Guilherme Schultz Netto

A saturação Lipschitz de uma álgebra

Vitória

2022

Guilherme Schultz Netto

A saturação Lipschitz de uma álgebra

Dissertação de mestrado apresentada ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Thiago Filipe da Silva

Vitória
2022

Dedico tudo isso e muito mais aos meus pais e à Jade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu pai Valdecir e à minha mãe Marciana, inicialmente por terem acreditado neste meu sonho maluco de estudar Matemática. Ele, por desde os primeiros anos de meus estudos, bem pequeno, me apresentar à *"rainha das ciências"* que conhecia por só ter estudado até a quarta série do ensino fundamental, abandonado por necessidade, e que formou o alicerce de quem sou. Ela, por sempre acreditar em meus sonhos, me apoiar nas mais difíceis decisões, nunca negar quando pedia um livro ou uma revista, pois ler e aprender (nem que seja uma *trivia* numa revista Recreio) é um passo importante para absolutamente tudo, por estar sempre presente naqueles momentos que só uma mãe sabe e por me ensinar a ser a melhor pessoa possível com qualquer um.

Agradeço à Jade, minha luz talismã, que me dá forças e motivos para não abdicar daquilo que me faz bem, sendo mais do que companheira; mais do que jamais poderia pedir; mais que demais.

Agradeço ao Haroldo, que nunca deixou de ter vontade para que sentássemos e tivéssemos uma boa conversa.

Agradeço e muito ao meu orientador, prof. Thiago, que apesar de ter me jogado perdido nesse universo gigante que é trabalhar com Álgebra, não poderia ter feito coisa melhor!

Agradeço aos professores da banca examinadora: prof. Marcelo e profª Thais pelas horas investidas neste trabalho.

Agradeço ao prof. Renan Mezabarba, que esteve sempre solícito às minhas perguntas sobre absolutamente tudo.

Agradeço aos meus antigos orientadores de estudos dirigidos, um primeiro passo pra pesquisa em Matemática, prof. Gisele Teixeira, prof. José Gilvan e prof. Fábio Castro. Também agradeço aos tutores do grupo PET Matemática, que não mediram esforços para ver nosso bem, tanto pessoal quanto acadêmico: prof. Rosa Elvira, prof. Etereldes Gonçalves e prof. Fabiano Petronetto.

Aos professores do curso, um gigante *muito obrigado* por todas as horas e horas dedicadas à educação de nós, meros jovens inconsequentes.

Aos secretários e secretárias que trabalham incessantemente para o nosso melhor, fazendo isso com maestria.

Ao professor Lipman, por ter escrito o artigo mais importante para este trabalho, e por ter gentilmente respondido a algumas perguntas a ele diretamente direcionadas.

Não poderia faltar um agradecimento mais do que especial aos meus queridos amigos que, durante bons 4 anos, estiveram diariamente em meu lado e hoje estão por aí ganhando o mundo (não iria esquecer de vocês: Yuri, Milena, Carol, Gabriel, Rafael, César, Victor, Leandro, Robson, Antônio e Henrique).

Aos meus queridos amigos José, Arthur, Ana, Otávio e Estevão, por passarem madrugadas à fio jogando conversa fora com filosofias baratas e, na maioria das vezes, sem sentido.

Agradeço à FAPES pelo suporte financeiro durante esse último ano de curso.

E a você, leitor: Obrigado por prestigiar minha escrita. Espero que meu jeito *heterodoxo* não te assuste.

"As frases e as manhãs são espontâneas"
(Aldir Blanc)

Resumo

A primeira descrição da saturação Lipschitz de uma álgebra foi dada por (PHAM; TEISSIER, 1969) e depois expandida por vários matemáticos. Aqui faremos um *recap* do feito por Lipman em (LIPMAN, 1975), onde este abordou de maneira puramente algébrica (no sentido de não recorrer para ferramentas geométricas) o conjunto (que mostraremos ser, de fato, um anel), exibindo sete propriedades iniciais e depois expandindo o conceito para, entre outras coisas, comparar tal estrutura com a saturação definida por Zariski, por exemplo. Portanto, façamos uma revisão dos pré-requisitos e demonstraremos a compatibilidade da saturação Lipschitz perante inclusões, limites e produtos diretos, funtoralidade, descidas por álgebras planas e contrações.

Palavras-chave: Saturação Lipschitz de Álgebras, Fecho Integral de Ideais, Álgebra Comutativa.

Abstract

The first description of the Lipschitz saturation of an algebra was given by (PHAM; TEISSIER, 1969) and later expanded upon by various mathematicians. Here we will *recap* the work done by Lipman in (LIPMAN, 1975), where he approached in a purely algebraic way (in the sense of not resorting to geometric tools) the set (which we will show to be, in fact, a ring), displaying seven initial properties and then expanding the concept to, among other things, compare such a structure with the saturation defined by Zariski, for example. Therefore, let's review the prerequisites and demonstrate the compatibility of Lipschitz saturation with inclusions, direct limits and products, functorality, descents by plane algebras and contractions.

Keywords: Lipschitz Saturation of an Algebra, Integral Closure of Ideals, Commutative Algebra

Sumário

Introdução

A álgebra comutativa está nos encalços de qualquer pessoa, independentemente de classe, gênero ou cor; afinal de contas, é de *(quasi)*-certo que *"a ordem dos tratores, não altera o viaduto"* é um provérbio presente na sociedade como um todo (talvez mais na construção civil). A simplicidade inicial dessas estruturas acaba por nos disponibilizar ferramentas incrivelmente impressionantes, que vão desde permitir o estudo de propriedades globais a partir de locais até encontrar *sujeitos* aparentemente *ocultos* que resolvem possíveis problemas. Os primeiros três capítulos desse trabalho se dedicam à isso, seguindo desde os ensinamentos provindo dos clássicos, como (ATIYAH; MACDONALD, 1994) e (EISENBUD, 1999), até textos modernos como o inspirador (BOSCH, 2022).

O primeiro capítulo trata das localizações e algumas de suas propriedades; apesar de não ser o foco do trabalho, existem demonstrações durante todo o texto que requerem um (ou algum) contato.

O segundo e exponencialmente mais importante, introduz de maneira concisa o produto tensorial de módulos, sendo depois *expandido* para o produto em álgebras.

Por fim, os pré-requisitos *"comuns"* são fechados com uma breve discussão sobre extensões integrais de anéis, que serve como introdução às ferramentas potencialmente utilizáveis no contexto de ideais.

Falando neles, é aqui que nosso trabalho foca no tema principal. O estudo da *tal* **saturação Lipschitz** começou indiretamente por Rudolf Lipschitz num conceito que toda pessoa cujos dedos já tocaram em um livro de análise real conhece: o de funções Lipschitz. A *convergência* destes assuntos se dá inicialmente em (PHAM; TEISSIER, 1969), mais precisamente no aqui denotado Teorema 0.0.1, cuja explicação relativamente mais detalhada (porém ainda longe do requinte que esta pede) aparece como Exemplo 4.4.1, que gosto de referir como uma fina camada de tinta numa refinada tela. É interessante ao leitor que observe aquele que primeiro nos inspirou: considere a aplicação $\phi : \tilde{A} \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{A} \to \tilde{A} \otimes_A \tilde{A}$; considerando o que já temos feito, a saturação A^* é, na notação do Capítulo 4.3,

$$A^* = \left\{ x \in \tilde{A}; \Omega(x) \in \overline{\ker \phi} \right\}$$

Quem indica o *porquê* de toda a comoção é o seguinte teorema:

Teorema 0.0.1 ((PHAM; TEISSIER, 2020), Teorema 1.2)**.** *A^* é o conjunto de frações de A que definem germes de funções Lipschitz no espaço analítico X.*

O objetivo deste texto é estudar propriedades algébricas desta classe de elementos, que surpreendentemente apresenta *quase* tudo que possamos pensar de primeira, como comutar com produtos e limites diretos, condições de funtoralidade, contração e mudanças de base. Todo o trabalho é baseado no único artigo que contém a tão desejada visão algébrica da coisa, a saber, (LIPMAN, 1975); em resumo, o objetivo deste trabalho é demonstrar tais propriedades, deixando de lado *causos* importantes (por questões práticas), como comparar a Saturação Lipschitz com a Saturação de Zariski, apresentada por *(surpresa!)* Oscar Zariski[1], em seu texto (ZARISKI, 1975).

Para tal desenvolvimento, são necessárias ferramentas como a extensão integral de ideais e conceitos como o de limite direto; estes são apresentados anteriormente à nossa acalorada discussão.

A saturação Lipschitz pode ser e é bastante expandida quando abrimos o leque de ferramentas; ora, apenas com ferramentas algébricas provaremos diversos resultados e em contextos mais gerais que o inicialmente pensado no desenvolvimento da ferramenta. E o estudo não para: ano após ano são reportados resultados sobre tal saturação em contextos muito mais amplos que uma comparação à ideia de Zariski. Aqui, definimos e provamos resultados para Álgebras; em (GAFFNEY; SILVA, 2020) há um tratamento adequado para ideais e posteriormente para módulos. Essas ferramentas se mostram úteis pois por exemplo, nas palavras de Thiago da Silva[2] em (SILVA, 2018),

> “Observa-se que a geometria bi-Lipschitz é capaz de detectar grandes alterações locais de curvatura com maior precisão quando comparada a outros padrões de equisingularidade.”

Portanto, acabamos de começar.

[1]Este que foi orientador de Lipman durante seu doutorado.
[2]Orientador de quem vos escreve.

1 Primeiramente, abrir os olhos!

1.1 O local dos Anéis Locais

A pretensão deste texto é conter o máximo possível de informações necessárias, sem que haja a necessidade de se pesquisar por outros resultados referenciados em outros; entretanto, algumas coisas hão de ser levadas como referencial para o leitor e estas estão primordialmente contidas num curso de *Álgebra* para graduação. Por exemplo, ser amigo dos *anéis*, dos *domínios*, dos *grupos* e afins é algo importante, pois estas definições e os resultados importantes, mas iniciais, serão evitados.

Definição 1.1.1. *Durante todo o texto,* ***anel*** *será sinônimo de anel comutativo com unidade, a menos de explícita indicação do contrário.*

Módulos serão de extrema importância; por isso, os definimos:

Definição 1.1.2 (R-Módulos)**.** *Sejam R um anel e 1 sua identidade multiplicativa; Um $R-$módulo M consiste de um grupo abeliano $(M, +)$ e uma operação $\cdot$ (chamada de multiplicação por escalar) de $R \times M$ para M tal que, para $r, s \in R$ e $x, y \in M$, temos*

1. $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
2. $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
3. $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
4. $1 \cdot x = x.$

É direto que:

- Todo ideal de R é $R-$módulo.
- Se R é um corpo, então um $R-$módulo é um $R-$espaço vetorial.

- Todo grupo abeliano pode ser visto como $\mathbb{Z}-$módulo.

De maneira parecida com a feita com anéis, podemos definir o que caracteriza uma aplicação entre $R-$módulos como um morfismo:

Definição 1.1.3. *Uma aplicação $f : M \to N$ de $R-$módulos é um morfismo de $R-$módulos se para quaisquer $x, y \in M$ e $r \in R$,*

$$f(x + y) = f(x) + f(y);$$
$$f(rx) = rf(x).$$

Um outro conceito de extrema importância durante todo o texto é o de $R-$álgebras:

Definição 1.1.4 (R-álgebra)**.** *Uma $R-$álgebra é um anel A que é $R-$módulo, de modo que ambas as adições (do próprio anel e da estrutura de módulo) são iguais e cuja operação por escalar, com $r \in R$ e $a, b \in A$ satisfaz*

$$r \cdot (xy) = (r \cdot x)\, y = x\,(r \cdot y)\,.$$

De maneira equivalente, uma $R-$álgebra é um anel A munido com um morfismo de anéis $\phi : R \to A$, de modo que definamos, para $r \in R$ e $a \in A$,

$$r \cdot a = \phi(r)a.$$

Observe que todo anel pode ser visto como $Z-$álgebra; de fato, basta considerarmos a aplicação $\phi\,(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$ de $\mathbb{Z}$ em R. É válido recordar que, para morfismos de anéis, de módulos, ou de álgebras:

Definição 1.1.5. *Seja $f : M \to N$ um morfismo de anéis (ou $R-$módulos, ou $R-$álgebras). Então dizemos que*

1. *O morfismo f é* ***monomorfismo*** *se for injetivo.*
2. *O morfismo f é* ***isomorfismo*** *se for bijetivo.*

O *espectro* de um anel e todos os seus “participantes” também é de grande importância, por isso faz sentido que o explicitamos:

Definição 1.1.6. *O* ***espectro de um anel*** *é o conjunto de seus ideais primos. O denotamos* $\mathrm{Spec}(R)$*. O* ***espectro maximal de um anel*** *é o conjunto de seus ideais maximais. O denotamos* $\mathrm{Specm}(R)$*.*

Sendo polêmico ou não, o *Lema de Kuratowski-Zorn*[1] é um grande amigo e importante para muitos resultados, inclusive iniciais; façamos aqui uma apresentação muito breve deste. O leitor curioso, caso queira, pode seguir a recomendação dada pela referência para maiores explicações e contextos.

Lema 1.1.7 (Lema de Kuratowski-Zorn, (CIESIELSKI, 1997) - Teorema 4.3.4)**.** *Todo conjunto não-vazio parcialmente ordenado C admite um elemento maximal, desde que todo subconjunto totalmente ordenado de C admita uma cota superior em C.*

Esse resultado é chave para demonstração de diversos resultados, como garantir que todo espaço vetorial tenha uma base, o Teorema de Hann-Banach e o Teorema de Tychonoff (que garante que o produto de uma familia arbitrária de espaços compactos é compacto). Demonstrações e comentários acerca desses resultados também são encontrados na referência indicada no corpo do Lema. Aqui, nos interessa garantir que todo anel (não nulo) terá ideal maximal:

Teorema 1.1.8. *Todo anel não nulo contém ideal maximal.*

Dem.: Seja C o conjunto de todos os ideais próprios de R e considere como relação de ordem nesses ideais a inclusão de conjuntos. Como R é não nulo,

$$\{0\} \subsetneq R \implies C \neq \emptyset.$$

[1] Apesar de ser menos conhecido por esse nome, o Lema foi primeiramente provado por Kuratowski e publicado em 1922; em 1935 uma prova foi indicada por Zorn. Talvez aqui a história não tenha sido uma boa *samaritana*, ofuscando o nome do primeiro.

Seja $C' \subset C$ um subconjunto totalmente ordenado, isto é, que $I, I' \in C' \implies I \subset I'$ ou $I' \subset I$. Assuma que C' seja não vazio. O conjunto

$$J := \bigcup_{I \in C'} I$$

é um ideal próprio de R. De fato, como C' é não vazio, J é não vazio. Tome $s, s' \in J$ tais que $s \in I$ e $s' \in I'$ para $I, I' \in C'$. Assuma, sem perda de generalidade que $I \subset I'$. Ora,

$$s - s' \in I' \subset J \text{ e } rs \in I \subset J, r \in R.$$

Logo, J é ideal de R que é próprio pois

$$\begin{aligned} 1 \in J &\implies 1 \in I, \text{ para algum } I \in C' \\ &\implies I = R. \end{aligned}$$

Daí, $J \subset C$ com J sendo uma conta superior para C'. Pelo Lema 1.1.7, C tem elemento maximal o que significa R ter ideal maximal. ■

Com talvez todos os empecílhios colocados em seus devidos lugares, passamos para nosso trabalho *de facto*.Um conceito super importante da álgebra comutativa é o de localizações de anéis. Aqui, a língua portuguesa faz uma vítima: o termo *localização*, neste contexto, vem como tradução de *localization* e não *location*, apesar de ambas terem a mesma tradução para nossa língua. O importante a saber é que a primeira está associada ao *verbo localizar*, enquanto a última a uma "posição", como uma coordenada. Melhor do que *arremessar* a definição de localização, façamos de maneira construtiva. Ao localizar um anel queremos em algum sentido torná-lo local:

Definição 1.1.9. *Um anel é dito* ***local*** *se contiver exatamente um ideal maximal.*

O corpo obtido pelo quociente de um anel local pelo seu ideal maximal é chamado corpo residual do anel. A definição dada acima é suficiente para muitos contextos, mas às vezes é interessante expandir a ideia por meio de resultados equivalentes:

Proposição 1.1.10. *Sejam R um anel e $\mathfrak{m} \subsetneq R$ um ideal próprio. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$.*
2. *Todo elemento de $R - \mathfrak{m}$ é invertível em R.*
3. *$\mathfrak{m}$ é ideal maximal e todo elemento da forma $1+m$ com $m \in \mathfrak{m}$ é um invertível em R.*

Dem.: Assuma (1) e suponha que $a \in R$ não seja um invertível; logo, existe ideal maximal $\mathfrak{p} \subset R$ com $a \in \mathfrak{p}$. Adjunto da hipótese concluímos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$; assim $R - \mathfrak{m}$ deve conter apenas invertíveis de R. Suponha (2). Ora, todo ideal próprio $\mathfrak{p}$ de R estará contido em $\mathfrak{m}$ (porque ideais próprios não podem conter invertíveis). Daí, em particular $\mathfrak{m}$ será o único ideal maximal em R, provando (1). Assumindo (2) novamente, por (1), $\mathfrak{m}$ é ideal maximal e assim, $1 + m \notin \mathfrak{m}$, visto que um invertível não pode estar lá. Por hipótese, portanto, $1 + m$ é invertível. Por fim, supondo que $1 + m$ é invertível, podemos tomar $x \in R - \mathfrak{m}$ e como $\mathfrak{m}$ é maximal, x e $\mathfrak{m}$ gerarão R. Logo, existem $a \in R$ e $m \in \mathfrak{m}$ tais que

$$1 = ax - m \implies ax = 1 + m \implies ax \text{ é invertível.}$$

Logo, (2) está provado. ■

Exemplo 1.1.11 (O caso $\mathbb{Z}_{(p)}$)**.** Fixe um primo natural p qualquer. Considere o seguinte subanel dos racionais:

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}; m, n \in \mathbb{Z}, p \nmid n \right\}.$$

Por ser subconjunto dos racionais, $\mathbb{Z}_{(p)}$ é domínio de integridade. Vamos mostrar que é DIP: tome $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}_{(p)}$ um ideal e considere sua restrição aos inteiros $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$, que é ideal lá. Como $\mathbb{Z}$ é principal, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{a}' = a\mathbb{Z}$. Interpretando este como o conjunto dos numeradores das frações como na definição acima (porém considerando-as elementos de $\mathfrak{a}$), concluímos que $\mathfrak{a} = a\mathbb{Z}_{(p)}$ e, portanto, $\mathbb{Z}_{(p)}$ também é principal. Agora, vamos mostrar que este é local seu ideal maximal sendo gerado por p. De fato, observe inicialmente que $\frac{1}{p}$ não pertence a $\mathbb{Z}_{(p)}$ por definição, logo,

p não pode ser invertível ali. Assim, $p\mathbb{Z}_{(p)}$ é ideal próprio em $\mathbb{Z}_{(p)}$. Vamos analisar o que acontece com $\mathbb{Z}_{(p)} - p\mathbb{Z}_{(p)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}_{(p)} - p\mathbb{Z}_{(p)} &\implies p \nmid m, n \\
&\implies \frac{n}{m} = \left(\frac{m}{n}\right)^{-1} \in \mathbb{Z}_{(p)} \\
&\implies \text{Todo elemento de } \mathbb{Z}_{(p)} - p\mathbb{Z}_{(p)} \text{ é invertível.} \\
&\implies \mathbb{Z}_{(p)} \text{ é anel local com maximal } p\mathbb{Z}_{(p)}.
\end{aligned}$$

Em particular, p é um elemento primo em $\mathbb{Z}_{(p)}$; não obstante, a menos de multiplicação por um invertível, é o único primo (elementos primos não podem ser invertíveis e, portanto, devem pertencer a $p\mathbb{Z}_{(p)}$). Olhando agora para a decomposição em elementos primos de $\mathbb{Z}_{(p)}$, podemos concluir que os ideais lá são exatamente os que ocorrem na seguinte cadeia:

$$\mathbb{Z}_{(p)} \supset p\mathbb{Z}_{(p)} \supset p^2\mathbb{Z}_{(p)} \supset \cdots \supset 0.$$

Aqui vem algo super interessante: o processo que fizemos até agora foi pegar o anel dos inteiros e "morfá-lo" num anel local! Com a força da palavra, **localizamos** $\mathbb{Z}$. Apesar de neste caso termos colocado diretamente um conjunto *formidável*, existe uma maneira construtiva e direta, de se "gerar" anéis locais, isto é, *localizar* anéis: sejam R um anel e $S \subset R$ um subconjunto em que $1 \in S$ e que $a, b \in S \implies ab \in S$. Chamaremos os subconjuntos com essas características de **subconjuntos multiplicativos de** R. Buscaremos os elementos da forma $\frac{r}{s}$ com $r \in R$ e $s \in S$; esse "anel" é nosso objeto de busca, mas precisamos ser cuidadosos ao definir os elementos. Gostaríamos que

$$a_1s_2 = a_2s_1 \implies \frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \text{ e que } \frac{a}{s} = \frac{at}{st}, t \in S.$$

Para alcançarmos esses objetivos, vamos considerar o produto $R \times S$ e definir uma relação:

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \iff \exists t \in S \text{ tal que } (a_1s_2 - a_2s_1)\,t = 0.$$

Afirmação 1.1.12. *A relação acima é de equivalência.*

Dem.: De fato, $\sim$ é:

1. Reflexiva: Se $a_1 = a_2 \in R$ e $s_1 = s_2 \in S$, então, com $t = 1$:

$$\begin{aligned} a_1 s_2 - a_2 s_1 &= a_1 s_1 - a_1 s_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $(a_1, s_1) \sim (a_1, s_1)$.

2. Simétrica: Suponha $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$. Portanto, existe $t \in S$ tal que

$$\begin{aligned} (a_1 s_2 - a_2 s_1)\, t = 0 &\implies t a_1 s_2 - t a_2 s_1 = 0 \\ &\implies t a_2 s_1 - t a_1 s_2 = 0 \\ &\implies (a_2 s_1 - a_1 s_2)\, t = 0 \\ &\implies (a_2, s_2) \sim (a_1, s_1)\,. \end{aligned}$$

3. Transitiva: Suponha que $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ e que $(a_2, s_2) \sim (a_3, s_3)$. Assim, existem $t_1, t_2 \in S$ tais que $(a_1 s_2 - a_2 s_1)\, t_1 = 0$ e $(a_2 s_3 - a_3 s_2)\, t_2 = 0$. Espertamente, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (a_1 s_3 - a_3 s_1)\, s_2 s_3 t_1 t_2 &= a_1 s_3 s_2 s_3 t_1 t_2 - a_3 s_1 s_2 s_3 t_1 t_2 \\ &= (a_1 s_2 - a_2 s_1)\, s_3^2 t_1 t_2 + (a_2 s_3 - a_3 s_2)\, s_1 s_3 t_1 t_2 \\ &= ((a_1 s_2 - a_2 s_1)\, t_1)\, s_3^2 t_2 + ((a_2 s_3 - a_3 s_2)\, t_2)\, s_1 s_3 t_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ e $(a_2, s_2) \sim (a_3, s_3) \implies (a_1, s_1) \sim (a_3, s_3)$.

$\blacksquare$

Feito isso, podemos considerar o quociente $\frac{R \times S}{\sim}$ (as classes de equivalência da relação no conjunto). É comum representarmos a classe de equivalência do par $(a, s) \in R \times S$ como a "fração" $\frac{a}{s}$; intencionalmente escolhemos essa maneira de chamar os elementos devido a facilidade para definirmos operações de modo que tenhamos um anel! De fato, não é necessário muito para que definamos:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}; \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

A seguir teremos o cuidado de verificar que as operações acima estão bem definidas, ou seja, não dependem da escolha dos representantes.

Proposição 1.1.13. *O conjunto $R \times S/\sim$ é um anel se munido com as operações definidas acima, tendo $\frac{0}{1}$ como elemento neutro da soma e $\frac{1}{1}$ o elemento neutro do produto.*

Dem.: Precisamos começar mostrando que as operações são bem definidas. Considere dois elementos de $R \times S/\sim$:

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \text{ e } \frac{b_1}{t_1} = \frac{b_2}{t_2}.$$

Existem, portanto, $u, v \in S$ tais que

$$\begin{cases} (a_1 s_2 - a_2 s_1)\, u = 0 \\ (b_1 t_2 - b_2 t_1)\, v = 0. \end{cases}$$

Escrevendo de maneira esperta, temos:

$$\begin{aligned} ((a_1 t_1 + b_1 s_1)\, s_2 t_2 - (a_2 t_2 + b_2 s_2)\, s_1 t_1)\, uv &= (a_1 s_2 - a_2 s_1)\, uv t_1 t_2 + (b_1 t_2 - b_2 t_1)\, vu s_1 s_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

O que implica em $\frac{a_1 t_1 + b_1 s_1}{s_1 t_1} = \frac{a_2 t_2 + b_2 s_2}{s_2 t_2}$.

De maneira parecida, basta vermos que:

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 s_2 t_2 - a_2 b_2 s_1 t_1)\, uv &= (a_1 s_2 - a_2 s_1)\, u b_1 t_2 v + (b_1 t_2 - b_2 t_1)\, v a_2 s_1 u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{a_1 b_1}{s_1 t_1} = \frac{a_2 b_2}{s_2 t_2}$.

Verificar que soma e produto satisfazem a associatividade, comutatividade e distributividade é simples, pois há uma herança natural de tais validades provinda do anel "original" R; com ressalva para a existência de elementos neutros:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

■

Quando não houver problemas de entendimento, será omitido da escrita o símbolo "$\cdot$". Escrever, cada instante $R \times S/\sim$ é relativamente desconfortável; denotaremos para tal $S^{-1}R$:

Definição 1.1.14. *Sejam R um anel e $S \subset R$ um subconjunto multiplicativo. Então $S^{-1}R$ é chamada a* ***localização*** *de R por S.*

Com isso em mãos, a aplicação

$$\begin{aligned} \tau_S : R &\to S^{-1}R \\ a &\mapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

é morfismo de anéis, denominado *morfismo de localização* e por conveniência denotaremos $a = \tau_S(a)$. É fato que

$$\frac{at}{bt} = \frac{a \cancel{t}}{b \cancel{t}} = \frac{a}{b},$$

afinal de contas, estamos lidando com classes de equivalências. O porquê disto valer é que:

$$atb - abt = abt - abt = 0 \implies \frac{a}{b} = \frac{at}{bt}.$$

Proposição 1.1.15. *Seja R um anel com subconjunto multiplicativo $S \subset R$ e seja τ_S o morfismo de localização. Então:*

1. $\ker \tau_S = \{a \in R; as = 0, \textit{para algum } s \in S\}$.

2. $\tau_S(s) = \frac{s}{1}$ *é um invertível em $S^{-1}R$ para todo $s \in S$.*

3. $S^{-1}R \neq 0 \iff 0 \notin S$.

4. τ_S *é bijetiva se S consiste de invertíveis em R.*

Dem.: Façamos um por um:

1. Basta olharmos para a definição de $S^{-1}R$, observando que $\frac{a}{1} = 0 = \frac{0}{1}$ se, e somente se, existir $s \in S$ tal que $as = (a \cdot 1 - 0 \cdot 1)\, s = 0$.

2. Se $s \in S$, então o elemento $\frac{1}{s}$ pertence à localização e assim, $\frac{s}{1}\frac{1}{s} = \frac{s}{s} = 1$.

3. Veja que $S^{-1}R$ é o anel zero se, e somente se, $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$, logo existe $s \in S$ tal que $s = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1)\, s = 0$.

4. Se S contém apenas invertíveis de R, pelo item (1) concluímos que $\ker \tau_S = 0$. Com isso, τ_S é sobrejetivo pois $\frac{a}{s} = \frac{as^{-1}}{1}$.

■

Exemplo 1.1.16. Sejam $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ e $S = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$. Então o núcleo do morfismo de localização $\tau_S : R \to S^{-1}R$ é o ideal $\overline{2}R$, pela proposição anterior.

