

Gustavo Panin Ramos

**Caracterização de hiperfícies com curvatura  
normal nula em  $S^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$**

Vitória

2023

Gustavo Panin Ramos

**Caracterização de hipersuperfícies com curvatura normal nula  
em  $S^n \times \mathbb{R}$  e  $H^n \times \mathbb{R}$**

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-MAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Apoenã Passos Passamani

Vitória  
2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de  
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

S677t Sobrenome do autor, Nome do autor, 1989-  
Título da obra : Subtítulo da obra / Nome do autor Sobrenome  
do autor. - 2021.  
Total de folhas f. : il.

Orientador: Nome do orientador Sobrenome do orientador.  
Coorientador: Nome do coorientador Sobrenome do  
coorientador.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade  
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Análise matemática. I. Sobrenome do orientador, Nome  
do orientador. II. Sobrenome do coorientador, Nome do  
coorientador. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro  
de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 51

---

Gustavo Panin Ramos

**Caracterização de hiperfícies com curvatura normal nula  
em  $S^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$**

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-MAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Vitória, XX de janeiro de 2023:

---

**Prof. Dr. Apoenã Passos Passamani**

Universidade Federal do Espírito Santo

Apoenã Passos Passamani

---

**Prof. Dr. Marta Jakubowicz Batoréo**

Universidade Federal do Espírito Santo

Membro Interno

---

**Prof. Dr. Irene Ignazia Onni**

Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação da Universidade de São Paulo

Membro Externo

Vitória

2023

*Dedico o presente trabalho aos meus pais, por sempre acreditarem na minha capacidade e por todo apoio e ensinamento, formando, assim, a pessoa que me tornei.*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela maravilhosa oportunidade de viver e por me dar saúde e sabedoria durante essa jornada.

Aos meus pais, Claudete e Edmar, pelo grande amor que têm por mim e por sempre me incentivarem a estudar desde pequeno. Agradeço a eles também por toda dedicação para me proporcionar um ensino de melhor qualidade, dobrando esforços para me manter em outra cidade aos 14 anos de idade. Agradeço as minhas irmãs, Daniela e Mônica, pelo apoio de sempre.

Agradeço a Bruna, por tantas ajudas, pela paciência nos momentos de ausência, pelo companheirismo e apoio nas horas mais difíceis, assim como sua família, que me acolheu e me ofereceu suporte sempre que necessário.

Agradeço ao meu orientador, Apoenã, pelos conselhos, pela paciência, pelo carinho e atenção dada em todo esse período pandêmico. Agradeço à sua esposa, Ginnara, por nos salvar sempre que nos deparávamos com alguma dúvida sobre Equações Diferenciais Ordinárias. Agradeço também ao seu filho, Joquinha, por deixar nossas tardes de orientação mais divertidas e leves.

Agradeço ao Departamento de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Ufes pela excelente formação que recebi.

Agradeço aos meus colegas, parceiros de estudos e verdadeiros professores em momentos de dúvidas: Lucas Venâncio, Matheus Haddad, Matheus Lima e Willerson Bernardino. Não poderia deixar de agradecer ao meu amigo pessoal, Brayan Ferreira, por me incentivar a iniciar o mestrado acadêmico e pelo apoio durante o curso.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Espírito Santo (FAPES) pelo apoio financeiro durante o curso de Mestrado.

*“É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem*

*derrota.”*

*(Theodore Roosevelt)*

# Resumo

Neste trabalho, são apresentados alguns resultados fundamentais da área de geometria riemanniana e alguns resultados importantes da teoria das folheações, como o Teorema de Frobenius. Entretanto, nosso foco a caracterização das hiperfícies com curvatura normal nula dos espaços  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , quando as analisamos como subvariedades de codimensão 2 dos espaços  $\mathbb{R}^{n+2}$  e  $\mathbb{H}^{n+2}$ . Tal resultado foi apresentado no artigo *On a class of hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$*  escrito por Ruy Tojeiro e o nosso objetivo é detalhar as demonstrações nele apresentadas.

**Palavras-chave:** hiperfícies de espaços produtos, Teorema de Frobenius, geometria riemanniana, hiperfícies com curvatura normal nula.



# Abstract

In this work we expose some results of the riemannian geometry and an introduction of the foliation theory, proving the Frobenius Theorem. However our focus is the description of all hypersurfaces of the spaces  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  when regarded as submanifolds with codimension two of the spaces  $\mathbb{R}^{n+2}$  and  $\mathbb{H}^{n+2}$  that have flat normal bundle curvature. This result was presented in the paper *On a class of hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$*  whose author is Ruy Tojeiro. Our objetive is detail the proves presented therein.

**Keywords:** hypersurfaces of product spaces, Theorem of Frobenius, riemannian geometry, flat normal bundle.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Campo de vetor normal à casca do cilindro . . . . .	35
Figura 2 – Interpretação geométrica de $\tilde{D}$ . . . . .	45

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS</b>	<b>13</b>
1.1	Variedades e espaços tangentes	13
1.2	Campos de Vetores e Colchetes	15
1.3	Variedades produto	16
<b>2</b>	<b>GEOMETRIA RIEMANNIANA</b>	<b>18</b>
2.1	Variedade Riemanniana	18
2.2	Conexões Afins e Conexões Riemannianas	19
2.3	Geodésicas	20
2.4	Curvaturas	22
2.5	Imersões Isométricas	25
<b>3</b>	<b>IMERSÕES EM <math>S^n</math> E <math>H^n</math></b>	<b>29</b>
3.1	Os espaços $S^n$ e $H^n$	29
3.2	Geodésicas em $S^n$ e $H^n$	30
3.3	Os espaços $S^n \times \mathbb{R}$ e $H^n \times \mathbb{R}$	32
<b>4</b>	<b>VARIEDADE INTEGRAL E FOLHEAÇÕES</b>	<b>41</b>
4.1	Curva Integral	41
4.2	Distribuição Tangente	41
4.3	Teorema de Frobenius	43
<b>5</b>	<b>HIPERFÍCIES EM <math>S^n \times \mathbb{R}</math> E <math>H^n \times \mathbb{R}</math> COM <math>R^\perp = 0</math></b>	<b>51</b>
5.1	Introdução	51
5.2	Cálculos Preliminares	53
5.3	Caracterização	58
5.4	Regularidade de $f$	71
5.5	Interpretação Geométrica	74
	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>81</b>

# Introdução

Este trabalho é resultado de um estudo sobre caracterização de imersões riemannianas com condições pré-estabelecidas do autor Ruy Tojeiro e, principalmente, sobre o seu artigo intitulado *On a class of hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* . O artigo em questão caracteriza hiperfícies, que possuem curvatura normal nula, imersas em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , com demonstrações diretas, mas, quando lidas de maneira crítica, exige um pouco mais de detalhamento entre as afirmações feitas. Nosso objetivo é detalhar essas demonstrações. Para isso, entretanto, é preciso aprofundar os estudos acerca da Geometria Riemanniana, teoria que fundamenta esses resultados.

O capítulo 1 contém conceitos e resultados de variedades diferenciáveis, que são utilizados de modo essencial no restante desta dissertação. O seu objetivo é mostrar ao leitor, exatamente, sobre quais definições e resultados estamos trabalhando.

O capítulo 2 possui um resumo dos conceitos e resultados da Geometria Riemanniana, com foco naqueles que serão mais importantes para construção dos capítulos posteriores. Além disso, a importância desse capítulo reside no fato dele fixar algumas notações que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

O capítulo 3 foi dividido em três seções. As Seções 3.1 e 3.3 trazem definições dos espaços que, posteriormente, trabalharemos com imersões sobre eles. Além disso, a Seção 3.3 apresenta alguns resultados que fazem parte da demonstração do Teorema 5.3.1, mas que foram adaptadas para essa seção para maior fluidez na leitura dessa demonstração. A Seção 3.2, por sua vez, traz a caracterização algébrica e a interpretação geométrica das geodésicas de  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$ . Tal caracterização será fundamental para a demonstração do Teorema 5.3.1, nosso principal resultado.

Além disso, para a demonstração do Teorema 5.3.1, é necessário uma versão do clássico Teorema de Frobenius para a Teoria das Folheações. O capítulo 4, portanto, tem como objetivo apresentar, resumidamente, essa teoria e demonstrar o Teorema de Frobenius.

Por fim, o capítulo 5 traz os resultados principais, aos quais foi dedicado mais tempo e estudo para compreensão. Ele está dividido em cinco seções. A Seção 5.1 traz uma breve introdução sobre o nosso ambiente de estudo, os espaços  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , fixando notações e apresentando seus elementos de maior relevância. A Seção 5.2 traz alguns resultados de extrema importância para as demonstrações posteriores, e esses serão apresentados separadamente para maior fluidez na leitura dessas demonstrações. A Seção 5.3 traz os resultados mais importantes deste trabalho: os Teoremas 5.3.1 e 5.3.8 e o Corolário 5.3.7. A Seção 5.4 propõe o estudo da regularidade pedida pelo Teorema 5.3.1

para caracterizar hiperfícies imersas em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  e a Seção 5.5 faz a interpretação geométrica desse mesmo teorema.

Vale ressaltar, novamente, que o Teorema 5.3.1 é o resultado principal dessa dissertação. Os demais resultados citados no parágrafo anterior, apesar de importantes, dependem do Teorema 5.3.1 para serem demonstrados. Ele caracteriza, de maneira geral, as hiperfícies imersas em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  cuja curvatura normal é nula. O Corolário 5.3.7 detalha essa mesma caracterização para hiperfícies de ângulo constante. O Teorema 5.3.8 também faz um detalhamento dessa caracterização, entretanto, tal detalhamento é feito para hiperfícies cuja curvatura média é constante.

Para a leitura desta dissertação, espera-se que o leitor tenha um domínio da teoria básica de variedades diferenciáveis e da geometria Riemanniana. Também, para manter este trabalho o mais auto-contido possível, mas evitando deixá-lo muito extenso, optamos por omitir as demonstrações do capítulo 1 e 2, e omitir também, no capítulo 4, as demonstrações dos resultados básicos de Variedade Integral e Folheações. Ao leitor mais exigente, sugiro que procure tais demonstrações nas referências que serão citadas em cada capítulo.

# 1 Variedades Diferenciáveis

Uma vez que a base de estudos da Geometria Riemanniana são as variedades diferenciáveis, este capítulo tem por objetivo orientar o leitor a cerca das definições e resultados que sustentam as teorias que virão nos próximos capítulos. Oriento os leitores interessados em aprofundar os estudos de variedades diferenciáveis a leitura do livro [4], que foi utilizado como referência para a escrita deste capítulo, com exceção da Seção 1.2 que foi utilizado o livro [1].

## 1.1 Variedades e espaços tangentes

**Definição 1.1.1.** Seja  $M$  um espaço topológico e  $U$  um aberto de  $M$ . Diremos que  $\mathbf{x}$  é um sistema de coordenadas locais de  $M$  se  $\mathbf{x}$  é uma bijeção entre  $U$  e um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que a dupla  $(U, \mathbf{x})$  é uma carta local se  $\mathbf{x}$  for um sistema de coordenadas. Além disso, chamaremos uma coleção de cartas locais de  $M$ , digamos  $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha) : \alpha \in A\}$ , onde  $A$  é uma coleção de índices, de um atlas diferenciável de dimensão  $n$  para  $M$ , se:

- i)  $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
- ii)  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  é um aberto para todo  $\alpha, \beta \in A$
- iii) As aplicações de mudança de coordenadas dadas por

$$\mathbf{x}_{\beta\alpha} = \mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}|_{\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$$

são difeomorfismos.

**Observação 1.1.2.** “Diferenciável” significará “de classe  $C^\infty$ ” durante todo o trabalho.

**Definição 1.1.3.** Um atlas  $\mathcal{A}$  diferenciável sobre  $M$ , diz-se maximal quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a  $\mathcal{A}$ .

**Observação 1.1.4.** Todo atlas diferenciável em  $M$  pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas maximal diferenciável, basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

**Definição 1.1.5.** Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um par ordenado  $(M^n, \mathcal{A})$ , onde  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e  $\mathcal{A}$  é um atlas máximo diferenciável de dimensão  $n$  sobre  $M^n$ .

**Exemplo 1.1.6.** O conjunto, denotado por  $\mathbb{E}^n$ , definido pelas listas do tipo  $(x_1, \dots, x_n)$ , onde  $x_i \in \mathbb{R}$  é uma variedade diferenciável.

**Definição 1.1.7.** Sejam  $M^m, N^n$  variedades diferenciáveis. Diz-se que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é diferenciável no ponto  $p \in M$  se existem sistemas de coordenadas  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ ,  $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que  $\mathbf{y} \circ f \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbf{y}(V) \subset \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $\mathbf{x}(p)$ . Diremos que  $f$  é diferenciável quando  $f$  for diferenciável em todo ponto  $p \in M$ .

**Definição 1.1.8.** Uma aplicação diferenciável  $c : I \rightarrow M$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em uma variedade diferenciável  $M$  chama-se uma curva diferenciável.

**Definição 1.1.9.** Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $p$  um ponto de  $M$ . Indicamos por  $\mathcal{C}_p$  o conjunto de todas as curvas  $\lambda : J \rightarrow M$ , definidas num intervalo  $J$ , contendo o 0, tais que  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda$  é diferenciável em 0.

**Definição 1.1.10.** Diremos que duas curvas  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$  são equivalentes, denotando por  $\lambda \sim \mu$ , quando existir um sistema de coordenadas locais  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que

$$(\mathbf{x} \circ \lambda)'(0) = (\mathbf{x} \circ \mu)'(0).$$

**Definição 1.1.11.** O conjunto quociente  $\frac{\mathcal{C}_p}{\sim}$  será indicado por  $T_pM$  e será chamado de espaço tangente à variedade  $M$  no ponto  $p$ .

**Proposição 1.1.12.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis e seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in M$  e cada  $v \in T_pM$ , escolha uma curva diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . Faça  $\beta = f \circ \alpha$ . A aplicação  $(df)_p : T_pM \rightarrow T_{(p)}N$  dada por  $(df)_p(v) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear que não depende da escolha de  $\alpha$ .

**Definição 1.1.13.** A aplicação linear  $(df)_p$  dada pela Proposição 1.1.12 é chamada diferencial de  $f$  em  $p$ .

A seguir, apresentamos um exemplo de variedade diferenciável que será permanentemente utilizado nesse trabalho.

**Exemplo 1.1.14.** Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável. O conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$$

admite atlas diferenciável. Esse conjunto munido com tal estrutura será chamado de fibrado tangente de  $M$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha); \alpha \in A\}$  um atlas diferenciável maximal de  $M$ . Indicamos por  $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$  as coordenadas de  $U_\alpha$  e por  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$  as bases associadas nos espaços tangente de  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ . Para cada  $\alpha$ , defina

$$\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$$

por

$$\mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = \left( \mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto  $(p, v) \in TM$  as coordenadas  $x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$  de  $p$  junto com as coordenadas de  $v$  na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$ .

Vamos mostrar que  $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \mathbf{y}_\alpha)\}$  é um atlas diferenciável em  $TM$ .

i) Sabemos que  $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$  e que  $(d\mathbf{x}_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{\mathbf{x}_\alpha(q)}M$ ,  $q \in U_\alpha$ , teremos que

$$\bigcup_\alpha \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM,$$

e isso mostra a primeira condição.

ii) Note que

$$\mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n \cap U_\beta \times \mathbb{R}^n) = \mathbf{y}_\alpha((U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n) = \left( \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), d\mathbf{x}_\alpha(\mathbb{R}^n) \right)$$

e isso mostra o item (ii), pois, por hipótese,  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  é um aberto para todo  $\alpha, \beta \in A$

iii) Sejam  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  e  $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$  cartas locais de  $M$ . Se

$$(p, v) \in \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{y}_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então

$$(p, v) = (\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\mathbf{x}_\beta(q_\beta), d\mathbf{x}_\beta(v_\beta)),$$

onde  $q_\alpha \in U_\alpha$ ,  $q_\beta \in U_\beta$ ,  $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$ . Portanto,

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha)(q_\alpha, v_\alpha) &= \mathbf{y}_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) \\ &= \left( (\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(q_\alpha), d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(v_\alpha) \right). \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  é diferenciável,  $d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)$  também o é, e isso prova o último item da Definição 1.1.1.

□

## 1.2 Campos de Vetores e Colchetes

**Definição 1.2.1.** Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X_p \in T_pM$ . Em termos de aplicações,  $X$  é uma aplicação de  $M$  no fibrado tangente  $TM$ . O campo é diferenciável se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é diferenciável.



**Definição 1.2.2.** Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \longleftrightarrow M$  é uma aplicação que a cada  $t \in I$  associa um vetor tangente  $V(t) \in T_{c(t)}M$ . Diz-se que  $V$  é diferenciável se para toda função diferenciável  $f$  em  $M$ , a função  $t \rightarrow V(t)f$  é uma função diferenciável em  $I$ .

**Lema 1.2.3.** Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então existe um único campo vetorial  $Z$  tal que, para toda função diferenciável  $f$  definida em  $M$ ,  $Z(f) = (XY - YX)(f)$ .

Destacamos que se  $X$  é um campo diferenciável em uma variedade diferenciável  $M$  e  $f$  é uma função diferenciável em  $M$ , então  $X(f)$  representa  $(df)(X)$ .

**Definição 1.2.4.** O campo vetorial  $Z$  dado pelo Lema 1.2.3 é chamado o colchete

$$[X, Y] = XY - YX$$

de  $X$  e  $Y$ , e dessa forma,  $Z$  é evidentemente diferenciável.

A operação colchete possui as seguintes propriedades:

**Proposição 1.2.5.** Se  $X, Y$  e  $Z$  são campos diferenciáveis em  $M$ ,  $a$  e  $b$  são números reais, e as funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis, então:

- a)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ;
- b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ;
- c)  $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ ;
- d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

### 1.3 Variedades produto

**Lema 1.3.1.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  duas variedades diferenciáveis, então o produto cartesiano

$$M \times N = \{(p, q); p \in M \text{ e } q \in N\}$$

é uma variedade diferenciável de dimensão  $m + n$  e a chamaremos de variedade produto.

*Demonstração.* De fato, considere  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  atlas maximais em  $M^m$  e  $N^n$ , respectivamente. Considere o atlas  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  formado pelos sistemas de coordenadas  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ , dados por  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})(p, q) = (\mathbf{x}(p), \mathbf{y}(q))$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$ . Considere  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{B}$ , como  $(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{y}_1) \circ (\mathbf{x} \times \mathbf{y})^{-1} = (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}^{-1}) \times (\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}^{-1})$ , segue-se que o atlas maximal que contém  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  é um atlas que define a estrutura de variedade do produto entre as variedades  $M^m$  e  $N^n$ .  $\square$

É fundamental que compreendamos o espaço tangente da variedade produto, pois as variedades às quais dedicaremos nossos estudos possuem essa estrutura. O lema a seguir irá caracterizar o espaço tangente das variedades produtos.

**Lema 1.3.2.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  duas variedades diferenciáveis. Se  $(p, q) \in M \times N$ , então  $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \oplus T_qN$ .

*Demonstração.* Considere o subespaço  $E$  formado por todos os vetores velocidade  $\lambda'(0)$  de caminhos do tipo  $\lambda(t) = (\bar{\lambda}(t), q)$ , tal que  $\bar{\lambda} \in \mathcal{C}_p$ . De modo análogo, considere o subespaço  $F$  formado por todos os vetores velocidade  $\mu'(0)$  de caminhos do tipo  $\mu(t) = (p, \bar{\mu}(t))$ , tal que  $\bar{\mu} \in \mathcal{C}_q$ . Adotando o sistema de coordenadas  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ , vemos facilmente que o isomorfismo  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})' : T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  leva  $E$  sobre  $\mathbb{R}^m \times 0$  e  $F$  sobre  $0 \times \mathbb{R}^n$ . Portanto,  $T_{(p,q)}(M \times N) = E \oplus F$ .

Seja  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$  e  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$  aplicações de projeção e  $i_{M_q} : M \rightarrow M \times q \subset M \times N$  e  $i_{N_p} : N \rightarrow p \times N \subset M \times N$  as aplicações de inclusão. Uma vez que  $\pi_1 \circ i_{M_q} = Id : M \rightarrow M$  e  $\pi_2 \circ i_{N_p} = Id : N \rightarrow N$ , podemos concluir que, pela regra da cadeia,  $i_{M_q}$  e  $i_{N_p}$  são mergulhos e  $\pi_1$  e  $\pi_2$  possuem derivadas sobrejetoras em  $(p, q)$ . Portanto,  $T_{(p,q)}(M \times q) = E$  e  $T_{(p,q)}(p \times N) = F$ . Agora basta identificarmos  $E = T_pM$  e  $F = T_qN$  por meio dos isomorfismos  $(di_{M_q})_p : T_pM \rightarrow E$  e  $(di_{N_p})_q : T_qN \rightarrow F$ .

□

## 2 Geometria Riemanniana

Esta seção tem o intuito de familiarizar o leitor a cerca da teoria que sustenta os principais resultados que iremos apresentar no capítulo 5, para isso iremos apresentar definições e resultados de suma importância para o estudo de Geometria. Contudo, não apresentaremos demonstrações da maioria destes resultados, portanto, o leitor que tiver interesse em ler as demonstrações aqui omitidas, deverá consultar [1]. Além disso, fixaremos, nesta seção, as notações que iremos utilizar no restante texto.

### 2.1 Variedade Riemanniana

**Definição 2.1.1.** Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle, \rangle$  (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .

**Definição 2.1.2.** Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de **variedade Riemanniana**.

**Definição 2.1.3.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo é chamado de **isometria** se  $\langle u, v \rangle = \langle (df)_p(u), (df)_p(v) \rangle$ , para todo  $p \in M$ ,  $u, v \in T_pM$ .

**Definição 2.1.4.** Seja  $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$  uma imersão, isto é,  $f$  é diferenciável e  $(df)_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se  $N$  tem uma estrutura Riemanniana,  $f$  induz uma estrutura Riemanniana em  $M$  por  $\langle u, v \rangle_p = \langle (df)_p(u), (df)_p(v) \rangle_{f(p)}$ ,  $u, v \in T_pM$ . A métrica de  $M$  é chamada então a **métrica induzida** por  $f$  e a função  $f$  chamada de **imersão isométrica**.

**Definição 2.1.5.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $f$  uma função real diferenciável definida em  $M$ . O **gradiente** de  $f$  é o campo vetorial em  $M$ , denotado por  $\text{grad } f$ , definido por

$$\langle \text{grad } f, v \rangle = (df)_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_pM.$$

## 2.2 Conexões Afins e Conexões Riemannianas

### Conexões Afins

Indicaremos por  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em  $M$ .

**Definição 2.2.1.** Uma *conexão afim*  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

- a)  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
- b)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- c)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ;

onde  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f$  e  $g$  são funções reais diferenciáveis definidas em  $M$ .

