



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

JARDEL PEREIRA DOS SANTOS

**MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO A ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS INTEGRANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
(MEF) MULTIESCALA ESTABILIZADO**

Vitória

2023

JARDEL PEREIRA DOS SANTOS

**MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA APLICADO A ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS INTEGRANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
(MEF) MULTIESCALA ESTABILIZADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Ciência e à Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz

Vitória

2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

S237m Santos, Jardel Pereira dos, 1988-
Método de Otimização Topológica aplicado a escoamentos incompressíveis integrando o Método de Elementos Finitos (MEF) multiescala estabilizado / Jardel Pereira dos Santos. - 2023.
77 f. : il.

Orientador: Juan Sérgio Romero Saenz.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Otimização. 2. Método dos elementos finitos. 3. Análise numérica. 4. Mecânica dos fluidos. 5. Equações de Navier-Stokes. I. Saenz, Juan Sérgio Romero. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
CENTRO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

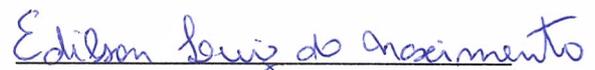
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO A
ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS UTILIZANDO MÉTODO
DE ELEMENTOS FINITOS MULTIESCALA ESTABILIZADO

JARDEL PEREIRA DOS SANTOS

COMISSÃO EXAMINADORA


Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz
(Orientador PPGEM/UFES)


Prof. Dr. Fernando Cesar Meira Menandro
(Examinador Interno – DEM/UFES)


Prof. Dr. Edilson Luiz do Nascimento
(Examinador Externo – IFES)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus, por ter me concedido força, saúde e sabedoria durante a condução deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Maria Ulissia do Santos e Sandoval Pereira dos Santos, por serem meus maiores motivadores em meus projetos, sempre acreditando em mim e mostrando que eu poderia chegar até aqui.

Minha gratidão aos meus irmãos, Ingrid, Ianne, Raul, Yulli e Alicia por todo o apoio e o incentivo de família durante essa jornada.

Agradeço, em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Juan Sergio Romero Saenz, toda a dedicação e a paciência que teve comigo, mostrando-se disposto a me ajudar no desenvolvimento deste trabalho.

Minha gratidão também a todos meus professores da Ufes, por todo o conhecimento transmitido, que será de grande contribuição para minha carreira acadêmica e profissional.

Quero agradecer aos meus amigos e demais pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Eduquem as crianças, para que não seja
necessário punir os adultos”.*

(Pitágoras)

RESUMO

As máquinas de fluxo ao longo dos anos apresentaram papel significativo na atividade industrial, colaborando de forma positiva para o desenvolvimento da humanidade. Com isso, estudos voltados ao campo da mecânica dos fluidos vêm sendo cada vez mais explorados com o intuito de contribuir para desenvolver novas tecnologias no ramo de engenharia. O objetivo deste trabalho é empregar o Método de Otimização Topológica (MOT) em escoamentos incompressíveis, utilizando a implementação do método variacional multiescala, capaz de fornecer uma formulação de elementos finitos estabilizada para a equação de Navier-Stokes, visando buscar a melhor distribuição de material ao longo do domínio fixo de projeto. A etapa inicial foi realizada por meio do cálculo de todas as condições de escoamento a partir das equações de Navier-Stokes, e então, com o método de elementos finitos, procedeu-se à aproximação das equações diferenciais. O interesse em combinar o método de elementos finitos estabilizado multiescala variacional com o método de otimização topológica consistiu em poder fornecer uma estrutura de elementos finitos. Em seguida, o processo de otimização topológica foi iniciado neste trabalho, utilizando-se como objetivo a minimização da perda de carga em um domínio predefinido, no qual é empregado um modelo material em um meio poroso. Nesse processo, um método baseado no gradiente da função-objetivo é utilizado para definir a análise de sensibilidade. Como forma de atestar a otimização topológica, combinando-se com o método variacional estabilizado multiescala proposto neste trabalho, foi realizada a aplicação da otimização topológica em algumas geometrias já conhecidas na literatura. Os resultados de otimização obtidos neste projeto se apresentaram muito próximos aos da literatura. De forma geral, a empregabilidade do projeto de otimização de dispositivos pela combinação do MOT com método de elementos finitos multiescala mostrou-se viável no projeto proposto.

