

$$u_{,x_1} = \bar{\mathbf{F}}_{,x_1}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{F}}_{,x_1}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.28)$$

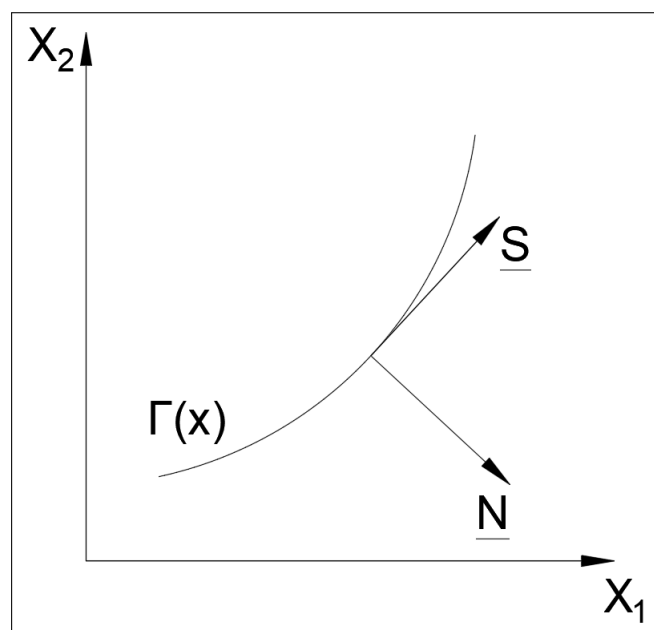
$$u_{,x_2} = \bar{\mathbf{F}}_{,x_2}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{F}}_{,x_2}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.29)$$

De grande interesse, também, são as derivadas tangenciais "s", referente ao contorno:

$$s = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = u_{,x_1}s_1 + u_{,x_2}s_2 = u_{,i}s_i \quad (4.30)$$

Com base na Figura 5 existe uma relação local importante entre s e q.

Figura 5 – Vetores S e Q no contorno



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2021

Considerando que:

$$q = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = u_{,x_1} s_1 + u_{,x_2} s_2 = u_{,i} s_i \quad (4.31)$$

Pode-se escrever que, cada ponto do contorno, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

A matriz de transformação local  $R$  é ortogonal, de modo que:  $R^T = R^{-1}$ , assim:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Portanto,

$$u_{,n} = [Tm][F_{,x_1} u_1 + F_{,x_2} u_2] = Nu \quad (4.34)$$

$$u_{,s} = [Tm][F_{,x_1} s_1 + F_{,x_2} s_2] = Su \quad (4.35)$$

# 5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

De forma a verificar a precisão das FBR's na interpolação, considerou-se um campo analítico, do qual se pode calcular facilmente as derivadas direcionais. Feito isto, interpolou-se este campo analítico considerando diversos pontos base associados às funções radiais. Calculam-se os coeficientes de influência e, em seguida, se determinaram as derivadas por interpolação. A análise contempla também a avaliação de desempenho de mais de uma função radial e também examina em um exemplo mais elaborado, o comportamento para variações da geometria. Para a realização das simulações computacionais elaborou-se um código em linguagem FORTRAN 77 (*FORmula TRANslation*), que é uma linguagem de alto nível para elaboração de problemas complexos para diversas áreas da engenharia.

Com intuito de facilitar a visualização dos resultados, utilizou-se do *software* Microsoft Excel. Um programa grandemente conhecido por suas mais diversas aplicações em variadas áreas, além de ser uma ferramenta versátil e com interface amigável para geração dos gráficos.

Referente a criação do código, utilizou-se da modelagem matemática apresentada no capítulo anterior. Há diversos possíveis problemas matemáticos para avaliação do desempenho do método, visto que o intuito é para a aplicação geral, entretanto, aplicou-se o mesmo método para três problemas distintos com características adequadas para sua avaliação, com variações em suas geometrias, quantidade de pontos internos e no contorno, além de variar entre duas funções de base radial diferentes. Teve-se como intenção aumentar a quantidade de variáveis e condições durante a aplicação do método nas equações de teste.

Foi calculado o erro médio relativo de cada procedimento, tomando-se como parâmetro relativo o maior valor absoluto que a solução exata pode atingir na região delimitada pelo contorno (incluindo o domínio do problema). A equação 5.1 apresenta a formula do erro.

$$Erro = \frac{Valor_{real} - Valor_{aproximado}}{\text{Maior valor da função real no domínio}} \quad (5.1)$$

## 5.1 Análise de Resultados e Discussões

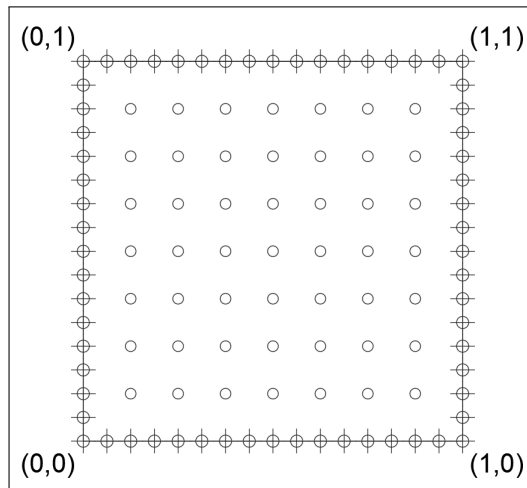
O detalhamento de um teste e a escolha adequada dos parâmetros é uma tarefa notável afim de conferir uma confiança nos resultados. De forma geral, para o método proposto, existem três variáveis principais a serem consideradas nestas análises, sendo elas a quantidade de pontos internos, a quantidade de pontos base no contorno e a função de

base radial escolhida.

Neste contexto, a primeira análise realizada trata-se de um problema unidimensional e as duas outras análises sendo problemas bidimensionais. Espera-se que uma queda sistêmica do erro entre a solução real e a aproximada conforme aumenta-se o número de pontos no contorno e em seu interior. A quantidade desses pontos acarretam no aumento da precisão dos resultados, visto que geram mais informações exatas para a função aproximada que será gerada. Em termos matemáticos a equação polinomial gerada através do método tem a quantidade de alfas gerados aumentada, onde, em teoria, resulta no aumento da precisão.

Apesar do primeiro teste ser um problema unidimensional, o domínio de todos os três testes são bidimensionais. A Figura 6 apresenta a discretização do domínio. Propõem-se pontos base equidistantes no interior do domínio para testes comparativos com as funções analíticas e com o resultado das funções aproximadas utilizadas.

Figura 6 – Esquema típico de posicionamento dos pontos interpolantes



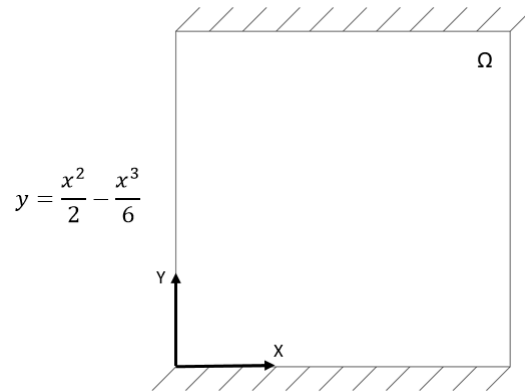
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

A seguir são apresentados os testes realizados e os resultados de cada um.

### 5.1.1 Caso I - Problema Bidimensional com comportamento unidimensional

O primeiro caso a ser considerado consiste em um problema físico genérico cujo comportamento físico é unidimensional, mas se processa em um domínio bidimensional. Assim, a função solução varia exclusivamente sobre o eixo X, no domínio quadrado de lados unitários, exposto conforme mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Croqui Representativo do Caso I



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

O caso é considerado simples, pois há variação em apenas uma direção. Porém, a interpolação radial é de natureza bidimensional.

As soluções analíticas parciais das derivadas  $X_1$ ,  $X_2$ , tangencial e normal da equação apresentada na Figura 7 são apresentadas nas Equações 5.2 a 5.5.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = x - \frac{x^2}{2} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -x + \frac{x^2}{2} \sin \theta + 0 \cos \theta \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = x - \frac{x^2}{2} \cos \theta + 0 \sin \theta \quad (5.5)$$

Para este primeiro teste, manteve-se a mesma geometria unitária para todas as análises, porém com variações nas quantidades de pontos base no contorno do domínio e também em seu interior. Para a comparação do comportamento da interpolação, utilizou-se as funções de base radial cúbica e logarítmica, conforme se apresenta nas equações 5.6 e 5.7 respectivamente a seguir.

$$F(r) = r^3 \quad (5.6)$$

$$F(r) = r^2 \ln r \quad (5.7)$$

A divisão de pontos no contorno e internos para a geometria definida é apresentada a seguir:

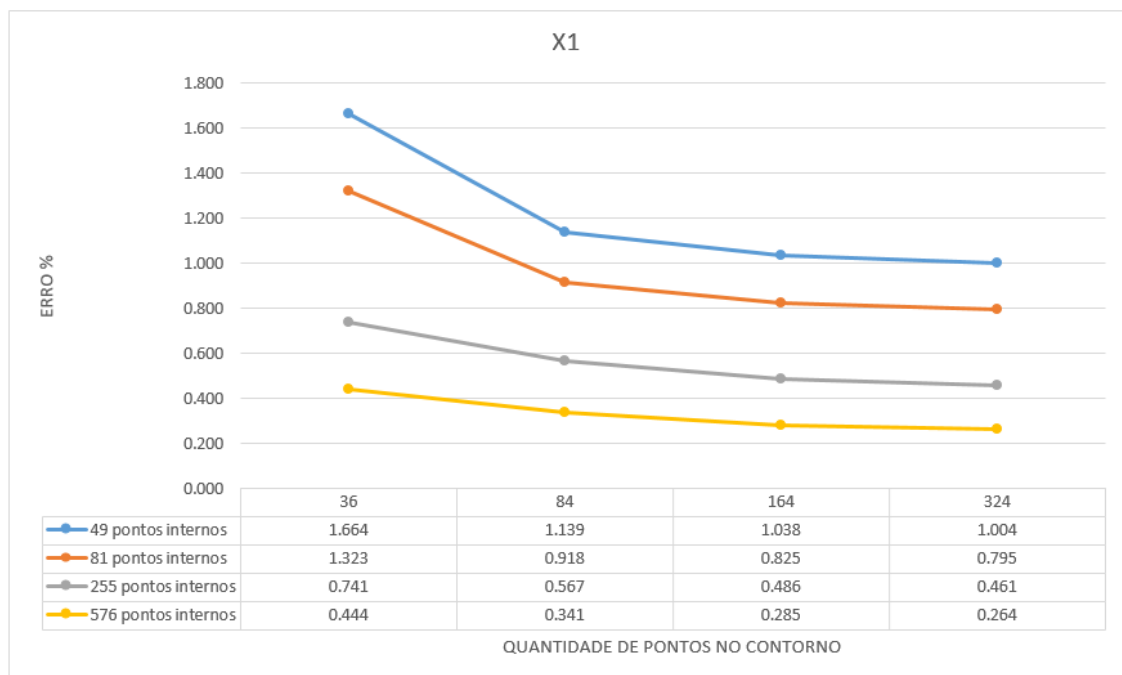


- Malha quadrada 1x1
  - Quantidade de pontos no contorno: 36, 84, 164 e 324;
  - Quantidade de pontos internos: 49, 81, 255 e 576.

#### 5.1.1.1 Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Cúbica

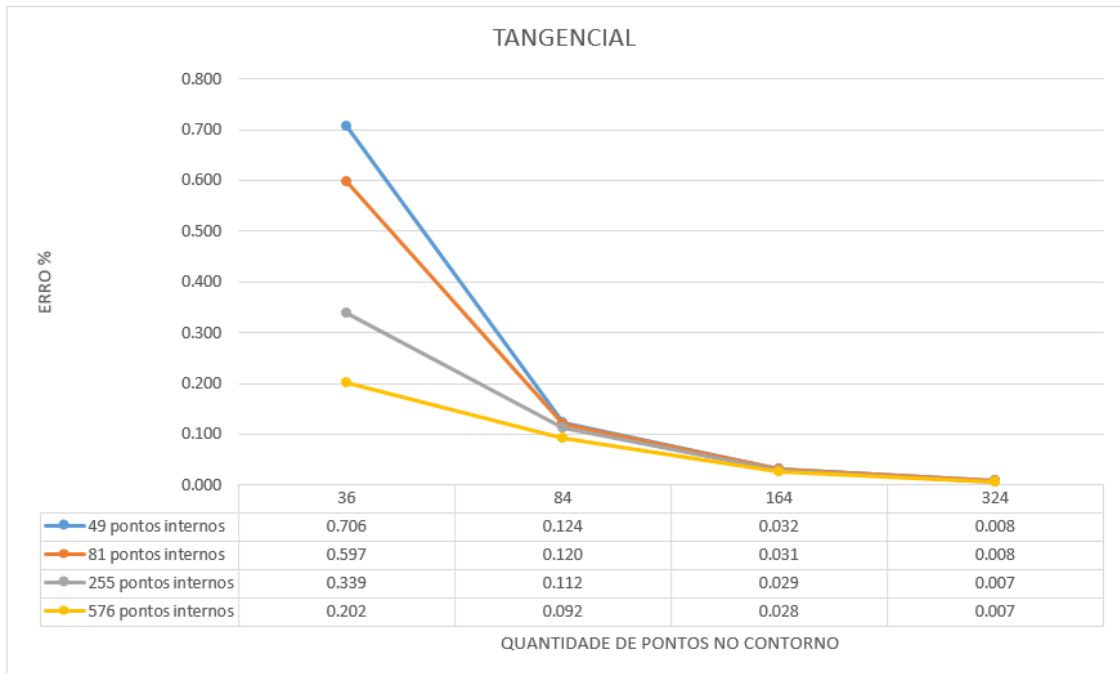
Inicia-se a exibição dos resultados. Foram elaborados gráficos comparativos para a interpretação visual dos dados obtidos, comparando-se as informações provenientes das derivadas das funções analíticas e as obtidas pelas derivadas da função radial. Na ordenada de cada gráfico encontra-se o erro médio percentual, calculado em cada ponto nodal situado no contorno e posicionado internamente. No eixo das abcissas, encontra-se a quantidade de pontos no contorno que se utilizou para cada simulação. Nas simulações que se seguem foram calculados os valores de contorno. Destaca-se, através das figuras 8 a 10, a relativa convergência do método.

Figura 8 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial cúbica



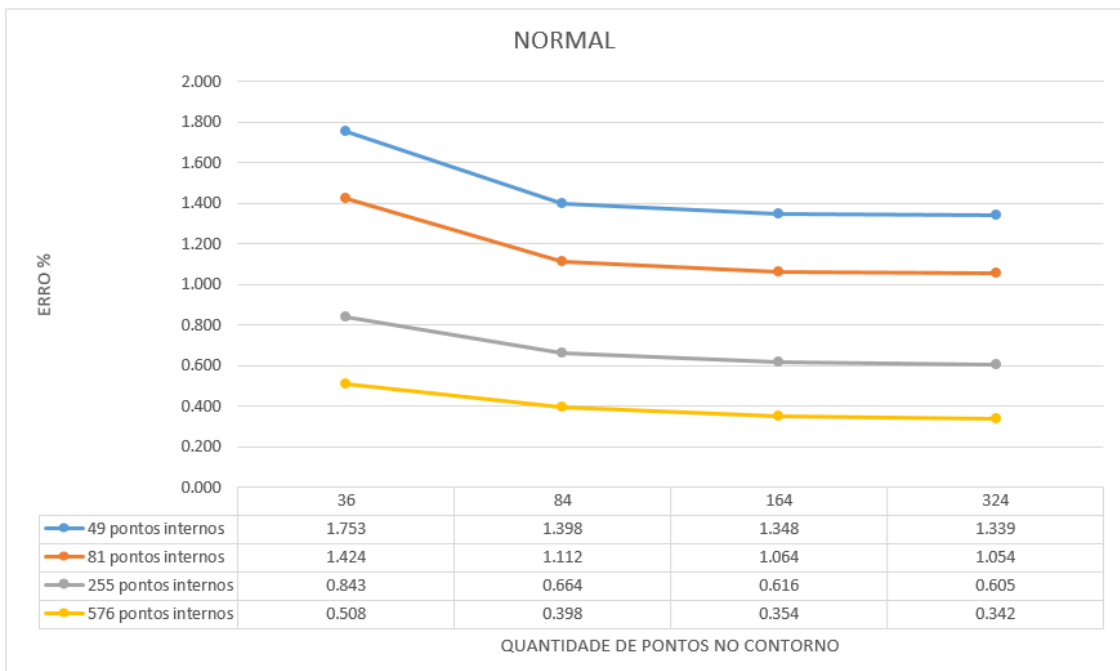
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 9 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 10 – Derivada normal para malha 1x1 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Percebe-se que não há anomalias no gráfico do erro percentual. Apesar dos valores de erro não serem insignificantes, nota-se que tendem a valores muito pequenos, conforme ocorre o acréscimo do número de pontos base no contorno e internamente. Assim, através

do refinamento da malha é possível a melhorar a precisão da análise e se aproximar satisfatoriamente do resultado analítico.

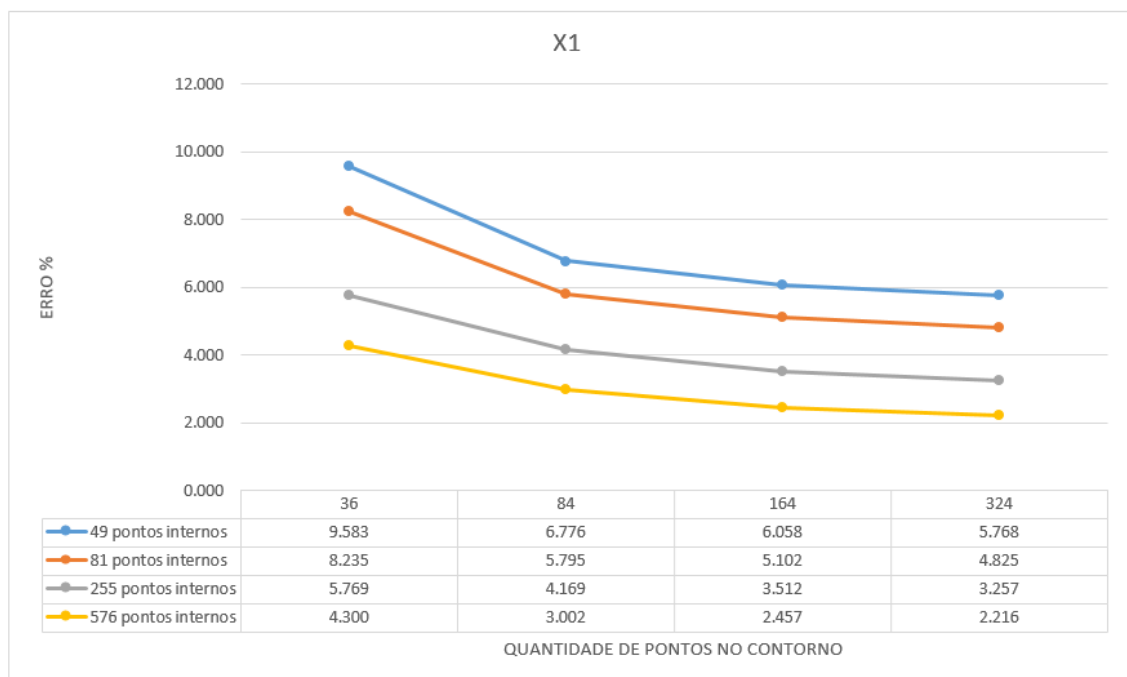
Para o caso I, por se tratar de um caso em que o resultado é unidimensional na direção  $x$  ( $X1$ ), não se verificaram os valores na direção  $y$  ( $X2$ ). Destaca-se que analiticamente as derivadas  $X1$  e tangenciais possuem o mesmo valor, entretanto o resultado da função aproximada pela ótica da análise tangencial teve um desempenho melhor do que a derivada  $X1$ , pois em nas arestas verticais a direção  $X1$  corresponde à direção normal.

Os valores da derivada normal têm menos precisão, conforme esperado, devido à dificuldade de prever o comportamento da função internamente. Os valores da derivada tangencial, ao contrário, são mais precisos, pois dependem sobretudo dos valores no pontos interpolantes lateralmente adjacentes.