**Proposição 2.2.2.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \longrightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado *derivada covariante* de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que:

- a)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ ;
- b)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ , onde  $W$  é um campo de vetores ao longo de  $c$  e  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ ;
- c) Se  $V$  é induzido por um campo de vetores  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$ .

A proposição acima mostra que a escolha de uma conexão afim em  $M$  dá origem a uma derivada que satisfaz os itens (a) e (b) de campos de vetores ao longo de curvas. A noção de conexão fornece, portanto, uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas em particular, é possível falar em aceleração de uma curva em  $M$ .

**Definição 2.2.3.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \longrightarrow M$  é chamado paralelo quando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ .

**Proposição 2.2.4.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $V$ . Seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $V_0$  um vetor tangente a  $M$  em  $c(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  (i.e.  $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ ). Então existe um único campo de vetores paralelo  $V$  ao longo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ , ( $V(t)$  é chamado o transporte paralelo de  $V(t_0)$  ao longo de  $c$ ).

## Conexão Riemanniana

**Definição 2.2.5.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e uma métrica Riemanniana  $\langle, \rangle$ . A conexão  $\nabla$  é dita compatível com a métrica  $\langle, \rangle$  quando

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \text{ para todo } X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

**Definição 2.2.6.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

**Teorema 2.2.7** (Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:

- a)  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana;
- b)  $\nabla$  é simétrica.

**Definição 2.2.8.** A conexão dada pelo teorema acima é chamada de **Conexão Riemanniana** ou **Conexão de Levi-Civita** de  $M$ .

**Observação 2.2.9.** Quando consideramos o  $\mathbb{R}^n$  como nossa variedade Riemanniana, a derivada covariante  $\frac{DV}{dt}$ , associada a Conexão de Levi-Civita do  $\mathbb{R}^n$ , coincide com a derivada usual.

## 2.3 Geodésicas

**Definição 2.3.1.** Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma **geodésica em  $t_0 \in I$** , se  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  no ponto  $t_0$ ; se  $\gamma$  é geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma **geodésica**.

Se  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

isto é,  $|\gamma'(t)|$  é constante. Suporemos, de agora em diante, que  $|\gamma'(t)| = c \neq 0$ , isto é, excluiremos as geodésicas que se reduzem a pontos. O comprimento de arco  $s$  de  $\gamma$ , a partir de uma origem fixa, digamos  $t = t_0$ , é então dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

**Definição 2.3.2.** Se  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma curva parametrizada tal que existe uma reparametrização  $h : J \rightarrow I$  de forma que  $\gamma \circ h$  é uma geodésica, dizemos que  $\gamma$  é uma **pré-geodésica**.

**Exemplo 2.3.3.** Seja  $M = \mathbb{R}^n$ . Como a derivação covariante coincide com a usual, as geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, isto é, se  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $v \in T_p\mathbb{R}^n$ , então  $\gamma(s) = p + s \cdot v$  é a parametrização da geodésica que passa por  $p$  com na direção de  $v$ .

**Exemplo 2.3.4.** Se  $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a esfera unitária de dimensão  $n$ , então as geodésicas são descritas pelos círculos máximos da esfera. Uma explicação mais detalhada será apresentada no Capítulo 3, Seção 3.2.

A proposição seguinte nos mostra que se uma curva diferenciável é invariante por alguma isometria, então essa curva é uma geodésica.

**Proposição 2.3.5.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável. Se existe uma isometria  $f : M \rightarrow M$  tal que:

- i)  $f|_{\gamma(I)} = id$ ;
- ii)  $f(p) \neq p$ , para todo  $p \notin \gamma(I)$ ;

então  $\gamma$  é uma geodésica.

*Demonstração.* Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$  e  $f : M \rightarrow M$  uma isometria com as propriedades (i) e (ii). Suponha que  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow M$  é uma geodésica em  $M$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = p$  e  $\tilde{\gamma}'(0) = v$ .

Sendo  $f$  uma isometria, então  $f \circ \tilde{\gamma}$  é também uma geodésica em  $M$ . tal que  $(f \circ \tilde{\gamma})(0) = f(p)$  e  $(f \circ \tilde{\gamma})'(0) = w$ . Como  $p = \gamma(0)$ , pelo item (i), concluímos que  $(f \circ \tilde{\gamma})(0) = f(p) = p$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 (f \circ \tilde{\gamma})'(0) &= (df)_{\tilde{\gamma}(0)}(\tilde{\gamma}'(0)) \\
 &= (df)_p(v) \\
 &= (df)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\
 &= (d(f \circ \gamma))_0\left(\frac{d}{dt}\right) \\
 &= (d\gamma)_0\left(\frac{d}{dt}\right) \\
 &= \gamma'(0) \\
 &= v,
 \end{aligned}$$

isto é,  $f \circ \tilde{\gamma}$  é uma geodésica tal que  $(f \circ \tilde{\gamma})(0) = \tilde{\gamma}(0)$  e  $(f \circ \tilde{\gamma})'(0) = \tilde{\gamma}'(0)$ . Pela unicidade das geodésicas,  $f \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}$ .

Afirmamos que  $\gamma = \tilde{\gamma}$ . De fato, suponha que existe  $a \in J$  tal que  $\tilde{\gamma}(a) = q$  e  $q \notin \gamma(I)$ . Observe que, por  $f \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}$ ,

$$q = \tilde{\gamma}(a) = (f \circ \tilde{\gamma})(a) = f(q)$$

e isso contradiz a propriedade (ii) da função  $f$ . Portanto,  $\gamma$  é uma geodésica.  $\square$

## 2.4 Curvaturas

### Curvatura

**Definição 2.4.1.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \text{ com } Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Proposição 2.4.2.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

- i.  $R$  é bilinear em  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

onde  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis.

- ii. Para todo par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

onde  $Z, W \in \mathcal{X}(M)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável.

*Demonstração.* Verificaremos, primeiramente, a propriedade (i).

Seja  $X_1, X_2, Y_1, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis, pela Definição 2.4.1,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z &= \nabla_{Y_1} \nabla_{fX_1 + gX_2} Z - \nabla_{fX_1 + gX_2} \nabla_{Y_1} Z + \nabla_{[fX_1 + gX_2, Y_1]} Z \\ &= \nabla_{Y_1} \nabla_{fX_1 + gX_2} Z - f \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} Z - g \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1} Z + \nabla_{[fX_1 + gX_2, Y_1]} Z \end{aligned}$$

Calcularemos o primeiro termo da soma separadamente. Pela Definição 2.2.1,

$$\begin{aligned} \nabla_{Y_1} \nabla_{fX_1 + gX_2} Z &= \nabla_{Y_1} f \nabla_{X_1} Z + \nabla_{Y_1} g \nabla_{X_2} Z \\ &= f \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} Z + Y_1(f) \nabla_{X_1} Z + g \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} Z + Y_1(g) \nabla_{X_2} Z. \end{aligned}$$

Agora, iremos computar o último termo da soma. Pela Proposição 1.2.5,

$$\begin{aligned} \nabla_{[fX_1 + gX_2, Y_1]} Z &= \nabla_{[fX_1, Y_1] + [gX_2, Y_1]} Z \\ &= \nabla_{f[X_1, Y_1] - Y_1(f)X_1 + g[X_2, Y_1] - Y_1(g)X_2} Z \\ &= f \nabla_{[X_1, Y_1]} Z - Y_1(f) \nabla_{X_1} Z + g \nabla_{[X_2, Y_1]} Z - Y_1(g) \nabla_{X_2} Z. \end{aligned}$$

Somando ambos termos chegaremos a

$$\nabla_{Y_1} \nabla_{fX_1 + gX_2} Z + \nabla_{[fX_1 + gX_2, Y_1]} Z = f \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} Z + g \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} Z + f \nabla_{[X_1, Y_1]} Z + g \nabla_{[X_2, Y_1]} Z$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z &= f \left[ \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} Z - \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} Z + \nabla_{[X_1, Y_1]} Z \right] \\ &\quad + g \left[ \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} Z - \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1} Z + \nabla_{[X_2, Y_1]} Z \right]. \end{aligned}$$

Isso implica no que queríamos

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z = fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_2, Y_1)Z.$$

A demonstração da linearidade da segunda entrada de  $R$  é análoga a que acabamos de fazer e, portanto, será omitida.

Demonstrada a propriedade (i), iremos provar a propriedade (ii). Seja  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. A primeira parte (ii) é aplicação direta das propriedades de uma conexão afim. Quanto a segunda, pela Definição 2.2.1,

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_X \nabla_Y fZ + \nabla_{[X, Y]} fZ \\ &= \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_X \nabla_Y fZ + f \nabla_{[X, Y]} Z + [X, Y](f)Z. \end{aligned}$$

Calculando o primeiro termo da soma, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X fZ &= \nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f)Z) \\ &= f \nabla_Y \nabla_X Z + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + YX(f)Z. \end{aligned}$$



Realizando o cálculo do segundo termo, teremos

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y fZ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f)Z) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z + X(f) \nabla_Y Z + Y(f) \nabla_X Z + XY(f)Z.\end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 1.2.4 e pela Proposição 1.2.5,

$$\begin{aligned}\nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_X \nabla_Y fZ &= f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z + (YX - XY)(f)Z \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z + [Y, X](f)Z \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z - [X, Y](f)Z.\end{aligned}$$

Por fim, concluímos que

$$\begin{aligned}R(X, Y)fZ &= f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= fR(X, Y)Z.\end{aligned}$$

□

## Curvatura Seccional

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana), que passamos a definir. De agora em diante, escreveremos por conveniência,  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle X, Y, Z, T \rangle$

**Proposição 2.4.3.** Seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bi-dimensional do espaço tangente  $T_p M$  e sejam  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então

$$K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ .

**Definição 2.4.4.** Dado um ponto  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$  o número real  $K(x, y) = K(\sigma)$ , onde  $x, y$  é uma base qualquer de  $\sigma$ , é chamado **curvatura seccional** de  $\sigma$  em  $p$ .

**Proposição 2.4.5.** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p$  um ponto de  $M$ . Defina uma aplicação trilinear  $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  por

$$\langle R'(X, Y, Z), W \rangle = \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle$$

para todo  $X, Y, W, Z \in T_p M$ . Então  $M$  tem curvatura seccional constante igual a  $k_0$  se e só se  $R = k_0 R'$ , onde  $R$  é a curvatura de  $M$ .

## 2.5 Imerções Isométricas

### A Segunda Forma Fundamental

Considere as variedades riemannianas  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+m}$ . Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$  uma imersão. Então, para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f(U) \subset \overline{M}$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ . Isto quer dizer que existem uma vizinhança  $\overline{U} \subset \overline{M}$  de  $f(p)$  e um difeomorfismo  $\varphi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  em um aberto  $V$  do  $\mathbb{R}^k$ , tais que  $\varphi$  aplica difeomorficamente  $f(U) \cap \overline{U}$  em um aberto do subespaço  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ . Para simplificar a notação, identificaremos  $U$  com  $f(U)$  e cada vetor  $v \in T_q M$ ,  $q \in U$ , com  $df_q(v) \in T_{f(q)} M$ . Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em  $U$ ) de vetores de  $M$  a um campo local (isto é, definido em  $\overline{U}$ ) de vetores em  $\overline{M}$ ; se  $U$  é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo  $\varphi$ .

Para cada  $p \in T_p M$ , podemos decompor  $T_p \overline{M}$  na soma direta

$$T_p \overline{M} \approx T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

onde  $(T_p M)^\perp$  corresponde ao complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \overline{M}$ . Dessa forma, se  $v \in T_p \overline{M}$ , podemos escrever

$$v \approx v^T + v^N, \text{ onde } v^T \in T_p M \text{ e } v^N \in (T_p M)^\perp$$

Denominamos  $v^T$  a componente tangencial de  $v$  e  $v^N$  a componente normal de  $v$ . A conexão Riemanniana de  $\overline{M}$  será indicada por  $\overline{\nabla}$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $M$ , e  $\overline{X}$ ,  $\overline{Y}$  são extensões locais a  $\overline{M}$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$$

**Lema 2.5.1.** A conexão afim  $\nabla$  definida acima é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de  $M$ .

**Lema 2.5.2.** Se  $X, Y$  são campos locais em  $M$  e

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y, \tag{2.1}$$

então  $B(X, Y)$  é definido localmente e  $B(X, Y) \in (T_p M)^\perp$ . Além disso,  $B(X, Y)$  não depende das extensões  $\overline{X}, \overline{Y}$ .

No que se segue, indicaremos por  $\mathcal{X}(U)$  os campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $f(U) \approx U$ .

**Proposição 2.5.3.** Se  $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ , a aplicação  $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$  dada por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Agora, podemos definir a segunda forma fundamental. Seja  $\eta \in (TM)^\perp$ , a aplicação  $H_\eta : TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle, \quad X, Y \in TM,$$

é, pela Proposição 2.5.3, uma forma bilinear simétrica.

**Definição 2.5.4.** A forma quadrática  $II_\eta$  definida em  $TM$  por

$$II_\eta(X) = H_\eta(X, X)$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de  $f$  segundo o vetor normal  $\eta$ .

A partir da aplicação  $H_\eta$  é possível definir a seguinte aplicação:

**Definição 2.5.5.** A aplicação *auto-adjunta*  $S_\eta : TM \longrightarrow TM$  dada por

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$$

é chamada de **operador de forma** com relação ao vetor normal  $\eta$ .

A proposição seguinte nos dá uma expressão para o operador de forma em termos da derivada covariante.

**Proposição 2.5.6.** Se  $X \in TM$  e  $\eta \in (TM)^\perp$ , então

$$S_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_X \eta)^T.$$

*Demonstração.* Seja  $X \in TM$  e  $\eta \in (TM)^\perp$ . Tome  $Y \in TM$  e, portanto,

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle Y, \eta \rangle = 0 &\implies 0 = X \langle Y, \eta \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X \eta \rangle \end{aligned}$$

e, então,

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_X \eta \rangle = \left\langle Y, -(\bar{\nabla}_X \eta)^T \right\rangle.$$

Como  $Y$  foi tomado arbitrariamente em  $TM$ , o operador auto-adjunto  $S_\eta(X)$  fica unicamente definido por  $-(\bar{\nabla}_X \eta)^T$ .  $\square$

**Definição 2.5.7.** As imersões isométricas de codimensão 1, isto é,  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  são denominadas por **hiperfícies**.

Seja  $p \in M$   $\eta \in (TM)^\perp$  tal que  $|\eta| = 1$ . Como  $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$  é simétrica, existe uma base ortonormal de auto-vetores  $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$  de  $T_pM$ , onde  $e_1, \dots, e_n \in TM$ , com auto-valores reais  $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$ , isto é,  $S_\eta(e_i(p)) = \lambda_i(p)e_i(p)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definição 2.5.8.** As direções determinadas pelos  $e_{i,s}$  serão chamadas de **direções principais** de  $f$  e os  $\lambda_{i,s}$  serão chamados de **curvaturas principais** de  $f$ . Além disso,  $H = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  é denominada a **curvatura média** de  $f$ .

Vale ressaltar que em outras literaturas o termo curvatura média é utilizado para uma expressão mais intuitiva:  $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ . Entretanto, para os nossos intuítos é mais interessante definirmos como foi feito acima, uma vez que não há perda alguma em utilizá-la.

## As Equações Fundamentais

Dados  $X \in TM$  e  $\eta \in TM^\perp$ , já vimos que a componente tangente de  $\overline{\nabla}_X \eta$  é dada por  $(\overline{\nabla}_X \eta)^T = -S_\eta(X)$ . Passaremos agora a estudar a componente normal de  $\overline{\nabla}_X \eta$ , que será chamada a conexão normal  $\nabla^\perp$  da imersão. Explicitamente,

$$\nabla_X^\perp \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^N = \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^T = \overline{\nabla}_X \eta + S_\eta(X). \quad (2.2)$$

Verifica-se facilmente que a conexão normal  $\nabla^\perp$  possui as propriedades usuais de uma conexão. De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de  $\nabla^\perp$  uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada de **curvatura normal**  $R^\perp$  da imersão e é definida por

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta$$

Tudo se passa como se a geometria da imersão se decomposesse em duas geometrias: uma geometria do fibrado tangente e uma geometria do fibrado normal. Estas geometrias se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão por meio de expressões que generalizam as clássicas equações de Gauss e Codazzi da teoria das superfícies.

**Proposição 2.5.9.** Se  $M$  é uma variedade imersa em  $\overline{M}$ , chamaremos de  $R$  e  $\overline{R}$  as curvaturas de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente. Dessa maneira, as seguintes equações se verificam:

a) Equação de Gauss

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle.$$

b) Equação de Ricci

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle [S_\eta, S_\xi]X, Y \rangle.$$

onde  $[S_\eta, S_\xi]$  indica o operador  $S_\eta \circ S_\xi - S_\xi \circ S_\eta$ .

Seja  $f : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão tal que o espaço ambiente  $\bar{M}$  possui curvatura seccional constante  $k_0$ . Pelo lema 2.4.5, dado  $p \in \bar{M}$  existe uma aplicação trilinear  $R' : T_p\bar{M} \times T_p\bar{M} \times T_p\bar{M} \rightarrow T_p\bar{M}$  dada por

$$\langle R'(X, Y)Z, W \rangle = \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle$$

para todo  $X, Y, W, Z \in T_pM$ , tal que  $\bar{R} = k_0 R'$ . Aplicando essa igualdade na equação de Ricci (2.5.9),

$$\begin{aligned} \langle [S_\eta, S_\xi]X, Y \rangle &= \langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle \\ &= k_0 \langle R'(X, Y)\eta, \xi \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle \\ &= k_0 \left( \langle X, \eta \rangle \langle Y, \xi \rangle - \langle X, \xi \rangle \langle Y, \eta \rangle \right) - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle \end{aligned}$$

Uma vez que  $X, Y \in T_pM$  e  $\eta, \xi \in (T_p\bar{M})^\perp$ ,  $\langle X, \eta \rangle = \langle Y, \xi \rangle = \langle X, \xi \rangle = \langle Y, \eta \rangle = 0$ . Portanto,

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = -\langle [S_\eta, S_\xi]X, Y \rangle. \quad (2.3)$$

**Lema 2.5.10.** Seja  $f$  uma imersão que o espaço ambiente possui curvatura seccional constante. A curvatura normal de  $f$  é nula se, e somente se,  $[S_\eta, S_\xi] = 0$ , onde  $[S_\eta, S_\xi] = S_\eta \circ S_\xi - S_\xi \circ S_\eta$ .

*Demonstração.* Suponha que a curvatura normal de uma imersão é nula, isto é,  $R^\perp = 0$ . Pela equação (2.3),

$$\langle [S_\eta, S_\xi]X, Y \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = 0,$$

para todo  $X, Y \in TM$ . Logo,  $[S_\eta, S_\xi] = 0$ . Reciprocamente, se  $[S_\eta, S_\xi] = 0$ , então

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = -\langle [S_\eta, S_\xi]X, Y \rangle = 0$$

para todo  $X, Y \in TM$ . Portanto,  $R^\perp = 0$ .

□

## 3 Imersões em $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$

### 3.1 Os espaços $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$

Nesta seção, o principal objetivo é definir os espaços  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  que serão o nosso objeto de estudo. Entretanto, definiremos esses espaços baseados na definição do Espaço Euclidiano e do Espaço Lorentziano que apresentaremos agora.

**Definição 3.1.1.** O **Espaço Euclidiano**, denotado por  $\mathbb{R}^n$ , é dado pelos pontos de  $\mathbb{E}^n$  (definido no Exemplo 1.1.6) munidos com a métrica

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i,$$

onde  $u, v \in \mathbb{E}^n$ , com  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$ .

**Definição 3.1.2.** O **Espaço Lorentziano**, denotado por  $\mathbb{L}^n$ , é dado pelos pontos de  $\mathbb{E}^n$  munidos com a métrica

$$\langle u, v \rangle = -u_1 \cdot v_1 + \sum_{i=2}^n u_i \cdot v_i,$$

onde  $u, v \in \mathbb{E}^n$ , com  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$ .

Definidos esses espaços estamos aptos a definir os espaços  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$ .

**Definição 3.1.3.** O conjunto dado por

$$\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle v, v \rangle = 1\}$$

é chamado de **Esfera**  $n$ -dimensional.

**Definição 3.1.4.** O conjunto dado por

$$\mathbb{H}^n = \{v \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle v, v \rangle = -1\}$$

é chamado de **Espaço Hiperbólico**  $n$ -dimensional.

Por simplicidade, no que se segue, consideraremos  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  como  $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{H}^n$  se  $\varepsilon = 1, \varepsilon = 0$  ou  $\varepsilon = -1$ , respectivamente. Além disso, utilizaremos  $\mathbb{E}^{n+1}$  para denotar o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  e o espaço Lorentziano  $\mathbb{L}^{n+1}$ , quando  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon = -1$ , respectivamente.

Agora, apresentaremos um lema que será frequentemente utilizado a diante.

**Lema 3.1.5.** Seja  $i : \mathbb{Q}_\varepsilon^n \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$  a aplicação de inclusão. Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , então o vetor posição  $i(p) \in \left\{T_p \mathbb{Q}_\varepsilon^n\right\}^\perp$ , complemento ortogonal de  $T_p \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  em  $T_p \mathbb{E}^{n+2}$ .

*Demonstração.* Se  $v \in T_p\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , então

$$\varepsilon = \langle p, p \rangle = \langle i(p), i(p) \rangle \implies 0 = 2 \langle (di)_p(v), i(p) \rangle \implies 0 = \langle (di)_p(v), i(p) \rangle,$$

isto é,  $(di)_p(v) \perp i(p)$  para todo  $v \in T_p\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Portanto,  $i(p) \in (T_p\mathbb{Q}_\varepsilon^n)^\perp$ .  $\square$

## 3.2 Geodésicas em $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$

Entender quais são as geodésicas de  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  será fundamental para demonstrar nosso resultado principal, Teorema 5.3.1, e, portanto, essa seção será dedicada a encontrar algebricamente e geometricamente essas geodésicas. A proposição a seguir nos mostra a caracterização algébrica.