A semelhança com os números racionais não é mera coincidência:

Exemplo 1.1.17. Todo subdomínio de $\mathbb{Q}$ é uma localização de $\mathbb{Z}$. De fato, seja A um subdomínio; assim, $0, 1 \in A$. Se n é inteiro positivo em A, então por indução todo inteiro positivo está lá. Como A é fechado ao tomarmos negativos, $\mathbb{Z} \subseteq A$. Seja $A^\times$ o conjunto dos invertíveis de A e defina

$$S = A^\times \cap \{\text{primos positivos}\}.$$

Assim, $S^{-1}\mathbb{Z} \subseteq A$. Para a volta, observe que pelo que já foi provado, podemos assumir $\mathbb{Z} \subsetneq A$ e assim, há $r/s \in A$ com $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$. Podemos supor que $\operatorname{mdc}(r, s) = 1$; assim, suponha que haja $k/n \in A$ com $k, n > 2$ e $\operatorname{mdc}(k, n) = 1$. Pelo Teorema de Bézout, existem x, y inteiros tais que $xk - yn = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} xk - yn = \frac{n}{n} &\implies \frac{xk - yn}{n} = \frac{1}{n} \\ &\implies x\frac{k}{n} - y = \frac{1}{n} \in A. \end{aligned}$$

Seja p um primo que divide n, com $n = pq$. Daí,

$$\frac{1}{p} = \frac{q}{n} = q\frac{1}{n} \in A.$$

Assim, $1/p \in S$ e, inclusive, isso é válido para todo primo que divide n; portanto,

$$\frac{1}{n} \in S^{-1}\mathbb{Z} \implies \frac{k}{n} \in S^{-1}\mathbb{Z}.$$

Logo, $A \subseteq S^{-1}\mathbb{Z}$.

Para um domínio de integridade R, denote $S := R - \{0\}$; o morfismo $R \to S^{-1}R$ é injetivo e, portanto, podemos ver R como subanel de $S^{-1}R$. Como todos os elementos não nulos deste são invertíveis, $S^{-1}R$ é um corpo, denotado $\mathrm{Frac}(R)$ e chamado *corpo de frações* de R. Observe que

Exemplo 1.1.18. $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}^*)^{-1}\,\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.

Exemplo 1.1.19. Para o anel de polinômios $k[X]$ sobre um corpo k, obtemos como seu corpo de frações o chamado *corpo de funções racionais* na variável X sobre k. Denotamos $k(X)$.

É importante que tenhamos contato com a noção de localização num ideal primo:

Definição 1.1.20. *Seja R um anel e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R. Então $R - \mathfrak{p}$ é um subconjunto multiplicativo e denotamos $R_{\mathfrak{p}} := (R - \mathfrak{p})^{-1}\,R$ a localização de R em $\mathfrak{p}$.*

Para todo ideal $\mathfrak{a} \subset R$, consideramos sua "extensão" para $S^{-1}R$:

$$\mathfrak{a}S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{s} \text{ tal que } a \in \mathfrak{a}, s \in S \right\},$$

isto é, o ideal gerado por $\tau_S(\mathfrak{a})$. Veja que a restrição de um ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ é definida como $\mathfrak{b} \cap R = \tau_S^{-1}(\mathfrak{b})$. Dadas as definições, temos:

Proposição 1.1.21. *Seja $S^{-1}R$ a localização de R por $S \subset R$. Então:*

1. *Um ideal $\mathfrak{a} \subset R$ se estende a um ideal próprio $\mathfrak{a}S^{-1}R \subsetneq S^{-1}R$ se, e somente se, $S \cap \mathfrak{a} = \emptyset$.*

2. *Para qualquer ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$, sua restrição $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap R$ satisfaz $\mathfrak{a}S^{-1}R = \mathfrak{b}$.*

3. *Se $\mathfrak{p} \subset R$ é um ideal primo tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, então o ideal estendido $\mathfrak{p}S^{-1}R$ é primo em $S^{-1}R$ e satisfaz $\mathfrak{p}S^{-1}R \cap R = \mathfrak{p}$.*

4. *Para todo ideal primo $\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$, sua restrição $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ é ideal primo em R, satisfaz $\mathfrak{p}S^{-1}R = \mathfrak{q}$ e $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.*

Dem.: Façamos, como anteriormente, um a um:

1. Seja $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal tal que $s \in \mathfrak{a}$, para algum $s \in S$. Logo, $\frac{s}{1} \in \mathfrak{a}S^{-1}R \implies \mathfrak{a}S^{-1}R = S^{-1}R$. Suponha $\mathfrak{a}S^{-1}R = S^{-1}R$; assim, existem $a \in \mathfrak{a}$ e $s \in S$ tais que $\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. Portanto, existe $t \in S$ tal que $(a - s)\,t = 0$. Então $st = at \in \mathfrak{a}$.

2. É claro que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}S^{-1}R$, pois $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$. Seja $\frac{a}{s} \in \mathfrak{b}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{a}{1} = \frac{s}{1}\frac{a}{s} &\implies a \in \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap R \\ &\implies \frac{a}{s} \in \mathfrak{a}S^{-1}R \\ &\implies \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}S^{-1}R. \end{aligned}$$

3. Considere um primo $\mathfrak{p} \subset R$ tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Pelo item (1) concluímos que $\mathfrak{p}S^{-1}R$ é ideal próprio na localização. Vamos mostrar que é primo. Considere elementos $\frac{a_1}{s_1}$ e $\frac{a_2}{s_2}$ da localização, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_\mathfrak{p}}{s_\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}S^{-1}R &\implies \exists t \in S, (a_1 a_2 s_\mathfrak{p} - a_\mathfrak{p} s_1 s_2)\,t = 0 \\ (\text{Como } s_\mathfrak{p} t \notin \mathfrak{p}) &\implies a_1 a_2 \in \mathfrak{p} \\ &\implies a_1 \in \mathfrak{p} \text{ ou } a_2 \in \mathfrak{p} \\ &\implies \frac{a_1}{s_1} \in \mathfrak{p}S^{-1}R \text{ ou } \frac{a_2}{s_2} \in \mathfrak{p}S^{-1}R \\ &\implies \mathfrak{p}S^{-1}R \text{ é primo em} S^{-1}R. \end{aligned}$$

Veja que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}S^{-1}R \cap R$. Vamos mostrar a "volta":

$$\begin{aligned} p \in \mathfrak{p}S^{-1}R \cap R &\implies \frac{p}{1} = \frac{a}{s}, a \in \mathfrak{p}, s \in S \\ &\implies \exists t \in S, (ps - a)\,t = 0 \\ &\implies pst = at \in \mathfrak{p} \\ (st \notin \mathfrak{p}) &\implies p \in \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

4. Seja $\mathfrak{q}$ primo em $S^{-1}R$. Logo, por propriedades básicas de ideais, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ é primo em R. Por fim, o resultado se dá por (2).

■

A proposição acima implica diretamente os seguintes resultados:

Corolário 1.1.22. *O morfismo canônico $\tau_S : R \to S^{-1}R$ induz uma bijeção*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} S^{-1}R &\to \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R; \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \\ \mathfrak{q} &\mapsto \tau_S^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

que, junto de sua inversa, respeita inclusões entre ideais primos em R e em $S^{-1}R$.

Observe que os elementos de $R_\mathfrak{p} - \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ consiste dos invertíveis de $R_\mathfrak{p}$; daí, é fato que:

Corolário 1.1.23. *Para qualquer ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, a localização $R_\mathfrak{p}$ é anel local com ideal maximal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.*

1.2 A propriedade universal

Definir *fielmente* propriedades universais no contexto categórico demanda certo tempo e está fora do escopo geral do texto; daí, como texto de rodapé, podemos relatar que uma **propriedade universal** define de maneira única objetos a menos de um isomorfismo.

Proposição 1.2.1. *O morfismo canônico $\tau_S : R \to S^{-1}R$ de um anel R à sua localização $S^{-1}R$ satisfaz $\tau_S(S) \subset (S^{-1}R)^*$ e é universal no seguinte sentido: Dado qualquer morfismo de anéis $\varphi : R \to R'$ tal que $\varphi(S) \subset (R')^*$, existe um único morfismo de anéis $\varphi' : S^{-1}R \to R'$ tal que o diagrama abaixo*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\tau_S"] \arrow[d, "\varphi"'] & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ R' & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, se $\varphi : R \to R'$ satisfaz a mesma propriedade universal que τ_S, então $\varphi' : S^{-1}R \to R'$ é um isomorfismo.

Dem.: Comecemos com a unicidade. Sejam $a \in R$ e $s \in S$; daí,

$$\varphi(a) = \varphi'\left(\frac{a}{1}\right) = \varphi'\left(\frac{a}{s}\frac{s}{1}\right) = \varphi'\left(\frac{a}{s}\right)\varphi(s) \implies \varphi'\left(\frac{a}{s}\right) = \varphi(a)\,\varphi(s)^{-1},$$

logo, φ' é determinado unicamente por φ. Para a existência, defina inicialmente $\varphi'\left(\frac{a}{s}\right) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ para $a \in R$ e $s \in S$. Vamos mostrar que este está bem definido: sejam $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, isto é, para algum $t \in S$,

$$\begin{aligned}(as' - a's)\,t = 0 &\implies (\varphi(a)\varphi(s') - \varphi(a')\varphi(s))\,\varphi(t) = 0 \\ &\implies \varphi(a)\varphi(s') - \varphi(a')\varphi(s) = 0 \\ &\implies \varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(a')\varphi(s')^{-1} \\ &\implies \varphi' : S^{-1}R \to R' \text{ está bem definido.}\end{aligned}$$

Além disso, $\varphi(a) = \varphi'\left(\frac{a}{1}\right) = \varphi(\tau_S(a))$, o que implica $\varphi = \varphi' \circ \tau_S$. Por fim, assuma que tanto τ_S quanto φ são *universais* no sentido da proposição. Então, além do já provado para φ', existe um morfismo $\tau' : R' \to S^{-1}R$ tal que $\tau_S = \tau' \circ \varphi$; daí, pela já provada unicidade

$$\begin{cases} id_{R'} \circ \varphi = \varphi' \circ \tau_S = (\varphi' \circ \tau') \circ \varphi \\ id_{S^{-1}R} \circ \tau_S = \tau' \circ \varphi = (\tau' \circ \varphi') \circ \tau_s; \end{cases}$$

assim, $\varphi' \circ \tau' = id_{R'}$ e $\tau' \circ \varphi' = id_{S^{-1}R}$, garantindo que φ' seja isomorfismo. ∎

Vejamos que podemos utilizar todo esse trabalho para descrever localizações de maneira alternativa:

Teorema 1.2.2. *Sejam R um anel, $F = (f_i)$ uma família de elementos em R e $S \subset R$ um conjunto multiplicativo gerado por F (é, portanto, o conjunto de todos os produtos finitos dos elementos de F). Fixando um sistema de variáveis $T = (t_i)$, existe um isomorfismo canônico:*

$$S^{-1}R \xrightarrow{\sim} \frac{R[T]}{(1 - f_i t_i)}.$$

Em particular, para um único elemento $f \in R$, existe um isomorfismo canônico $R_f \cong R[t]/(1 - ft)$.

Dem.: O morfismo canônico $R \to R[T]/(1 - f_i t_i)$ manda todos os elementos de S a invertíveis. Daí, se fatoriza sobre um morfismo bem definido de anéis $\varphi' : S^{-1}R \to R[T]/(1 - f_i t_i)$; com isso, é direto checar que φ satisfaz a propriedade universal de uma localização de R por S, obrigando φ' a ser isomorfismo. ∎

2 *Café da manhã:* O produto tensorial

2.1 O Famoso Quem?

Os produtos tensoriais, que aqui colocaremos no contexto de módulos, são ferramentas interessantíssimas para diversas aplicações, mas a primeira vista, pode-se ter a sensação da "*balança de Anúbis*": considere uma balança *imaginária* (não necessariamente complexa) de dois pratos; coloque num lado o trabalho inicial para se desenvolver e obter o produto tensorial e, no outro, uma pena. É provável que boa parte dos leitores de primeira viagem afirmariam que a pena seria muito mais leve e, portanto, o produto deveria ser jogado à *Ammit.* E, bem, essa não é uma ideia tão *absurda*; entenda, boa parte dos livros-textos, após fazer boa explicação sobre a *construção* do produto tensorial de maneira formal, imediatamente recomendam que tudo aquilo seja esquecido em prol de uma característica inerente a este: a *propriedade universal.* Assim, é recomendável que se entre no *Duat* com bastante cuidado! Para evitar que textos imensos que não serão utilizados estejam aqui, vamos *diretamente* à ideia mais utilizada (por, principalmente, facilitar as coisas).

Sejam R um anel e M, N, P três $R-$módulos. Uma aplicação $f : M \times N \longrightarrow P$ é dita R-bilinear se a aplicação $y \longmapsto f(x, y)$ de N em P é $R - linear$ para cada $x \in M$. Em bom português, f é R-bilinear se for $R-$linear em cada uma das entradas x e y. O que faremos? Construiremos um *"novo"* $R-$módulo que chamaremos espertamente de T; que propriedade buscamos? Ora, queremos T tal que toda aplicação $R-$bilinear $M \times N \longrightarrow P$ esteja numa correspondência *biunívoca* com aplicações $R-$lineares $T \longrightarrow P$, para todo $R-$módulo P. Formalizaremos o que foi dito na forma de uma proposição:

Proposição 2.1.1. *Sejam M, N e P $R-$módulos. Então, existe um par (T, φ), onde T é um $R-$módulo e $\varphi : M \times N \longrightarrow T$ uma aplicação $R-$bilinear, com a seguinte propriedade: dado qualquer $R-$módulo P e qualquer aplicação $R-$bilinear $\psi : M \times N \longrightarrow P$, existe uma única aplicação $R-$linear $\psi' : T \longrightarrow P$ tal que $\psi = \psi' \circ \varphi$.*

Não obstante, essa dupla é única a menos de isomorfismos e temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & P \\ T \arrow[ur, dotted, "\psi'"] & \end{tikzcd}$$

Dem.: Provermos a existência e a unicidade. Começaremos definindo $C := R^{(M\times N)}$, isto é, os elementos de C são combinação lineares formais de elementos de $M \times N$ com coeficientes em R; trocando em miúdos, são expressões da forma $\sum_{i=1}^{n} a_i.(x_i, y_i)$, com $(a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N)$. Seja D o submódulo de C gerado pelos elementos dos seguintes tipos:

$$\begin{cases} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (ax, y) - a(x, y) \\ (x, ay) - a(x, y). \end{cases}$$

Considere, agora, $T := C/D$. Para cada elemento (x, y) da base de C, chame $x \otimes y$ a imagem em T. Então T é gerado por elementos da forma descrita; pelas definições consideradas, temos

$$\begin{cases} (x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y' \\ ax \otimes y = x \otimes ay = a(x \otimes y). \end{cases}$$

Ou seja, a aplicação $\varphi : M \times N \longrightarrow T$ definida por $\varphi(x, y) = x \otimes y$ é $R-$bilinear. Assim, qualquer aplicação ψ de $M \times N$ em P se estende pela linearidade a um morfismo de módulos $\bar{\psi} : C \longrightarrow P$. Suponha que ψ seja $R-$bilinear. Pelas definições, $\bar{\psi}$ se "nulifica" em todos os geradores de D e portanto, no D todo. Daí este induz um $R-$morfismo bem definido ψ' de T em P de modo que $\psi'(x \otimes y) = f(x, y)$. A aplicação ψ' é unicamente definida por esta condição e assim, o par (T, φ) está justamente nas condições que buscávamos.

Para a unicidade, nas condições da proposição, substitua a dupla (P, ψ) por (T', φ'). Observe que conseguimos uma única $\gamma : T \longrightarrow T'$ tal que $\varphi' = \gamma \circ \varphi$. Trocando os *papéis* de T e T', obtemos $\gamma' : T' \longrightarrow T$ tal que $\varphi = \gamma' \circ \varphi'$. Observe que, portanto, cada uma das composições $\gamma \circ \gamma'$ e $\gamma' \circ \gamma$ deve ser a identidade e assim, γ é isomorfismo. ■

Esse tal $R-$módulo T construído acima é chamado **produto tensorial** de M por N e denotamos por $M \otimes_R N$ (e como boa Matemática, em caso da *não existência* de ambiguidades escrevemos por pura preguiça $M \otimes N$). É válido lembrar que um $R-$módulo é dito *livre* se tiver uma base. Observe que se M e N forem livres com geradores $(n_i)_{i \in I}$ e $(m_j)_{j \in J}$ respectivamente, então os elementos $n_i \otimes m_j$ geram o produto tensorial. É claro que, se M e N forem finitamente gerados, seu produto tensorial também será.

A *propriedade universal* descrita anteriormente para o produto tensorial garante algo essencial: facilidade. Observe que se construirmos uma aplicação bilinear com domínio $M \times N$, construímos junto disso um morfismo que sai de $M \otimes_R N$. E como conseguimos escrever esse produto tensorial como *miniprodutinhos tensoriais* formados pelos geradores, basta que façamos *minimorfismozinhos* nos tensores elementares. O próximo teorema demonstra todas as propriedades que utilizaremos relacionadas ao produto tensorial:

Teorema 2.1.2. *Em todos os casos sejam R um anel, M, N, P $R-$módulos, $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal e $S \subset R$ um conjunto multiplicativo. As seguintes aplicações são isomorfismos:*

$$\left(M \underset{R}{\otimes} N\right) \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{\approx} M \underset{R}{\otimes} \left(N \underset{R}{\otimes} P\right) \tag{2.1}$$
$$(m \otimes n) \otimes p \longmapsto m \otimes (n \otimes p)$$

$$R \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\approx} M \tag{2.2}$$
$$a \otimes m \longmapsto am$$

$$M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{\approx} N \underset{R}{\otimes} M \tag{2.3}$$
$$m \otimes n \longmapsto n \otimes m$$

$$M \underset{R}{\otimes} \left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right) \xrightarrow{\approx} \bigoplus_{i \in I} \left(M \underset{R}{\otimes} N_i\right) \tag{2.4}$$
$$m \otimes (n_i)_{i \in I} \longmapsto (m \otimes n_i)_{i \in I}$$

$$M \underset{R}{\otimes} (R/\mathfrak{a}) \xrightarrow{\approx} M/\mathfrak{a}M \tag{2.5}$$
$$m \otimes \overline{a} \longmapsto \overline{am}$$

$$\left(S^{-1}R\right) \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\approx} S^{-1}M \tag{2.6}$$
$$\frac{a}{s} \otimes m \longmapsto \frac{am}{s}$$

$$\operatorname{Hom}_R \left(M \underset{R}{\otimes} N, P\right) \xrightarrow{\approx} \operatorname{Hom}_R \left(M, \operatorname{Hom}_R (N, P)\right) \tag{2.7}$$
$$f \longmapsto (n \longmapsto f(m \otimes n))\,.$$

Dem.: Façamos cada um, como um tipo de “exercício”, para nos acostumarmos com o uso da propriedade universal. Em todos os casos, já é adiantado que as aplicações definidas no *corpo* do teorema são bem definidas.

1. Para este caso, é mais simples que comecemos com morfismos intermediários. Fixe $p_0 \in P$ e considere a aplicação bem-definida e $R-$bilinear:

$$M \times N \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N \underset{R}{\otimes} P$$
$$(m, n) \longmapsto m \otimes n \otimes p_0.$$

Esta induz um morfismo:

$$f_{p_0} : M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N \underset{R}{\otimes} P$$
$$m \otimes n \longmapsto m \otimes n \otimes p_0.$$

Agora, considere a aplicação $R-$bilinear

$$\left(M \underset{R}{\otimes} N\right) \times P \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N \underset{R}{\otimes} P$$
$$(t, p_0) \longmapsto f_{p_0}(t);$$

que também induz um morfismo

$$\begin{aligned} \left(M \underset{R}{\otimes} N\right) \underset{R}{\otimes} P &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N \underset{R}{\otimes} P \\ (m \otimes n) \otimes p &\longmapsto m \otimes n \otimes p. \end{aligned}$$

Agora, basta fazer estritamente o mesmo processo para uma aplicação

$$M \times N \times P \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} \left(N \underset{R}{\otimes} P\right)$$

que induzirá um morfismo

$$\begin{aligned} g : M \underset{R}{\otimes} N \underset{R}{\otimes} P &\longrightarrow \left(M \underset{R}{\otimes} N\right) \underset{R}{\otimes} P \\ m \otimes n \otimes p &\longmapsto (m \otimes n) \otimes p. \end{aligned}$$

Por fim, é direta a verificação que f e g são inversas entre si e, portanto, o isomorfismo está provado.

2. Considere a aplicação $R-$bilinear

$$\begin{aligned} f : R \times M &\longrightarrow M \\ (a, m) &\longmapsto am \end{aligned}$$

que induz um morfismo

$$\begin{aligned} g : R \underset{R}{\otimes} M &\longrightarrow M \\ a \otimes m &\longmapsto am. \end{aligned}$$

Para a inversa, considere o morfismo

$$\begin{aligned} h : M &\longrightarrow R \underset{R}{\otimes} M \\ m &\longmapsto 1 \otimes m. \end{aligned}$$

Da linearidade, é direta a conclusão de que g e h são inversas entre si e, assim, temos um isomorfismo.

3. Considere a aplicação $R-$bilinear

$$\begin{aligned} f : M \times N &\longrightarrow N \underset{R}{\otimes} M \\ (m, n) &\longmapsto n \otimes m \end{aligned}$$

que induz um morfismo

$$\begin{aligned} g : M \underset{R}{\otimes} N &\longrightarrow N \underset{R}{\otimes} M \\ m \otimes n &\longmapsto n \otimes m. \end{aligned}$$

Para a inversa, considere o morfismo

$$\begin{aligned} h : N \underset{R}{\otimes} M &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N \\ n \otimes m &\longmapsto m \otimes n. \end{aligned}$$

que é o induzido de $N \times M \longrightarrow M \otimes_R N$. Da linearidade, é direta a conclusão de que g e h são inversas entre si e, assim, temos um isomorfismo.

4. A aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \times N &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \left(M_i \underset{R}{\otimes} N\right) \\ \left((m_i)_{i \in I}, n\right) &\longmapsto (m_i \otimes n)_{i \in I} \end{aligned}$$

induz um morfismo

$$\begin{aligned} f : \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \underset{R}{\otimes} N &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \left(M_i \underset{R}{\otimes} N\right) \\ (m_i)_{i \in I} \otimes n &\longmapsto (m_i \otimes n)_{i \in I}. \end{aligned}$$

Para a inversa, há um pouco mais de cuidado: Seja $j \in I$. Considere a inclusão:

$$M_j \times N \hookrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \times N \longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \underset{R}{\otimes} N.$$

Pela $R-$bilinearidade da inclusão, concluímos que há um morfismo induzido g_j, para todo $j \in I$:

$$g_j : M_j \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \underset{R}{\otimes} N.$$

Agora, esses morfismos induzem um morfismo “maior”, quando vista a soma direta :

$$\begin{aligned} g : \bigoplus_{i \in I} \left(M_i \underset{R}{\otimes} N \right) &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \underset{R}{\otimes} N \\ (p_i)_{i \in I} &\longmapsto \sum_{i \in I} g_i (p_i) \, . \end{aligned}$$

Por fim, não é difícil verificar que f e g são inversas entre si, terminando a prova.

5. Considere a aplicação $R-$bilinear

$$\begin{aligned} M \times R/\mathfrak{a} &\longrightarrow M/\mathfrak{a}M \\ (m, \overline{a}) &\longmapsto \overline{am}. \end{aligned}$$

Esta induz um morfismo

$$\begin{aligned} f : M \underset{R}{\otimes} R/\mathfrak{a} &\longrightarrow M/\mathfrak{a}M \\ m \otimes \overline{a} &\longmapsto \overline{am}. \end{aligned}$$

Considere, agora, uma aplicação

$$\begin{aligned} g_M : M &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} R/\mathfrak{a} \\ m &\longmapsto m \otimes \overline{1}, \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{a} \subset \ker(g_M)$; assim, conseguimos um morfismo induzido

$$\begin{aligned} g : M/\mathfrak{a}M &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} R/\mathfrak{a} \\ \overline{m} &\longmapsto m \otimes \overline{1}. \end{aligned}$$

Pela linearidade do produto tensorial, é claro que f e g são inversas entre si e, portanto, isomorfismos.

6. Considere a aplicação $R-$bilinear

$$\begin{aligned} S^{-1}R \times M &\longrightarrow S^{-1}M \\ \left(\frac{a}{s}, m \right) &\longmapsto \frac{am}{s}. \end{aligned}$$

Como já estamos cansados de observar, esta *também* induz um morfismo

$$\begin{aligned} f : S^{-1}R \underset{R}{\otimes} M &\longrightarrow S^{-1}M \\ \frac{a}{s} \otimes m &\longmapsto \frac{am}{s}. \end{aligned}$$

Considerando (tomando os devidos cuidados, como já feito antes) o seguinte morfismo

$$\begin{aligned} g : S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}R \underset{R}{\otimes} M \\ \frac{m}{s} &\longmapsto \frac{1}{s} \otimes m, \end{aligned}$$

concluímos que f e g são inversas entre si e, assim, são isomorfismos.

7. Seja $f : M \times N \longrightarrow P$ um morfismo $R-$bilinear; assim para todo $m \in M$, a aplicação $f_m : n \longmapsto f(m, n)$ é $R-$linear. Esta induz uma aplicação

$$\varphi : M \longrightarrow \operatorname{Hom}(N, P) \text{ é } R - \text{linear}.$$

Qualquer $R-$morfismo $\psi : M \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{Hom}(N, P)$ define uma aplicação bilinear $\psi' : (x, y) \longmapsto \psi(x)(y)$; logo, o conjunto Q de todas as aplicações $R-$bilineares da forma $M \times N \longrightarrow P$ tem correspondência um-a-um com $\operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, P))$, i.e.,

$$Q \approx \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, P));$$

porém, pelo induzido por f, é fato que $Q \approx \operatorname{Hom}(M \otimes_R N, P)$ e, assim,

$$\operatorname{Hom}\left(M \underset{R}{\otimes} N, P\right) \xrightarrow{\approx} \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, P)).$$

■

Com as ferramentas na mesa, estamos *aptos* a nos aventurar mais pelo grande *universo* que é o assunto. Seja $\phi : R \longrightarrow S$ um morfismo de anéis, e suponha que N seja um $S-$módulo. Podemos dizer que N também tem estrutura de $R-$módulo, bastando fazer o seguinte: se $a \in R$ e $n \in N$, definimos an como $\phi(a)n$. Dizemos que esse $R-$módulo foi obtido de N por *restrição de escalares*.

Proposição 2.1.3. *Suponha que N é finitamente gerado como um $B-$módulo e que B seja finitamente gerado como $R-$módulo. Então, N é finitamente gerado com $R-$módulo.*

Dem.: Suponha que $y_1, \ldots, y_n$ gera N sobre B e sejam $x_1, \ldots, x_m$ geradores de B como $R-$módulo. Então, os produtos $x_i y_j$ geram N sobre R (existem mn deles). ■

Façamos o caminho "contrário": seja M um $R-$módulo; é fato que B pode ser *interpretado* como $R-$módulo. Daí, podemos "gerar" um novo $R-$módulo $M_B = B \otimes_R M$. Não obstante, observe que $\forall b_1, b_2 \in B$ e $m \in M$, $b_1(b_2 \otimes_R x) = b_1 b_2 \otimes_R x$, portanto, M_B carrega consigo uma estrutura de $B-$módulo. Esse $B-$módulo é dito obtido por *extensão de escalares*. Por fim, se $\{m_1, \ldots, m_j\}$ gera M sobre R, então $\{1 \otimes m_i; 1 \leq i \leq j\}$ gera M_B sobre B, logo a *liberdade* do módulo não se altera, independente de onde estiver. [1] Vejamos um exemplo clássico:

Exemplo 2.1.4. Quem será $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$? Comece tomando um elemento (e aceitando um certo abuso na notação)

$$a \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Veja que se $b = 0$ ou 2, então

$$a \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} b = a \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} 2 = 2a \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} 1 = 0 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} 1 = 0.$$

E se $b = 1$, então $b = 4$ (pois estamos lidando com elementos mod 3); assim,

$$a \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} b = 4a \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} 1 = 0 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} 1 = 0.$$

Logo, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq 0$.

De maneira geral, vale o seguinte:

Exemplo 2.1.5. $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{mdc}(a,b)\mathbb{Z}$. De fato, o morfismo abaixo é $\mathbb{Z}-$bilinear

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/\mathrm{mdc}(a,b)\mathbb{Z} \\ (r, s) &\longmapsto rs \end{aligned}$$

[1] Quase uma diplomacia.

pois este herda as propriedades da aritmética modular. Similarmente, é bem definido. Então implica na existência de um morfismo de $\mathbb{Z}-$módulos bem definido

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/\mathrm{mdc}(a,b)\mathbb{Z}\\ r \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} s &\longmapsto rs.\end{aligned}$$

Veja que ψ é injetivo. De fato,

$$\begin{aligned} rs = 0 \mod \mathrm{mdc}(a,b) &\implies \mathrm{mdc}(a,b).n = rs\\ \text{(Pelo Teorema de Bézout)} &\implies \exists x, y \in \mathbb{Z},\ \text{t.q.}\ (ax+by)\,n = rs.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} r \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} s &= 1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} rs\\ &= 1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} (ax+by)\,n\\ &= 1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} nax + nby\\ &= nax \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} nby\\ &= 0.\end{aligned}$$

ψ é sobrejetivo: basta observar que $\psi\,(1 \otimes_{\mathbb{Z}} j) = j$. Assim, ψ é isomorfismo.

