

Alexandre Magno Rodrigues Almeida

Gravitação Unimodular na Teoria de Brans-Dicke

Vitória

2022

Alexandre Magno Rodrigues Almeida

Gravitação Unimodular na Teoria de Brans-Dicke

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-Fis como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris
Coorientador: Prof. Dr. Willian Hipólito-Ricardi

Vitória
2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

R696g Rodrigues Almeida, Alexandre Magno, 1998-
Gravitação Unimodular na Teoria de Brans-Dicke /
Alexandre Magno Rodrigues Almeida. - 2022.
59 f. : il.

Orientador: Júlio César Fabris.
Coorientador: Willian Hipólito-Ricaldi.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cosmologia. 2. Gravitação. 3. Unimodular. 4. Brans-Dicke.
I. César Fabris, Júlio. II. Hipólito-Ricaldi, Willian. III.
Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

"Gravitação unimodular na teoria de Brans-Dicke"

ALEXANDRE MAGNO RODRIGUES ALMEIDA.

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.
Aprovada por:

Prof. Dr. Nelson Pinto Neto
(CBPF)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
(Orientador - PPGFis)

Documento assinado digitalmente



DAVI CABRAL RODRIGUES
Data: 23/12/2022 17:12:38-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues
(PPGFis/UFES)

Documento assinado digitalmente



OLIVER FABIO PIATTELLA
Data: 23/12/2022 15:13:42-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
PPGFis/UFES - UI/Itália)

Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipolito Ricaldi
(UFES)

Dr. Luiz Filipe Guimarães
(UFES)

Vitória-ES, 09 de dezembro de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
WILIAM SANTIAGO HIPOLITO RICALDI - SIAPE 1775040
Departamento de Ciências Naturais - DCN/CEUNES
Em 24/12/2022 às 17:37

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/628578?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JULIO CESAR FABRIS - SIAPE 297051
Departamento de Física - DF/CCE
Em 24/12/2022 às 18:20

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/628580?tipoArquivo=O>

Agradecimentos

Há muitas pessoas que eu gostaria de agradecer e que tornaram possível a realização desse trabalho. Em primeiro lugar, os meus orientadores, Júlio César Fabris e Wiliam Hipólito-Ricaldi. Sou muito grato por ter a oportunidade de trabalhar com mentes que transbordam conhecimento. Ambos fizeram parte da minha formação acadêmica desde a graduação e me ensinaram o que é fazer ciência. Obrigado por serem uma inspiração para mim.

Também devo um obrigado aos meus pais, que nunca deixaram de apoiar meus estudos e por sempre comemorarem mais do que eu as minhas conquistas. Só cheguei até aqui por causa deles.

Ao meu irmão Júnior, obrigado por me apoiar e aconselhar durante essa fase da minha vida acadêmica e por todos os momentos descontraídos durante nossas campanhas de *Dungeons and Dragons*. A minha irmã Carla, obrigado por compartilhar suas experiências comigo, discutir física e por me tranquilizar em horas que achei que não tinha jeito. Tenho sorte de ter dois irmãos mais velhos altamente capacitados e que foram tão gentis de me auxiliar.

A minha companheira Gabriela, obrigado pelos preciosos momentos em que você acolheu minhas demandas emocionais e pelo simples prazer da sua companhia durante todo esse tempo, sempre me apoiando com o meu trabalho. Tenho sorte de ter você, não poderia ter escolhido alguém melhor para ficar ao meu lado.

E obrigado a todos os meus amigos por todas as conversas profunda, piadas, confissões, desabafos e momentos de camaradagem. Em especial vai um agradecimento aos meus amigos mais antigos: Ricardo, Joice, Nathanael e Bruno. Vocês são incríveis.

Por fim, obrigado pela Capes por me dar auxílio financeiro nessa etapa importante da minha vida. Sem isso, este trabalho não seria possível.

“Vivemos em uma plácida ilha de ignorância em meio a mares negros de infinitude, e não fomos feitos para ir longe.”
(H.P Lovecraft.)

Resumo

Propomos uma versão Unimodular da teoria de Brans-Dicke aparelhada com um vínculo na lagrangiana. As equações de campo resultantes não possuem traço e a teoria deixa de ser invariante por difeomorfismos gerais. As soluções de vácuo em um fundo cosmológico reproduzem as soluções correspondentes da Teoria de Brans-Dicke clássica, mas com um termo de constante cosmológica. Uma análise perturbativa dos modos escalares é feita e aparecem configurações estáveis e instáveis, em contraste com o caso Brans-Dicke clássico para o qual ocorrem apenas configurações estáveis. Por outro lado, os modos tensoriais nesta teoria permanecem os mesmos que na teoria tradicional de Brans-Dicke.

Palavras-chave: Gravitação Modificada; Brans-Dicke; Teoria Unimodular.

Abstract

We propose a unimodular version of the Brans–Dicke theory designed with a constrained Lagrangian formulation. The resulting field equations are traceless and the theory fails to be invariant under general diffeomorphisms. The vacuum solutions in the cosmological background reproduce the corresponding solutions of the usual Brans–Dicke theory but with a cosmological constant term. A perturbative analysis of the scalar modes is performed and stable and unstable configurations appear, in contrast with the Brans–Dicke case for which only stable configurations occur. On the other hand, tensorial modes in this theory remain the same as in the traditional Brans–Dicke theory.

Keywords: Modified-gravity; Brans-Dicke; Unimodular theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – O efeito de ondas gravitacionais em um anel de massas testes para o estado de polarização h_+	19
Figura 2 – O efeito de ondas gravitacionais em um anel de massas testes para o estado de polarização h_x	19

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	RELATIVIDADE GERAL	13
2.1	Notação e Resultados	14
2.2	Equações de Campo	14
2.3	Equações de Einstein Linearizadas	16
2.3.1	Invariância de Calibre	16
2.3.2	Solução de Ondas Planas	18
2.4	Cosmologia	19
2.4.1	Soluções da Equação de Friedmann	21
2.4.2	Constante Cosmológica	22
2.5	Perturbações Cosmológicas	24
2.5.1	Perturbações Escalares	25
2.5.2	Perturbações Tensoriais	28
3	TEORIA ESCALAR-TENSORIAL	30
3.1	Campo Escalar	31
3.2	Teoria de Brans-Dicke	32
3.3	Cosmologia Brans-Dicke	34
3.4	Perturbações Cosmológicas	36
3.4.1	Perturbações tensoriais	36
3.4.2	Perturbações Escalares	38
4	TEORIA UNIMODULAR DA GRAVITAÇÃO	40
4.1	Relatividade Geral Unimodular	41
4.1.1	Invariância de Calibre	42
4.1.2	Cosmologia Unimodular	43
4.1.3	Perturbações Escalares	44
4.2	Brans Dicke Unimodular	46
4.2.1	Soluções Cosmológicas	47
4.2.2	Perturbações Cosmológicas	49
4.2.3	Ondas Gravitacionais	51
4.2.4	Perturbações Escalares no Vácuo	51
5	CONCLUSÃO	55

REFERÊNCIAS 57

1 Introdução

A gravitação moderna tem como teoria padrão a teoria da Relatividade Geral, formulada por Einstein em 1915 ([EINSTEIN, 1922](#)). As ideias de Einstein explicam diversos fenômenos gravitacionais que a teoria de Newton, sua predecessora, falhava em explicar. Um dos principais aspectos da Relatividade Geral é o princípio da covariância geral. Este, afirma que as leis da física devem ser invariantes por uma transformação geral de coordenadas. Tal característica também é comumente chamada de invariância sobre difeomorfismos gerais. A partir desse princípio físico, Einstein teve a interpretação revolucionária de que efeitos gravitacionais são oriundos de distorções no espaço-tempo causadas pela distribuição de matéria e energia. Essa interpretação do universo revolucionou diversos campos de estudo da física. Por exemplo, a cosmologia ganhou um respaldo maior como campo de estudos com o auxílio da Relatividade Geral ([ISHAK, 2019](#)). Atualmente, através do modelo padrão de gravitação, conseguimos explicar e prever diversos fenômenos do universo, como as ondas gravitacionais, que são deformações no espaço-tempo que se propagam como ondas. Estas foram detectadas pela primeira vez em 2015 pela colaboração LIGO-Virgo ([ABBOTT et al., 2016](#)).

Embora a Relatividade Geral seja uma teoria bem sucedida do ponto de vista observacional, existem vários estudos buscando teorias alternativas da gravitação ([LI; KOYAMA, 2019](#)). Além de motivações fenomenológicas, a fim de entender profundamente a estrutura matemática e as possíveis previsões da Relatividade Geral, teorias alternativas devem ser estudadas. Nesse contexto, nós podemos propor modificações consistentes na gravitação e estudar as consequências matemáticas e físicas dessas modificações. Dessa forma, conseguimos comparar as predições de ambos os casos e determinar sob quais condições que essas teorias poderiam ser compatíveis com as observações. Outra motivação vem das componentes desconhecidas que compõem a maior parte do nosso universo, estas são a matéria escura e a energia escura. Tais componentes foram introduzidas na Cosmologia a fim de achar um modelo compatível com as observações em grandes escalas. A matéria escura foi inserida para tentar corrigir o problema das curvas de rotação de galáxias e a energia escura foi inserida a fim de explicar a expansão acelerada do universo (veja ([PIATTELLA, 2018](#)) para uma discussão sobre problemas abertos na cosmologia). Embora essas quantidades escuras possam ser efeitos de partículas ainda desconhecidas, estas podem ter uma natureza geométrica, ou seja, serem um efeito intrínseco da gravidade. Dessa forma, é interessante manter em aberto a opção de que os efeitos causados por tais componentes sejam resultado de uma modificação em largas escalas da Relatividade Geral.

Uma das propostas de modificação mais antigas da RG, iniciada pelo próprio Einstein ([EINSTEIN, 1952](#)), é o modelo Unimodular de gravitação. Esta alternativa é

caracterizada pelo vínculo imposto no determinante da métrica:

$$\sqrt{-g} = 1. \quad (1.1)$$

Por consequência desse vínculo, a teoria Unimodular difere da Relatividade Geral em um de seus pilares fundamentais, a invariância sobre difeomorfismos gerais. A teoria está inserida em um novo grupo de difeomorfismo que deixa o determinante da métrica invariante. Estes são conhecidos como difeomorfismos transversos. Com o vínculo Unimodular aplicado na ação da Relatividade Geral, as equações de campo obtidas possuem uma estrutura sem traço, na qual uma lei de conservação modificada surge através das identidades de Bianchi (FABRIS et al., 2022a). Neste cenário, a conservação do tensor energia-momento não é mais uma imposição da teoria e sim um escolha que deve ser feita independentemente. Ao escolher que o tensor energia-momento se conserve, obteremos, da teoria Unimodular, a mesma física da Relatividade Geral com a constante cosmológica. A diferença é que, neste caso, a constante cosmológica aparece como uma constante de integração ao invés de uma quantidade acoplada. Essa característica da teoria Unimodular é considerada atrativa porque poderia aliviar o problema da diferença entre o valor teórico medido da constante cosmológica em relação ao previsto pela energia quântica do vácuo. Este é conhecido como o problema da constante cosmológica (WEINBERG, 1989). Para o caso em que o tensor energia-momento não se conserva a equivalência entre as duas teorias é perdida. No entanto, a teoria Unimodular fornece um modelo cosmológico equivalente, com relação à métrica de fundo, ao modelo da teoria da Relatividade Geral original com apenas radiação e constante cosmológica. O modelo padrão da cosmologia requer que haja uma fase de matéria para que haja um processo de formação das grandes estruturas. No caso da teoria Unimodular, em uma análise perturbativa é mostrado que é possível ocorrer formações de estrutura apenas com a fase da radiação (FABRIS et al., 2022b).

Outra proposta de gravitação alternativa é a teoria de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961). Esta é uma tentativa de incorporar o Princípio de Mach na Relatividade Geral. O fundamento por trás da modificação é inserir um campo escalar acoplado não-minimamente à parte geométrica da ação de Einstein-Hilbert. Por causa dessa característica, Brans-Dicke pertence a uma classe de teorias chamadas de escalares-tensoriais. Em tais teorias, os efeitos gravitacionais são mediados tanto por um campo tensorial, quanto por um campo escalar. Ao introduzir o campo escalar na densidade lagrangiana, a fim de obter as equações de campo, também é introduzido uma constante adimensional, ω , chamado de parâmetro de Brans-Dicke. Observações feitas no sistema solar mostram que $\omega > 40000$, neste regime a teoria se torna indistinguível da RG (BERTOTTI; IESS; TORTORA, 2003). Por um lado isso é uma característica positiva, pois mostra que a teoria é consistente com os resultados muito bem conhecidos da Relatividade Geral, mas por outro lado dificulta encontrar diferenças observacionais entre as teorias. Além deste vínculo, observações feitas das supernovas tipo Ia mostram que, em grande escalas, o

parâmetro de Brans-Dicke possui valores entre $-\frac{3}{2} < \omega < \frac{4}{3}$ (FABRIS; GONÇALVES; RIBEIRO, 2005). Este resultado é interessante, pois ω pode ser uma quantidade que depende da escala, o que nos dá uma margem maior de valores e motivação para estudar os diferentes casos.

O objetivo deste trabalho é estender a teoria Unimodular além da Relatividade Geral e propor, a nível clássico, uma formulação de Brans-Dicke Unimodular (ALMEIDA et al., 2022). A partir da ação de Brans-Dicke vinculada com a condição Unimodular, vamos encontrar as equações de campo sem traço da teoria. Munido das equações de campo vamos mostrar que, a partir das identidades de Bianchi, a conservação do tensor energia-momento não é necessária. Se impormos, como uma condição extra, que o tensor energia-momento se conserve recuperamos a teoria clássica com a adição de um termo de constante cosmológica. Contudo, se a conservação do tensor energia-momento não for considerada a equivalência desaparece, assim como acontece no caso de Relatividade Geral. Desta forma, as relações gerais que aparecem no caso de Brans-Dicke Unimodular repetem o mesmo padrão observado no caso Relatividade Geral Unimodular.

Por fim, demonstramos que as soluções de vácuo na presença de uma constante cosmológica para o caso unimodular e a teoria clássica são as mesmas, contudo, em uma análise perturbativa essa equivalência é perdida, como vamos mostrar explicitamente. Em particular, soluções instáveis aparecem no caso Unimodular, enquanto no caso de Brans-Dicke clássico só obtemos soluções estáveis.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 vamos discutir a teoria da Relatividade Geral, comentando sobre aspectos introdutórios e relevantes para as próximas sessões. Apresentaremos as equações de Einstein a partir do princípio variacional e depois estudaremos a aproximação de campo fraco com uma discussão sobre a invariância de Calibre. Também abordamos soluções cosmológicas de fundo para as importantes épocas do universo e estudar os casos perturbados. No Capítulo 3, vamos introduzir a teoria de Brans-Dicke, apresentando nossa motivação para introduzir um campo escalar na gravitação e as consequências deste. Após obtermos as equações de campo para a teoria, as aplicamos para o caso da cosmologia e estudaremos as perturbações cosmológicas do modelo a fim de comparar com o caso Unimodular a ser estudado. O resultado principal do trabalho será exposto no Capítulo 4: a teoria Unimodular da Gravitação. Faremos uma revisão da teoria da Relatividade Geral Unimodular, enfatizando a lei de conservação modificada, e, em seguida discutimos o cenários cosmológico proveniente dessa teoria. Através da mesma metodologia, estudaremos o caso Unimodular para a teoria de Brans-Dicke, onde analisaremos perturbações escalares no vácuo e vamos discutir soluções instáveis. Finalizamos o trabalho com um resumo dos resultados obtidos no Capítulo de Conclusão.