#### 5.1.1.2 Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Logarítmica

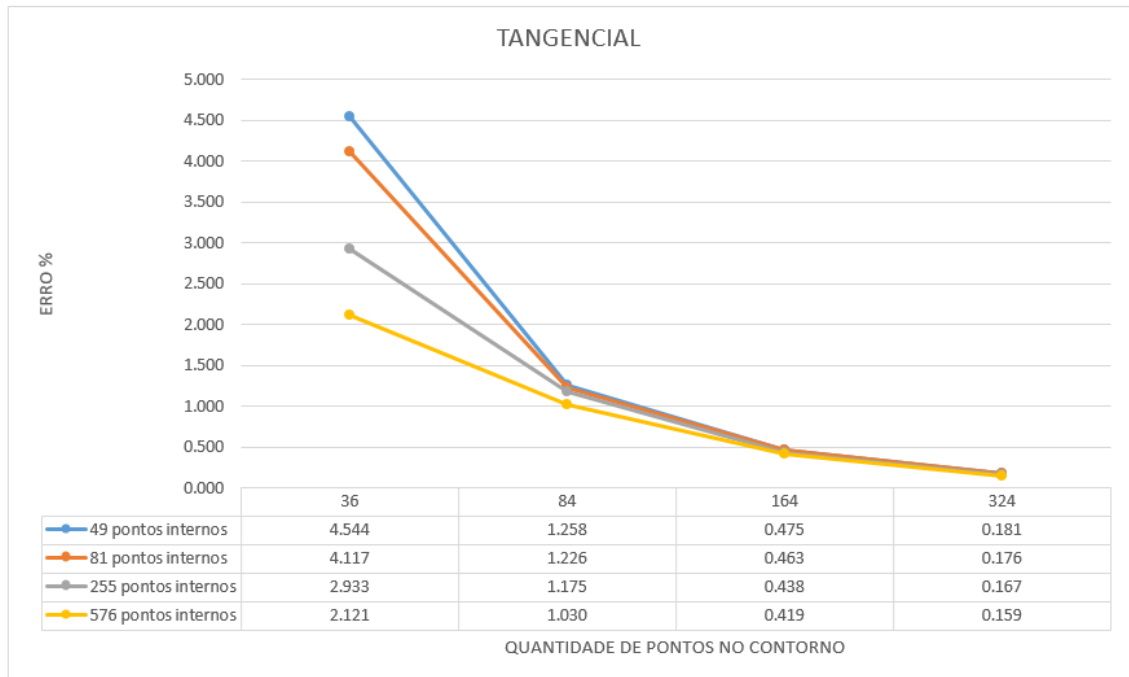
A seguir inicia-se a apresentação dos resultados para o mesmo método matemático, porém com a utilização da função de base radial logarítmica.

Figura 11 – Derivada direcional  $X1$  para malha 1x1 e função radial logarítmica



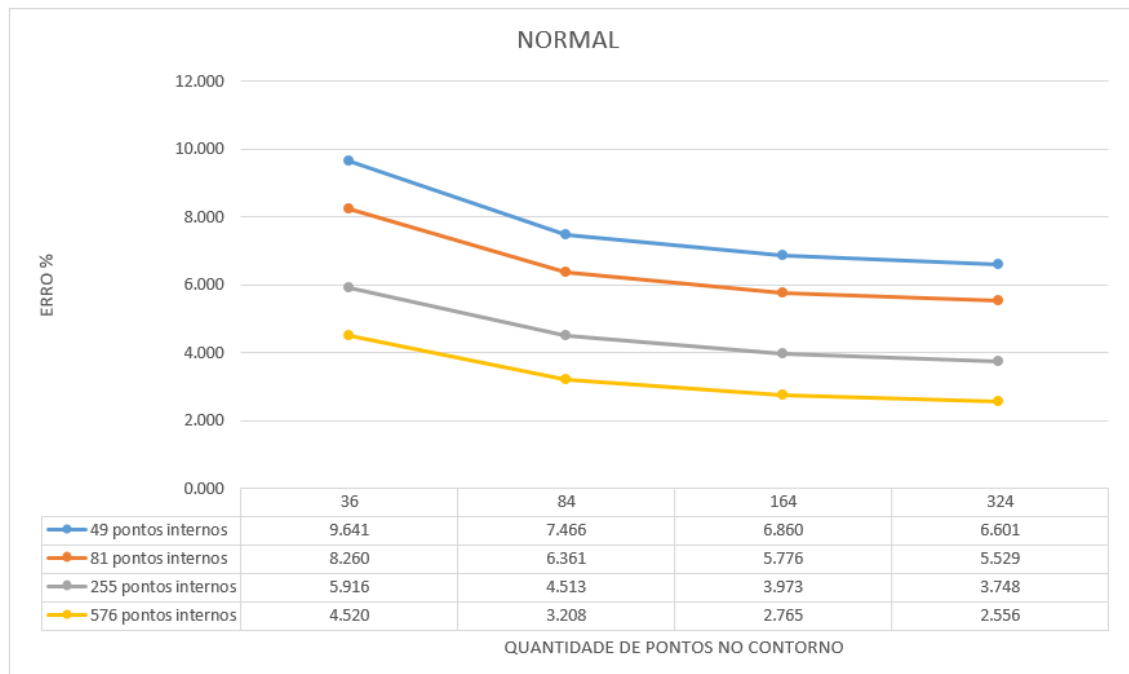
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 12 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função radial logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 13 – Derivada normal para malha 1x1 e função radial logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Nota-se, através do resultado das Figuras 11 a 13, que além quantidade de pontos base no contorno e no interior, a função de base radial escolhida para o método é de extrema importância, visto que o erro percentual médio aumentou demasiadamente se

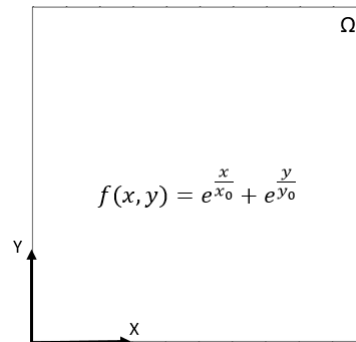
comparado com os resultados obtidos nas Figuras 8 a 10.

O resultado que se obteve na Figura 12, referente a derivada tangencial, demonstrou uma convergência satisfatória mesmo utilizando a função de base radial logarítmica, entretanto se exigiu uma malha mais densa para que o resultado começasse a convergir em erros percentuais menores, diferentemente de quando se utilizou da função de base radial cúbica, em que mesmo em malhas menos densas (com menos pontos base), o erro percentual já apresentava resultados melhores.

### 5.1.2 Caso II - Problema Bidimensional com Natureza Exponencial

O segundo caso consiste de um problema bidimensional de natureza exponencial. Desta forma, o campo é formado por uma função de duas variáveis. Isto torna o problema teste em questão numericamente mais complicada do que o caso I, tal como mostrado na Figura 14.

Figura 14 – Croqui Representativo do Caso II



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Na Equação apresentada na Figura 14  $x_0$  é a distância máxima em x e  $y_0$  é a distância máxima em y. Essa escolha tem por propósito adimensionalizar a geometria em questão, assim, a análise dos resultados se concentra apenas na capacidade das funções de base radial calcular as derivadas espaciais sem serem afetadas pela dimensão do domínio. Ressalta-se que sem a adimensionalização da função exponencial que descreve o campo, as funções radiais teriam que lidar simultaneamente com valores muito pequenos e muito grandes, o que impositivamente produz enorme perda de precisão numérica.

As soluções analíticas parciais das derivadas  $X_1$ ,  $X_2$ , tangencial e normal da equação apresentada na Figura 14 é apresentada nas Equações 5.8 a 5.11.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{x}{x_0}} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{y}{y_0}} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -e^{\frac{x}{x_0}} \sin \theta + e^{\frac{y}{y_0}} \cos \theta \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = e^{\frac{x}{x_0}} \cos \theta + e^{\frac{y}{y_0}} \sin \theta \quad (5.11)$$

Para o caso II, optou-se por impor maiores dificuldades numéricas para verificar a robustez do método. Desta forma, analisou-se três geometrias distintas, a primeira mantendo a matriz quadrada de dimensões 1 por 1, as segunda sendo uma matriz quadrada de lados 5 e a terceira uma matriz esbelta de dimensões 1 por 0,5. A divisão de pontos base no contorno e internos para cada geometria é apresentada a seguir:

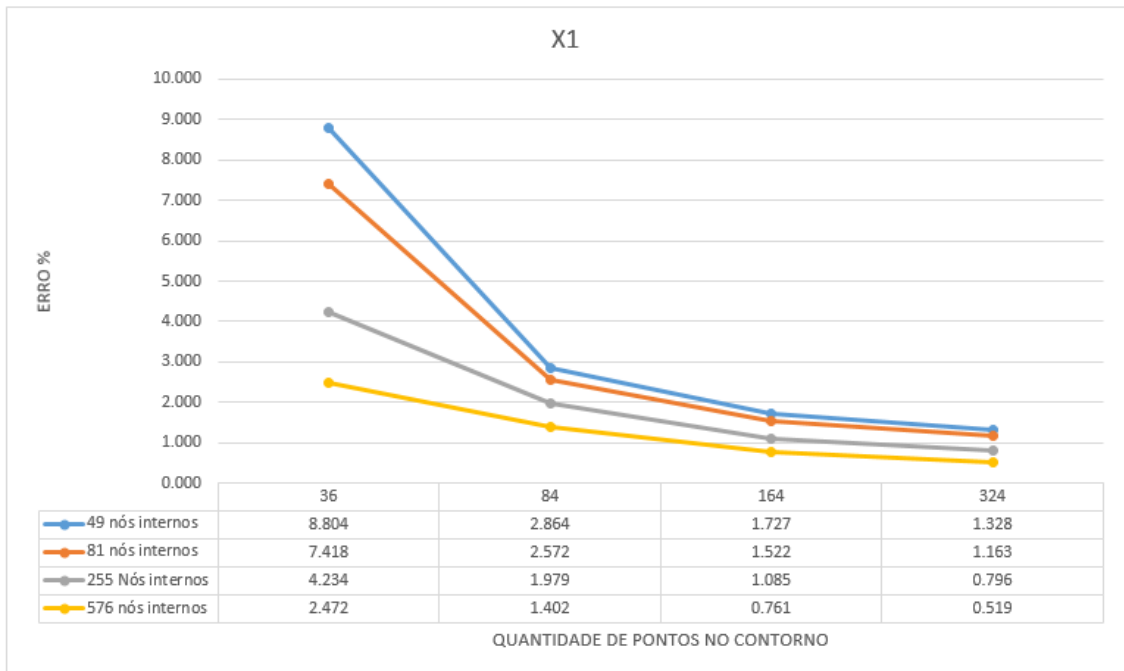
- Malha quadrada 1x1
  - Quantidade de pontos base no contorno: 36, 84, 164 e 324;
  - Quantidade de pontos base internos: 49, 81, 255 e 576.
- Malha quadrada 5x5
  - Quantidade de pontos base no contorno: 36, 84, 164 e 324;
  - Quantidade de pontos base internos: 49, 81, 255 e 576.
- Malha esbelta 1x0,5
  - Quantidade de pontos base no contorno: 28, 64, 124 e 244;
  - Quantidade de pontos base internos: 36 e 105.

Para uma melhor análise da robustez do método, dividiram-se os resultados dos pontos do contorno e dos pontos no interior das geometrias propostas. Desta forma é possível verificar isoladamente a precisão e o desempenho da modelo numérico na convergência dos resultados no interior e no contorno. Ressalta-se que ao se tratar das derivadas tangenciais e normais, as mesmas se encontram apenas no contorno da geometria.

#### 5.1.2.1 Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Cúbica

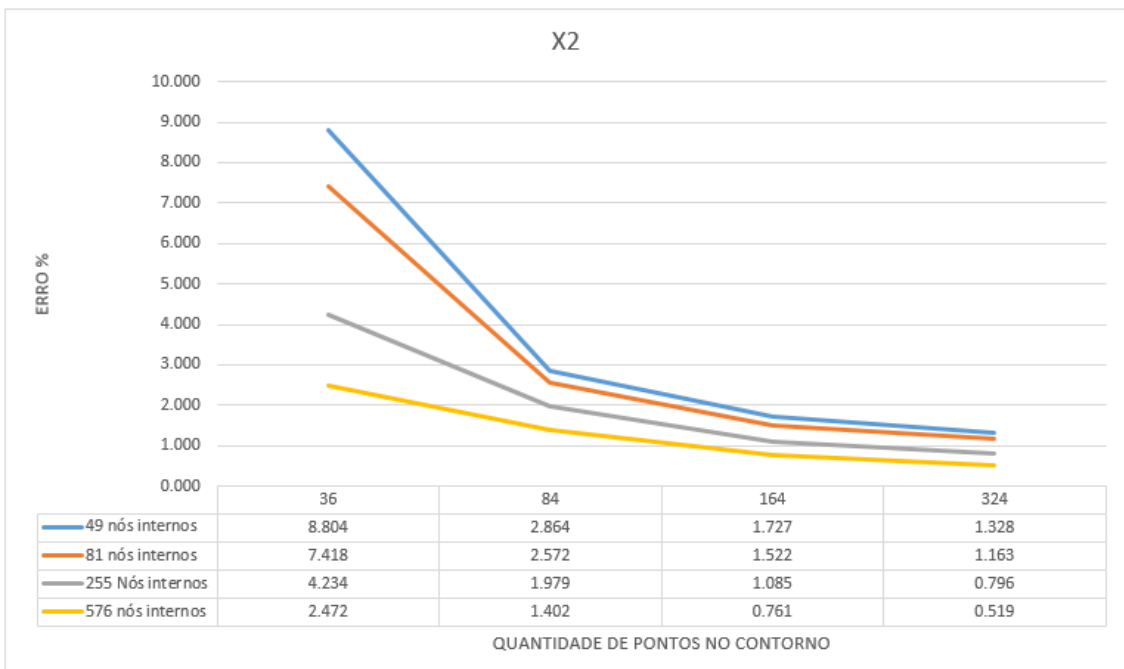
As Figuras 15 a 18 apresentam os resultados da malha 1 por 1 considerando a função de base radial cúbica para valores de pontos no contorno. A quantidade de pontos no contorno é acrescida à medida que o gráfico se move para a direita, nos valores especificados (36, 84, 164 e 324).

Figura 15 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial cúbica



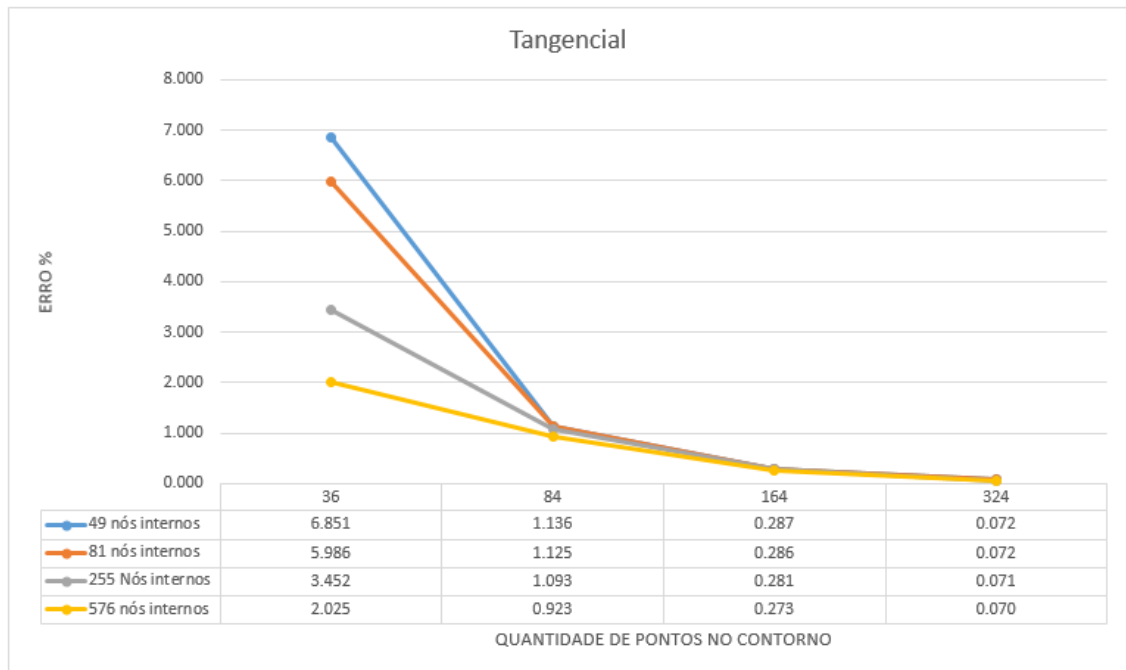
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 16 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função radial cúbica



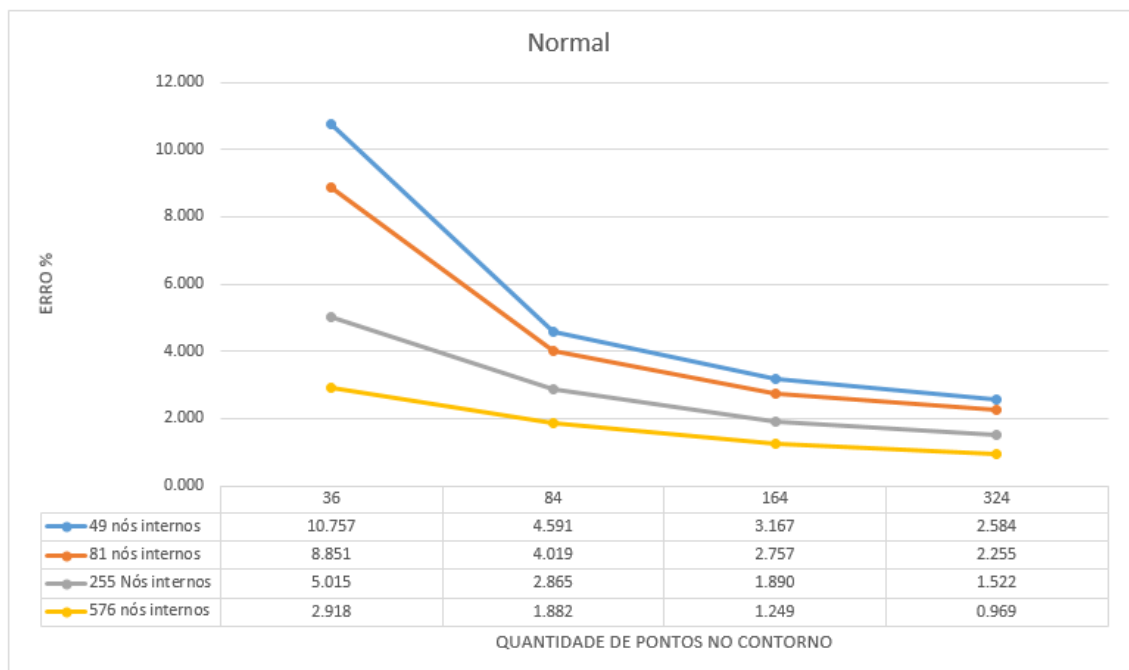
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 17 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 18 – Derivada normal para malha 1x1 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Na Figura 15 se percebe que o modelo proposto converge satisfatoriamente; no entanto, na primeira amostra (36 pontos base no contorno) há uma diferença significativa do erro em razão da quantidade de pontos internos. A partir da segunda malha (84 pontos



base no contorno) o modelo converge melhor e seu erro reduz gradativamente, tendo o erro relativo na ordem de grandeza similar se considerada a mesma quantidade de pontos no contorno e variando apenas a quantidade de pontos no interior.

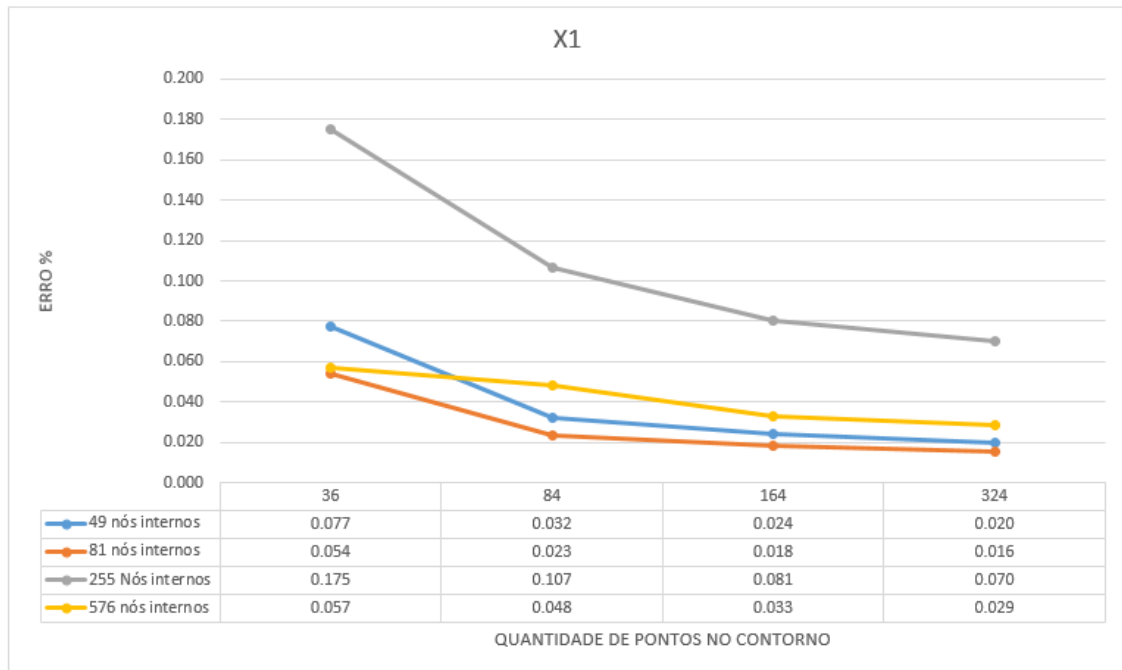
Considerando a simetria geométrica do problema proposta e a simetria da função analítica a ser aproximada, o resultado das derivadas direcionais  $X_1$  e  $X_2$  deve ser simétrico. A Figura 16 comprova a teoria proposta tendo os resultados idênticos ao da Figura 15.