**Proposição 3.2.1.** Seja  $p \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $v$  um vetor unitário em  $T_p\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Então a curva definida em um intervalo  $I$  contendo o zero, dada por  $\beta(s) = C_\varepsilon(s)p + Z_\varepsilon(s)v$  é uma geodésica em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  com  $\beta(0) = p$  e  $\beta'(0) = v$ , onde

$$C_\varepsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ 1, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \cosh(s), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_\varepsilon(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ s, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \sinh(s), & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

*Demonstração.* Inicialmente, iremos provar que  $\beta$  é uma curva em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Se  $\varepsilon = 0$ ,  $\beta(s) = p + sv$  que, para cada  $s$ , é um ponto do  $\mathbb{R}^n$ , pois  $\mathbb{R}^n$  é fechado para a soma. Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , então pelas definições 3.1.3 e 3.1.4, basta mostrarmos que  $\langle \beta(s), \beta(s) \rangle = \varepsilon$ . Pelo Lema 3.1.5,

$$\begin{aligned} \langle \beta(s), \beta(s) \rangle &= C_\varepsilon^2(s) \langle p, p \rangle + C_\varepsilon(s) \cdot Z_\varepsilon(s) \langle p, v \rangle + Z_\varepsilon^2(s) \langle v, v \rangle \\ &= \varepsilon C_\varepsilon^2(s) + Z_\varepsilon^2(s) \\ &= \varepsilon(C_\varepsilon^2(s) + \varepsilon Z_\varepsilon^2(s)) = \varepsilon \end{aligned}$$

e, portanto,  $\beta(s) \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , para todo  $s \in I$ .

Resta provar que  $\beta$  é uma geodésica. Note que

$$C'_\varepsilon(s) = \begin{cases} -\sin(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ 0, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \sinh(s), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

e

$$Z'_\varepsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ 1, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \cosh(s), & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Isso implica que

$$C'_\varepsilon(s) = -\varepsilon Z_\varepsilon(s) \quad (3.1)$$

e

$$Z'_\varepsilon(s) = C_\varepsilon(s), \quad (3.2)$$

logo

$$\beta'(s) = C'_\varepsilon(s)p + Z'_\varepsilon(s)v = -\varepsilon Z_\varepsilon(s)p + C_\varepsilon(s)v.$$

Queremos mostrar que  $\dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = 0$ , onde  $\mathcal{B}$  é uma extensão de  $\beta'$  em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $\dot{\nabla}$  é a Conexão Riemanniana de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Considere uma imersão isométrica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  em  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Seja  $\widetilde{\nabla}$  a Conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Sabemos que  $(\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B})^T = \dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$  e, portanto, provaremos que  $(\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B})^T = 0$ .

Observe que  $\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$  é a derivada covariante de  $\beta$  em  $\mathbb{E}^{n+1}$ , que coincide com a derivada usual, isto é,

$$\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = \frac{D}{dt}\left(\frac{d\beta}{dt}\right) = -\varepsilon C_\varepsilon(s)p - \varepsilon Z_\varepsilon(s)v = -\varepsilon\beta(s).$$

Se  $\varepsilon = 0$ , nada a provar. Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , então, pelo Lema 3.1.5, o campo de vetores posição  $\beta(s) \in (T\mathbb{Q}_\varepsilon^n)^\perp$ , logo,  $\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = (\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B})^N$ , isto é,  $(\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B})^T = 0$ .  $\square$

Se  $\varepsilon = 0$ , é fácil ver que as geodésicas são retas do  $\mathbb{R}^n$ . Entretanto, para o caso em que  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  é um pouco mais complexo compreender geometricamente quem são essas geodésicas. Os resultados a seguir foram trazidos para entendermos de modo geométrico quais são as geodésicas de  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$ . Portanto, no que se segue da presente seção, consideraremos apenas os casos nos quais  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ .

As Proposições 3.2.2 e 3.2.3 são resultados que nos auxiliarão a descrever essa interpretação geométrica, que será apresentada na Proposição 3.2.4.

**Proposição 3.2.2.** Se a transformação linear  $T : \mathbb{E}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$  é uma isometria de  $\mathbb{E}^{n+1}$ , então  $T|_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$  é uma isometria de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

*Demonstração.* Considere a métrica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  como a métrica induzida por  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Portanto, por hipótese,  $T|_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$  também preserva a métrica. Resta provar que  $T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n) = \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Relembre que  $T$  sendo uma transformação linear, então  $dT = T$ . Tome  $q \in T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n)$ , logo existe  $p \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  tal que  $T(p) = q$ . Por hipótese e pelas Definições 3.1.3 e 3.1.4,

$$\varepsilon = \langle p, p \rangle = \langle dT(p), dT(p) \rangle = \langle T(p), T(p) \rangle = \langle q, q \rangle,$$

isto é,  $q \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e, portanto, uma vez que  $q$  foi tomado arbitrariamente,  $T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n) \subset \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Agora, tome  $q \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , logo existe  $p \in \mathbb{E}^{n+1}$  tal que  $T(p) = q$ . Por hipótese e pelas Definições 3.1.3 e 3.1.4,

$$\varepsilon = \langle q, q \rangle = \langle T(p), T(p) \rangle = \langle p, p \rangle,$$



isto é,  $p \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e, portanto, uma vez que  $q$  foi tomado arbitrariamente,  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \subset T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n)$ , como queríamos.  $\square$

**Proposição 3.2.3.** Seja  $\sigma$  um plano que contém a origem em  $\mathbb{E}^{n+1}$ , isto é,  $\sigma$  é um subespaço de  $\mathbb{E}^{n+1}$  com dimensão 2. Se  $T$  é uma reflexão de  $\mathbb{E}^{n+1}$  com relação ao plano  $\sigma$ , então  $T|_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$  é uma isometria de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2.2, basta mostrarmos que  $T$  é uma isometria de  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Seja  $\{v_1, v_2\}$  uma base ortonormal do plano  $\sigma$ . Tome  $v_3, \dots, v_{n+1}$  em  $\mathbb{E}^{n+1}$  de modo que  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Sabemos que se  $T$  é uma reflexão de  $\mathbb{E}^{n+1}$  com relação a  $\sigma$ , então

$$T(v_i) = \begin{cases} v_i, & \text{se } i = 1, 2 \\ -v_i, & \text{se } i = 3, \dots, n+1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Agora, devemos analisar se vale a igualdade  $\langle dT(v_i), dT(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$ , para todo  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ . Se  $i = j$ , então, por (3.3),

$$\langle dT(v_i), dT(v_j) \rangle = \langle T(v_i), T(v_i) \rangle = \langle v_i, v_i \rangle = \langle v_i, v_i \rangle.$$

Por outro lado, se  $i \neq j$ , então

$$\langle dT(v_i), dT(v_j) \rangle = \langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \pm \langle v_i, v_j \rangle = 0 = \langle v_i, v_j \rangle.$$

Portanto,  $T$  preserva o produto interno entre os vetores da base  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  e isso conclui a demonstração.  $\square$

**Proposição 3.2.4.** Se  $\sigma$  é um plano de  $\mathbb{E}^{n+1}$  que contém a origem, então  $\sigma \cap \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  é uma geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  a curva diferenciável gerada por  $\sigma \cap \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Se  $T$  é a aplicação de reflexão de  $\mathbb{E}^{n+1}$  com relação a  $\sigma$ , pela Proposição 3.2.3,  $T|_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n}$  é uma isometria de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Além disso, observe que  $T|_{\gamma(I)} = id$  e  $T(p) \neq p$ , para todo  $p \notin \gamma(I)$ . Portanto, pela Proposição 2.3.5,  $\gamma$  é uma geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .  $\square$

**Observação 3.2.5.** Os casos em que  $\varepsilon = 1$ , as geodésicas são os círculos máximos da esfera, como havíamos afirmado no Exemplo 2.3.4.

### 3.3 Os espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Os principais resultados da presente dissertação se refere a imersões isométricas sobre  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  e, portanto, é de suma importância definirmos os espaços  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ .

**Definição 3.3.1.** A variedade produto  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é dada por

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

se  $\varepsilon = 1$ . Se  $\varepsilon = -1$ , então a variedade prouto  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é dada por

$$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1\}.$$

Dadas essas definições é possível apresentar alguns resultados que serão de extrema importância para provar o Teorema 5.3.1, o principal resultado dessa dissertação. Portanto, a seguir, será exibido uma série de resultados que serão utilizados no Capítulo 5.

É importante destacar que, quando  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , analisaremos, frequentemente,  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  como uma subvariedade de  $\mathbb{E}^{n+2}$ , sendo esse o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+2}$  e o espaço Lorentziano  $\mathbb{L}^{n+2}$ , se  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon = -1$ , respectivamente. Além disso, denotaremos por  $\nabla$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\tilde{\nabla}$  as conexões de Levi-Civita das variedades riemannianas  $M^n$ ,  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{E}^{n+2}$ , respectivamente.

Como nosso objetivo é estudar hiperfícies em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  com curvatura normal nula, começaremos identificando alguns campos vetoriais relevantes. Dada uma hiperfície  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ , seja  $\eta$  um campo de vetor normal unitário e seja  $\frac{\partial}{\partial t}$  um campo de vetores unitário, constante e tangente ao segundo fator,  $\mathbb{R}$ . Então um campo de vetores  $T$  e uma função diferenciável  $\nu$  em  $M^n$  são definidos por

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_*T + \nu\eta \quad (3.4)$$

e pelo fato de  $\left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 = 1$  é possível chegar a equação

$$|f_*T|^2 + \nu^2 = 1. \quad (3.5)$$

Inicialmente, buscamos compreender, através da Proposição 3.3.2, o comportamento do campo de vetor  $T$  e da função  $\nu$  quando os derivamos.

**Proposição 3.3.2.** Dada uma hiperfície  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  e seu campo de vetores normal unitário  $\eta$ . Seja  $S_\eta$  o operador de forma de  $f$  com relação a  $\eta$ . Se  $X \in TM$ , então

$$\nabla_X T = \nu S_\eta(X) \quad (3.6)$$

e

$$X(\nu) = -\langle S_\eta(X), T \rangle. \quad (3.7)$$

*Demonstração:* Tome  $X \in TM$ . Uma vez que  $\frac{\partial}{\partial t}$  é um campo de vetores constante,  $\bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Portanto, pela igualdade (3.4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} = T + \nu\eta \implies 0 &= \bar{\nabla}_X T + \bar{\nabla}_X \nu\eta \\ &= (\bar{\nabla}_X T)^T + (\bar{\nabla}_X T)^N + X(\nu)\eta + \nu\bar{\nabla}_X \eta \\ &= (\bar{\nabla}_X T)^T + (\bar{\nabla}_X T)^N + X(\nu)\eta + \nu \left[ (\bar{\nabla}_X \eta)^T + (\bar{\nabla}_X \eta)^N \right] \\ &= (\bar{\nabla}_X T)^T + \nu(\bar{\nabla}_X \eta)^T + (\bar{\nabla}_X T)^N + X(\nu)\eta + \nu(\bar{\nabla}_X \eta)^N. \end{aligned}$$

Analizando os campos vetoriais separadamente, isto é, distinguindo os campos de  $TM$  dos campos de  $(TM)^\perp$ ,

$$(\bar{\nabla}_X T)^T + \nu(\bar{\nabla}_X \eta)^T = 0 \quad (3.8)$$

e

$$(\bar{\nabla}_X T)^N + X(\nu)\eta + \nu(\bar{\nabla}_X \eta)^N = 0. \quad (3.9)$$

Pela equação (3.8) e pela Proposição 2.5.6 concluímos que

$$(\bar{\nabla}_X T)^T = \nu \left[ -(\bar{\nabla}_X \eta)^T \right] \implies \nabla_X T = \nu S_\eta(X)$$

o que prova a igualdade (3.6).

Por outro lado, pela igualdade (3.9), pela equação dada pela Proposição 2.5.3 e pela Definição 2.5.5,

$$\begin{aligned} X(\nu)\eta = -B(X, T) - \nu(\bar{\nabla}_X \eta)^N \implies X(\nu) &= \langle X(\nu)\eta, \eta \rangle = \langle -B(X, T) - \nu(\bar{\nabla}_X \eta)^N, \eta \rangle \\ &= -\langle B(X, T), \eta \rangle - \nu \langle (\bar{\nabla}_X \eta)^N, \eta \rangle \\ &= -\langle S_\eta(X), T \rangle - \nu \langle (\bar{\nabla}_X \eta)^N, \eta \rangle \quad (3.10) \end{aligned}$$

Observe que, por  $\eta$  ser unitário,

$$\begin{aligned} 1 = \langle \eta, \eta \rangle \implies 0 = X \langle \eta, \eta \rangle \implies 0 &= \langle \bar{\nabla}_X \eta, \eta \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}_X \eta)^T, \eta \rangle + \langle (\bar{\nabla}_X \eta)^N, \eta \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}_X \eta)^N, \eta \rangle \end{aligned}$$

Portanto, pela igualdade (3.10),

$$X(\nu) = -\langle S_\eta(X), T \rangle,$$

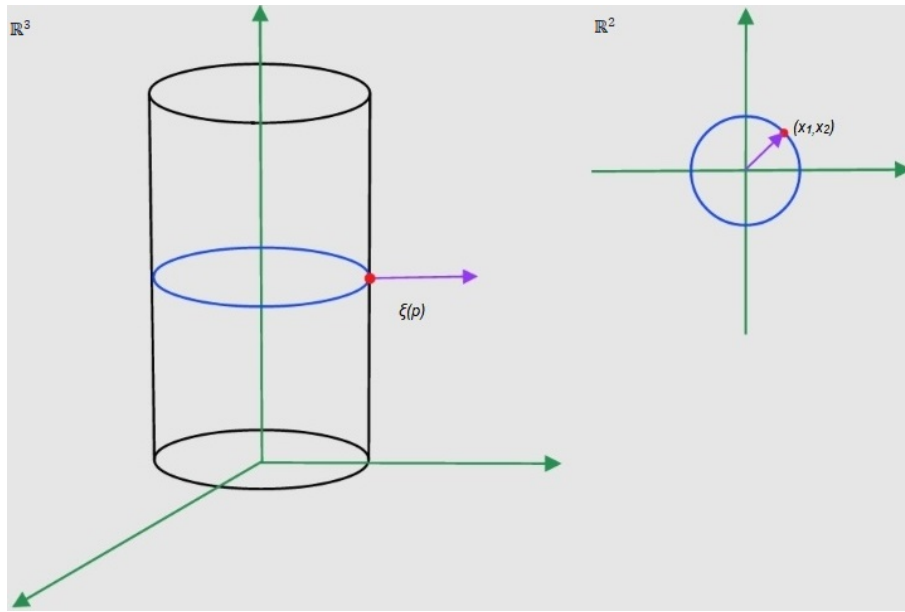
como queríamos.

□

A próxima proposição, caracteriza o operador de forma  $S_\xi$ , onde  $\xi$  é um campo de vetores unitários, apontando para fora de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$  e normal a  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ ,  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Entretanto, antes de apresentarmos essa proposição, é preciso compreender o campo  $\xi$ . O exemplo a seguir nos dará uma intuição de como descrevê-lo.

**Exemplo 3.3.3.** Considere o caso particular em que  $n = 2$  e  $\varepsilon = 1$ , isto é, estaremos no espaço  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Observe que, nesse caso,  $\xi$  é o campo de vetor radial de  $\mathbb{S}^1 \times \{t_0\}$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Portanto, se  $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , então  $\xi(p) = (x_1, x_2, 0)$ .

Figura 1 – Campo de vetor normal à casca do cilindro



Agora, iremos generalizar essa ideia.

**Lema 3.3.4.** Seja  $p = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ ,  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Então o campo  $\xi$ , dado no parágrafo anterior, pode ser definido por  $\xi(p) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$ .

*Demonstração.* Uma vez que a codimensão da subvariedade  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$  é 1, devemos mostrar que dado  $v \in T_p(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$  então  $v \perp \xi(p)$ , onde  $\xi(p) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$ .

Tome  $v \in T_p(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$  e uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ . Se denotarmos por  $\gamma_i(t)$  as funções coordenadas de  $\gamma$ , então iremos obter a seguinte igualdade:

$$(\gamma_1(0), \dots, \gamma_{n+2}(0)) = \gamma(0) = p = (x_1, \dots, x_{n+2}).$$

Pela Definição 3.3.1,

$$\varepsilon \gamma_1^2(t) + \dots + \gamma_{n+1}^2(t) = \varepsilon, \text{ para todo } t \in I$$

e derivando essa igualdade e utilizando a métrica induzida por  $\mathbb{E}^{n+2}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varepsilon\gamma_1(t)\gamma'_1(t) + \cdots + 2\gamma_{n+1}(t)\gamma'_{n+1}(t) \\ &= 2\left(\varepsilon\gamma_1(t)\gamma'_1(t) + \cdots + \gamma_{n+1}(t)\gamma'_{n+1}(t) + 0 \cdot \gamma'_{n+2}(t)\right) \\ &= 2\langle(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_{n+1}(t), 0), \gamma'(t)\rangle. \end{aligned}$$

Em particular, se fizermos  $t = 0$ ,

$$\langle\xi(p), v\rangle = \langle(x_1, \cdots, x_{n+1}, 0), \gamma'(0)\rangle = 0$$

como queríamos.  $\square$

Agora, estamos aptos a apresentar a Proposição 3.3.5. Ela é responsável pela caracterização do operador  $S_\xi$ , através de  $T$  e dos elementos de  $\{T\}^\perp$ , complemento ortogonal de  $T$  em  $TM$ .

**Proposição 3.3.5.** Seja  $S_\xi$  o operador de forma do campo vetorial  $\xi$ . Então,

$$S_\xi(T) = -\nu^2 T$$

e

$$S_\xi(X) = -X \text{ para todo } X \in \{T\}^\perp.$$

*Demonstração.* Tome  $x \in M^n$ ,  $Y \in TM$  e considere a curva parametrizada  $\gamma$  de  $I$  em  $M^n$  tal que

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \cdots, \gamma_{n+2}(s)),$$

onde  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma'(0) = Y(x)$ . Uma vez que a derivada covariante de  $\mathbb{E}^{n+2}$  coincide com a derivada usual, pela Proposição 2.2.2 (c),

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_Y \xi)(x) &= \frac{D\xi \circ \gamma}{dt}(0) = (\gamma'_1(0), \cdots, \gamma'_{n+1}(0), 0) \\ &= (\gamma'_1(0), \cdots, \gamma'_{n+2}(0)) - (0, \cdots, 0, \gamma'_{n+2}(0)) \\ &= Y(x) - (0, \cdots, 0, \gamma'_{n+2}(0)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Seja a  $\pi_n : T\mathbb{E}^{n+2} \rightarrow T\mathbb{R}$  a projeção canônica da  $n$ -ésima coordenada. Observe que

$$(0, \cdots, 0, \gamma'_{n+2}(0)) = \pi_n(Y(x)) = \left\langle Y(x), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t},$$

logo, pela igualdade (3.11) e (3.4),

$$\widetilde{\nabla}_Y \xi = Y - \left\langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} = Y - \langle Y, T + \nu\eta \rangle T - \nu \langle Y, T + \nu\eta \rangle \eta.$$

Note que omitimos a dependência dos campos a  $x$  na igualdade anterior. Isso foi feito para simplificar a notação e também omitiremos tal dependência no restante da

demonstração pelo mesmo motivo. Uma vez que  $x$  foi tomado arbitrariamente sobre  $M^n$ , isso não causará nenhum prejuízo ao que se segue.

Pela Proposição 2.5.6,

$$S_\xi(Y) = -(\widetilde{\nabla}_Y \xi)^T = \langle Y, T + \nu\eta \rangle T - Y, \text{ para todo } Y \in TM.$$

Se  $Y = T$ , então, por (3.5),

$$S_\xi(T) = \langle T, T + \nu\eta \rangle T - T = |T|^2 T - T = (|T|^2 - 1)T = -\nu^2 T,$$

o que prova a primeira igualdade. Por outro lado, se  $Y = X \in \{T\}^\perp \subset TM$ , então

$$S_\xi(X) = \langle X, T + \nu\eta \rangle T - X = \langle X, T \rangle T + \nu \langle X, \eta \rangle T - X = -X$$

e isso encerra a demonstração.  $\square$

**Observação 3.3.6.** Se  $\varepsilon = 0$ , é fácil ver que  $\xi = (0, \dots, 0, 1)$ . Dessa forma,  $\widetilde{\nabla}_Y \xi = 0$ , isto é,  $S_\xi(Y) = 0$  para todo  $Y \in TM$ .

Os resultados apresentados a seguir serão de extrema relevância para a demonstração da recíproca do Teorema 5.3.1, e por isso, já assumiremos a hipótese de que  $T$  é direção principal de  $f$  para todos os resultados restante dessa seção. Essa hipótese será irrelevante em algumas demonstração, porém sua importância surge no Lema 3.3.9.

Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  uma hiperfície. A função  $h : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(p) = \left\langle f(p), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$  é chamada de **função altura** de  $M^n$ .

**Lema 3.3.7.**  $T$  é vetor gradiente de  $h$ .

*Demonstração.* Pela Definição 2.1.5, dado  $X \in TM^n$ ,

$$h_* X = \langle \text{grad } h, X \rangle.$$

Por outro lado, por  $\frac{\partial}{\partial t}$  ser constante e por (3.4),

$$h_* X = X(h) = X \left\langle f, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle f_* X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \langle f_* X, f_* T + \nu\eta \rangle = \langle f_* X, f_* T \rangle.$$

Uma vez que  $f$  é uma imersão isométrica, concluímos que  $h_* X = \langle X, T \rangle$ , isto é,

$$\langle \text{grad } h, X \rangle = \langle T, X \rangle, \text{ para todo } X \in TM^n.$$

Portanto,  $\text{grad } h = T$  como queríamos.  $\square$

**Lema 3.3.8.** Para todo  $X, Y \in TM^n$  vale a seguinte igualdade:

$$\langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.3.7,

$$Y(h) = \langle T, Y \rangle \implies XY(h) = \langle \nabla_X T, Y \rangle + \langle T, \nabla_X Y \rangle.$$

De modo análogo,

$$YX(h) = \langle \nabla_Y T, X \rangle + \langle T, \nabla_Y X \rangle$$

e, portanto, pela simetria de  $\nabla$ ,

$$\begin{aligned} [X, Y](h) &= XY(h) - YX(h) \\ &= \langle \nabla_X T, Y \rangle + \langle T, \nabla_X Y \rangle - \langle \nabla_Y T, X \rangle - \langle T, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle \nabla_X T, Y \rangle - \langle \nabla_Y T, X \rangle + \langle T, \nabla_X Y - \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle \nabla_X T, Y \rangle - \langle \nabla_Y T, X \rangle + \langle T, [X, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_X T, Y \rangle - \langle \nabla_Y T, X \rangle + \langle \text{grad } h, [X, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_X T, Y \rangle - \langle \nabla_Y T, X \rangle + [X, Y](h). \end{aligned}$$

Por isso, concluímos que

$$\langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle$$

□

**Lema 3.3.9.** As funções  $\nu$  e  $|T|$  são constantes ao longo de  $\{T\}^\perp$ , complemento ortogonal de  $T$  em  $TM^n$ . Em outras palavras, se  $X \in \{T\}^\perp$ , então  $X(\nu) = X(|T|) = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $X \in \{T\}^\perp$ . Note que, por (3.6) e por  $S_\eta$  ser um operador auto-adjunto,

$$\begin{aligned} X(|T|) &= \frac{X(|T|^2)}{2|T|} \\ &= \frac{1}{2|T|} \cdot X \langle T, T \rangle \\ &= \frac{1}{|T|} \cdot \langle \nabla_X T, T \rangle \\ &= \frac{1}{|T|} \cdot \langle \nu S_\eta(X), T \rangle \\ &= \frac{\nu}{|T|} \cdot \langle X, S_\eta(T) \rangle \\ &= \frac{\nu c}{|T|} \cdot \langle X, T \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $c$  é um número real tal que  $S_\eta(T) = c \cdot T$ .