Palavras-chave: Método de Otimização Topológica. Método de Elementos Finitos Multiescala. Equações de Navier-Stokes. Escoamento Incompressível.

ABSTRACT

Flow machines, over the years, have played a significant role in industrial activity, contributing positively to the development of humanity. As a result, studies focused on the field of fluid mechanics have been increasingly explored in order to contribute to the development of new technologies in the field of engineering. The objective of this work is to employ topological optimization in incompressible flows, using as an aid the implementation of the multiscale variational method capable of providing a stabilized finite element formulation for the Navier-Stokes equation, to seek the best material distribution along the fixed domain of project. The initial step takes place through the calculation of all flow conditions from the equations of the Navier-Stokes equations, and then the finite element method performs the approximation of the differential equations. The interest in combining the stabilized multiscale variational finite element method with the topological optimization method is to be able to provide a stable finite element structure. Then, the topological optimization process is started, in this work, using as objective the minimization of head loss in a predefined domain in which a material model is used in a porous medium. In this process, a method based on the objective function gradient is used to define the sensitivity analysis. As a way of attesting the topological optimization, combined with the stabilized multiscale variational method proposed in this work, the application of topological optimization is performed in some geometries already known in the literature. The optimization results performed in this project presented results very close to those in the literature. In general, the device optimization project, by combining the MOT with the multiscale finite element method, proved to be usable in the proposed project.

Keywords: Topological Optimization Method. Multiscale Finite Element Method. Navier-Stokes Equations. Incompressible Flow.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Nós de elementos finitos (a) Velocidade); (b) Pressão; (c) Variável de projeto em um elemento.....	25
Figura 2 – Métodos de otimização	42
Figura 3 – Etapas do processo de otimização	45
Figura 4 – Domínio Fixo Estendido.....	46
Figura 5 – Aplicação de diferentes valores de penalização aplicadas à permeabilidade inversa.....	49
Figura 6 – Frações de volume: (a) $V_f= 0,25$; (b) $V_f= 0,4$; (c) $V_f= 0,6$; (d) $V_f= 0,7$; (e) $V_f=$ sem restrição.....	51
Figura 7 – Curva de aproximação convexa por meio do Método das Assíntotas Móveis	52
Figura 8 – Fluxograma de implementação da otimização topológica.....	58
Figura 9 – Modelo de teste para um canal em curva.....	61
Figura 10 – Ciclo de iterações que ocorrem no processo de otimização da geometria curva em “cotovelo”	62
Figura 11 – Resultado obtido para o canal em curva em “cotovelo”	62
Figura 12 – Geometrias otimizadas obtidas com a aplicação do método considerando a variação do número de Reynolds.....	63
Figura 13 – Domínio fixo e condições de contorno para o difusor	64
Figura 14 – Resultado obtido do bocal sendo comparado ao proposto por Borrval e Petersson (2003).....	65
Figura 15 – Resultados obtidos do campo de velocidade e pressão para a geometria do difusor	65
Figura 16 – Curva de convergência para otimização do problema de bocal	66
Figura 17 – Geometria e condições de contorno para o projeto de canal duplo.....	67
Figura 18 – Resultados obtidos para o problema de canal duplo	67
Figura 19 – Resultados obtidos do campo de velocidade e pressão para a geometria de canal duplo	68
Figura 20 – Primeiro exemplo de geometria, com uma entrada e duas saídas para o escoamento (saídas laterais)	69
Figura 21 – Segundo exemplo de geometria, com uma entrada e duas saídas para o escoamento (saídas verticais)	69