Assim como o Caso I, a derivada tangencial teve um destaque entre os resultados anteriormente apresentados. Sua convergência foi mais rápida do que os demais não necessitando de muitos pontos no contorno e internos, e também seu resultado mais preciso. Destaca-se que sua convergência aumentou conforme acresceu o número de pontos no interior da geometria, por outro lado a variação dos pontos no contorno foi pouco relevante, visto que os erros se encontram bem próximos. Desta forma, o resultado para a derivada tangencial para o caso II não necessitou de muitos pontos base para um bom desempenho.

A derivada normal conseguiu convergir, entretanto não teve desempenho tão eficaz quanto as demais derivadas, demandando uma malha com mais pontos interpolantes. Isto se justifica porque seu valor depende muito pouco de valores adjacentes no contorno e fortemente da densidade de valores internos.

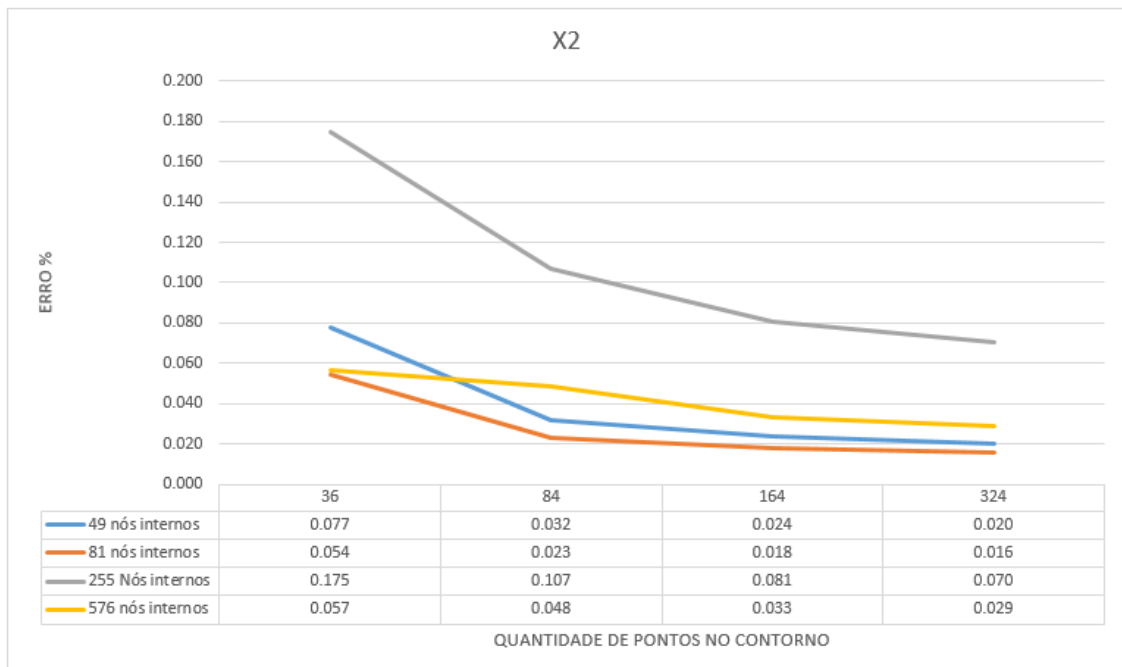
Ainda para o Caso II, realiza-se a análise para as derivadas direcionais  $X_1$  e  $X_2$  para os pontos internos. As Figuras 19 e 20 apresentam os gráficos dos resultados.

Figura 19 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial cúbica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 20 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função radial cúbica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Assim como os resultados apresentados considerando os pontos no contorno, dado a geometria do modelo e a função aplicada no domínio proposto, os resultados dos erros

das derivadas direcionais X1 e X2 foram idênticos.

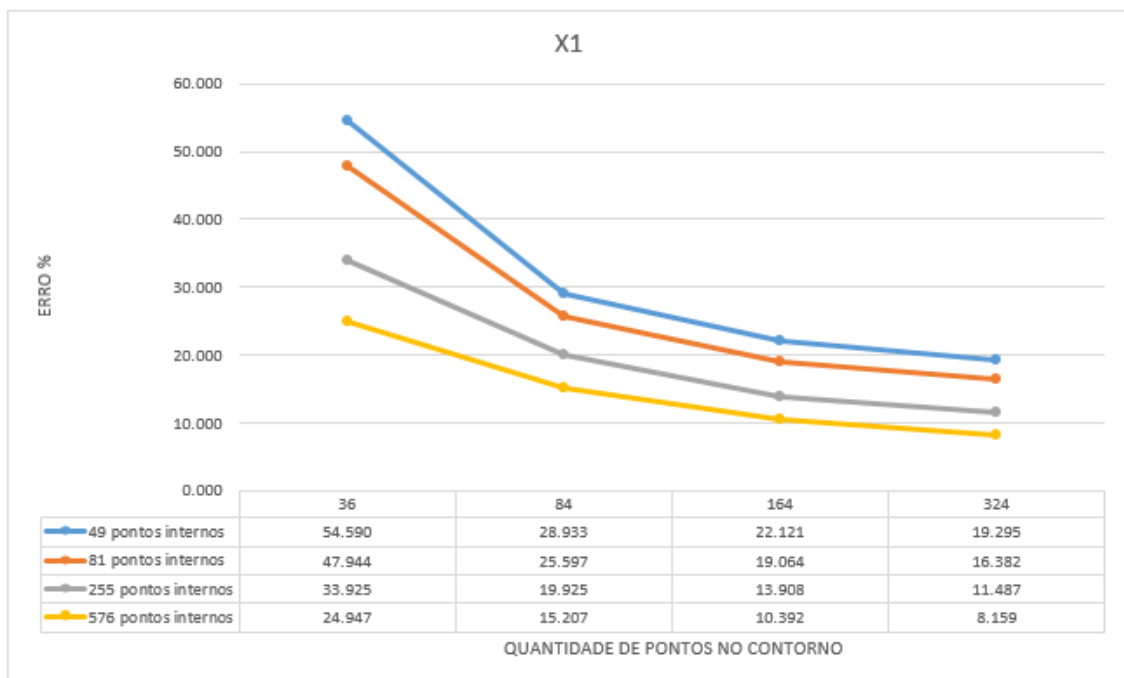
O resultado dos pontos internos apresentou uma superioridade se comparado com os pontos base nos contornos, inclusive com a densidade de malha próximos. Houve uma anomalia considerando 255 e 576 pontos internos, visto que malhas com menos pontos base (49 e 81) apresentaram um desempenho melhor. Isso pode ser justificado pelo fato de o aumento das densidades gerar um erro maior em uma pequena parte do domínio, aumentando o erro médio resultante.

#### 5.1.2.2 Malha Quadrada 1x1 e Função de Base Radial Logarítmica

Conforme mencionado anteriormente, verificou-se a aplicação da função de base radial logarítmica como um substituto da função radial cúbica, considerando as mesmas características geométricas, de malhas e função analisada.

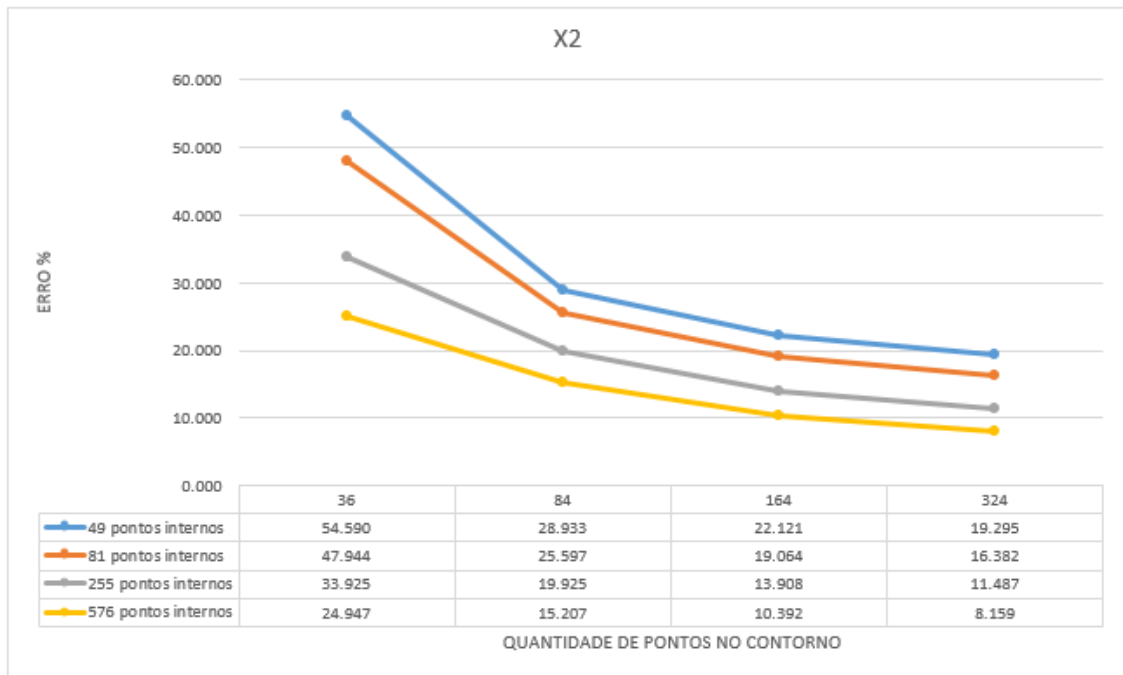
As Figuras 21 a 24 apresentam os resultados obtidos para o contorno.

Figura 21 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função logarítmica



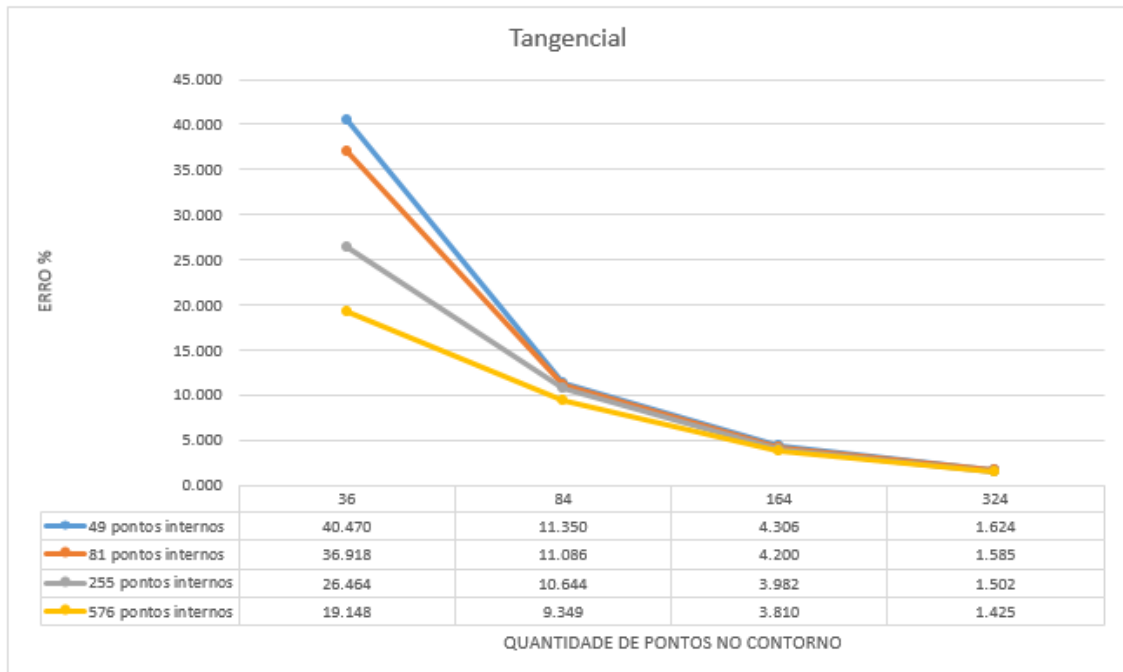
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 22 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função logarítmica



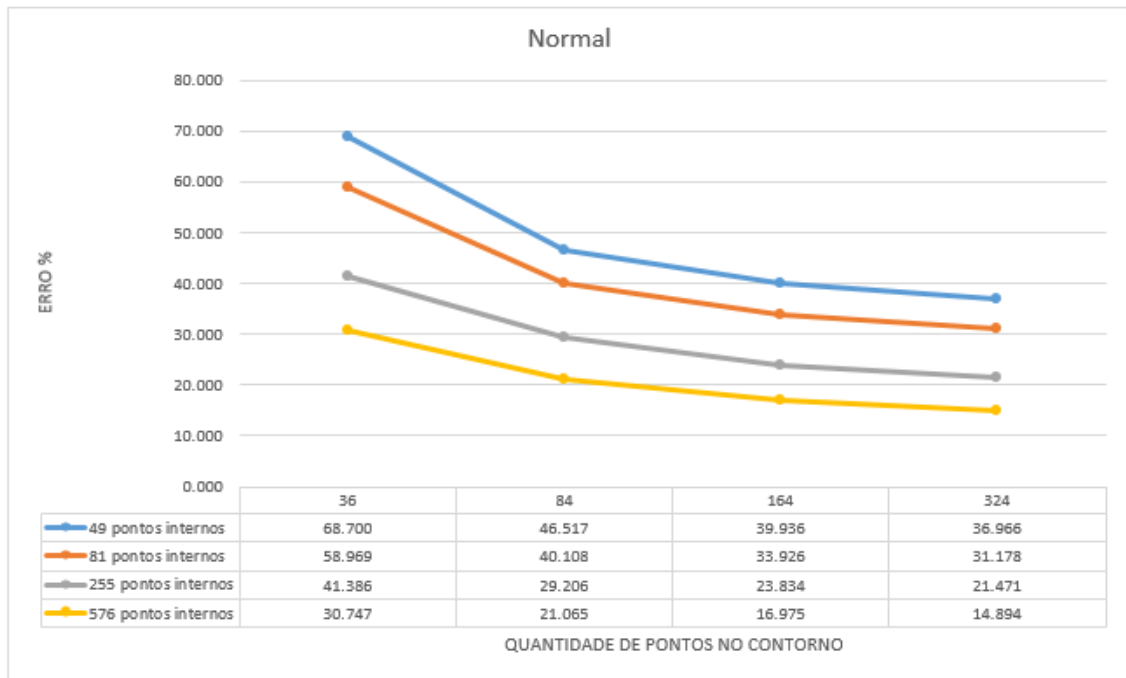
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 23 – Derivada tangencial para malha 1x1 e função logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 24 – Derivada normal para malha 1x1 e função logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

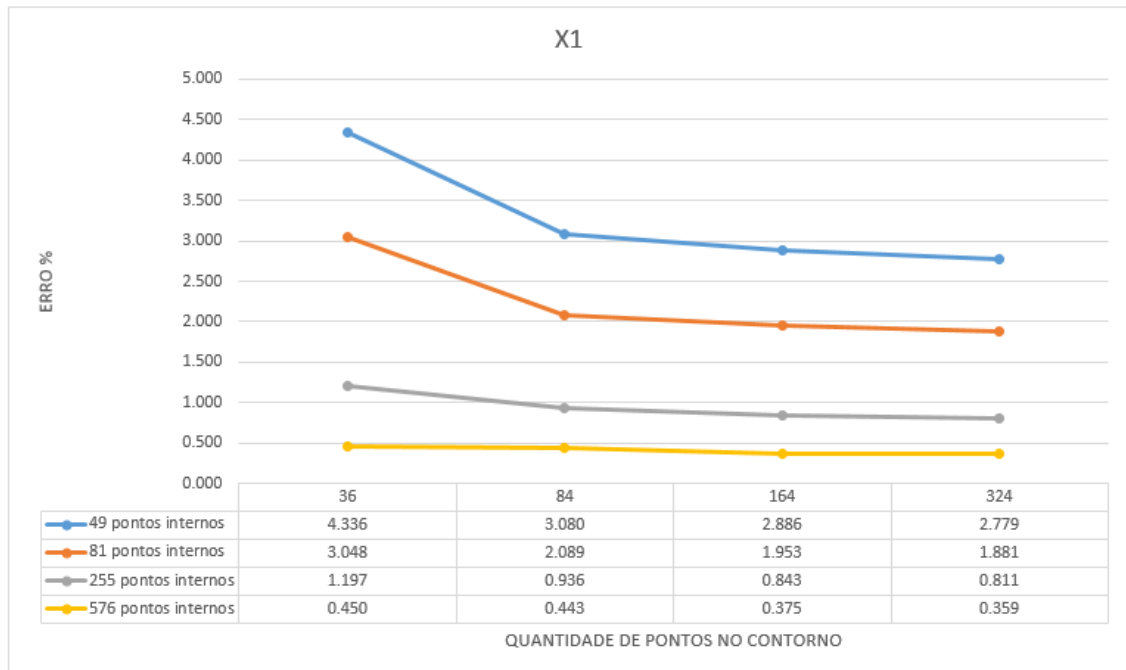
Na Figura 21 se percebe que o modelo proposto converge, no entanto, há uma diferença significativa do erro se considerado a análise com a função radial cúbica, tendo ordem de grandeza seis vezes maior. De acordo com o apresentado, o erro diminui conforme a malha aumenta sua densidade, entretanto o valor do erro considerando a malha mais densa analisada possui um erro médio significativo.

Como era de se esperar, a derivada direcional X2 teve resultados iguais aos da derivada X1 pelos motivos mencionados na análise com a função de base radial cúbica. O erro é reduzido rapidamente a medida com que a malha é acrescida, tanto na quantidade de pontos internos quanto no contorno, entretanto a função de base radial logarítmica não superou o desempenho da função radial cúbica, mantendo a superioridade da FBR anteriormente analisada. Já a derivada normal teve uma diminuição do erro significativa, mantendo o padrão apresentado pelas derivadas direcionais X1 e X2.

A derivada tangencial teve o menor erro, confirmando as conclusões dos resultados anteriores. Porém, os valores de erro ainda são significativamente superiores aos obtidos com a função radial cúbica.

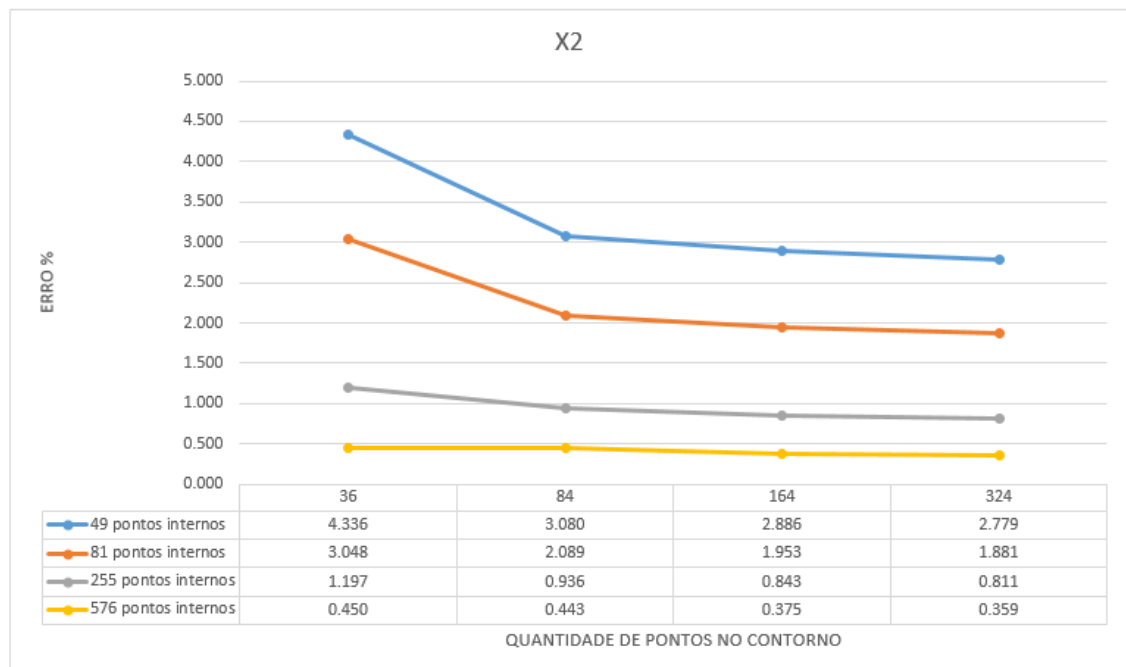
Ainda neste tocante, realiza-se a análise para as derivadas direcionais X1 e X2 para os pontos internos. As Figuras 25 e 26 apresentam os gráficos dos resultados.