2 Relatividade Geral

Até o início do século XX, a teoria da gravitação de Isaac Newton era a melhor explicação para o movimento dos corpos celestes conhecida pelo meio científico. Em suas leis da dinâmica, Newton propôs que o espaço e o tempo são grandezas absolutas e que existe uma força chamada gravidade que atua sobre corpos massivos, cuja a intensidade desta agindo sobre dois corpos é proporcional ao produto das massas m_1 e m_2 e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles de forma que,

$$|F| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

onde, G é a Constante Gravitacional de Newton ($G = 6.67 \times 10^{-11} m^3/s^2 kg$). Desta expressão para a força chegamos na equivalente equação de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x}), \quad (2.2)$$

que é a equação de campo da teoria Newtoniana da gravitação. Esta relaciona o potencial gravitacional $\Phi(\vec{x})$ com a densidade de massa $\rho(\vec{x})$. Tal potencial possui um efeito de ação instantânea, de forma que uma mudança na densidade de massa afetaria o potencial gravitacional no espaço inteiro simultaneamente.

A teoria da Relatividade Especial, proposta por Einstein em 1905 teve a sua base em dois postulados fundamentais: as leis da física são as mesmas em todos os referenciais e que a velocidade da luz é a mesma independente da velocidade do observador ([EINSTEIN et al., 1905](#)). Nos anos seguintes, o próprio Einstein desenvolveu uma teoria que ficou conhecida por Relatividade Geral ([EINSTEIN, 1922](#)). Nesta, o espaço-tempo em si é um objeto dinâmico e a distribuição de matéria e energia influencia em sua curvatura. Os efeitos gravitacionais, que são associados como forças na teoria newtoniana, são agora interpretados como curvatura no espaço tempo.

A teoria da Relatividade Geral passou por diversos testes observacionais que confirmaram o sucesso da teoria, como a deflexão da luz por um campo gravitacional e a precessão do periélio de Mercúrio. Além destes, a teoria fez previsões que foram detectadas muitos anos depois, como a existência de buracos negros e ondas gravitacionais.

Este capítulo será dedicado a explorar aspectos físicos e matemáticos da Relatividade Geral. Começaremos encontrando as equações de campo da teoria e depois partiremos para uma aproximação de campo fraco a fim de explorar soluções de ondas gravitacionais. Em seguida discutiremos o estudo da Cosmologia, encontrando soluções para diversas eras do universo e, por fim, uma análise de perturbações cosmológicas. Os conteúdos desse capítulo foram baseados nas seguintes literaturas ([WEINBERG, 1972](#)), ([PIATTELLA, 2018](#)), ([MUKHANOV, 2005](#)).

2.1 Notação e Resultados

Esta sessão tem como propósito definir e expôr resultados que serão frequentemente usados no presente trabalho. Usamos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para medir distâncias no espaço curvo. Este é um tensor simétrico de Rank 2 que se relaciona com o elemento de linha da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

onde a assinatura da métrica será $(+ - - -)$. Através da métrica podemos transformar um vetor covariante em um contravariante da seguinte forma:

$$g^{\mu\nu} v_\mu = v^\nu. \quad (2.4)$$

Nossa notação para derivadas parciais em relação as coordenadas do espaço tempo será $\partial_\mu v_\alpha$ ou $v_{\alpha,\mu}$ onde,

$$\partial_\mu v_\alpha = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (2.5)$$

Ao trabalhar em espaços curvos precisamos adequar a noção de derivada para espaços curvos. Fazemos isto através da derivada covariante. Para tais, a notação será $\nabla_\mu v_\alpha$ ou $v_{\alpha;\nu}$ onde,

$$\nabla_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma, \quad (2.6)$$

$$\nabla_\beta v_\alpha = \partial_\beta v_\alpha - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma v_\gamma. \quad (2.7)$$

O símbolos de Christoffel são calculados da seguinte maneira:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.8)$$

Com esses símbolos podemos calcular algumas quantidades relevantes como o tensor contraído de Riemman, que também é chamado de tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \Gamma_{\kappa\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\rho, \quad (2.9)$$

que ao fazer uma contração encontramos o escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Essas quantidades serão relevantes ao longo do trabalho, em especial para encontrar as equações de campo.

2.2 Equações de Campo

As equações de campo da Relatividade Geral são conhecidas como as equações de Einstein. Elas relacionam geometria do espaço tempo com matéria e energia. Podemos obtê-las a partir de um formalismo lagrangiano com a ação:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (2.11)$$

onde a primeira integral do lado direito da equação é a ação de Einstein-Hilbert (S_H). O termo \mathcal{L}_m é a densidade lagrangiana de matéria. Aplicando o princípio variacional ($\delta S_H = 0$) nesta ação, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\delta S_H &= \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R) \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \delta \sqrt{-g} R) \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} \left\{ \int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \int d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right\} = 0. \quad (2.12)\end{aligned}$$

A última integral da terceira linha é um termo de superfície, sua contribuição no contorno é nula, o que significa que podemos descartá-la. O resultado é,

$$\delta S_H = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (2.13)$$

A parte que relaciona a distribuição de matéria e energia vem da segunda integral de (2.11). Dela, definimos o tensor energia-momento:

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

Unindo os dois resultados encontramos as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

A métrica $g_{\mu\nu}$ é a variável dinâmica das equações de Einstein. Note que as equações possuem derivadas de até segunda ordem da métrica em seu lado esquerdo. Nas equações de Einstein, o tensor energia-momento age como fonte da curvatura do espaço tempo. No limite de campos fracos e velocidades baixas, as equações de campo se tornam as equações de Poisson (2.2) para o caso newtoniano.

O tensor de curvatura de Riemman possuem restrições matemáticas na sua estrutura, de forma que:

$$R_{\mu\nu\delta\epsilon} + R_{\mu\delta\epsilon\nu} + R_{\mu\epsilon\nu\delta} = 0. \quad (2.16)$$

Tais relações são conhecidas como identidades de Bianchi. Em sua forma reduzidas elas mostram que,

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = 0. \quad (2.17)$$

Comparando esse resultado com o lado esquerdo das equações de Einstein, obtemos a conservação do tensor energia-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Esta é uma característica imposta pela a própria estrutura das equações de campo.

2.3 Equações de Einstein Linearizadas

As equações de Einstein escritas na forma (2.15) não deixam evidente que se pode encontrar soluções de onda. Para encontrar tais soluções vamos fazer uma aproximação de campo fraco, de forma que a métrica seja escrita como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação em torno de $\eta_{\mu\nu}$. A métrica de Minkowski está tomando o papel de uma métrica de fundo enquanto $h_{\mu\nu}$ será nossa variável dinâmica. Escolhemos essa aproximação por ela ser coerente em contextos onde as fontes dos efeitos se encontram muito longe do campo. A condição de que a perturbação seja pequena ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) nos permite focar em uma análise no regime linear, ignorando termos de ordem superior a $|h_{\mu\nu}|^2$. Começamos calculando os símbolos de Christoffel com a métrica (2.18):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.19)$$

A partir deste, encontramos o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(h^2), \quad (2.20)$$

contraíndo, obtemos:

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.21)$$

Vamos assumir que todos os termos de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ seja nulos. Com estes resultados chegamos nas equações de Einstein Linearizadas:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^{\rho}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^{\rho}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

onde uma mudança de variáveis foi feita a fim de escrever a equação de forma mais compacta, definindo:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (2.23)$$

$\bar{h}_{\mu\nu}$ é chamada de *perturbação de traço reverso*. A escolha deste nome se dá porque $\bar{h} = -h$.

2.3.1 Invariância de Calibre

À primeira vista, as equações de Einstein parecem ser o suficientes para determinar univocamente a métrica do espaço tempo. Isto porque as temos dez equações para determinar dez componentes da métrica. Porém estas equações não são independentes, as Identidades de Bianchi, (2.17), vinculam quatro equações. Dessa forma, temos quatro graus de liberdade associados com escolha de coordenadas. Estes graus de liberdade nos permitem afirmar que se $g_{\mu\nu}$ é solução das equações de Einstein então ao fazer uma

transformação de coordenadas gerais ($x \rightarrow x'$) obteremos outra métrica $g'_{\mu\nu}$ que também é uma solução. Esta escolha de coordenadas não representam uma quantidade física nova, apenas uma nova forma de escrever a mesma quantidade.

Esta possibilidade de encontrar outra solução a partir de uma transformação de coordenadas não é uma característica exclusiva da Relatividade Geral. No eletromagnetismo nos deparamos com uma situação semelhante ao tentar determinar o quadripotencial A_μ através das equações de Maxwell. Neste contexto chamamos a escolha de coordenadas de uma escolha de *calibre* ou *gauge*. Podemos, no caso da RG, escolher livremente um calibre para que a métrica assuma uma forma mais conveniente. Esta independência da escolha é chamada de *invariância de calibre*.

Aplicando este conceito no nosso caso da métrica perturbada, podemos obter uma outra solução de (2.22) através de uma transformação de coordenadas:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (2.24)$$

Esta transformação afeta a métrica da seguinte maneira:

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (2.25)$$

Seguindo esta lei de transformação, chegamos em uma expressão para a perturbação da métrica:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \quad (2.26)$$

onde, os termos $\partial_\mu \xi_\nu$ são, no máximo, da mesma ordem de h . Tal transformação mantém a equação (2.22) invariante. Vamos tirar vantagem desse fato para escolher um calibre que simplifique as equações. Uma escolha interessante é o chamado calibre harmônico, definido por,

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0. \quad (2.27)$$

Esta escolha, em termos da métrica perturbada:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h. \quad (2.28)$$

Sempre será possível fazer tal escolha, pois podemos ajustar livremente os termos de (2.26) para que a condição seja respeitada. Neste caso em particular, basta escolher que a transformação seja solução de:

$$\square \xi_\nu = \partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h. \quad (2.29)$$

A condição de calibre harmônico na *perturbação de traço reverso* é $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$. Neste calibre em particular, as equações de Einstein se reduzem a:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

deixando evidente a equação de onda.

2.3.2 Solução de Ondas Planas

Uma conclusão que podemos tirar das equações de onda (2.30) é que as ondas gravitacionais se propagam na velocidade da luz para o vácuo. Isto se deve ao operador de D'Alembert ser definido no espaço de Minkowski, dessa forma, podemos reescrever o termo do lado esquerdo da seguinte maneira:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}_{\mu\nu} - \nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Este resultado é contrastante com a teoria newtoniana da gravitação e a ideia de ação instantânea.

A segunda conclusão diz respeito de como as ondas gravitacionais se comportam em regiões longe de fontes. Neste cenário, a equação (2.30) se torna:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.32)$$

A fim de encontrar soluções de onda, podemos impor o calibre *sem-traço e transverso*¹. Ou seja:

$$h = h_{0\mu} = h_{ij,k} = 0, \quad (2.33)$$

o que nos permite escrever, $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Dessa maneira, obtemos a seguinte solução para a equação (2.32):

$$h_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} + \varepsilon_{\mu\nu}^* e^{-ik_\alpha x^\alpha}, \quad (2.34)$$

onde tomamos a parte real da solução para descrever a perturbação. Na equação acima, $\varepsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de polarização e o vetor k_α de onda. Com essa solução e a condição de calibre imposta, obtemos os seguintes resultados:

$$k_\alpha k^\alpha = 0. \quad (2.35)$$

$$k^\nu \varepsilon_{\mu\nu} = 0. \quad (2.36)$$

Dos resultados acima, concluímos que o tensor de polarização da onda gravitacional é ortogonal à propagação da onda. Isto é, os efeitos de distorção, causados pelas ondas gravitacionais, são observados no plano ortogonal à propagação de onda. Para enxergar melhor o efeito de uma onda gravitacional passando sobre partículas teste, vamos analisar o exemplo de uma onda se propagando na direção x^3 . O tensor de polarização em tal situação é:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

¹ Traceless Transverse, do inglês original

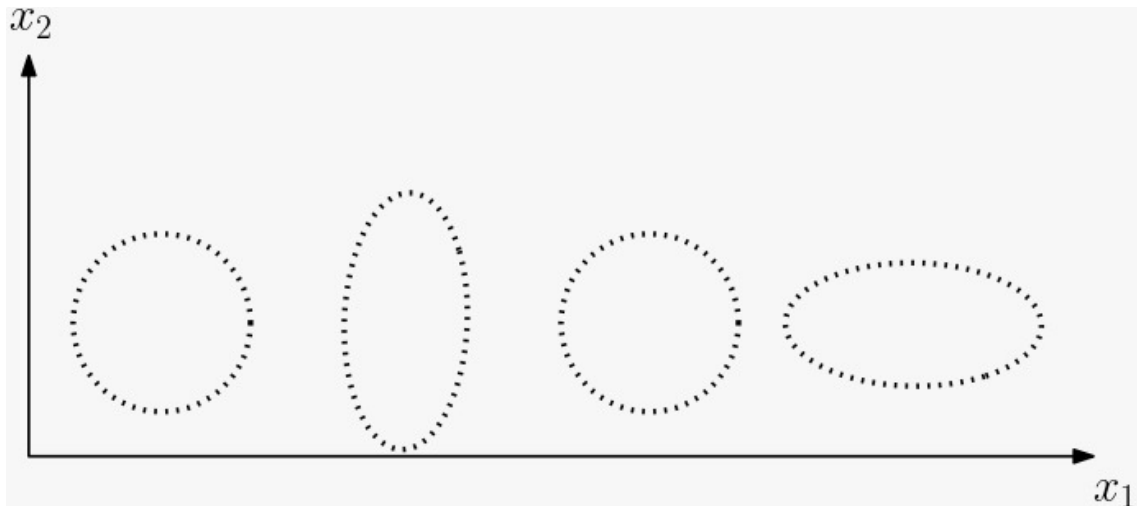


Figura 1 – O efeito de ondas gravitacionais em um anel de massas testes para o estado de polarização h_+ .



Figura 2 – O efeito de ondas gravitacionais em um anel de massas testes para o estado de polarização h_x .

Se considerarmos somente o efeito da polarização h_+ , fazendo $h_x = 0$, sobre um anel de partículas teste, a ilustração (Fig.1) mostra o efeito. Mas, se considerarmos o efeito da polarização h_x , fazendo $h_+ = 0$ sobre o mesmo anel de partículas o efeito é observado na (Fig.2).

2.4 Cosmologia

A cosmologia moderna é baseada no *Princípio Cosmológico* que diz que em grandes escalas o universo é homogêneo e isotrópico. Este princípio é, por definição, axiomático e não pode ser demonstrado ou comprovado por teorias físicas. Contudo, observações da natureza, como as medidas da *Radiação Cósmica de Fundo*, servem como fortes indícios de tal hipótese (CHALLINOR, 2012). A homogeneidade do universo nos permite assumir

que não existe um local de privilégio. Então, as leis da física que agem na Terra são as mesmas que agem em qualquer outro local do universo. A isotropia nos garante que não há uma direção privilegiada, de forma que o universo é o mesmo independente de qualquer direção observada. Essa característica, a grosso modo, quer dizer de que o universo não possui um centro.

Em 1929, Edwin Hubble obteve os primeiros indícios observacionais de que o universo estava se expandindo. Ele observou que as galáxias mais distantes estão se afastando mais rápido do que galáxias mais próximas (HUBBLE, 1929), o que só faz sentido em um universo não-estático. Baseado no princípio cosmológico podemos encontrar a métrica que descreve o universo em grandes escalas:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.38)$$

Esta é a métrica *Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker* (FLRW). Na expressão acima, $a(t)$ é o fator de escala, uma função do tempo para considerar a expansão do universo, e k é o parâmetro de curvatura. Este, assume os valores 0, 1 e -1 que representam respectivamente um universo plano, um universo esférico e um universo hiperbólico.

A partir desta métrica, a fim de entender a evolução do universo, vamos encontrar as equações de campo. Neste trabalho, vamos fixar $k = 0$ que representa um modelo de universo plano². Neste caso, os símbolos de Christoffel não-nulos são:

$$\Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \delta_{ij} \quad , \quad \Gamma_{0i}^j = \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^j, \quad (2.39)$$

o que nos permite calcular o tensor de Ricci,

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = \frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2), \quad (2.40)$$

e, por fim, o escalar de Ricci:

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (2.41)$$

Substituindo estes resultados nas equações de Einstein obtemos as seguintes equações:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} T_{00}, \quad (2.42)$$

$$\delta_{ij} (aH^2 + 2\ddot{a}) = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{ij}, \quad (2.43)$$

onde H é o parâmetro de Hubble, definido como $H = \frac{\dot{a}}{a}$. A equação (2.42) é chamada de equação de Friedmann e (2.43) é chamada de equação de Raychaudhuri.