De agora em diante, faremos o uso extensivo do conceito de sequências exatas. Convém dizermos inicialmente que uma sequência de $R-$módulos é uma cadeia de morfismos de $R-$módulos

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

onde os índices variam sobre uma parte (finita ou infinita) de $\mathbb{Z}$.

Definição 2.1.6 (Sequências Exatas)**.** *Uma cadeia de morfismos de $R-$módulos*

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

é dita exata se $\mathrm{im}\,(f_{n-1}) = \ker\,(f_n)$.

Observe que pela definição acima, um morfismo de $R-$módulos f é injetivo se e somente se a sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'$ for exata. Adicionalmente, um morfismo de $R-$módulos f é sobrejetivo se e somente se a sequência $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ for exata. As sequências exatas que "iniciam" e "terminam" em zero, isto é, as da forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

são chamadas sequências exatas curtas; observe que a exatidão garante que f seja injetiva, que $\operatorname{im} f = \ker g$ e que g é sobrejetiva. Assim, para sequências desse tipo, M' é submódulo de M via f e há um isomorfismo $M/M' \simeq M''$ induzido por g. Por outro lado, podemos concluir que qualquer submódulo $N \subset M$ dá origem à sequência exata curta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0.$$

Exemplo 2.1.7 (Colando sequências curtas)**.** Seja $\phi : M \to N$ um morfismo de $R-$módulos. Observe então que existem sequências exatas curtas:

$$0 \to \ker \phi \to M \xrightarrow{\phi} \text{im } \phi \to 0 \text{ e } 0 \to \text{im } \phi \to N \to N/\text{im } \phi \to 0$$

Podemos "colá-las" de modo que tenhamos uma outra sequência exata

$$0 \to \ker \phi \to M \xrightarrow{\phi} N \to N/\text{im } \phi \to 0.$$

Podemos generalizar esse resultado, mas fiquemos apenas com o exemplo neste texto.

Exemplo 2.1.8. Considere agora uma sequência exata

$$0 \to M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} P \to 0$$

de $R-$módulos; vamos nos perguntar: quando conseguimos determinar algum dos módulos sabendo os outros 2:

- Se conhecemos M, N e ϕ, então $\operatorname{im} \psi = P$ e $\ker \psi = \operatorname{im} \phi$; daí, $P \simeq N/\ker \psi = N/\operatorname{im} \phi$.

- Pela injetividade de ϕ, ao conhecermos N e P, conseguimos determinar $M \simeq \operatorname{im}\phi = \ker\psi$.
- Em geral, não é possível recuperar N caso M e P seja conhecidos:
  - Observe que uma maneira possível de obter uma sequência exata curta com M à “esquerda” e P à “direita” é:
  $$0 \to M \xrightarrow{\phi} M \times P \xrightarrow{\psi} P \to 0$$
  onde ϕ é a inclusão e ψ a projeção.
  - Conseguimos uma sequência de $\mathbb{Z}-$módulos
  $$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$
  onde ϕ é a “multiplicação” por 2 e ψ é a aplicação quociente. Interessantemente, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ não é isomorfo como um grupo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

O produto tensorial mantém a exatidão à direita:

Proposição 2.1.9. *Seja*

$$M' \xrightarrow{\quad f \quad} M \xrightarrow{\quad g \quad} M'' \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

uma sequência exata à direita de $R-$módulos e morfismos e seja N um $R-$módulo qualquer. Então a sequência

$$M' \otimes N \xrightarrow{\quad f \otimes id \quad} M \otimes N \xrightarrow{\quad g \otimes id \quad} M'' \otimes N \longrightarrow 0 \tag{2.9}$$

é exata à direita.

Dem.: Veja que $(g \otimes \mathrm{id}_N) \circ (f \otimes \mathrm{id}_N) = 0 \implies \operatorname{im} f \otimes \mathrm{id}_N \subset \ker g \otimes \mathrm{id}_N$. Daí, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N \arrow[r, "g\otimes \mathrm{id}_N"'] \arrow[d] & M'' \otimes_R N \\
M \otimes_R N/\operatorname{im}(f \otimes \mathrm{id}_N) \arrow[ur, "\overline{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{cases} \operatorname{im}(f \otimes \operatorname{id}_N) = \ker(g \otimes \operatorname{id}_N) \iff \overline{g} \text{ é injetiva.} \\ g \otimes \operatorname{id}_N \text{ é sobrejetivo} \iff \overline{g} \text{ é sobrejetiva.} \end{cases}$$

Logo, queremos garantir que $\overline{g}$ seja isomorfismo. Para facilitar, considere:

$$\begin{aligned} h : M'' \times N &\longrightarrow \frac{M \otimes_R N}{\operatorname{im}(f \otimes \operatorname{id}_N)} \\ (m'', n) &\longmapsto \overline{\iota(m'') \otimes n}, \end{aligned}$$

onde $\iota(m'') \in M$ é uma $g-$pré-imagem de $m'' \in M$. Não é difícil ver que h é bem-definido e $R-$bilinear. Este trabalho se facilita ao observar que $m_1, m_2 \in g^{-1}(m'') \implies m_1 - m_2 \in \ker g = \operatorname{im} f$. Com isso, h induz uma aplicação $R-$bilinear

$$\begin{aligned} h_\otimes : M'' \underset{R}{\otimes} N &\longrightarrow \frac{M \otimes_R N}{\operatorname{im}(f \otimes \operatorname{id}_N)} \\ m'' \otimes n &\longmapsto \overline{\iota(m'') \otimes n}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} m'' \otimes n &\overset{h_\otimes}{\longmapsto} \overline{\iota(m'') \otimes n} \overset{\overline{g}}{\longmapsto} m'' \otimes n \\ \overline{m \otimes n} &\overset{\overline{g}}{\longmapsto} g(m) \otimes n \overset{h_\otimes}{\longmapsto} \overline{\iota(g(m)) \otimes n} = \overline{m \otimes n}. \end{aligned}$$

É claro que $\overline{g} \circ h_\otimes = h_\otimes \circ \overline{g} = \operatorname{id}$. Portanto, mostramos o que queríamos. ■

A propriedade 2.7 do Teorema 2.1.2 nos traz mais coisas interessantes: sejam $T(M) = M \otimes N$, N um $R-$módulo fixo e $U(P) = \operatorname{Hom}(N, P)$. Então a propriedade nos garante que $\operatorname{Hom}(T(M), P) = \operatorname{Hom}(M, U(P))$ para quaisquer $R-$módulos M e P. Chamamos o *funtor* T de *adjunto esquerdo* e U de *adjunto direito*. A proposição anterior garante então que qualquer *funtor* que seja adjunto esquerdo é exato à direta (e vice-versa).

Devemos ter cuidado quanto à exatidão do tensor! O exemplo a seguir nos mostra claramente isso:

Exemplo 2.1.10 (Cuidados ao manusear!)**.** Tensorizar por N não necessariamente mantém a exatidão! Tome $A = \mathbb{Z}$ e considere a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}$$

onde $\phi(x) = 2x$. Vamos *tensorizar* a sequência com o $\mathbb{Z}-$módulo $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ observando antes que para todo $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes N$, temos:

$$(\phi \otimes id)(x \otimes y) = \phi(x) \otimes \mathrm{id}(y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0,$$

ou seja, $\phi \otimes id$ é a aplicação nula. Mas é claro que $\mathbb{Z} \otimes N \neq 0$; daí, a sequência

$$0 \longrightarrow Z \otimes N \xrightarrow{\phi \otimes \mathrm{id}} Z \otimes N$$

não é exata.

Logo, o *funtor* que tensoriza por N no geral não é exato. E se for? Trataremos exatamente disso na próxima seção.

2.2 *Sendo fiel ao plano!*

Podemos melhorar o que já foi feito na Proposição 2.1.9 se considerarmos a aplicação de inclusão de algum ideal $\mathfrak{a} \hookrightarrow R$ com um $R-$módulo N:

Corolário 2.2.1. *Sejam N um $R-$módulo e $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal. Então, existe um diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd}
 & a \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "\tau'"] & R \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & R/\mathfrak{a} \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "\tau''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}N \arrow[r] & N \arrow[r] & N/\mathfrak{a}N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde τ' é sobrejetivo, τ é o isomorfismo canônico e τ'' é o isomorfismo induzido por τ. Em particular, existe um isomorfismo canônico

$$\begin{aligned} R/\mathfrak{a} \underset{R}{\otimes} N &\xrightarrow{\sim} N/\mathfrak{a}N \\ \overline{r} \otimes x &\longmapsto \overline{rx}. \end{aligned}$$

Dem.: Observe que a linha superior é o tensorial da sequência

$$\mathfrak{a} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

com N sobre R. É, portanto, exata. Por fim, basta ver que o isomorfismo

$$\begin{aligned} \tau : R \underset{R}{\otimes} N &\longrightarrow N \\ r \otimes x &\longmapsto rx \end{aligned}$$

mapeia a imagem de $\mathfrak{a} \otimes_R N \longrightarrow R \otimes_R N$ “para dentro” do submódulo $\mathfrak{a}N \subset N$.

■

Como morfismos injetivos de $R-$módulos não necessariamente se mantém injetivos após serem tensorizados, existe um motivo para definirmos os que *mantém*; chamamos estes de **planos**:

Definição 2.2.2. *Um $R-$módulo N é dito $R-$plano se para todo monomorfismo de $R-$módulos $M' \longrightarrow M$ a aplicação tensorizada $M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ for injetiva. Um morfismo de anéis é dito plano se seu contra-domínio for plano quando visto como módulo sobre o anel do domínio.*

É claro que como boa Matemática, podemos caracterizar módulos planos de outros jeitos relativamente mais úteis:

Proposição 2.2.3. *Se N é um $R-$módulo, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *N é $R-$plano.*
2. *Se $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ é sequência exata de $R-$módulos, a sequência tensorizada em N sobre R é exata.*
3. *Se $M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ é uma sequência exata de $R-$módulos, então a sequência tensorizada em N sobre R é exata.*

Dem.: Pela definição de planicidade e pela Proposição 2.1.9, (1) $\implies$ (2).

Suponha (2). Considere a sequência exata $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ e seu diagrama comutativo associado com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r] \arrow[drr, "f"'] & \mathrm{im} f \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \ker g \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[drr, "g"'] & \mathrm{im} g \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & 0 \arrow[r] & \mathrm{im} g \arrow[r] & M''
\end{tikzcd}$$

Por hipótese, obtemos:

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes_R N \arrow[r] \arrow[drr, "f\otimes \mathrm{id}_N"'] & \mathrm{im} f \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \ker g \otimes_R N \arrow[r] & M \otimes_R N \arrow[r] \arrow[drr, "g\otimes \mathrm{id}_N"'] & \mathrm{im} g \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & 0 \arrow[r] & \mathrm{im} g \otimes_R N \arrow[r] & M'' \otimes_R N
\end{tikzcd}$$

que também tem linhas exatas. Assim, (2) $\Longrightarrow$ (3).

Por fim, supondo (3), facilmente conclui-se (1). ■

Continuando com os módulos planos, lembre-se que o *cokernel* (aqui denotado coker) de um morfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ é o módulo $\frac{N}{\mathrm{im}\,\varphi}$. Veja que se considerarmos as sequências exatas, com N plano e $\varphi : M \longrightarrow M'$ um morfismo de $R-$módulos,

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M' \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow 0$$

e

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[drr, "\varphi"'] & \mathrm{im}\,\varphi \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{im}\,\varphi \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

e tensorizá-las sobre R com N, a exatidão se mantém. Conclui-se que o ker, a im e o coker comutam com o produto tensorial. Aplicando o isomorfismo canônico $M \otimes_R R \xrightarrow{\sim} M$ a $R-$módulos M e seus submódulos, é direto que R é módulo $R-$plano. Assim, a soma direta $R^{(I)}$, onde I é um conjunto arbitrário de índices é módulo $R-$plano (visto que há comutatividade do produto tensorial com a soma direta pelo item 2.4 do Teorema 2.1.2). Provamos então que qualquer anel polinomial em R com um conjunto de indeterminadas arbitrário é plano sobre R.

Já vimos que ser plano implica ter diversas condições equivalentes e incrivelmente isso ainda não acabou; antes de continuarmos precisamos dar uma *"fermatizada"*, pois a demonstração do próximo resultado se baseia em propriedades do funtor **Tor**, que não cabem nesse rodapé.[2]

Proposição 2.2.4. *Seja N um $R-$módulo.*

1. *Se N é plano e $a \in R$ não é divisor de zero em R, então $x \in N$ e $ax = 0$ implicam $x = 0$.*
2. *Se R é um domínio de ideais principais, N é plano se, e somente se, $ax = 0$ implica $a = 0$ ou $x = 0$.*

Fortificar a noção de módulo plano nos vai abrir portas, principalmente quando entrarmos nos estudos *"específicos"* deste texto! Este tipo mais forte de módulo também apresenta uma quantidade grande de propriedades. Sendo *fiel* ao texto:

Definição 2.2.5. *Um $R-$módulo N é dito* ***fielmente plano*** *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *N é plano.*
2. *$M \otimes_R N = 0 \iff M = 0$, para qualquer $R-$módulo M.*

Um morfismo $\varphi : R \longrightarrow R'$ é dito fielmente plano, se R' for fielmente plano (visto como $R-$módulo *via* φ). É claro que, se o anel for diferente de zero, um módulo fielmente plano sobre esse anel deve ser diferente de zero pela condição (2).

[2] É sério.

Continuando a *trend*, podemos encontrar condições equivalentes para tais módulos:

Proposição 2.2.6. *Seja N um $R-$módulo. As seguintes condições são equivalentes*

1. *N é fielmente plano.*
2. *N é plano e, dado um morfismo de $R-$módulos $\varphi : M' \longrightarrow M$ tal que $\varphi \otimes \mathrm{id}_N : M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ é o morfismo identicamente nulo, $\varphi = 0$.*
3. *Uma sequência de $R-$módulos $M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ é exata se, e somente se, a sequência tensorizada por N sobre R for exata.*
4. *N é plano e, para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset R$, $\mathfrak{m}N \neq N$.*

Dem.: (1) $\implies$ (2). Assuma N fielmente plano. Seja $\varphi : M' \longrightarrow M$ um morfismo de $R-$módulos. Então

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\iff \operatorname{im} \varphi = 0 \\ &\iff \operatorname{im}(\varphi \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{im} \varphi \otimes N = 0 \\ &\iff \varphi \otimes \mathrm{id}_N = 0. \end{aligned}$$

(2) $\implies$ (3). Ora, a sequência

$$M' \xrightarrow{\ \varphi\ } M \xrightarrow{\ \psi\ } M''$$

é exata se, e somente se,

$$\operatorname{im}(\psi \otimes \varphi) = 0 \text{ e } \ker \psi \longrightarrow \frac{\ker \psi}{\ker \varphi} = 0.$$

Por hipótese,

$$\operatorname{im}((\psi \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_N)) = \operatorname{im}((\psi \circ \varphi) \otimes \mathrm{id}_N) = 0.$$

Além disso,

$$(\ker \psi) \otimes N \longrightarrow \left(\frac{\ker \psi}{\operatorname{im} \varphi}\right) \otimes N = \frac{\ker \psi \otimes N}{\operatorname{im} \varphi \otimes N} = 0.$$

Logo, $\ker \psi \otimes N = \operatorname{im} \varphi \otimes N$ e, portanto, a sequência

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{\varphi \otimes N} M \otimes_R N \xrightarrow{\psi \otimes N} M'' \otimes_R N$$

é exata.

(3) $\implies$ (1). Lembre-se que tensorizar com N sobre R respeita sequências exatas. Logo, N é plano. Considere então um $R-$módulo M tal que $M \otimes_R N = 0$. Agora, considere a sequência

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad \overset{\otimes_R N}{\Longrightarrow} \qquad 0 \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Por hipótese, a primeira das sequências acima é exata, logo, $M = 0$.

(1) $\implies$ (4). Observe que se $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}R$, então $R/\mathfrak{m}$ é diferente de zero. Daí N ser fielmente plano implica pelo Corolário 2.2.1:

$$N/\mathfrak{m}N \simeq N \underset{R}{\otimes} R/\mathfrak{m} \neq 0 \implies \mathfrak{m}N \neq N.$$

(4) $\implies$ (1). Suponha N plano e $N/\mathfrak{m}N \simeq N \otimes_R R/\mathfrak{m} \neq 0$, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Vamos mostrar que $M \otimes_R N$ é não trivial para todo $R-$módulo $M \neq 0$. De fato, seja M não trivial e $x \in M - \{0\}$. Considere $M' = Rx \subset M$ e o epimorfismo

$$R \longrightarrow M'$$
$$a \longmapsto ax.$$

Observe que, se $\mathfrak{a} \subset R$ é o núcleo de aplicação acima, pelo teorema dos isomorfismos,

$$R/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} M'.$$

A inclusão $M' \hookrightarrow M$ induz um monomorfismo

$$(R/\mathfrak{a}) \underset{R}{\otimes} N \simeq M' \underset{R}{\otimes} N \hookrightarrow M \underset{R}{\otimes} N,$$

pois N é plano. Com isso, basta que $R/\mathfrak{a} \otimes_R N$ seja não trivial. Por definição, $R/\mathfrak{a} \simeq M' = Rx \neq \{0\}$. Logo, $\mathfrak{a} \subset R$ é próprio se, e somente se, existir $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}R$ tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Considerando o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccc} (R/\mathfrak{a}) \otimes_R N & \longrightarrow & (R/\mathfrak{m}) \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \| & & \\ N/\mathfrak{a}N & \longrightarrow & N/\mathfrak{m}N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

por hipótese $N/\mathfrak{m}N \neq 0$ e

$$(R/\mathfrak{a}) \underset{R}{\otimes} N \simeq N/\mathfrak{a}N \neq 0,$$

portanto, N é fielmente plano. ■

2.3 Estendendo Coeficientes e o Produto Tensorial de Álgebras

Seja V um espaço vetorial real; defina $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (chamado, às vezes, de *complexificação* de V). Por facilidade, assuma V finitamente gerado por uma base $(b_1, \ldots, b_n)$. Daí, conseguimos isomorfismos de $\mathbb{R}-$módulos:

$$V_{\mathbb{C}} = V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^n \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq \left(\mathbb{R} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}\right)^n \overset{2.2}{\simeq} \mathbb{C}^n.$$

A partir daí, conseguimos concluir que é possível "transformar" quase que por completo a estruta de um módulo (aqui, partimos de um espaço real e conseguimos um espaço complexo) ao tensorizar por um candidato adequado. E ainda mais interessante é o fato de podermos generalizar o processo:

Sejam $\phi : R \to R'$ um morfismo de anéis e N' um $R'-$módulo. Veja que se virmos N' como um grupo aditivo munido da multiplicação por escalares:

$$rx' := \phi(r) \cdot x', r \in R, x' \in N',$$

onde $\varphi(r) \cdot x'$ é o produto em N' como $R'-$módulo, conseguimos munir N' com uma estrutura de $R-$módulo via ϕ. Dizemos que tal estrutura é obtida por *restrição de coeficientes* em relação a ϕ.

Em particular, o próprio R' pode ser visto como $R-$módulo via ϕ e assim, o produto tensorial $M \otimes_R R'$ faz sentido como $R-$módulo, para qualquer $R-$módulo

M. Adicionalmente, podemos munir esse tensorial com estrutura de $R'-$módulo: de fato, tome $r' \in R'$ e considere

$$\begin{aligned} f : M \times R' &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} R' \\ (m, s') &\longmapsto m \underset{R}{\otimes} r's' \end{aligned}$$

e o induzido

$$\begin{aligned} g : M \underset{R}{\otimes} R' &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} R' \\ m \underset{R}{\otimes} s' &\longmapsto m \underset{R}{\otimes} r's'. \end{aligned}$$

Se considerarmos g como a multiplicação por $r' \in R'$ em $M \otimes_R R'$, este grupo aditivo se torna $R'-$módulo. Dizemos que $M \otimes_R R'$ é obtido por *extensão de coeficientes* em M via ϕ. De maneira geral, se M é um $R-$módulo e N' é um $R'-$módulo, podemos ver $M \otimes_R N'$ como $R'-$módulo ao utilizar como multiplicação por escalar a aplicação

$$\begin{aligned} R' \times \left(M \underset{R}{\otimes} N'\right) &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N' \\ \left(r', x \underset{R}{\otimes} y'\right) &\longmapsto x \underset{R}{\otimes} r'y'. \end{aligned}$$

Proposição 2.3.1. *Sejam $R \longrightarrow R' \longrightarrow R''$ uma sequência de morfismos de anéis e M um $R-$módulo. Então, existe um isomorfismo canônico de $R''-$módulos*

$$\begin{aligned} \left(M \underset{R}{\otimes} R'\right) \underset{R'}{\otimes} R'' &\xrightarrow{\sim} M \underset{R}{\otimes} R'' \\ (x \otimes a') \otimes a'' &\longmapsto x \otimes a'a''. \end{aligned}$$

Similarmente, para qualquer $R'-$módulo N, existe um isomorfismo canônico de $R'-$módulos

$$\begin{aligned} \left(M \underset{R}{\otimes} R'\right) \underset{R'}{\otimes} N' &\xrightarrow{\sim} M \underset{R}{\otimes} N' \\ (x \otimes a') \otimes y' &\longmapsto x \otimes a'y'. \end{aligned}$$

Dem.: O que faremos aqui não foge do que foi feito no início do capítulo, quando mostramos algumas propriedades do produto tensorial. Logo, o leitor atento deve estar mais do que acostumado com o procedimento: comece por fixar $y' \in N'$. Considere, agora a aplicação claramente $R-$ bilinear:

$$\begin{aligned} M \times R' &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N' \\ (x,a)' &\longmapsto x \otimes a'y'. \end{aligned}$$

A propriedade universal induz um morfismo

$$\begin{aligned} M \underset{R}{\otimes} R' &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N' \\ m \otimes a' &\longmapsto m \otimes a'y'. \end{aligned}$$

Veja que esse morfismo acima é R e R'-linear; portanto, temos *mais um* induzido

$$\begin{aligned} \left(M \underset{R}{\otimes} R'\right) \times N' &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N' \\ (m \otimes a', y') &\longmapsto m \otimes a'y', \end{aligned}$$

que é $R'-$bilinear; continuando o processo, temos o morfismo induzido

$$\begin{aligned} \left(M \underset{R}{\otimes} R'\right) \underset{R'}{\otimes} N' &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N' \\ m \otimes a' \otimes y' &\longmapsto m \otimes a'y'. \end{aligned}$$

Agora, este morfismo é *iso*; de fato, o morfismo

$$\begin{aligned} M \underset{R}{\otimes} N' &\longrightarrow \left(M \underset{R}{\otimes} R'\right) \underset{R'}{\otimes} N' \\ m \otimes n' &\longmapsto (m \otimes 1) \otimes n' \end{aligned}$$

é a inversa procurada. Agora, para provar o primeiro resultado, basta trocarmos, no que acaba de ser provado, N' por R'', que é $R'-$módulo pela aplicação $R' \longrightarrow R''$. Temos então:

$$\begin{aligned} \left(M \underset{R}{\otimes} R'\right) \underset{R'}{\otimes} R'' &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} R'' \\ m \otimes a' \otimes a'' &\longmapsto m \otimes a'a''. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Considere um $R-$módulo M e um conjunto multiplicativo $S \subseteq R$. Como está parecendo, vamos generalizar o processo de localização de anéis para o caso de módulos. Defina uma relação $\sim$ em $M \times S$ da seguinte maneira:

$$(x, s) \sim (x', s') \iff \exists t \in S \text{ tal que } (xs' - x's)\,t = 0.$$

De maneira análoga à Afirmação 1.1.12, $\sim$ é de equivalência; escrevendo $\frac{x}{s}$ para a classe de equivalência de $(x, s) \in M \times S$ e definindo

$$S^{-1}M := \left\{\frac{x}{s}; x \in M, s \in S\right\},$$

é direto da aritmética desenvolvida para o caso de anéis e das propriedades dos módulos que $S^{-1}M$ é $S^{-1}R-$módulo. O chamamos de *localização* de M por S. Sobre esta, podemos enunciar:

Proposição 2.3.2. *Seja $S \subset R$ um sistema multiplicativo. Então,*

1. *$R \longrightarrow S^{-1}R$ é plano, ou seja, $S^{-1}R$ é plano via a aplicação descrita.*
2. *Para cada $R-$módulo M, existe um isomorfismo canônico*

$$\begin{aligned} M \underset{R}{\otimes} S^{-1}R &\xrightarrow{\sim} S^{-1}M \\ \left(x \otimes \frac{a}{s}\right) &\longmapsto \frac{ax}{s}. \end{aligned}$$

Dem.: Vamos começar com (2). A aplicação $R-$bilinear

$$\begin{aligned} M \times S^{-1}R &\longrightarrow S^{-1}M \\ \left(x, \frac{a}{s}\right) &\longmapsto \frac{ax}{s} \end{aligned}$$

é bem definida. De fato, se $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, então existe $t \in S$ tal que

$$\begin{aligned} (as' - a's)\,t = 0 &\implies (xas' - xa's)\,t = 0 \\ &\implies \frac{ax}{s} = \frac{a'x}{s'}. \end{aligned}$$

Com isso, a propriedade universal implica na existência de um morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : M \underset{R}{\otimes} S^{-1}R &\longrightarrow S^{-1}M \\ x \otimes \frac{a}{s} &\longmapsto \frac{ax}{s}. \end{aligned}$$

Como podemos suspeitar, esse morfismo tem inversa:

$$\begin{aligned} \psi : S^{-1}M &\longrightarrow M \underset{R}{\otimes} S^{-1}R \\ \frac{x}{s} &\longmapsto x \otimes \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Ela é de fato, bem definida. Observe que se $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$ então

$$\begin{aligned} (xs' - x's)\, t = 0 \implies \left(xs'\frac{s}{s} - x's\frac{s'}{s'}\right) t = 0 \implies & \psi\left(\left(\frac{m}{s}s's - \frac{m'}{s'}ss'\right) t\right) \\ &= \left(\left(m \otimes \frac{1}{s}\right) s's - \left(m' \otimes \frac{1}{s'}\right) s's\right) t \\ &= (ms' \otimes 1 - m's \otimes 1)\, t \\ &= (ms' - m's)\, t \otimes 1, \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} (ms' - m's)\, t = 0 &\implies m \otimes \frac{1}{s} - m' \otimes \frac{1}{s'} = 0 \\ &\implies m \otimes \frac{1}{s} = m' \otimes \frac{1}{s'}. \end{aligned}$$

Portanto, $M \otimes_R S^{-1}R \simeq S^{-1}M$.
Para (1), considere o monomorfismo $\sigma : M' \hookrightarrow M$ e o induzido

$$\begin{aligned} \sigma_S : M'_S &\longrightarrow S^{-1}M \\ \frac{m}{s} &\longmapsto \frac{\sigma(m)}{s}. \end{aligned}$$

Esta é injetiva. De fato, com $m \in M'$ e $s \in S$ tais que $\sigma_S\left(\frac{m}{s}\right)$, obtemos $\frac{\sigma(m)}{s} = 0$. Logo, existe $t \in S$ tal que $\sigma(tm) = 0$ e pela injetividade, $tm = 0$; daí,

$$\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{0}{ts} = 0_{S^{-1}M}.$$

Portanto, σ_S é injetivo. ■

Observe que é relativamente direto mostrar que módulos livres são planos:

Proposição 2.3.3. *Seja M_i com $i \in I$ uma família de $R-$módulos, com M sendo sua soma direta. M é plano se e somente se cada M_i é plano.*

Dem.: Seja $f : N' \to N$ uma aplicação $R-$linear. Basta então considerar a sequência

$$\begin{tikzcd}
N' \otimes_R M_i \arrow[d] & N' \otimes_R M \arrow[d, "f \underset{R}{\otimes} \mathrm{id}_M"] & \bigoplus\limits_{i \in I} (N \otimes_R M_i) \arrow[d, two heads] \\
\bigoplus\limits_{i \in I} (N' \otimes_R M_i) \arrow[ur, "\sim"] & N \otimes_R M \arrow[ur, "\sim"] & N \otimes_R M_i
\end{tikzcd}$$

■

Como corolário direto, podemos garantir que

Corolário 2.3.4. *$R[X_1, \ldots, X_n]$ é álgebra $R-$plana.*

O interessante em se localizar módulos é conseguir uma caracterização local de planicidade. Este tipo de caracterização aparece, por exemplo, ao se trabalhar com esquemas (mais especificamente, ao demonstrar o critério de fibras para a suavidade); mas deixemos essa conversa para outro momento. Dito isso, os próximos dois resultados tratam deste assunto:

Lema 2.3.5. *Para qualquer $R-$módulo M, a aplicação canônica*

$$\varphi : M \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm} R} M_{\mathfrak{m}}$$

no produto cartesiano de todas as localizações de M por ideais maximais $\mathfrak{m} \subset R$ é injetiva. Em particular, $M = 0$ se $M_{\mathfrak{m}} = 0$, para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R.