Figura 22 – Geometria do dispositivo de multissaída (saídas laterais) e comparado à geometria encontrada na literatura para o mesmo problema	70
Figura 23 – Geometria do dispositivo de multissaída (saídas verticais) e comparado à geometria encontrada na literatura para o mesmo problema	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros MAM	60
Tabela 2 – Parâmetros do escoamento para o Difusor	64
Tabela 3 – Comparação da função-objetivo para o canal duplo.....	68
Tabela 4 – Parâmetros de simulação do escoamento nos dispositivos multissaiádas	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>CFD</i>	<i>Computational Fluid Dynamics</i> (Dinâmicas do Fluido Computacional)
<i>GLS</i>	<i>Galerkin Least Squares</i>
MEF	Método de Elemento Finito
MOT	Método de Otimização Topológica
HVM	Método Multiescala de Hughes
MAM	Método das Assíntotas Móveis
<i>SIMP</i>	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i> (Material Isotrópico Sólido com Penalização)

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Densidade
μ	Viscosidade dinâmica
∂	Derivada parcial
d	Derivada
∇	Operador Nabla
\mathbf{f}	Força de corpo
u	Velocidade
p	Pressão
k	Permeabilidade inversa
\mathbf{w}	Função de ponderação para velocidade
q_p	Função de ponderação para pressão
Φ	Função de interpolação de velocidade e pressão do MEF
ξ	Coordenada computacional
η	Coordenada computacional
\mathbf{M}	Matriz de massa
\mathbf{K}	Matriz viscosa
$\mathbf{C}(\mathbf{u})$	Matriz convectiva não linear
\mathbf{Q}	Matriz do operador gradiente
\mathbf{R}	Vetor Resíduo
\mathbf{U}	Vetor variável de estado
nsd	Número do espaço dimensional
τ	Parâmetro estabilizador
$\hat{\tau}$	Função tensorial
C	Propriedade característica relacionada à pseudodensidade

C_0	Propriedade característica do material analisado
q	Coefficiente de penalização
V	Fração de volume
V_f	Fração de volume fluido
Ω	Domínio
Ω_d	Domínio fixo estendido
\mathbf{w}	Função de ponderação para velocidade
q_p	Função de ponderação para pressão
ϕ_b	Função de bolha
α	Variável de projeto
K_k	Matriz de absorção
J	Matriz jacobiana
f_0	Representação da função de projeto no algoritmo
f_i	Representação da restrição de projeto no algoritmo
\hat{f}	Representação da função de projeto no algoritmo
L_j	Termo de restrição inferior
U_j	Termo de restrição superior
φ	Função-objetivo
H^1	Espaço de Hilbert separável
Γ_D	Condição de contorno de Dirichlet
Γ_N	Condição de contorno de Neuman
\mathbf{n}	Vetor unitário normal
\mathbf{t}	Vetor unitário tangente
ϑ	Espaço apropriado para o campo de velocidade
Q	Espaço apropriado para o campo de pressão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	16
1.2	OBJETIVOS	17
1.3	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	EQUAÇÃO DE NAVIER STOKES	20
2.1.1	Forma forte da equação de Navier-Stokes	21
2.2	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	21
2.2.1	Formulação de Galerkin e forma fraca do problema de escoamento	22
2.2.2	Implementação do Método de Elementos Finitos	24
2.2.3	Implementação numérica das equações de Navier-Stokes	26
2.2.3.1	Método de Newton	29
2.2.4	Estabilização do problema de Navier-Stokes	30
3	MÉTODO MULTIESCALA VARIACIONAL	31
3.1	O MODELO DA FORMULAÇÃO FRACA DE GALERKIN	32
3.2	DECOMPOSIÇÃO MULTIESCALA	33
3.3	O PROBLEMA VARIACIONAL MULTIESCALA	35
3.4	O SUBPROBLEMA NA ESCALA FINA W'	36
3.5	O PROBLEMA NA ESCALA GROSSA \bar{W}	39
3.6	FUNÇÃO DE ESTABILIDADE	40
4	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	41
4.1	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	41
4.2	PROJETO OTIMIZADO	44
4.3	DOMÍNIO FIXO ESTENDIDO	45
4.4	MODELO DE MATERIAL	46
4.5	PENALIZAÇÃO	48
4.6	RESTRICÇÕES	50
4.7	MÉTODO DAS ASSÍNTOTAS MÓVEIS	51
4.8	FUNÇÃO-OBJETIVO	53
4.9	FORMULAÇÃO MOT PARA ESCOAMENTO	54