Para completar as equações, é necessário determinar um tensor energia-momento adequado. Para a métrica FLRW, há algumas condições que devem ser respeitadas. Por

² Esta escolha particular é condizente com os dados do Planck que sugerem que k é muito próximo de zero. (ADE et al., 2014)

exemplo, não pode haver termo T_{0i} , pois se houvesse fluxo de energia em uma direção arbitrária seria uma violação do princípio cosmológico e o universo não seria isotrópico. Outra condição é que $T_{ij} \propto g_{ij}$, isso se deve a uma comparação direta com o lado esquerdo da equação (2.43). Por fim, como $G_{\mu\nu}(t)$ é uma função somente do tempo, então $T_{\mu\nu}(t)$ também deve ser. Através desta análise podemos determinar os seguintes termos:

$$T_{00} = \rho(t)c^2, \quad T_{0i} = 0, \quad T_{ij} = p(t)g_{ij}, \quad (2.44)$$

onde, ρ é densidade do fluido, p é a pressão. Unindo estes termos em uma única equação, o tensor energia-momento representa um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

onde u_μ são as quadrivelocidades do elemento de fluido. O que estamos considerando como fluido é o conjunto de todas as componentes do universo, então ρ representa a densidade do conteúdo existente no universo. Tal fluido não contém viscosidade e nem transporte de energia. Através da conservação do tensor energia-momento, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, encontramos uma equação da continuidade associada ao universo:

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (2.46)$$

Com o tensor energia-momento definido para o universo, substituímos a componente T_{00} na equação de Friedmann (2.42) e obtemos a seguinte relação:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho. \quad (2.47)$$

Chegamos, então, a uma relação entre o fator de escala com a soma das contribuições das componentes do universo. A equação de Raychaudhuri (2.43) se torna:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (2.48)$$

Estas duas equações governam a evolução do universo.

Na próxima seção, vamos nos concentrar em encontrar soluções do fator de escala referente aos principais conteúdos materiais do universo.

2.4.1 Soluções da Equação de Friedmann

Para encontrar soluções da equação de Friedmann, precisamos primeiro determinar uma relação entre densidade ρ e pressão p . Tal relação é conhecida na termodinâmica como uma equação de estado. Uma escolha particularmente útil, é a de uma relação linear entre densidade e pressão:

$$P = w\rho c^2, \quad (2.49)$$

onde w é um parâmetro constante que determina o tipo do conteúdo presente no universo. Substituindo essa relação na equação da continuidade (2.46), obtemos uma solução para ρ :

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (2.50)$$

Dois valores de w são de maior interesse para a cosmologia, estes são 0 e 1/3. Cada um corresponde fisicamente a uma componente do universo diferente.

Para $w = 0$ temos uma equação de estado $p = 0$. Este caso representa um universo composto majoritariamente por matéria não-relativística, também conhecida como poeira ou matéria fria³. Neste universo, a relação entre densidade e fator de escala é $\rho \propto a^{-3}$. Substituindo esta relação na equação de Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\rho_0}{a}. \quad (2.51)$$

O resultado dessa equação é:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad H = \frac{2}{3t}. \quad (2.52)$$

Neste cenário, o universo nunca para de se expandir, mas vai ficando cada vez mais lento conforme o tempo passa.

Para $w = 1/3$ a equação de estado é $p = c^2\rho/3$. Esta equação de estado representa um universo composto por partículas relativísticas, que também são referidas como radiação. A relação entre densidade e fator de escala é $\rho \propto a^{-4}$. Com esta, encontramos uma equação de Friedmann similar ao caso da matéria, de forma que a solução seja:

$$a(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}}, \quad H = \frac{1}{2t}. \quad (2.53)$$

Neste cenário, como no caso de um universo composto por poeira, o universo também se expande eternamente, mas dessa vez a expansão é mais lenta.

2.4.2 Constante Cosmológica

Originalmente, quando Einstein formulou as equações de campo, ele acreditava que o universo era estático. Este pensamento se mostrava incompatível com suas próprias equações, porque a atração gravitacional de toda a matéria do universo afeta o espaço tempo. Incentivado por este modelo de universo estático, ele introduziu um termo nas equações de campo para contrabalancear o efeito da matéria no universo. Este termo é a constante cosmológica Λ e aparece nas equações de campo da seguinte maneira,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

³ O termo fria se refere a característica de que a energia cinética é muito menor do que a energia de massa.

O próprio Einstein descartou a adição deste termo quando se descobriu por Lemaître que seu modelo de universo estático não era compatível com as observações. Contudo, nos dias de hoje a constante cosmológica volta a tomar força por ser uma possível explicação para a expansão acelerada do universo.

Nas equações de Friedmann e Raychaudhuri para um universo plano, o termo aparece da seguinte forma,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.55)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.56)$$

Para obtermos uma expansão do universo acelerada ($\ddot{a} > 0$), é necessário que o lado esquerdo da equação (2.56) seja positivo. Isso acontece quando a contribuição da constante cosmológica supera o termo correspondente ao da matéria no Universo. A própria constante cosmológica pode ser descrita como um termo de fluido onde sua densidade de energia, baseado na equação (2.55), é:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}. \quad (2.57)$$

Assumindo uma equação de estado como (2.49) e tendo em vista a conservação do tensor energia-momento, obtemos a seguinte lei de conservação,

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2} \right) = 0. \quad (2.58)$$

Como ρ_Λ é constante, então a solução para a equação acima é:

$$\rho_\Lambda = -\frac{p_\Lambda}{c^2}. \quad (2.59)$$

A constante cosmológica possui uma pressão negativa. Isso acontece porque, para que a densidade de energia permaneça constante a medida que o universo vai se expandindo, o trabalho deve ser realizado no próprio fluido da constante cosmológica, característica associada com um sinal negativo na pressão.

A solução da equação de Friedmann para este caso é a solução da equação:

$$H = cte. \quad (2.60)$$

Esta equação nos leva a um fator de escala que depende de uma exponencial:

$$a(t) \propto e^{Ht}. \quad (2.61)$$

Esta característica está associada com um modelo de universo inflacionário. Neste modelo, em um espaço de tempo muito curto, logo após o seu início, o universo se expandiu drasticamente.

2.5 Perturbações Cosmológicas

É válido assumir o princípio cosmológico no universo em grandes escalas, acima de 200Mpc (YADAV; BAGLA; KHANDAI, 2010). Em escalas menores fica evidente a inomogeneidade do universo, sobretudo quando consideramos estruturas como galáxias e seus aglomerados. Estes desvios são muito pequenos se comparados com o tamanho do universo em si. Dessa forma, podem ser considerados como pequenas perturbações no universo. Tais perturbações são similares ao que foi desenvolvido por (2.18), porém dessa vez considerando a métrica FLRW como fundo:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2.62)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ representa a métrica FLRW de fundo e $h_{\mu\nu}$ são as perturbações. Lembrando que tais perturbações são pequenas o suficiente para que somente os termos de primeira ordem sejam considerados.

A perturbação da métrica pode ser decomposta em bases escalares, vetoriais e tensoriais, onde cada uma delas evolui independentemente das outras na ordem linear. Este resultado vem do *teorema da decomposição*. A métrica descomposta nessas bases é escrita da seguinte maneira:

$$g_{00} = (1 - 2\Psi), \quad (2.63)$$

$$g_{0i} = a(t)w_i, \quad (2.64)$$

$$g_{ij} = -a(t) [\delta_{ij}(1 + 2\Phi) + E_{ij}]. \quad (2.65)$$

Nesta decomposição, os termos ψ e ϕ são as bases escalares, os termos w_i são as base vetoriais e o termo E_{ij} é a base tensorial. Estes são rotulados dessa maneira pela forma como se transformam a partir de uma rotação espacial. Podemos decompor a própria base vetorial em uma parte transversal w_i^\perp e longitudinal w_i^\parallel de forma que:

$$w_i = w_i^\parallel + w_i^\perp. \quad (2.66)$$

A parte longitudinal tem a propriedade $\nabla \times w_i^\parallel = 0$. De forma que podemos escrevê-la como o gradiente de um potencial escalar, $-\vec{\nabla}\kappa = \vec{w}^\parallel$. Então, na base vetorial, existe uma contribuição escalar κ e uma contribuição vetorial w_i^\perp de forma que:

$$w_i = -\kappa_{,i} + w_i^\perp. \quad (2.67)$$

A base tensorial também pode ser decomposta de maneira similar onde:

$$E_{ij} = E_{ij}^\parallel + E_{ij}^\perp + E_{ij}^{TT}. \quad (2.68)$$

O primeiro termo da equação acima é um tensor simétrico que vem de uma contribuição escalar de forma que podemos escrever, $E_{ij}^\parallel = \theta_{,ij}$. O segundo termo vem de um contribuição

vetorial, onde tomamos duas derivadas espaciais de um vetor transverso, $E_{ij}^\perp = v_{i,j} + v_{j,i}$. E a última contribuição é de um termo tensorial que não pode ser decomposto em partes vetoriais ou escalares, o termo transverso e sem traço E_{ij}^{TT} . Este termo que representa as ondas gravitacionais.

A perturbação cosmológica $h_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico que possuem 10 graus de liberdade, onde vimos que 4 desses graus de liberdade se devem aos modos escalares ($\psi, \phi, \kappa, \theta$). Os modos vetoriais (w_i, v_i) contribuem com 2 graus de liberdade cada, pois tem a condição de serem transversos. E por fim o modo tensorial (E_{ij}^{TT}) deve contribuir com 2 graus de liberdade para completar os 10, estes são h_+ e h_\times .

Assim como a métrica, o tensor momento energia pode ser também separado em uma contribuição de fundo e uma pequena perturbação. Perturbando a equação do fluido (2.45), obtemos:

$$\delta T_{00} = -\delta\rho, \quad (2.69)$$

$$\delta T_{0i} = (\bar{\rho} + \bar{p})\delta u_i, \quad (2.70)$$

$$\delta T_{ij} = g_{ij}\delta p + \bar{p}h_{ij}. \quad (2.71)$$

As perturbações feitas no fundo FLRW possuem as mesmas propriedade de invariância de calibre que foram expostas em (2.26). As próximas sessões serão focadas nos estudos dos modos escalares e tensoriais das perturbações independentemente, pois no modelo padrão os modos vetoriais decaem rapidamente (GORBUNOV; RUBAKOV, 2011).

Deste ponto em diante vamos adotar $c = 1$ e $G = 1$.

2.5.1 Perturbações Escalares

Como todas as perturbações evoluem de maneira independente, vamos analisar apenas perturbações escalares escolhendo o calibre apropriado. Devemos escolher o calibre Newtoniano, que anula as contribuições vetoriais e tensoriais da perturbação. Neste calibre impomos $E_{ij} = w_i = 0$, e obtemos:

$$g_{00}(x, t) = 1 + 2\Psi(x, t), \quad (2.72)$$

$$g_{0i}(x, t) = 0, \quad (2.73)$$

$$g_{ij}(x, t) = -a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\Phi(x, t)]. \quad (2.74)$$

A partir destes valores para a métrica podemos calcular as componentes do tensor de Ricci. Obtemos:

$$\delta R_{00} = -3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) + \frac{\nabla^2 \Psi}{a^2}, \quad (2.75)$$

$$\delta R_{ij} = a^2 \delta_{ij} \left\{ \ddot{\Phi} + H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + 2(\dot{H} + 3H^2)(\Phi - \Psi) - \frac{\nabla^2 \Phi}{a^2} \right\} + (\Phi + \Psi)_{,i,j}, \quad (2.76)$$

$$\delta R = 6\ddot{\Phi} - 6H(4\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) - 12(\dot{H} + 2H^2)\Psi - 2\frac{\nabla^2}{a^2}(2\Phi + \Psi). \quad (2.77)$$

As equações de Einstein perturbadas em primeira ordem são:

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(h_{\mu\nu}\bar{R} + \bar{g}_{\mu\nu}\delta R) = 8\pi G\delta T_{\mu\nu}, \quad (2.78)$$

Unindo os resultados obtidos para as quantidades perturbadas com a equação acima, chegamos em uma expressão para as componentes temporais:

$$-3H\dot{\Phi} + 3\Psi H^2 - \frac{\nabla^2 \Phi}{a^2} = -4\pi G\delta\rho. \quad (2.79)$$

Esta equação pode ser interpretada como uma equação de Poisson relativística. No limite onde $a(t) \approx a_0$, os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação desaparecem e obtemos a expressão da equação de Poisson clássica.

Ao lidar com perturbações cosmológicas, é comum fazer uma mudança para o espaço de Fourier. Isto é feito para que equações diferenciais parciais, como (2.79), se tornem equações diferenciais ordinárias e trabalhem apenas com a variável temporal. A transformação,

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.80)$$

nos permite escrever a equação (2.79) da seguinte maneira:

$$-3H\dot{\Phi} + 3\Psi H^2 + \frac{k^2 \Phi}{a^2} = -4\pi G\delta\rho. \quad (2.81)$$

Essa transformação será usada com frequência neste trabalho a fim de auxiliar a encontrar soluções para as perturbações, porque cada modo evolui separadamente até o nível linear.

Para a parte a parte espacial das equações de Einstein perturbadas obtemos:

$$a^2 \delta_{ij} \left\{ -2\ddot{\Phi} + H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + 2(\dot{H} + 3H^2)(\Phi - \Psi) - \frac{\nabla^2 \Phi}{a^2} + \Phi(\dot{H} + 2H^2) + 3H(4\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) - 6(\dot{H} + 2H^2)\Psi - \frac{\nabla^2}{a^2}(2\Phi + \Psi) \right\} - (\Phi + \Psi)_{,i,j} = 8\pi \delta_{ij} \delta p. \quad (2.82)$$

Note que, ambos os lados da equação acima possuem termos em relação a δ_{ij} . Estes termos não contém dependência longitudinal. Portanto, o último termo do lado esquerdo

da equação deve desaparecer, o que nos dá a relação $\Phi = -\Psi$. É importante ressaltar que essa característica é possível por que estamos considerando uma equação de fluido perfeito para o tensor energia-momento. Os fluidos que possuem esta equação de estado são fluidos que não têm termos de viscosidade, transferência de calor ou anisotropia. Esta relação entre os potenciais, em especial, só é válida para o caso onde não haja anisotropia.