Dem.: Considere $x \in M$ tal que $\varphi(x)$ é trivial, para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R. Logo a Proposição 1.1.15 garante que para todo $\mathfrak{m}$ existe $a_{\mathfrak{m}} \in R - \mathfrak{m}$ tal que $x a_{\mathfrak{m}} = 0$. Como os $a_{\mathfrak{m}}$ geram o ideal unitário em R, temos $x = 0$. Logo, a aplicação deve ser injetiva.

■

Proposição 2.3.6. *Sejam $\varphi : R \longrightarrow R'$ um morfismo de anéis e N um $R'-$módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *N é plano quando visto como $R-$módulo via φ.*

2. *Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}' \subset R'$, a localização $N_{\mathfrak{m}'}$ é um $R-$módulo plano.*

3. *Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}' \subset R'$, a localização $N_{\mathfrak{m}'}$ é um $R_{\mathfrak{m}}-$módulo plano onde $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$.*

Se trocarmos os ideais maximais por ideais primos, as equivalências continuam válidas.

Dem.: (1) $\Longrightarrow$ (2) Sejam N um $R-$módulo plano e $\mathfrak{m}' \subset R'$ um ideal maximal. Considere o monomorfismo de $R-$módulos $M' \hookrightarrow M$; como N é plano, $M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ é injetivo. Logo, $R'_{\mathfrak{m}'}$ é plano sobre R'. Daí, o morfismo de $R-$módulos

$$M' \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'}$$

é injetivo, pois

$$\begin{cases} M' \otimes_R N_{\mathfrak{m}'} = M' \otimes_R \left(N \underset{R'}{\otimes} R'_{\mathfrak{m}'} \right) = (M' \otimes_R N) \underset{R'}{\otimes} R'_{\mathfrak{m}'} \\ M \otimes_R N_{\mathfrak{m}'} = M \otimes_R \left(N \underset{R'}{\otimes} R'_{\mathfrak{m}'} \right) = (M \otimes_R N) \underset{R'}{\otimes} R'_{\mathfrak{m}'}. \end{cases}$$

Portanto, $N_{\mathfrak{m}'}$ é plano.
(2) $\Longleftrightarrow$ (3) Suponha que $N_{\mathfrak{m}'}$ seja $R-$módulo plano para $\mathfrak{m}' \in \mathrm{Specm} R'$. Como φ induz um morfismo $R_{\mathfrak{m}} \longrightarrow R'_{\mathfrak{m}'}$, onde $m = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$, é direto que $N_{\mathfrak{m}'}$ pode ser visto como $R_{\mathfrak{m}}$ módulo. Agora, se $M' \hookrightarrow M$ é monomorfismo de $R_{\mathfrak{m}}-$módulos, a planicidade de $N_{\mathfrak{m}}$ sobre R "gera" um monomorfismo

$$M' \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \hookrightarrow M \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'},$$

por definição. Mas, $\mathfrak{m}'$ e $\mathfrak{m}$ são $R_{\mathfrak{m}}-$módulos. Daí,

$$\begin{cases} M' \otimes_R N_{\mathfrak{m}'} \longrightarrow M' \\ M \otimes_R N_{\mathfrak{m}'} \longrightarrow M \end{cases}$$

são isomorfismos. Concluímos, então, que

$$M' \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} = \left(M' \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{m}} \right) \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \hookrightarrow \left(M \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{m}} \right) \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} = M \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'}.$$

Logo, $N_{\mathfrak{m}'}$ é $R_{\mathfrak{m}}-$módulo plano. Por outro lado, se $N_{\mathfrak{m}'}$ for $R_{\mathfrak{m}}-$módulo plano, com $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$, escolha um monomorfismo de $R-$módulos

$$M' \hookrightarrow M.$$

Localize em $\mathfrak{m}$,

$$M'_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow M_{\mathfrak{m}} \text{ como } R_{\mathfrak{m}} - \text{módulos.}$$

Tensorize com $N_{\mathfrak{m}'}$ sobre $R_{\mathfrak{m}}$,

$$M'_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \hookrightarrow M_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'}$$

implica em

$$M' \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} = M'_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \hookrightarrow M_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} = M \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'}.$$

Como $N_{\mathfrak{m}'}$ é plano sobre $R_{\mathfrak{m}}$, é injetivo. Feito isso,

$$\begin{aligned} M' \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} &\implies M' \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N_{\mathfrak{m}'} \\ &\implies N_{\mathfrak{m}'} \text{ é } R - \text{módulo plano.} \end{aligned}$$

Por fim, (2) $\implies$ (1). Suponha $N_{\mathfrak{m}'}$ $R-$módulo plano para todo $\mathfrak{m}$ maximal de R'. Escolha um monomorfismo $M' \hookrightarrow M$; existe o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} M' \otimes_R N \arrow[r, hook, "g"] \arrow[d, "f"'] & \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm} R'} (M' \otimes_R N)_{\mathfrak{m}'} \arrow[d, "j"] \\ M \otimes_R N \arrow[r, hook, "h"'] & \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm} R'} (M \otimes_R N)_{\mathfrak{m}'} \end{tikzcd}$$

com $M' \otimes_R N$ e $M \otimes_R N$ sendo $R'-$módulos por N e pelo Lema 2.3.5, g e h são injetivas. Agora,

$$\begin{cases} (M' \otimes_R N)_{\mathfrak{m}'} \simeq M' \otimes_R N \underset{R'}{\otimes} R'_{\mathfrak{m}'} \simeq M' \otimes_R N_{\mathfrak{m}'} \\ (M \otimes_R N)_{\mathfrak{m}'} \simeq M \otimes_R N \underset{R'}{\otimes} R'_{\mathfrak{m}'} \simeq M \otimes_R N_{\mathfrak{m}'} \end{cases}$$

Logo, f, j são injetivas. Daí, N é $R-$módulo plano. ■

Agora, após estarmos com a barriga cheia de módulos, vamos para a sobremesa: produtos tensoriais de álgebras! Sejam B, C duas $R-$álgebras, com os morfismos correspondentes sendo $\phi : A \longrightarrow B$ e $\psi : A \longrightarrow C$. Como B e C são $R-$módulos, seu produto tensorial $D = B \otimes_R C$ existe e é um $R-$módulo. Muniremos D com uma multiplicação: considere a aplicação $R-$linear em cada entrada

$$\begin{aligned} B \times C \times B \times C &\longrightarrow D \\ (b, c, b', c') &\longmapsto bb' \otimes cc', \end{aligned}$$

que pela construção inicial, induz um morfismo de $R-$módulos

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \longrightarrow D \implies D \otimes D \longrightarrow D.$$

O *Katzensprung*[3] é que isto corresponde a uma aplicação $R-$bilinear

$$\begin{gathered} \beta : D \times D \to D \\ (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto bb' \otimes cc'. \end{gathered}$$

Observe que nosso árduo trabalho deu como frutos uma multiplicação no produto tensorial D; essa multiplicação no geral é dada por

$$\left(\sum_i (b_i \otimes c_i)\right)\left(\sum_j (b'_j \otimes c'_j)\right) = \sum_{i,j} (b_i b'_j \otimes c_i c'_j).$$

O que acontece com D após ganhar essa ferramenta? Primeiramente D é um anel comutativo com elemento neutro do produto sendo $1 \otimes 1$. Se formos mais *ousados* e definirmos o morfismo de anéis $a \longmapsto \phi(a) \otimes \psi(a)$, D se torna uma $R-$álgebra. Os seguintes resultados nos dão ainda mais recursos:

Lema 2.3.7. *Sejam A' e A'' duas $R-$álgebras. Então, os morfismos canônicos*

$$\begin{aligned} \sigma' : A' &\longrightarrow A' \underset{R}{\otimes} A'' \\ a' &\longmapsto a' \otimes 1 \end{aligned}$$

[3] Pulo do gato.

e

$$\begin{aligned}\sigma' : A'' &\longrightarrow A' \underset{R}{\otimes} A''\\ a'' &\longmapsto 1 \otimes a''\end{aligned}$$

têm a seguinte propriedade universal: Para quaisquer dois morfismos de $R-$álgebras $\varphi' : A' \longrightarrow A$ e $\varphi'' : A'' \longrightarrow A$, existe um único morfismo de R'álgebras $\varphi : A' \otimes_R A'' \longrightarrow A$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[d, "\sigma''"'] \arrow[drr, "\varphi''"] & & \\
A' \otimes_R A'' \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & A \\
A' \arrow[u, "\sigma'"] \arrow[urr, "\varphi'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dem.: A unicidade de φ vem diretamente:

$$\varphi(a' \otimes a'') = \varphi\left((a' \otimes 1).(1 \otimes a'')\right) = \varphi(a' \otimes 1)\varphi(1 \otimes a'') = \varphi'(a')\varphi''(a'').$$

Para a existência, considere

$$\begin{aligned}f : A' \times A'' &\longrightarrow A\\ (a', a'') &\longmapsto \varphi'(a')\varphi''(a'').\end{aligned}$$

Observe que f é bem definida e bilinear, induzindo então

$$\begin{aligned}\varphi : A' \underset{R}{\otimes} A'' &\longrightarrow A\\ a' \otimes a'' &\longmapsto \varphi'(a')\varphi''(a'').\end{aligned}$$

Por sua vez, φ é morfismo de $R-$álgebras. O diagrama, portanto, é comutativo e está provado o resultado. ■

Proposição 2.3.8. *Sejam R' uma $R-$álgebra, X um sistema de variáveis e $\mathfrak{a} \subset R[X]$ um ideal. Então, existem isomorfismos canônicos de $R'-$álgebras:*

$$\begin{aligned} R[X] \underset{R}{\otimes} R' &\xrightarrow{\sim} R'[X] \\ f \otimes a' &\longmapsto a' f \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R[X]/\mathfrak{a} \underset{R}{\otimes} R' &\xrightarrow{\sim} R'[X]/\mathfrak{a}R'[X] \\ \overline{f} \otimes a' &\longmapsto \overline{a' f}. \end{aligned}$$

Dem.: Pelo Lema 2.3.7, $\varphi' : R[X] \longrightarrow R'[X]$ e $\varphi'' : R' \longrightarrow R'[X]$ induzem um morfismo de $R-$álgebras

$$\begin{aligned} \varphi : R[X] \underset{R}{\otimes} R' &\longrightarrow R'[X] \\ f \otimes a' &\longmapsto a' f. \end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned} R' &\longrightarrow R[X] \underset{R}{\otimes} R' \\ a &\longmapsto 1 \otimes a', \end{aligned}$$

que estendemos à

$$\begin{aligned} R'[X] &\longrightarrow R[X] \underset{R}{\otimes} R' \\ x &\longrightarrow x \otimes 1, \end{aligned}$$

pela propriedade universal de anéis de polinômios. Como uma é inversa da outra, acabou! Para o segundo isomorfismo, basta utilizarmos o Corolário 2.2.1; o resultado sai direto. ■

Com a barriga cheia, só nos resta o *cafézinho expresso*! Uma $R-$álgebra B é dita plana, se for plana como $R-$módulo. A próxima proposição nos traz mais conforto com o conceito e para o leitor atento, a demonstração não deve ser de muito trabalho.

Proposição 2.3.9. *Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ duas álgebras (isto é, B é $A-$álgebra e C é $B-$álgebra) e M um $A-$módulo.*

1. *Se f e g são planos, $f \circ g$ é plano.*
2. *M é $R-$plano $\Longrightarrow$ $M \otimes_R B$ é $B-$plano.*
3. *M é $R-$plano $\Longleftrightarrow$ $M_{\mathfrak{m}}$ é $A_{\mathfrak{m}}$-plano para todo $\mathfrak{m} \in Specm\ A$.*
4. *Se N é $B-$módulo, então N é $R-$plano $\Longleftrightarrow$ $N_{\mathfrak{n}}$ é $A_{f^{-1}(\mathfrak{n})}$-plano para todo $\mathfrak{n} \in \mathrm{Specm} A$.*

3 *Brunch:* Extensões Integrais

3.1 Estendendo anéis, integralmente

Como de praxe, a Matemática tende sempre a *estender* conceitos já conhecidos a outros ambientes, obtendo assim propriedades muito interessantes e aplicáveis a contextos ainda mais interessantes e gerais, como *deitar* e *levantar* primos.

Definição 3.1.1. *Sejam S um anel, $R \subseteq S$ um subanel e $s \in S$. Se $g \in R[X]$ é mônico e $g(s) = 0$, então $g(s) = 0$ é chamado equação integral de s sobre R. Se $s \in S$ admitir uma equação integral, então s é dito integral sobre R. Se todo elemento de S for integral sobre R, então S é uma extensão integral de R.*

Observe que a definição de elemento integral estende para anéis arbitrários a noção de elemento algébrico estudada no contexto de extensões de corpos.

Lema 3.1.2. *Sejam S um anel, $R \subseteq S$ um subanel e $s \in S$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *S é integral sobre R*
2. *$R[s]$ é um $R-$módulo finitamente gerado, para todo $s \in S$.*
3. *Existe um $R[s]-$submódulo M de S, com $\operatorname{Ann}(M) = \{0\}$, tal que M é $R-$módulo finitamente gerado (onde $\operatorname{Ann}(M)$ é o anulador, i.e., o conjunto dos elementos de M cujo produto com qualquer outro elemento do módulo é 0).*

Dem.: (1) $\implies$ (2). Suponha S integral sobre R. Então, temos um polinômio mônico

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \in R[X]$$

que anula s. Ora, $R[s] = \sum\limits_{i=0}^{n-1} Rs^i =: N$.

De fato, para $k \geq n$, temos

$$s^k + a_1 s^{k-1} + \cdots + a_n s^{k-n} = 0 \implies s^k = -(a_1 s^{k-1} + \cdots + a_n s^{k-n});$$

logo, indutivamente, $s^k \in N$.

(2) $\implies$ (3). Tome $M = R[s]$. É claro que $1 \in M$. Então, $\mathrm{Ann}\,(M) = \{0\}$ e, assim, está provado.

(3) $\implies$ (1). Por hipótese, $M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$. Assim, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ existe $a_{i,j} \in R$ tal que

$$\begin{aligned} s \cdot m_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} m_j &\implies \det(\delta_{i,j} s - a_{i,j}) \in \mathrm{Ann}\,(M) \\ &\implies \det(\delta_{i,j} s - a_{i,j}) = 0. \end{aligned}$$

(A segunda implicação é um fato sobre o determinante ser um anulador dadas certas condições; é uma ferramente usada para, entre outras coisas, provar o Lema de Nakayama). Agora $\det(\delta_{i,j} X - a_{i,j}) \in R[X]$ é um polinômio mônico sobre R que anula s, provando o resultado. ■

Em nossa conversa inicial, mencionamos a ideia de traçarmos paralelos entre o que acontece aqui e o que acontecia com extensões algébricas na Teoria de Corpos. O próximo teorema traz ainda mais deste pensamento:

Teorema 3.1.3. *Sejam S um anel e $R \subseteq S$ um subanel de modo que $S = R[a_1, \dots, a_n]$ seja finitamente gerado como $R-$álgebra. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *S é integral sobre R;*
2. *Todos os a_i são integrais sobre R;*
3. *S é finitamente gerado como um $R-$módulo.*

Dem.: Podemos já começar dizendo que claramente (1) $\implies$ (2). Vamos mostrar que (2) $\implies$ (3). Tome $n > 0$ natural. Suponha por indução que (2) seja válido para $n-1$ e defina $S' := R[a_1, \dots, a_{n-1}]$ finitamente gerado como $R-$módulo. Daí,

$$S' = Rm_1 + \cdots + Rm_r = \sum_{i=1}^{r} Rm_i, \;\; m_i \in S'.$$

Por (1), a_i é integral sobre R, logo, pelo Lema 3.1.2,

$$S'[a_n] = \sum_{j=1}^{l} S'n_j, \;\; n_j \in S.$$

Assim,

$$S = S'[a_n] = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{r} Rm_i m_j.$$

(3) $\implies$ (1) Pela hipótese, basta tomar $M = S$ no Lema 3.1.2. ■

Uma ideia comum é a de *transitividade*; aqui temos algo análogo: a ideia de *torre de extensões integrais.*

Corolário 3.1.4. *Sejam T um anel e $R \subseteq S \subseteq T$ subanéis. Se T é integral sobre S e S é integral sobre R, então T é integral sobre R.*

Dem.: Para todo $t \in T$, temos uma equação integral

$$t^n + s_1 t^{n-1} + \cdots + s_{n-1} t + s_n = 0,$$

com $s_i \in S$. Assim, t é integral sobre $S' := R[s_1, \dots, s_n] \subseteq S$. Pelo Lema 3.1.2, $S'[t]$ é finitamente gerado como $S'-$módulo e, pelo Teorema 3.1.3, S' é finitamente gerado como $R-$módulo. Daí, $S'[t]$ é finitamente gerado como $R-$módulo e o Lema 3.1.2, novamente, garante que t é integral sobre R. ■

Proposição 3.1.5. *Os elementos integrais sobre um anel formam um anel.*

Se $R \subseteq S$ é subanel, chamamos o conjunto de todos os elementos de S integrais sobre R de *fecho integral* de R em S e denotamos por $\overline{R}_S$ ou $\overline{R}$ quando S estiver subentendido. Quando $\overline{R} = R$, R é dito integralmente fechado em S.

Um outro conceito *em tempo* de ser introduzido é o de *domínios normais.* R é domínio normal se for integralmente fechado em seu corpo de frações.

A *normalização* de um domínio R é o fecho integral de R no seu corpo de frações.

Exemplo 3.1.6. $\overline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}}$ não é finitamente gerado como $\mathbb{Z}-$módulo. De fato, suponha que haja um conjunto de geradores para $\overline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}}$ como $\mathbb{Z}-$módulo, digamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Da Teoria de Corpos, é fato que o grau de $\mathbb{Q}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ é limitado por

$$L = 1 + \prod_{i=1}^{n} \left[\mathbb{Q}\left(\alpha\left(i\right)\right) : \mathbb{Q}\right].$$

Tome $p > L+1$, primo. Então a $p-$ésima raiz de 1, denotada ζ_p tem grau $p-1 \geq L$. $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ é $\mathbb{Z}-$módulo com $p-1$ geradores contido em $\mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Portanto, este tem mais e menos M geradores ao mesmo tempo, o que é uma contradição.

Proposição 3.1.7. *Todo domínio fatorial, isto é, domínio de fatoração única, é normal.*

Dem.: Sejam R um domínio fatorial e $\frac{x}{y} \in \operatorname{Frac} R$ um elemento integral sobre R, onde já podemos assumir que $\operatorname{mdc}(x, y) = 1$. Pela integralidade,

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{y^n} + \cdots + \frac{x}{y} a_{n-1} + a_n = 0 &\Rightarrow x^n + a_1 y x^{n-1} + \cdots + y^{n-1} x a_{n-1} + y^n a_n = 0 \\ &\Rightarrow x^n = y(-a_1 x^{n-1} - \cdots - y^{n-2} x a_{n-1} - y^{n-1} a_n) \\ &\Rightarrow y \mid x^n. \end{aligned}$$

Daí, todo fator primo de y deve dividir x. Então y não pode ter fatores primos (por conta do mdc); logo, tem de ser invertível em R e, assim, $\frac{x}{y} \in R$. ■

Algo interessante de se observar é que *ser normal* é uma propriedade local!

Teorema 3.1.8. *Seja R um domínio de integridade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *R é normal.*
2. *A localização $U^{-1}R$ é normal, onde U é um subconjunto multiplicativo de R.*
3. *$R_{\mathfrak{m}}$ é normal para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.*

Dem.: (1) $\implies$ (2). Defina $K := \operatorname{Frac} R$ e considere $U \subset R$ um conjunto multiplicativo com $0 \notin U$. Temos, portanto,

$$U^{-1}R \subseteq K \text{ e } \operatorname{Frac}\left(U^{-1}R\right) = K.$$

Considere $a \in K$ integral sobre $U^{-1}R$. Existem, portanto, $u \in U$ e $a_i \in R$ tais que

$$a^n + \frac{a_1}{u}a^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{u}a + \frac{a_n}{u} = 0 \implies (ua)^n + a_1(ua)^{n-1} + \cdots + a_n u^{n-1} = 0,$$

isto é, uma equação integral para ua sobre R. Pela normalidade provinda da hipótese, $ua \in R \implies a \in U^{-1}R$.

(2) $\implies$ (3). A veracidade desse resultado provém diretamente das propriedades básicas de ideais.

(3) $\implies$ (1). Tome $y \in K$ integral sobre R e assuma $R_{\mathfrak{m}}$ normal para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R. Ora, $y \in \bigcap\limits_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$ e assim, basta observarmos que $\bigcap\limits_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}} \subseteq R$. De fato, fixe $a \in \bigcap\limits_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$ e, para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R escolha $a_{\mathfrak{m}} \in R$ e $b_{\mathfrak{m}} \in R \backslash \mathfrak{m}$ tais que $a = \frac{a_{\mathfrak{m}}}{b_{\mathfrak{m}}}$.

Como o conjunto dos $b_{\mathfrak{m}}$'s não pode estar contido num ideal maximal de R, ele deve gerar o ideal unitário. Assim, há equação

$$\sum_{\mathfrak{m}} r_{\mathfrak{m}} b_{\mathfrak{m}} = 1,$$

com $r_{\mathfrak{m}} \in R$ sendo nulo para quase todo $\mathfrak{m}$. Daí,

$$\begin{aligned} a &= \left(\sum_{\mathfrak{m}} r_{\mathfrak{m}} b_{\mathfrak{m}}\right) a \\ &= \sum_{\mathfrak{m}} r_{\mathfrak{m}} b_{\mathfrak{m}} \frac{a_{\mathfrak{m}}}{b_{\mathfrak{m}}} \\ &= \sum_{\mathfrak{m}} r_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}} \in R. \end{aligned}$$

■

3.2 Como deitam os primos

Não existe lugar melhor do que aqui para uma afirmação, no mínimo interessante: Se o contradomínio de uma aplicação de domínios de integridade é integral sobre o domínio, então ambos são (ou não são) corpos. A demonstração em si não é difícil:

Proposição 3.2.1. *Seja $R \hookrightarrow R'$ uma extensão de domínios de integridade tal que R' é integral sobre R. Então R é corpo se, e somente se, R' também for.*

Dem.: $(\Rightarrow)$ Suponha R corpo e tome $x \in R' \setminus \{0\}$; assim, existem $a_1, \dots, a_n \in R$ tais que

$$x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Assuma que n seja mínimo; neste caso, como $x \neq 0$ então $a_n \neq 0$. Observe que se

$$y = (-a_n)^{-1} \left(x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1} \right),$$

que por sua vez está em R' (pois os elementos em R também estão lá, por hipótese) então

$$\begin{aligned} xy &= (-a_n)^{-1} \left(x^n + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x \right) \\ &= (-a_n)^{-1} (-a_n) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como é válido para qualquer $x \neq 0$, R' deve ser corpo.

$(\Leftarrow)$ Suponha R' corpo e tome $x \in R \setminus \{0\}$. Observe que como este é um elmeento de R, é também de R'; tem, portanto, inverso multiplicativo. Chame $y = \frac{1}{x}$. Como R' é integral sobre R, existem $a_1, \dots, a_n \in R$ tais que

$$y^m + \cdots + a_{m-1}y + a_m = 0,$$

para algum m inteiro positivo. Multiplicando ambos os lados por $\left(\frac{1}{y}\right)^{m-1}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{y}\right)^{m-1} (y^m + \cdots + a_{m-1}y + a_m) = 0 &\implies y = \frac{-a_m}{y^{m-1}} - \cdots - a_1 \\ &\implies \frac{1}{x} = -a_m x^{m-1} - \cdots - a_1. \end{aligned}$$

Como todo elemento não nulo de R tem inverso multiplicativo lá (e não apenas em R'), R é corpo. ■

Agora estamos interessados em estudar o relacionamento entre primos de morfismos como acima, porém com os *interessados* vistos como anéis.

Dizemos que um morfismo $\varphi : R \to R'$ é morfismo integral de anéis se R' for integral sobre $\varphi(R)$. Observe que é bastante conveniente considerarmos R' como $R-$álgebra via φ; em particular, R' carrega estrutura de $R-$módulo, onde produtos como $r \cdot_{R'} r'$, para $r \in R$ e $r' \in R'$ são tratados como $r \cdot_{R'} r' = \varphi(r) \cdot_{R'} r'$.

Fixando notação, como de *praxe*, dado um primo $\mathfrak{q} \subset R'$, escrevemos $\mathfrak{q} \cap R$ para o primo $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset R$.

Proposição 3.2.2. *Seja $\varphi : R \to R'$ um morfismo integral de anéis. Então:*

1. *Um ideal primo $\mathfrak{q} \subset R'$ é maximal se e somente se sua restrição $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ é maximal em R.*

2. *Sejam $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \subset R'$ primos satisfazendo $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{q}_2 \cap R$. Então*

$$\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \implies \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2.$$

Dem.: 1. Ora, a aplicação $\varphi : R \to R'$ induz um monomorfismo integral de domínios $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow R'/\mathfrak{q}$. Logo, pela Proposição 3.2.1, $R/\mathfrak{p}$ é corpo se, e somente se, $R'/\mathfrak{q}$ for corpo. Com isso, $\mathfrak{p}$ é maximal se e somente se $\mathfrak{q}$ também o for.

2. Agora, sejam $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \subset R'$ tais que $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}$. Considere $S = R - \mathfrak{p}$ e o morfismo $\psi : S^{-1}R \to (\varphi(S))^{-1} R'$. Como φ é integral, ψ também é. De fato, pela propriedade universal de localizações, como $\varphi(S)$ é conjunto multiplicativo, há um morfismo $S^{-1}R \to (\varphi(S))^{-1} R'$. Tome então $\frac{x}{\varphi(S)} \in (\varphi(S))^{-1} R'$, onde $x \in R'$ e $s \in S$. Como R' é integral sobre R, existem $a_1, \ldots, a_n \in R$ tais que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Dividindo por $\varphi(s)^n$,

$$\frac{x^n}{\varphi(s)^n} + \frac{a_1}{s}\frac{x^{n-1}}{\varphi(s)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{s^n} = 0 \implies \left(\frac{x}{\varphi(s)}\right)^n + \cdots + \frac{a_n}{s^n} = 0$$
$$\implies S^{-1}R \to (\varphi(S))^{-1} R' \text{ é integral.}$$

Assim, o ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$, gerado por $\mathfrak{p}$ em $S^{-1}R$, é maximal pelo Corolário 1.1.23. Da mesma maneira, consideramos $S^{-1}\mathfrak{q}_1$ e $S^{-1}\mathfrak{q}_2$, gerados por $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ em $(\varphi(S))^{-1} R'$. Como $\varphi(S)$ é disjunto de $\mathfrak{q}_1$ e $\mathfrak{q}_2$, $S^{-1}\mathfrak{q}_1$ e $S^{-1}\mathfrak{q}_2$ são primos, pela Proposição 1.1.21. Daí, $\mathfrak{q}' := S^{-1}\mathfrak{q}_1 \cap S^{-1}R$ e $\mathfrak{q}'' := S^{-1}\mathfrak{q}_2 \cap S^{-1}R$ são primos em $S^{-1}R$ e contém $S^{-1}\mathfrak{p}$; além disso, veja que

$$S^{-1}\mathfrak{p} \text{ maximal } \implies S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'',$$

portanto $S^{-1}\mathfrak{q}_1$ e $S^{-1}\mathfrak{q}_2 \subset (\varphi(S))^{-1} R'$ são ideais com restrição maximal e assim, por (1),

$$S^{-1}\mathfrak{q}_1 \text{ e } S^{-1}\mathfrak{q}_2 \text{ são maximais.}$$

Como $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$, então $S^{-1}\mathfrak{q}_1 = S^{-1}\mathfrak{q}_2$.

Por fim, novamente pela Proposição 1.1.21, $\mathfrak{q}_1 = S^{-1}\mathfrak{q}_1 \cap R' = S^{-1}\mathfrak{q}_2 \cap R' = \mathfrak{q}_2$.