Figura 25 – Derivada direcional X1 para malha 1x1 e função radial logarítmica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 26 – Derivada direcional X2 para malha 1x1 e função radial logarítmica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Dados os resultados apresentados, pode-se perceber que, assim como na função radial cúbica, os resultados obtidos nos pontos internos tiveram superioridade em relação

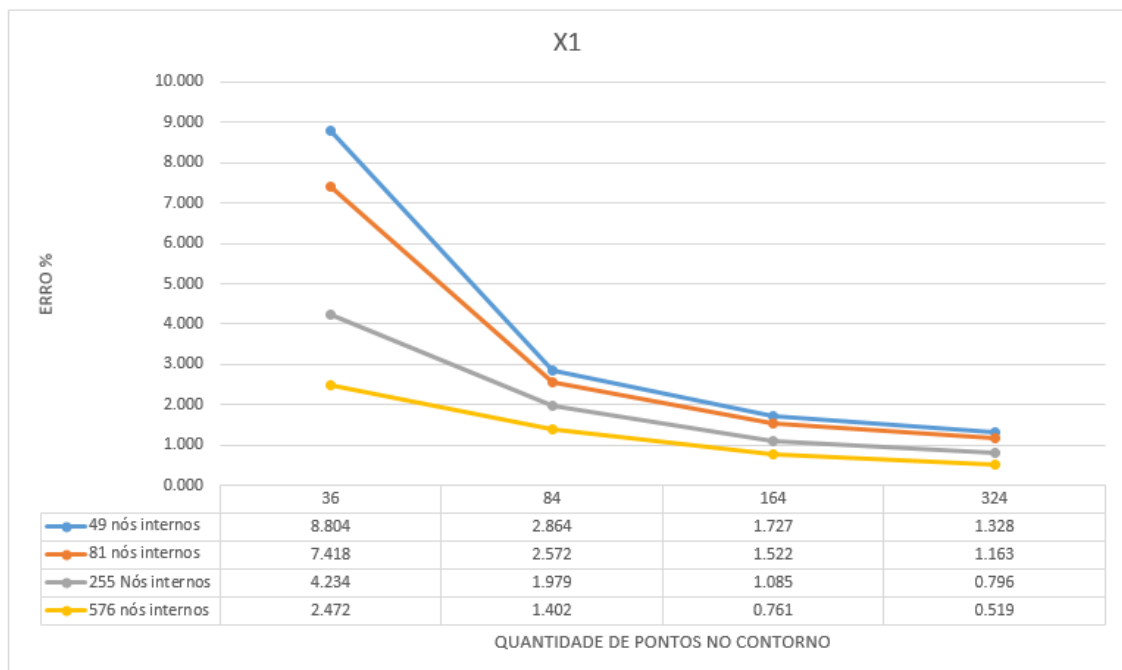
aos resultados obtidos quando se avaliado o contorno. Percebe-se também o caso com 576 pontos internos não houve grande variação entre o resultado, demonstrando que para os parâmetros do teste a quantidade de malha já estava superdimensionada.

### 5.1.2.3 Malha Quadrada 5x5 e Função de Base Radial cúbica

A fim de verificar a robustez da interpolação de derivadas utilizando funções de base radial, busca-se examinar se a dimensão afeta a qualidade dos resultados. Realizou-se a verificação com uma geometria de lados cinco vezes maior.

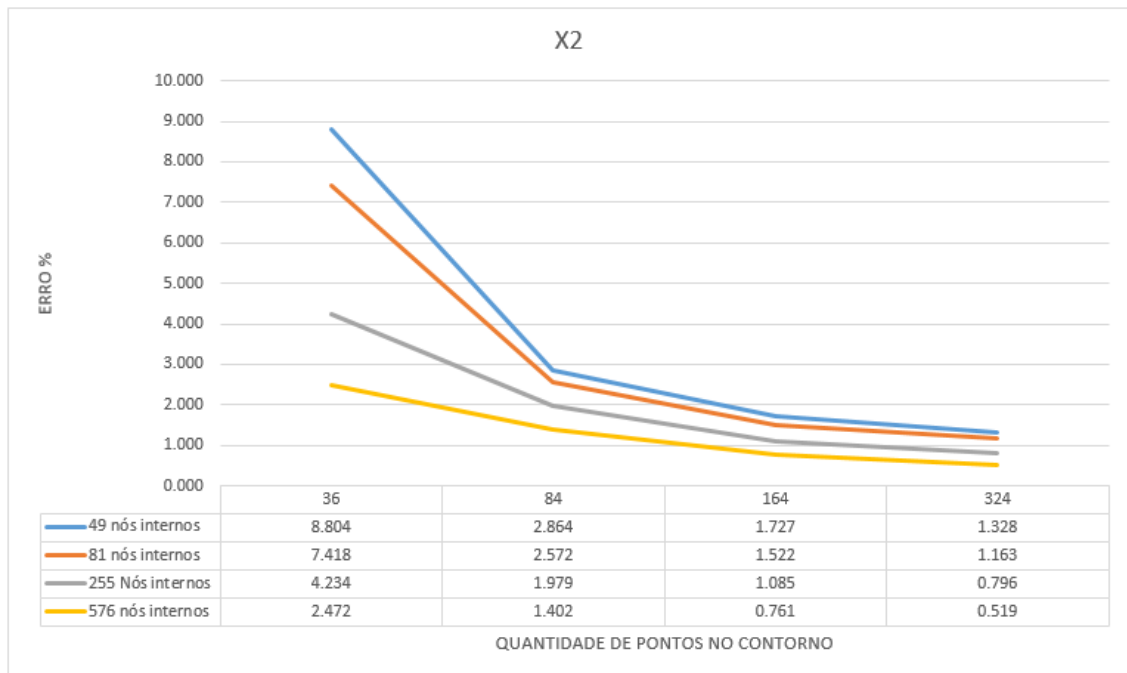
As Figuras 27 a 30 apresentam os resultados obtidos.

Figura 27 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função radial cúbica



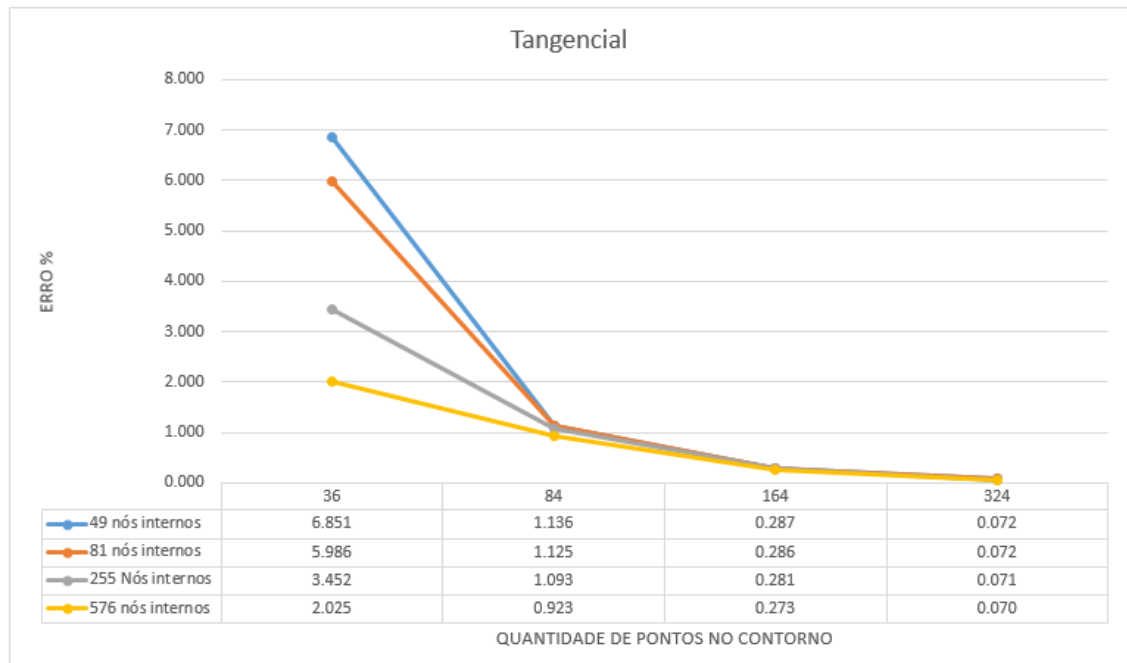
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 28 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

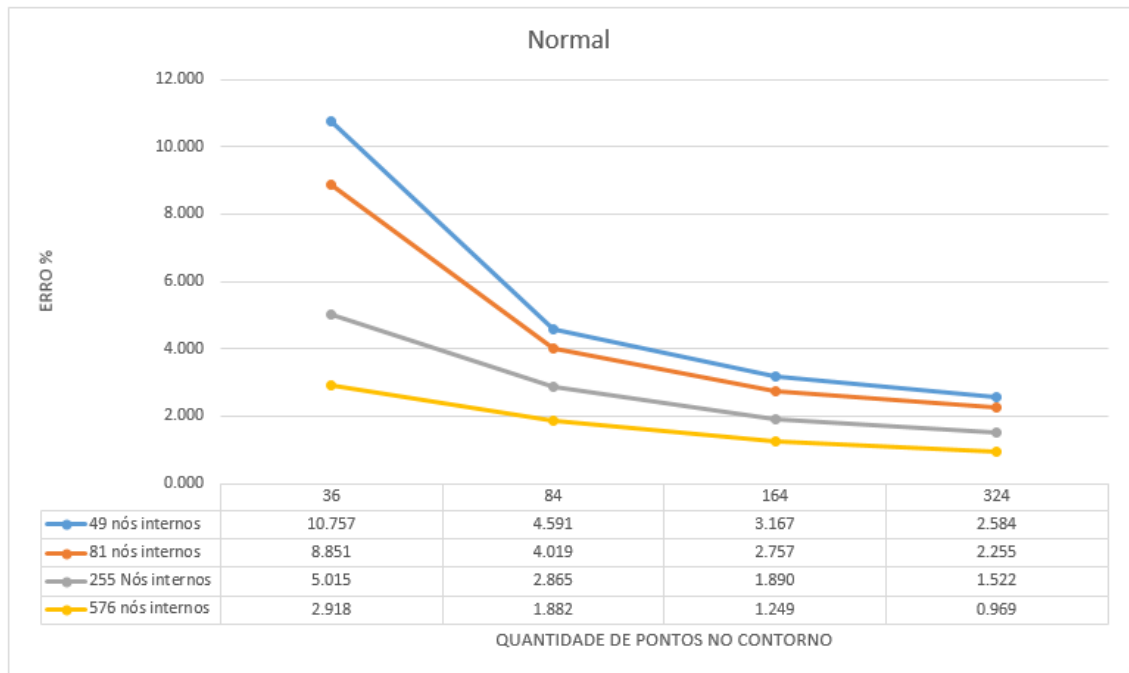
Figura 29 – Derivada tangencial para malha 5x5 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022



Figura 30 – Derivada normal para malha 5x5 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

As Figuras 31 e 32 apresentam os resultados obtidos nos pontos internos.

Figura 31 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função radial cúbica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 32 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função radial cúbica nos pontos internos



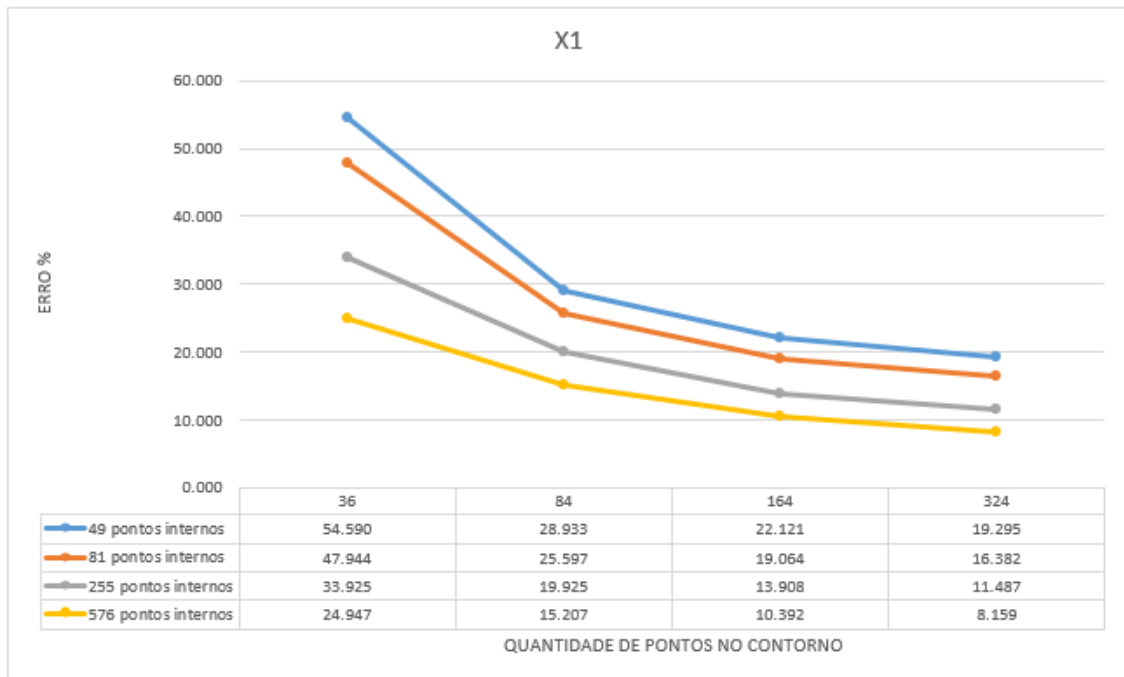
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Pode-se perceber que os resultados não diferenciaram dos obtidos com a geometria 1 por 1. Ressalta-se que os valores da função foram adimensionalizados através da própria equação selecionada para o caso II. Assim, análise dos resultados se concentra apenas na capacidade das funções de base radial calcular as derivadas espaciais sem serem afetadas pela dimensão do domínio, evitando lidar simultaneamente com valores muito pequenos e muito grandes, o que impositivamente produz enorme perda de precisão numérica.

#### 5.1.2.4 Malha Quadrada 5x5 e Função de Base Radial Logarítmica

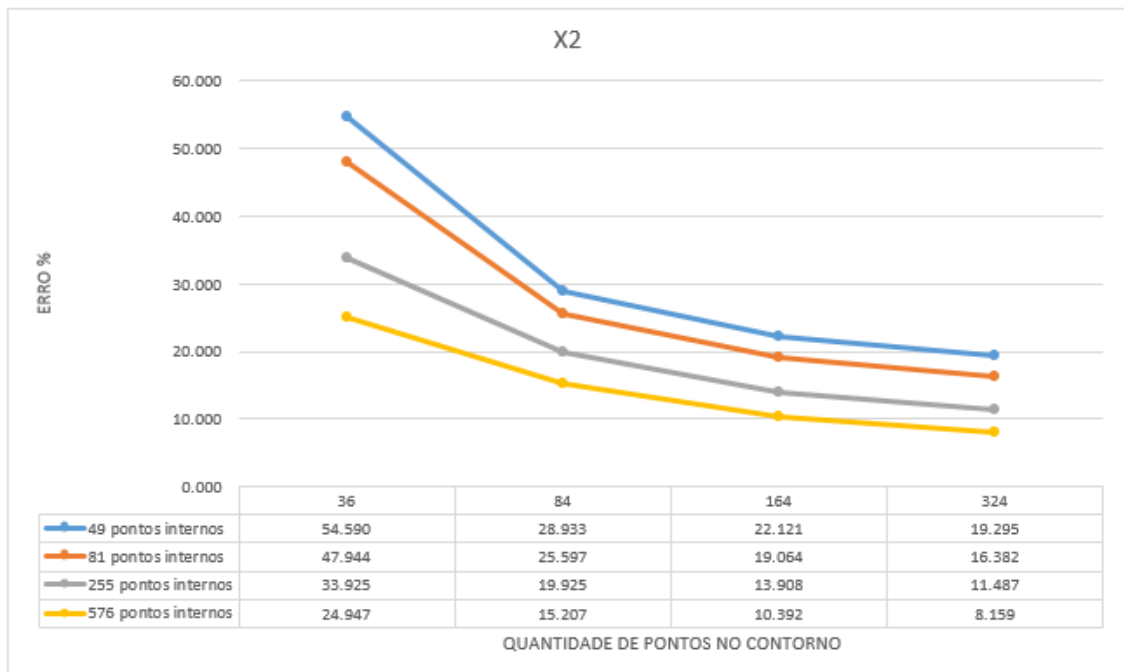
Também realizou-se a verificação da proposta apresentada no item anterior considerando a função de base radial logarítmica. As Figuras 33 a 36 apresentam os resultados obtidos.

Figura 33 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função logarítmica



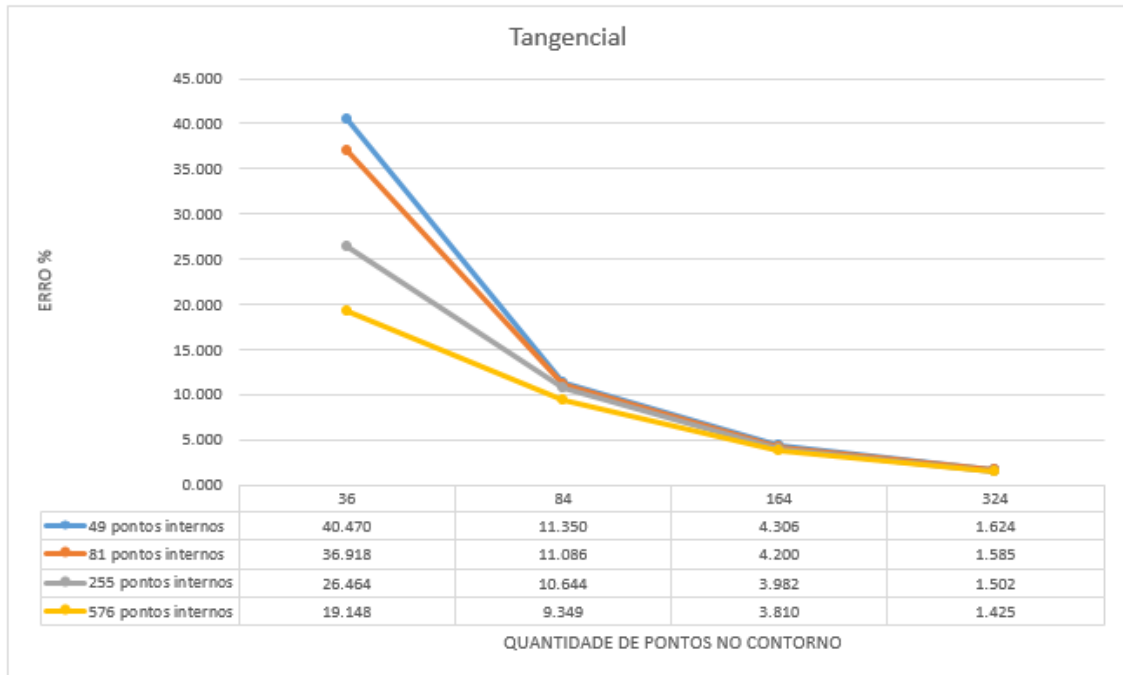
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 34 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função logarítmica



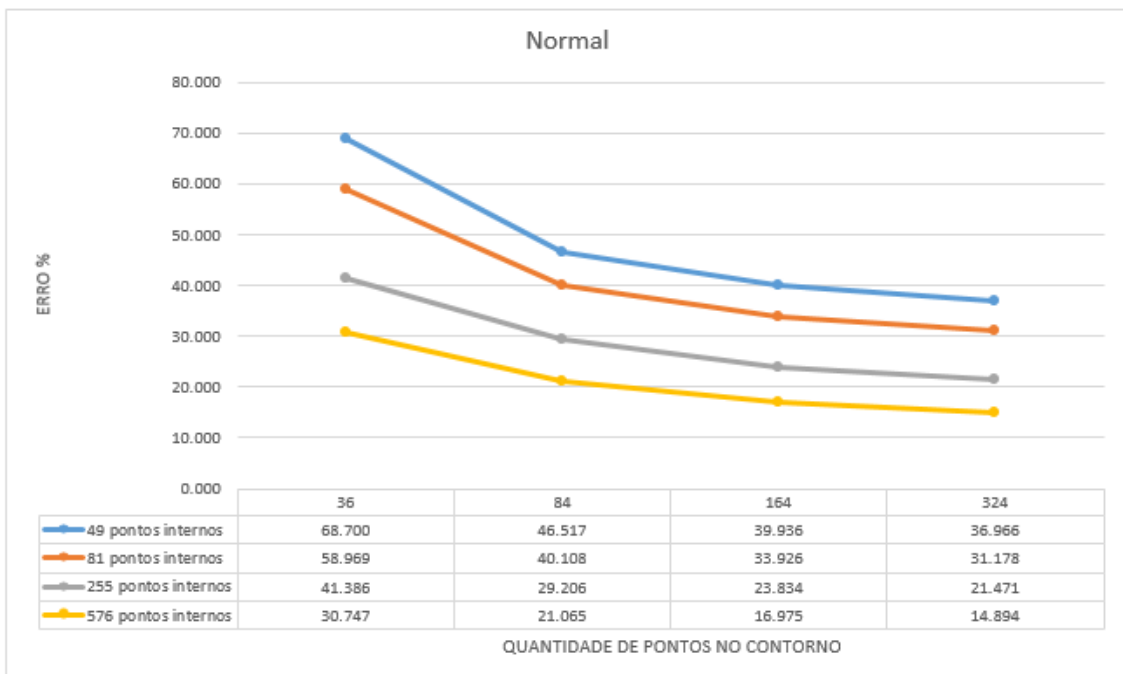
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 35 – Derivada tangencial para malha 5x5 e função logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