Neste ponto é conveniente mudar as variáveis e trabalharmos com o tempo conforme, onde $dt = ad\eta$. Neste cenário as equações (2.81) e (2.82), para $\Psi = -\Phi$, são:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho, \quad (2.83)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi Ga^2\delta p. \quad (2.84)$$

Se usarmos a equação de estado $p = w\rho$, podemos relacionar as equações da seguinte forma:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+w)\Phi' + \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1-3w)\right]\Phi + wk^2\Phi = 0. \quad (2.85)$$

O terceiro termo do lado esquerdo dessa equação pode ser anulado usando as equações de Friedmann no tempo conforme:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3}G\rho, \quad , \quad 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp. \quad (2.86)$$

O que nos leva a expressão:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+w)\Phi' + wk^2\Phi = 0. \quad (2.87)$$

Esta é uma equação analítica e podemos resolve-la para diferentes épocas do Universo. No caso geral para um fluido cuja a equação de estado é $\rho = wp$, o fator de escala tem o seguinte comportamento:

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (2.88)$$

Para o tempo conforme a relação se torna:

$$a(\eta) = a_0 \eta^{\frac{2}{1+3w}}. \quad (2.89)$$

Substituindo esse resultado em (2.86) obtemos:

$$\Phi'' + \frac{6 + 6w}{1 + 3w} \frac{\Phi'}{\eta} + wk^2\Phi = 0. \quad (2.90)$$

Podemos mudar as coordenadas dessa equação fazendo $\Phi = f(\eta)\eta^\beta$, onde $\beta = \frac{-5}{2+6w}$. Com essa mudança, os termos de derivadas são escritos da seguinte forma:

$$\Phi' = f'\eta^\beta + f\beta\eta^{\beta-1}, \quad (2.91)$$

$$\Phi'' = f''\eta^\beta + 2f'\beta\eta^{\beta-1} + f\beta(\beta-1)\eta^{\beta-2}. \quad (2.92)$$

Que substituindo em (2.90), nos dá

$$\eta^2 f'' + \eta f' + f \left(wk^2 \eta^2 - \frac{5(6w+5)}{4(3w+1)^2} \right) = 0 \quad (2.93)$$

Ao introduzir uma variável $x = \sqrt{wk}\eta$, a equação se reescreve:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + f(x^2 - v^2) = 0, \quad v = \frac{\sqrt{5}\sqrt{6w+5}}{2(3w+1)} \quad (2.94)$$

Esta é uma equação de Bessel e sua solução é uma combinação linear dos polinômios de Bessel:

$$\Phi(\eta) = \eta^{\frac{-5}{2+6w}} \left(a_1 J_v(\sqrt{wk}\eta) + a_2 J_{-v}(\sqrt{wk}\eta) \right), \quad (2.95)$$

onde, a_1 e a_2 são constantes e J_v é a função de Bessel primeiro tipo:

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{v+2k}}{k! \Gamma(v+k+1)}. \quad (2.96)$$

2.5.2 Perturbações Tensoriais

Nessa seção vamos estudar o caso das perturbações tensoriais. Estas representam as ondas gravitacionais agora de um ponto de vista da cosmologia. Assim como foi feito na aproximação de campo fraco, devemos usar o calibre sem-traço e transverso, que impõe as seguintes condições:

$$h = h_{0\mu} = h_{ij,k} = 0. \quad (2.97)$$

Para chegar nas equações de campo, calculamos o tensor de Ricci perturbado para os termos espaciais fazendo $i \neq j$. Obtemos:

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{ij} - \frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{H}{2} \dot{h}_{ij} - 2H^2 h_{ij}, \quad (2.98)$$

$$\delta R = \frac{h_{jk,j,k}}{a^4}. \quad (2.99)$$

Substituindo essa relação na equação (2.78) e realizando uma decomposição em Fourier, obtemos a seguinte expressão:

$$\ddot{h}_{ij} - H \dot{h}_{ij} - 2 \left(\frac{-k^2}{2a^2} + \dot{H} + H^2 \right) h_{ij} = 0. \quad (2.100)$$

Esta é uma relação puramente gravitacional. Como estamos considerando um tensor energia-momento para um fluido ideal, assim como no caso de de perturbações escalares, temos $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Ao considerar um fluido geral, com termos de anisotropia, esta equação é modificada pelo lado direito da igualdade.

Para nosso caso é conveniente mudar a variavel temporal do tempo cósmico para o tempo conforme onde, $dt = a(t)d\eta$. A equação se torna:

$$h_{ij}'' + 2 \frac{a'}{a} h_{ij}' + \frac{k^2 h_{ij}}{a^2} + \left(\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) h_{ij} = 0 \quad (2.101)$$

Assim como no caso das perturbações Escalares, esta equação é analítica e pode ser resolvida para diferentes épocas do universo. Vamos estudar o caso geral para a equação de estado $p = w\rho$. Podemos decompor os modos tensoriais em dois modos de polarização caracterizados pelo tensor ε_{ij} , onde $h_{ij}(\eta) = \varepsilon_{ij}h(\eta)$. Neste cenário a relação entre o fator de escala e o tempo conforme é dado pela equação (2.89). Substituindo essas relações mencionadas e omitindo o tensor de polarização, obtemos,

$$h'' - \frac{4}{1+3w} \frac{h'}{\eta} + h \left(k^2 - \frac{4}{1+3w} \frac{1}{\eta^2} \right) = 0. \quad (2.102)$$

A fim de resolver essa equação vamos fazer uma substituição similar a que foi feita no caso das perturbações escalares. Seja $h = y(\eta)\eta^\alpha$, onde $\alpha = \frac{5+3w}{2+6w}$. Dessa forma obtemos:

$$\eta^2 y'' + \eta y' + y \left(k^2 \eta^2 - v^2 \right) = 0, \quad v = \frac{9}{4} \frac{(1-w)^2}{(2(1+3w))} \quad (2.103)$$

A solução dessa estrutura é uma combinação linear dos polinômios de Bessel. Para as ondas gravitacionais obtemos:

$$h_{ij} = \varepsilon_{ij} \eta^{\frac{5+3w}{2+6w}} (b_1 J_v(k\eta) + b_2 J_{-v}(k\eta)) , \quad (2.104)$$

onde b_1 e b_2 são constantes.

3 Teoria escalar-tensorial

A Relatividade Geral é rotulada como uma teoria puramente tensorial, já que é o campo tensorial $g_{\mu\nu}$ que determina a dinâmica das equações de campo. Há uma classe de teorias alternativas de gravitação na qual também é introduzido um campo escalar ϕ para mediar a interação gravitacional. Tais teorias são conhecidas como escalares-tensoriais e tem como característica o acoplamento não-mínimo de um campo escalar ao termo de curvatura. A teoria mais simples pertencente a esta classe é a teoria de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961), que propôs a introdução de um campo escalar que faz papel do inverso da constante gravitacional de Newton.

A motivação por trás da teoria de Brans-Dicke foi uma visão filosófica conhecida como Princípio de Mach. Tal princípio supõe que as propriedades geométricas e inerciais do espaço não têm sentido em um universo vazio e que suas propriedades físicas possuem sua origem na matéria contida no todo. A Relatividade Geral contém elementos desse princípio, contudo não o incorpora completamente. As equações de Einstein, de fato, relacionam a geometria do espaço tempo com a distribuição de matéria existente no todo, contudo falha no aspecto de que a geometria não é unicamente determinada pela distribuição de matéria. Neste cenário, as soluções de vácuo na teoria desapareceriam.

A ideia contida no princípio de Mach reflete sobre a origem da inércia. Para Mach, as força inerciais observadas em um referencial acelerado podem ser interpretadas como efeitos gravitacionais que se originam em matérias distâtes. Há um experimento mental comumente usado para ilustrar esse princípio: Suponha um universo completamente vazio exceto por um laboratório com um observador que possui um rifle e um giroscópio. Imagine que o laboratório tenha uma massa pequena o suficiente para que possa ser feito uma aproximação de campo fraco. Nesse cenário, de acordo com a Relatividade Geral, seria possível fazer o laboratório girar atirando por uma janela tangencialmente com a arma. O giroscópio manteria a direção do projétil e giraria em relação as paredes do laboratório. De acordo com o princípio de Mach, a bala, que possui uma massa muito menor e está mais distante seria mais relevante do que as próprias paredes para determinar um referencial inercial.

Este capítulo se limita a estudar a teoria de Brans-Dicke. A estrutura a seguir é dividida na seguinte forma: A primeira seção discute a relação do campo escalar e o princípio de Mach. Em seguida vamos deduzir as equações de campo da teoria e comparar com a Relatividade Geral. Na terceira seção vamos estudar soluções cosmológicas utilizando a métrica FLRW plana e, por fim, na última sessão, vamos discutir perturbações cosmológicas para a teoria.

3.1 Campo Escalar

O fundamento por trás da introdução de um campo escalar na gravitação é a explicação da origem da inércia. No trabalho feito por Sciama ([SCIAMA, 1953](#)), foi introduzido um modelo teórico baseado na visão de Mach, onde um referencial inercial era definido através das “*estrelas fixas*”, isto é, em relação a toda distribuição de matéria do universo. Este modelo implica que a origem da inercia seria gravitacional. Dessa conclusão, Brans e Dicke propuseram que a constante gravitacional, G , deveria ser uma função da distribuição de matéria do universo.

Estudos feitos por Dirac na década de 30 ([DIRAC, 1938](#)), observaram uma curiosa coincidência nas razões entre constantes fundamentais da natureza. Através destas razões, percebemos a relação:

$$\frac{1}{G} \approx \frac{M_u}{R_U}, \quad (3.1)$$

onde M_U , R_U e G são, respectivamente, a massa do universo, o raio do universo e a constante gravitacional de Newton. Assumindo a ideia de Brans-Dicke para um G que varia, obtemos a relação:

$$\square \frac{1}{G} = \rho. \quad (3.2)$$

Essa relação sugere que G^{-1} seja um campo escalar potencial. Então, é introduzida uma nova variável dinâmica na gravitação, o campo escalar:

$$\phi \propto \frac{1}{G}. \quad (3.3)$$

A introdução desse novo campo modifica a ação de Einstein-Hilbert. Devemos incluir um termo na ação que levará em conta a contribuição do campo escalar no tensor energia-momento. A nova ação tem a seguinte estrutura:

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\phi) = 0, \quad (3.4)$$

onde \mathcal{L}_ϕ é a densidade lagrangiana do campo escalar. Nessa expressão, o campo ϕ aparece acoplado não-minimamente no termo que representa a geometria. Como a gravitação é universal, no sentido de que é agregada a toda a física, o campo escalar ϕ também tem uma contribuição universal. Isso gera algumas consequências, como a possível violação do princípio de equivalência forte. Este afirma que a única influência da gravidade é pela métrica e localmente pode ser anulada com o referencial apropriado. Este princípio forte se mostra incompatível com as ideias propostas por Brans-Dicke, afinal, não somente a métrica tem papel na física local mas também é necessário levar em conta a contribuição do campo escalar.

O termo que define a densidade lagrangiana para o campo ϕ deve resultar em equações de segunda ordem. A escolha natural é:

$$\mathcal{L}_\phi = -\omega \frac{\phi_{,\rho} \phi^{,\rho}}{\phi}, \quad (3.5)$$

onde ω é um parâmetro adimensional chamado de parâmetro de Brans-Dicke. O termo ϕ^{-1} foi adicionado para manter o parâmetro de Brans-Dicke adimensional. Dessa forma, a ação total da teoria é:

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{16\pi}{c^4} \mathcal{L}_m \right). \quad (3.6)$$

As equações de campo para esta serão deduzidas na seção seguinte.

3.2 Teoria de Brans-Dicke

As equações de campo para a teoria de Brans-Dicke podem ser obtidas através de um princípio variacional aplicado em (3.6). Nessa ação as variáveis dinâmicas são a métrica $g_{\mu\nu}$ e o campo escalar ϕ , então é esperado encontrar uma equação de campo para cada. Aplicando o princípio variacional, encontramos as seguintes integrais:

$$\int d^4x \delta (\sqrt{-g} \phi R) - \int d^4x \delta \left(\frac{\omega}{\phi} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi \right) + \int d^4x \delta \left(\frac{16\pi \sqrt{-g}}{c^4} \mathcal{L}_m \right) = 0. \quad (3.7)$$

Vamos analisar cada integral da equação (3.7) separadamente. Para começar, vamos manipular o primeiro termo:

$$\begin{aligned} \delta [\phi R \sqrt{-g}] &= R \sqrt{-g} \delta \phi + \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \phi \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \left[\nabla_\lambda (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \right] \phi g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora, o segundo termo:

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi \sqrt{-g} \right] &= \left[-\frac{\omega}{\phi^2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \delta \phi - \frac{\omega}{2\phi} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{\phi} (\delta (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\mu (\delta \phi)) \right] \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Do terceiro termo, obtemos a definição do tensor momento energia:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.10)$$

Por fim, a partir dos resultados integramos por partes e descartamos os termos de superfície. Obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \int d^4x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \phi - \frac{8\pi}{c^4} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{2\phi} g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \right. \\ \left. - \frac{\omega}{\phi} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + g_{\mu\nu} \square \phi - \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \\ + \int d^4x \left(\frac{2\omega}{\phi} \square \phi - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + R \right) \sqrt{-g} \delta \phi = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dessas duas integrais, deduzimos as duas equações de campo da teoria. Da primeira, obtemos a equação de campo referente a métrica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{c^4\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\square\phi). \quad (3.12)$$

Comparando esta equação de campo com as equações de Einstein percebemos dois termos a mais: O segundo termo do lado direito é o correspondente ao tensor energia-momento para o campo ϕ . Enquanto o terceiro termo do lado direito é consequência das derivadas segundas da métrica. Estas foram eliminadas através de uma integração por partes.

A segunda integral nos dá a equação de campo referente a ϕ :

$$\square\phi = \frac{1}{2} \frac{\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi}{\phi} - \frac{\phi}{2\omega}R. \quad (3.13)$$

Por causa da sua estrutura, a equação acima é também chamada de equação de Klein-Gordon. Destas duas últimas equações podemos retirar toda informação sobre a dinâmica dos campos na teoria de Brans-Dicke. Contudo, ambas expressões possuem variáveis em comum, o que significa que é possível simplifica-las. Ao calcular o traço da expressão (3.12) encontramos:

$$R = \frac{\omega}{\phi^2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + 3\frac{\square\phi}{\phi} - \frac{8\pi}{c^4\phi}T, \quad (3.14)$$

que, ao substituirmos em (3.13) resulta em:

$$\square\phi = \frac{8\pi}{(3+2\omega)c^2}T. \quad (3.15)$$

A expressão acima está de acordo com a visão de Mach, por que encontramos uma relação entre o campo escalar e a distribuição de matéria contida no universo. Por fim, unindo os resultados (3.15) e (3.14) obtemos uma expressão simplificada que contém informação de ambas as equações:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1+\omega}{3+2\omega}g_{\mu\nu}T \right) + \frac{\omega}{\phi^2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi. \quad (3.16)$$

As equações (3.12)-(3.16) representam a dinâmica da teoria. Elas ditam como o campo escalar está inserido nas equações que determinam a métrica. Embora o campo ϕ tenha tal influência sobre as equações de campo, a relação entre matéria e geometria permanece inalterada. Isso significa que o resultado da conservação do tensor energia-momento, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, obtido na Relatividade Geral continua sendo válido na teoria de Brans-Dicke.

Como a Relatividade Geral é uma teoria bem sucedida em vários aspectos, é interessante estudar a conexão entre ela e a teoria de Brans-Dicke. Para o limite de

$\omega \rightarrow \infty$, percebemos que a equação (3.15) é da ordem $\square\phi \approx \mathcal{O}(\omega^{-1})$. Portanto, assumimos o campo ϕ com a mesma ordem de grandeza:

$$\phi \approx \frac{1}{G} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (3.17)$$

Usando este limite para o campo ϕ , as equações de campo (3.12) se tornam:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{c^4\phi}T_{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (3.18)$$

Aparentemente, nesse limite recuperamos a Relatividade Geral. Contudo, no trabalho (ROMERO; BARROS, 1993) foi mostrado que esta situação não ocorre para todos os casos. A constatação foi que “ao obter uma solução das equações de campo de Brans-Dicke para uma certa configuração de matéria representada por um tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, então, no limite $\omega \rightarrow \infty$ essa solução se reduz as mesmas soluções da equação de Einstein para o mesmo $T_{\mu\nu}$ ”. No mais, os contraexemplos apresentados no trabalho mostram que o comportamento assintótico de ϕ quando $\omega \rightarrow \infty$ da equação (3.17) nem sempre acontece.

O próximo passo do trabalho é estudar a teoria de Brans-Dicke do ponto de vista da cosmologia, encontrando soluções para diferentes eras do universo.

3.3 Cosmologia Brans-Dicke

Assim como na Relatividade Geral, vamos partir de um modelo de universo homogêneo e isotrópico e plano. Dessa forma a métrica correspondente é a métrica FLRW com $k = 0$,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^\mu dx^\nu. \quad (3.19)$$

Substituindo essa métrica nas equações (3.12) e (3.13) e considerando um fluido perfeito, obtemos as equações de campo para a cosmologia na teoria de Brans-Dicke:

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \frac{8\pi}{\phi}\rho + \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\Lambda}{\phi}, \\ \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} &= \frac{4\Lambda + 8\pi(\rho - 3p)}{(3 + 2\omega)\phi}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que, como o tensor de energia-momento se conserva, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. A equação da conservação de energia que obtemos na Relatividade Geral (2.46) também é válida aqui. Então, as expressões da lei de conservação do fluido perfeito e, conseqüentemente, o resultado (2.50) também pode ser substituído nas equações cosmológicas para Brans-Dicke.