Utilizando, novamente, o fato de  $S_\eta$  ser auto-adjunto e por (3.7),

$$\begin{aligned} X(\nu) &= -\langle S_\eta(X), T \rangle \\ &= -\langle X, S_\eta(T) \rangle \\ &= -c \langle X, T \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

e isso prova o que queríamos.  $\square$

**Lema 3.3.10.** As curvas integrais de  $T$  são pré-geodésicas de  $M^n$ .

*Demonstração.* Primeiro note que, pelo Lema 3.3.8 e 3.3.9, se  $Y = T$  e  $X \in \{T\}^\perp$ , complemento ortogonal de  $T$  em  $TM^n$ , então

$$\langle \nabla_T T, X \rangle = \langle \nabla_X T, T \rangle = \frac{1}{2} X \langle T, T \rangle = \frac{1}{2} X(|T|^2) = 0,$$

isto é, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla_T T = c \cdot T$ .

Visto isso, seja  $\alpha : I \rightarrow M^n$  uma curva integral de  $T$  tal que  $\alpha(0) = p$ . Por hipótese,  $T$  é uma extensão de  $\alpha'$ . Suponha que  $\beta$  é a reparametrização de  $\alpha$  por comprimento de arco, logo  $\frac{T}{|T|}$  é uma extensão de  $\beta'$ . Sendo  $\hat{T} = \frac{T}{|T|}$ , queremos mostra que

$$\nabla_{\hat{T}} \hat{T} = 0,$$

isto é, mostraremos que  $\beta$  é uma geodésica de  $M^n$ . Computando essa conexão teremos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{T}} \hat{T} &= \frac{1}{|T|} \nabla_T \frac{T}{|T|} \\ &= \frac{1}{|T|} \left[ \frac{1}{|T|} \nabla_T T + T \left( \frac{1}{|T|} \right) \cdot T \right] \\ &= \frac{1}{|T|} \left[ \frac{c}{|T|} T - \frac{T(|T|)}{|T|^2} \cdot T \right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Devemos calcular a derivada  $T(|T|)$ :

$$\begin{aligned} T(|T|) &= T(\langle T, T \rangle^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} T(\langle T, T \rangle) \cdot \frac{1}{\langle T, T \rangle^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \langle \nabla_T T, T \rangle \cdot \frac{1}{|T|} \\ &= \frac{\langle \nabla_T T, T \rangle}{|T|} \\ &= \frac{\langle cT, T \rangle}{|T|} \\ &= c|T|. \end{aligned}$$



Substituindo essa derivada em (3.12),

$$\begin{aligned}\nabla_{\hat{T}}\hat{T} &= \frac{1}{|T|} \left[ \frac{c}{|T|} T - \frac{c|T|}{|T|^2} \cdot T \right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

como queríamos. □

## 4 Variedade Integral e Folheações

Este capítulo tem por objetivo familiarizar o leitor com os conceitos e resultados de Distribuições Tangentes. Aqui trataremos os resultados com mais seriedade, pois essa teoria é o pilar para demonstrar o nosso principal resultado (Teorema 5.3.1). O principal resultado deste capítulo é um resultado clássico conhecido como Teorema de Frobenius. Para fundamentar tudo que será dito neste capítulo, utilizamos como referência [3] e [5].

### 4.1 Curva Integral

**Definição 4.1.1.** Seja  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow M$  é dita *curva integral* de  $X$ , se  $\gamma'(\gamma(t)) = X(\gamma(t))$ .

O resultado a seguir é um corolário imediato do Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.1.2** (Existência e Unicidade). Seja  $X$  um campo diferenciável de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ , e seja  $p \in M$ . Então existem uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$ , um intervalo  $(-\delta, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , e uma aplicação diferenciável  $\Phi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$  tais que a curva  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  dada por  $t \mapsto \Phi(t, q)$ ,  $q \in U$ , é a única curva que satisfaz  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = X(\Phi(t, q))$  e  $\Phi(0, q) = q$ .

A aplicação  $\Phi$  do teorema acima é chamada *fluxo de  $X$*  e a curva  $\gamma$  é chamada de *trajetória de  $X$*  que passa por  $q$ .

### 4.2 Distribuição Tangente

**Definição 4.2.1.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Uma *distribuição tangente  $k$ -dimensional* é uma aplicação  $D$  que associa a cada  $p \in M$  a um subespaço  $D_p$  de dimensão  $k$  de  $T_p M$ .

**Exemplo 4.2.2.** Considere o  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  como uma variedade diferenciável. Parametrize-o com coordenadas esféricas, isto é,  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$  dado por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi, \rho) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi).$$

Definiremos a distribuição tangente  $D$  como sendo aquela que associa a cada ponto  $p = (\theta_0, \phi_0, \rho_0) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  ao subespaço vetorial gerado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta}(p) &= (-\rho_0 \operatorname{sen} \phi_0 \operatorname{sen} \theta_0)\hat{\mathbf{i}} + (\rho_0 \operatorname{sen} \phi_0 \cos \theta_0)\hat{\mathbf{j}} \\ \frac{\partial}{\partial \phi}(p) &= (\rho_0 \cos \phi_0 \cos \theta_0)\hat{\mathbf{i}} + (\rho_0 \cos \phi_0 \operatorname{sen} \theta_0)\hat{\mathbf{j}} + (-\rho_0 \operatorname{sen} \phi_0)\hat{\mathbf{k}},\end{aligned}$$

isto é,  $D$  é uma distribuição 2-dimensional tal que  $D_p = T_p S^2 \subset T_p \mathbb{R}^3$ , onde  $S^2$  é a esfera de raio  $\rho_0$ .

**Definição 4.2.3.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $D \subset TM$  uma distribuição tangente. Uma subvariedade  $N \subset M$  é chamada de *variedade integral* de  $D$  se  $D_p = T_p N$  para todo  $p \in N$ .

**Exemplo 4.2.4.** Considere a distribuição  $D$  definida no Exemplo 4.2.2. Observe que se considerarmos  $\mathbb{S}^2$  como uma subvariedade de  $\mathbb{R}^3$ , então  $\mathbb{S}^2$  é uma Variedade Integral.

**Exemplo 4.2.5.** Seja  $X$  e  $Y$  os seguintes campos vetoriais de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned}X &= \hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{k}} \\ Y &= \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

e seja  $D$  a distribuição tal que  $D_p$  é o subespaço gerado por  $X(p)$  e  $Y(p)$ . Observe que  $D$  não possui variedades integrais. De fato, suponha que  $N$  é uma variedade integral de  $D$  que contenha a origem. É fato que as curvas integrais de  $X$  e  $Y$  que comecem em  $N$  devem pertencer a  $N$  num tempo  $t$  suficientemente pequeno. Observe que  $X(0) = \hat{\mathbf{i}}$ , isto é, a curva integral de  $X$  que começa em 0 está sobre o eixo  $x$ . Portanto, existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que se  $\delta > |x|$ , então  $(x, 0, 0) \in N$ . Por outro lado, as curvas integrais de  $Y$  que comecem em  $(x, 0, 0)$  são paralelas ao eixo  $y$ . Portanto, existe  $\delta > \varepsilon > 0$  tal que se  $\varepsilon > |x|, |y|$ , então  $(x, y, 0) \in N$ , isto é,  $N$  contém parte do plano  $xy$ . No entanto, os planos tangentes aos pontos que estão na intersecção entre plano  $xy$ , sem o eixo  $x$ , e  $N$  não estão contidos em  $D$ .

O exemplo acima nos mostra a existência de distribuições que não estão associadas a uma variedade integral. A proposição a seguir nos mostra a razão pelo qual isso acontece.

**Definição 4.2.6.** Se dado  $X, Y \in D$ , então  $[X, Y] \in D$ , dizemos que  $D$  é uma *distribuição involutiva*. Além disso, dizemos que  $D$  é uma *distribuição completamente integrável* da variedade  $M$  se para cada  $p \in M$  existe uma variedade integral de  $D$ .

**Proposição 4.2.7.** Toda distribuição integrável é involutiva.

*Demonstração.* Suponha que  $D$  é uma distribuição integrável de  $M$ . Tome  $p \in M$ , logo existe uma subvariedade  $N$  tal que  $p \in N$  e  $D_q = T_q N$  para todo  $q \in N$ . Por definição,

$$T_p N = \{X(p) \in T_p M; (Xf)_p \equiv 0 \text{ sempre que } f \in C^\infty \text{ e } f|_N \equiv 0\}.$$

Tome  $X(p), Y(p) \in D_p = T_p N$ , logo

$$([X, Y]f)_p = X((Yf)_p) - Y((Xf)_p) = X(0) - Y(0) = 0.$$

Portanto,  $[X, Y](p) \in D_p$ . □

A Proposição que acabamos de ver nos mostra uma condição necessária para que uma distribuição seja integrável. Dessa forma, retornando ao exemplo 4.2.5, observe que  $YX = XY = 0$  e, portanto,  $[X, Y] = 0$ , isso implica em  $[X, Y] \notin D$ . Isto é,  $D$  não é involutiva, reafirmando o fato de  $D$  não ser integrável.

### 4.3 Teorema de Frobenius

O Teorema de Frobenius determina condições suficientes e necessárias para que um distribuição seja completamente integrável.

**Teorema 4.3.1** (Teorema de Frobenius). Se  $D$  é uma distribuição  $k$ -dimensional em  $M^n$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a)  $D$  é completamente integrável
- b)  $D$  é involutiva
- c) Para cada  $x_0 \in M$  existem um vizinhança  $U$  de  $x_0$  e um difeomorfismo  $f : U \rightarrow (-1, 1)^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  tal que os subconjuntos de  $U$  definidos pelos pontos  $q \in U$  tais que  $f_{k+1}(q) = c_{k+1}, \dots, f_n(q) = c_n$ , onde  $c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , são subvariedades integrais de  $D$ .

*Demonstração.* a) implica b) é a Proposição 4.2.7.

c) implica a) é imediato.

Iremos provar b) implica c) por indução em  $k$ . Para  $k = 1$  temos o seguinte lema:

**Lema 4.3.2** (Teorema do Fluxo Tubular Curto). Seja  $X$  um campo vetorial diferenciável definido num aberto  $U \subset M$ , tal que  $X(x_0) \neq 0$ ,  $x_0 \in U$ . Então existem uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $M$  e um difeomorfismo  $f : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{D}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $\mathcal{D}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} ; \|x\| < 1\}$ , tal que  $f_*X = (1, 0, \dots, 0)$ . Em particular, as curvas integrais de  $X$  em  $V$  são definidas pelos pontos  $q \in V$  tais que  $f_2(q) = c_2, \dots, f_n(q) = c_n$ , onde  $c_2, \dots, c_n$  são constantes reais.

*Demonstração.* Suponha que  $X$  é um campo vetorial diferenciável definido num aberto  $U \subset M$ , tal que  $X(x_0) \neq 0$ ,  $x_0 \in U$ . Seja  $\mathcal{D}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} ; \|x\| < 1\}$ , como  $X(x_0) \neq 0$ , existe um mergulho  $\varphi : \mathcal{D}^{n-1} \rightarrow M$  tal que  $\varphi(0) = x_0$  e

$$W_{X(x_0)} \oplus (D\varphi)_{x=0}(\mathbb{R}^{n-1}) = T_{x_0}M$$

onde  $W_{X(x_0)}$  é um subespaço de dimensão 1 de  $T_{x_0}M$  gerado por  $X(x_0)$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $\Phi_t$ , fluxo de  $X$  (Teorema 4.1.2), está definido em  $(-\delta, \delta) \times \varphi(D^{n-1})$ , onde  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno. Defina  $\Psi : (-\delta, \delta) \times D^{n-1} \rightarrow M$  tal que  $\Psi(t, x) = \Phi_t(\varphi(x))$ .

Provaremos que  $(D\Psi)_{(0,0)}$  é um isomorfismo:

I)  $\varphi$  ser um mergulho implica em  $(D\varphi)_{x=0}$  ser injetora, que por sua vez, implica em  $(D)_{(0,0)}$  também ser injetora;

II) Observe que

$$(D\Psi)_{(0,0)}(0, v) = \left( D(\Phi_0 \circ \varphi) \right)_{x=0}(v) = (D\varphi)_{x=0}(v), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Isto é,  $(D\Psi)_{(0,0)}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = (D\varphi)_{x=0}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Por outro lado, sendo  $\frac{\partial}{\partial t}$  um campo de vetor unitário positivo de  $\mathbb{R}$ ,

$$(D\Psi)_{(0,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, 0\right) = \left(\frac{d}{dt}(\Phi_t \circ \varphi(0))\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}(\Phi_t(x_0))\right)_{t=0} = X(x_0)$$

e, portanto,  $(D\Psi)_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \{0\}) = W_{X(x_0)}$ . Desse modo, concluímos que

$$\begin{aligned} (D\Psi)_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}) &= (D\Psi)_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \{0\}) \oplus (D\Psi)_{(0,0)}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \\ &= W_{X(x_0)} \oplus (D\varphi)_{x=0}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ &= T_{x_0}M, \end{aligned}$$

isto é,  $(D\Psi)_{(0,0)}$  é sobrejetor.

$\therefore (D\Psi)_{(0,0)}$  é um isomorfismo

Pelo Teorema da Função Inversa, existem  $\varepsilon > 0$  (sem perda de generalidade tomaremos  $\varepsilon < \delta$ ) e um disco  $\tilde{D}$  com centro na origem tais que  $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \tilde{D} \rightarrow M$  é um difeomorfismo sobre sua imagem  $\Psi((-\varepsilon, \varepsilon) \times \tilde{D}) := V$ . A inversa de  $\Psi$  chamaremos de  $f$  e é dada por  $f : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times \tilde{D}$ . É fácil ver que  $f_*X = (1, 0, \dots, 0)$  e isso encerra a demonstração desse lema.  $\square$

Suponha que b) implica c) para distribuições de dimensão  $l$ , onde  $l \in \{1, \dots, k\}$ . Seja  $D$  uma distribuição tangente de dimensão  $k$  em  $M^n$ . Tome  $x_0 \in M$  e um sistema de coordenadas locais  $\mathbf{x} : U \rightarrow W$  definido de uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $M$  a um aberto  $W$  contendo 0 em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{x}(x_0) = 0$ . Dito isso, vale destacar que daqui em diante utilizaremos um abuso de notação e faremos a identificação  $x_0 = 0$  e  $U = W$ , dessa forma enxergaremos cada ponto em  $U$  como sendo a sua imagem em  $W$  pelo sistema de coordenadas. Como o problema é essencialmente local, podemos supor que  $D$  é uma distribuição tangente definida em  $W$ .

Sejam  $X^1, \dots, X^k$  campos de vetores diferenciáveis definidos numa vizinhança  $V \subset W$  de 0, tais que  $\{X^1(p), \dots, X^k(p)\}$  é uma base de  $D_p$ , para todo  $p \in V$ . Como  $X^k(0) \neq 0$ , o subespaço  $E^\perp$  de  $\mathbb{R}^n$ , ortogonal a  $X^k(0)$  em  $\mathbb{R}^n$ , possui dimensão  $n - 1$ . Diminuindo  $V$  se necessário, podemos supor que para todo  $p \in V$ ,  $X^k(p) \notin E^\perp$ , isto é,  $X^k(p)$  possui uma componente não nula na direção de  $X^k(0)$ .

Considere a distribuição tangente  $\widetilde{D}$  definida por  $\widetilde{D}_p = D_p \cap E^\perp$ , para todo  $p \in E^\perp \cap V$ . Definindo  $\widetilde{D}$  dessa forma,  $\widetilde{D}_p$  representa todos os vetores de  $D_p$  que não possuem componente na direção de  $X^k(p)$ , pois  $X^k(p)$  possui componente na direção de  $X^k(0)$  e  $X^k(0) \notin E^\perp$ . Geometricamente, isso significa que todo  $v \in \widetilde{D}_p$  é linearmente independente do vetor tangente à órbita de  $X^k(p)$ , para todo  $p \in E^\perp \cap V$ .

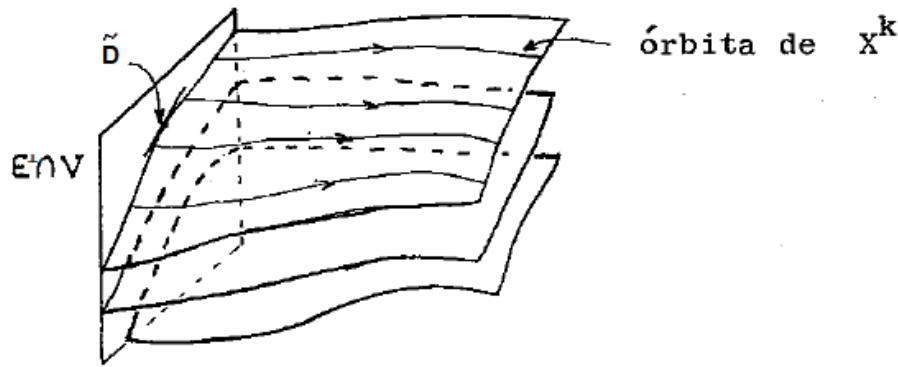


Figura 2 – Interpretação geométrica de  $\widetilde{D}$ .

Fonte: [5], página 17 (modificado).

Afirmamos que  $\widetilde{D}$  é uma distribuição tangente involutiva. De fato, suponha que  $X^k(0) = e_n = (0, \dots, 0, 1)$ , logo  $E^\perp$  pode ser escrito por

$$E^\perp = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}.$$

Escrevendo  $X^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$  podemos definir o campo vetorial  $Y^j : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  dados por  $Y^j = X^j - c^j X^k$ , onde  $c^j = \frac{\alpha_n^j}{\alpha_n^k}$ . Observe que  $\{Y^1(p), \dots, Y^{k-1}(p)\}$  é uma base de  $\widetilde{D}_p$ , para todo  $p \in E^\perp \cap V$ .

Tome  $X, Y \in \widetilde{D}$ , logo  $X = \sum_{i=1}^{n-1} a_i Y^i$  e  $Y = \sum_{j=1}^{n-1} b_j Y^j$ , onde  $a_i$  e  $b_j$  são funções diferenciáveis definidas em  $E^\perp \cap V$ . Queremos provar que  $[X, Y] \in \widetilde{D}$ , então, pela

Proposição 1.2.5,

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \left[ \sum_{i=1}^{k-1} a_i Y^i, \sum_{j=1}^{k-1} b_j Y^j \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left[ a_i Y^i, \sum_{j=1}^{k-1} b_j Y^j \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} [a_i Y^i, b_j Y^j] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \left( a_i b_j [Y^i, Y^j] + a_i Y^i (b_j) Y^j - b_j Y^j (a_i) Y^i \right)
\end{aligned}$$

Uma vez que  $Y^i, Y^j \in \widetilde{D}$ , basta provarmos que  $[Y^i, Y^j] \in \widetilde{D}$ . Sabemos que  $[Y^i, Y^j] \in D$ , pois  $D$  é involutiva e  $Y^i, Y^j \in D$ . Por outro lado, como  $Y^i, Y^j \in E^\perp$ , então, escrevendo-os como combinação linear dos campos coordenados, teremos que

$$\begin{aligned}
[Y^i, Y^j] &= \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \frac{\partial}{\partial_i}, \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \frac{\partial}{\partial_j} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \xi_i \frac{\partial}{\partial_i}, \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \frac{\partial}{\partial_j} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \xi_i \frac{\partial}{\partial_i}, \nu_j \frac{\partial}{\partial_j} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \xi_i \nu_j \left[ \frac{\partial}{\partial_i}, \frac{\partial}{\partial_j} \right] + \xi_i \frac{\partial}{\partial_i} (\nu_j) \frac{\partial}{\partial_j} - \nu_j \frac{\partial}{\partial_j} (\xi_i) \frac{\partial}{\partial_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \xi_i \frac{\partial}{\partial_i} (\nu_j) \frac{\partial}{\partial_j} - \nu_j \frac{\partial}{\partial_j} (\xi_i) \frac{\partial}{\partial_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \xi_i \frac{\partial}{\partial_i} (\nu_i) - \nu_i \frac{\partial}{\partial_i} (\xi_i) \right) \frac{\partial}{\partial_i}.
\end{aligned}$$

Isto é,  $[Y^i, Y^j] \in E^\perp$ , pois  $[Y^i, Y^j]$  não possui componente em  $\frac{\partial}{\partial_n}$ , o que conclui a demonstração da afirmação.

Denote por  $E = \mathbf{x}^{-1}(E^\perp)$  a subvariedade  $(n-1)$ -dimensional de  $M$ . Por hipótese de indução, existem uma vizinhança  $V_1$  de  $x_0$  em  $E$  e um difeomorfismo  $g : V_1 \rightarrow (-1, 1)^{n-1}$ ,  $g = (g_1, \dots, g_{n-1})$  tal que os subconjuntos de  $V_1$  definidos pelos pontos  $q \in V_1$  tais que  $f_k(q) = c_k, \dots, f_{n-1}(q) = c_{n-1}$ , onde  $c_k, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , são subvariedades integrais de  $\widetilde{D}$  em  $V_1$ .

Seja  $\varphi = g^{-1} : (-1, 1)^{n-1} \rightarrow V_1$  e  $\Phi_t$ , fluxo de  $X^k$  (Teorema 4.1.2), definido em  $(-\delta, \delta) \times V_1$ , onde  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno. Defina  $\Psi : (-\delta, \delta) \times (-1, 1)^{n-1} \rightarrow M$  tal que  $\Psi(t, x) = \Phi_t(\varphi(x))$ .

Provaremos que  $(D\Psi)_{(0,0)}$  é um isomorfismo:

I)  $\varphi$  ser um difeomorfismo implica em  $(D\varphi)_{x=0}$  ser injetora, que por sua vez, implica em  $(D\Phi)_{(0,0)}$  também ser injetora;

II) Observe que

$$(D\Psi)_{(0,0)}(0, v) = \left( D(\Phi_0 \circ \varphi) \right)_{x=0}(v) = (D\varphi)_{x=0}(v), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Isto é,  $(D\Psi)_{(0,0)}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = (D\varphi)_{x=0}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Por outro lado, sendo  $\frac{\partial}{\partial t}$  um campo de vetor unitário positivo de  $\mathbb{R}$ ,

$$(D\Psi)_{(0,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, 0\right) = \left(\frac{d}{dt}(\Phi_t \circ \varphi(0))\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}(\Phi_t(x_0))\right)_{t=0} = X^k(x_0)$$

e, portanto,  $(D\Psi)_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \{0\}) = \text{span}\{X^k(x_0)\}$ . Desse modo, concluímos que

$$\begin{aligned} (D\Psi)_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}) &= (D\Psi)_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \{0\}) \oplus (D\Psi)_{(0,0)}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \\ &= \text{span}\{X^k(x_0)\} \oplus (D\varphi)_{x=0}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ &= T_{x_0}M, \end{aligned}$$

isto é,  $(D\Psi)_{(0,0)}$  é sobrejetor.