■

Como num bom almoço de domingo, num feriado prolongado, é certo de que primos deitarão (após, talvez, uma bela macarronada). Como a Matemática (e, talvez, a arte) imita a vida, não é surpresa que o mesmo ocorra:

Teorema 3.2.3 (Deitando, ou, *Lying-over*)**.** *Sejam $\varphi : R \to R'$ um morfismo integral de anéis e $\mathfrak{p} \subset R$ um primo tal que* $\ker \varphi \subset \mathfrak{p}$. *Então, existe um ideal primo $\mathfrak{q}$ de R' tal que $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$. Além disso, não existe inclusão própria entre estes ideais $\mathfrak{q} \subset R'$.*

Dem.: Comecemos com uma ideia inédita: chame $S = R - \mathfrak{p}$ e considere o morfismo integral $\varphi' : S^{-1}R \to (\varphi(S))^{-1} R'$. Assim é direto observarmos que

$$\begin{aligned} \ker \varphi \subset \mathfrak{p} &\implies \ker \varphi \cap S = \emptyset, \text{ pois } S = R - \mathfrak{p} \\ &\implies 0 \notin \varphi(S) \\ &\implies (\varphi(S))^{-1} R' \text{ não é zero.} \end{aligned}$$

Dito isso, podemos garantir que existe um ideal maximal $\mathfrak{m} \subset (\varphi(S))^{-1} R'$; daí, pela proposição anterior, $\mathfrak{m} \cap S^{-1}R$ é maximal em $S^{-1}R$. Como a *localização é local*, $\mathfrak{m} \cap S^{-1}R = S^{-1}\mathfrak{p}$. Considere o diagrama comutativo (com τ sendo o morfismo de localização):

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\tau_S"'] & R' \arrow[d, "\tau'_{\varphi(S)}"] \\ S^{-1}R \arrow[r, "\varphi'"'] & (\varphi(S))^{-1} R' \end{tikzcd}$$

Chame $\mathfrak{q} := \mathfrak{m} \cap R'$. Então,

$$\mathfrak{q} \cap R = (\mathfrak{m} \cap R') \cap R \overset{\text{Pelo diag. comutativo}}{=} \left(\mathfrak{m} \cap S^{-1}R\right) \cap R = \left(S^{-1}\right) \mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}.$$

■

Se é possível *deitar* é honesto nos perguntarmos se também podemos levantar, ou, neste contexto, subir. A resposta é sim!

Teorema 3.2.4 (*Going-up*)**.** *Sejam $R \hookrightarrow R'$ um monomorfismo integral de anéis e*

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \subset R$$

uma cadeia de primos em R. Então, para qualquer ideal primo $\mathfrak{q}_0 \subset R'$ tal que $\mathfrak{q}_0 \cap R = \mathfrak{p}_0$, existe uma cadeia de ideais primos

$$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n \subset R'$$

que satisfaz $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ para todo i.

Dem.: Aqui, vamos voltar às origens e provar por indução em n. É claro que o caso $n = 0$ é trivial, pois a própria hipótese é o que buscamos. Supomos então $n > 0$. Pela hipótese de indução, suponha que hajam

$$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_{n-1} \subset R'$$

tais que $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$, para $i = 1, \ldots, n$. O monomorfismo φ induz um monomorfismo $R/\mathfrak{p}_{n-1} \hookrightarrow R'/\mathfrak{q}_{n-1}$; pelo Teorema 3.2.3, existe um primo $\mathfrak{q} \cap R'/\mathfrak{q}_{n-1}$ que se deita sobre o primo $\mathfrak{p}_n/\mathfrak{p}_{n-1} \subset R/\mathfrak{p}_{n-1}$. Seja $\mathfrak{q}_n$ a pré-imagem de $\mathfrak{q}$ com respeito à projeção $R' \to R'/\mathfrak{q}_{n-1}$. Então, $\mathfrak{q}_{n-1} \subset \mathfrak{q}_n$ e, pelo diagrama comutativo abaixo,

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/\mathfrak{p}_{n-1} & \longrightarrow & R'/\mathfrak{q}_{n-1} \end{array}$$

concluímos que $\mathfrak{q}_n \cap R = \mathfrak{p}_n$. ■

3.3 Polinômios exemplares

Primeiramente, tomemos o caso de um anel de polinômios; o lema a seguir ajudará a compreender os outros resultados:

Lema 3.3.1. *Sejam R um anel e $p \in R[X]$ um polinômio mônico. Então existe um anel $R' \supseteq R$ tal que p seja um produto de polinômios mônicos de grau 1 em $R'[X]$.*

Dem.: Façamos por indução no grau n do polinômio p. Se $n = 0$ ou $n = 1$ então o caso é uma trivialidade. Suponha então que a afirmação seja válida para polinômios de grau n maior que 1. Seja I o ideal de $R[X]$ gerado por p; considere $B := R[X]/I$ e a aplicação canônica:

$$f : R[X] \to B.$$

Como p é mônico, para qualquer outro polinômio não nulo q de $R[X]$ o grau de pq deve ser maior ou igual à 1 e assim, $I \cap R = \{0\}$. Conclui-se então que $f \mid_R$ é injetiva. Com p sendo um polinômio de $B[X]$ e identificando $f(R) = R$ subanel de B, é direto que $b = f(X)$ é uma raiz de p. Assim, o resto numa divisão por $(X - b)$ é zero e, portanto, existe polinômio $q \in B[X]$ tal que

$$p(X) = (X - b)q(X).$$

Pela hipótese de indução, há algum anel R' que contém B onde q se decompõe em um produto de polinômios mônicos. Assim, p se decompõe em polinômios mônicos em $R'[X]$, como buscávamos. ■

Proposição 3.3.2. *Sejam R um anel, A uma $R-$álgebra e $p, q \in A[X]$ polinômios mônicos. Se os coeficientes de pq são integrais sobre R, então os coeficientes de p e q são integrais sobre R.*

Dem.: Observe inicialmente que, se aplicarmos o Lema 3.3.1 duas vezes, garantimos a existência de um anel A' e de elementos $a_1, \ldots, a_m$ e $b_1, \ldots, b_n$ de lá tais que em $A'[X]$ tenhamos

$$p(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - a_i) \text{ e } q(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - b_j)\,.$$

Assim, $pq \in A'[X]$ e, portanto, os coeficientes de pq estão em $\overline{R}_{A'}$. Porém, $\overline{R}_{A'}$ é subanel de A'; com isso, a_i, b_j devem estar no fecho de R (isto é, os coeficientes de p e q são integrais sobre R). ■

Interessantemente, conseguimos aplicar uma propriedade *integral* de produtos tensoriais no contexto de anéis de polinômios:

Lema 3.3.3. *Sejam R um anel e R', A duas $R-$álgebras. Se A é integral sobre R então $A \otimes_R R'$ é integral sobre R'.*

Dem.: Basta observar que, ao considerar um elemento $x' = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes r'_i$ de $A \otimes_R R'$, temos

$$x_i \underset{R}{\otimes} r'_i = \left(x_i \underset{R}{\otimes} 1\right) r'_i, \text{ com } x_i \in A, r'_i \in R'.$$

Como A é integral sobre R, $x_i \otimes 1$ é integral sobre R'. Portanto, x' também deve ser. ■

Proposição 3.3.4. *Sejam R um anel, A uma $R-$álgebra e $p \in A[X_1, \ldots, X_n]$. Então p é integral sobre $R[X_1, \ldots, X_n]$ se e somente se os coeficientes de p foram integrais sobre R.*

Dem.: Inicialmente, observe que podemos reduzir ao caso onde $n = 1$. De fato, basta observar os polinômios de $A[X_1, \ldots, X_n]$ como polinômios em X_n com coeficientes em $A[X_1, \ldots, X_{n-1}]$.

($\Leftarrow$) Suponha que os coeficientes de p estejam em $\overline{R}_A$. Pela Proposição 2.3.8 $\overline{R}_A[X] = \overline{R}_A \otimes_R R[X]$, pelo Lema 3.3.3 p deve ser integral sobre $R[X]$.

($\Rightarrow$) Suponha que p seja integral sobre $R[X]$ e considere

$$q(Y) = Y^m + \cdots + f_{m-1}Y^{m-1} + f_m \text{ tal que } f_i \in R[X] \text{ e } q(p) = 0.$$

Seja r um inteiro estritamente maior que os graus de p e f_i. Considere

$$p_1(X) = p(X) - X^r.$$

É direto que p_1 é raiz de

$$q_1(Y) = q(Y + X^r) = Y^m + g_1Y^{m-1} + \cdots + g_m \text{ com } g_i \in R[X];$$

assim podemos escrever

$$g_m = -p_1 \left(p_1^{m-1} + g_1 p_1^{m-2} + \cdots + g_{m-1} \right).$$

O importante da escolha anterior de r foi garantir que $-p_1$ é um polinômio mônico de $A[X]$ assim como $g_m(X) = q(X^r)$, com os graus dos polinômios $f_k(X)X^{r((m-k)}$ sendo menores que rm para $k \geq 1$. Conclui-se então que o polinômio

$$p_1^{m-1} + g_1 p_1^{m-2} + \cdots + g_{m-1}$$

é mônico em $A[X]$; como os coeficientes de g_m pertencem à R, pela Proposição 3.3.2, p_1 deve ter coeficientes integrais sobre R e, portanto, p deve ter coeficientes integrais sobre R. ■

Proposição 3.3.5. *Sejam R um anel, A uma $R-$álgebra e R' o fecho integral de R em A. Então o fecho integral de $R[X_1, \ldots, X_n]$ em $A[X_1, \ldots, X_n]$ é igual a $R'[X_1, \ldots, X_n]$.*

Dem.: Este segue diretamente da Proposição 3.3.4. ■

Por fim, vejamos que temos um resultado similar para o caso da localização:

Proposição 3.3.6. *Sejam R um anel, A uma $R-$álgebra, R' o fecho integral de R em A e S um subconjunto multiplicativo de R. Então o fecho integral de $S^{-1}R$ em $S^{-1}A$ é $S^{-1}R'$.*

Dem.: Seja b/s um elemento de $S^{-1}R'$. Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\tau_{S,R}} & S^{-1}R \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S^{-1}h} \\ A & \xrightarrow[\tau_{S,A}]{} & S^{-1}A \end{array}$$

Assim, $b/1$ é integral sobre $S^{-1}R$ assim como $b/s = (b/1)\,(1/s)$. Por outro lado, seja $r/t \in S^{-1}A$ integral sobre $S^{-1}R$; assim, $r/1 = (t/1)\,(r/t)$ é integral sobre $S^{-1}R$. Existe então uma relação da forma

$$(r/1)^n + (a_1/s)\,(r/1)^{n-1} + \cdots + (a_n/s) = 0 \text{ com } a_i \in R \text{ e } s \in S.$$

Reescrevendo-a como

$$\left(sr^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n\right)/s = 0$$

existe $s' \in S$ tal que

$$s'^n \left(sr^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n\right) = 0 \implies (s'sr)^n + \cdots + s'^n s^{n-1} a_n = 0.$$

Assim, $s'sr \in R'$ implicando em $r/1 \in S^{-1}R'$ e $r/t \in S^{-1}R'$. ∎

3.4 O radical de um ideal

Nesta seção discutiremos sobre tipos especiais de ideais, que aparecem em todo canto.

Definição 3.4.1. *Seja R um anel e I um ideal de R. Definimos*

$$\sqrt{I} := \{a \in R; a^n \in I, n \in \mathbb{N}\}.$$

o radical de I.

Um ideal é dito *ideal radical* se $\sqrt{I} = I$. A mais honesta das dúvidas que possam surgir de inicio é: o radical é um ideal? A resposta é positiva e o porquê é dito abaixo (munido ainda de mais resultados):

Proposição 3.4.2. *Seja R um anel e I, J ideais de R. Então:*

1. $\sqrt{I}$ *é um ideal de* R*.*

2. $\sqrt{I}$ *é um ideal radical.*

3. Se $I \subseteq J$ *então* $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$*.*

Dem.: Sejam I, J ideais de um anel R.

1. Tome $x, y \in \sqrt{I}$ com $x^n \in I$ e $y^m \in I$, onde $n, m \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema Binomial,

$$(x+y)^{n+m} = x^{n+m} + \binom{n+m}{1} x^{n+m-1} y + \cdots + \binom{n+m}{n+m-1} x y^{n+m-1} + y^{n+m}.$$

Como I é ideal, $x^n \in I \implies x^n \cdot y^m \in I$ (pois $y^m \in R$). Assim, como todos os termos da expansão acima entram nesse "padrão" enquanto a potência de x for maior ou igual a n; caso contrário, a hipótese de $y \in m \in I$ resolve o problema. De qualquer modo,

$$(x+y)^{n+m} \in I \implies (x+y) \in I.$$

Tome $r \in R$ e $x \in \sqrt{I}$ com $x^n \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Inicialmente, veja que se $r \in R$ então $r^n \in R$. Como I é ideal,

$$\begin{aligned} x^n \in I &\implies r^n x^n \in I \\ &\implies (rx)^n \in I \\ &\implies rx \in \sqrt{I}. \end{aligned}$$

Assim, $\sqrt{I}$ é ideal de R.

2. Veja que conseguimos uma sequência de equivalências:

$$\begin{aligned} x \in \sqrt{I} &\iff \exists n, m \in \mathbb{N} \text{ tais que } (x^n)^m = x^{nm} \in I \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \in \sqrt{I} \\ &\iff x \in \sqrt{\sqrt{I}}. \end{aligned}$$

3. É direto que

$$\begin{aligned} x \in \sqrt{I} &\implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \in I \\ &\implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \in J \\ &\implies x \in \sqrt{J}. \end{aligned}$$

■

Para o caso do ideal nulo $\{0\}$, há uma caracterização própria:

Definição 3.4.3. *Seja R um anel. Dizemos que $a \in R$ é nilpotente se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Denotamos*

$$\sqrt{\{0\}} = \{a \in R; a \text{ é nilpotente}\}$$

o nilradical de R.

Se $\sqrt{\{0\}} = \{0\}$, então R é dito reduzido (i.e. R é reduzido se o ideal nulo for radical). O interessante é podermos escrever o nilradical como a interseção de todos os ideais primos de R:

Proposição 3.4.4. *Para todo anel R,*

$$\sqrt{\{0\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}.$$

Dem.: Tome $a \in \sqrt{\{0\}}$, com $a^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, a^n é membro de um ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq R$ e assim, $a \in \mathfrak{p}$. Reciprocamente, considere $a \in R \setminus \sqrt{\{0\}}$ e o conjunto

$$N := \{a^n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq R.$$

Veja que a não pode ser nilpotente. Daí, $0 \notin N$ e pela Proposição 1.1.15 $N^{-1}R \neq 0$. Há, portanto, ideal maximal $\mathfrak{q}$ (que é em particular primo). Considere o morfismo de localização $\pi : R \to N^{-1}R$. Assim, $\mathfrak{p} := \pi^{-1}(\mathfrak{q})$ é ideal primo em R que não contém a. De fato, se $a \in \mathfrak{p}$, então $\mathfrak{q}$ conteria $\pi(a)$ como unidade, e assim o ideal primo $\mathfrak{q}$ coincidiria com $N^{-1}R$, o que não pode acontecer. ■

Definição 3.4.5. *Seja R um anel. O radical de Jacobson de R é definido como:*

$$j(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R} \mathfrak{m}.$$

É conveniente dizer que, se R é o anel nulo, $j(R) = R$. Pela definição é direto observarmos que R é local se, e somente se, $j(R)$ é maximal. Quanto aos elementos de $j(R)$, podemos caracterizá-los de outra maneira:

Proposição 3.4.6. *Seja R um anel. Para $a \in R$, a está no radical de Jacobson de R se, e somente se, $1 - ab$ é invertível em R, para todo $b \in R$.*

Dem.: Para a ida, suponha $a \in j(R)$. Então a está em todos os ideais maximais de R. Agora, se $1 - ab$ também estiver, então $(1 - ab) + (ab) = 1$ deve estar. Assim, $1 \in \mathfrak{m}$, o que é absurdo. Logo, $1 - ab$ deve ser invertível. Para a volta, tome $a \in R - j(R)$. Então existe $\mathfrak{m}$ maximal tal que $a \notin \mathfrak{m}$. Assim existe uma equação do tipo $1 = m + ab$, onde $m \in \mathfrak{m}$ e $b \in R$. Logo, $1 - ab \in \mathfrak{m}$ não podendo então ser invertível. ■

Agora, vejamos um ideal que, apesar de uma primeira impressão, muito tem a ver com o radical que acabamos de definir.

Definição 3.4.7. *Sejam R um anel e $I \subseteq R$ um ideal. Então*

$$j(I) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R, I \subseteq \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$$

é chamado radical de Jacobson de I.

Como ainda não foi feito, definiremos um tipo especial de álgebra onde o nilradical e o radical de Jacobson coincidem, como veremos no Corolário 3.4.13:

Definição 3.4.8. *Uma $A-$álgebra B é do tipo finito se $B \simeq A[x_1, \ldots, x_n]/I$, onde $n \in \mathbb{N}$ e I é um ideal de $A[x_1, \ldots, x_n]$.*

Para provarmos o *Lema* da normalização de Noether, que aqui trataremos como Teorema, o próximo resultado implica na existência de um método simples e consistente:

Lema 3.4.9. *Seja $k[x_1, \dots, x_n]$ uma $k-$álgebra de tipo finito e considere um elemento $y \in k[x_1, \dots, x_n]$ dado por uma expressão*

$$y = \sum_{v_1 \dots v_n \in I} a_{v_1 \dots v_n} x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n}$$

com coeficientes $a_{v_1 \dots v_n} \in k^*$ onde a soma se estende sobre um conjunto de índices não vazio $I \subset \mathbb{N}^n$. Então existem elementos $y_1, \dots, y_{n-1} \in k[x_1, \dots, x_n]$ tais que o monomorfismo canônico

$$k[y_1, \dots, y_{n-1}, y] \hookrightarrow k[x_1, \dots, x_n]$$

é finito.

Apesar de importante, não faz muito sentido trazer uma demonstração para este texto; o leito curioso por encontrá-la em alguns textos, com indicação pessoal sendo (BOSCH, 2022, 3.2.2). Com isso, observe que o método da *tentativa e erro* é funcional!

Teorema 3.4.10 (Lema da Normalização de Noether)**.** *Seja A uma $k-$álgebra de tipo finito. Se $A \neq 0$, então existe um $k-$morfismo finito*

$$k[Y_1, \dots, Y_d] \hookrightarrow A$$

para um certo conjunto de indeterminadas $Y_1, \dots, Y_d$.

Dem.: Como $A \neq 0$, podemos ver k como subanel de A. Como A é do tipo finito, existem $x_1, \dots, x_n \in A$ tais que $A = k[x_1, \dots, x_n]$, . Se $x_1, \dots, x_n$ forem algebricamente independentes sobre k, então acabou. Suponha então que são algebricamente dependentes sobre k. Daí, com $y = 0$, existe uma relação da forma descrita no Lema 3.4.9 e elementos $y_1, \dots, y_n \in A$ tais que a aplicação canônica

$$k[y_1, \dots, y_{n-1}] = k[y_1, \dots, y_{n-1}, y] \hookrightarrow k[x_1, \dots, x_n] = A$$

é finita. Se estes $y_1, \dots, y_{n-1}$ são algebricamente independentes sobre k, acabou. Se não, façamos o mesmo processo para o anel $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$. De maneira recursiva, depois de um número finito de passos obtemos um sistema da forma $y_1, \dots, y_d$ em A, algebricamente independente sobre k, com A finito sobre $k[y_1, \dots, y_d]$. ■

É possível mostrar que este inteiro d obtido no Teorema anterior é unicamente determinado pela $k-$álgebra A; na verdade, d coincide com a *dimensão de Krull* de A. Se quisermos mais resultados, também é possível mostrar que o corpo de frações de A é finito sobre o corpo de funções transcendentes $k\,(Y_1, \ldots, Y_d)$; neste caso, d é igual ao grau de transcendência do corpo de frações sobre k.

Corolário 3.4.11. *Seja L uma $k-$álgebra de tipo finito. Então a extensão $k \subset L$ é finita.*

Dem.: Pelo Lema de Normalização de Noether, podemos encontrar uma quantidade finita de elementos $y_1, \ldots, y_d \in L$ algebricamente independentes sobre k, de modo que a extensão de anéis $k[y_1, \ldots, y_d] \hookrightarrow L$ seja finita. Como L é corpo, pela Proposição 3.2.1, o mesmo deve ser verdade para $k[y_1, \ldots, y_d]$. Mas, um anel de polinômios só pode ser corpo se $d = 0$. Daí,

$$k[y_1, \ldots, y_d] = k \implies k \hookrightarrow L \text{ é finita.}$$

■

Corolário 3.4.12. *Sejam A uma $k-$álgebra de tipo finito e $\mathfrak{m} \subset A$ um ideal maximal. Então a aplicação canônica $k \to A/\mathfrak{m}$ é finita e, portanto, $L = A/\mathfrak{m}$ é uma extensão de corpos finita sobre k.*

Dem.: Assim como A, $A/\mathfrak{m}$ é $k-$álgebra de tipo finito. Para concluirmos que é finita sobre k, basta lembrarmos que $A/\mathfrak{m}$ é corpo. Pelo corolário anterior, acabou. ■

Interessantemente, para o caso de álgebras de tipo finito sobre corpos, como dito anteriormente o nilradical e o radical de Jacobson são iguais:

Corolário 3.4.13. *Seja A uma $k-$álgebra de tipo finito. Então o seu nilradical coincide com seu radical de Jacobson, isto é,*

$$\sqrt{\{0\}} = j(A).$$

Dem.: Ora, a primeira inclusão sai diretamente das definições, afinal de contas,

$$\sqrt{\{0\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A} \mathfrak{m} = j(A).$$

Para a outra inclusão, tome $f \in A - \sqrt{\{0\}}$. Vamos mostrar que f não está no radical de Jacobson de A: como f não é nilpotente, este gera um conjunto multiplicativo que não contém 0 e, portanto, pelo item (3) da Proposição 1.1.15 temos $S^{-1}A = A[f^{-1}] \neq 0$. Com isso, existe um ideal maximal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}A$. Considere o morfismo de localização $\varphi : A \to S^{-1}A$ e seja $\mathfrak{n} \subset A$ a imagem inversa do maximal por esta aplicação. Esta induz um monomorfismo de $k-$álgebras:

$$\phi : A/\mathfrak{n} \hookrightarrow S^{-1}A/\mathfrak{m}.$$

Como A é de tipo finito sobre k existem $x_1, \ldots, x_n \in A$ tais que $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ e assim $A_S = k[x_1, \ldots, x_n, f^-1]$, portanto, $S^{-1}A$ é $k-$álgebra do tipo finito. Pelo Corolário 3.4.12, o corpo $A_S/\mathfrak{m}$ tem o grau de sua extensão sobre k finito e, em particular, tem grau de extensão finito sobre $A/\mathfrak{n}$. Mas $A/\mathfrak{n}$ deve ser corpo, o que implica em $\mathfrak{n}$ ser ideal maximal em A. O problema é que $\varphi(f)$ é unidade em $A[f^{-1}]$, então não pode estar no maximal $\mathfrak{m}$. Em particular, $f \notin \mathfrak{n}$, e assim não pode estar no ideal de Jacobson. ∎

Por fim, vale citar que um ideal é dito **nil** ou **nilideal** se todos os seus elementos são nilpotentes. O conjunto de todos os elementos nilpotentes forma, portanto, o nilradical do anel. Conclui-se que um ideal é *nil* se e somente se for subconjunto do nilradical (logo, o nilradical é *"maximal"* dentre os nilideais). É direto também observarmos que, pela Proposição 3.4.4, um nilideal está contido em todos os ideais primos.

4 *O prato principal:* Saturações Lipschitz

4.1 Idealmente integral

Após discutirmos com veemência resultados importantes no contexto de fechos integrais de anéis, temos certa bagagem para estudar o que para nós será ainda mais importante: o conceito do fecho integral de um ideal. Uma contextualização e inspiração para o estudo de fechos integrais (não só de ideais) é encontrada no agora já clássico (SWANSON; HUNEKE, 2006).

Definição 4.1.1. *Seja I um ideal de um anel R. Um elemento $x \in R$ é dito integral sobre I se existir um inteiro n e $a_i \in I^i$ tais que*

$$x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Como feito para anéis, essa equação é chamada *equação de dependência integral de x sobre I*. É direto definirmos que todos os elementos que são integrais sobre I formam o fecho integral de I, também denotado $\overline{I}$. Se $\overline{I} = I$, então I é dito integralmente fechado; se dois ideais $I \subseteq J$ são tais que $J \subseteq \overline{I}$, então J é dito integral sobre I.

Podemos observar que as seguintes propriedades "aparecem":

Proposição 4.1.2. *Sejam R um anel e I, J ideais de R. São verdadeiras as seguintes propriedades:*

1. $I \subseteq \overline{I}$.
2. $I \subseteq J \implies \overline{I} \subseteq \overline{J}$.
3. $\overline{I} \subseteq \sqrt{I}$.
4. *Ideais radicais são integralmente fechados.*
5. $\sqrt{0} \subseteq \overline{I}$.

Dem.: As demonstrações são simples, mas não nos custa muito apresentá-las:

1. Se $x \in I$, então $p(X) = X - x$ é tal que $p(x) = 0$ é uma equação integral para x em I.

2. Se $x \in \overline{I}$, então existe $p(X) = X^n + \cdots + a_{n-1}X + a_n$, com $a_i \in I^i \subseteq J^i$ e $p(x) = 0$, portanto, $x \in \overline{J}$.

3. Se $x \in \overline{I}$, então existe $p(X) = X^n + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ com $a_i \in I^i$ e $p(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 &\implies x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}x^i \\ &\implies x^n \in (a_n, \ldots, a_1) \subseteq I, \end{aligned}$$

   pois, $a_i \in I^i$. Logo, $x \in \sqrt{I}$.

4. Pelo item (3), $\overline{I} \subseteq \sqrt{I} = I$ e pelo item (1), $I \subseteq \overline{I}$; logo, $I = \overline{I}$.

5. Se $x \in \sqrt{0}$, então $x^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$; logo, $x \in \overline{I}$.

■

Exemplo 4.1.3. Um exemplo clássico é vermos que para quaisquer $x, y \in R$, xy está no fecho integral de (x^2, y^2); de fato, considere a equação integral

$$(xy)^2 - \left(x^2y^2\right) = 0.$$

De maneira geral, para inteiros não-negativos $i \leq d$ conclui-se que x^iy^{d-i} é integral sobre $\left(x^d, y^d\right)$.

Uma outra propriedade que sai diretamente da observação dos coeficientes da equação de dependência é do bom comportamento da interseção de ideais integralmente fechados:

Proposição 4.1.4. *Sejam I, J ideais de um anel R. Se I e J são integralmente fechados, então $I \cap J$ é integralmente fechado.*

Dem.: Pelo item (1) da Proposição 4.1.2 e pela interseção de ideais ser um ideal, $I \cap J \subseteq \overline{I \cap J}$. Para a inclusão contrária, tome $x \in \overline{I \cap J}$; logo, há $p(X) = X^n + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ com $a_i \in (I \cap J)^i$ e $p(x) = 0$. Então $a_i \in I^i$ e $a_i \in J^i$ implicando em:

$$\begin{aligned} x \in \overline{I} \text{ e } x \in \overline{J} &\implies x \in I \text{ e } x \in J \\ &\implies x \in I \cap J. \end{aligned}$$

■

Um resultado surpreendentemente importante diz respeito à persistência do fecho integral de um ideal; aqui, chamamos de teorema pelo grande uso feito dele. Porém, há um comentário importante acerca da confusa notação:

Definição 4.1.5. *Se $\varphi : R \to S$ é um morfismo de anéis e I um ideal de R, é comum denotarmos $IS := \varphi(I)S$, quando não há confusão quanto à φ.*

Retirando esse possível empecilho do caminho e sendo persistente:

Teorema 4.1.6 (Persistência)**.** *Se $\varphi : R \to S$ é um morfismo de anéis então*

$$\varphi\left(\overline{I}\right) \subseteq \overline{\varphi\left(I\right)S} = \overline{IS}.$$

Dem.: Se $x \in \overline{I}$, então há $p(X) = X^n + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ com $a_i \in I^i$ e $p(x) = 0$. Ora,

$$\begin{aligned} x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 &\implies \varphi\left(x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n\right) = 0 \\ &\implies (\varphi(x))^n + \cdots + \varphi(a_{n-1})\varphi(x) + \varphi(a_n) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(x)$ é integral sobre $\varphi(I)S$ (bastando observar como os elementos $\varphi(a_i)$ se comportam). ■

Como para outros tantos resultados, podemos encontrar um resultado associado à *contração* do fecho integral:

Teorema 4.1.7 (Contração)**.** *Se $\varphi : R \to S$ é um morfismo de anéis e I é um ideal integralmente fechado de S então $\varphi^{-1}\left(I\right)$ é integralmente fechado sobre R.*

Dem.: Tome $x \in \overline{\varphi^{-1}(I)}$; existe então $p(X) = X^n + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ tal que $a_i \in (\varphi^{-1}(I))^i$ e $p(x) = 0$. Assim,

$$x^n + \cdots + a_{n-1}x^n + a_n = 0 \implies (\varphi(x))^n + \cdots + \varphi(a_{n-1})\varphi(x) + \varphi(a_n) = 0.$$

Além disso, $a_i \in (\varphi^{-1}(I))^i$ e então $\varphi(a_i) \in \varphi\left((\varphi^{-1}(I))^i\right) \subseteq I^i$. Logo, $\varphi(x) \in \overline{I} = I$ garantindo que $x \in \varphi^{-1}(I)$. ■

É direto também que tenhamos:

Corolário 4.1.8. *Se R é subanel de S e I é integralmente fechado em S, então $I \cap R$ é integralmente fechado em R.*

Dem.: Basta considerar a inclusão $R \hookrightarrow S$. Daí, sua imagem inversa em I deve ser $I \cap R$. Pelo Teorema 4.1.7, este deve ser integralmente fechado sobre R. ■

É direto da persistência e da definição que observemos quão bem o fecho integral se comporta perante a localização.