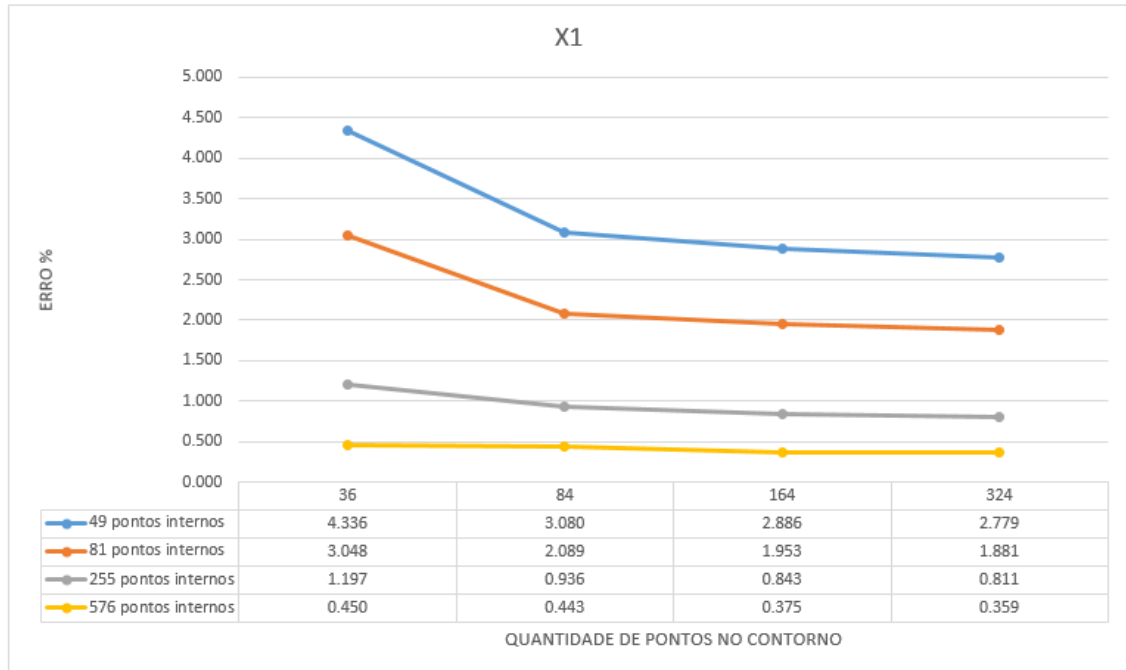
Figura 36 – Derivada normal para malha 5x5 e função logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

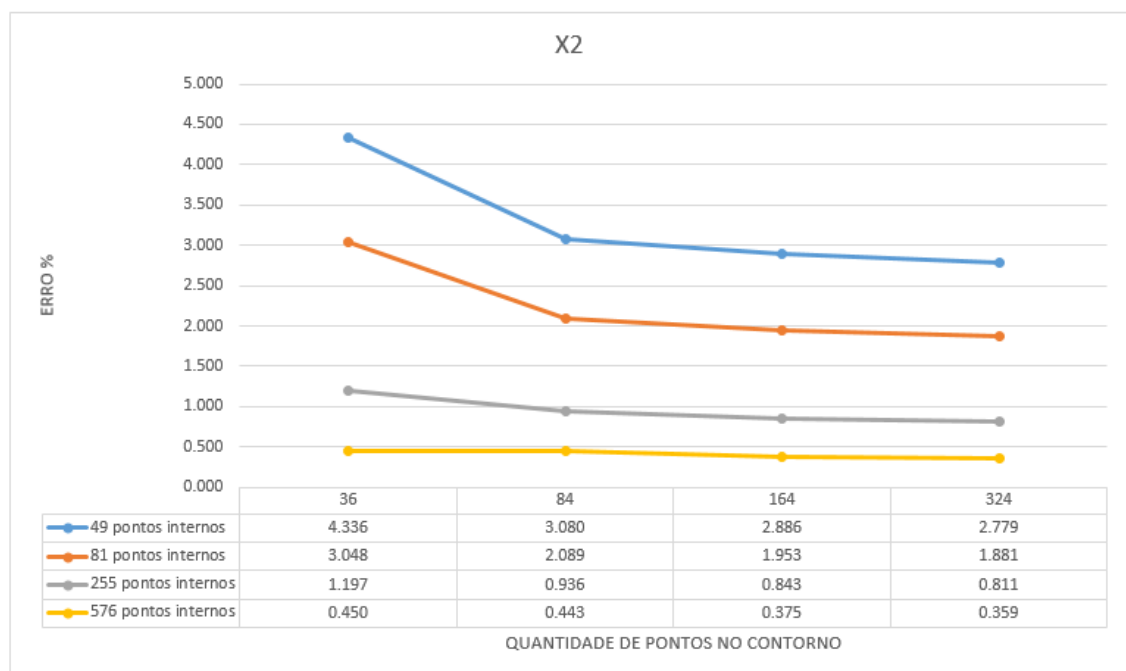
As Figuras 37 e 38 apresentam os resultados obtidos nos pontos internos.

Figura 37 – Derivada direcional X1 para malha 5x5 e função radial logarítmica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 38 – Derivada direcional X2 para malha 5x5 e função radial logarítmica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

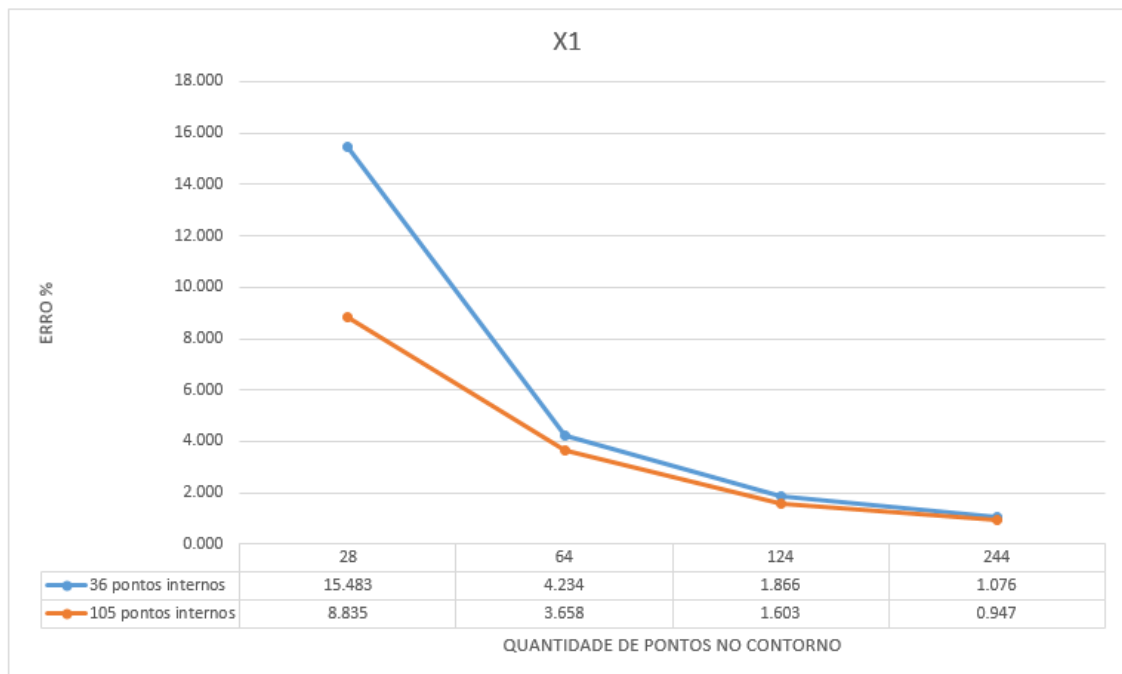
Pode-se concluir que, assim como na função de base radial cúbica, obteve-se o mesmo comportamento do problema com a dimensão 1x1, apresentando a robustez do método.

#### 5.1.2.5 Malha Esbelta 1x0,5 e Função de Base Radial Cúbica

Visando verificar a capacidade do método em diferentes situações, propõe-se avaliar a derivada em uma geometria esbelta. Com os dados apresentados, percebe-se que a malha (quantidade de pontos base no contorno e internamente) e a função de base radial influenciam no resultado. Com isso, realizou-se a proposta com uma malha esbelta.

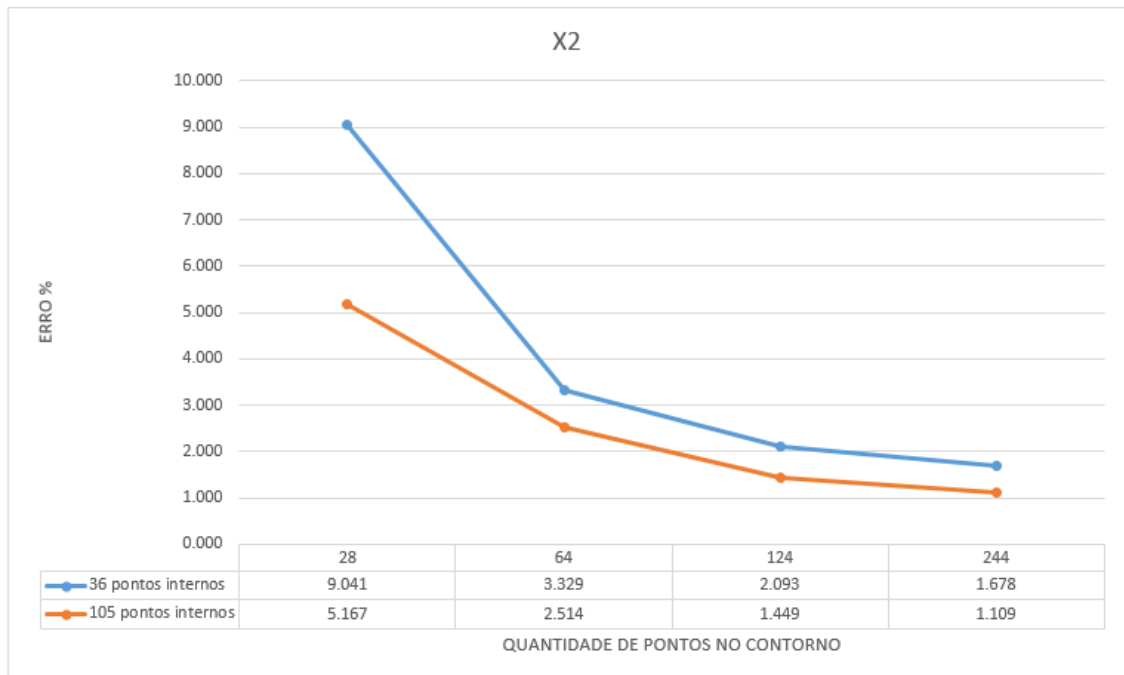
As Figuras 39 a 42 apresentam os resultados obtidos.

Figura 39 – Derivada direcional X1 para malha 1x0,5 e função radial cúbica



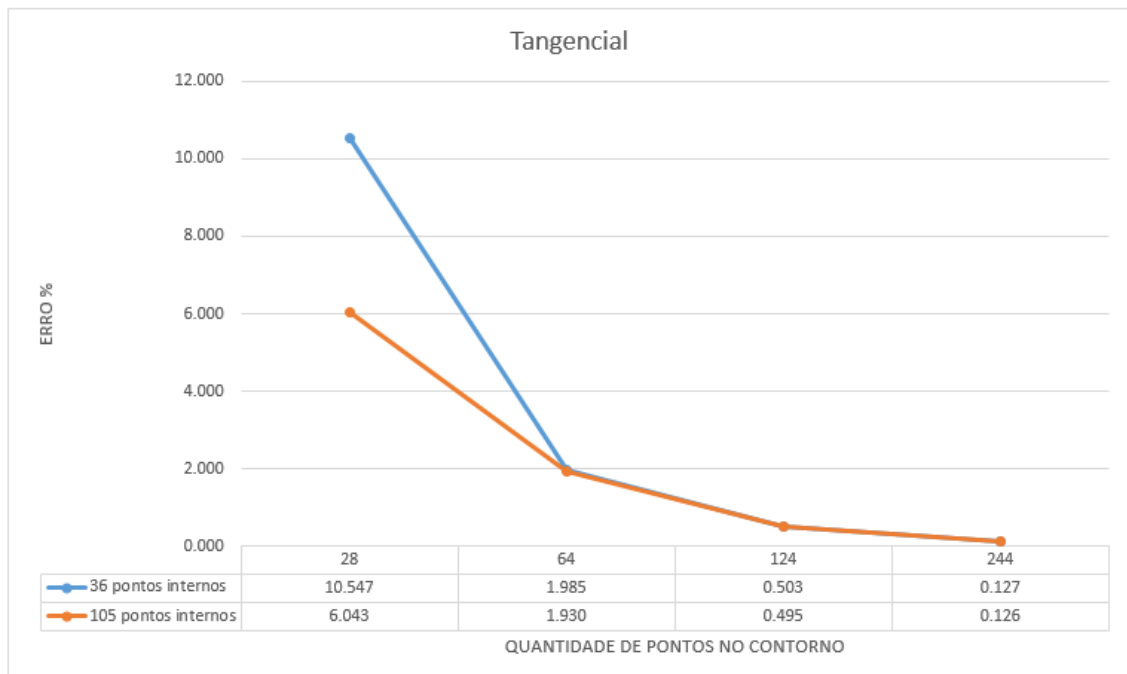
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 40 – Derivada direcional X2 para malha 1x0,5 e função radial cúbica



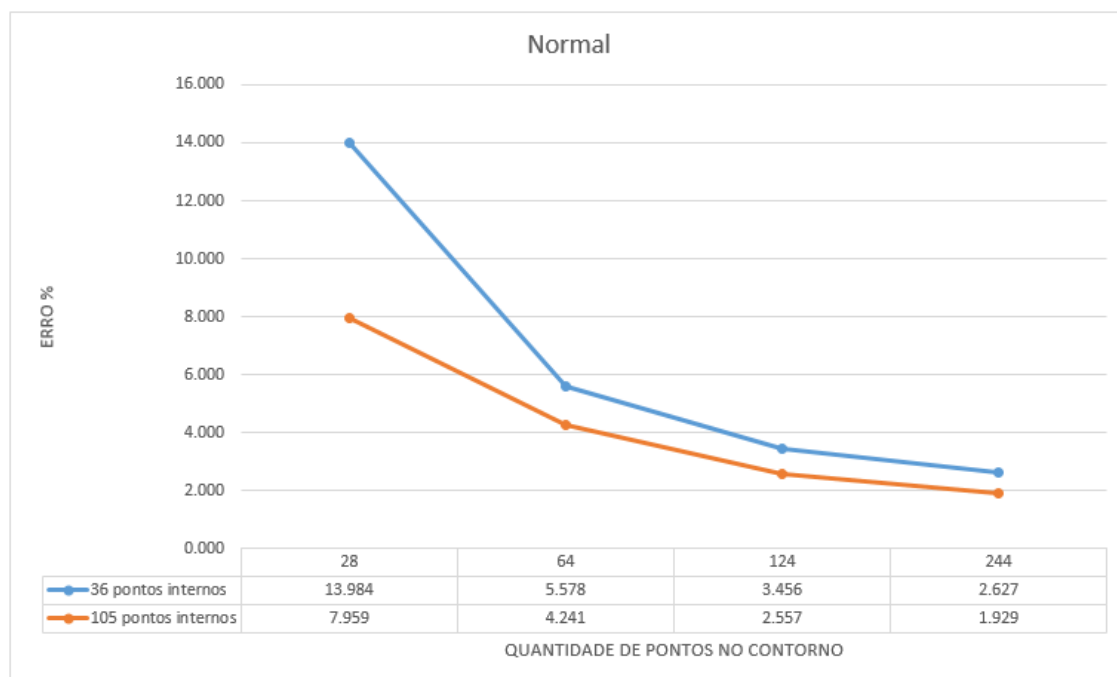
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 41 – Derivada tangencial para malha 1x0,5 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 42 – Derivada normal para malha 1x0,5 e função radial cúbica



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Nas Figuras 39 e 40 se percebe que o modelo proposto converge. O erro segue o padrão esperado e decresce conforme se aumenta o número de pontos base.

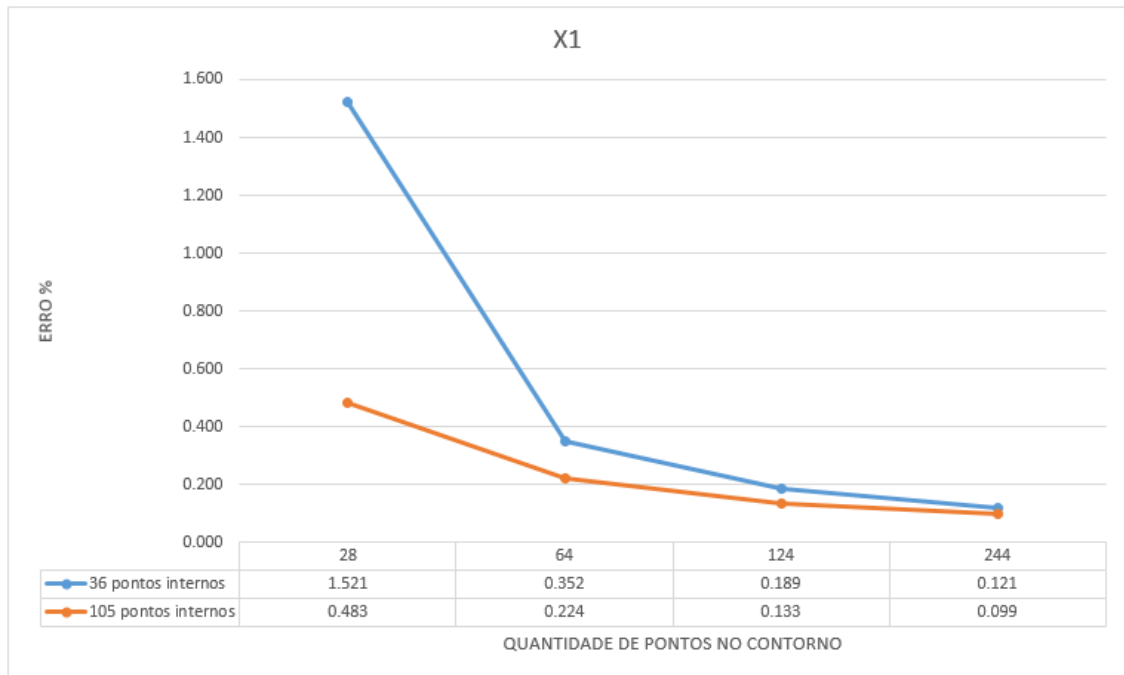
Com relação a Figura 40 percebe-se que obteve um resultado do erro diferente da Figura 39. Isso se pode justificar dado o número menor de pontos no sentido da derivada que se quer analisar, resultando em menos informações para aquela direção e, por consequência, um erro maior.

Novamente a derivada tangencial teve destaque, onde a mesma apresenta um erro em torno de 0,1%. A derivada normal também convergiu, com resultados melhores do que se obteve com o teste considerando a malha 1x1, pois agora os contornos horizontais estão mais próximos, facilitando a interpolação de valores internos a partir de pontos de contorno.

As Figuras 43 e 44 apresentam os resultados obtidos quando se analisa os pontos internos.