Podemos assumir uma forma simples para as soluções das equações de campo (BAPTISTA; FABRIS; GONÇALVES, 1996) onde o fator de escala e o campo escalar obedecem uma lei de potência:

$$a(t) \propto t^r \quad , \quad \phi(t) \propto t^s. \quad (3.21)$$

Combinando as equações de campo a equação de estado $p = \alpha\rho$ encontramos as seguintes equações para as soluções de lei de potência:

$$-3r(r-1) = 8\pi\rho t^{2-s} \left(\frac{2 + \omega(1+3\alpha) + 3\alpha}{3+2\omega} \right) + s^2(1+\omega) - s. \quad (3.22)$$

A equação de Klein-Gordon é dada por:

$$s^2 + s(3r-1) = \frac{8\pi}{3+2\omega} \rho t^{2-s} (1-3\alpha). \quad (3.23)$$

E as relações de conservação de energia obtidas através da conservação do tensor momento energia são:

$$\dot{\rho} + 3\frac{r}{t}\rho(1+\alpha) = 0, \quad (3.24)$$

$$\rho_{,i} = 0. \quad (3.25)$$

Através destas equações (3.22)-(3.25), conseguimos encontrar as soluções cosmológicas correspondentes para os principais casos do universo. Estes casos são distintos através do parâmetro α na equação de estado. Vamos analisar os três valores principais já mencionados ($\alpha = 0, \alpha = 1/3, \alpha = -1$) e também o caso do vácuo que, diferente da Relatividade Geral, não admite soluções triviais.

Para o caso de um universo composto por matéria não-relativística, temos $\alpha = 0$, que substituindo nas equações encontramos as seguintes soluções:

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2+2\omega}{4+3\omega}}, \quad \phi(t) = \phi_0 t^{2-3\frac{2+2\omega}{4+3\omega}}. \quad (3.26)$$

Ao comparar o resultado do fator de escala com o obtido na Relatividade Geral (2.52), notamos que no intervalo $\omega > -4/3$ o fator de escala evolui mais devagar em comparação com o caso da RG.

Para o caso de um universo composto por radiação $\alpha = 1/3$, obtemos:

$$a(t) = a_0 t^{1/2}, \quad \phi = \phi_0. \quad (3.27)$$

Este é a o mesmo resultado obtido no caso da Relatividade Geral (2.53).

Para o caso de um universo cuja a componente dominante é a constante cosmológica Λ , obtemos:

$$a(t) = a_0 t^{\omega + \frac{1}{2}}, \quad \phi(t) = \phi_0 t^2. \quad (3.28)$$

Neste cenário a solução apresenta uma lei de potência ao invés do crescimento exponencial obtido para a Relatividade Geral (2.61). Contudo, no limite de ω muito alto a solução pode ser se aproximar do caso exponencial.

No caso do vácuo, nenhuma densidade de energia é considerada. Tomamos $\rho = 0$ e obtemos as seguintes soluções:

$$a(t) = a_0 t^{\frac{-(1+\omega) \pm \sqrt{1+2\omega/3}}{4+3\omega}}, \quad \phi(t) = \phi_0 t^{\frac{1 \mp \sqrt{1+2\omega/3}}{3(4+3\omega)}}. \quad (3.29)$$

Todas as soluções no limite de $\omega \rightarrow \infty$ retornam as soluções obtidas para o caso da Relatividade Geral.

3.4 Perturbações Cosmológicas

A maneira de fazer perturbações cosmológicas na teoria de Brans Dicke é fundamentalmente o mesmo da Relatividade Geral. Vamos fazer uma perturbação em um fundo FLRW de forma que $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Neste caso também vamos perturbar o campo escalar de forma que $\phi \rightarrow \bar{\phi} + \delta\phi$, onde $\delta\phi$ é uma perturbação de mesma ordem que $|h_{\mu\nu}|$. Dessa forma, perturbando a equação (3.16) obtemos:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & \frac{8\pi}{\bar{\phi}} \left(\delta T_{\mu\nu} - \frac{1+\omega}{3+2\omega} (h_{\mu\nu} \bar{T} + \bar{g}_{\mu\nu} \delta T) \right) - \frac{8\pi \delta\phi}{\bar{\phi}^2} \left(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1+\omega}{3+2\omega} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T} \right) + \\ & + \frac{\omega}{\bar{\phi}^2} (\bar{\phi}_{;\mu} \delta\phi_{;\nu} + \delta\phi_{;\mu} \bar{\phi}_{;\nu}) - \frac{2\delta\phi\omega}{\bar{\phi}^3} \bar{\phi}_{;\mu} \bar{\phi}_{;\nu} + \frac{1}{\bar{\phi}} (\bar{\phi} + \delta\phi)_{;\mu\nu}^{(1)} - \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}^2} (\bar{\phi} + \delta\phi)_{;\mu\nu}^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $x^{(0)}$ é uma quantidade que não contém termos perturbativos e $x^{(1)}$ é uma quantidade que contém termos perturbativos em primeira ordem. Note que, na equação acima explicitamos apenas a parte de primeira ordem em relação as perturbações. A equação (3.30) contém informação a respeito da equação de campo e da equação de Klein-Gordon.

A equação de Klein-Gordon perturbada é:

$$\delta\ddot{\phi} + \frac{\dot{h}_{kk}}{2} - \frac{\nabla^2 \delta\phi}{a^2} + 3H\delta\dot{\phi} - h^{kk} a^2 H \dot{\phi} = \frac{8\pi}{3+2\omega} \delta T. \quad (3.31)$$

Como a teoria de Brans-Dicke é invariante por transformações de coordenadas gerais, toda a discussão sobre invariância de calibre feita no caso da Relatividade Geral também é válida aqui. Os modos escalares, vetoriais e tensoriais evoluem no tempo independentemente. Dessa forma, podemos escolher calibres livremente para isolar os modos de perturbação que estamos interessados.

3.4.1 Perturbações tensoriais

Para estudar apenas os modos tensoriais, vamos usar o calibre TT, que exclui as contribuições de outras perturbações. Neste calibre, impomos $h_{0\mu} = h_{kk} = h_{ij,k} = 0$. O tensor de Ricci perturbado é o mesmo calculado em (2.98),

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{ij} - \frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{H}{2} \dot{h}_{ij} - 2H^2 h_{ij}. \quad (3.32)$$

O tensor energia-momento perturbado é o mesmo usado para um fluido ideal. Com estes resultados pré-estabelecidos, calculamos os termos h_{ij} para $i \neq j$ da equação (3.30) e obtemos:

$$\ddot{h}_{ij} - \left(H - \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} \right) \dot{h}_{ij} + \left[-\frac{\nabla^2}{a^2} - \left(2\dot{H} + 2H^2 + 2H \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} \right) \right] h_{ij} = 0. \quad (3.33)$$

Esta é a equação de ondas gravitacionais para a teoria de Brans-Dicke. É conveniente mudar a variável temporal e escrever a expressão acima em função do tempo conforme η , tal que $dt = d\eta a(t)$. A mudança nos leva á:

$$h''_{ij} + \left(\frac{\phi'}{\phi} - 2\frac{a'}{a} \right) h'_{ij} + \left[-\nabla^2 - 2\frac{a''}{a} + 2\frac{a'^2}{a^2} - 2\frac{a'\phi'}{a\phi} \right] h_{ij} = 0. \quad (3.34)$$

A fim de resolver a equação, vamos mudar as variáveis para o espaço de Fourier, realizando a seguinte transformação:

$$h_{ij}(\vec{x}, \eta) = \sqrt{16\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \varepsilon_{ij}(\hat{k}) \frac{a(\eta)\mu(\eta)}{\sqrt{\phi(\eta)}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (3.35)$$

onde $\varepsilon_{ij}(\hat{k})$ é o tensor de polarização. Ao mudar as variáveis os termos chave da equação se tornam,

$$h'_{ij} = \frac{a'}{a} h_{ij} + \frac{\mu'}{\mu} h_{ij} - \frac{\bar{\phi}'}{2\bar{\phi}} h_{ij}, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} h''_{ij} &= \frac{a''}{a} h_{ij} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} h_{ij} + \frac{\mu'}{\mu} h_{ij} - \frac{\bar{\phi}'}{2\bar{\phi}} h_{ij} \right) - \frac{a'^2}{a^2} h_{ij} \\ &+ \frac{\mu''}{\mu} h_{ij} + \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a'}{a} h_{ij} + \frac{\mu'}{\mu} h_{ij} - \frac{\bar{\phi}'}{2\bar{\phi}} h_{ij} \right) - \frac{\mu'^2}{\mu^2} h_{ij} \\ &- \frac{\bar{\phi}''}{2\bar{\phi}} + \frac{\bar{\phi}'^2}{2\bar{\phi}^2} - \frac{\bar{\phi}'}{2\bar{\phi}} \left(\frac{a'}{a} h_{ij} + \frac{\mu'}{\mu} h_{ij} - \frac{\bar{\phi}'}{2\bar{\phi}} h_{ij} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo estes em (3.34) e simplificando termos obtemos,

$$\mu'' + \mu \left[k^2 + \frac{a''}{a} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{\phi}'}{\bar{\phi}} \right)^2 + \frac{a'\bar{\phi}'}{a\bar{\phi}} \right] = 0. \quad (3.38)$$

De forma similar ao que fizemos na equação (3.21), vamos assumir as soluções como sendo dadas por leis de potência. Assim,

$$\mu'' + \mu \left(k^2 - \frac{f(r, s)}{\eta^2} \right) = 0, \quad (3.39)$$

onde,

$$f(r, s) = \frac{2r \left(r + \frac{3}{2}s - 1 \right) + \frac{s}{2} \left(\frac{s}{2} - 1 \right)}{(1-r)^2}. \quad (3.40)$$

Podemos novamente mudar as variáveis da equação (3.39) a fim de encontrar uma estrutura familiar. Definindo $\mu(x) = y(x)\eta^{1/2}$ com, $x = k\eta$, obtemos:

$$x^2 y'' + xy' + y(x^2 - v^2) = 0, \quad (3.41)$$

onde,

$$v = \frac{4f(r, s) + 1}{4}. \quad (3.42)$$

As soluções para esta equação diferencial são os polinômios de Bessel de ordem v . Obtendo para a expressão final:

$$h_{ij} = \varepsilon_{ij} \eta^{1/2} (c_1 J_v(k\eta) + c_2 J_{-v}(k\eta)) , \quad (3.43)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

3.4.2 Perturbações Escalares

Para estudar o caso das perturbações escalares, vamos seguir um caminho similar ao feito no trabalho (BAPTISTA; FABRIS; GONÇALVES, 1996). Vamos utilizar o calibre síncrono nas equações de campo perturbadas, $h_{\mu 0}$. Nesse calibre encontramos as componentes temporais da equação (3.30):

$$\delta R_{00} = \frac{8\pi}{\bar{\phi}} \left(\delta\rho - \frac{\delta\phi\bar{\rho}}{\bar{\phi}} \right) \left(\frac{3\alpha\omega + 3\alpha + \omega + 2}{2\omega + 3} \right) + \frac{2\omega}{\bar{\phi}^2} \delta\dot{\phi}\bar{\phi} - \frac{2\omega\delta\dot{\phi}^2}{\bar{\phi}^3} + \frac{\ddot{\phi}}{\bar{\phi}} - \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}^2} \ddot{\phi} , \quad (3.44)$$

onde,

$$R_{00} = \frac{1}{2a^2} \left(\ddot{h}_{kk} - 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{kk} \right) . \quad (3.45)$$

Vamos reescrever as variáveis e trabalhar com as seguintes quantidades:

$$\lambda = \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}} , \quad (3.46)$$

$$h = \frac{h_{kk}}{a^2} , \quad (3.47)$$

$$\Delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} . \quad (3.48)$$

A equações perturbadas (3.30) e (3.31) podem ser reescritas em função dessas novas quantidades:

$$\frac{1}{2}\ddot{h} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = \frac{8\pi}{\bar{\phi}}\rho(\Delta - \lambda) \left(\frac{2 + \omega + 3\omega\alpha + 3\alpha}{3 + 2\omega} \right) + \ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}\frac{\dot{\phi}}{\bar{\phi}}(1 + \omega) , \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} + \dot{\lambda} \left(2\frac{\dot{\phi}}{\bar{\phi}} + 3\frac{\dot{a}}{a} \right) + \lambda \left(\frac{\ddot{\phi}}{\bar{\phi}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\bar{\phi}} \right) - \frac{1}{2}\dot{h}\frac{\dot{\phi}}{\bar{\phi}} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\lambda &= \\ &= \frac{8\pi}{(3 + 2\omega)}\frac{\Delta}{\bar{\phi}}\rho(1 - 3\alpha) . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Com essa equação, podemos estudar a dinâmica das perturbações escalares de eras particulares do universo. No trabalho (BAPTISTA; FABRIS; GONÇALVES, 1996) foi feito um estudo completo para os diferentes casos no universo (matéria, radiação, vácuo, inflação). Nesta sessão vamos revisar o resultado para o caso de um universo dominado pela constante cosmológica. Este será útil para fins comparativos mais adiante. Nesse cenário não há perturbações de densidade, então $\Delta = 0$. Substituindo as soluções (3.28)

nas expressões (3.49) e (3.50) e realizando uma decomposição de Fourier, obtemos o par de equações perturbadas:

$$\ddot{h} + \frac{2r}{t}\dot{h} - 2\ddot{\lambda} - \frac{4}{t}(2r+1)\dot{\lambda} - \frac{16\pi}{(1+r)}r\rho\lambda = 0, \quad (3.51)$$

$$\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}\left(\frac{2+3r}{t}\right) + \frac{1}{t^{2r+2}}k^2\lambda + \frac{16\pi}{t^2(1+r)}\rho\lambda = \frac{1}{t}\dot{h}. \quad (3.52)$$

Podemos eliminar os termos \dot{h} e \ddot{h} , encontrando uma expressão somente em função de λ e suas derivadas, se substituirmos a derivada da equação (3.52) em (3.51):

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} + \ddot{\lambda}\left(\frac{5r+3}{t}\right) + \dot{\lambda}\left(\frac{1}{t^{2r}}k^2 + \frac{(6r^2+6r-2)}{t^2}\right) + \\ + \lambda\left(\frac{1}{t^{2r+1}}k^2 + \frac{(6r^2-4r-2)}{t^3}\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tal equação pode ser resolvida analiticamente e a solução para λ é:

$$\lambda(t) = \frac{1}{t} \left[\int t^{\frac{1-5r}{2}} (C_1 J_k(y) + C_2 J_{-k}(y)) dt + C_3 \right], \quad (3.54)$$

onde J_k é a função de Bessel de ordem k e C_1 , C_2 e C_3 são constantes. Para o caso de $\omega = \frac{1}{2}$, a equação tem a forma de uma equação de Euler, cuja as soluções são:

$$\lambda = t^n, \quad n = -2 \pm \sqrt{4 - k^2}. \quad (3.55)$$

Nos limites assintóticos com $t \rightarrow 0$, tanto $\lambda(t)$ quanto $h(t)$ possuem modos crescentes. E para o limite $t \rightarrow \infty$ ambos possuem apenas modos oscilatórios que decaem. Veja, (BAPTISTA; FABRIS; GONÇALVES, 1996).

4 Teoria Unimodular da Gravitação

Neste capítulo, abordaremos o tema central do trabalho, a gravitação Unimodular. Como mencionado na introdução, esta é uma proposta de gravitação alternativa que tem sua origem pouco depois da Relatividade Geral ([EINSTEIN, 1952](#)). A teoria é essencialmente a Relatividade Geral, porém com o seguinte vínculo imposto no determinante da métrica:

$$\sqrt{-g} = 1, \quad (4.1)$$

o que determina um elemento de volume fixo no espaço tempo. Essa escolha carrega consequências como, por exemplo, a redução do número de graus de liberdade da teoria. Tal redução está associada com o fato de que a teoria deixa de ser invariante por difeomorfismos gerais, em contraste com a hipótese da Relatividade Geral clássica. Ao invés disso, a teoria é invariante por difeomorfismos transversos ([LOPEZ-VILLAREJO, 2011](#)). Essa diferença será relevante ao estudarmos perturbações cosmológicas. O formalismo invariante de calibre muda com o difeomorfismo considerado, trazendo peculiaridades ao escolhermos calibres que estamos acostumados a usar na teoria clássica.