Proposição 4.1.9. *Sejam R um anel, I um ideal de R e S um conjunto multiplicativo fechado de R. Então:*

$$S^{-1}\overline{I} = \overline{S^{-1}I}.$$

Em particular, são equivalentes:

1. $I = \overline{I}$.
2. $S^{-1}I = \overline{S^{-1}I}$*, para todo conjunto multiplicativo fechado S de R.*
3. $I_{\mathfrak{p}} = \overline{I_{\mathfrak{p}}}$*, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R.*
4. $I_{\mathfrak{m}} = \overline{I_{\mathfrak{m}}}$*, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.*

Definimos o que é um anel reduzido após a Definição 3.4.3. É natural perguntarmos se há alguma maneira de "reduzir" um anel:

Definição 4.1.10. *Seja R um anel. A redução de R, denotado por R_{red}, é o anel R quocientado por seu nilradical.*

Temos, assim:

Proposição 4.1.11. *Sejam R um anel e I um ideal em R.*

1. *A imagem do fecho integral de I em R_{red} é o fecho integral do ideal gerado pela imagem de I em R_{red}, isto é, $\overline{I}R_{\text{red}} = \overline{IR_{\text{red}}}$.*

2. *Um elemento $x \in R$ está no fecho integral de I se, e somente se, para todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ em R, a imagem de x em $R/\mathfrak{p}$ está no fecho integral de $(I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$.*

Dem.: Sejam R um anel e I um ideal em R.

1. Começamos com a primeira inclusão ($\subseteq$): Considere o morfismo quociente
$$\varphi_{\text{red}} : R \to R_{\text{red}} = R/\sqrt{\{0\}}. \tag{4.1}$$
Pelo Teorema 4.1.6,
$$\varphi_{\text{red}}\left(\overline{I}\right) \subseteq \overline{\varphi_{\text{red}}\left(I\right) R_{\text{red}}} \implies \overline{I}R_{\text{red}} \subseteq \overline{IR_{\text{red}}}.$$
Para a outra inclusão, tome $x \in R$ tal que $x + \sqrt{0} \in \overline{IR_{\text{red}}}$. É fato que exista
$$p(x) = x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \sqrt{0}, \text{ com } a_i \in I^i$$
e concluímos que $(p(x))^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo $x \in \overline{I}$, implicando em $x + \sqrt{0} \in \overline{I}R_{\text{red}}$.

2. Considere o morfismo quociente
$$\varphi_{\mathfrak{p}} : R \to R/\mathfrak{p}.$$
Daí, novamente pelo Teorema 4.1.6
$$\varphi_{\mathfrak{p}}\left(\overline{I}\right) \subseteq \overline{\varphi_{\mathfrak{p}}\left(I\right) R/\mathfrak{p}} = \overline{\left(I + \mathfrak{p}\right) R/\mathfrak{p}} = \overline{\left(I + \mathfrak{p}\right)/\mathfrak{p}}.$$
Logo, a imagem de $\overline{I}$ em $R/\mathfrak{p}$ está contida no fecho integral de $(I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$. Para a volta, suponha que $x + \mathfrak{p} \in \overline{(I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}}$. Considere o seguinte conjunto:
$$W := \left\{x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n, n \in \mathbb{N}, a_i \in I^i\right\}.$$

Como x e a_i são elementos de R, $W \subseteq R$; além disso, qualquer produto de elementos de W está em W. Portanto, é fechado para multiplicação. Se $0 \in W$, então x é integral em I, pois haverá uma equação de dependência integral para tal. Se não, há $\mathfrak{q}$ primo tal que $W \cap \mathfrak{q} = \emptyset$; porém, $\mathfrak{q}$ deve ter algum primo minimal. Chame-o $\mathfrak{r}$. Daí,

$$W \cap \mathfrak{r} \subseteq W \cap \mathfrak{q} = \emptyset.$$

Mas essa interseção não pode ser vazia para nenhum ideal primo minimal, por hipótese. Logo, $0 \in W$ e aqui acaba a prova.

■

É interessante vermos que podemos determinar se um elemento é ou não integral sobre um ideal baseado numa igualdade:

Proposição 4.1.12. *Sejam R um anel, $x \in R$ e I um ideal de R. Então $x \in \overline{I}$ se, e somente se, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $(I + (x))^n = I\,(I + (x))^{n-1}$.*

Dem.:

- ($\Rightarrow$) Tome $x \in \overline{I}$; existem $a_i \in I^i$ tais que

$$\begin{aligned} x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 &\implies x^n = -a_1x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n \\ &\implies x^n \in I\,(I + (x))^{n-1} \end{aligned}$$

  Logo, a igualdade está mostrada.

- ($\Leftarrow$) Suponha $(I + (x))^n = I\,(I + (x))^{n-1}$; existem $a_i \in I^i$ tais que

$$x^n = a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \implies x \in \overline{I}.$$

■

O leque é tão grande que conseguimos também resultados relacionados com módulos:

Proposição 4.1.13. *Sejam $x \in R$ e I um ideal de R. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *$x \in \overline{I}$.*

2. *Existe um $R-$módulo M finitamente gerado tal que $xM \subseteq IM$ e tal que, para $a \in R$, $aM = 0$ implica $x \in \sqrt{0 : a}$.*

Dem.: Começamos mostrando que (1) $\implies$ (2): suponha $x \in \overline{I}$; então existem $a_i \in I^i$ tais que $x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Veja que existe um ideal finitamente gerado $J \subseteq I$ tal que $a_i \in J^i$. Logo, $x \in \overline{J}$. Pela Proposição 4.1.12, existe n inteiro positivo tal que

$$(J + (x))^n = J\,(J + (x))^{n-1}\,.$$

Chame $M := (J + (x))^{n-1}$, o que garante que M seja finitamente gerado. Assim,

$$xM = x\,(J + (x))^{n-1} \subseteq (J + (x))^n = J\,(J + (x))^{n-1} = JM \subseteq IM.$$

Por fim, se $a \in R$ e $aM = 0$, então $ax^{n-1} = 0$, garantindo que $x \in \sqrt{0 : a}$.

Agora mostraremos que (2) $\implies$ (1): chame $M := Rb_1 + \cdots + Rb_n$ de modo que M seja um $R-$módulo com $xM \subseteq IM$. Escreva

$$xb_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j, \text{ onde } a_{ij} \in I^i.$$

Seja $A_{ij} = (\delta_{ij}x - a_{ij})$ uma matriz onde δ_{ij} é o *famigerado* Delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$, caso contrário. Chame $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$. Assim,

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & x - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (x - a_{11})\,b_1 - a_{12}b_2 - \cdots - a_{1n}b_n \\ \vdots \\ \\ -a_{11}b_1 - a_{12}b_2 - \cdots + (x - a_{nn})\,b_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} xb_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_j \\ \vdots \\ \\ xb_n - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det(A)\, I_n = \operatorname{adj}(A)\, A &\implies \det(A)\, b = \operatorname{adj}(A)\, Ab = 0 \\ &\implies \det(A)\, b_i = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det(A)\, M &= \det(A)\,(Rb_1 + \cdots + Rb_n) \\ &= R\det(A)\, b_1 + \cdots + R\det(A)\, b_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tome $a = \det(A)$. Então $x \in \sqrt{0 : a}$ garantindo que $ax^k = 0$ para algum k inteiro não-negativo. Há, portanto, uma equação de dependência integral de x sobre I. ■

Definição 4.1.14. *Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel R. J é uma redução de I, se existir n inteiro não-negativo tal que $I^{n+1} = JI^n$.*

Podemos então concluir:

Corolário 4.1.15. *$x \in R$ é integral sobre J se, e somente se, J é redução de $J + (x)$.*

Dem.: Supondo $x \in \overline{J}$, pela Proposição 4.1.12 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(J + (x))^n = J\,(J + (x))^{n-1},$$

isto é, J é redução de $J + (x)$. Por outro lado, se J for redução de $J + (x)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(J + (x))^{m+1} = J\,(J + (x))^m.$$

Com $m = n - 1$, temos $(J + (x))^n = J\,(J + (x))^{n-1}$ e novamente pela Proposição 4.1.12, concluímos que $x \in \overline{J}$. ■

Suponha que $J \subseteq I$ seja uma redução de I. Assim existe n inteiro não-negativo tal que $JI^n = I^{n+1}$. Agora, veja que

$$I^{m+n} = JI^{m+n-1} = \cdots = J^{m-2}I^{n+2} = J^{m-1}I^{n+1} = J^mI^n.$$

Assim, sempre haverá algum inteiro n tal que $I^{m+n} \subseteq J^m$, para todo inteiro $m > 1$.

Vamos verificar alguns resultados relativamente esperados sobre reduções:

Lema 4.1.16. *Sejam $K \subseteq J \subseteq I$ ideais de R. Então, é verdade que:*

1. *Se K é redução de J e J é redução de I, então K é redução de I.*
2. *Se K é redução de I, então J é redução de I.*
3. *Se I é finitamente gerado, $J = K + (r_1, \ldots, r_k)$, $r_i \in I$ e K é redução de I, então K é redução de J.*

Dem.: Façamos os itens um a um:

1. Se K é uma redução de J, então existe n tal que $J^{n+1} = KJ^n$ e J redução de I implica na existência de m tal que $I^{m+1} = JI^m$; daí,

$$\begin{aligned} I^{m+n+1} &= J^{n+1} I^m \\ &= KJ^n I^m \\ &\subseteq KI^{n+m} \\ &\subseteq I^{m+n+1}. \end{aligned}$$

   Assim, $KI^{m+n} = I^{m+n+1}$ e, portanto, K é redução de I.

2. Suponha K redução de I. Assim,

$$\begin{aligned} I^{n+1} &= KI^n \\ &\subseteq JI^n \\ &\subseteq I^{n+1}. \end{aligned}$$

   Logo, $JI^n = I^{n+1}$; portanto, J é redução de I.

3. Assuma que I seja finitamente gerado e $J = K + (r_1, \ldots, r_k)$ com $r_i \in I$; seja K redução de I, isto é, $I^{n+1} = KI^n$. Como $K \subseteq K + (r_1, \ldots, r_k)$, para todo i tem-se que $K + (r_1, \ldots, r_{i-1})$ é redução de I. É fato que

$$r_i I^n \subseteq KI^n \subseteq (K + (r_1, \ldots, r_{i-1}))\, I^n.$$

Se $aI^n = 0$, então para algum $a \in R$, $a\,(r_i)^n = 0$. Como I^n é finitamente gerado, pela Proposição 4.1.13, r_i é integral sobre $K+(r_1, \ldots, r_{i-1})$ e, portanto, este é redução de $K + (r_1, \ldots, r_i)$. Logo, pelo item (1) e por indução em k, $K \subseteq K + (r_1, \ldots, r_k) = J$ é uma redução.

■

Continuando com as propriedades das reduções:

Proposição 4.1.17. *Sejam $K \subseteq I$ ideais. Assuma I finitamente gerado. Então K é redução de I se, e somente se, $I \subseteq \overline{K}$.*

Dem.: $(\Rightarrow)$. Se K redução de I, então para todo $r \in I$, K é redução de $K + (r)$. Assim,

$$(K + (r))^{n+1} = K\,(K + (r))^n \implies r \in \overline{K}.$$

Logo, $I \subseteq \overline{K}$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $I = (r_1, \ldots, r_n) \subseteq \overline{K}$. Assim, $r_j \in \overline{K}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Com isso, $r_j \in \overline{K + (r_1, \ldots, r_{j-1})}$ garantindo que

$$K \subseteq K + (r_1) \subseteq K + (r_1, r_2) \subseteq \cdots \subseteq K + (r_1, \ldots, r_n) = I.$$

Como cada inclusão destas é uma redução, $K \subseteq I$ é redução. ■

Por fim, o resultado mais importante é:

Teorema 4.1.18. *O fecho integral de um ideal é um ideal integralmente fechado.*

Dem.: Seja K um ideal de R. Já observamos antes que $\overline{K}$ é fechado sobre o produto de elementos de R; vamos mostrar que é fechado para a soma. Considere $r, s \in \overline{K}$; ora, para alguns $k_i \in K^i$,

$$r^n + \cdots + k_{n-1}r + k_n = 0.$$

Existe ideal finitamente gerado $K' \subseteq K$ tal que $k_i \in (K')^i$. Logo, $r \in \overline{K'}$; de maneira análoga, $s \in \overline{K'}$ (caso seja necessário, podemos "aumentar" K'). Considere

$J = K' + (r)$, $I = K' + (r,s) = J + (s)$. Veja que K' é redução de J e J de I. De fato,

$$\begin{aligned} r \in \overline{K'} &\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que} \left(K' + (r)\right)^n = K' \left(K' + (r)\right)^{n-1} \\ &\Longrightarrow K' \text{ é redução de } J. \end{aligned}$$

De maneira análoga, $s \in \overline{K'} \subseteq \overline{K' + (r)} = \overline{J}$ e então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(J + (s))^m = J\,(J + (s))^{m-1}$ e assim, $I^m = JI^{m-1}$. Logo, K' é redução de I. Como todos são finitamente gerados,

$$K' \subseteq K' + (r + s) \subseteq I$$

são reduções. Logo, $r + s$ é integral sobre K' e, portanto, sobre K. Concluímos que $\overline{K}$ é ideal. Basta mostrarmos que o fecho integral é integralmente fechado: sejam I ideal de R e $r \in \overline{\overline{I}}$. Existe um *subideal* finitamente gerado $J = (j_1, \ldots, j_n)$ de $\overline{I}$ tal que $r \in \overline{I}$. De maneira análoga, existe ideal finitamente gerado $K \subseteq I$ tal que cada j_i seja integral sobre K. Logo, K é redução de $K + J$ e este é redução de $K + J + (r)$. Como K é redução de $K + (r)$, r é integral sobre K. Portanto, r é integral sobre I. ∎

4.2 Limites e sua definição *precisa*

Um conjunto Δ parcialmente ordenado é dito *direcionado*, se para cada par $i, j \in \Delta$ existir $k \in \Delta$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Sejam R um anel, Δ um conjunto direcionado e $(M_i)_{i \in \Delta}$ uma família de $R-$módulos indexados por Δ. Para cada par $i, j \in \Delta$ com $i \leq j$, defina um $R-$morfismo $\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ supondo que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

1. μ_{ii} é a identidade, para todo i.

2. $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$, com $i \leq j \leq k$.

Definição 4.2.1. *Nas condições acima, os módulos M_i munidos dos morfismos μ_{ij} formam um sistema direto $\mathbf{M}$ sobre o conjunto direcionado Δ. Denotamos esse sistema $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$.*

Seja C a soma direta dos M_i; identifique por conveniência cada módulo M_i com sua imagem canônica em C. Seja D o submódulo de C que é gerado por elementos da forma $x_i - \mu_{ij}(x_i)$, com $x_i \in M_i$ e $i \leq j$. Chame $M := C/D$ e considere $\mu : C \longrightarrow M$ a projeção com $\mu_i = \mu \mid_{M_i}$.

Veja que $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$, onde $i \leq j$: de fato, se $x_i \in M_i$ então $x_i - \mu_{ij} \in D = \ker(\mu)$. Isso nos dá, pelas restrições:

$$\begin{aligned} \mu_i(x_i) = \mu(x_i) &= \mu(x_i + \ker(\mu)) \\ &= \mu(\mu_{ij}(x_i) + \ker(\mu)) \\ &= \mu(\mu_{ij}(x_i)) \\ &= \mu_j(\mu_{ij}(x_i)). \end{aligned}$$

Definição 4.2.2. *O limite direto do sistema direto* $\mathbf{M}$ *é, nas condições acima, o módulo M (ou, se preferir, M munido da família de morfismos μ_i). Denotamos* $\varinjlim M_i = M$.

Teorema 4.2.3. *Todo elemento de M pode ser escrito na forma $\mu_i(x_i)$, para $i \in \Delta, x_i \in M_i$. Além disso, se $\mu_i(x_i) = 0$, então existe $j \geq i$ tal que $\mu_{ij}(x_i) = 0$ em M_j.*

Dem.: Tome $x \in M$; como C é a soma direta dos M_i do sistema direto, podemos escrever $M = C/D = \bigoplus M_i/D$. Assim, x é a imagem de algum $\sum\limits_{i \in \Gamma} x_i$ com $x_i \in M_i$ e $\Gamma \subseteq \Delta$ pela aplicação $C \to C/D$. Agora, se $\Gamma \subseteq \Delta$ é finito, então existe $i \in \Delta$ tal que $i \geq j$ para qualquer $j \in \Gamma$: de fato, se $j = i$ e $\Gamma = \{j\}$ a afirmação é verdadeira. Supondo indutivamente válido para Γ finito, considere um novo elemento j_{n+1} *aglutinado* a Γ; como o conjunto é direto, há $k \geq j_{n+1}, j$, isto é, $k \geq j_a$ para todo $j_a \in \Gamma \cup \{j_{n+1}\}$.

Feitas as introduções, seja $k \in \Delta$ tal que $k \geq j$ para todo $j \in \Gamma$. Por definição, $\mu_{jk}(x_j) - x_j \in D$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\Gamma}\mu_{jk}(x_j) - \sum_{j\in\Gamma} x_j \equiv 0 \mod D &\implies \sum_{j\in\Gamma}\mu_{jk}(x_j) \equiv \sum_{j\in\Gamma} x_j \mod D \\
&\implies \mu_k\left(\sum_{j\in\Gamma}\mu_{jk}(x_j)\right) = \mu\left(\sum_{j\in\Gamma}\mu_{jk}(x_j)\right) \\
&\implies \mu_k\left(\sum_{j\in\Gamma}\mu_{jk}(x_j)\right) = \mu\left(\sum_{j\in\Gamma} x_j\right) = x.
\end{aligned}$$

Logo, se $x_k := \sum_{j\in\Gamma}\mu_{jk}(x_j)$, então $\mu_k(x_k) = x$ como queríamos.

Para a segunda parte, seja $r \in R$. Observe que se $(\mathrm{id} - \mu_{ij})(x_i) \in D$, então

$$r(\mathrm{id} - \mu_{ij})(x_i) = (\mathrm{id} - \mu_{ij})(rx_i),$$

pela linearidade dos morfismos. Um resultado análogo é válido para somas e diferenças. Suponha $x_i \in M_i$ tal que $\mu_i(x_i) = \mu(x_i) = 0$; desta maneira, $x_i \in D$ e assim, $x_i \in M_i \cap D$. Podemos escrever, portanto,

$$x_i = \sum_{(j,k)\in\Theta} y_j - \mu_{jk}(y_k) = \sum_{j\in\Gamma} z_j, \text{ onde } \Gamma \subset \Delta \text{ é finito, } \Theta \subseteq \Gamma^2, j \leq k;\ y_j, z_j \in M_j.$$

Mas por C ser soma direta, $i = j \implies z_i = x_i$ e $i \neq j \implies z_j = 0$. Considere $l \in \Delta$ tal que $l \geq k, k \in \Gamma$. Daí, como $\mu_{jl} = \mu_{kl} \circ \mu_{jk}$,

$$\begin{aligned}
\mu_{il}(x_i) &= \sum_{j\in\Gamma}\mu_{jl}(z_j) \\
&= \sum_{(j,k)\in\Theta}(\mu_{jl}(y_j) - \mu_{kl}(\mu_{jk}(y_j))) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como buscávamos mostrar. ■

Teorema 4.2.4 (Propriedade Universal)**.** *Seja N um $R-$módulo e, para cada $i \in \Delta$, defina $\alpha_i : M_i \longrightarrow N$ um morfismo de $R-$módulos tal que $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$, sempre que $i \leq j$. Então existe um único morfismo $\alpha : M \longrightarrow N$ tal que $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$, para todo $i \in \Delta$.*

Dem.: Para a **existência** vamos mostrar que $M := \varinjlim M_i$ é válido. Pela propriedade universal da soma direta, os morfismos de $R-$módulos $\alpha_i : M_i \to N$ induzem $\alpha' : C = \oplus M_i \to N$. Para $x_i \in M_i$, $j \geq i$, considere $x_i - \mu_{ij}(x_i)$ gerador de D. Daí,

$$\begin{aligned}
\alpha'\left(x_i - \mu_{ij}(x_i)\right) &= \alpha'(x_i) - \alpha'(\mu_{ij}(x_i)) \\
&= \alpha_i(x_i) - \alpha_j\left(\mu_{ij}(x_i)\right) \\
&= \alpha_i(x_i) - \alpha_i(x_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $D \subseteq \ker(\alpha')$ e assim, α' induz $\alpha : C/D = M \to N$ com

$$\alpha\left(\mu_i\left(x_i\right)\right) = \alpha'\left(x_i\right) = \alpha_i\left(x_i\right).$$

Para a **unicidade**, suponha que M e M' satisfazem a propriedade universal, isto é,

$$\begin{cases} M, \mu_i : M_i \to M \\ M', \mu_i' : M_i \to M. \end{cases}$$

Veja que M' é limite direto *(com μ_i')* de (M_i, μ_{ij}). Assim, $\mu_i' = \mu_j' \circ \mu_{ij}$; chame $\alpha_i := \mu_i'$ na propriedade universal de (M, μ_i). Daí, temos um único morfismo $\alpha : M \to M'$ tal que $\mu_i' = \alpha_i = \alpha \circ \mu_i$. Por outro lado, conseguimos $\beta : M' \to M$ tal que $\mu_i = \beta \circ \mu_i'$; mas, $\mu_i = \beta \circ \mu_i' = \beta \circ \alpha \circ \mu_i : M_i \to M$, para todo $i \in \Delta$. Por fim,

$$\begin{aligned}
\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij} &\implies \exists!\ \gamma : M \to M \text{ tal que } \mu_i = \gamma \circ \mu_i \\
&\implies \beta \circ \alpha = \mathrm{id}_M \text{ e } \alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{M'} \\
&\implies M \simeq M'.
\end{aligned}$$

■

Sejam $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$ e $\mathbf{N} = (N_i, g_{ij})$ com limites diretos M, N e com os morfismos associados $\mu_i : M_i \longrightarrow M$ e $g_i : N_i \longrightarrow N$. Podemos concluir um resultado a um certo tipo de unicidade com morfismos de sistemas diretos:

Definição 4.2.5. *Considere uma família de morfismos de $R-$módulos $f_i : M_i \longrightarrow N_i$ tais que $f_j \circ \mu_{ij} = g_{ij} \circ f_i$, quando $i \leq j$. Então chamamos $\mathbf{f} : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ um morfismo de sistemas diretos.*

Corolário 4.2.6. **f** *define um único morfismo* $f = \varinjlim f_i : M \longrightarrow N$ *tal que* $f \circ \mu_i = g_i \circ f_i$*, para todo* $i \in \Delta$.

Dem.: Basta definir $\alpha_i : M_i \to N$ com $\alpha_i := g_i \circ f_i$ e considerar o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[r, dotted, "f"] & N & \\
& M_i \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[r, "f_i"'] \arrow[dl, "\mu_{ij}"] & N_i \arrow[u, "g_i"'] \arrow[dr, "g_{ij}"] & \\
M_j \arrow[uur, "\mu_j"] \arrow[rrr, "f_j"'] & & & N_j \arrow[uul, "g_j"']
\end{tikzcd}$$

Se $i \leq j$, então

$$\begin{aligned}
\alpha_j \circ \mu_{ij} &= g_j \circ f_j \circ \mu_{ij} \\
\text{(Pelo diag.)} &= g_j \circ g_{ij} \circ f_i \\
&= g_i \circ f_i \\
&= \alpha_i.
\end{aligned}$$

Assim, pela unicidade garantida pela propriedade universal, existe $f : M \to N$ tal que $f \circ \mu_i = g_i \circ f_i$. ■

Façamos um exemplo clássico:

Exemplo 4.2.7. Considere o *grupo de Prüfer* $\mathbb{Z}(p^\infty)$ e o conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$. Defina $M_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ e considere:

$$\begin{aligned}
\mu_{n,n+1} : M_n &\to M_{n+1} \\
a + p^n\mathbb{Z} &\mapsto pa + p^{n+1}\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Temos uma família de morfismos

$$\begin{aligned}
f_n : M_n &\to \mathbb{Z}(p^\infty) \simeq \mathbb{Z}[1/p]\,\mathbb{Z} \\
1 \mod p^n &\mapsto 1/p \mod \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

que satisfazem $f_{n+1} \circ \mu_{n,n+1} = f_n$. Considere G um grupo abeliano com uma família de morfismos $g_n : M_n \to G$ tal que $g_{n+1} \circ \mu_{n,n+1} = g_n$; seja

$$g_n\left(1 \mathrm{mod} p^n\right) = a_n \implies a_n = pa_{n+1}.$$

Podemos então definir um morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}\left(p^\infty\right) &\to G \\ 1/p^n \mathrm{mod}\mathbb{Z} &\mapsto a_n \end{aligned}$$

que é claramente bem-definido e satisfaz $\varphi \circ f_n = g_n$. Assim, pela propriedade universal, $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right) \simeq \varinjlim M_n$.

Corolário 4.2.8. *Se a sequência de sistemas diretos* $\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{P}$ *é exata (isto é, a sequência para cada* $i-$*módulo é exata), então a sequência de limites diretos* $M \longrightarrow N \longrightarrow P$ *também deve ser exata.*

Dem.: Considere $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ e $\mathbf{g} : \mathbf{N} \to \mathbf{P}$; para facilitar, considere os componentes $f_i : M_i \to N_i$ e $g_i : N_i \to P_i$ que induzem $f : M \to N$ e $g : N \to P$. Por questões práticas, denote os sistemas como (M, μ_{ij}), (N, ν_{ij}) e (P, π_{ij}).