$\therefore (D\Psi)_{(0,0)}$  é um isomorfismo

Pelo Teorema da Função Inversa, existem  $\varepsilon > 0$  (sem perda de generalidade tomaremos  $\varepsilon < \delta$ ) e uma vizinhança  $U \subset (-1, 1)^{n-1}$  de 0 tais que  $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$  é um difeomorfismo sobre sua imagem  $\Psi((-\varepsilon, \varepsilon) \times \widetilde{D}) := W$ . A inversa de  $\Psi$  chamaremos de  $f$  e é dada por  $f : W \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times U$ . Escrevamos  $f = (\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha : W \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) : W \rightarrow U$ .

Resta provar que os subconjuntos de  $U$  definidos pelos pontos  $q \in U$  tais que  $f_{k+1}(q) = c_{k+1}, \dots, f_n(q) = c_n$ , onde  $c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , são subvariedades integrais de  $D$ . Para isso, basta provarmos que para todo  $p \in W$ ,

$$D_p = \{v \in \mathbb{R}^n; (d\beta_i)_p(v) = 0, k \leq i \leq n-1\} = (df)_p^{-1}(F),$$

onde  $F = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}; u_k = \dots = u_{n-1} = 0\}$ . Como  $(df)_p^{-1}(F)$  tem dimensão  $k$ , basta provarmos que  $(df)_p^{-1}(F) \subset D_p$ .

Seja  $w = (\lambda, v, 0) \in F$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $v = (v_1, \dots, v_{k-1})$  e coloquemos  $f(p) = (t, x)$ , onde  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $x \in U$ . Observe que

$$\begin{aligned} (df)_p^{-1}(w) &= (d\Psi)_{(t,y)}(\lambda, v, 0) \\ &= \left( d(\Phi \circ \varphi) \right)_{(t,y)}(\lambda, v, 0) \\ &= \lambda \frac{d}{dt}(\Phi_t(\varphi(x)))_t + (d\Phi_t)_{\varphi(x)} \circ (d\varphi)_x(v, 0) \\ &= \lambda X^k(p) + (d\Phi_t)_{\varphi(x)} \circ (d\varphi)_x(v, 0) \end{aligned}$$



Já sabemos que o primeiro termo da soma,  $\lambda X^k(p)$ , pertence a  $D_p$ . Resta provar que  $(d\Phi_t)_{\varphi(x)} \circ (d\varphi)_x(v, 0) \in D_p$ . Uma vez que  $(d\varphi)_x(v, 0) \in \widetilde{D}_{\varphi(x)}$ , podemos escrevê-lo como

$$(d\varphi)_x(v, 0) = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i Y^i(\varphi(x)),$$

onde  $\omega_i$  são funções diferenciáveis. Portanto,

$$\begin{aligned} (d\Phi_t)_{\varphi(x)} \circ (d\varphi)_x(v, 0) &= (d\Phi_t)_{\varphi(x)} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i Y^i(\varphi(x)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i (d\Phi_t)_{\varphi(x)} (Y^i(\varphi(x))), \end{aligned}$$

isto é, se provarmos que  $(d\Phi_t)_q(Y^i(q)) \in D_p$ , para todo  $q \in E^\perp \cap W$  e  $1 \leq i \leq k-1$ , encerramos a demonstração. Em outras palavras, resta provar que

$$(\Phi_t)_* Y^i(p) \in D_p, \text{ para todo } p \in W \text{ e } 1 \leq i \leq k-1.$$

Recorde que  $Y^i = X^i - c^i X^k$ , logo

$$\begin{aligned} (\Phi_t)_* Y^i &= (\Phi_t)_* X^i - (\Phi_t)_*(c^i X^k) \\ &= (\Phi_t)_* X^i - (c^i \circ \Phi_t) \cdot (\Phi_t)_* X^k \\ &= (\Phi_t)_* X^i - (c^i \circ \Phi_t) \cdot X^k. \end{aligned}$$

Uma vez que  $X^k(p) \in D_p$ , faz-se necessário apenas mostrar que  $(\Phi_t)_* X^i(p) \in D_p$  para todo  $p \in W$  e  $1 \leq i \leq k-1$ .

Considere as curvas em  $T_p M$  dadas por  $z_i(t) = (\Phi_t)_* X^i(p)$ . **É fácil ver que, para todo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,**

$$z'_i(t) = \frac{d}{dt} \left( (\Phi_t)_* X^i \right) (p) = (\Phi_t)_* [X^k, X^i] (p).$$

Por hipótese,  $D$  é involutivo, isto é,  $[X^k, X^i] \in D$  e, portanto, existem funções  $\xi_i^j$  diferenciáveis tais que

$$[X^k, X^i] = \sum_{j=1}^k \xi_i^j X^j.$$

Utilizando  $\mu_i^j = \xi_i^j \circ \Phi_t$ , teremos

$$\begin{aligned}
 z_i'(t) &= (\Phi_t)_*(\xi_i^k X^k(p)) + (\Phi_t)_*\left(\sum_{j=1}^{k-1} \xi_i^j X^j(p)\right) \\
 &= (\xi_i^k \circ \Phi_t) \cdot (\Phi_t)_* X^k(p) + \sum_{j=1}^{k-1} (\xi_i^j \circ \Phi_t) \cdot (\Phi_t)_* X^j(p) \\
 &= (\xi_i^k \circ \Phi_t) \cdot X^k(p) + \sum_{j=1}^{k-1} (\xi_i^j \circ \Phi_t) \cdot (\Phi_t)_* X^j(p) \\
 &= \mu_i^k \cdot X^k(p) + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_i^j \cdot (\Phi_t)_* X^j(p) \\
 &= \mu_i^k \cdot X^k(p) + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_i^j \cdot z_j(t). \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

Observe que (4.1) é um sistema de equações diferenciais cujas condições iniciais são dadas por

$$z_i(0) = X^i(p) \in D_p.$$

Devemos provar que  $z_i(t) \in D_p$  para  $-\varepsilon < t < \varepsilon$  e todo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Podemos reescrever o sistema equações diferenciais (4.1) como

$$\begin{aligned}
 Z' &= A(t)Z + \mu(t), \tag{4.2} \\
 Z(0) &= (X^1(p), \dots, X^{k-1}(p)) \in (D_p)^{k-1}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 Z &= (z_1, \dots, z_{k-1}), \\
 \mu(t) &= (\mu_1^k(t)X^k(p), \dots, \mu_{k-1}^k(t)X^k(p))
 \end{aligned}$$

e

$$A(t) = \left( \sum_{j=1}^{k-1} \mu_1^j \cdot z_j(t), \dots, \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{k-1}^j \cdot z_j(t) \right).$$

Note que  $A$  deve ser uma aplicação definida por  $A : (T_p M)^{k-1} \rightarrow (T_p M)^{k-1}$ ,  $Z \in (T_p M)^{k-1}$  e  $\mu \in (D_p)^{k-1}$ .

Como é sabido de equações diferenciais [6], a solução de (4.2) pode ser obtida como limite da sequência de curvas  $\{Z_n : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (T_p M)^{k-1}\}$  definida indutivamente por  $Z_0(t) = (X^1(p), \dots, X^{k-1}(p))$  e

$$Z_{n+1}(t) = \int_0^t [A(\tau)Z_n(\tau) + \mu(\tau)] d\tau.$$

Note que  $Z_0 \in (D_p)^{k-1}$ . Além disso,  $\mu(\tau) \in (D_p)^{k-1}$  e  $A\left((D_p)^{k-1}\right) \subset (D_p)^{k-1}$  para todo  $\tau$ . É fácil ver que para todo  $n \geq 0$ ,  $Z_n(-\varepsilon, \varepsilon) \subset (D_p)^{k-1}$  e, portanto, a solução de (4.2) está contida em  $(D_p)^{k-1}$ , como queríamos.

□

**Lema 4.3.3.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Se  $p \in M$  e

$$\{T\}^\perp(p) = \{v \in T_p M; \langle v, T \rangle = 0\},$$

então a distribuição tangente  $\{T\}^\perp$  é integrável.

*Demonstração.* Pelo Teorema de Frobenius (4.3.1), basta mostrarmos que  $\{T\}^\perp$  é involutiva, isto é, se  $X, Y \in \{T\}^\perp$  mostraremos que  $[X, Y] \in \{T\}^\perp$ . Pelo Lema 3.3.7,

$$\langle [X, Y], T \rangle = \langle [X, Y], \text{grad } h \rangle = h_*[X, Y] = [X, Y](h) = X(Y(h)) - Y(X(h)).$$

Observe que, pelo mesmo argumento dado na demonstração do Lema 3.3.7,

$$Y(h) = Y \left\langle f, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle f_* Y, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \langle f_* Y, f_* T \rangle = \langle Y, T \rangle = 0.$$

Analogamente,  $X(h) = 0$ . Portanto,  $\langle [X, Y], T \rangle = 0$ , isto é,  $[X, Y] \in \{T\}^\perp$  e isso prova o Lema.

□

## 5 Hiperfícies em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com $R^\perp = 0$

### 5.1 Introdução

Este capítulo, é dedicado ao estudo de hiperfícies imersas em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que possuem curvatura normal nula. A referência que serviu como base para a escrita do presente capítulo é [7].

De modo análogo ao Capítulo 2, salvo os casos em que possa haver confusão, identificaremos  $M$  com  $f(M)$  e cada vetor  $v \in T_q M$ ,  $q \in U$ , com  $df_q(v) \in T_{f(q)} M$ . Devo destacar também que haverão momentos que utilizaremos o seguinte abuso de notação:  $f_* T = T$ . Denotaremos por  $\nabla$ ,  $\dot{\nabla}$ ,  $\ddot{\nabla}$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\widetilde{\nabla}$  as conexões de Levi-Civita das variedades riemannianas  $M^n$ ,  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{E}^{n+2}$ , respectivamente.

A proposição a seguir mostra que as hiperfícies com curvatura normal nula imersas  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  acabam sendo, precisamente, aquelas que tem  $T$  como direção principal, quando consideradas como subvariedades de  $\mathbb{E}^{n+2}$ .

**Proposição 5.1.1.** Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ ,  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , uma hiperfície. Suponha que  $T$  não é nulo para  $p \in M^n$ . Então  $f$  tem curvatura normal nula em  $p$ , considerando uma imersão isométrica em  $\mathbb{E}^{n+2}$  se, e somente se,  $T$  é uma direção principal de  $f$  em  $p$ .

*Demonstração.* Seja  $\eta$  e  $\xi$  os campos vetoriais definidos na Proposição 3.3.2 e no Lema 3.3.4, respectivamente. Pelo Lema 2.5.10, mostrar o nosso resultado é equivalente a provar que:

$$S_\eta \circ S_\xi = S_\xi \circ S_\eta \text{ se, e somente se, } T \text{ é direção de } f \text{ em } p.$$

Suponha que  $S_\eta \circ S_\xi = S_\xi \circ S_\eta$ . Queremos provar que  $T$  é direção principal de  $f$ , isto é, existe uma função  $\lambda \in C^\infty(M^n)$  tal que, dado algum  $p \in M^n$ ,  $\lambda(p)$  é um autovalor associado ao autovetor  $T(p)$  pelo operador  $S_\eta$ . No que se segue, se  $X \in TM^n$  assumamos  $X = X(p)$  e  $\lambda = \lambda(p)$ .

Seja  $\beta = \{v_1, \dots, v_n = T\}$  uma base de  $T_p M$  onde  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  é uma base de  $\{T\}^\perp(p)$ . Uma vez que  $S_\eta(T) \in T_p M$ , então  $S_\eta(T) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ . Veja que, pela Proposição 3.3.5,  $S_\xi(T) = -\nu^2 T$  e, portanto,

$$S_\xi \circ S_\eta(T) = S_\xi\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = a_n S_\xi(T) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i S_\xi(v_i) = -\nu^2 a_n T - \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i.$$

Por outro lado,

$$S_\eta \circ S_\xi(T) = S_\eta(-\nu^2 T) = -\nu^2 S_\eta(T) = -\nu^2 \sum_{i=1}^n a_i v_i = -\nu^2 a_n T - \nu^2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i.$$

Por hipótese e por (3.5),

$$\begin{aligned} S_\eta \circ S_\xi = S_\xi \circ S_\eta &\implies -\nu^2 a_n T - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(v_i) = -\nu^2 a_n T - \nu^2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i(v_i) \\ &\implies 0 = (1 - \nu^2) \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i = |T|^2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i \\ &\stackrel{T \neq 0}{\implies} \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que  $v_1, \dots, v_{n-1}$  são vetores linearmente independentes,  $a_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ . Portanto, definindo  $\lambda = a_n$ ,

$$S_\eta(T) = a_n T + \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i = \lambda T,$$

isto é,  $T$  é autovetor associado ao operador  $S_\eta$ , como queríamos.

Reciprocamente, suponha que  $T$ , não nulo, é direção principal de  $f$ , logo existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $S_\eta(T) = \lambda T$ . Queremos provar que  $S_\eta \circ S_\xi(X) = S_\xi \circ S_\eta(X)$  para todo  $X \in T_p M$ .

Seja  $\beta = \{v_1, \dots, v_n = T\}$  a base de  $T_p M$  construída anteriormente. Pela linearidade dos operadores de forma, basta provar a igualdade apenas para vetores da base  $\beta$ . Começemos por  $T$ . A partir da hipótese e da Proposição 3.3.5,

$$S_\xi \circ S_\eta(T) = S_\xi(\lambda T) = \lambda S_\xi(T) = -\lambda \nu^2 T = -\nu^2 S_\eta(T) = S_\eta(-\nu^2 T) = S_\eta \circ S_\xi(T).$$

Tome  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Por  $v_j \in \{T\}^\perp$  e  $S_\eta$  ser auto-adjunta,

$$\langle S_\eta(v_j), T \rangle = \langle v_j, S_\eta(T) \rangle = \lambda \langle v_j, T \rangle = 0.$$

Portanto,  $S_\eta(v_j) \in \{T\}^\perp$ , isto é, pela Proposição 3.3.5,  $S_\xi(S_\eta(v_j)) = -S_\eta(v_j)$ . Dessa forma,

$$S_\xi \circ S_\eta(v_j) = -S_\eta(v_j) = S_\eta(-v_j) = S_\eta \circ S_\xi(v_j)$$

e isso encerra de demonstração.  $\square$

Visto isso, nosso objetivo passa a ser caracterização de hiperfícies imersas em  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que tem  $T$  como direção principal e tal caracterização será mostrada através do Teorema 5.3.1.

## 5.2 Cálculos Preliminares

A fim de deixar a demonstração do Teorema 5.3.1 mais direta e fluida, traremos nessa seção alguns resultados que serão necessários para provar esse Teorema. Considere uma hiperfície  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e defina

$$f : M^n = M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$$

onde

$$f(x, s) = g_s(x) + a(s) \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.1)$$

sendo  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável com derivada positiva no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  e  $g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  uma família de hiperfícies paralelas a  $g$  tal que

$$g_s(x) = C_\varepsilon(s)g(x) + Z_\varepsilon(s)N(x)$$

onde  $N(x)$  é um campo vetorial normal a  $g$ ,

$$C_\varepsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ 1, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \cosh(s), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_\varepsilon(s) = \begin{cases} \operatorname{sen}(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ s, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \operatorname{senh}(s), & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Recorde que  $\eta$  é um campo de vetor normal unitário e  $\frac{\partial}{\partial t}$  é um campo de vetores unitário, constante e tangente a  $\mathbb{R}$ . Além disso, nós definimos um campo de vetores  $T$  e uma função diferenciável  $\nu$  em  $M^n$  através da igualdade

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_*T + \nu\eta.$$

Os principais elementos da demonstração da ida do Teorema 5.3.1 serão a descrição do campo vetorial  $\eta$  e, a partir dela, a caracterização da função  $\nu$  e do campo de vetores  $T$  por meio da igualdade acima. Contudo, antes de descrevermos  $\eta$ , será necessário o cálculo de algumas derivadas.

**Lema 5.2.1.** Seja  $f$  a função dada por (5.1). Se  $\frac{\partial}{\partial s}$  é o campo de vetores unitários de  $TI$ , então

$$f_*X = g_{s*}X, \text{ para todo } X \in TM^{n-1}, \quad (5.2)$$

e

$$f_*\frac{\partial}{\partial s} = N_s + a'(s)\frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.3)$$

*Demonstração.* Tome  $X \in T(M^{n-1} \times I)$ , como  $T(M^{n-1} \times I) \approx TM^{n-1} \oplus TI$ , então  $X \approx X_1 + X_2$  para algum  $X_1 \in TM^{n-1}$  e  $X_2 \in TI$ . Dito isso, denotando  $g_s(x)$  por  $G(x, s)$ ,

$$f_*X = G_*X + a_*X_2 \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$= G_*X + a_* \left( k \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial t}, \text{ para algum } k \in \mathbb{R}$$

$$= G_*X + ka'(s) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Calculando  $G_*X$  separadamente,

$$\begin{aligned} G_*X &= [C_{\varepsilon_*}X_2]g + C_\varepsilon(s)[g_*X_1] + [Z_{\varepsilon_*}X_2]N + Z_\varepsilon(s)\nabla_{X_1}N \\ &= \left[ C_{\varepsilon_*} \left( k \frac{\partial}{\partial s} \right) \right]g + C_\varepsilon[g_*X_1] + \left[ Z_{\varepsilon_*} \left( k \frac{\partial}{\partial s} \right) \right]N + Z_\varepsilon\nabla_{X_1}N \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$= kC'_\varepsilon(s) \cdot g + C_\varepsilon(s)[g_*X_1] + kZ'_\varepsilon(s) \cdot N + Z_\varepsilon(s)\nabla_{X_1}N \quad (5.7)$$

Agora, observe que, por (3.2) e (3.2),

$$G_*X = -\varepsilon k Z_\varepsilon(s) \cdot g + C_\varepsilon(s) \cdot g_*X_1 + k C_\varepsilon(s) \cdot N + Z_\varepsilon(s) \nabla_{X_1} N. \quad (5.8)$$

Definindo

$$N_s(x) = -\varepsilon Z_\varepsilon(s)g(x) + C_\varepsilon(s)N(x), \quad (5.9)$$

concluimos, pelas igualdades (5.5), (5.8) e (5.9), que

$$f_*X = kN_s + C_\varepsilon(s)g_*X_1 + Z_\varepsilon(s)\nabla_{X_1}N + ka'(s) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Veja que se  $X \in TM^{n-1}$ , então  $X_2 = 0$  e, por (5.4),

$$f_*X = G_*X + a_*(0) \frac{\partial}{\partial t}$$

isto é,

$$\boxed{f_*X = g_{s_*}X, \text{ para todo } X \in TM^{n-1}.}$$

Por outro lado, se  $X = \frac{\partial}{\partial s}(s)$ , então  $X_1 = 0$ ,  $k = 1$  e, por 5.10,

$$f_* \frac{\partial}{\partial s} = N_s + C_\varepsilon(s)g_*(0) + Z_\varepsilon(s)\nabla_0N(x) + a'(s) \frac{\partial}{\partial t},$$

isto é,

$$\boxed{f_* \frac{\partial}{\partial s} = N_s + a'(s) \frac{\partial}{\partial t}.}$$

□

Uma vez que a projeção canônica de  $f$  sobre  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  é  $g_s$ , é natural pensarmos que a componente de  $\eta$  em  $T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  seja um múltiplo de um campo de vetores normal a  $T(g_s(M^{n-1}))$  em  $T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Logo, para caracterizarmos  $\eta$  é interessante encontrarmos um campo vetorial normal a  $T(g_s(M^{n-1}))$  em  $T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Como a dimensão de  $T(g_s(M^{n-1}))$  é  $n - 1$ , esse campo representará a direção da componente de  $\eta$  que pertence a  $T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

**Lema 5.2.2.** O campo vetorial  $N_s$ , definido em (5.9), é unitário e normal a  $T(g_s(M^{n-1}))$ .

*Demonstração.* Primeiro, provaremos que  $N_s$  é normal a  $T(g_s(M^{n-1}))$ . Fixe  $s_0 \in I$  e seja  $X \in TM^n$ . Já que  $s_0$  está fixo, então  $C_{\varepsilon*} \frac{\partial}{\partial s} = Z_{\varepsilon*} \frac{\partial}{\partial s} = 0$  e, por (5.6),

$$g_{s_0*}X = C_\varepsilon(s_0)g_*X + Z_\varepsilon(s_0)\nabla_X N.$$

No que se segue, considere o  $g$  como um campo de vetores posição. Dito isso,

$$\begin{aligned} \langle N_{s_0}, g_{s_0*}X \rangle &= \langle -\varepsilon Z_\varepsilon(s_0)g + C_\varepsilon(s_0)N, C_\varepsilon(s_0)g_*X + Z_\varepsilon(s_0)\nabla_X N \rangle \\ &= -\varepsilon Z_\varepsilon(s_0)C_\varepsilon(s_0) \langle g, g_*X \rangle - \varepsilon Z_\varepsilon^2(s_0) \langle g, \nabla_X N \rangle \\ &\quad + C_\varepsilon^2(s_0) \langle N, g_*X \rangle + C_\varepsilon(s_0)Z_\varepsilon(s_0) \langle N, \nabla_X N \rangle. \end{aligned}$$

Observe que  $\langle N, g_*X \rangle = 0$ , pois  $N$  é normal a  $g$ . Além disso,  $N$  é unitário e portanto,

$$1 = |N|^2 = \langle N, N \rangle \implies 2 \langle N, \nabla_X N \rangle = 0 \implies$$

$$\langle N, \nabla_X N \rangle = 0. \quad (5.11)$$

Dessa forma,

$$\langle N_{s_0}, g_{s_0*}X \rangle = -\varepsilon Z_\varepsilon(s_0)C_\varepsilon(s_0) \langle g, g_*X \rangle - \varepsilon Z_\varepsilon^2(s_0) \langle g, \nabla_X N \rangle. \quad (5.12)$$

Se  $\varepsilon = 0$ , nada há provar. Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , considere inclusão de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{s_0\}$  em  $\mathbb{E}^{n+2}$ , então, pelo Lema 3.1.5,

$$\langle g, g_*X \rangle = \langle g, \nabla_X N \rangle = 0, \quad (5.13)$$

uma vez que  $g_*X, \nabla_X N \in T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Acabamos de provar que, fixado  $s_0 \in I$ ,  $\langle N_{s_0}, g_{s_0*}X \rangle = 0$ . Como  $s_0$  é arbitrário, provamos que  $\langle N_s, g_{s*}X \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ .

$$\therefore N_s \text{ é normal a } T(g_s(M^{n-1}))$$

Resta provar que  $N_s$  é unitário. Como  $N$  é, por definição, unitário e normal a  $g$ ,

$$\begin{aligned} |N_s|^2 &= \langle N_s, N_s \rangle \\ &= \langle -\varepsilon Z_\varepsilon(s)g + C_\varepsilon(s)N, -\varepsilon Z_\varepsilon(s)g + C_\varepsilon(s)N \rangle \\ &= \varepsilon^2 Z_\varepsilon^2(s)|g|^2 - 2\varepsilon Z_\varepsilon(s)C_\varepsilon(s) \langle g, N \rangle + C_\varepsilon^2(s)|N|^2 \\ &= \varepsilon^2 Z_\varepsilon^2(s)|g|^2 + C_\varepsilon^2(s). \end{aligned}$$



Se  $\varepsilon = 0$ , então

$$|N_s|^2 = (C_\varepsilon^2)_{\varepsilon=0} = 1^2 = 1. \quad (5.14)$$

Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , então  $g \in \mathbb{S}^n$  ou  $g \in \mathbb{H}^n$ , logo, considerando a inclusão de ambos em  $\mathbb{E}^{n+2}$ ,  $|g|^2 = \varepsilon$ . Portanto, utilizando que  $\cos^2(s) + \sin^2(s) = 1$  e que  $\cosh^2(s) - \sinh^2(s) = 1$ ,

$$|N_s|^2 = C_\varepsilon^2(s) + \varepsilon^2 Z_\varepsilon^2(s) |g|^2 = C_\varepsilon^2 + \varepsilon^3 Z_\varepsilon^2(s) = 1.$$

e isso encerra a demonstração.  $\square$

Finalmente, descreveremos o campo de vetores  $\eta$  normal a  $f$ . Como tínhamos comentado anteriormente, espera-se que  $\eta$  tenha uma componente na direção de  $N_s$ . A outra componente deve estar, obviamente, na direção de  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Dito isso e tendo em mente que  $T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}) \approx T\mathbb{Q}_\varepsilon^n \oplus T\mathbb{R}$ , faremos a seguinte caracterização:

$$\eta(x, s) = -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s(x) + \frac{1}{b(s)} \frac{\partial}{\partial t}, \text{ com } b(s) = \sqrt{1 + [a'(s)]^2}. \quad (5.15)$$

Contudo, ainda resta verificar se essa descrição de  $\eta$  atende ao que se era esperado desse campo antes de o descrevermos, isto é, teremos que averiguar se  $\eta$  é normal a  $f$  e se  $\eta$  é unitário.