Outra consequência da condição Unimodular é o fato de que a conservação do tensor energia-momento não é mais uma condição necessária. Na teoria clássica, o resultado $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ é uma consequência das identidades de Bianchi, já no caso Unimodular o mesmo não acontece devido a estrutura das equações de campo. Podemos impor, como uma hipótese independente, que o tensor energia-momento se conserve. Neste caso a teoria se reduz à Relatividade Geral com a adição de uma constante de integração que pode ser interpretada como constante cosmológica Λ . Essa característica é interessante do ponto de vista do “problema da constante cosmológica”, porque como Λ aparece como uma constante de integração, seu valor é indeterminado e não depende de outras variáveis.

Vamos, aqui, explorar uma formulação Unimodular da teoria de Brans-Dicke ([ALMEIDA et al., 2022](#)). Usaremos a mesma metodologia usada para estudar o caso RGU, levando em conta as particularidades de Brans-Dicke mas nos restringindo o estudo aos aspectos clássicos da teoria.

O capítulo tem a seguinte estrutura: começamos estudando o caso da Relatividade Geral Unimodular (RGU) e suas consequências na cosmologia, depois partimos para o tema central do trabalho, que é o caso Brans-Dicke Unimodular (BDU). Em seguida, vamos expor estas soluções cosmológicas e propor uma análise perturbativa com comentários sobre soluções estáveis.

4.1 Relatividade Geral Unimodular

As equações de campo para a Relatividade Geral Unimodular são obtidas através da adição de um multiplicador de Lagrange χ na ação de Einstein-Hilbert. A condição Unimodular pode ser generalizada para $\sqrt{-g} = \xi$, onde ξ é uma constante qualquer. Dessa forma, podemos escrever a ação gravitacional da seguinte maneira:

$$S_{HU} = \int d^4x \left[\sqrt{-g}R - \chi(\sqrt{-g} - \xi) + \sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right]. \quad (4.2)$$

O processo de encontrar as equações de campo nesse caso é semelhante ao caso da teoria clássica. Variando a ação em relação a métrica, obtemos as seguintes equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{\chi}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

A diferença se encontra no termo extra que depende de χ . A fim de eliminar esse termo, calculamos o traço desta equação e encontramos:

$$\chi = \frac{R}{2} + \frac{8\pi G}{c^4} \frac{T}{2}, \quad (4.4)$$

que pode ser reinserido em (4.3) para obtermos,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T \right). \quad (4.5)$$

Note que, diferente das equações de Einstein, essas equações possuem 9 componentes independentes. Este grau de liberdade a menos se deve ao fato das equações não possuírem traço. Como consequência dessa estrutura, as identidades de Bianchi não implicam que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, uma vez que aplicando estas para a equação (4.5) obtemos a seguinte relação:

$$\frac{R^{;\nu}}{4} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{;\mu}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}T^{;\nu} \right). \quad (4.6)$$

Essa equação pode ser interpretada como uma lei de conservação modificada. Há uma equivalência entre a teoria Unimodular e a Relatividade Geral com a constante cosmológica. Contudo, esta só ocorre quando impomos, independentemente, a condição de que o tensor energia-momento se conserve. Com tal condição imposta, a equação (4.6) se torna:

$$\frac{R^{;\nu}}{4} = -\frac{2\pi GT^{;\nu}}{c^4}. \quad (4.7)$$

Integrando, obtemos o seguinte resultado:

$$R = -8\pi GT - 4\Lambda. \quad (4.8)$$

O termo Λ é uma constante de integração que pode ser interpretado como a constante cosmológica. Substituindo esse resultado em (4.5), obtemos o caso RG+ Λ ,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda. \quad (4.9)$$

Podemos também estudar a teoria de forma que o tensor energia-momento não se conserve. (Veja, (VELTEN; CARAMÊS, 2021) para uma revisão sobre teorias não-conservativas). No que segue a seção vamos estudar consequências para essa escolha.

4.1.1 Invariância de Calibre

A invariância de calibre como acontece na teoria clássica da Relatividade Geral vem do fato de que é uma teoria invariante por difeomorfismos gerais. Para o caso Unimodular, temos o vínculo da teoria, que fixa $\sqrt{-g} = cte$. Desta forma, ao fazermos uma perturbação linear como em (2.18), temos a condição de que:

$$h_{11} + h_{22} + h_{33} = 0. \quad (4.10)$$

Esta condição é inerente à teoria e portanto é independente da escolha de calibre. Se considerarmos uma transformação das coordenadas de forma que $x^\mu \rightarrow x'^\mu + \xi^\mu(x)$, obteremos o resultado (2.26):

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (4.11)$$

O vínculo (4.10) impõe a condição extra de que $\xi_{,\mu}^\mu = 0$. Este vínculo caracteriza a invariância por difeomorfismos transversos (LOPEZ-VILLAREJO, 2011).

Por termos um novo tipo de difeomorfismo é alterada a possibilidade de utilizar dois calibres específicos, os calibres síncrono e o newtoniano. Considere a decomposição da perturbação da métrica em modos escalares, vetoriais e tensoriais,

$$ds^2 = a^2 \left\{ (1 + 2\phi)d\eta^2 - 2w_{,i}dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,i,j}] dx^i dx^j \right\}. \quad (4.12)$$

O vínculo Unimodular implica que o traço dessa métrica deve ser zero. Então, a soma do determinante das perturbações deve se anular:

$$\nabla^2 E + \phi - 3\psi = 0. \quad (4.13)$$

No calibre newtoniano, onde consideramos $w = E = 0$, obtemos através da equação acima a relação $\phi = 3\psi$. Mas, se o tensor energia-momento for invariante sobre rotações espaciais, então é dito que sua anisotropia é zero e por consequência os modos escalares são iguais, $\phi = \psi$. A única solução possível para este caso é $\phi = \psi = 0$, o que impossibilita o uso do calibre newtoniano para as perturbações escalares.

Usando o calibre síncrono, fazemos $\phi = w = 0$ e podemos encontrar o traço das perturbações definindo,

$$h = 2(3\psi - \nabla^2 E). \quad (4.14)$$

Comparando esta quantidade com a equação (4.13), notamos que para $\phi = 0$ temos $h = 0$. Em um universo em expansão, se considerarmos a conservação do tensor energia-momento, a quantidade h se relaciona com as perturbações na densidade da seguinte forma (MUKHANOV; FELDMAN; BRANDENBERGER, 1992),

$$\ddot{h} + 2H\dot{h} - 4\pi G(1 + 3c_s^2)\delta\rho = 0, \quad (4.15)$$

onde c_s é uma constante que representa a velocidade do som no fluido. Para $h = 0$ temos $\delta\rho = 0$, o que significa que não há perturbação se há conservação do tensor energia-momento.

No trabalho (FABRIS et al., 2022a), é estudado o caso onde $\nabla_\mu T^{\mu\nu} \neq 0$. Partindo da equação da conservação modificada, foi mostrado que o calibre síncrono pode ser usado para estudar perturbações, mas o calibre newtoniano segue sendo inutilizável. Mais adiante, vamos ao analisar as perturbações cosmológicas e considerar deste resultado para utilizar o calibre síncrono no caso de Brans-Dicke Unimodular.

4.1.2 Cosmologia Unimodular

Vamos estudar as equações cosmológicas no contexto Unimodular. Novamente, utilizaremos a métrica FLRW fazendo $k = 0$ e assumimos que estamos em um universo cuja a descrição termodinâmica é a de um fluido perfeito. Substituindo essas condições nas equações de campo (4.5), obtemos:

$$\dot{H} = -4\pi G\tilde{\rho}, \quad (4.16)$$

onde $\tilde{\rho} = \rho + p$, que é uma quantidade relacionada com a entalpia do sistema. Outra equação equivalente pode ser obtida através da lei de conservação modificada (4.6),

$$\ddot{H} + 4\dot{H} = -4\pi G(\dot{\tilde{\rho}} + 4H\tilde{\rho}). \quad (4.17)$$

Note que, as equações dependem apenas da combinação $\tilde{\rho} = \rho + p$, que é associado com a entalpia do sistema. Dessa forma, as soluções para o caso do vácuo $\rho = p = 0$ são as mesmas para o caso $\rho = -p$, que representa um universo no vácuo com uma constante cosmológica positiva. Como consequência, a condição de vácuo $\rho = p = 0$ pode levar tanto ao espaço-tempo de Minkowski ou um espaço-tempo de Sitter. Além disso, as equações (4.16) e (4.17) possuem a mesma informação, uma vez que ao substituir uma na outra obtemos uma identidade. Isso nos dá apenas uma equação para duas variáveis, $\tilde{\rho}$ e H , deixando o sistema indeterminado a não ser que haja uma suposição prévia sobre as soluções.

A solução do caso da radiação obtida no caso da relatividade geral, também é uma solução neste caso para $\rho \neq -p$,

$$H = \frac{1}{2t}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 a^{-4}. \quad (4.18)$$

Esse resultado independe da equação de estado que relaciona ρ e p . Isso acontece devido ao caráter sem traço das equações de campo. Na verdade, como o sistema é indeterminado, nós podemos supor qualquer comportamento para o fator de escala. Porém, o comportamento radiativo com $\tilde{\rho} \propto a^{-4}$ é bem justificado para um sistema composto por apenas radiação. Este caso mencionado foi discutido no trabalho (FABRIS et al., 2022b).

Unindo as equações e realizando uma integração, obtemos o resultado,

$$H + 2H^2 = \frac{2}{3}\Lambda_U, \quad (4.19)$$

onde $2\Lambda_U/3$ é uma constante de integração. Esta faz com que o cenário cosmológico Unimodular seja, em essência, o mesmo que o caso radiativo da Relatividade Geral na presença de uma constante cosmológica. O subscrito de Λ_U é para diferenciar o caso Unimodular.

Da equação (4.19), temos três possibilidades:

$$\Lambda_U < 0 \rightarrow a = a_0 \sin^{1/2} \sqrt{-\frac{4\Lambda_U}{3}} t, \quad (4.20)$$

$$\Lambda_U = 0 \rightarrow a = a_0 t^{1/2}, \quad (4.21)$$

$$\Lambda_U > 0 \rightarrow a = a_0 \sinh^{1/2} \sqrt{\frac{4\Lambda_U}{3}} t. \quad (4.22)$$

Em (FABRIS et al., 2022b), foi mostrado que um modelo cosmológico viável é alcançado para valores de $\Lambda_U \lesssim 1$. Tal modelo possui uma idade do universo compatível com observações, ou seja, o universo pode ser mais velho do que a idade das grandes estruturas observadas. Além disso, a dinâmica temporal tardia do modelo difere dos resultados da cosmologia padrão. O modelo transita de uma evolução radiativa diretamente para uma fase de Sitter, sem que haja uma época dominada pela matéria.

4.1.3 Perturbações Escalares

Vamos estudar o caso das perturbações escalares na teoria Unimodular. Nesta seção vamos seguir um caminho similar ao trabalho (FABRIS et al., 2022b). Neste cenário ao fazer a aproximação de campo fraco nas equações de campo (4.5) obtemos a seguinte equação:

$$\delta R - \frac{1}{4} (\bar{g}_{\mu\nu} \delta R + h_{\mu\nu} \bar{R}) = 8\pi \left\{ \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{a} (\bar{g}_{\mu\nu} \delta T + h_{\mu\nu} \bar{T}) \right\}. \quad (4.23)$$

Como foi discutido, o calibre Newtoniano não pode ser utilizado no caso Unimodular. Dessa forma, para os seguintes cálculos vamos utilizar o calibre síncrono $h_{0\mu} = 0$. As componentes do tensor de Ricci perturbado e do escalar de Ricci perturbado, excluindo todos os termos h_{kk} , são:

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2a^2} (h_{ij,kk} - h_{ik,jk} - h_{jk,ik}) - \frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{H\dot{h}_{ij}}{2} - 2H^2 h_{ij}, \quad (4.24)$$

$$\delta R_{0i} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{h_{ki,k}}{a^2} \right), \quad (4.25)$$

$$\delta R_{00} = 0, \quad (4.26)$$

$$\delta R = \frac{h_{jk,j,k}}{a^4}. \quad (4.27)$$

Usando esses termos e os termos perturbados do tensor energia-momento (2.69) (2.70) (2.71) encontramos as equações de campo perturbadas:

$$\frac{h_{jk,j,k}}{a^2} = -24\pi a^2 (\delta\rho + \delta p). \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{h_{ki,k}}{a^2} \right) = 16\pi a^2 (\rho + p) \delta u_{i,i}. \quad (4.29)$$

Neste ponto, é conveniente definir a perturbação escalar da métrica f e o potencial perturbado θ :

$$f = \frac{h_{kj,k,j}}{a^2}, \quad \theta = \delta u_{i,i}. \quad (4.30)$$

Das equações de conservação obtemos as seguinte relações:

$$\dot{f} - 2Hf = 24\pi a^2 \left\{ \delta\dot{\rho} + \delta\dot{p} + 4H(\delta\rho + \delta p) + \frac{4}{3}(\rho + p)\theta \right\} \quad (4.31)$$

$$\frac{\nabla^2 f}{a^4} = -32\pi \left\{ [(\rho + p)\theta] + 5H(\rho + p)\theta + \frac{\nabla^2(\delta\rho + \delta p)}{4a^2} \right\} \quad (4.32)$$

Manipulando os termos e inserindo as equações (4.28) e (4.29) em (4.31) e fazendo uma decomposição em Fourier, encontramos a seguinte equação simplificada:

$$\ddot{f} + 3H\dot{f} - \frac{k^2}{3a^2}f = 0. \quad (4.33)$$

A fim de encontrar uma solução para esta equação, vamos estudar o caso de $\Lambda_U = 0$. Dessa maneira, o fator de escala se relaciona com o tempo cósmico da seguinte forma $a = a_o t^{1/2}$. Passando a equação para o tempo conforme η , obtemos:

$$f'' + \frac{6}{\eta}f' - \frac{k^2}{3}f = 0, \quad (4.34)$$

cuja a solução é:

$$f = A \frac{\sinh \frac{k}{\sqrt{3}}\eta}{k\eta} + B \frac{\cosh \frac{k}{\sqrt{3}}\eta}{k\eta}, \quad (4.35)$$

onde A e B são constantes. Usando as soluções de fundo para $\Lambda_U = 0$ e as equações perturbadas que foram obtidas podemos encontrar o seguinte contraste de densidade:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta\rho + \delta p}{\rho + p} = \bar{A}a^2 \frac{\sinh \left(\frac{ka}{\sqrt{3}a_o} \right)}{\frac{ka}{\sqrt{3}a_o}}. \quad (4.36)$$

Para grandes comprimentos de ondas $k \rightarrow 0$, obtemos:

$$\bar{\delta} \sim a^2. \quad (4.37)$$

Essa solução é válida mesmo para o caso de um fluido no qual $p = 0$. Portanto perturbações de matéria podem crescer e atingir o regime não-linear mesmo em um fundo com comportamento do tipo radiativo. Para uma análise nesse aspecto veja, (FABRIS et al., 2022b).

4.2 Brans Dicke Unimodular

Para estudar o caso de Brans-Dicke Unimodular, vamos seguir os mesmos procedimentos feitos na sessão anterior para RGU. Isto é, vamos inserir o vínculo na Lagrangiana de Brans-Dicke através de um multiplicador de Lagrange:

$$S_{BDU} = \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \left(\phi R - \omega \frac{\phi_{;\rho} \phi^{;\rho}}{\phi} \right) - \phi \chi (\sqrt{-g} - \xi) \right\}. \quad (4.38)$$

Note que, o campo escalar está acoplado com o termo do multiplicador. Podemos escolher não acopla-lo e redefinir a unidade de χ . Essa escolha é arbitrária, uma vez que as equações de campo são as mesmas para ambos os casos.