Tome $x \in M$; pelo Teorema 4.2.3, existem $i \in \Delta$ e $x_i \in M_i$ tais que $x = \mu_i(x_i)$; como o sistema é exato por hipótese, $(g_i \circ f_i)(x_i) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= (g \circ f \circ \mu_i)(x_i) \\ &= (g \circ \nu_i \circ f_i)(x_i) \\ &= (\pi_i \circ g_i \circ f_i)(x_i) \\ &= \pi_i(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $\ker g \subseteq \operatorname{Im} f$. Seja $y \in \ker g$; logo, há $i \in \Delta$ e $y_i \in N_i$ tais que $y = \nu_i(y_i)$ e assim,

$$0 = g(y) = g(\nu_i(y_i)) \overset{\text{Cor.4.2.6}}{=} \pi_i(g_i(y_i)).$$

Logo, pelo Teorema 4.2.3, há $j \geq i$ tal que

$$\pi_{ij}(g_i(y_i)) = 0 \implies g_j\left(\nu_{ij}(y_i)\right) = 0.$$

Como a sequência é exata, existe $x_j \in M_j$ tal que $f_j(x_j) = \nu_{ij}(y_i)$; mas se $x = \mu_j(x_j)$, então

$$f(x) = f\left(\mu_j(x_j)\right) = \nu_j\left(f_j(x_j)\right) = \nu_j(\nu_{ij}(y_i)) = \nu_i(y_i) = y.$$

Portanto, $\ker g \subseteq \operatorname{Im} f$ e assim, $M \longrightarrow N \longrightarrow P$ é exata. ■

Agora que introduzimos de maneira rápida os limites diretos, podemos tomar um pequeno tempo para estudarmos suas relações com o produto tensorial. Para tal, começamos observando que $(M_i \otimes_R N, \mu_{ij} \otimes_R 1)$ é um sistema direto, com P sendo o seu limite direto. Com certo jogo de cintura, podemos provar que

Teorema 4.2.9. $\varinjlim (M_i \otimes_R N) \simeq \left(\varinjlim M_i\right) \otimes_R N.$

Dem.: Começaremos mostrando que

$$\varinjlim (M_i \times N, \mu_{ij} \times \mathrm{id}_N) = M \times N.$$

De fato, seja $\alpha_i : M_i \times N \to Q$ uma coleção de aplicações $R-$lineares tais que

$$\alpha_i = \alpha_j \circ (\mu_{ij} \times \mathrm{id}_N) \text{ para } j \geq i. \tag{4.2}$$

Gostaríamos de definir morfismos adequados que satisfaçam a propriedade universal, logo, precisamos definir $\alpha : M \times N \to Q$ tal que $\alpha_i = \alpha \circ (\mu_i \times \mathrm{id}_N)$. Espertamente, podemos tentar $\alpha(\mu_i(x_i), y) := \alpha_i(x_i, y)$; como todo elemento de M é da forma $\mu_i(x_i)$, o Teorema 4.2.3 garante que α é definido em todo o $M \times N$. A questão é que ser definido não é suficiente, precisamos que seja ***bem definido***. E de fato ele o é: suponha que $x = \mu_i(x_i) = \mu_j(x_j)$. Existe $k \geq i, j$ e assim, $x = \mu_k(\mu_{ik}(x_i)) = \mu_k(\mu_{jk}(x_j))$. Daí,

$$\begin{aligned}
\alpha(\mu_i(x_i), y) &= \alpha_i(x_i, y) \\
&\overset{(4.2)}{=} \alpha_k(\mu_{ik}(x_i), y) \\
&= \alpha(\mu_k(\mu_{ik}(x_i)), y) \\
&= \alpha(\mu_k(\mu_{jk}(x_j)), y) \\
&= \alpha(\mu_j(x_j), y).
\end{aligned}$$

Tiramos quaisquer dúvidas sobre a *boa definição* e pela unicidade de α, concluímos que $\varinjlim(M_i \times N) \simeq (\varinjlim M_i) \times N$. Seja $\pi_i : M_i \otimes N \to P$ a projeção canônica que faz de $P := \varinjlim(M_i \otimes N)$. Considere para todo $i \in \Delta$:

$$\begin{aligned} g_i : M_i \times N &\longrightarrow M_i \otimes N \\ (m_i, n) &\longmapsto m_i \otimes n, \end{aligned}$$

isto é, as aplicações bilineares canônicas. Estes *caras* formam um morfismo entre os sistemas $(\mathbf{M_i} \times \mathbf{N})$ e $(\mathbf{M_i} \otimes \mathbf{N})$; pelo Corolário 4.2.6 induzem um único morfismo

$$g : M \times N \simeq \varinjlim(M_i \times N) \longrightarrow \varinjlim(M_i \otimes N) = P.$$

de modo que $g \circ (\mu_i \times \mathrm{id}_N) = \pi_i \circ g_i$; uma coisa importante é vermos que $g(x, y) = g(\mu_i(x_i), y) = \pi_i(g_i(x_i, y)) = g_i(x_i, y)$. Pela definição de g_i, estas devem ser $R-$bilineares. Logo, g também deve o ser, pois todo elemento de $M \times N$ tem representante em $M_i \times N$. Assim, g induz um morfismo $\varphi : M \otimes N \to P$ tal que

$$\varphi \circ (\mu_i \otimes \mathrm{id}_N) = \pi_i, \; \forall i \in \Delta.$$

Pela propriedade universal, existe um morfismo $\psi : P \to M \otimes N$ tal que $\psi \circ \pi_i = \mu_i \otimes \mathrm{id}_N$. De fato, $(M_i \otimes N, \mu_{ij} \times \mathrm{id}_N)$ é sistema direto com limite P e para cada $i \in \Delta$,

$$\mu_i \otimes \mathrm{id}_N : M_i \otimes N \longrightarrow M \otimes N \text{ é morfismo.}$$

Logo, existe tal ψ com $\psi \circ \pi_i = \mu_i \otimes \mathrm{id}_N$. Além disso, veja que

$$\psi(\pi_i(m_i \otimes n)) = m \otimes n \implies \psi \circ \pi_i = \mu_i \otimes \mathrm{id}_N.$$

Dito isso, veja que $p \in P \implies \exists p_i \in M_i \otimes N$ t.q. $p = \pi_i(p)$. Como $M_i \otimes N$ é gerado por elementos da forma $m_i \otimes n$, assuma $p = \sum m_i \otimes n$ [1]. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(p)) &= \varphi(\psi(\pi_i(p_i))) \\ &= \varphi(\mu_i \otimes \mathrm{id}_N(\textstyle\sum m_i \otimes n)) \\ &= \pi_i(\textstyle\sum m_i \otimes n) \\ &= \pi_i(p) \\ &= p. \end{aligned}$$

[1] Aqui, não é de muita importância especificar quem são os m_i's ou os n's, pois, pela linearidade dos morfismos, bastaria que mostrássemos apenas para um dos elementos.

O que garante que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_P$. Se mostrarmos que a outra composição também é a identidade, acabou. Considere $m \otimes n$ um gerador de $M \otimes N$; o Teorema 4.2.3 garante a existência de $m_i \in M_i$ e $i \in \Delta$ tais que $m \otimes n = \sum \mu_i(m_i) \otimes n$. Daí,

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(m \otimes n)) &= \psi(\varphi(\textstyle\sum \mu_i(m_i) \otimes n)) \\
&= \psi(\varphi(\mu_i \otimes \mathrm{id}_N(\textstyle\sum m_i \otimes n))) \\
&= \psi(\pi_i(\textstyle\sum m_i \otimes n)) \\
&= \mu_i \otimes \mathrm{id}_N(\textstyle\sum m_i \otimes n) \\
&= \textstyle\sum \mu_i(m_i) \otimes n \\
&= m \otimes n.
\end{aligned}$$

Assim, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{M \otimes N}$, mostrando que ψ é isomorfismo e provando a proposição. ■

Seja (R_i) uma família de anéis indexada por um conjunto direto Δ; para cada par $i \leq j \in \Delta$, considere $\rho_{ij} : R_i \to R_j$ morfismos de anéis supondo que sejam satisfeitos

1. ρ_{ii} é a identidade, para todo i.
2. $\rho_{ik} = \rho_{jk} \circ \rho_{ij}$, com $i \leq j \leq k$.

Observe que considerando cada R_i como um $\mathbb{Z}-$módulo, podemos formar o limite direto $\varinjlim R_i = R$. É fato que R *absorve* a estrutura de anéis dos R_i, de modo que as aplicações $R_i \to R$ sejam morfismos de anéis.

Proposição 4.2.10. *Se* $R = 0$ *então* $R_i = 0$ *para algum* $i \in \Delta$.

Dem.: Considere R um anel:
($\Rightarrow$) Suponha $R = 0$. Em R, $1 = 0$. Além disso $\rho_i : R_i \to R$ é morfismo de anéis, logo, $\rho_i(1) = 1 = 0$. Daí o Teorema 4.2.3 garante que existe $j \geq i$ tal que $\rho_{ij}(1) = 0 = 1$ em R_j. Assim, $R_j = 0$.
($\Leftarrow$) Se $R_i = 0$ então $\forall j \geq i$,

$$1 = \rho_{ij}(1) \overset{(1=0)}{=} \rho_{ij}(0) = 0 \implies R_j = 0.$$

Tome $r \in R$; ora, $r = \rho_k(r_k), r_k \in R_k$. Se $j \geq i, k$, então

$$\begin{cases} r = \rho_k(r_k) = \rho_j(\rho_{kj}(r_k)) \\ \rho_{kj}(r_k) \in R_j = 0. \end{cases}$$

Assim, $r = \rho_j(0) = 0 \implies R = 0$. ■

Agora que mostramos a *compatibilidade* do limite direto para anéis, não é de se espantar que haja, também, compatibilidade para outros tipos de classes interessantes. Por exemplo:

Proposição 4.2.11. *Seja $(R_i, \rho_{i,j})$ um sistema direto de anéis. Então,*

$$\sqrt{(\varinjlim R_i)} = \varinjlim \sqrt{R_i}.$$

Dem.: Considere $\varinjlim R_i = R$.
$(\subseteq)$: Tomando $r \in R$, por definição, existe $n > 0$ tal que $r^n = 0$. Considere $r_i \in R$ e $i \in \Delta$ tais que $\rho_i(r_i) = r$. Assim,

$$r^n = (\rho_i(r_i))^n = \rho_i(r_i^n) = 0 \overset{\text{Teo.4.2.3}}{\Longrightarrow} \exists j \geq i \text{ tal que } \rho_{ij}(r_i^n) = 0 \implies (\rho_{ij}(r_i))^n = 0.$$

Pra simplificar notações, denote $\rho_{ij}(r_i) = r'$; ora, $r' \in \sqrt{(R_j)}$ e além disso,

$$\rho_j(r') = \rho_j(\rho_{ij}(r_i)) = \rho_i(r_i) = r,$$

logo, $\rho_j(r') = r \in \varinjlim \sqrt{(R_i)}$.
$(\supseteq)$: Se $(r_i)^n = 0$, então $(\rho_i(r_i))^n = 0$. Logo, $r_i \in R_i$ com $r_i^n = 0$; em outras *palavras*, $\varinjlim \left(\sqrt{(R_i)}\right) \subseteq \sqrt{(R)}$.

■

A mesma ideia é válida para domínios de integridade:

Proposição 4.2.12. *Se cada R_i é um domínio de integridade, $\varinjlim R_i$ também o é.*

Dem.: Façamos por contradição: suponha que R não seja domínio. Então existem $r, s \in R$ não nulos tais que $rs = 0$. Pelo Teorema 4.2.3 existem $r_i \in R_i$ e $s_j \in R_j$

tais que $r = \rho_i(r_i)$ e $s = \rho_j(s_j)$. Assim, com $k \geq i, j$,

$$\begin{aligned} rs = 0 = \rho_i(r_i)\rho_j(s_j) &= \rho_k(\rho_{ik}(r_i))\rho_k(\rho_{jk}(s_j)) \\ &= \rho_k(\rho_{ik}(r_i)\rho_{jk}(s_j)). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 4.2.3, existe $l \geq k, j, i$ tal que

$$\begin{aligned} \rho_{kl}(\rho_{ik}(r_i)\rho_{jk}(s_j)) = 0 &\implies \rho_{kl}(\rho_{ik}(r_i))\rho_{kl}(\rho_{jk}(s_j)) = 0 \\ &\implies \rho_{il}(r_i)\rho_{jl}(s_j) = 0. \end{aligned}$$

Como $\rho_l(\rho_{il}(r_i)) = r$, é claro que $\rho_{il}(r_i) \neq 0$; de maneira análoga, $\rho_{jl}(s_j) \neq 0$. Porém, isso implica na existência de divisores não nulos de zero em R_l, o que contradiz a hipótese. Por contradição, está provada a afirmação. ■

Por fim, façamos um breve comentário sobre limites diretos de $R-$álgebras; seja $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de $R-$álgebras. Para cada subconjunto finito Γ de Λ, chame A_J produto tensorial sobre R dos A_λ, $\lambda \in \Gamma$.

Teorema 4.2.13. *Nos moldes do parágrafo acima, se Γ' é outro subconjunto finito de Λ com $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então existe um morfismo canônico de $R-$álgebras $A_\Gamma \to A_{\Gamma'}$. Se $A = \varinjlim_{\Gamma\in\Lambda} A_\Gamma$, então A tem uma estrutura natural de $R-$álgebra na qual os morfismos $A_\Gamma \to A$ são morfismos de $R-$álgebras.*

Dem.: Suponha $\Gamma = \{\lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_m\}$; assim, $\Gamma' = \Gamma \cup \{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n\}$. O morfismo canônico procurado é:

$$\begin{aligned} A_J &\longrightarrow A_{\Gamma'} \\ a_{\lambda_{n-1}} \otimes \cdots \otimes a_{\lambda_m} &\longmapsto a_{\lambda_{n-1}} \otimes \cdots \otimes a_{\lambda_m} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \end{aligned}$$

Por ser tensorial, é linear; logo, é morfismo de $R-$álgebras. Considere $\alpha_\Gamma : A_\Gamma \to A$ (a projeção canônica associada ao limite direto). Sejam $a \in A$ e $r \in R$. Existem $\Gamma \subset \Lambda$ finito e $a_\Gamma \in A_\Gamma$ tais que $a = \alpha_\Gamma\,(a_\Gamma)$. Defina $ra = \alpha_\Gamma\,(ra_\Gamma)$; aqui, acabou (observe que como $A_\Gamma \to A'_\Gamma$ são morfismos, a definição funciona independente da escolha de Γ). ■

4.3 Saturação Lipschitz *à la* Lipman

Começaremos aqui com o assunto dito *"principal"* neste texto. Como sempre, sejam R um anel e A, B $R-$módulos e uma sequência de morfismos

$$R \longrightarrow A \xrightarrow{g} B.$$

Considere a aplicação de B em seu tensorial por R, de maneira *"diagonal"*:

$$\begin{aligned} \Omega : B &\longrightarrow B \underset{R}{\otimes} B \\ b &\longmapsto b \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} b. \end{aligned}$$

Em tempo, considere também o morfismo canônico $\varphi : B \otimes_R B \longrightarrow B \otimes_A B$; apesar de *chique*, nos interessamos apenas no seu núcleo $\ker \varphi$, que tem uma representação extremamente útil:

Lema 4.3.1. $\ker \varphi = \langle \{g(a) \otimes_R 1 - 1 \otimes_R g(a),\ a \in A\} \rangle.$

Dem.: Primeiramente, veja que faz sentido aplicarmos o morfismo canônico no conjunto gerador, obtendo

$$\left\langle \left\{ g(a) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} g(a),\ a \in A \right\} \right\rangle \subseteq \ker \varphi.$$

De fato,

$$\begin{aligned} y = g(a) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} g(a) \implies \varphi(y) &= \varphi(g(a) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} g(a)) \\ &= g(a) \underset{A}{\otimes} 1_B - 1_B \underset{A}{\otimes} g(a). \end{aligned}$$

Bem, $g(a) = a \cdot_A 1_B$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= (a \cdot_A 1_B) \underset{A}{\otimes} 1_B - 1_B \underset{A}{\otimes} (a \cdot_A 1_B) \\ &= 1_B \underset{A}{\otimes} (a \cdot_A 1_B) - 1_B \underset{A}{\otimes} (a \cdot_A 1_B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De maneira *concreta*, o resultado se dá ao observarmos (BRANDENBURG, 2016) *Beispiel* 8.4.3, isto é, se $R \to S$ é um morfismo de anéis e M, N são $S-$álgebras, então para $m \in M, n \in N, s \in S$

$$\frac{M \otimes_R N}{\langle ms \otimes n - m \otimes sn \rangle} \simeq M \underset{S}{\otimes} N.$$

De fato, com $S = A$, $M = N = B$, $m = n = 1_B$ e $s = a$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{M \otimes_R N}{\langle ms \otimes n - m \otimes sn \rangle} &= \frac{B \otimes_R B}{\langle 1_B \cdot a \otimes 1_B - 1_B \otimes a \cdot 1_B \rangle} \\ &= \frac{B \otimes_R B}{\langle g(a) \otimes 1 - 1 \otimes g(a) \rangle} \\ &\simeq B \underset{A}{\otimes} B.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema dos Isomorfismos, concluímos o resultado.

■

Procuramos uma *classe* de elementos cuja diferença tensorizando por 1 sejam integrais sobre esse núcleo. Sendo mais preciso, definimos o seguinte:

Definição 4.3.2. *Sejam R um anel, $g : A \longrightarrow B$ um morfismo de $R-$álgebras, Ω e φ como definidos acima. A saturação Lipschitz $A^* = A^*_{B,R}$ de A em B relativa à $R \longrightarrow A \xrightarrow{g} B$ é o conjunto*

$$A^* = \left\{ x \in B; \Omega(x) \in \overline{\ker \varphi} \right\}.$$

Se $A^* = g(A)$, então A é dito saturado em B. Caso A seja uma $R-$subálgebra de B, é costume tomar g como a inclusão.

O objetivo principal deste trabalho é estudar as próximas propriedades, primeiramente indicadas no artigo de Lipman (LIPMAN, 1975). Começamos por mostrar que a saturação Lipschitz de uma álgebra é um subanel:

Proposição 4.3.3. *A^* é um subanel de B que contém $g(A)$.*

Dem.: Ora, $x \in A^* \implies x \in B$ por definição. Vamos mostrar inicialmente que A^* é fechado para soma e para o produto. Sejam $x, y \in A^*$. Ora,

$$\begin{aligned}(x+y) \otimes 1 - 1 \otimes (x+y) &= \left(x \underset{R}{\otimes} 1 + y \underset{R}{\otimes} 1 \right) - \left(1 \underset{R}{\otimes} x + 1 \underset{R}{\otimes} y \right) \\ &= \left(x \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} x \right) + \left(y \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} y \right) \\ &= \Omega(x) + \Omega(y).\end{aligned}$$

Como o fecho integral de um ideal é um ideal e $\Omega(x), \Omega(y) \in \overline{\ker \varphi}$, por hipótese a soma de ambos também deve estar lá. Para o produto, observe que se $x, y \in A^*$, então

$$\begin{aligned} xy \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} xy &= xy \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} xy + x \underset{R}{\otimes} y - x \underset{R}{\otimes} y \\ &= \left(x \underset{R}{\otimes} 1\right)\left(y \underset{R}{\otimes} 1\right) - \left(x \underset{R}{\otimes} 1\right)\left(1 \underset{R}{\otimes} y\right) \\ &+ \left(1 \underset{R}{\otimes} y\right)\left(x \underset{R}{\otimes} 1\right) - \left(1 \underset{R}{\otimes} y\right)\left(1 \underset{R}{\otimes} x\right) \\ &= \left(x \underset{R}{\otimes} 1\right)\left(y \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} y\right) + \left(1 \underset{R}{\otimes} y\right)\left(x \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} x\right). \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo anterior, o produto está na saturação. Por fim, como

$$B \underset{R}{\otimes} B \longrightarrow B \underset{A}{\otimes} B$$

é morfismo, $1_B \in A^*$ pois $1_B \otimes_R 1_B - 1_B \otimes_R 1_B = 0$.

É claro que $g(A) \subseteq B$. Seja $b \in g(A)$; daí existe $a \in A$ tal que $g(a) = b$. Pelo Lema 4.3.1, veja que $b \otimes_R 1 - 1 \otimes_R b \in \ker \varphi$ e portanto, está no seu fecho integral. Logo, $b \in A^* \implies g(A) \subseteq A^*$. ■

Conseguimos implicar resultados baseados nas inclusões de $R-$subálgebras:

Proposição 4.3.4. *Seja A uma $R-$subálgebra de B e, para qualquer anel C com $A \subseteq C \subseteq B$ seja $C^* = C^*_{B,R}$. Então,*

1. *$A \subseteq A^*$.*
2. *$A \subseteq C \subseteq B$ implica $A^* \subseteq C^*$.*
3. *$(A^*)^* = A^*$.*

Dem.: 1. Se $A \subseteq B$, então g é a inclusão e $g\,|_A = \mathrm{id}_A$, com $g(x) = x$. Logo, $x \in A \implies x \in B$. Daí, $\Omega(g(x)) = \Omega(x) \in \ker \varphi \implies \Omega(x) \in \overline{\ker \varphi}$. Portanto, $x \in A^*$ e $A \subseteq A^*$.

2. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \underset{R}{\otimes} B \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_c"'] & & B \underset{A}{\otimes} B \arrow[dl, "\lambda"] \\
& B \underset{C}{\otimes} B &
\end{tikzcd}$$

que é comutativo por suas imagens. Assim,

$$\varphi_C = \lambda \circ \varphi \implies \ker \varphi \subseteq \ker \varphi_C.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A^* = \left\{x \in B; \Omega(x) \in \overline{\ker \varphi}\right\} &\subseteq \left\{x \in B; \Omega(x) \in \overline{\ker \varphi_C}\right\} \\
&= C^*.
\end{aligned}$$

3. Por (1), trocando A por A^* (que por sua vez está contido em B), concluímos que $A^* \subseteq (A^*)^*$. Para a outra inclusão, considere a aplicação

$$\varphi^* : B \underset{R}{\otimes} B \to B \otimes_{A^*} B.$$

É fato que $\ker \varphi^* \subseteq \overline{\ker \varphi}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\{\Omega(x); x \in A^*\} \subseteq \overline{\ker \varphi} &\implies \langle\{\Omega(x); x \in A^*\}\rangle \subseteq \overline{\ker \varphi} \\
&\implies \ker \varphi^* \subseteq \overline{\ker \varphi}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\ker \varphi^*} \subseteq \overline{\overline{\ker \varphi}} = \overline{\ker \varphi} &\implies \Omega^{-1}\left(\overline{\ker \varphi^*}\right) \subseteq \Omega^{-1}\left(\overline{\ker \varphi}\right) \\
&\implies (A^*)^* \subseteq A^*.
\end{aligned}$$

■

Observe que há certo tipo de compatibilidade perante diagramas comutativos:

Proposição 4.3.5. *Dado o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow f \\ R' & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{g'} & B' \end{array}$$

é fato que $f\left(A^*_{B,R}\right) \subseteq (A')^*_{B',R'}$.

Dem.: Iniciaremos por fixar duas notações: considere o morfismo canônico

$$\varphi' : B' \underset{R'}{\otimes} B' \longrightarrow B' \underset{A'}{\otimes} B'$$

e o morfismo

$$\begin{aligned} \Omega' : B' &\longrightarrow B' \underset{R'}{\otimes} B' \\ x' &\longmapsto x' \underset{R'}{\otimes} 1 - 1 \underset{R'}{\otimes} x'. \end{aligned}$$

Assim,

$$(A')^* = \left\{x \in B'; \Omega'(x) \in \overline{\ker \varphi'}\right\} \text{ com } \ker \varphi' = \langle \{\Omega'(g'(a)), a \in A'\} \rangle .$$

Suponha $x \in f\left(A^*_{B,R}\right)$. Então existe $y \in A^*_{B,R}$ tal que $f(y) = x$. Pela definição de f, $x \in B'$. Por hipótese $\Omega(y) \in \overline{\ker \varphi}$, existindo assim $a_i \in (\ker \varphi)^i$ com

$$\Omega(y)^n + \cdots + a_{n-1}\Omega(y) + a_n = 0.$$

Considere o morfismo abaixo (que é bem definido pela propriedade universal do produto tensorial)

$$\begin{aligned} f \underset{R}{\otimes} f : B \underset{R}{\otimes} B &\longrightarrow B' \underset{R'}{\otimes} B' \\ a \underset{R}{\otimes} b &\longmapsto f(a) \underset{R'}{\otimes} f(b). \end{aligned}$$

Aplicando-o ao elemento $\Omega(y)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega(y) = y \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} y &\implies f \underset{R}{\otimes} f\left(\Omega(y)\right) = f(y) \underset{R'}{\otimes} 1 - 1 \underset{R'}{\otimes} f(y) \\ &\implies f \underset{R}{\otimes} f\left(\Omega(y)\right) = x \underset{R'}{\otimes} 1 - 1 \underset{R'}{\otimes} x \\ &\implies f \underset{R}{\otimes} f\left(\Omega(y)\right) = \Omega'(x). \end{aligned}$$

Daí, $\Omega(y)^n + \cdots + a_{n-1}\Omega(y) + a_n = 0$ implica em

$$(f \underset{R}{\otimes} f)\left(\Omega(y)^n + \cdots + a_{n-1}\Omega(y) + a_n\right) = (f \underset{R}{\otimes} f)(0)$$

que por sua vez garante que

$$(\Omega'(x))^n + \cdots + (f \underset{R}{\otimes} f)(a_{n-1})(\Omega'(x)) + (f \underset{R}{\otimes} f)(a_n) = 0.$$

Se $f \otimes_R f(a_i) \in (\ker\varphi')^i$ então acabou, pois teríamos $\Omega'(x) \in \overline{\ker\varphi'}$. E isso de fato acontece: veja que pela comutatividade do diagrama, $f \circ g(a) = g' \circ h(a) = g'(a)$. Assim,

$$\begin{aligned} f \underset{R}{\otimes} f\left(g(a) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} g(a)\right) &= f(g(a)) \underset{R'}{\otimes} 1 - 1 \underset{R'}{\otimes} f(g(a)) \\ &= g'(a') \underset{R'}{\otimes} 1 - 1 \underset{R'}{\otimes} g'(a'). \end{aligned}$$

Logo, um elemento da forma $f \otimes_R f(b_i)$ com $b_i \in \ker\varphi$ está no gerador de $\ker\varphi'$ pelo Lema 4.3.1. Por linearidade, os $i-$ésimos coeficientes do polinômio mônico acima tem de estar em $(\ker\varphi')$, terminando a demonstração. ∎

Proposição 4.3.6. *Dado um sistema direto de sequências $R_i \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i$ com limite direto $R \longrightarrow A \longrightarrow B$. Então existe um isomorfismo natural*

$$\varinjlim_i (A_i)^*_{B_i,R_i} \xrightarrow{\sim} A^*_{B,R}.$$

Dem.: Temos os diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r] \arrow[d] & A_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & B_i \arrow[d, "\beta_i"] \\ R \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (A_i)^*_{B_i,R_i} \arrow[r, "\mu_{ij}"] \arrow[d, "\psi_i"'] & (A_j)^*_{B_j,R_j} \arrow[dl, "\psi_j"] \\ (A)^*_{B,R} & \end{tikzcd}$$

de onde temos

$$\begin{cases} \beta_i \circ g_i = g \circ \alpha_i \\ \psi_i = \psi_j \circ \mu_{ij} \end{cases}$$

Pela propriedade universal dos limites diretos, existe morfismo único

$$\begin{aligned} \psi : \varinjlim (A_i)^*_{B_i,R_i} &\to (A)^*_{B,R} \\ \mu_i(x_i) &\mapsto \psi_i(x_i). \end{aligned}$$

Este é claramente sobrejetivo, pois

$$\begin{aligned} \psi_i(x_i) \in (A)^*_{B,R} &\implies x_i \in B_i \\ &\implies \mu_i(x_i) \in \varinjlim \psi_i(x_i) \in (A_i)^*_{B_i,R_i} \\ &\implies \psi\left(\mu_i\left(x_i\right)\right) = \psi_i\left(x_i\right). \end{aligned}$$

Por fim, pela unicidade e pelo Teorema 4.2.3, garantimos a injetividade e, portanto, mostramos que ψ é um isomorfismo.

■

Antes de continuarmos para próxima proposição, acerca da compatibilidade com produtos diretos, é válido notar que para índices finitos, o produto direto é igual à soma direta; como já provamos a compatibilidade de tal com o produto tensorial no item 4 do Teorema 2.1.2, podemos prosseguir. Portanto, apesar escrita *original* remeter ao produto direto, para evitarmos conflito de notação, utilizaremos a mesma do capítulo 2.

Lema 4.3.7. *Sejam R um anel e I_i ideais de R.*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \overline{I_i} = \overline{\bigoplus_{i_1}^{n} I_i}.$$

Dem.: De fato, se $y \in \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{I_i}$ então $y_i \in \overline{I_i}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Com isso, existem $a_{i,j} \in (I_i)^j$ e m_i natural tais que

$$(y_i)^{m_i} + \cdots + a_{i,m_i-1}(y_i) + a_{i,m_i} = 0.$$

Agora, construiremos um "algoritmo" para encontrar um polinômio adequado. Seja $m_d := \text{mmc}(m_1, \ldots, m_n)$; arrume em ordem crescente os n_i's. Assim que chegarmos ao "fim", isto é, quando chegarmos ao $i-$ésimo dos elementos a seguir, repita novamente os elementos.