**Lema 5.2.3.**  $\eta$  é um campo de vetores unitário e normal a  $f$ .

*Demonstração.* Primeiro, provaremos que  $\eta$  é normal a  $f$ . Sabemos, por (5.10), que se  $X \in TM^n$ , então

$$f_*X = kN_s + C_\varepsilon(s)g_*X_1 + Z_\varepsilon(s)\nabla_{X_1}N + ka'(s)\frac{\partial}{\partial t}$$

logo,

$$\begin{aligned} \langle \eta, f_*X \rangle &= \left\langle -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s + \frac{1}{b(s)} \frac{\partial}{\partial t}, kN_s + C_\varepsilon(s)g_*X_1 + Z_\varepsilon(s)\nabla_{X_1}N + ka'(s)\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= -k\frac{a'(s)}{b(s)} |N_s|^2 - \frac{a'(s)}{b(s)} C_\varepsilon(s) \langle N_s, g_*X_1 \rangle - \frac{a'(s)}{b(s)} Z_\varepsilon(s) \langle N_s, \nabla_{X_1}N \rangle \\ &\quad - k\frac{[a'(s)]^2}{b(s)} \left\langle N_s, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + k\frac{1}{b(s)} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N_s \right\rangle + \frac{1}{b(s)} C_\varepsilon(s) \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, g_*X_1 \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{b(s)} Z_\varepsilon(s) \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{X_1}N \right\rangle + k\frac{a'(s)}{b(s)} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2. \end{aligned}$$

Sabemos que  $N_s, g_*X_1, \nabla_{X_1}N \in T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e que  $\frac{\partial}{\partial t} \in T_s\mathbb{R}$ , então

$$\left\langle N_s, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, g_*X_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{X_1}N \right\rangle = 0.$$

Por outro lado, utilizando o mesmo argumento dado em (5.12),

$$\begin{aligned} \langle N_s, g_* X_1 \rangle &= \langle -\varepsilon Z_\varepsilon(s)g + C_\varepsilon(s)N, g_* X_1 \rangle \\ &= -\varepsilon Z_\varepsilon(s) \langle g, g_* X_1 \rangle + C_\varepsilon(s) \langle N, g_* X_1 \rangle \\ &= -\varepsilon Z_\varepsilon(s) \langle g, g_* X_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Além disso, por (5.11),

$$\begin{aligned} \langle N_s, \nabla_{X_1} N \rangle &= \langle -\varepsilon Z_\varepsilon(s)g + C_\varepsilon(s)N, \nabla_{X_1} N \rangle \\ &= -\varepsilon Z_\varepsilon(s) \langle g, \nabla_{X_1} N \rangle + C_\varepsilon(s) \langle N, \nabla_{X_1} N \rangle \\ &= -\varepsilon Z_\varepsilon(s) \langle g, \nabla_{X_1} N \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\nabla_{X_1} N \in TM^{n-1}$ , teremos um caso análogo a (5.12), isto é,

$$\langle N_s, \nabla_{X_1} N \rangle = -\varepsilon Z_\varepsilon(s) \langle g, \nabla_{X_1} N \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle \eta, f_* X \rangle = -k \frac{a'(s)}{b(s)} |N_s|^2 + k \frac{a'(s)}{b(s)} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 = 0.$$

$\therefore \eta$  é normal a  $f$ .

Resta provar que  $\eta$  é unitário. De fato,

$$\begin{aligned} |\eta|^2 &= \langle \eta, \eta \rangle = \left\langle -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s + \frac{1}{b(s)} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s + \frac{1}{b(s)} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{[a'(s)]^2}{b^2(s)} |N_s|^2 - 2 \frac{a'(s)}{b^2(s)} \left\langle N_s, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{b^2(s)} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 \\ &= \frac{[a(s)]^2}{b^2(s)} + \frac{1}{b^2(s)} \\ &= \frac{b^2(s)}{b^2(s)} = 1. \end{aligned}$$

$\therefore \eta$  é unitário.

□

Compreendido  $\eta$ , podemos caracterizar a função  $\nu$ .

**Corolário 5.2.4.** A função  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida através da igualdade (3.4) é dada por

$$\nu(s) = \frac{1}{b(s)}.$$

*Demonstração.* Por (3.4),

$$\begin{aligned}
 \nu &= \left\langle \eta, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\
 &= \left\langle -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s + \frac{1}{b(s)} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\
 &= -\frac{a'(s)}{b(s)} \left\langle N_s, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{b(s)} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{b(s)}.
 \end{aligned}$$

□

### 5.3 Caracterização

**Teorema 5.3.1.** A função  $f$  dada em (5.1) define, em pontos regulares, uma hiperfície que tem  $T$  como direção principal. Reciprocamente, qualquer hiperfície  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , com função ângulo diferente de zero em todo ponto e que tem  $T$  como direção principal é dada localmente dessa forma.

*Demonstração:* Suponha que  $f$  é dada como em (5.1). Queremos provar que  $T$  é direção principal de  $f$  com relação a  $\eta$ , um campo vetorial normal a  $TM^n$ , isto é,  $S_\eta(T) = \lambda T$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por (5.3),

$$\begin{aligned}
 f_*T &= \frac{\partial}{\partial t} - \nu\eta \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{b(s)} \left( -\frac{a'(s)}{b(s)} N_s + \frac{1}{b(s)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\
 &= \left( \frac{b^2(s) - 1}{b^2(s)} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{a'(s)}{b^2(s)} N_s \\
 &= \frac{[a'(s)]^2}{b^2(s)} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{a'(s)}{b^2(s)} N_s(x) \\
 &= \frac{a'(s)}{b^2(s)} \left( N_s + a'(s) \frac{\partial}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{a'(s)}{b^2(s)} f_* \frac{\partial}{\partial s} = f_* \left( \frac{a'(s)}{b^2(s)} \frac{\partial}{\partial s} \right).
 \end{aligned}$$

Como  $f$  é uma imersão,  $df$  é injetora, e concluímos que

$$T = \frac{a'(s)}{b^2(s)} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Uma vez que  $T$  é paralelo a  $\frac{\partial}{\partial s}$ , provar que  $T$  é direção principal é equivalente a provar que  $\frac{\partial}{\partial s}$  é direção principal. Portanto, provaremos que

$$S_\eta \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial s}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sendo  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  induzida pela conexão de  $\mathbb{E}^{n+2}$ ,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{a'(s)}{b(s)}\right) \cdot N_s + \frac{a'(s)}{b(s)}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}N_s + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{b(s)}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \\ &= -\left(\frac{a'(s)}{b(s)}\right)' \cdot N_s + \frac{a'(s)}{b(s)}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}N_s + \left(\frac{1}{b(s)}\right)' \cdot \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}$$

Observe que, por (3.2) e (3.2),

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}N_s &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial s}\left(Z_\varepsilon(s)\right)g - \varepsilon Z_\varepsilon(s)\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}g + \frac{\partial}{\partial s}\left(C_\varepsilon(s)\right)N + C_\varepsilon(s)\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}N \\ &= -\varepsilon Z'_\varepsilon(s)g + C'_\varepsilon(s)N \\ &= -\varepsilon C_\varepsilon(s)g - \varepsilon Z_\varepsilon(s)N \\ &= -\varepsilon\left(C_\varepsilon(s)g + Z_\varepsilon(s)N\right) \\ &= -\varepsilon g_s.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta = -\left(\frac{a'(s)}{b(s)}\right)'N_s - \varepsilon\frac{a'(s)}{b(s)}g_s + \left(\frac{1}{b(s)}\right)'\frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.16)$$

Sabemos que a codimensão de  $M^n$  em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é 1, logo todo campo vetorial normal a  $\eta$  pertence a  $TM^n$ . Dito isso,

$$1 = |\eta|^2 = \langle \eta, \eta \rangle \implies 2\langle \eta, \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta \rangle = 0 \implies \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta \in TM^n \implies \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta = \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta\right)^T,$$

então, por (2.5.6),

$$S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = -\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta. \quad (5.17)$$

Uma vez que  $TM^n \approx TM^{n-1} \oplus TI$ , devemos provar que  $S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \in TI$ , pois dessa forma  $S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$  será paralelo a  $\frac{\partial}{\partial s}$ . Para isso, mostraremos que

$$\left\langle S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), f_*X \right\rangle = 0, \text{ para todo } X \in TM^{n-1}.$$

De fato, por (5.2),

$$\begin{aligned}\left\langle S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), f_*X \right\rangle &= -\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta, f_*X \right\rangle \\ &= -\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\eta, g_{s*}X \right\rangle \\ &= -\left\langle -\left(\frac{a'(s)}{b(s)}\right)'N_s - \varepsilon\frac{a'(s)}{b(s)}g_s + \left(\frac{1}{b(s)}\right)'\frac{\partial}{\partial t}, g_{s*}X \right\rangle \\ &= \left(\frac{a'(s)}{b(s)}\right)' \langle N_s, g_{s*}X \rangle + \varepsilon\frac{a'(s)}{b(s)} \langle g_s, g_{s*}X \rangle - \left(\frac{1}{b(s)}\right)' \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, g_{s*}X \right\rangle.\end{aligned}$$

Por (5.2.2) e visto que  $g_{s_*}X \in TM^{n-1} \subset T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ ,  $\langle N_s, g_{s_*}X \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, g_{s_*}X \right\rangle = 0$ . Dessa forma,

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \eta, f_*X \right\rangle = -\frac{a'(s)}{b(s)} \langle \varepsilon g_s, g_{s_*}X \rangle.$$

Utilizando, novamente, um argumento análogo ao dado em (5.12), concluímos que  $\langle \varepsilon g_s, g_{s_*}X \rangle = 0$ . Isso prova o que havíamos afirmado, isto é,  $S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \in TI$ . Portanto, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial s}$ .

$\therefore T$  é direção principal de  $f$ .

Agora, provaremos a recíproca do Teorema. Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  uma hiperfície. Suponha que  $T$  é direção principal e  $\nu$  função não nula. Queremos provar, inicialmente, dado  $p_0 \in M^n$  existe uma vizinhança  $U \subset M^n$  de  $p_0$ , uma variedade  $M^{n-1}$ , um intervalo  $I$  contendo o zero e uma aplicação  $\psi : M^{n-1} \times I \rightarrow U$  tal que  $\psi$  é um difeomorfismo. Isto é, mostraremos que  $M^n$  pode ser escrita, localmente, como  $M^{n-1} \times I$ . Por fim, provaremos que existe uma função  $\Psi : M^{n-1} \times I \rightarrow M^n$ , tal que  $\bar{f} := f \circ \Psi : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  que é dada por (5.1).

Dado  $p_0 \in M^n$ , pelo Lema 4.3.3, sabemos que existe uma subvariedade  $N^{n-1}$  de  $M^n$ ,  $p_0 \in N^{n-1}$ , tal que  $T_p N^{n-1} = \{T\}^\perp(p)$  para todo  $p \in N^{n-1}$ . Dessa forma, existe uma aplicação  $\chi : N^{n-1} \rightarrow M^n$  que é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Por outro lado, pelo Teorema 4.1.2, para cada  $p \in \chi(N^{n-1})$  existe uma vizinhança  $V_p \subset \chi(N^{n-1})$  de  $p$ , um  $\delta > 0$  e uma aplicação  $\Phi : V_p \times (-\delta, \delta) \rightarrow \chi(N^{n-1})$  tais que a curva  $\Phi_q : (-\delta, \delta) \rightarrow \chi(N^{n-1})$  dada por  $\Phi_q(s) = \Phi(q, s)$  é uma curva integral de  $T$ , para todo  $q \in V_p$ .

**Afirmção 5.3.2.** Seja  $\psi : N^{n-1} \times (-\delta, \delta) \rightarrow M^n$  dada por  $\psi(\bar{p}, s) = \Phi(\chi(\bar{p}), s)$ . Se  $\bar{p}_0 \in N^{n-1}$  é tal que  $\chi(\bar{p}_0) = p_0$ , então existe um intervalo  $I$  contendo o zero e vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $p_0$  e  $\bar{p}_0$ , respectivamente, tais que  $\psi : V \times I \rightarrow U$ , é um difeomorfismo.

Sabemos que, para todo  $\bar{p} \in N^{n-1}$ ,  $\psi(\bar{p}, 0) = \Phi(\chi(\bar{p}), 0) = \chi(\bar{p})$ . Considere  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  uma base de  $T_{\bar{p}_0} N^{n-1}$ , logo  $\{(d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}(v_1), \dots, (d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}(v_{n-1})\}$  são vetores LI's de  $T_{p_0} M^n$ , pois  $(d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}(v_i) = (d\chi)_{\bar{p}_0}(v_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , e  $(d\chi)_{\bar{p}_0}$  é um isomorfismo sobre sua imagem.

Por outro lado, se  $\frac{\partial}{\partial s}$  é um vetor unitário tangente a  $(-\delta, \delta)$ , então  $(d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = T(p_0)$ . Visto que  $(d\chi)_{\bar{p}_0}(v_i) \in \{T\}^\perp$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , então

$$\left\{ (d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}(v_1), \dots, (d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}(v_{n-1}), (d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \right\}$$

é uma base de  $T_{p_0} M^n$ , isto é,  $(d\psi)_{(\bar{p}_0, 0)}$  é um isomorfismo. Portanto, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe um intervalo  $I$  contendo o zero e vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $p_0$  e  $\bar{p}_0$ , respectivamente, tais que  $\psi : V \times I \rightarrow U$  é um difeomorfismo, como havíamos afirmado.

**Observação 5.3.3.**

- I) Se denotarmos  $V$ , subvariedade de  $M^n$ , por  $M^{n-1}$ , então provamos que, localmente, a variedade  $M^n$  pode ser escrita como um produto  $M^{n-1} \times I$ ;
- II) Se  $x \in M^{n-1}$ , então  $\psi_x : I \rightarrow M^n$  é uma curva integral de  $T$ . Por outro lado, se  $s \in I$ , então  $\psi_s : M^{n-1} \rightarrow M^n$  é uma folheação de  $\{T\}^\perp$ .

Defina as projeções canônicas  $\pi_1 : \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $\pi_2 : \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\pi_1(x, s) = x$  e  $\pi_2(x, s) = s$ . Seja  $F := f \circ \psi : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ .

**Afirmção 5.3.4.** Se  $x \in M^{n-1}$ , então  $\pi_1 \circ F_x$  é uma pré-geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Em outras palavras,  $\alpha := \pi_1 \circ f \circ \gamma$  é uma pré-geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  para alguma curva integral  $\gamma$  de  $T$  em  $M^n$ .

O primeiro passo a ser dado será caracterizar  $\alpha'$ .

$$\alpha'(s) = (d\pi_1 \circ f)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = (d\pi_1)_{f(\gamma(s))} \left( (df)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \right)$$

Se  $v \in T_p(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$ , para algum  $p \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ , existe  $v_{\mathbb{Q}} \in T_p\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  e  $v_{\mathbb{R}} \in T_p\mathbb{R}$  tal que  $v \approx v_{\mathbb{Q}} + v_{\mathbb{R}}$ . Visto isso, observe que

$$(d\pi_1)_p(v) = (d\pi_1)_p(v_{\mathbb{Q}} + v_{\mathbb{R}}) = v_{\mathbb{Q}} \approx v - v_{\mathbb{R}} = v - \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t},$$

isto é,

$$\alpha'(s) = (df)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) - \left\langle (df)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}$$

Uma vez que  $\gamma$  é curva integral de  $T$ , podemos considerar  $T$  como uma extensão de  $\gamma'$  sobre  $M^n$ . Portanto, se definirmos

$$\mathcal{A} = f_*T - \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t},$$

então  $\mathcal{A}$  é uma extensão de  $\alpha'$  sobre  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Agora, calcularemos a norma de  $\mathcal{A}$ . Pelo fato de  $f$  ser uma imersão isométrica e

pelas equações (3.4) e (3.5), segue-se

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}|^2 &= \langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle = \left\langle f_*T - \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}, f_*T - \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\
 &= |f_*T|^2 - 2 \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle^2 + \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle^2 \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 \\
 &= |f_*T|^2 - \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle^2 \\
 &= |f_*T|^2 - |f_*T|^4 \\
 &= (1 - |T|^2)|T|^2 \\
 &= \nu^2|T|^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento  $\lambda$  de  $\alpha'$  é dado por

$$\lambda = \nu|T|. \quad (5.18)$$

Seja  $\beta$  a reparametrização por comprimento de arco de  $\alpha$ , logo  $\beta' = \frac{1}{\lambda}\alpha'$ . Dessa forma, se definirmos  $\mathcal{B} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{A}$ , então  $\mathcal{B}$  é uma extensão  $\beta'$ .

A fim de mostrar que  $\alpha$  é pré-geodésica de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , devemos provar que  $\beta$  é uma geodésica  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Essencialmente, mostraremos que

$$\dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = 0,$$

onde  $\dot{\nabla}$  é a conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Entretanto, considerando  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  como uma hiperfície de  $\mathbb{E}^{n+2}$ ,

$$\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = \overline{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} + \left(\overline{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}\right)^N \quad (5.19)$$

$$= \dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} + \ddot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} + \left(\overline{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}\right)^N \quad (5.20)$$

$$= \dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} + \left(\overline{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}\right)^N, \quad (5.21)$$

pois  $\mathcal{B} \notin T\mathbb{R}$ . Portanto,

$$\left(\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}\right)^T = \dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}.$$

Além disso, observe que

$$\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = \widetilde{\nabla}_{\frac{1}{\lambda}\left(f_*T - \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}\right)}\mathcal{B} = \frac{1}{\lambda}\left(\widetilde{\nabla}_{f_*T}\mathcal{B} - \left\langle f_*T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathcal{B}\right) = \frac{1}{\lambda}\widetilde{\nabla}_{f_*T}\mathcal{B},$$

pois  $\mathcal{B} \notin T\mathbb{R}$ . No que se segue, utilizaremos a identificação  $T = f_*T$ . Portanto,

$$\dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = \left(\widetilde{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}\right)^T = \frac{1}{\lambda}\left(\widetilde{\nabla}_T\mathcal{B}\right)^T,$$

isto é, mostrar que  $\dot{\nabla}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = 0$  é equivalente a provar que  $\left(\widetilde{\nabla}_T\mathcal{B}\right)^T = 0$ , e buscaremos a partir de agora.

**Afirmção 5.3.5.** Se  $\varepsilon = 0$ , então  $\widetilde{\nabla}_T \mathcal{B} = 0$ . Caso contrário,  $\widetilde{\nabla}_T \mathcal{B} = -\nu|T|\xi$ , onde  $\xi$  é um campo de vetores unitário e tangente ao complemento ortogonal de  $T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$  em  $T\mathbb{E}^{n+2}$ .