Vamos encontrar as equações de campo a partir do princípio variacional na ação total, $S = S_{UBD} + S_m$. Novamente, o processo feito na variação é similar ao que foi feito no Capítulo 3, diferindo apenas pelo termo do multiplicador. Após a variação, obtemos as seguintes equações:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - g_{\mu\nu} \frac{\chi}{2}, \quad (4.39)$$

$$2\omega \square \phi = \omega \frac{\phi_{;\rho} \phi^{;\rho}}{\phi^2} - \phi R + \chi (\sqrt{-g} - \xi). \quad (4.40)$$

Vamos eliminar o multiplicador de Lagrange pelo traço da equação (4.39),

$$R = \frac{-8\pi}{\phi} T + \omega \frac{\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi}{\phi^2} + 3 \frac{\square \phi}{\phi} + 2\chi, \quad (4.41)$$

reinsertando nas equações de campo obtemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T \right) + \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho}) + \frac{1}{\phi} \left(\phi_{;\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \square \phi \right). \quad (4.42)$$

Essa equação de campo possui uma estrutura muito similar a equação obtida no caso RGU. De fato, o limite de $\omega \rightarrow \infty$ também serve de correspondência entre as equações (4.42) e (4.5). A característica das equações possuírem traço nulo se repete nesse caso.

Aplicando o vínculo Unimodular na equação (4.40), o termo dependente de χ desaparece e obtemos a mesma equação de Klein Gordon para a teoria clássica:

$$\square \phi = \frac{1}{2} \frac{\phi_{;\rho} \phi^{;\rho}}{\phi} - \frac{\phi}{2\omega} R. \quad (4.43)$$

A novidade aqui vem do fato de que não podemos isolar o escalar de Ricci da equação (4.42) devido ao seu caráter sem traço. Dessa forma, não podemos reescrever a equação

de Klein-Gordon Unimodular como é feito em (3.13). Poderíamos chegar em um resultado parecido através da expressão (4.41), mas não conseguiríamos eliminar o termo χ .

Assim como na RGU, a conservação do tensor energia-momento neste caso não é uma consequência das identidades de Bianchi. Uma vez que, aplicando estas na equação (4.39) obtemos a seguinte lei de conservação modificada,

$$(\phi R)^{;\nu} = \omega \left(\frac{\phi_{;\rho} \phi^{;\rho}}{\phi} \right)^{;\nu} + 32\pi \left(T^{\mu\nu}{}_{;\mu} - \frac{1}{4} T^{;\nu} \right) + 3(\square\phi)^{;\nu}. \quad (4.44)$$

Se impormos a conservação do tensor energia-momento, ao integrar a equação acima, aparece uma constante de integração que interpretamos como constante cosmológica. Neste contexto, as equações de campo se tornam as mesmas da teoria clássica de Brans-Dicke com a constante cosmológica,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho}) + \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square\phi) + g_{\mu\nu} \frac{\Lambda}{\phi}, \quad (4.45)$$

$$\square\phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T + \frac{4}{3 + 2\omega} \Lambda. \quad (4.46)$$

Como dito anteriormente, estamos interessados em estudar o caso em que o tensor energia-momento não se conserva. Deste ponto em diante vamos considerar as equações que representam a teoria Brans-Dicke unimodular sendo (4.42), (4.43) e (4.44).

4.2.1 Soluções Cosmológicas

Nessa sessão, vamos explorar aspectos da cosmologia na teoria de Brans-Dicke unimodular. Para isto vamos considerar uma cosmologia onde o modelo de universo plano, caracterizado pela métrica FLRW com $k = 0$,

$$ds^2 = dt^2 - a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.47)$$

As equações de campo nesse cenário são:

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{\phi} (\rho + P) - \frac{\omega \dot{\phi}^2}{2\phi^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} - H \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right), \quad (4.48)$$

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3H \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{3}{\omega} (\dot{H} + 2H^2). \quad (4.49)$$

Novamente, as equações de campo são sensíveis a uma combinação de $\rho + p$, essa quantidade está relacionada com a entalpia do sistema. Dessa forma, não há distinção entre as soluções de vácuo ($\rho = p = 0$) e as soluções de ($\rho = -p$). Esta é uma característica particular da teoria unimodular, já que tal propriedade não se repete na teoria Brans-Dicke original cuja as soluções são (3.29) e (3.27). Vamos restringir nossa análise às soluções de vácuo..

Primeiramente, vamos analisar a possibilidade de soluções do tipo exponenciais como é feito para o caso de Brans-Dicke. As soluções tem a seguinte forma,

$$a = a_0 e^{Ht}, \quad H = cte, \quad (4.50)$$

$$\phi = \phi_0 e^{st}, \quad s = cte. \quad (4.51)$$

A partir de uma substituição direta destas soluções nas equações (4.48) e (4.49) para o caso no vácuo obtemos,

$$H = (1 + \omega)s, \quad (4.52)$$

$$s^2 + 6Hs - \frac{12}{\omega}H^2 = 0. \quad (4.53)$$

Nesta solução para $\omega = 1$, obtemos $H = s = 0$, uma solução do tipo Mikowski. No caso de $\omega \neq 1$, podemos substituir (4.52) em (4.53) e obter,

$$\frac{s^2}{\omega} \left(6\omega^2 + 17\omega + 12 \right) = 0. \quad (4.54)$$

Para $s \neq 0$, se tem duas soluções possíveis para a equação acima: $\omega = -3/2$, que representa o caso onde Brans-Dicke é equivalente conforme da Relatividade Geral e $\omega = 4/3$ que é uma solução obtida no caso da teoria clássica.

Vamos agora considerar soluções na forma de leis de potências, assumindo que,

$$a = a_0 t^r, \quad (4.55)$$

$$\phi = \phi_0 t^s. \quad (4.56)$$

Substituindo tais relações nas equações (4.48) e (4.49), novamente no caso do vácuo, obtemos,

$$-(s + 2)r - s + (1 + \omega)s^2 = 0, \quad (4.57)$$

$$(s^2 - 2s)\omega + 6(\omega s + 1)r - 12r^2 = 0. \quad (4.58)$$

Nestas, é direto verificar que as soluções correspondentes da teoria clássica ($r = \omega + 1/2$ e $s = 2$) também são soluções nesse caso. Na busca por outra solução não trivial, podemos unir as relações obtidas acima e encontramos uma equação que dependa apenas de s .

$$(12 + 17\omega + 6\omega^2)s^3 - (30 + 38\omega + 12\omega^2)s^2 + (6 + 4\omega)s + 2(6 + 4\omega) = 0. \quad (4.59)$$

Como $s = 2$ é uma solução verificada, nós podemos reduzir a ordem da equação acima, obtendo:

$$(12 + 17\omega + 6\omega^2)s^2 - (6 + 4\omega)s - (6 + 4\omega) = 0. \quad (4.60)$$

Tal equação pode ser reescrita como,

$$\left(2 + \frac{3}{2}\omega\right)s^2 - s - 1 = 0, \quad (4.61)$$

cujas as soluções são,

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}\omega}}{3(4 + 3\omega)}. \quad (4.62)$$

Esta é correspondente à solução de vácuo da teoria de Brans-Dicke sem a constante cosmológica. Contudo, as soluções para $\rho = -p$, que representam um universo com uma constante cosmológica não nula, são as mesmas. Mais a frente ao estudar perturbações no vácuo vamos usar as soluções alternativas:

$$a(t) = a_0 t^{\omega+1/2}, \quad (4.63)$$

$$\phi(t) = \phi_0 t^2. \quad (4.64)$$

4.2.2 Perturbações Cosmológicas

Aqui, partiremos para uma análise perturbativa da teoria. Para isto, prosseguiremos de forma similar ao que fizemos anteriormente e consideraremos uma perturbação pequena $h_{\mu\nu}$ em um fundo FLRW plano de forma que $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e também no campo escalar $\phi = \bar{\phi} + \delta\phi$, com $\delta\phi$ da mesma ordem de $|h_{\mu\nu}|$.

Uma grande diferença para o caso Unimodular é de que a condição $\sqrt{-g} = \xi$ impõe um vínculo na perturbação da métrica ($h_{kk} = 0$). Como foi discutido, essa condição não nos permite usar o calibre newtoniano ou o calibre síncrono se o tensor de energia-momento se conserva, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nesta sessão que se segue, vamos nos restringir a estudar o caso onde $\nabla_\mu T^{\mu\nu} \neq 0$ a fim de ser possível usar o calibre síncrono no contexto unimodular, de forma que,

$$h_{\mu 0} = 0, \quad h_{kk} = 0. \quad (4.65)$$

Dentro desse contexto, para calcular as equações de campo perturbadas vamos precisar calcular outros termos a priori. As componentes do tensor de Ricci, perturbado e do escalar de Ricci perturbado já foram calculadas em (4.26), (4.25)(4.24), (4.27). Alguns resultados úteis são:

$$\square(\bar{\phi} + \delta\phi) = \ddot{\bar{\phi}} + \delta\ddot{\bar{\phi}} + 3H\delta\dot{\bar{\phi}} + 3H\dot{\bar{\phi}} - \frac{\nabla^2\delta\phi}{a^2}, \quad (4.66)$$

$$(\bar{\phi} + \delta\phi)_{;0;0} = \ddot{\bar{\phi}} + \delta\ddot{\bar{\phi}}, \quad (4.67)$$

$$(\bar{\phi} + \delta\phi)_{;i;0} = \delta\dot{\bar{\phi}}_{,i} - H\delta\phi_{,i}, \quad (4.68)$$

$$(\bar{\phi} + \delta\phi)_{;i;j} = \delta\phi_{,i;j} - a^2 H \delta\dot{\bar{\phi}}_{\delta_{ij}} + \frac{\dot{h}_{ij}\dot{\bar{\phi}}}{2}. \quad (4.69)$$

As perturbações do tensor energia-momento não mudam neste caso, são as que encontramos em (2.69)-(2.71). Com estas quantidades bem estabelecidas, podemos substituir em (4.42), excluir os termos nulos e vamos obter uma expressão geral somente para as perturbações:

$$\begin{aligned}
 \delta G_{\mu\nu}^U &= \frac{8\pi}{\bar{\phi}} \left[\delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (\bar{g}_{\mu\nu} \delta T + h_{\mu\nu} \bar{T}) - \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}} \left(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T} \right) \right] \\
 &+ \frac{\omega}{\bar{\phi}^2} \left(\delta\phi_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + \bar{\phi}_{,\mu} \delta\phi_{,\nu} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} (2\delta\phi_\rho \bar{\phi}^{\rho} - h^{\alpha\rho} \bar{\phi}_{\alpha,\bar{\phi}_{,\rho}}) - \frac{h_{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\rho} \bar{\phi}^{\rho}}{4} \right) \\
 &- \frac{2\omega\delta\phi}{\bar{\phi}^3} \left([(\bar{\phi} + \delta\phi)_{,\mu} (\bar{\phi} + \delta\phi)_{,\nu}]^{(0)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\rho} \bar{\phi}^{\rho} \right) \\
 &+ \frac{1}{\bar{\phi}} \left((\bar{\phi} + \delta\phi)_{;\mu;\nu}^{(1)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} (\delta\ddot{\phi} - \frac{\delta\phi_{,k,k}}{a^2} + 3H\delta\dot{\phi}) - \frac{1}{4} h_{\mu\nu} (\ddot{\bar{\phi}} + 3H\dot{\bar{\phi}}) \right) \\
 &- \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}^2} \left((\bar{\phi} + \varphi)_{;\mu;\nu}^{(0)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} (\ddot{\bar{\phi}} + 3H\dot{\bar{\phi}}) \right), \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

onde definimos,

$$\delta G_{\mu\nu}^U = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (\bar{g}_{\mu\nu} \delta R + h_{\mu\nu} \bar{R}). \tag{4.71}$$

Desta expressão geral para perturbações obtemos as seguintes casos específicos para cada componente:

- Caso $\mu = \nu = 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{-h_{kl,k,l}}{a^4} &= -\frac{24\pi}{\bar{\phi}} (\delta\rho + \delta p) - 3 \frac{\delta\ddot{\phi}}{\bar{\phi}} + 3 \left(H - 2\omega \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} \right) \frac{\delta\dot{\phi}}{\bar{\phi}} \\
 &- 3 \left(2\dot{H} - \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\bar{\phi}^2} \right) \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}} - \frac{\nabla^2 \delta\phi}{a^2 \bar{\phi}}. \tag{4.72}
 \end{aligned}$$

- Caso $\mu = 0, \nu = 1$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{-h_{ki,k}}{a^2} \right) = -\frac{16\pi}{\bar{\phi}} (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u_i - 2\omega \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}^2} \delta\phi_{,i} - \frac{2}{\bar{\phi}} (\delta\dot{\phi}_{,i} - H\delta\phi_{,i}) \tag{4.73}$$

- Caso $\mu = i, \nu = j$:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{a^2} \left(\nabla^2 h_{ij} - h_{ik,j,k} - h_{kj,i,k} \right) + \frac{h_{kl,k,l}}{2a^2} \delta_{ij} - \ddot{h}_{ij} + \left(H - \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} \right) \dot{h}_{ij} + \left(2\dot{H} + 2H^2 + 2H \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} \right) h_{ij} \\
 &= \frac{4\pi}{\bar{\phi}} (\delta\rho + \delta p) a^2 \delta_{ij} \\
 &+ \frac{a^2}{2} \left[\frac{\delta\ddot{\phi}}{\bar{\phi}} + \left(2\omega \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} - H \right) \frac{\delta\dot{\phi}}{\bar{\phi}} + \left(2\dot{H} - \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\bar{\phi}^2} \right) \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}} \right] \delta_{ij} + 2 \frac{\delta\phi_{,i,j}}{\bar{\phi}} - \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 \delta\phi}{\bar{\phi}} \delta_{ij}. \tag{4.74}
 \end{aligned}$$

Fazendo a aproximação linear na equação de Klein Gordon, obtemos:

$$\delta\ddot{\phi} + \left(3H - \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} \right) \delta\dot{\phi} + \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{\bar{\phi}^2} - \frac{3}{\omega} (\dot{H} + 2H^2) \right] \delta\phi - \frac{\nabla^2}{a^2} \delta\phi = -\frac{\bar{\phi}}{2\omega} \frac{h_{kl,k,l}}{a^4}. \tag{4.75}$$

Tais equações (4.72)-(4.75) nos dão a dinâmica das perturbações escalares, vetoriais e tensoriais. Assim como em (ALMEIDA et al., 2022), vamos nos concentrar nas perturbações tensoriais e escalares neste trabalho.

4.2.3 Ondas Gravitacionais

Para verificar o fenômeno das ondas gravitacionais no contexto da teoria Unimodular devemos fazer a análise perturbativa e considerar apenas os modos tensoriais no calibre $h_{0\mu} = 0$ e a condição $h_{kk} = 0$ que já vem atrelada a teoria. Aplicando estas condições na equação (4.74), obtemos a seguinte expressão:

$$\ddot{h}_{ij} + \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} - H \right) \dot{h}_{ij} + \left[-\frac{\nabla^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{H\dot{\phi}}{\phi} \right] h_{ij} = 0. \quad (4.76)$$

A expressão encontrada para este caso é a mesma para o que encontramos na teoria original (3.33) e portanto as soluções são as mesmas já encontradas. O mesmo padrão acontece nos casos da Relatividade Geral e a teoria Unimodular, veja (FABRIS et al., 2022a).