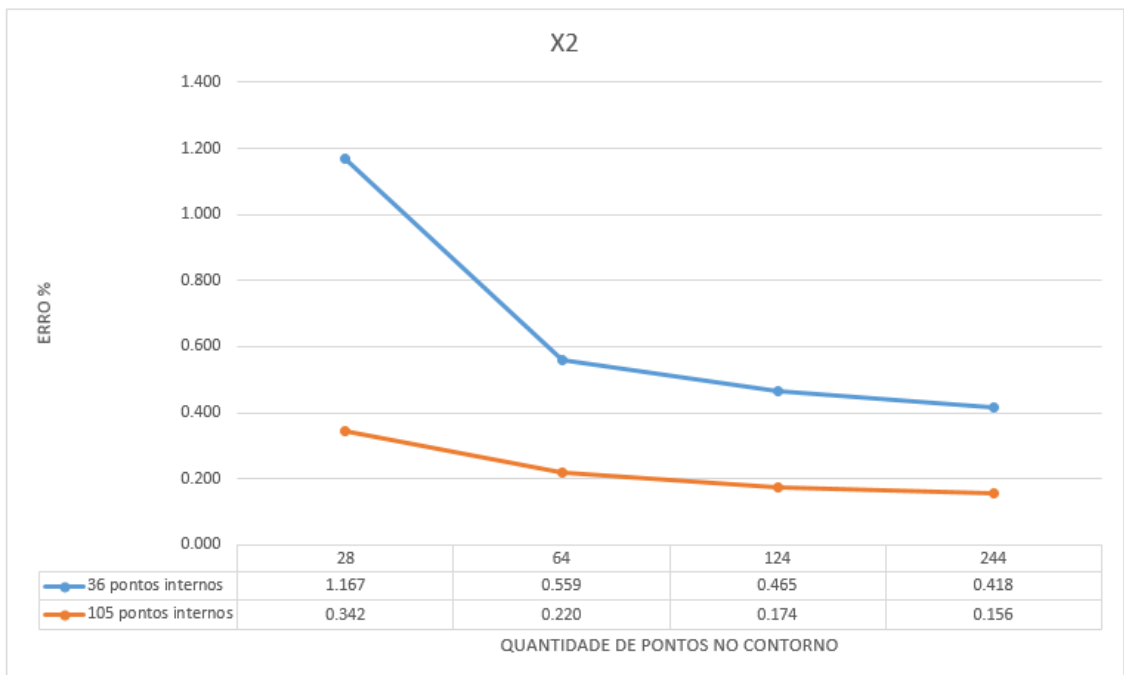


Figura 43 – Derivada direcional X1 para malha 1x0,5 e função radial cúbica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 44 – Derivada direcional X2 para malha 1x0,5 e função radial cúbica nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Conforme vem se apresentando as derivadas espaciais calculadas através da interpolação com funções de base radial, novamente verifica-se uma superioridade se comparado

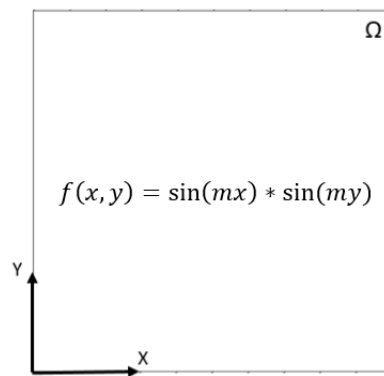
com os pontos funcionais nos contornos, inclusive com a densidade de malha próximos.

### 5.1.3 Caso III - Problema Bidimensional com Natureza Trigonométrica

O terceiro caso em que será aplicado o método de interpolação através de funções de base radial é um problema bidimensional de natureza trigonométrica. Assim como o caso II, a função a ser aproximada possui duas variáveis, entretanto, propositalmente se aplica uma função que tem comportamento cíclico para se analisar o desempenho do método proposto.

A Figura 45 apresenta o croqui representativo do caso III.

Figura 45 – Croqui Representativo do Caso III



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Na Equação apresentada na Figura 45 existe o fator modificador "m". Essa escolha tem por propósito verificar o comportamento do método a medida com que se varia a frequência da função analítica.

As soluções analíticas parciais das derivadas  $X_1$ ,  $X_2$ , tangencial e normal da equação apresentada na Figura 45 é apresentada nas Equações 5.12 a 5.15.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = m \cos mx * \sin my \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = m \sin mx * \cos my \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -m * \cos mx \sin my \sin \theta + m * \cos my \sin mx \cos \theta \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = m * \cos mx \sin my \cos \theta + m * \cos my \sin mx \sin \theta \quad (5.15)$$

Para o caso III, considerando os resultados obtidos nos casos I e II, optou-se por seguir a análise com a melhor função de base radial utilizada, sendo ela a FBR cúbica e as seguintes malhas:

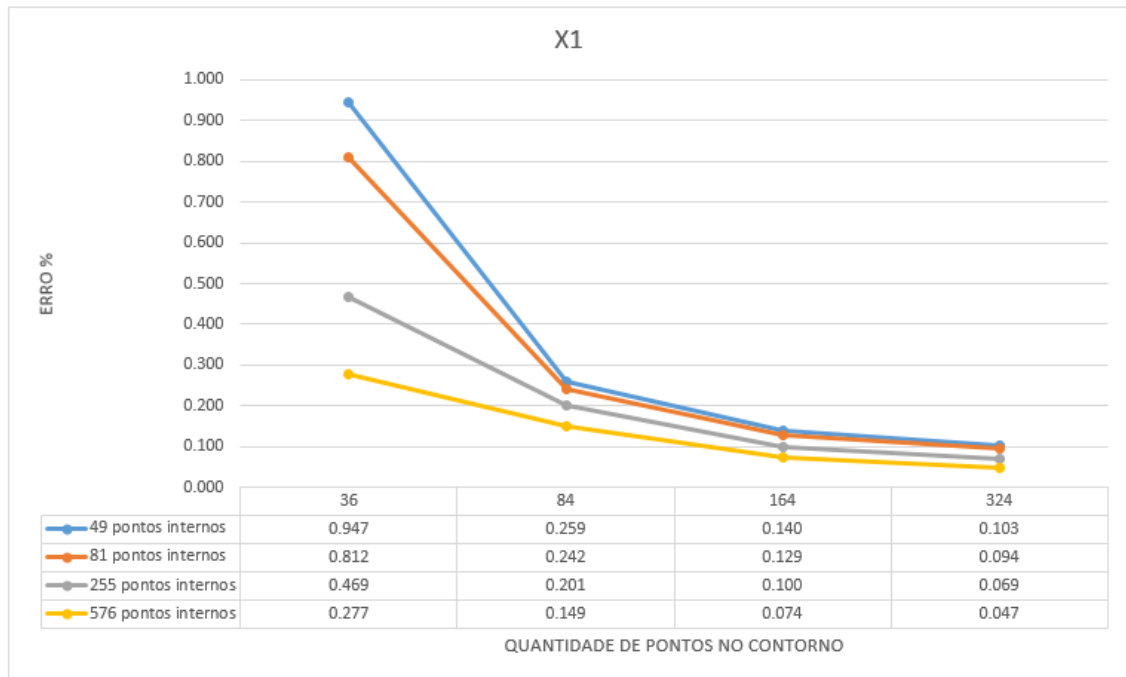
- Malha quadrada 1x1 com fator modificador  $m=1$ 
  - Quantidade de pontos base no contorno: 36, 84, 164 e 324;
  - Quantidade de pontos base internos: 49, 81, 255 e 576.
- Malha quadrada 1x1 com fator modificador  $m=\pi$ 
  - Quantidade de pontos base no contorno: 36, 84, 164 e 324;
  - Quantidade de pontos base internos: 49, 81, 255 e 576.
- Malha quadrada 1x1 com fator modificador  $m=3\pi$ 
  - Quantidade de pontos base no contorno: 36, 84, 164 e 324;
  - Quantidade de pontos base internos: 49, 81, 255 e 576.

Manteve-se o mesmo raciocínio do caso II, dividindo os resultados entre internos e no contorno para uma melhor análise das variáveis.

#### 5.1.3.1 Malha Quadrada 1x1 com FBR cúbica e fator modificador $m=1$

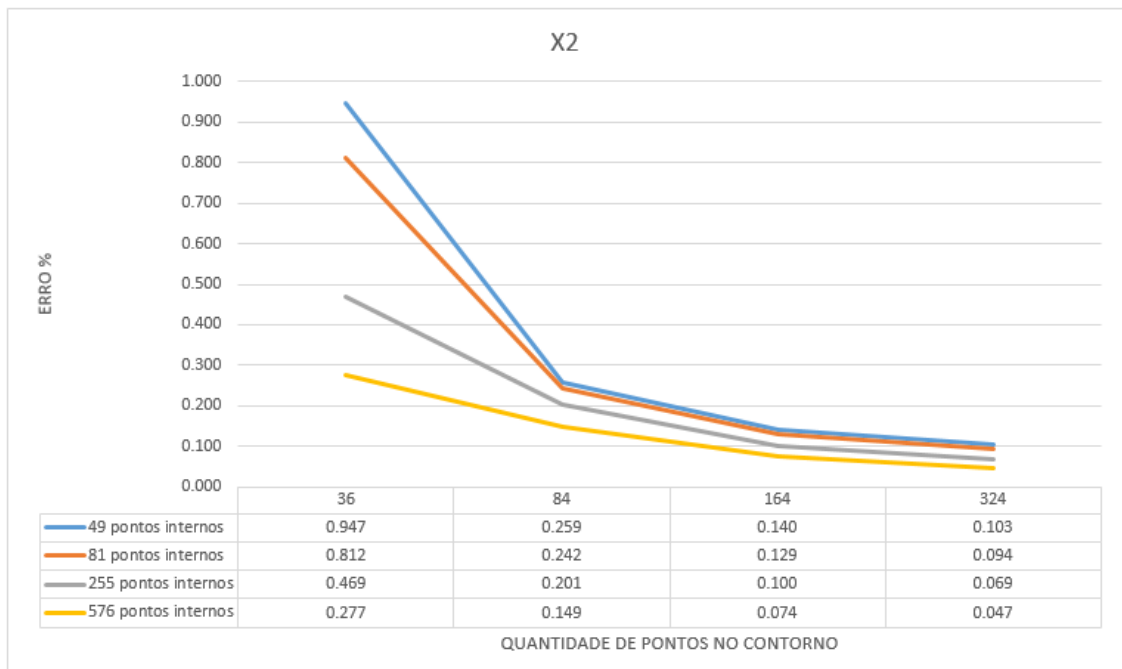
As Figuras 46 a 49 apresentam o resultado calculado para o contorno.

Figura 46 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e m=1



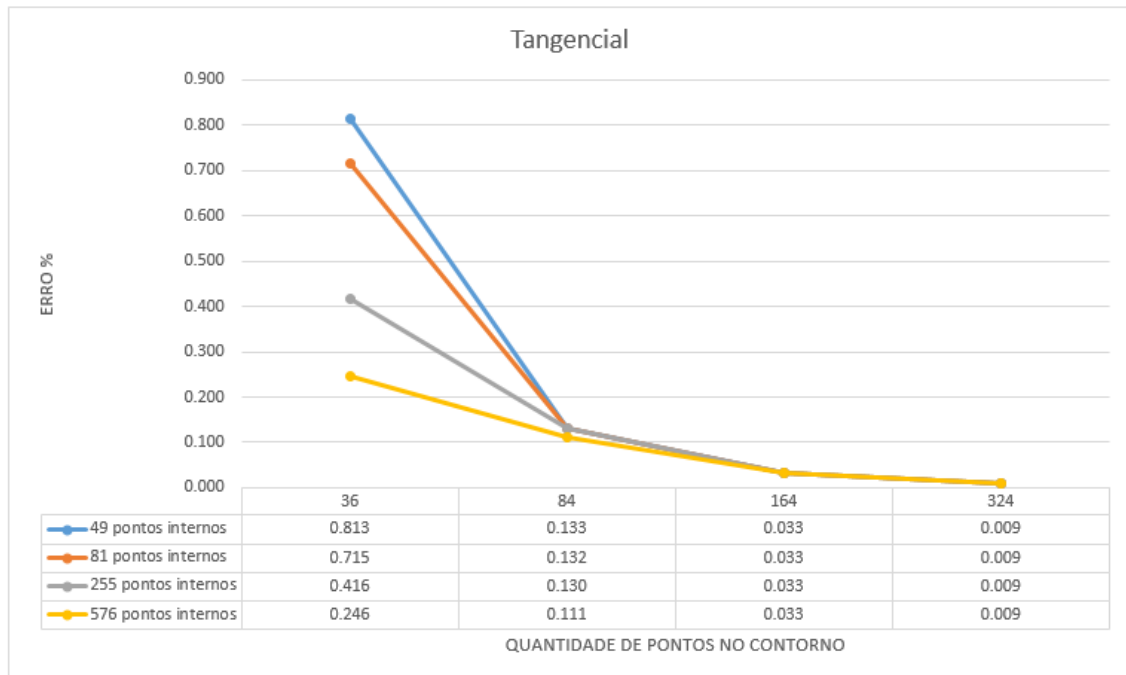
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 47 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e m=1



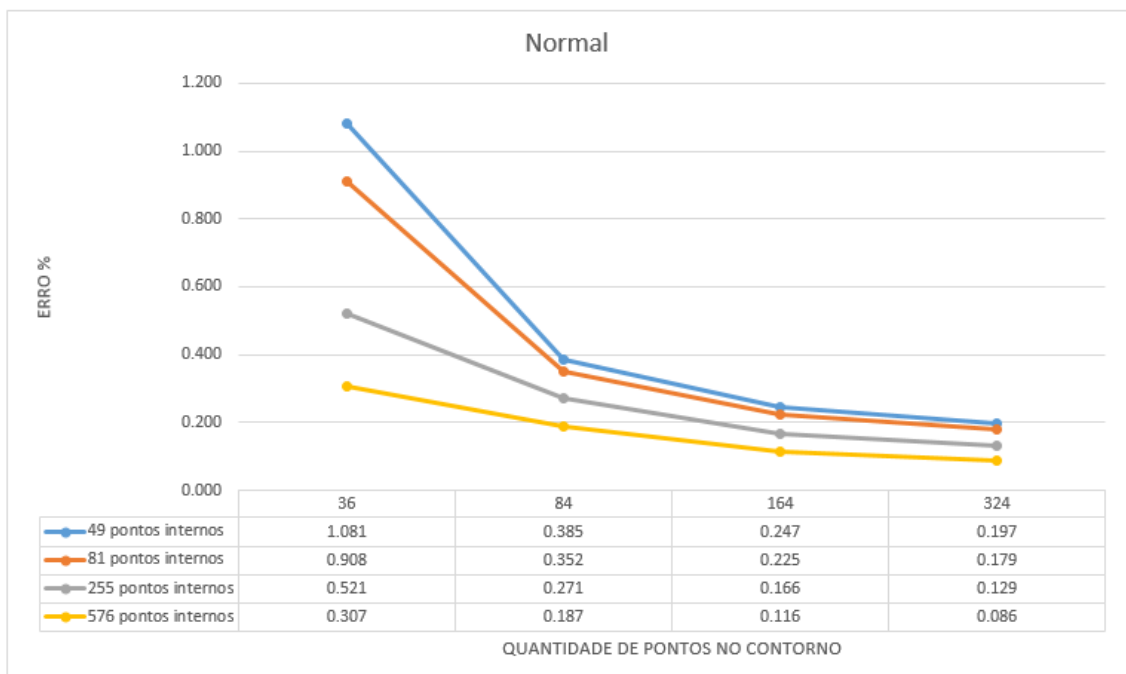
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 48 – Derivada tangencial para malha 1x1, FBR cúbica e m=1



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 49 – Derivada normal para malha 1x1, FBR cúbica e m=1



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Pode-se perceber que o método converge muito bem para a equação proposta considerando os parâmetros escolhidos. Dos casos apresentados os resultados obtidos para as derivadas X1 e X2 apresentados nas Figuras 46 e 47 possuem margem de erro

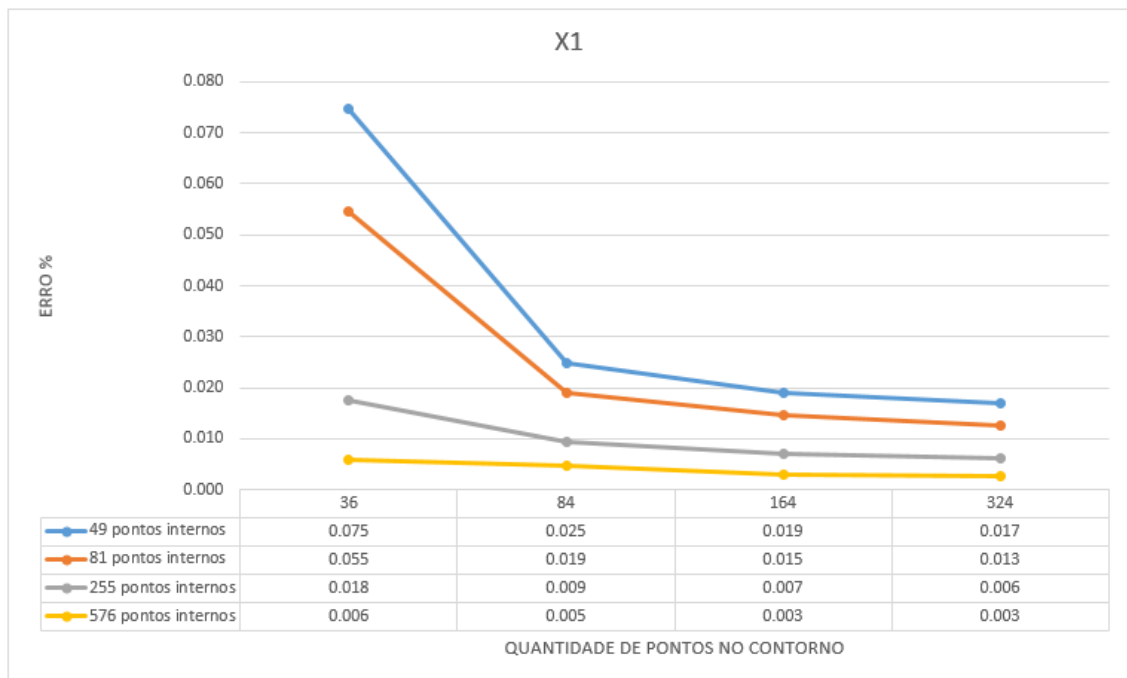
na ordem de 0,05%, tendo um erro satisfatório para a complexidade da equação. Assim como os demais casos, dado a geometria quadrada e a característica da função analítica os resultados de X1 e X2 foram semelhantes.

A derivada tangencial novamente apresentou um desempenho muito bom comparada aos demais resultados, sendo um dos destaques do método. Não necessitou de grande quantidade de pontos para um resultado satisfatório, além disso, considerando a malha analisada mais densa e erro foi de 0,009%.

A derivada normal, apesar de mais complexa, convergiu muito bem obtendo erros menores do que 0,02%.

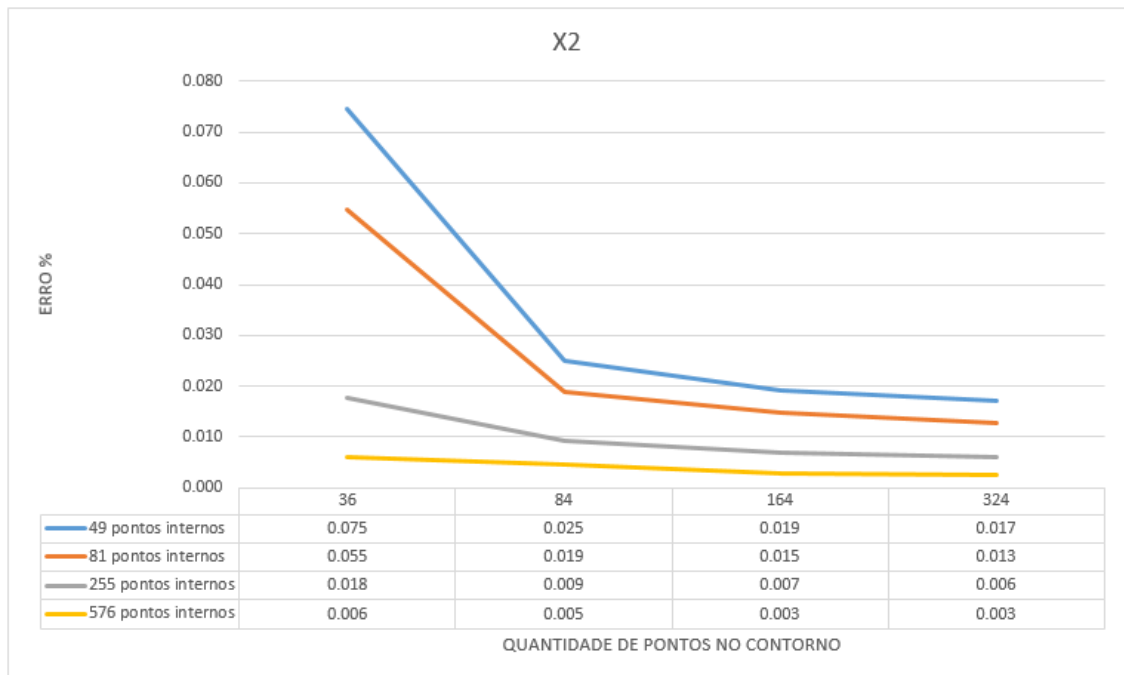
Considerando a análise dos resultados no interior, espera-se que, dado os resultados obtidos no caso II, as derivadas direcionais X1 e X2 no interior tenham um comportamento superior aos resultados obtidos no contorno. As Figuras 50 e 51 apresentam os resultados no interior.