Seja  $\widehat{T} = \frac{T}{|T|}$ , então, por (5.18) e pela igualdade (3.4),

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\nabla}_T \mathcal{B} &= \widetilde{\nabla}_T \left( \lambda^{-1} T - \lambda^{-1} \left\langle T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} \right) \\
 &= \nu^{-1} \widetilde{\nabla}_T \widehat{T} + T(\nu^{-1}) - \widetilde{\nabla}_T \left( \lambda^{-1} \left\langle T, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} \right) \\
 &= \nu^{-1} \widetilde{\nabla}_T \widehat{T} + T(\nu^{-1}) - T(\lambda^{-1} |T|^2) \frac{\partial}{\partial t} \\
 &= \nu^{-1} \widetilde{\nabla}_T \widehat{T} + T(\nu^{-1}) - T(\lambda^{-1} |T| \cdot |T|) \frac{\partial}{\partial t} \\
 &= \nu^{-1} \widetilde{\nabla}_T \widehat{T} + T(\nu^{-1}) - T(\nu^{-1} |T|) \frac{\partial}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Calcularemos cada uma das derivadas separadamente. Pela equação (3.5),

$$\begin{aligned}
 T(\nu^{-1}) &= -\nu^{-2} T(\nu) = -\frac{\nu^{-3}}{2} (2\nu T(\nu)) = -\frac{\nu^{-3}}{2} (T(\nu^2)) \\
 &= -\frac{\nu^{-3}}{2} (T(1 - |T|^2)) = -\frac{\nu^{-3}}{2} (T(|T|^2)) \\
 &= \nu^{-3} |T| T(|T|).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, pela igualdade (3.5),

$$\begin{aligned}
 T(\nu^{-1} |T|) &= |T| T(\nu^{-1}) + \nu^{-1} T(|T|) \\
 &= \nu^{-3} |T|^2 T(|T|) + \nu^{-1} T(|T|) \\
 &= \nu^{-3} T(|T|) (|T|^2 + \nu^2) \\
 &= \nu^{-3} T(|T|)
 \end{aligned}$$

Resta calcular  $\widetilde{\nabla}_T \widehat{T}$ . Considere uma imersão de  $M^n$  sobre  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ , logo

$$\widetilde{\nabla}_T \widehat{T} = \nabla_T \widehat{T} + \left( \nabla_T \widehat{T} \right)^N \tag{5.23}$$

onde  $\left( \nabla_T \widehat{T} \right)^N \in (TM^n)^\perp$ , sendo  $(TM^n)^\perp$  complemento ortogonal de  $TM$  em  $T\mathbb{E}^{n+2}$ . Agora, observe que, pelo Lema 3.3.10,

$$\nabla_T \widehat{T} = |T| \nabla_{\widehat{T}} \widehat{T} = 0,$$

e disso segue que  $\widetilde{\nabla}_T \widehat{T} = \left( \nabla_T \widehat{T} \right)^N$ , isto é,  $\widetilde{\nabla}_T \widehat{T} \in (TM^n)^\perp$ .

Sendo  $\xi$  um campo de vetores unitário e tangente ao complemento ortogonal de  $T(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$  em  $T\mathbb{E}^{n+2}$ , então  $\xi \perp \eta$ . Uma vez que  $\dim((TM^n)^\perp) = 2$  e  $\xi, \eta \in (TM^n)^\perp$ ,



então  $\{\eta, \xi\}$  é uma base ortonormal de  $(TM^n)^\perp$ . Portanto, existem funções  $\mu_1, \mu_2 : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\widetilde{\nabla}_T \widehat{T} = \mu_1 \cdot \eta + \mu_2 \cdot \xi.$$

Utilizando o campo dado por (2.1), chegamos a seguinte igualdade

$$\widetilde{\nabla}_T \widehat{T} = (\nabla_T \widehat{T})^N = B(T, \widehat{T}).$$

Portanto, pelo Lema 3.3.2 e por (2.5.5),

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \langle B(T, \widehat{T}), \eta \rangle = \langle \widehat{T}, S_\eta(T) \rangle = \left\langle \widehat{T}, \frac{1}{\nu} \nabla_T T \right\rangle \\ &= \frac{1}{\nu |T|} \langle T, \nabla_T T \rangle = \frac{1}{2\nu |T|} T \langle T, T \rangle = \frac{1}{2\nu |T|} T(|T|^2) \\ &= \frac{1}{2\nu |T|} (2|T| \cdot T(|T|)) \\ &= \nu^{-1} |T|. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , pelo Lema 3.3.5 e por (2.5.5),

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \langle B(T, \widehat{T}), \xi \rangle = \langle \widehat{T}, S_\xi(T) \rangle = \langle \widehat{T}, -\nu^2 T \rangle \\ &= \frac{-\nu^2}{|T|} \langle T, T \rangle = -\frac{\nu^2}{|T|} |T|^2 \\ &= -\nu^2 |T|. \end{aligned}$$

Se  $\varepsilon = 0$ , pela Observação 3.3.6,  $\mu_2 = 0$ . Concluimos que

$$\widetilde{\nabla}_T \widehat{T} = \frac{1}{\nu} T(|T|) \cdot \eta - \nu^2 |T| \cdot \xi, \text{ se } \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

e

$$\widetilde{\nabla}_T \widehat{T} = \frac{1}{\nu} T(|T|) \cdot \eta, \text{ se } \varepsilon = 0.$$

Por fim, basta substituímos todas as derivadas na equação (5.22). Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , então

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T \mathcal{B} &= \nu^{-1} (\nu^{-1} T(|T|) \cdot \eta - \nu^2 |T| \cdot \xi) + \nu^{-3} |T| T(|T|) \cdot \frac{T}{|T|} - \nu^{-3} T(|T|) (T + \nu \eta) \\ &= -\nu |T| \xi. \end{aligned}$$

Se  $\varepsilon = 0$ , então  $\widetilde{\nabla}_T \mathcal{B} = 0$  e isso mostra o que havíamos afirmado.

Por essa afirmação, é fácil ver que

$$(\widetilde{\nabla}_T \mathcal{B})^T = 0$$

e isso prova que  $\alpha$  é pré-geodésica.

Finalmente, nos encaminharemos para a parte final da demonstração do Teorema. Gostaríamos de redefinir  $\bar{f}$  de modo que  $\alpha$  se torne uma geodésica, isto é, devemos reparametrizar  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

Uma vez que  $|T|$  e  $\nu$  são constantes ao longo de  $\{T\}^\perp$ , como mostrado pelo Lema 3.3.9, então  $|T|$  e  $\nu$  só dependem da variável  $s$ . Portanto, existe uma função diferenciável  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$r(s) = (|T| \cdot \nu) \circ \psi(x, s).$$

Perceba que, por (5.18),  $r(s) = |\alpha'(s)|$ , logo o comprimento de arco de  $\alpha$  é dado por

$$\varphi(s) = \int_0^s r(\sigma) d\sigma.$$

Defina  $\bar{f} : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  tal que  $\bar{f}(x, z) = f \circ \psi(x, z)$ , onde  $z = \varphi^{-1}(s)$ . Dessa forma, podemos definir  $g(x) = \pi_1 \circ \bar{f}(x, 0)$  e  $g_z(x) = \pi_1 \circ \bar{f}(x, z)$ .

Veja que

$$\bar{f}(x, z) = \pi_1 \circ \bar{f}(x, z) + \pi_2 \circ \bar{f}(x, z) = g_z(x) + \left\langle \bar{f}(x, z), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.24)$$

A fim de provar que  $f$  pode ser dada por (5.1), façamos a seguinte afirmação.

**Afirmção 5.3.6.**  $\left\langle \bar{f}(x, z), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = a(z)$  para alguma função diferenciável  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

De fato, se  $X \in TM^{n-1}$ , então, por (3.4) e por  $f$  ser uma imersão isométrica,

$$X \left\langle \bar{f}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle f_*(\psi_*X), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle f_*(\psi_*X), f_*T \right\rangle = \langle \psi_*X, T \rangle = 0, \quad (5.25)$$

pois,  $\psi(x, 0)$  é uma variedade integral de  $\{T\}^\perp$ . Portanto, existe uma função diferenciável  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\left\langle \bar{f}(x, s), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \rho(s)$ . Sendo  $\varphi^{-1}(s) = z$ , concluímos que  $a(z) = \rho(\varphi^{-1}(s))$ .

Resta provar que  $g_z(x) = C_\varepsilon(z)g(x) + Z_\varepsilon(z)N(x)$ . Dado  $x_0 \in M^{n-1}$ , observe que

$$g_z(x_0) = \pi_1 \circ f \circ \psi_{x_0}(\varphi^{-1}(s)) = \alpha(\varphi^{-1}(s)) = \beta(z).$$

Sabemos, pela Proposição 3.2.1, que as geodésicas  $\bar{\beta}$  em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  tais que  $\bar{\beta}(0) = p$  e  $\bar{\beta}'(0) = v$  são dadas por

$$\bar{\beta}(z) = C_\varepsilon(z)p + Z_\varepsilon(z)v.$$

Logo, pela unicidade das geodésicas, basta provar que  $\beta(0) = g(x_0)$  e  $\beta'(0) = N(x_0)$ . A primeira igualdade vem do simples fato de que

$$\beta(0) = \pi_1 \circ \bar{f}(x_0, 0) = g(x_0).$$

Entretanto, a segunda igualdade exige um pouco mais de cuidado. Observe que

$$\beta'(0) = d\left(\pi_1 \circ f \circ \psi(x_0, z)\right)_{z=0} = \left(d\pi_1\right)_{f \circ \psi(x_0, 0)} \left(df\right)_{\psi(x_0, 0)} \left(d\psi\right)_{(x_0, 0)} \left(0, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Por outro lado, se  $v \in T_{x_0}M^{n-1}$ , então

$$\left(dg\right)_{x_0}(v) = \left(d\pi_1\right)_{f \circ \psi(x_0, 0)} \left(df\right)_{\psi(x_0, 0)} \left(d\psi\right)_{(x_0, 0)}(v, 0).$$

Visto que  $\left(d\psi\right)_{(x_0, 0)}\left(0, \frac{\partial}{\partial z}\right) = T(\psi(x_0, 0))$  e  $\left(d\psi\right)_{(x_0, 0)}(v, 0) \in \{T\}^\perp$ , segue-se

$$\left\langle \beta'(0), \left(dg\right)_{x_0}(v) \right\rangle = \left\langle \left(d\psi\right)_{(x_0, 0)}\left(0, \frac{\partial}{\partial z}\right), \left(d\psi\right)_{(x_0, 0)}(v, 0) \right\rangle = 0.$$

Portanto, como a co-dimensão de  $T_{x_0}M^{n-1}$  é 1 em  $T_{x_0}\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ ,  $\beta'(0) = N(x_0)$  ou  $\beta'(0) = -N(x_0)$ . A menos de uma troca de parâmetro de  $z$  por  $-z$ , podemos considerar  $\beta'(0) = N(x_0)$  e isso finaliza a demonstração do teorema, uma vez que  $x_0$  foi tomado arbitrariamente.  $\square$

Uma consequência direta desse Teorema, nos mostra uma descrição completa para todas hiperfícies  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}^n \times \mathbb{R}$  com a função  $\nu$  constante, chamadas de **hiperfícies de ângulo constante**. Tal descrição será o próximo resultado.

**Corolário 5.3.7.** Se  $f$  é dado por (5.1) com  $a(s) = As$ , para algum  $A > 0$ , então  $f$  é uma hiperfície de ângulo constante. Reciprocamente, se  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , é uma hiperfície de ângulo contante, então vale uma das afirmações abaixo:

- i)  $f(M^n)$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{t_0\}$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $f(M^n)$  é um aberto do produto  $M^{n-1} \times \mathbb{R}$ , onde  $M^{n-1}$  é uma hiperfície de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ ;
- iii)  $f$  é dada localmente por (5.1) com  $a(s) = As$ , para algum  $A > 0$ .

*Demonstração.* A primeira afirmação é um resultado direto da construção feita para provar a ida do Teorema 5.3.1, basta analisarmos que, por hipótese, vale a igualdade (5.2.4) e

$$\nu = \frac{1}{b(s)} = \frac{1}{\sqrt{1 + [a'(s)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}},$$

isto é,  $\nu$  é constante.

A segunda afirmação, por sua vez, requer um cuidado maior. Suponha que  $f$  é uma hiperfície de ângulo constante.

Se  $\nu \equiv 1$ , então, pela igualdade (3.5),

$$1 = |f_*T|^2 + \nu^2 = |f_*T|^2 + 1 \implies f_*T = 0,$$

isto é, por (3.4),  $\frac{\partial}{\partial t} = \eta$ . Dessa forma,  $(TM^n)^\perp \subset T\mathbb{R}$ , o que implica em  $TM^n \subset T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Em outras palavras,  $f(M^n)$  é um aberto de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{t_0\}$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Se  $\nu \equiv 0$ , então, por (3.4),  $\frac{\partial}{\partial t} = f_*T$ . Uma vez que  $f_*T \perp \eta$ , afirmamos que  $\eta \in T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , isto é,  $(TM^n)^\perp \subset T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ . Dessa forma, se  $\pi_1$  é a projeção canônica sobre  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , então  $\pi_1 \circ f(M^n)$  é uma subvariedade de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  com dimensão  $n - 1$ . Portanto,  $f(M^n)$  é um aberto do produto  $M^{n-1} \times \mathbb{R}$ , onde  $M^{n-1}$  é uma hiperfície de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ .

Por outro lado, seja  $\nu$  constante diferente de 0 e 1. Por (3.7),

$$\begin{aligned} 0 = X(\nu) &= -\langle S_\eta(X), T \rangle \\ &= -\langle X, S_\eta(T) \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $X \in TM^n$ . Disso, segue-se que  $S_\eta(T) = 0 \cdot T$ , isto é,  $T$  é direção principal de  $f$  com relação a  $\eta$ . Pelo Teorema 5.3.1,  $f$  é dado localmente por (5.1). Pela igualdade (5.2.4),

$$\nu = \frac{1}{b(s)} = \frac{1}{\sqrt{1 + [a'(s)]^2}}.$$

Uma vez que  $\nu$  é constante (diferente de 0 e 1),  $a'$  também o é, logo existe  $A > 0$  ( $a$  possui derivada positiva) tal que  $a' \equiv A$ . Portanto, podemos supor que  $a(s) = As$ , como queríamos.

□

**Teorema 5.3.8.** Seja  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  uma hiperfície isoparamétrica e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto tal que a hiperfície paralela  $g_s$  é uma imersão em  $M^{n-1}$  para todo  $s \in I$  e seja  $H(s)$  a curvatura média constante de  $g_s$ . Se  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é dada por (5.1) com

$$a(s) = a_0 + \int_{s_0}^s \phi(\tau)(1 - \phi^2(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (5.26)$$

onde

$$\phi(s) = \frac{1}{\psi(s)} \left( \phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right); \quad \phi_0, H_0 \in \mathbb{R},$$

sendo

$$\psi(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s H(\tau) d\tau\right),$$

então  $f$  tem  $T$  como direção principal e é uma hiperfície com curvatura média constante  $H_0$ . Reciprocamente, se a hiperfície  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , tem  $T$  como direção principal,  $\nu$  não nula e curvatura média constante  $H_0$ , então  $f$  é dada localmente por (5.1) com  $a$  dada por (5.38).

A fim de auxiliar na demonstração deste Teorema, traremos dois Lemas importantes.

**Lema 5.3.9.** Se  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  é dada por (5.1), então a curvatura principal na direção  $\frac{\partial}{\partial s}$  é  $\frac{a''(s)}{b^3(s)}$ .

*Demonstração.* Suponha que  $\lambda$  é a curvatura principal de  $f$  na direção de  $\frac{\partial}{\partial s}$ , logo

$$\left\langle S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = \lambda \left\langle f_*\frac{\partial}{\partial s}, f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle \implies \lambda = \frac{\left\langle S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle}{\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial s}, f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle}$$

por (5.3) e (5.15),

$$\begin{aligned} \left\langle f_*\frac{\partial}{\partial s}, f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle N_s + a'(s)\frac{\partial}{\partial t}, N_s + a'(s)\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= |N_s|^2 + 2a'(s) \left\langle N_s, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + a'(s) \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 \\ &= 1 + a'(s) \\ &= b^2(s) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lambda = \frac{\left\langle S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle}{b^2(s)}. \quad (5.27)$$

Vale ressaltar que estamos utilizando igualdades que foram demonstradas na prova da ida do Teorema 5.3.1, entretanto como estamos sob as mesmas hipóteses ( $f$  é dada por (5.1)), então todas as igualdades construídas nesse contexto também são válidas neste.

Note que,

$$1 = |\eta| \implies 0 = \frac{\partial}{\partial s} \langle \eta, \eta \rangle = 2 \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \eta, \eta \right\rangle$$

e isso implica que

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \eta = \left( \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \eta \right)^T = -S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

e, portanto, por (5.16),

$$S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = -\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \eta = \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right)' N_s(x) + \varepsilon \frac{a'(s)}{b(s)} g_s(x) - \left( \frac{1}{b(s)} \right)' \frac{\partial}{\partial t}.$$

Se  $\varepsilon = 0$ , então

$$\begin{aligned} \left\langle S_\eta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right)' N_s(x) - \left( \frac{1}{b(s)} \right)' \frac{\partial}{\partial t}, N_s + a'(s)\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right)' |N_s|^2 + a'(s) \left( \frac{1}{b(s)} \right)' \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 \\ &= \left( \frac{a'(s)}{b(s)} \right)' + a'(s) \left( \frac{1}{b(s)} \right)' \\ &= \frac{a''(s)b(s) - a'(s)b'(s)}{b^2(s)} + \frac{a'(s)b'(s)}{b^2(s)} \\ &= \frac{a''(s)}{b(s)}. \end{aligned}$$

Logo, por (5.27),

$$\lambda = \frac{a''(s)}{b^3(s)}.$$

Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , então o campo de vetores posição  $g_s$  é ortogonal a  $N_s$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Utilizando desse argumento e a partir de um cálculo semelhante ao que foi feito para  $\varepsilon = 0$ , mostramos que

$$\lambda = \frac{a''(s)}{b^3(s)},$$

como queríamos.  $\square$

**Lema 5.3.10.** Se  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  é dada por (5.1) e  $X \in TM^{n-1}$ , então

$$S_\eta(X) = \frac{a'(s)}{b(s)} S_{N_s}(X)$$

onde  $S_{N_s}$  é o operador de forma de  $g_s$ .

*Demonstração.* Primeiro, note que, uma vez que  $X, Y \in TM^{n-1}$ ,  $\bar{\nabla}_X Y$  coincide com  $\dot{\nabla}_X Y$ . Além disso,

$$1 = |N_s| \implies 0 = \frac{\partial}{\partial s} \langle N_s, N_s \rangle = 2 \langle \dot{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} N_s, N_s \rangle$$

e, portanto,

$$\dot{\nabla}_X N_s = (\dot{\nabla}_X N_s)^T = -S_{N_s}(X).$$

Dito isso, uma vez que  $|\eta| = 1$ , por (5.15),

$$\begin{aligned} S_\eta(X) &= -(\bar{\nabla}_X \eta)^T = -\bar{\nabla}_X \eta = \frac{a'(s)}{b(s)} \dot{\nabla}_X N_s - \frac{1}{b(s)} \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} \\ &= -\frac{a'(s)}{b(s)} S_{N_s}(X). \end{aligned}$$

$\square$

Agora, podemos fazer a demonstração do Teorema 5.3.8.

*Demonstração.* Seja  $X_1, \dots, X_{n-1}$  as direções principais de  $g_s$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  suas respectivas curvaturas principais. Seja  $H_s$  definida por

$$H_s = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1},$$

isto é, pela Definição 2.5.8,  $H_s$  é a função curvatura média de  $g_s$ . Agora, pelos lemas 5.3.9 e 5.3.10, concluímos que a função curvatura média de  $f$ , denotada por  $H_f$ , é dada por

$$H_f = -\frac{a'(s)}{b(s)} H_s + \frac{a''(s)}{b^3(s)} = -\rho(s) H_s + \rho'(s), \quad (5.28)$$

onde  $\rho(s) = \frac{a'(s)}{b(s)}$ .

Observe que o que foi feito acima depende do fato de  $f$  ser dada por 5.1, isto é, as hipóteses de ida e volta do teorema não foram utilizadas por completo e só agora iremos trabalhar sobre elas.

Suponha que  $f : M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$  é dada por (5.1) com  $a$  definida por (5.38). Como  $f$  é dada por (5.1) o Teorema 5.3.1 garante que  $T$  é direção principal. Por outro lado,  $a$  ser definida por (5.38) nos permite dizer que

$$\begin{aligned} a'(s) = \phi(s)(1 - \phi^2(s))^{-\frac{1}{2}} &\implies b(s) = \sqrt{1 + \phi^2(s)(1 - \phi^2(s))^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \phi^2(s)) + \phi^2(s)}{1 - \phi^2(s)}} \\ &= (1 - \phi^2(s))^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

então

$$\rho(s) = \frac{a'(s)}{b(s)} = \frac{\phi(s)(1 - \phi^2(s))^{-\frac{1}{2}}}{(1 - \phi^2(s))^{-\frac{1}{2}}} = \phi(s)$$

e, portanto,

$$\rho(s) = \frac{1}{\psi(s)} \left( \phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right); \phi_0, H_0 \in \mathbb{R}$$

onde

$$\psi(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s H(\tau) d\tau\right).$$

A fim de encontrar um expressão para  $H_f$  através de (5.28), calcularemos  $\rho'$ :

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= \left(\frac{1}{\psi(s)}\right)' \left(\phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau\right) + \frac{1}{\psi(s)} \left(\phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau\right)' \\ &= -\frac{\psi'(s)}{\psi^2(s)} \left(\phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau\right) + \frac{1}{\psi(s)} \left(H_0 \cdot \psi(s)\right). \end{aligned}$$

Note que  $\psi'(s) = -H(s)\psi(s)$ , logo

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= H(s) \frac{1}{\psi(s)} \left(\phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau\right) + H_0 \\ &= H(s)\rho(s) + H_0. \end{aligned}$$

Uma vez que  $H_s = H(s)$ , concluímos que

$$H_f = -\rho(s)H_s + (\rho(s)H_s + H_0) = H_0$$

e, portanto,  $f$  tem curvatura média constante igual a  $H_0$ .

Reciprocamente, suponha que a hiperfície  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , tem  $T$  como direção principal,  $\nu$  não nula e curvatura média constante  $H_0$ . Pelo Teorema 5.3.1,  $f$

é dada localmente por (5.1), isto é, localmente é válida a igualdade (5.28) e por  $f$  ter curvatura média constante igual a  $H_0$  chegamos a seguinte expressão:

$$\rho' - H(s) \cdot \rho = H_0. \quad (5.29)$$

Note que encontramos uma EDO linear não homogênea de 1ª ordem e para resolvê-la utilizaremos o fator integrante  $\psi$ :

$$\psi(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s H(\tau)d\tau\right).$$

Calculado  $\psi$ , basta encontrar  $\rho$ :

$$\begin{aligned} (\psi(s) \cdot \rho)' = H_0 \cdot \psi(s) &\implies \psi(s) \cdot \rho(s) = \phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau)d\tau, \phi_0 \in \mathbb{R} \\ &\implies \rho(s) = \frac{1}{\psi(s)} \left( \phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau)d\tau \right). \end{aligned}$$

Definimos  $\phi = \rho$  e pela definição de  $\rho$

$$\begin{aligned} \phi(s) = \frac{a'(s)}{b(s)} = \frac{a'(s)}{\sqrt{1 + [a'(s)]^2}} &\implies \phi^2(s) = \frac{[a'(s)]^2}{1 + [a'(s)]^2} \\ &\implies [a'(s)]^2 = \phi^2(s)(1 - \phi^2(s))^{-1} \\ &\implies |a'(s)| = |\phi(s)|(1 - \phi^2(s))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sabemos que  $a'(s) > 0$ , para todo  $s \in I$ , e por (5.30)

$$a'(s) = |\phi(s)|(1 - \phi^2(s))^{-\frac{1}{2}}, \quad |\phi| < 1.$$

Suponha que  $\phi > 0$ , logo

$$a'(s) = \phi(s)(1 - \phi^2(s))^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < \phi < 1$$

e, portanto,

$$a(s) = a_0 + \int_{s_0}^s \phi(\tau)(1 - \phi^2(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau, \quad a_0 \in \mathbb{R},$$

com  $0 < \phi < 1$ , como queríamos.