4.2.4 Perturbações Escalares no Vácuo

Para o caso do vácuo, não há densidade ou pressão para se considerar, então a análise perturbativa é feita levando em consideração que $\delta\rho = \delta p = 0$. Unindo as equações (4.75) e (4.72), obtemos a seguinte expressão para a perturbação escalar:

$$(3 - 2\omega)\delta\ddot{\phi} - \left[3(1 + 2\omega)H - 8\omega\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right] \delta\dot{\phi} + \left[12(\dot{H} + H^2) - 4\omega\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} \right] \delta\phi + \frac{1 + 2\omega}{a^2} \nabla^2 \delta\phi = 0. \quad (4.77)$$

Já nesta equação, podemos determinar critérios de estabilidade comparando o sinal relativo do termo de segunda derivada temporal com o termo do laplaciano da perturbação. Ambos os termos possuem o mesmo sinal nesta equação resulta em uma velocidade do som imaginária, o que é associado com instabilidades. Esta situação ocorre somente no intervalo em que $-1/2 < \omega < 3/2$. Essa particularidade difere do que é observado na teoria clássica, uma vez que, nesse caso a velocidade do som é sempre positiva. A fim de resolver esta equação, nós realizamos uma decomposição de Fourier, onde obtemos $\nabla^2 \delta\phi = -k^2 \delta\phi$, o que nos leva a uma equação com a seguinte estrutura:

$$\delta\ddot{\phi} - \left[3\frac{(1 + 2\omega)}{(3 - 2\omega)}H - \frac{8\omega}{(3 - 2\omega)}\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right] \delta\dot{\phi} + \left[\frac{1 + 2\omega}{3 - 2\omega} \frac{k^2}{a^2} + \frac{12}{3 - 2\omega} (\dot{H} + H^2) - \frac{4\omega}{3 - 2\omega} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} \right] \delta\phi = 0. \quad (4.78)$$

Substituindo nesta equação as soluções de vácuo com a constante cosmológica não-nula (4.63) (4.64) obtemos:

$$\delta\ddot{\phi} + r\frac{\delta\dot{\phi}}{t} + \left(\bar{c}_s^2 \frac{k^2}{t^{2\omega+1}} - \frac{s}{t^2}\right)\delta\phi = 0, \quad (4.79)$$

sendo,

$$r = -\frac{(1-6\omega)}{2}, \quad (4.80)$$

$$s = 1 + 6\omega, \quad (4.81)$$

$$\bar{c}_s^2 = -\frac{1+2\omega}{3-2\omega} \frac{1}{a_0^2}. \quad (4.82)$$

O termo \bar{c}_s^2 representa a velocidade do som. Analisar o sinal deste termo é uma maneira de verificar se as soluções da equação (4.79) são estáveis ou não. O critério de estabilidade para as perturbações é se elas evoluem de forma mais rápida do que as soluções de fundo. Perturbações de que inicialmente possuem amplitudes pequenas se amplificam com pequena perturbações e entram no regime-não linear. Na análise do regime linear as perturbações devem ser bem menores do que os termos de fundo de forma que,

$$\frac{\delta\phi}{\phi} \ll 1 \quad (4.83)$$

Quando a razão acima se aproxima de 1, o regime linear não é mais considerado.

A equação (4.79) pode ser resolvida analiticamente. Para isto, faremos a seguinte transformação de variáveis:

$$x = t^p, \quad p = \frac{1-2\omega}{2}, \quad (4.84)$$

e obtemos,

$$\delta\phi'' - 2\frac{\delta\phi'}{x} + \left(\frac{\bar{c}_s^2 k^2}{p^2} - \frac{\bar{s}}{x^2}\right)\delta\phi = 0, \quad (4.85)$$

com $\bar{s} = s/p^2$ e os índices linha denotam a derivação com relação à nova variável.

Fazendo a transformação $\delta\phi = x^{3/2}\lambda$, obtemos

$$\lambda'' + \frac{\lambda'}{x} + \left(\frac{\bar{c}_s^2 k^2}{p^2} - \frac{v^2}{x^2}\right)\lambda = 0, \quad (4.86)$$

onde $v^2 = \bar{s} + 9/4$, que, ao simplificar, se torna,

$$v = \pm \frac{(5+6\omega)}{2(1-2\omega)}. \quad (4.87)$$

A solução da equação (4.86) depende do sinal de c_s^2 . Se $c_s^2 > 0$ então (4.86) é uma equação de Bessel de ordem v cuja a solução é uma combinação dos polinômios de Bessel:

$$\delta\phi = x^{3/2} \left\{ c_1 J_v(\tilde{k}x) + c_2 J_{-v}(\tilde{k}x) \right\}, \quad (4.88)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração e $\tilde{k} = \sqrt{c_s^2 k/p}$. Se $c_s^2 < 0$, temos uma equação de Bessel modificada, cuja as soluções são uma composição entre polinômios e funções de Bessel modificadas,

$$\delta\phi = x^{3/2} \left\{ c_1 K_\nu(|\tilde{k}|x) + c_2 I_\nu(|\tilde{k}|x) \right\} \quad (4.89)$$

As soluções (4.88) são encontradas no intervalo $\omega < -1/2$ ou $3/2 < \omega$ e portanto não apresentam instabilidades. Em contrapartida, a solução (4.89) apresenta instabilidades já que para pequenas escalas aparece um termo exponencial quando fazemos limite de $\tilde{k} \rightarrow \infty$.

Agora vamos analisar os casos limites da instabilidade, que são $\omega = -1/2$ e $\omega = 3/2$. O caso de $\omega = -1/2$ é o caso de um universo estático, mas o campo escalar se desenvolve com o tempo. As soluções de fundo são,

$$a = a_o \quad , \quad \phi = \phi_o t^2. \quad (4.90)$$

Substituindo estes valores na equação (4.79), obtemos,

$$\delta\ddot{\phi} - 2\frac{\delta\dot{\phi}}{t} + 2\frac{\delta\phi}{t^2} = 0. \quad (4.91)$$

Esta é uma equação do tipo Euler, que para este caso possui a solução:

$$\delta\phi = c_1 t^2 + c_2 t, \quad (4.92)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração. Esta solução mostra que a perturbação evolui em até a mesma taxa que o campo de fundo $\phi \propto t^2$. Então a solução para o caso do universo estático é estável.

Para o caso $\omega = 3/2$, os termos de fundo evoluem da seguinte maneira,

$$a = a_o t^2 \quad , \quad \phi = \phi_o t^2. \quad (4.93)$$

Se aplicarmos $\omega = 3/2$ na equação das perturbações os termos de derivadas temporais desaparecem e resta $\nabla^2 \delta\phi = 0$. Isso implica que as perturbações são homogêneas. Com esta condição, a equação da perturbação se reduz a,

$$\delta\ddot{\phi} + 4\frac{\delta\dot{\phi}}{t} - 10\frac{\delta\phi}{t^2} = 0. \quad (4.94)$$

Esta é uma equação de Euler cuja as soluções são,

$$\delta\phi = d_1 t^2 + d_2 t^{-5}, \quad (4.95)$$

onde d_1 e d_2 são constantes de integração. Assim como no caso do universo estático, a perturbação evolui, no máximo, até a mesma taxa do termo de fundo t^2 , o que nos mostra que este caso também é estável.

A comparação dos resultados obtidos nesse caso com os que obtemos no Capítulo 3 (3.54), não é tão direta, uma vez que, a condição do calibre sincrono apresenta certas características na teoria unimodular que não apresenta na teoria clássica. Contudo, em escalas pequenas, a teoria clássica de Brans-Dicke não apresenta instabilidades dado que a velocidade do som é sempre positiva, enquanto na presente versão há um claro intervalo de instabilidades entre $-1/2 < \omega < 3/2$. Além do mais, as soluções particulares dos casos para $\omega = -1/2, 3/2$ não aparecem no caso da teoria clássica.

Na análise perturbativa feita nessa seção, nos restringimos a identificar a estabilidade dos casos estudados. De fato, podemos estudar o processo de formação de estruturas apenas com a introdução dos termos de matéria necessários. Nós postergamos esta análise para um futuro trabalho já que, como mostrado no trabalho (FABRIS et al., 2022b), os casos além das soluções de vácuo demanda a imposição de uma condição prévia para fechar o sistema de equações. A determinação de tal condição extra pede uma discussão separada.

5 Conclusão

No segundo Capítulo dessa dissertação realizamos uma breve revisão dos fundamentos da Relatividade Geral. Encontramos as equações de campo da teoria e fizemos a aproximação de campo fraco para encontrar as soluções de ondas gravitacionais utilizando um formalismo invariante de calibre. Estudamos as soluções cosmológicas para as principais eras do universo considerando uma métrica FLRW plana. No fim do capítulo foram estudadas perturbações escalares e tensoriais explorando nestas os calibres Newtoniano e o calibre síncrono, respectivamente.

O terceiro Capítulo foi dedicado a teoria clássica de Brans-Dicke. Nesta teoria um campo escalar foi introduzido no lugar do inverso da constante gravitacional de Newton, G . Esse campo é uma variável dinâmica que aparece acoplado não-minimamente com a parte geométrica da teoria. Dessa forma, a partir do princípio variacional encontramos uma equação de campo variando em relação à métrica e outra variando em relação ao campo escalar. A correspondência da teoria com a Relatividade Geral ocorre através de valores muito altos da constante de proporcionalidade adimensional, ω . Esta equivalência requer configurações específicas para o tensor energia-momento como foi mostrado no trabalho (ROMERO; BARROS, 1993). Soluções cosmológicas de fundo para as principais épocas do universo foram estudadas para o caso de Brans-Dicke. Fizemos uma análise perturbativa da teoria, encontrando soluções de ondas gravitacionais tal como perturbações escalares.

No quarto Capítulo abordamos a teoria Unimodular da gravitação. Começamos pelo caso da Relatividade Geral Unimodular. O vínculo que impõe que o determinante da métrica seja constante, aparece como um multiplicador de Lagrange na ação da teoria. A consequência é que as equações de campo obtidas possuem um caráter sem traço. Nesse contexto, uma lei de conservação modificada é obtida e a conservação do tensor energia-momento deixa de ser uma imposição da teoria e se torna uma escolha. Se fizermos com que o tensor energia-momento se conserve, a teoria Unimodular recupera o caso da Relatividade Geral com a adição da constante cosmológica. Focamos nossa atenção na outra possibilidade, explorada pelos trabalhos (FABRIS et al., 2022a) e (FABRIS et al., 2022b). Ao desconsiderar a conservação de $T_{\mu\nu}$, as equações cosmológicas se tornam sensíveis a uma combinação $\rho + p$, o que significa que soluções para $\rho = 0$ e $\rho = -p$ são equivalentes. As equações cosmológicas deste modelo não são independentes, na verdade, ambas possuem o mesmo conteúdo, de forma que obtemos uma única equação para dois parâmetros indeterminados. tal sistema requer uma suposição extra para ser resolvido.

O tema central dessa dissertação foi a formulação da versão Unimodular da teoria de Brans-Dicke. O método utilizado foi em essência o mesmo que na Relatividade Geral,

no qual um vínculo foi introduzido na Lagrangiana de Brans-Dicke e a partir desse vínculo encontramos as equações de campo sem traço. Através das identidades de Bianchi aplicadas nas equações de campo, foi encontrado uma lei de conservação modificada. Se a lei de conservação habitual for imposta recuperamos as equações de Brans-Dicke originais com a adição de um termo de constante cosmológica. Contudo, essa imposição não é obrigatória e nós estudamos a possibilidade de usar as leis de conservação generalizadas, que em princípio quebra a correspondência com a teoria tradicional de Brans-Dicke. No mais, os padrões observados na teoria da Relatividade Geral Unimodular se repetem aqui.

Focamos nossa análise no contexto cosmológico. Assim como na RGU, quando não consideramos a lei de conservação habitual, todas as equações são sensíveis apenas à combinação $\rho + p$, ou seja, a entalpia do setor de matéria total. Isso tem como consequência que os casos para do vácuo e da matéria são equivalentes. Ambas levam às soluções de vácuo na presença de uma constante de integração que pode ser identificada com a constante cosmológica (que pode ser fixada igual a zero). As soluções obtidas são as mesmas que as soluções de vácuo para Brans-Dicke clássico com ou sem um constante cosmológica.

No entanto, esta equivalência é quebrada em nível perturbativo principalmente devido ao vínculo Unimodular. Uma vez que, a condição proíbe o uso do calibre síncrono e newtoniano se considerarmos que o tensor energia momento se conserve. Se não, no caso em que não se conserva, o calibre síncrono é permitido, embora o calibre newtoniano continua sendo inutilizável. As equações perturbadas para o vácuo podem ser resolvidas analiticamente e diferem das encontradas na teoria de Brans-Dicke Clássica. Em particular, as perturbações se mostram instáveis para pequenas escalas se o parâmetro BD estiver no intervalo $-1/2 < \omega < 3/2$. Para todos os outros valores de ω , obtemos perturbações estáveis.

A introdução de formas mais gerais de matéria compartilha o mesmo problema que em UGR: o sistema de equações resultante é indeterminado e uma suposição extra deve ser introduzidos para obter um cenário auto-consistente. Pretendemos investigar esse problema no futuro.

Referências

- ABBOTT, B. P. et al. Properties of the binary black hole merger gw150914. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 24, p. 241102, 2016. Citado na página 10.
- ADE, P. A. et al. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 571, p. A16, 2014. Citado na página 20.
- ALMEIDA, A. M. et al. Brans–dicke unimodular gravity. *Universe*, MDPI, v. 8, n. 8, p. 429, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 12, 40 e 51.
- BAPTISTA, J.; FABRIS, J.; GONÇALVES, S. Density perturbations in the brans-dicke theory. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 246, n. 2, p. 315–331, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 34, 38 e 39.
- BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 425, n. 6956, p. 374–376, 2003. Citado na página 11.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, APS, v. 124, n. 3, p. 925, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 30.
- CHALLINOR, A. Cmb anisotropy science: a review. *Proceedings of the International Astronomical Union*, Cambridge University Press, v. 8, n. S288, p. 42–52, 2012. Citado na página 19.
- DIRAC, P. A. M. A new basis for cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 165, n. 921, p. 199–208, 1938. Citado na página 31.
- EINSTEIN, A. The general theory of relativity. In: *The Meaning of Relativity*. [S.l.]: Springer, 1922. p. 54–75. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 13.
- EINSTEIN, A. Do gravitational fields play an essential part in the structure of the elementary particles of matter? *The Principle of Relativity. Dover Books on Physics. June 1*, p. 189–198, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 40.
- EINSTEIN, A. et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, v. 17, n. 10, p. 891–921, 1905. Citado na página 13.
- FABRIS, J.; GONÇALVES, S.; RIBEIRO, R. Late time accelerated brans-dicke pressureless solutions and the supernovae type ia data. *arXiv preprint astro-ph/0510779*, 2005. Citado na página 12.
- FABRIS, J. C. et al. Nonconservative unimodular gravity: Gravitational waves. *Symmetry*, MDPI, v. 14, n. 1, p. 87, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 11, 43, 51 e 55.
- FABRIS, J. C. et al. Nonconservative unimodular gravity: a viable cosmological scenario? *The European Physical Journal C*, Springer, v. 82, n. 6, p. 1–9, 2022. Citado 6 vezes nas páginas 11, 43, 44, 45, 54 e 55.

- GORBUNOV, D. S.; RUBAKOV, V. A. *Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory*. [S.l.]: World Scientific, 2011. Citado na página 25.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Citado na página 20.
- ISHAK, M. Testing general relativity in cosmology. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 22, n. 1, p. 1–204, 2019. Citado na página 10.
- LI, B.; KOYAMA, K. Modified gravity: progresses and outlook of theories, numerical techniques and observational tests. World Scientific, 2019. Citado na página 10.
- LOPEZ-VILLAREJO, J. Transversediff gravity is to scalar-tensor as unimodular gravity is to general relativity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2011, n. 11, p. 002, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.
- MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado na página 13.
- MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. *Physics reports*, Elsevier, v. 215, n. 5-6, p. 203–333, 1992. Citado na página 42.
- PIATTELLA, O. *Lecture notes in cosmology*. [S.l.]: Springer, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 13.
- ROMERO, C.; BARROS, A. Does the brans-dicke theory of gravity go over to general relativity when $\omega \leftarrow -$? *Physics Letters A*, Elsevier, v. 173, n. 3, p. 243–246, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 55.
- SCIAMA, D. W. On the origin of inertia. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford Academic, v. 113, n. 1, p. 34–42, 1953. Citado na página 31.
- VELTEN, H.; CARAMÊS, T. *To Conserve, or Not to Conserve: A Review of Nonconservative Theories of Gravity*. *Universe* 2021, 7, 38. [S.l.]: s Note: MDPI stays neu-tral with regard to jurisdictional clai-ms in . . . , 2021. Citado na página 41.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. [S.l.]: Wiley New York, 1972. ISBN 0-471-92567-5. Citado na página 13.
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Reviews of modern physics*, APS, v. 61, n. 1, p. 1, 1989. Citado na página 11.
- YADAV, J. K.; BAGLA, J.; KHANDAI, N. Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 405, n. 3, p. 2009–2015, 2010. Citado na página 24.