Figura 50 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e m=1 nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 51 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e m=1 nos pontos internos



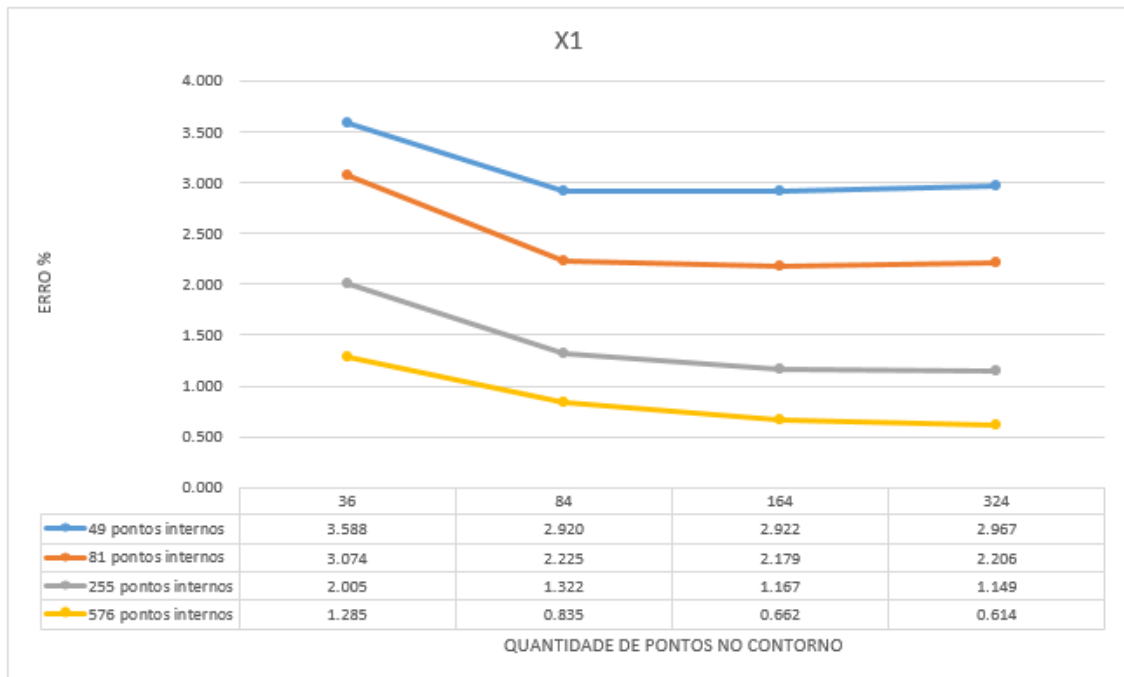
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Conforme se espera dos resultados nos pontos internos, os valores apresentados nas Figuras 50 e 51 mostram que nos pontos base internos o erro pode ser drasticamente reduzido. O erro médio considerando a malha mais densa foi de 0,003%.

#### 5.1.3.2 Malha Quadrada 1x1 com FBR cúbica e fator modificador $m=\pi$

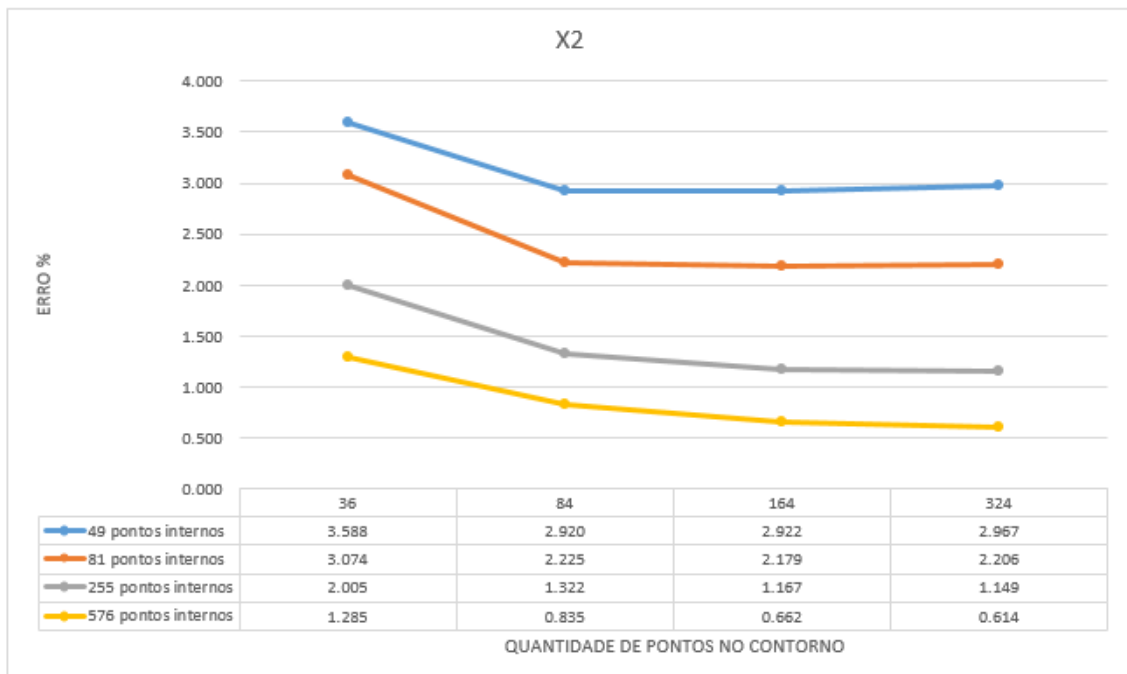
As Figuras 52 a 55 apresentam o resultado calculado.

Figura 52 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=\pi$



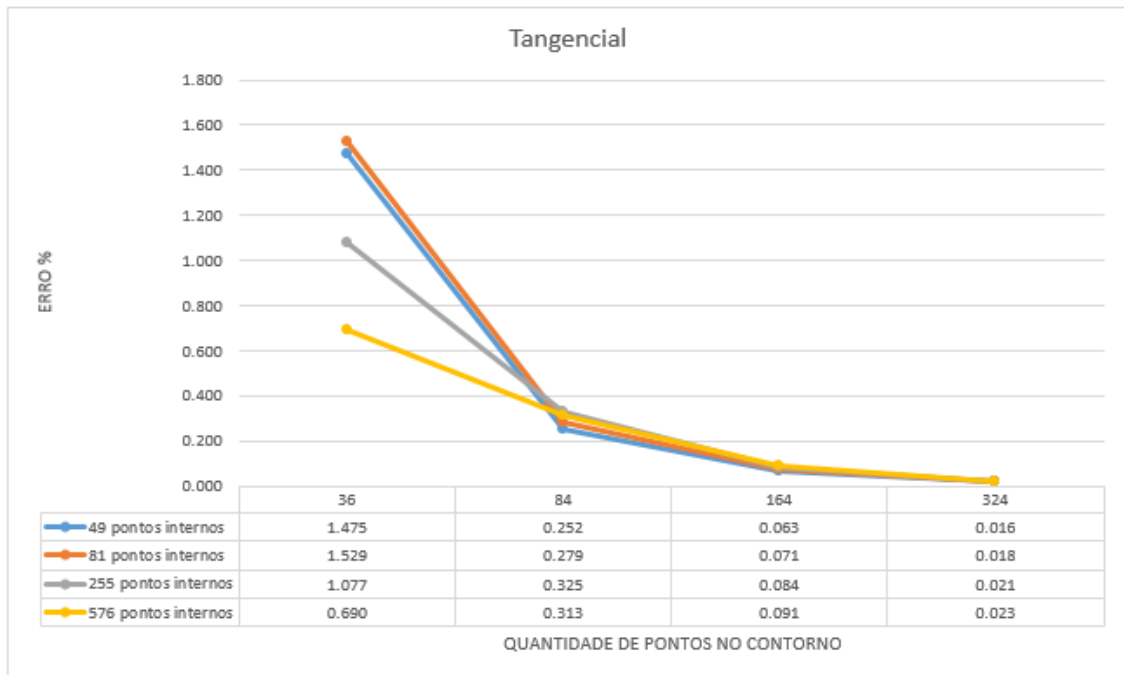
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 53 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=\pi$

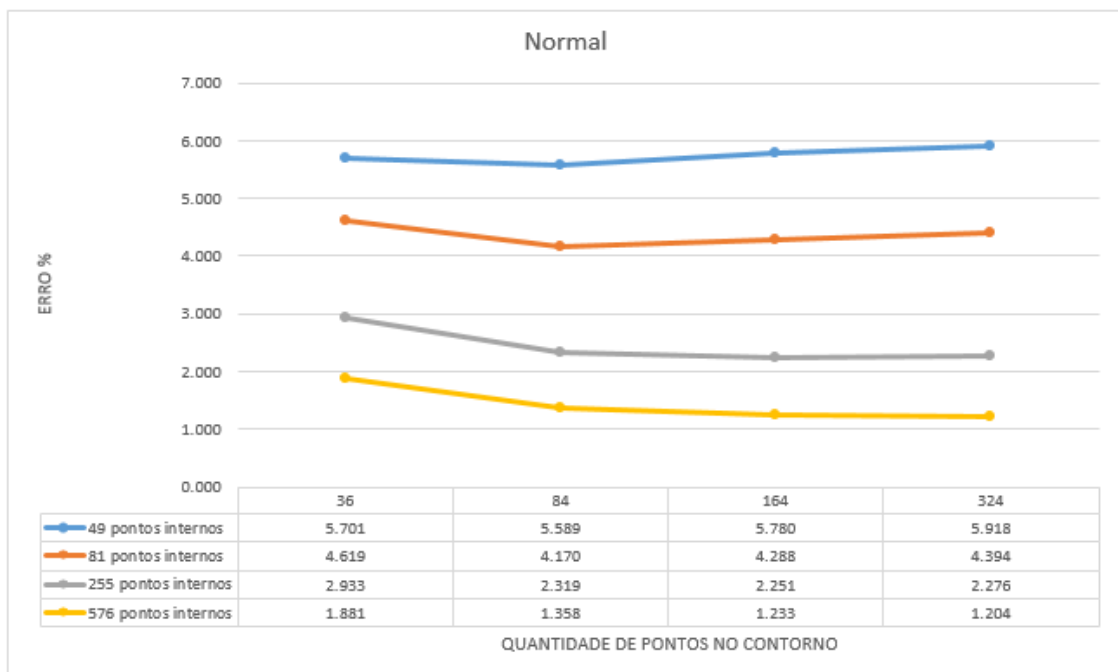


Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022



Figura 54 – Derivada tangencial para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=\pi$ 

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 55 – Derivada normal para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=\pi$ 

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Ao aumentar o valor de  $m$ , conseqüentemente aumenta-se a frequência das funções trigonométricas resultando numa variação de valores mais rápida a medida com que se move no espaço geométrico do domínio. Desta forma, espera-se que esse parâmetro traga

maior desafio para o método.

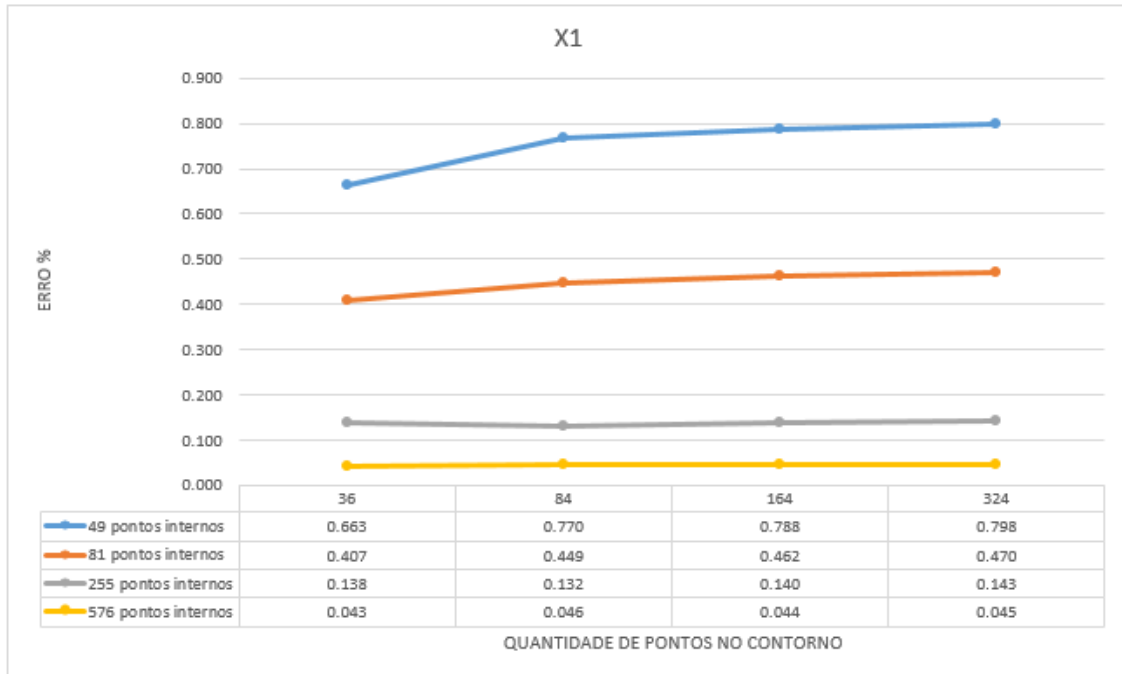
Pode-se perceber que o método converge para a equação proposta considerando os parâmetros escolhidos, entretanto, necessita-se de uma malha mais densa para que o erro chegue próximo de 0,5%, como pode ser visto nas Figuras 50 e 51. Os resultados, no entanto, apresentaram certa linearidade no valor do erro conforme se aumentava a quantidade de pontos base no contorno. Espera-se essa condição visto que, dado as características da função analítica escolhida se tem os extremos 0 e 1 do domínio contantes, aumentando a importância da malha interna.

A derivada tangencial conforme vem se apresentando, mostrou-se novamente satisfatória, convergindo muito bem e obtendo erro na ordem de grandeza de 0,03%.

A derivada normal teve um comportamento semelhante ao das derivadas direcionais X1 e X2 com relação ao aumento da quantidade de pontos base no contorno. Dado a dificuldade que a derivada normal vem se apresentando, os erros foram significantes, exigindo uma densidade de pontos base para a convergência do método.

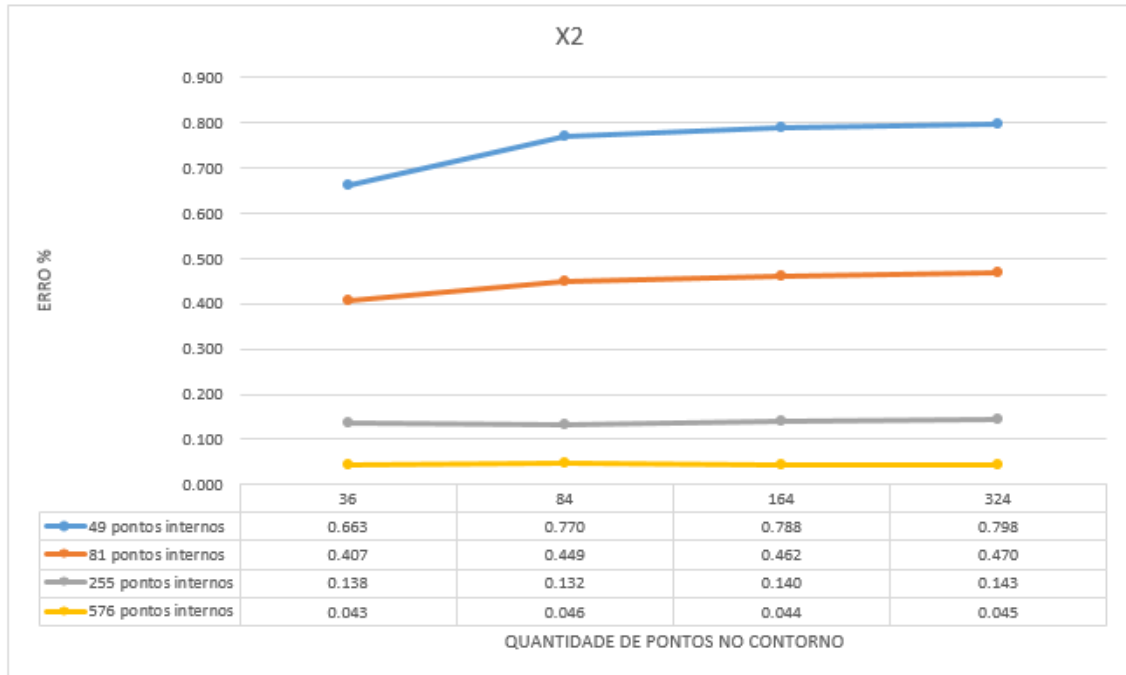
As Figuras 56 e 57 apresentam os resultados no interior.

Figura 56 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=\pi$  nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 57 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=\pi$  nos pontos internos



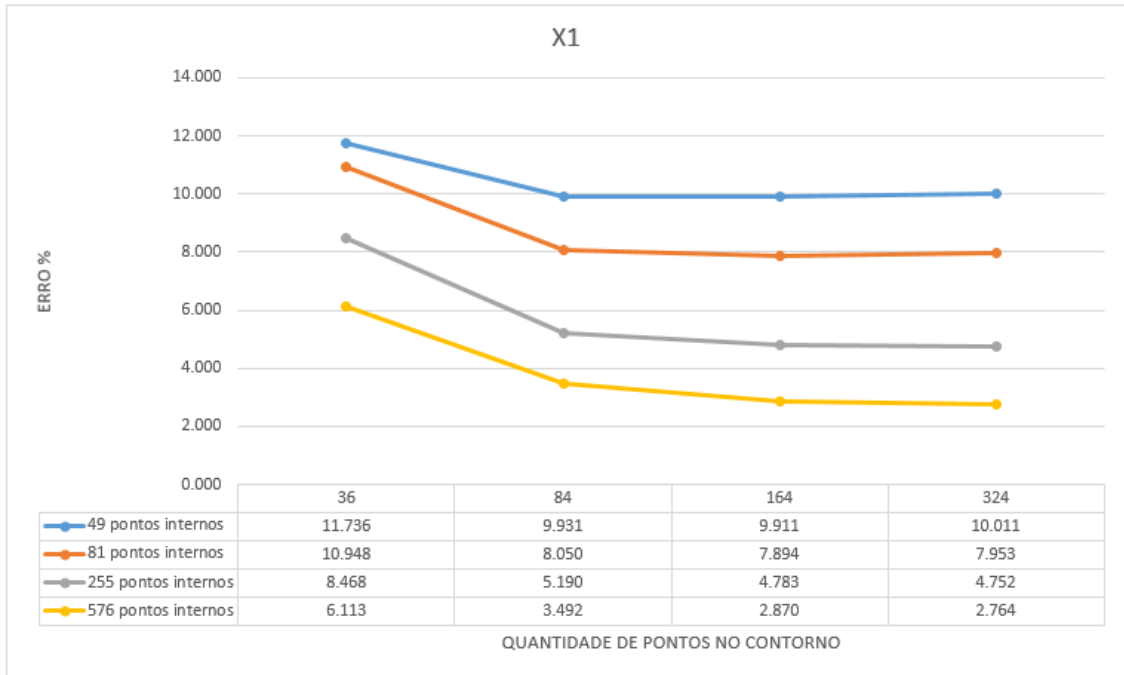
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Como se pode observar nas Figuras 56 e 57, os erros não decrescem a partir de um determinado número de pontos base, embora os resultados sejam razoáveis. É preciso usar uma malha mais densa internamente para que o erro caia ainda mais. O erro médio ainda é menor se comparada com os resultados obtidos no contorno, ficando na ordem de 0,05% em sua malha mais densa.