□

## 5.4 Regularidade de $f$

No Teorema 5.3.1, vimos que a função  $f$  dada por (5.1) define, em pontos regulares, uma hiperfície que tem  $T$  como direção principal. Essa seção tem como objetivo é compreender condições que garantem a regularidade de  $f$ , sendo assim, definiremos um aberto  $V$  em  $M^n = M^{n-1} \times I$  tal que se  $p \in V$ , então  $p$  é ponto regular de  $f$ .

O primeiro resultado é simples, entretanto fundamental para nossa análise.



**Observação 5.4.1.** Um ponto  $(x, s) \in M^{n-1} \times I$  é regular de  $f$  se, e somente se,  $g_s$  é regular em  $x$ .

*Demonstração.* Segue diretamente da igualdade (5.2).  $\square$

Pelo Lema acima, basta analisarmos os pontos regulares de  $g_s$ . Uma vez que  $g$  é uma imersão isométrica de  $M^{n-1}$  em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , existe uma base  $\{X_j\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , de  $TM^{n-1}$  tal que  $X_j$  é direção principal de  $g$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Seja  $\lambda^j$  a curvatura principal associada a direção principal  $X_j$  e  $\widehat{\nabla}$  a Conexão Riemanniana de  $M^{n-1}$ . Dessa forma,

$$g_{s*}X_j = C_\varepsilon g_*X_j + Z_\varepsilon \dot{\nabla}_{X_j} N$$

e, utilizando a identificação  $g_*X_j = X_j$ , teremos

$$C_\varepsilon X_j + Z_\varepsilon \left( -S_N(X_j) + \left( \widehat{\nabla}_{X_j} N \right)^\perp \right)$$

onde  $\left( \widehat{\nabla}_{X_j} N \right)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $\widehat{\nabla}_{X_j} N$  em  $T\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , em outras palavras,  $\left( \widehat{\nabla}_{X_j} N \right)^\perp$  é múltiplo de  $N$ . Entretanto,

$$1 = |N|^2 = \langle N, N \rangle \implies 2 \langle \widehat{\nabla}_{X_j} N, N \rangle = 0,$$

isto é,  $\widehat{\nabla}_{X_j} N$  não possui componente na direção de  $N$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} g_{s*}X_j &= C_\varepsilon X_j - Z_\varepsilon \cdot S_N(X_j) \\ &= C_\varepsilon X_j - \lambda^j Z_\varepsilon X_j. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Se  $\varepsilon = 1$ , então

$$g_{s*}X_j = \left( \cos(s) - \lambda^j \sin(s) \right) X_j, \quad (5.32)$$

logo  $g_{s*}X_j = 0$  se, e somente se,  $\lambda^j = \cot(s)$ . Por outro lado, se  $\varepsilon = 0$ , então

$$g_{s*}X_j = \left( 1 - \lambda^j s \right) X_j \quad (5.33)$$

e disso segue-se que  $g_{s*}X_j = 0$  se, e somente se,  $\lambda^j = \frac{1}{s}$ . Por fim, se  $\varepsilon = -1$ , então

$$g_{s*}X_j = \left( \cosh(s) - \lambda^j \sinh(s) \right) X_j \quad (5.34)$$

e, portanto,  $g_{s*}X_j = 0$  se, e somente se,  $\lambda^j = \coth(s)$ .

Note que se  $\varepsilon = 0$ , então  $g_{s*}X_j \neq 0$  sempre que  $\lambda^j = 0$ . Além disso, se  $\varepsilon = -1$ , então  $g_{s*}X_j \neq 0$  sempre que  $|\lambda^j| \leq 1$ . Portanto, analisar a regularidade de  $f$  torna-se interessante apenas quando esses casos não acontecem, pois, caso aconteçam,  $g_s$  seria sempre uma imersão e, portanto,  $f$  seria regular em todos os pontos.

Seja  $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_m^\varepsilon$  as curvaturas principais distintas de  $g$ , excluindo o 0, se  $\varepsilon = 0$ , e as curvaturas principais cujo valor absoluto é menor ou igual a 1, se  $\varepsilon = -1$ .

Recorde que se  $h_1 : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_0 : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $h_1(\theta) = \cot \theta$ ,  $h_{-1}(\theta) = \coth \theta$  e  $h_0(\theta) = \frac{1}{\theta}$ , respectivamente, então  $Im(h_1) = \mathbb{R}$ ,  $Im(h_{-1}) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  e  $Im(h_0) = \mathbb{R} - \{0\}$ . Portanto, para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , existe  $\theta_i \in Dom(h_\varepsilon)$  tal que  $h_\varepsilon(\theta_i) = \lambda_i^\varepsilon$ . Para  $1 \leq i \leq m$ , reorganizando os  $\lambda_{i's}$ , se necessário, escreva

$$\lambda_i = \begin{cases} \cot \theta_i & , 0 < \theta_i < \pi, \text{ se } \varepsilon = 1 \\ \coth \theta_i & , \theta_i \neq 0, \text{ se } \varepsilon = -1 \\ \frac{1}{\theta_i} & , \theta_i \neq 0, \text{ se } \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

de modo que  $(\theta_i)$  é uma sequência crescente. Vale ressaltar que os  $\lambda_{i's}$  podem depender do ponto  $x \in M^{n-1}$ , porém, por simplicidade, iremos omitir a notação de dependência. Além disso, utilizaremos a identificação  $\lambda_i^\varepsilon = \lambda_i$ .

**Lema 5.4.2.** Seja  $X_j$  uma direção principal de  $g$  com relação a  $N$ . Se  $\lambda_i^j$  é, para algum  $i \in \{1, \dots, m\}$  a curvatura principal associada a  $X_j$ , então

$$g_{s*}X_j = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\theta_i^j - s)}{\text{sen} \theta_i^j} X_j, & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \frac{\text{senh}(\theta_i^j - s)}{\text{senh} \theta_i^j} X_j, & \text{se } \varepsilon = -1 \\ \frac{\theta_i^j - s}{\theta_i^j} X_j, & \text{se } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Para mostrar esse Lema, basta substituir os valores de  $\lambda_i^j$  dados por (5.35) nas igualdades (5.32), (5.33) e (5.34).

Se  $\varepsilon = 1$ , então

$$\begin{aligned} g_{s*}X_j &= \left( \cos(s) - \left( \cot(\theta_i^j) \right) \text{sen}(s) \right) X_j \\ &= \left( \cos(s) \cdot \frac{\text{sen}(\theta_i^j)}{\text{sen}(\theta_i^j)} - \frac{\cos(\theta_i^j)}{\text{sen}(\theta_i^j)} \cdot \text{sen}(s) \right) X_j \\ &= \frac{\text{sen}(\theta_i^j - s)}{\text{sen}(\theta_i^j)} X_j. \end{aligned}$$

O caso em que  $\varepsilon = -1$  é análogo a esse. Resta provar para o caso em que  $\varepsilon = 0$ . Se  $\varepsilon = 0$ , então

$$\begin{aligned} g_{s*}X_j &= \left( 1 - \frac{1}{\theta_i^j} s \right) X_j \\ &= \frac{\theta_i^j - s}{\theta_i^j} X_j. \end{aligned}$$

□

Agora, basta analisar as condições para que  $g_{s*}X_j \neq 0$ , pois assim dessa forma  $dg_s$  leva base em base e assim garantimos que  $g_s$  é uma imersão e, portanto, nessas condições  $g_s$  será regular.

Note que para  $\varepsilon = 0$  e  $\varepsilon = -1$  (respectivamente,  $\varepsilon = 1$ ),  $g_s$  é uma imersão se, somente se,  $s \neq \theta_i$  (respectivamente,  $s \neq \theta_i \pmod{\pi}$ ) para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Se  $\varepsilon = 0$  (respectivamente,  $\varepsilon = -1$ ), seja  $\theta_+$  o menor dos  $\theta_{i/s}$  tais que os  $\lambda_{i/s}$  correspondentes são maiores do que 0 (respectivamente, 1), e  $\theta_-$  o maior dos  $\theta_{i/s}$  tais que os  $\lambda_{i/s}$  correspondentes são menores que 0 (respectivamente, -1). Observe que, dessa forma,  $\theta_i \notin (\theta_-, \theta_+)$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Por outro lado, uma vez que  $(\theta_i)$  forma uma sequência crescente, se  $\varepsilon = 1$ , então

$$0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \pi,$$

isto é,

$$\theta_m - \pi < \dots < \theta_1 - \pi < 0 < \theta_1$$

e, portanto,  $\theta_i \notin (\theta_m - \pi, \theta_1)$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Seja  $U_\varepsilon = \{(x, s) \in M^{n-1} \times \mathbb{R}; s \in (\theta_m - \pi, \theta_1)\}$ , se  $\varepsilon = 1$ , e  $U_\varepsilon = \{(x, s) \in M^{n-1} \times \mathbb{R}; s \in (\theta_-, \theta_+)\}$ , se  $\varepsilon \in \{-1, 0\}$ . Nessa caso, tome um aberto  $V_\varepsilon \subset M^{n-1}$  tal que  $V_\varepsilon \times I \subset U_\varepsilon$ . Dessa forma,  $g_s$  restrita a  $V_\varepsilon$  é uma imersão, logo  $f$  restrita a  $V \times I$  também é uma imersão e, portanto, todos os pontos em  $V_\varepsilon \times I$  são pontos regulares de  $f$ . Em particular, se  $g$  é isoparamétrica, as curvaturas principais não dependem de  $x \in M^{n-1}$ , pode-se tomar  $V = M^{n-1}$  e  $I_\varepsilon = (\theta_m - \pi, \theta_1)$ , se  $\varepsilon = 1$ , e  $I_\varepsilon = (\theta_-, \theta_+)$ , se  $\varepsilon \in \{-1, 0\}$ .

## 5.5 Interpretação Geométrica

Esta seção tem por objetivo mostrar uma visão geométrica do Teorema 5.3.1 que consiste em afirmar que  $f$  é gerado por um transporte paralelo da curva  $\alpha(s) = f(x_0, s)$ , para algum  $x_0 \in M^{n-1}$ .

Suponha que  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  e note que  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{0\}$  é uma cópia de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$  em  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ . Dito isso, podemos estender o contradomínio da função  $g$ , que a princípio era  $\mathbb{Q}^n$ , para  $\mathbb{E}^{n+2}$ , entendendo que  $\mathbb{Q}^n \times \{0\} \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ . Isto é,  $g$  fica definida da seguinte forma

$$g : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{E}^{n+2}.$$

Observe que  $\{N(x), \frac{\partial}{\partial t}(x), g(x)\}$  é uma base ortonormal do espaço normal de  $x \in M^{n-1}$ . De fato, por (5.13), o campo de vetor posição  $g(x)$  é ortogonal ao espaço  $T_{g(x)}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R})$  e,

portanto, ortogonal a  $N(x)$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Por outro lado,  $\frac{\partial}{\partial t}$  é ortogonal a  $T_{g(x)}(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{0\})$ , logo é ortogonal a  $N(x)$ . Além disso, todos são unitários.

No que se segue da presente seção, denotaremos por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $M^{n-1}$  e por  $\nabla^\perp$  a conexão normal da imersão  $g$ .

Recorde de (5.1), que  $f$  foi definida da seguinte forma: dada uma hiperfície  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , defina

$$f : M^n = M^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$$

onde

$$f(x, s) = C_\varepsilon(s)g(x) + Z_\varepsilon(s)N(x) + a(s)\frac{\partial}{\partial t}.$$

Dito isso, fixe  $x_0 \in M^{n-1}$  e considere a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$  dada por

$$\alpha(s) = f(x_0, s).$$

Tal curva será chamada de **curva de transporte associada a  $x_0$** .

**Proposição 5.5.1** (Interpretação Geométrica). A hiperfície  $f$ , definida em (5.1), é gerada pelo transporte paralelo do vetor posição de curvas de transporte ao longo dessas mesmas curvas na conexão normal da imersão  $g$  para cada  $x_0$ . Em outras palavras, fixado  $x_0 \in M^{n-1}$ , o campo de vetores posição  $f(x_0, s) \in \mathbb{E}^{n+2}$  é um transporte paralelo do vetor posição  $f(x_0, s_0)$ , para algum  $s_0 \in I$ , ao longo da curva  $\alpha(s)$ , onde  $\alpha$  é a curva de transporte associada a  $x_0$ .

*Demonstração.* Tome  $s_0 \in I$ . Seja  $\alpha$  a curva de transporte associada a  $x_0$ . Pela Proposição 2.2.4, existe um único campo de vetores paralelo  $V$ , chamado de transporte paralelo na conexão normal  $\nabla^\perp$ , ao longo de  $\alpha$ , tal que  $\nabla_{\alpha'}^\perp V = 0$  e  $V(s_0) = f(x_0, s_0)$ .

Afirmamos que o campo de vetores  $\alpha$  é paralelo com relação a conexão  $\nabla^\perp$ . De fato, seja  $X \in TM^{n-1}$ . Como  $X \notin TI$ , então as derivadas  $X(C_\varepsilon)$ ,  $X(Z_\varepsilon)$  e  $X(a)$  são iguais a zero e, então,

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp \alpha &= \nabla_X^\perp \left[ C_\varepsilon g + Z_\varepsilon N + a \frac{\partial}{\partial t} \right] \\ &= \nabla_X^\perp C_\varepsilon g + \nabla_X^\perp Z_\varepsilon N + \nabla_X^\perp a \frac{\partial}{\partial t} \\ &= C_\varepsilon \nabla_X^\perp g + X(C_\varepsilon) + Z_\varepsilon \nabla_X^\perp N + X(Z_\varepsilon) + a \nabla_X^\perp \frac{\partial}{\partial t} + X(a) \\ &= C_\varepsilon \nabla_X^\perp g + Z_\varepsilon \nabla_X^\perp N + a \nabla_X^\perp \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Portanto, basta provarmos que  $N$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $g$  são campos de vetores paralelos com relação a conexão normal da imersão  $g$ .

Uma vez que  $\frac{\partial}{\partial t} \notin TM^{n-1}$ , a sua projeção sobre  $TM^{n-1}$  é igual a 0. Além disso, a conexão  $\widetilde{\nabla}$  de  $\mathbb{E}^{n+2}$  coincide com a derivada usual e como  $\frac{\partial}{\partial t}$  é constante,  $\widetilde{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Então, por (2.2),

$$\nabla_X^\perp \frac{\partial}{\partial t} = \widetilde{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} - \nabla_X \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

e, portanto,  $\frac{\partial}{\partial t}$  é paralelo com relação a conexão normal de  $g$ .

Utilizando, novamente, que a conexão  $\widetilde{\nabla}$  de  $\mathbb{E}^{n+2}$  coincide com a derivada usual, então  $\widetilde{\nabla}_X g = g_* X = \nabla_X g$ . Dessa forma,

$$\nabla_X^\perp g = \widetilde{\nabla}_X g - \nabla_X g = 0$$

e, portanto, o campo de vetores posição  $g$  é paralelo com relação a conexão normal de  $g$ .

Por fim, resta provar que o campo de vetores  $N$  também é paralelo com relação a conexão normal de  $g$ . Uma vez que  $\{N(x), \frac{\partial}{\partial t}(x), g(x)\}$  é uma base ortonormal do espaço normal de  $x \in M^{n-1}$ , basta provarmos que  $\nabla_X N$  não possui componente na direção de nenhum desses campos, isto é, provar que

- i)  $\langle \nabla_X N, N \rangle = 0$ ;
- ii)  $\left\langle \nabla_X N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0$ ;
- iii)  $\langle \nabla_X N, g \rangle = 0$ .

Sabemos que  $|N| = 1$ , então

$$0 = X \langle N, N \rangle = 2 \langle \nabla_X N, N \rangle$$

o que prova o item (i).

Por outro lado, sabendo que  $\left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0$  e que  $\frac{\partial}{\partial t}$  é constante, então

$$0 = X \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \nabla_X N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle N, \nabla_X \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \nabla_X N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle,$$

provando o item (ii).

De modo semelhante, utilizando-se do fato de que  $\langle N, g \rangle = 0$  e que  $N$  é normal a todo campo de vetores em  $TM^{n-1}$ ,

$$0 = X \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \langle \nabla_X N, g \rangle + \langle N, g_* X \rangle = \langle \nabla_X N, g \rangle$$

como queríamos.

Uma vez que  $\alpha$  é um campo de vetores paralelo e que por definição  $\alpha(s_0) = f(x_0, s_0)$ , pela unicidade de  $V$ ,  $V(s) = \alpha(s) = f(x_0, s)$ , isto é,  $f(x_0, s)$  é um transporte paralelo do vetor posição  $f(x_0, s_0)$  ao longo de  $\alpha$ .  $\square$

A fim de visualizar essa interpretação geométrica, traremos a Proposição 5.5.3. Entretanto, é importante definirmos o conceito de hélice generalizada. Para tal definição, utilizamos [2] como referência.

**Definição 5.5.2.** Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  com  $\gamma'' \neq 0$  é chamada uma hélice generalizada se o vetor tangente  $\gamma'$  faz um ângulo constante com uma direção fixada.

**Proposição 5.5.3.** Se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $n = 1$  e  $\nu$  é uma função constante, então a curva de transporte associada a  $x_0$  é uma hélice generalizada.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  a curva transporte associada a  $x_0$ . Logo, por (3.2) e (3.2)

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= C'_\varepsilon(s)g(x_0) + Z'_\varepsilon(s)N(x_0) + a'(s)\frac{\partial}{\partial t} \\ &= -\varepsilon Z_\varepsilon(s)g(x_0) + C_\varepsilon(s)N(x_0) + a'(s)\frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.36)$$

e disso

$$\begin{aligned}\alpha''(s) &= \varepsilon Z'_\varepsilon(s)g(x_0) + C'_\varepsilon(s)N(x_0) + a''(s)\frac{\partial}{\partial t} \\ &= -\varepsilon C_\varepsilon(s)g(x_0) - \varepsilon Z_\varepsilon(s)N(x_0) + a''(s)\frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

Precisamos caracterizar  $a''(s)$  e para isso recorde de (5.2.4) que

$$\nu(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + [a'(s)]^2}}.$$

Isso mostra que  $a'$  é uma função constante, pois  $\nu$  é constante por hipótese. Portanto,  $a''(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ . Visto isso,

$$\begin{aligned}a''(s) &= -\varepsilon C_\varepsilon(s)g(x_0) - \varepsilon Z_\varepsilon(s)N(x_0) \\ &= -\varepsilon g_s(x_0)\end{aligned}$$

Se provarmos que  $|\alpha''(s)| = c$ , para algum  $c \in \mathbb{R}$ , então mostramos que  $\alpha'' \neq 0$ :

$$\begin{aligned}\langle \alpha'', \alpha'' \rangle &= \langle -\varepsilon g_s(x_0), -\varepsilon g_s(x_0) \rangle \\ &= \langle g_s(x_0), g_s(x_0) \rangle.\end{aligned}$$

Uma vez que  $g_s(x_0) \in \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ , pelas definições 3.1.3 e 3.1.4,

$$\langle \alpha'', \alpha'' \rangle = \varepsilon$$

e isso mostra que  $\alpha'' \neq 0$ .

Resta mostrar que o vetor tangente  $\alpha'$  faz um ângulo constante com uma direção fixada. Note que, por (5.36), a função ângulo entre  $\alpha'$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$  é dada por

$$\left\langle \alpha'(s), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle a'(s) \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = a'(s).$$

Portanto,  $\alpha'$  faz um ângulo constante na direção de  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

□

## Conclusão

Ao longo dessa dissertação, estudamos que qualquer hiperfície  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , com função ângulo diferente de zero em todo ponto e tendo  $T$  como direção principal é dada localmente por

$$f(x, s) = g_s(x) + a(s) \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.37)$$

sendo  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável com derivada positiva no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  e  $g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  uma família de hiperfícies paralelas a  $g$  tal que

$$g_s(x) = C_\varepsilon(s)g(x) + Z_\varepsilon(s)N(x)$$

onde  $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$  é construída na demonstração do Teorema 5.3.1,  $M^n = M^{n-1} \times I$  (localmente),  $N$  é um campo vetorial normal a  $g$ ,

$$C_\varepsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ 1, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \cosh(s), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_\varepsilon(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ s, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \sinh(s), & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Contudo, a única coisa que sabemos sobre a função  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  diz respeito a sua derivada, o restante do seu comportamento ainda é algo não caracterizado. Vimos que se  $f$ , além dessas hipóteses, for hiperfície de ângulo contante, então podemos caracterizá-la ainda melhor e  $f$  poderá ter uma das seguintes características:

- i)  $f(M^n)$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \{t_0\}$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $f(M^n)$  é um aberto do produto  $M^{n-1} \times \mathbb{R}$ , onde  $M^{n-1}$  é uma hiperfície de  $\mathbb{Q}_\varepsilon^n$ ;
- iii)  $f$  é dada localmente por (5.37) com  $a(s) = As$ , para algum  $A > 0$ .

Note que no último item temos uma caracterização precisa de  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Além disso, caso  $f$  possua curvatura média constante  $H_0$ , ao invés de ser uma hiperfície de ângulo constante, então podemos detalhar a função  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$a(s) = a_0 + \int_{s_0}^s \phi(\tau)(1 - \phi^2(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (5.38)$$

onde

$$\phi(s) = \frac{1}{\psi(s)} \left( \phi_0 + H_0 \int_{s_0}^s \psi(\tau) d\tau \right); \quad \phi_0, H_0 \in \mathbb{R},$$



sendo

$$\psi(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s H(\tau)d\tau\right)$$

e  $H$  a função curvatura média da hiperfície  $g_s$ .

Mostramos também que, se  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , essas hiperfícies acabam sendo, precisamente, aquelas que possuem curvatura normal nula, quando consideradas como subvariedades de  $\mathbb{E}^{n+2}$ . Em outras palavras, descrevemos completamente todas as hiperfícies dos espaços produtos  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  que possuem curvatura normal nula, conhecidas no inglês como *flat normal bundle*.

# Referências

- [1] M. P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [2] M. V. Flôres et al. Hélices, curvas de bertrand e superfícies regradas. 2012.
- [3] J. M. LEE. *Introduction to smooth manifolds, version 3.0*. University of Washington, Department of Mathematics, 2000.
- [4] E. L. Lima. *Variedades Diferenciáveis*. Brasil: Instituto de Matemática, 2011.
- [5] A. L. Neto and C. Camacho. *Introdução Teoria das Folheações*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [6] J. M. S. Tello. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. IMPA, 1979.
- [7] R. Tojeiro. On a class of hypersurfaces in  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 41(2):199–209, 2010.