Coeficiente	Entrada
1	$(a_{1,m_1}, \ldots, a_{n,m_n})$
$\vdots$	$\vdots$
m_1	$(1, \ldots, a_{n,m_1})$
$m_1 + 1$	$(a_{1,m_1}, \ldots, a_{n,m_1+1})$
$\vdots$	$\vdots$
m_d	$(1, \ldots, 1)$

Se tomarmos então

$$p(X) = X^{m_d} + \cdots + (a_{1,m_1-1}, \ldots, a_{n,m_n-1})\, X + (a_{1,m_1}, \ldots, a_{n,m_n})\,,$$

é direto que $p(y) = 0$. Por construção, concluímos que $y \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{n} I_i}$. A volta sai de aplicação direta da definição, pois encontraremos polinômios mônicos em cada uma das entradas. ■

Com o Lema no bolso e um pouco de jogo de cintura, podemos enunciar o seguinte:

Proposição 4.3.8. *Sejam $g_i : A_i \longrightarrow B_i$ morfismos de $R-$álgebras e seja $g : A \longrightarrow B$ o produto direto destas aplicações. Isto é,*

$$A = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right) \stackrel{g=\bigoplus g_i}{\longrightarrow} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} B_i\right) = B.$$

Então,

$$A^*_{B,R} = \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i)^*_{B_i,R}\,.$$

Dem.: Como dito no texto que precede este resultado, vamos utilizar o item 4 do Teorema 2.1.2 para que possamos concluir que

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i=1}^{n} B_i \underset{R}{\otimes} \bigoplus_{i=1}^{n} B_i &\simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \left(B_i \underset{R}{\otimes} \bigoplus_{i=1}^{n} B_i\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left(B_i \underset{R}{\otimes} B_j\right).\end{aligned}$$

Façamos uma breve análise de como Ω se comporta; se $x \in B$ então

$$\begin{aligned}
\Omega(x) &= (x_1, \ldots, x_n) \underset{R}{\otimes} (1_{B_1}, \ldots, 1_{B_n}) - (1_{B_1}, \ldots, 1_{B_n}) \underset{R}{\otimes} (x_1, \ldots, x_n) \\
&\cong \left(x_1 \underset{R}{\otimes} 1_{B_1}, x_1 \underset{R}{\otimes} 1_{B_2}, \ldots, x_n \underset{R}{\otimes} 1_{B_n}\right) - \left(1_{B_1} \underset{R}{\otimes} x_1, 1_{B_1} \underset{R}{\otimes} x_2, \ldots, 1_{B_n} \underset{R}{\otimes} x_n\right) \\
&\cong \left(x_1 \underset{R}{\otimes} 1_{B_1} - 1_{B_1} \underset{R}{\otimes} x_1, x_1 \underset{R}{\otimes} 1_{B_2} - 1_{B_1} \underset{R}{\otimes} x_2, \ldots, x_n \underset{R}{\otimes} 1_{B_n} - 1_{B_n} \underset{R}{\otimes} x_n\right);
\end{aligned}$$

Ao definirmos $\Omega_{ij}(x) = x_1 \otimes_R 1_{B_j} - 1_{B_i} \otimes x_j$, conclui-se que

$$\Omega(x) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \Omega_{ij}(x).$$

Esse tipo de análise também é interessante ao aplicada em $\varphi : B \otimes_R B \to B \otimes_A B$; ao estudar o elemento $\varphi\,(b_1 \otimes b_2)$, conseguimos: (aqui, observe que não há necessidade de tomarmos um elemento genérico de $B \otimes_R B$, visto que por linearidade, $b_1 \otimes_R b_2$ fará o trabalho)

$$\begin{aligned}
&\varphi\left((b_{1,1}, \ldots, b_{1,n}) \underset{R}{\otimes} (b_{2,1}, \ldots, b_{2,n})\right) = (b_{1,1}, \ldots, b_{1,n}) \underset{A}{\otimes} (b_{2,1}, \ldots, b_{2,n}) \\
\Longrightarrow\ &\varphi\left(b_{1,1} \underset{R}{\otimes} b_{2,1}, b_{1,1} \underset{R}{\otimes} b_{2,2}, \ldots, b_{1,n} \underset{R}{\otimes} b_{n,n}\right) = \left(b_{1,1} \underset{A}{\otimes} b_{2,1}, b_{1,1} \underset{A}{\otimes} b_{2,2}, \ldots, b_{1,n} \underset{A}{\otimes} b_{n,n}\right)
\end{aligned}$$

Então, se definirmos $\varphi_{ij}\,(b_{1,i} \otimes_R b_{2,j}) = b_{1,i} \otimes_A b_{2,j}$, obtemos

$$\varphi \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \varphi_{ij}.$$

Observe que se $x \in \prod_{i=1}^{n} (A_i)^*_{B_i,R}$ então $x_i \in (A_i)^*_{B_i,R}$; assim, $x_i \in B_i$ e então $x \in B$. Por outro lado, se $x \in A^*_{B,R}$ temos $x_i \in B_i$, para $i = 1, \ldots, n$. O Lema 4.3.7 garante então que

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}(x) \in \overline{\ker \varphi_{ij}} &\iff \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \Omega_{ij}(x) \in \bigoplus_{i}^{n} \bigoplus_{j}^{n} \overline{\ker \varphi_{ij}} \\
&\iff \Omega(x) \in \overline{\ker \varphi}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.3.9 (Descida fielmente plana). *Ao tensorizar a sequência da definição com uma $R-$álgebra fielmente plana R', obtendo o diagrama*

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes_R R' \arrow[r, "g \otimes_R \mathrm{id}_{R'}"] \arrow[d, equal] & B \otimes_R R' \arrow[d, equal] \\ R' \arrow[r] & A' \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd}$$

se A' for $R'-$saturada em B'e então A é $R-$saturada em B. Isto é,

$$(A')^*_{B',R'} = g'(A') \implies A^*_{B,R} = g(A).$$

Dem.: Considere

$$f : B \longrightarrow B' = B \underset{R}{\otimes} R'$$
$$b \longmapsto b \underset{R}{\otimes} r'.$$

a aplicação canônica. Veja que obtemos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d] & B \arrow[d, "f"] \\ R' \arrow[r] & A' \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd}$$

E pela Proposição 4.3.5,

$$f(A^*_{B,R}) \subseteq (A')^*_{B',R'} \implies A^*_{B,R} \subseteq f^{-1}\left((A')^*_{B',R'}\right).$$

Por hipótese $f^{-1}(A^*_{B,R}) = f^{-1}(g'(A'))$ e pela Proposição 4.3.3, $g(A) \subseteq A^*_{B,R}$. Assim existe a sequência *encaixada*:

$$g(A) \subseteq A^*_{B,R} \subseteq f^{-1}\left((A')^*_{B',R'}\right) = f^{-1}(g'(A'));$$

observe que caso mostremos a igualdade $g(A) = f^{-1}(g'(A'))$, teremos

$$g(A) \subseteq A^*_{B,R} \subseteq g(A) \implies g(A) = A^*_{B,R},$$

que é justamente o procurado. Façamos isso: considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& B/g(A) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\overline{f}"] & \\
B/g(A) \otimes_R R' \arrow[rr, "\beta"'] & & B'/g'(A')
\end{tikzcd}$$

Vamos por partes, buscando provar a injetividade de f:

- **α é injetivo:** De fato, α é o morfismo canônico de $B/g(A)$ no tensorial de uma álgebra fielmente plana (ou seja, é fielmente plana como módulo). Por definição, α deve ser injetivo (o ker é precisamente o modulo 0).

- **β é isomorfismo:** Aqui iremos utilizar técnicas como a propriedade universal do quociente. Primeiramente, considere a aplicação
$$\begin{aligned} j : B \times R' &\longrightarrow \frac{B \otimes_R R'}{g'(A')} \\ (b, r') &\longmapsto \left(b \underset{R}{\otimes} r'\right) + g'(A'). \end{aligned}$$
Veja que se $b = g(a)$ para algum $a \in A$ então
$$j\left(g(a), r'\right) = \left(g(a) \underset{R}{\otimes} r'\right) + g'(A').$$
Veja que $g(a) \otimes_R r' \in g'(A')$ pois $g' = g \otimes_R \mathrm{id}_{R'}$. Logo, há um morfismo linear induzido
$$j_q : \frac{B}{g(A)} \times R' \longrightarrow \frac{B \otimes_R R'}{g'(A')},$$
o que garante o induzido que buscamos, a saber, um morfismo injetivo
$$\begin{aligned} \iota : \frac{B}{g(A)} \underset{R}{\otimes} R' &\longrightarrow \frac{B \otimes_R R'}{g'(A')}. \\ (b + g(A)) \underset{R}{\otimes} r' &\longmapsto \left(b \underset{R}{\otimes} r'\right) + g'(A') \end{aligned}$$
Para encontrar o morfismo *"contrário"*, façamos um processo adequadamente parecido: considere o morfismo
$$\begin{aligned} B \times R' &\longrightarrow B/g(A) \underset{R}{\otimes} R' \\ (b, r') &\longmapsto (b + g(A)) \underset{R}{\otimes} r'. \end{aligned}$$

Pela linearidade do produto tensorial, a propriedade universal garante que há morfismo injetivo

$$\begin{aligned} k : B \underset{R}{\otimes} R' &\longrightarrow B/g(A) \underset{R}{\otimes} R' \\ b \underset{R}{\otimes} r' &\longmapsto (b + g(A)) \underset{R}{\otimes} r'. \end{aligned}$$

Se $x \in g'(A')$ então $x = \sum^{n} (g(a_i) \otimes_R r_i')$ onde $a_i \in A$ e $r_i' \in R$. Daí,

$$\begin{aligned} k(x) &= k\left(\sum^{n}\left(g(a_i) \underset{R}{\otimes} r_i'\right)\right) \\ &= \sum^{n} k\left(g(a_i) \underset{R}{\otimes} r_i'\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então existe um morfismo injetivo induzido

$$\begin{aligned} \kappa : \frac{B \otimes_R R'}{g'(A')} &\longrightarrow \frac{B}{g(A)} \underset{R}{\otimes} R' \\ \left(b \underset{R}{\otimes} r'\right) + g'(A') &\longmapsto (b + g(A)) \underset{R}{\otimes} r'. \end{aligned}$$

Não é difícil verificarmos que

$$\begin{aligned} \iota\left(\kappa\left(b \underset{R}{\otimes} r' + g'(A')\right)\right) &= \iota\left(b + g(A) \underset{R}{\otimes} r'\right) \\ &= b \underset{R}{\otimes} r' + g'(A') \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \kappa\left(\iota\left(b + g(A) \underset{R}{\otimes} r'\right)\right) &= \kappa\left(b \underset{R}{\otimes} r' + g'(A')\right) \\ &= b \underset{R}{\otimes} r' + g'(A'). \end{aligned}$$

Portanto, temos um isomorfismo.

- **$\overline{\text{f}}$ é injetivo**: Aqui, o importante é mostrar que o diagrama é comutativo. Fixe $r' \in R'$; com o obtido no item anterior, escrevemos:

$$\begin{aligned} \alpha : B/g(A) &\longrightarrow B/g(A) \underset{R}{\otimes} R' \\ b + g(A) &\longmapsto b + g(A) \underset{R}{\otimes} r' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta : \frac{B}{g(A)} \underset{R}{\otimes} R' &\longrightarrow \frac{B \otimes_R R'}{g'(A')}. \\ (b + g(A)) \underset{R}{\otimes} r' &\longmapsto \left(b \underset{R}{\otimes} r'\right) + g'(A') \end{aligned}$$

e para o induzido por f,

$$\begin{aligned}\overline{f} : B/g(A) &\longrightarrow B'/g'(A') \\ b + g(A) &\longmapsto b \underset{R}{\otimes} R' + g'(A').\end{aligned}$$

Assim se $b + g(A) \in B/g(A)$ então

$$\begin{aligned}\beta\left(\alpha\left(b + g(A)\right)\right) &= \beta\left((b + g(A)) \underset{R}{\otimes} r'\right) \\ &= \left(b \underset{R}{\otimes} r'\right) + g'(A') \\ &= \overline{f}\left(b + g(A)\right).\end{aligned}$$

Logo, o diagrama comuta. Portanto, como $\beta \circ \alpha = \overline{f}$ a injetividade de β e α garante que $\overline{f}$ seja injetivo.

- **f é injetivo**: Considere o diagrama estendido com $r' \in R'$ fixo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[d, "f"'] & B/g(A) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ B \otimes_R R' \arrow[r, "\pi_2"'] & B \otimes_R R'/g'(A') \end{tikzcd}$$

Façamos uma descrição dos morfismos indicados no diagrama, o que facilitará observarmos que este é comutativo:

$$\begin{aligned}\pi_1 : B &\longrightarrow B/g(A) \\ b &\longmapsto b + g(A)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\overline{f} : B/g(A) &\longrightarrow B'/g'(A') \\ b + g(A) &\longmapsto b \underset{R}{\otimes} R' + g'(A')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 : B' &\longrightarrow B'/g'(A') \\ b \underset{R}{\otimes} r' &\longmapsto b \underset{R}{\otimes} r' + g'(A')\end{aligned} \qquad \begin{aligned}f : B &\longrightarrow B' \\ b &\longmapsto b \underset{R}{\otimes} r'\end{aligned}$$

Então podemos escrever:

$$\overline{f} \circ \pi_1(b) = \overline{f}\left(b \underset{R}{\otimes} g(A)\right) = b \underset{R}{\otimes} r' + g'(A') = \pi_2\left(b \underset{R}{\otimes} r'\right) = \pi_2\left(f(b)\right).$$

Assim, o diagrama é de fato comutativo. Como $\overline{f} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$ e todas a menos de f são injetivas (até agora), f deve ser também injetiva.

Estamos quase lá. *Portemos* o diagrama do enunciado; chame por conveniência $h : A \to A'$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "f"] \\
A' \arrow[r, "g'"'] & B'
\end{tikzcd}
$$

Não é difícil ver que o diagrama é comutativo. De fato,

$$g'(h(a)) = g'(a \underset{R}{\otimes} r') = g(a) \underset{R}{\otimes} r' = f(g(a)).$$

Assim,

$$f \circ g(A) = g'(A') \implies g(A) = f^{-1}(g'(A')),$$

e aqui acaba a prova. ■

Lema 4.3.10. *Seja $f : R \longrightarrow S$ um morfismo de anéis. Considere que pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

1. *O núcleo de f é um nilideal e S é integral sobre $f(R)$.*
2. *S é fielmente plano sobre R.*

Então, para qualquer ideal I em R temos

$$\overline{I} = f^{-1}\left(\overline{IS}\right).$$

Dem.: Assumindo (1), temos:

- ($\subseteq$) Considerando $f : R \to S$, pela persistência do fecho integral de ideais mostrado no Teorema 4.1.6, $f\left(\overline{I}\right) \subseteq \overline{f\left(I\right)S} = \overline{IS}$.
- ($\supseteq$) Suponha $x \in R$ e $y = f(x)$ integral sobre IS. Como S é integral sobre $f(R)$,

$$y \in \overline{f(I)S} \implies y \in \overline{f(I)f(R)}.$$

Como $f(I)$ é ideal em $f(R)$, $f(I)f(R) = f(I)$; assim, $y \in \overline{f(I)}$. Existe, portanto, um polinômio mônico

$$p(X) = X^n + \cdots + b_1 X + b_0, b_i \in f(I)^i = f(I^i) \text{ tal que } p(y) = 0.$$

O interessante aqui é ver que $b_i = f(a_i)$ com $a_i \in I^i$. Assim,

$$\begin{aligned} y^n + \cdots + b_1 y + b_0 = 0 &\implies (f(x))^n + f(a_{n-1})f(x) + f(a_n) = 0 \\ &\implies f\left(x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n\right) = 0 \\ &\implies x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \ker f. \end{aligned}$$

Por hipótese o núcleo é nilideal, portanto, seus elementos são nilpotentes. Chamando $q(x) := x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, existe algum m natural tal que $q(x)^m = 0$. Como essa é uma equação polinomial proveniente de um polinômio mônico, x é integral em I. Logo, $y \in f(\overline{I})$.

Assumindo (2) temos:

- **(⊆)** Idêntica à provada no item (1).
- **(⊇)** Observe inicialmente que pela planicidade *fiel*, f deve ser injetora. Assim, temos:

$$f(I)S = f(I) \implies IS = f(I) \implies f^{-1}(IS) = I.$$

Suponha $f(x)$ integral sobre $IS = f(I)S$. Daí, $(f(x))^n + \cdots + a_{n-1}(f(x)) + a_n = 0$, com $a_i \in I^i$ implica em

$$\begin{aligned} (f(x))^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i (f(x))^i &\implies (f(x))^n \in f(I)(I,x)^{n-1} S \\ &\implies f(x^n) \in f(I)S(I,x)^{n-1} \\ &\implies x^n \in f^{-1}\left(IS(I,x)^{n-1}\right) \\ &\implies x^n \in I(I,x)^{n-1}, \end{aligned}$$

e portanto, x é integral sobre I (bastando escrever x^n como elemento de $I(I,x)^{n-1}$ e realizar a subtração conveniente).

■

Proposição 4.3.11 (Contração)**.** *Dada uma sequência de morfismos de anéis* $R \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} B'$, *assuma uma das possibilidades:*

1. *O núcleo de f é um nilideal e B' é integral sobre $f(B)$.*

2. *B' é fielmente plano sobre B (via f).*

Então

$$A^*_{B,R} = f^{-1}\left(A^*_{B',R}\right).$$

Dem.: Considere o diagrama abaixo onde φ e φ' são os morfismos canônicos:

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_R B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f \otimes_R f"'] & B \otimes_A B \arrow[d, "f \otimes_A f"] \\
B' \otimes_R B' \arrow[r, "\varphi'"'] & B' \otimes_A B'
\end{tikzcd}$$

Este é comutativo: de fato, se $b_1 \otimes_R b_2 \in B \otimes_R B$ então

$$\begin{aligned}
\varphi' \circ \left(f \underset{R}{\otimes} f\left(b_1 \underset{R}{\otimes} b_2\right)\right) &= \varphi'\left(f(b) \underset{R}{\otimes} f(b_2)\right) \\
&= f(b_1) \underset{A}{\otimes} f(b_2) \\
&= f \underset{A}{\otimes} f\left(b_1 \underset{R}{\otimes} b_2\right) \\
&= f \underset{A}{\otimes} f\left(\varphi\left(b_1 \underset{R}{\otimes} b_2\right)\right).
\end{aligned}$$

Agora, $\ker \varphi' = f \otimes_R f\,(\ker \varphi)\,(B' \otimes_R B') = \ker \varphi\,(B' \otimes_R B')$:

- **(⊆)** Seja $h := f \circ g$. Se $x \in \ker \varphi'$ então $x = \sum y_i\,(h(a_i) \otimes_R 1 - 1 \otimes_R h(a_i))$ com $a_i \in A$, pelo Lema 4.3.1. De acordo com a definição, podemos escrever

$$h(a_i) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} h(a_i) = f \underset{R}{\otimes} f\left(g(a_i) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} g(a_i)\right),$$

e $g(a_i) \otimes_R 1 - 1 \otimes_R g(a_i) \in \ker \varphi$. Como $1 \otimes_R 1 \in B' \otimes_R B'$, é fato que

$$x \in f \underset{R}{\otimes} f\,(\ker \varphi)\left(B' \underset{R}{\otimes} B'\right).$$

- ($\supseteq$) Tome $x \in f \otimes_R f\,(\ker\varphi)\,(B' \otimes_R B')$. Assim,

$$x = \sum^{n} \left(h(a_i) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} h(a_i) \right) (b_1' \underset{R}{\otimes} b_2'),$$

implicando em

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \varphi' \left(\sum^{n} \left(h(a_i) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} h(a_i) \right) (b_1' \underset{R}{\otimes} b_2') \right) \\
&= \sum^{n} \varphi' \left(h(a_i) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} h(a_i) \right) \varphi'(b_1' \underset{R}{\otimes} b_2') \\
&= \sum^{n} 0 \cdot \varphi' \left(b_1' \underset{R}{\otimes} b_2' \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $f \otimes_R f\,(\ker\varphi)\,(B' \otimes_R B') \subseteq \ker\varphi'$.

Suponha que as condições dadas por (1) implicam no núcleo de $f \otimes_R f$ ser um nilideal. Vamos mostrar que isso é suficiente para concluirmos o resultado: de fato, pelo Lema 4.3.10 (1):[2]

$$\begin{aligned}
\overline{I} = f^{-1}\left(\overline{IS}\right) \implies \overline{\ker\varphi} &= \left(f \underset{R}{\otimes} f \right)^{-1} \left(\overline{\ker\varphi \left(B' \underset{R}{\otimes} B' \right)} \right) \\
\implies \overline{\ker\varphi} &= \left(f \underset{R}{\otimes} f \right)^{-1} \left(\overline{\ker\varphi'} \right).
\end{aligned}$$

Veja inicialmente que $(A^*)_{B',R} \subseteq B'$ e assim, $f^{-1}\left(A^*_{B',R}\right) \subseteq f^{-1}(B') \subseteq B$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\overline{\ker\varphi} = \left(f \underset{R}{\otimes} f \right)^{-1} \left(\overline{\ker\varphi'} \right) &\implies \Omega^{-1}\left(\overline{\ker\varphi}\right) = \Omega^{-1}\left(\left(f \underset{R}{\otimes} f \right)^{-1} \left(\overline{\ker\varphi'} \right) \right) \\
&\implies A^*_{B,R} = \left(f \underset{R}{\otimes} f \circ \Omega \right)^{-1} \left(\overline{\ker\varphi'} \right).
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\left(f \underset{R}{\otimes} f \circ \Omega \right)^{-1} \left(\overline{\ker\varphi'} \right) &= \left\{ x \in B; f \underset{R}{\otimes} f\,(\Omega(x)) \in \overline{\ker\varphi'} \right\} \\
&= \left\{ x \in B; f \underset{R}{\otimes} f \left(x \underset{R}{\otimes} 1_B - 1_B \underset{R}{\otimes} x \right) \in \overline{\ker\varphi'} \right\} \\
&= \left\{ x \in B; f(x) \underset{R}{\otimes} 1_{B'} - 1_{B'} \underset{R}{\otimes} f(x) \in \overline{\ker\varphi'} \right\}.
\end{aligned}$$

[2]Com $f \otimes_R f$ no papel de f, $B \otimes_R B$ no papel de R, $B' \otimes_R B'$ no papel de S e $\ker\varphi$ no papel de I

E por definição,

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(A^*_{B',R}\right) &= \left\{x \in B; f(x) \in A^*_{B',R}\right\} \\ &= \left\{x \in B; f(x) \underset{R}{\otimes} 1_{B'} - 1_{B'} \underset{R}{\otimes} f(x) \in \overline{\ker \varphi'}\right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$f^{-1}\left(A^*_{B',R}\right) \subseteq \left(f \underset{R}{\otimes} f \circ \Omega\right)^{-1}\left(\overline{\ker \varphi'}\right) = A^*_{B',R}.$$

A outra inclusão já foi feita, sendo a Proposição 4.3.5.

Nossa prova depende, portanto, da veracidade de nossa suposição; esta é mostrada quando observamos que todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de $B \otimes_R B$ é da forma $(f \otimes_R f)^{-1}(\mathfrak{q})$, para algum ideal primo $\mathfrak{q}$ em $B' \otimes_R B'$, isto é, garantimos que $\ker(f \otimes_R f)$ está contido em todos os primos e assim, é nilideal. A demonstração desse fato foge do escopo do texto, mas é válido destacar que segue diretamente de $\mathfrak{p}$ ser o núcleo de alguma aplicação de $B \otimes_R B$ num corpo algebricamente fechado (ver (BOURBAKI, 1998a) I.3) e do Corolário 4, V.§2.1 de (BOURBAKI, 1998b).

Para a hipótese (2), basta aplicarmos diretamente o Lema 4.3.10 (2) e repetir a mesma escrita feita para o item (1). ■

4.4 Convidando Rudolf ao almoço

É comum que hajam dúvidas acerca dessa nomenclatura; afinal, o que *Rudolf Lipschitz* tem a ver com a estrutura estudada (visto que, de fato, não houve citação até agora de nada que envolva a condição Lipschitz da Análise)? Tratamos como exemplo a primeira *aparição* de tal estrutura na *natureza*. Um espaço analítico X é um espaço definido num aberto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ como o conjunto dos zeros de um número finito de funções holomorfas $f_1, \ldots, f_n$ em U; o leitor interessado pode ter um contato interessante com a teoria em (SNOUSSI, 2020).

Exemplo 4.4.1. Considere a sequência de morfismos de $\mathbb{C}-$álgebras

$$\mathbb{C} \to A \to \overline{A},$$

onde A é um anel comutativo local de um espaço analítico X na origem em $\mathbb{C}^n$ e $\overline{A}$ denota sua normalização. Assim,

$$A^*_{\overline{A},\mathbb{C}} = \left\{x \in \overline{A}; x \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1 - 1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} x \in \overline{\ker \varphi}\right\}, \text{ onde } \varphi : \overline{A} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \overline{A} \to \overline{A} \underset{A}{\otimes} \overline{A}.$$

Se quisermos utilizar certa precisão histórica, pela notação utilizada por Pham e Teissier, $\tilde{A} := A^*_{\overline{A},\mathbb{C}}$. Se tomarmos geradores $(z_1, \ldots, z_n)$ do ideal maximal de A, então $z_i \otimes_{\mathbb{C}} 1 - 1 \otimes_{\mathbb{C}} z_i$ é gerador do núcleo de φ. Por (LEJEUNE-JALABERT; TEISSIER, 2008), a condição de estar ao fecho integral é equivalente à, com $h \in \overline{A}$,

$$\left|h\left(z_1, \ldots, z_n\right) - h\left(z_1', \ldots, z_n'\right)\right| \leq C \sup\left\{\left|z_i - z_i'\right|\right\}.$$

em alguma vizinhança de $(0, 0)$ em $X \times X$, que é justamente a condição de h ser Lipschitz na origem em X.

Podemos concluir novamente citando que é natural pensarmos numa "expansão" da ideia aplicada à álgebras, pensando agora em como podemos definir a estrutura no caso de ideais ou módulos. O interessante é perceber que isso termina por ser uma demonstração de que os estudos sobre estas estruturas ainda acontecem, e com certa força. A primeira definição para a Saturação Lipschitz no contexto de ideais foi dada em (GAFFNEY, 2010); mais precisamente:

Definição 4.4.2. *Seja I um ideal de $\mathcal{O}_{X,x}$, $SB_I(X)$ a saturação do blow-up e $\pi_S : SB_I(X) \to X$ a aplicação de projeção. A Saturação Lipschitz do ideal I, denotada I_S, é o ideal*

$$I_S := \left\{h \in \mathcal{O}_{X,x}; \pi_S^*(h) \in \pi_S^*(I)\right\}.$$

Novamente, uma explicação precisa do que a definição acima quer dizer fugiria, e muito, do escopo do texto. O mesmo é válido para o caso dos módulos, onde temos as primeiras definições em (GAFFNEY; SILVA, 2020):

Definição 4.4.3. *Sejam $X \subseteq \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{O}_X-$submódulo de $\mathcal{O}_X^p$. A $1-$Saturação Lipschitz de $\mathcal{M}$ em $x \in X$, denotada por $\left(\mathcal{M}_{S_1}\right)_x$, é dada por*

$$\left(\mathcal{M}_{S_1}\right)_x := \left\{h \in \mathcal{O}^p_{X,x}; h_D \in \overline{\mathcal{M}_D} \text{ em } (x, x)\right\}.$$

Referências

ATIYAH, M.; MACDONALD, I. *Introduction To Commutative Algebra*. Philadelphia, PA: Westview Press, 1994. Citado na página 9.

BOSCH, S. *Algebraic geometry and commutative algebra*. 2. ed. London, England: Springer, 2022. (Universitext). Citado 2 vezes nas páginas 9 e 72.

BOURBAKI, N. *Algebra I*. 1. ed. Berlin, Germany: Springer, 1998. Citado na página 113.

BOURBAKI, N. *Commutative Algebra*. 1. ed. Berlin, Germany: Springer, 1998. Citado na página 113.

BRANDENBURG, M. Monoidale kategorien. In: ______. *Einführung in die Kategorientheorie: Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. p. 223–273. ISBN 978-3-662-47068-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-47068-8_8>. Citado na página 96.

CIESIELSKI, K. *London mathematical society student texts: Set theory for the working mathematician series number 39*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1997. Citado na página 13.

EISENBUD, D. *Commutative algebra*. 1. ed. New York, NY: Springer, 1999. (Graduate Texts in Mathematics). Citado na página 9.

GAFFNEY, T. Bi-lipschitz equivalence, integral closure and invariants. In: ______. *Real and Complex Singularities*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. (London Mathematical Society Lecture Note Series), p. 125–137. Citado na página 114.

GAFFNEY, T.; SILVA, T. F. da. *The Lipschitz Saturation of a Module*. arXiv, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2012.12239>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 114.

LEJEUNE-JALABERT, M.; TEISSIER, B. Clôture intégrale des idéaux et équisingularité. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, Université Paul Sabatier, Institut de Mathématiques, Toulouse, v. 6e série, 17, n. 4, p. 781–859, 2008. Disponível em: <https://afst.centre-mersenne.org/articles/10.5802/afst.1203/>. Citado na página 114.

LIPMAN, J. Relative Lipschitz-saturation. *American Journal of Mathematics*, Purdue University, 1975. Disponível em: <https://www.math.purdue.edu/~jlipman/papers-older/>. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 10 e 97.

PHAM, F.; TEISSIER, B. Fractions Lipschitziennes d'une algèbre analytique complexe et saturation de Zariski, par Frédéric Pham et Bernard Teissier. 42 pages. Ce travail est la base de l'exposé de Frédéric Pham au Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970. 1969. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00384928>. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 9.

PHAM, F.; TEISSIER, B. *Lipschitz fractions of a complex analytic algebra and Zariski saturation*. arXiv, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2006.10982>. Citado na página 10.

SILVA, T. F. da. *Bi-Lipschitz invariant geometry*. Tese (Doutorado) — ICMC - USP, São Carlos, Maio de 2018. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-05022018-141238/en.php>. Citado na página 10.

SNOUSSI, J. A quick trip into local singularities of complex curves and surfaces. In: ______. *Introduction to Lipschitz Geometry of Singularities : Lecture Notes of the International School on Singularity Theory and Lipschitz Geometry, Cuernavaca, June 2018*. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 45–71. ISBN 978-3-030-61807-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-61807-0_2>. Citado na página 113.

SWANSON, I.; HUNEKE, C. *London mathematical society lecture note series: Integral closure of ideals, rings, and modules series number 336*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 75.

ZARISKI, O. General theory of saturation and of saturated local rings. III. Saturation in arbitrary dimension and, in particular, saturation of algebroid hypersurfaces. *American Journal of Mathematics*, v. 97, p. 415, 1975. Citado na página 10.