### 5.1.3.3 Malha Quadrada 1x1 com FBR cúbica e fator modificador $m=3\pi$

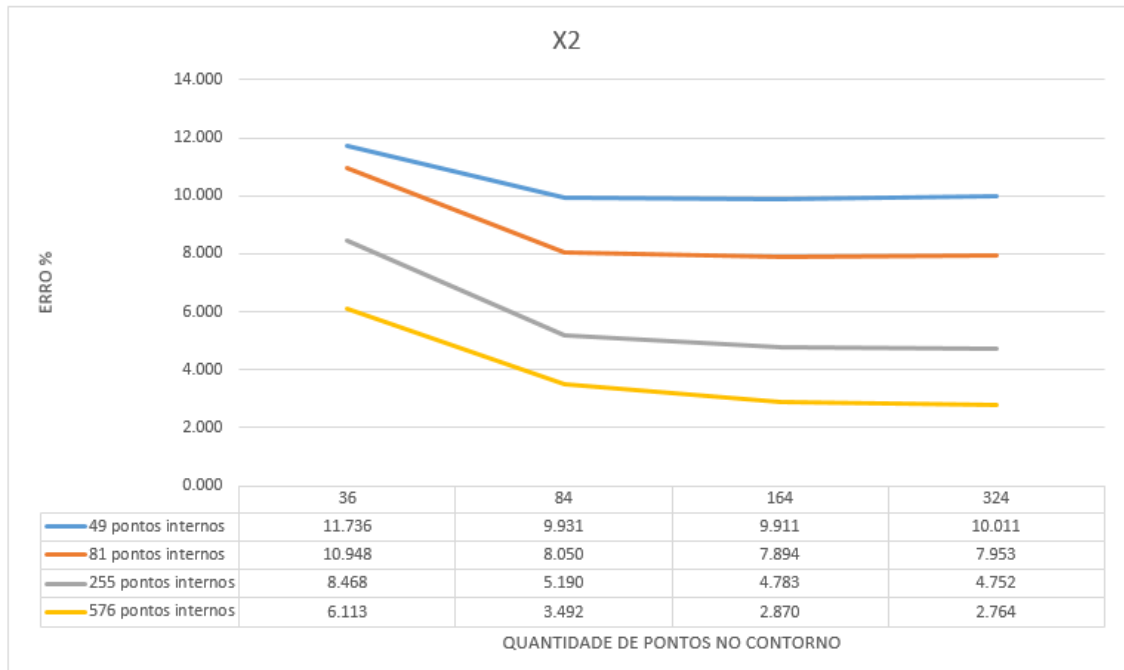
As Figuras 58 a 61 apresentam o resultado calculado.

Figura 58 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=3\pi$

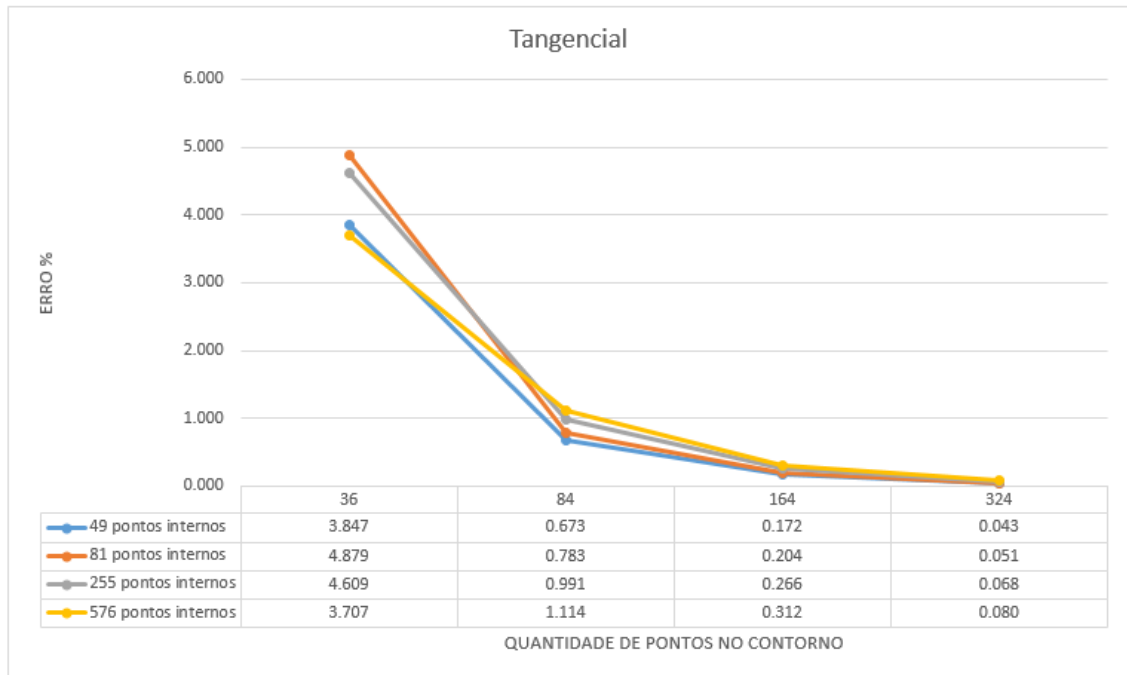


Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

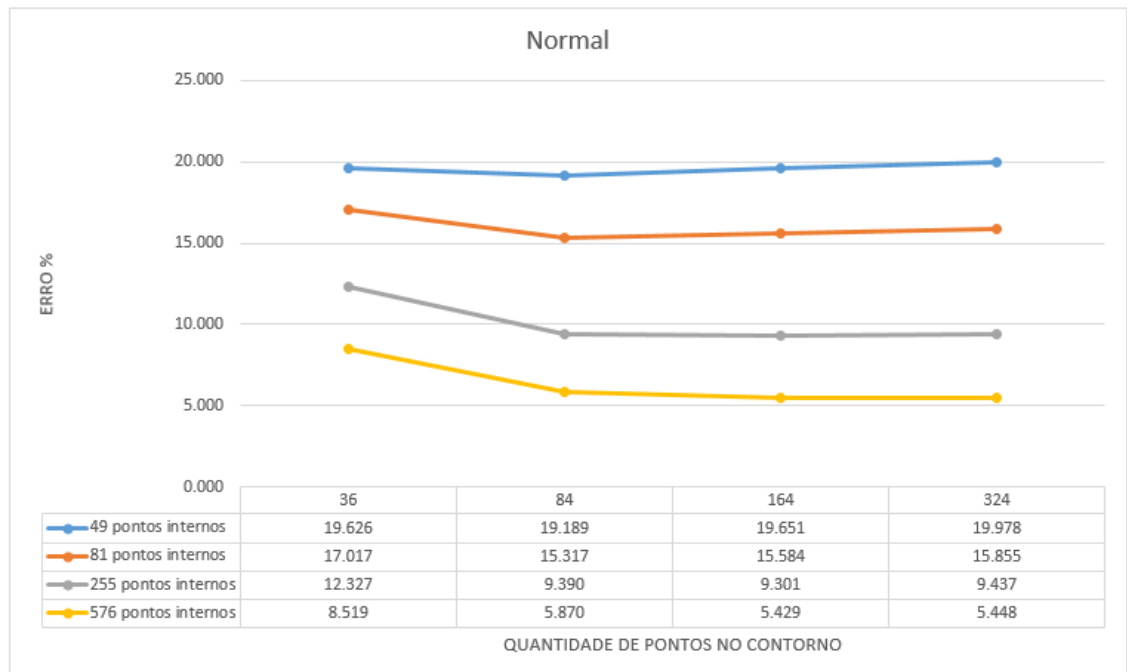
Figura 59 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=3\pi$



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 60 – Derivada tangencial para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=3\pi$ 

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 61 – Derivada normal para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=3\pi$ 

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

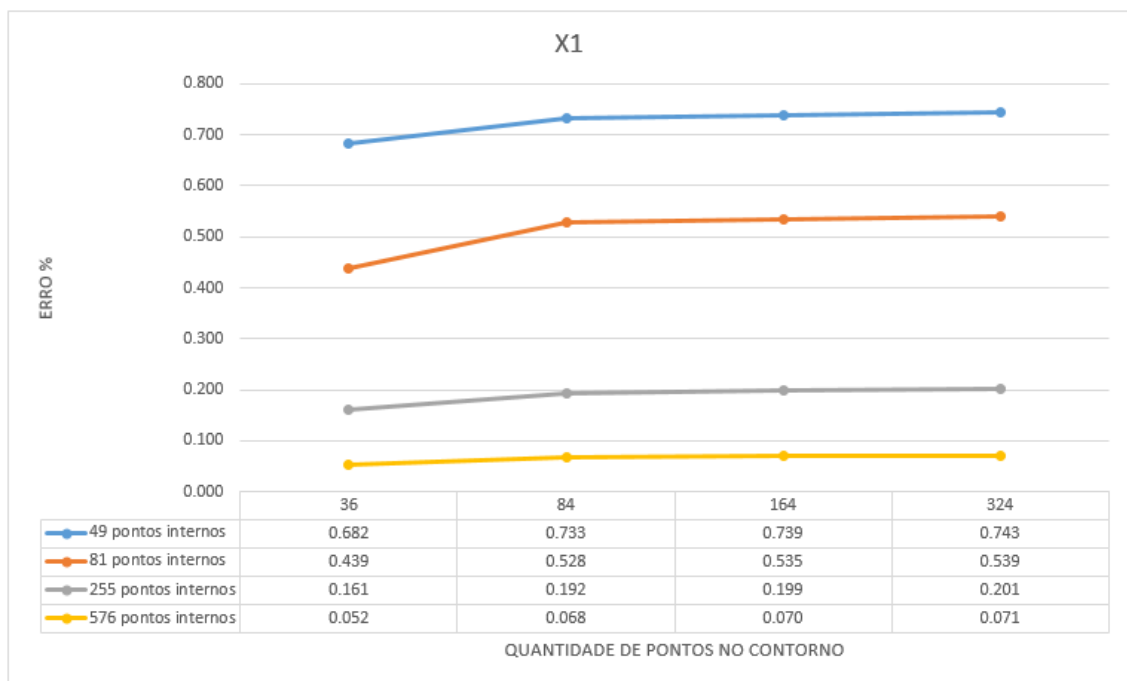
Novamente se percebe um aumento do erro percentual médio conforme se aumenta o valor de  $m$ , reforçando o hipótese que aumentar a frequência das funções trigonométricas traz um maior desafio computacional para o método.

Assim como se ocorreu quando  $m=\pi$ , necessitou-se de uma malha mais densa para que o erro seja reduzido, embora o erro ainda seja significativo para as derivadas direcionais X1 e X2, como pode ser visto nas Figuras 58 e 59. Os resultados mantiveram-se a mesma característica de linearidade no valor do erro percentual conforme se aumentava a quantidade de pontos base no contorno, reforçando a importância da malha interna.

A derivada tangencial, conforme vem se apresentando, novamente convergiu muito bem e se obteve um erro na ordem de grandeza de 0,08%.

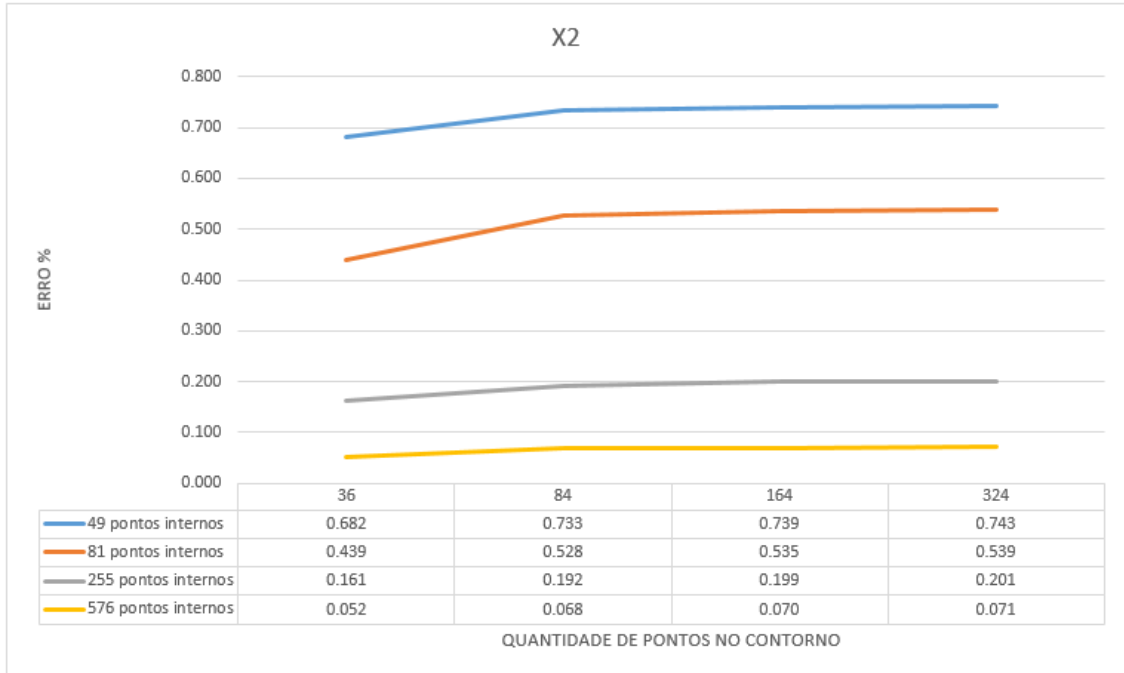
As Figuras 62 e 63 apresentam os resultados no interior.

Figura 62 – Derivada direcional X1 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=3\pi$  nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Figura 63 – Derivada direcional X2 para malha 1x1, FBR cúbica e  $m=3\pi$  nos pontos internos



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2022

Como se pode observar nas Figuras 62 e 63, a progressão do erro percentual se manteve com o mesmo padrão apresentado quando  $m=\pi$ , não decrescendo a partir de um determinado número de pontos base, embora os resultados sejam razoáveis. Os resultados que se obteve nos pontos base internos, conforme vem se apresentando, resultaram em um valor de erro menor do que os resultados que se obteve no contorno do domínio, ficando na ordem de 0,071% em sua malha mais densa.

## 6 Considerações Finais

Devido ao fato do método dos elementos de contorno estar emergindo como uma poderosa alternativa ao método dos elementos finitos [32], há uma clara demanda na melhoria das formulações em problemas utilizando o MEC.

Apesar da solução dos métodos aproximados como MEF e MEC serem amplamente utilizados nos dias de hoje e ter bom desempenho em diversos problemas da engenharia, dificuldades como a redução do tempo computacional e adaptação do modelo a certos problemas mais elaborados (problemas não homogêneos, casos dinâmicos etc) ainda existem. Há, portanto, uma demanda por uma formulação numérica, principalmente no contexto do MEC a fim de fornecer ferramentas mais acessíveis que garantam uma precisão satisfatória nos resultados. Propôs-se neste trabalho o cálculo de derivadas espaciais através da interpolação com funções de base radial visando fornecer uma alternativa para o cálculo de derivadas tangenciais no contorno e derivadas direcionais no interior do domínio.

A formulação testada e apresentada nesta dissertação mostrou um comportamento convergente para todos os três casos analisados, ou seja, houve um ganho de precisão com o aumento do número de pontos interpolantes internos e no contorno. Verificaram-se os erros médios calculados comparados em relação a solução analítica para as derivadas direcionais  $X_1$ ,  $X_2$ , tangenciais e normais e em todas as situações os resultados tiveram precisão satisfatória.

De forma global, submeteu-se o método ao aumento de quantidade de nós no contorno e no interior, resultando em um aumento na densidade da malha gradativa. Nesse raciocínio, a observação dos resultados revela a redução dos erros médios percentuais, em alguns casos obtendo até mesmo uma boa precisão na ordem de grandeza de 0,05% para as derivadas direcionais. Os resultados da derivada normal no limite foram apenas aceitáveis. Isso se justifica porque seu valor depende muito pouco de valores adjacentes no contorno e fortemente da densidade de pontos internos. No entanto, a conclusão mais importante refere-se à alta precisão dos resultados obtidos para a derivada tangencial. Dados os três tipos de derivadas analisadas, a derivada tangencial se demonstrou a mais precisa, chegando a erros na ordem de grandeza de 0,009%. Tal fato é o mais importante, pois o baixo erro e a relativo custo computacional torna-se possível a utilização de funções de base radial na interpolação para cálculo deste tipo de derivada, que é importante em diversas aplicações práticas. Tal derivada somente poderia ser calculada com boa precisão usando a formulação hipersingular do Método dos Elementos de Contorno, bem mais complicada, pois impõe a derivação analítica das soluções fundamentais e um tratamento especial para as singularidades de alta ordem.



Tem-se como escopo para trabalhos futuros ampliar o exame de outras funções radiais e a solução de outros campos escalares, entretanto já se pode concluir que o desempenho da função radial cúbica é inteiramente satisfatório, confirmando as conclusões obtidas preliminarmente no trabalho de Massaro[34], em que a função radial cúbica teve ótimo desempenho.

# Referências

- 1 REDDY, J. N. **Introduction to the finite element method**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 1986.
- 2 COSTALONGA, F. **Formulação Com Dupla Reciprocidade Hipersingular Do Método Dos Elementos De Contorno Aplicada Aos Problemas Difusivo-advectivos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Espírito Santo, 2011.
- 3 BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- 4 BERTOLANI, M. **Funções de Base Radial de Suporte Global e Compacto na Aproximação de Superfícies**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Espírito Santo, 2010.
- 5 FASSHAUER, G. E. **Meshfree approximation methods with MATLAB**. [S.l.]: World Scientific, 2007. v. 6.
- 6 BUHMANN, M. D. **Radial Basis Functions**. [S.l.]: Cambridge, 2003.
- 7 CHENEY, E. W. **Introduction to approximation theory**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- 8 DAVIS, P. J. **Interpolation and approximation**. [S.l.]: Courier Corporation, 1975.
- 9 DUCHON, J. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. **Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique**, EDP Sciences, v. 10, n. R3, p. 5–12, 1976.
- 10 POWELL, M. J. D. et al. **Approximation theory and methods**. [S.l.]: Cambridge university press, 1981.
- 11 WENDLAND, H. **Scattered data approximation**. Cambridge University Press, 2005.
- 12 KANSA, E. J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—ii solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. **Computers & mathematics with applications**, Elsevier, v. 19, n. 8-9, p. 147–161, 1990.
- 13 NARDINI, D.; BREBBIA, C. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. **Applied mathematical modelling**, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 157–162, 1983.
- 14 LOEFFLER, C. **Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar**. Tese (Doutorado), 1988.

- 15 PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C. **Dual Reciprocity Boundary Element Method**. [S.l.]: Springer, 1992.
- 16 PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C. Computer implementation of the bem dual reciprocity method for the solution of general field equations. **Communications in applied numerical methods**, Wiley Online Library, v. 6, n. 2, p. 83–92, 1990.
- 17 PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C. On derivatives of the problem unknowns in bem analysis. **Engineering analysis with boundary elements**, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 50–52, 1990.
- 18 PARTRIDGE, P. Approximation functions in the dual reciprocity method. **INTERNATIONAL JOURNAL OF BOUNDARY ELEMENT METHODS COMMUNICATIONS**, v. 8, p. 1–4, 1997.
- 19 PARTRIDGE, P. Towards criteria for selecting approximation functions in the dual reciprocity method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 24, n. 7-8, p. 519–529, 2000.
- 20 LOEFFLER, C. F.; CRUZ, Á. L.; BULCÃO, A. Aproximação direta de integrais de domínio usando funções de base radial com o método dos elementos de contorno.
- 21 LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J.; BARCELOS, H. de M.; BULCÃO, A. Solving helmholtz problems with the boundary element method using direct radial basis function interpolation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 61, p. 218–225, 2015.
- 22 BARBOSA, J.; LOEFFLER, C.; LARA, L. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 108, p. 295–300, 2019.
- 23 BARBOSA, J. P.; LOEFFLER, C. F. Application of boundary element method superposition technique for solving natural frequencies in piecewise homogeneous domains. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 79, n. 4, p. 1131–1144, 2020.
- 24 PINHEIRO, V. P. **Aplicação do Método de Elementos de Contorno com Integração Direta Regularizada a Problemas Advectivo-Difusivos Bidimensionais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Espírito Santo, 2018.
- 25 SOUZA, L. Z. D. **Utilização de Funções de Base Radial de Suporte Compacto na Modelagem Direta de Integrais de Domínio no Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Espírito Santo, 2013.
- 26 BARCELOS, H. **Comparação De Desempenho Entre A Formulação Direta Do Método Dos Elementos De Contorno Com Funções Radiais E O Método Dos Elementos Finitos Em Problemas De Poisson e Helmholtz**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Espírito Santo, 2014.
- 27 CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 7. ed. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016.

- 28 EPPERSON, J. F. **An introduction to numerical methods and analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- 29 SEIFFERT, G. P.; CHIQUETTI, R.; AVILA, S. L. **Cálculo numérico aplicado à engenharia elétrica com python**. IFSC, 2021.
- 30 CHEN, W.; FU, Z.-J.; CHEN, C.-S. **Recent advances in radial basis function collocation methods**. [S.l.]: Springer, 2014.
- 31 GIACCHINI, B. L. Uma breve introdução ao método dos elementos finitos. **Departamento de Matemática: Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais**, 2012.
- 32 BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. [S.l.]: WIT press, 1998.
- 33 ALBUQUERQUE, E. L.; CAMPOS, L. S. **Introdução ao Método dos Elementos de Contorno**. [S.l.], 2017.
- 34 MASSARO, C. **O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos - Advectivos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Espírito Santo, 2001.