4.10	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE.....	55
4.11	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	57
5	RESULTADOS.....	60
5.1	RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	60
5.1.1	Canal em curva de 90° (cotovelo).....	60
5.1.2	Problema do bocal/difusor.....	64
5.1.3	Canal duplo.....	66
5.1.4	Dispositivos com multissaídas	69
6	CONCLUSÃO	72
6.1	TRABALHOS FUTUROS.....	73
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

Otimizar componentes hidrodinâmicos no ramo da engenharia tem sido uma tarefa desafiadora, o que tem encorajado engenheiros e pesquisadores a trabalharem no estudo de novos projetos. O grande desafio desses projetos consiste no fato de lidar-se com o escoamento do fluido, recebendo carregamentos internos e então realizar a otimização da distribuição da energia potencial total do escoamento. A otimização desses componentes deve ser pensada de modo que a energia total contida no fluido de trabalho seja potencializada. Dessa forma, no desenvolvimento de um projeto na área de escoamento, dimensionar componentes hidrodinâmicos é um dos principais desafios do engenheiro, pois além de o projeto ter que atender aos requisitos mínimos exigidos de operação, também deve ser adequado a procedimentos normativos, a depender do tipo do projeto. No século passado, em razão da tamanha dificuldade na avaliação da grande quantidade de variáveis dentro de um processo de otimização, seu sucesso dependia da experiência, habilidade e intuição dos engenheiros e projetistas.

Nessa época, o produto final otimizado era obtido por meio de um processo intuitivo, iterativo e sequencial no qual era demandada a construção de modelos para a avaliação de parâmetros críticos e a comparação com projetos pré-configurados. Resumindo, era um trabalho de tentativa e erro, e por isso os avanços com relação a requisitos de segurança, qualidade, durabilidade, funcionalidade, entre outros parâmetros, ocorriam de forma lenta. A partir de 1950, com a evolução dos computadores e a criação de linguagens de programação consideradas de alto nível, associadas a novas pesquisas de métodos numéricos que podiam ser confiáveis, houve um salto significativo na qualidade dos trabalhos de desenvolvimento e análise de projetos estruturais (ALONSO, 2018). Assim, com o passar dos anos, o aumento do poder computacional – aliado a significativas reduções de preços de computadores de melhores desempenhos – permitiu melhorias e o desenvolvimento de novas técnicas numéricas para serem empregadas em problemas mais complexos constituídos com um grande número de variáveis. Partindo desse contexto, foi introduzido o conceito do Método de Otimização Topológica, conhecida como MOT, na aplicação de projetos, que atua sobre a geometria de um determinado sistema que busca a sua otimização, obedecendo a certos critérios e restrições. Basicamente, a otimização topológica é realizada pela distribuição de uma quantidade limitada de material dentro de um sistema, de forma direcionada, formando sua topologia e de forma a otimizá-la conforme uma função-objetivo escolhida.

O principal objetivo deste trabalho consiste em integrar o método de elementos finitos multiescala estabilizado no processo de otimização topológica e estudar o comportamento desse Método de Otimização no projeto de componentes hidrodinâmicos de escoamento. A ideia principal, é buscar a otimização desses dispositivos, sob o ponto de vista do desempenho adquirido com a otimização em relação ao escoamento de fluido e a dissipação de energia do escoamento.

A finalidade principal do método de otimização (MOT) é chegar à condição ótima de distribuição de material dentro de um domínio específico de um projeto. Para cada ciclo de otimização, o material é redistribuído seguindo alguns critérios de restrição, como por exemplo o coeficiente de resistência de um aerofólio de um carro. Ou seja, busca-se para o problema a forma de como distribuir o material no interior do espaço predefinido, obedecendo a certos critérios predeterminados, como condições de contorno e suas restrições, assim obtendo como resultado a maximização ou minimização da função-objetivo predefinida.

Segundo Bendsøe (2003), a distribuição ótima de material consiste em determinar quais pontos do domínio serão considerados regiões sólidas e quais serão definidas como regiões fluidas. A distribuição de material é realizada pela função-objetivo, que possui uma dependência da variável de projeto e os campos das variáveis do escoamento obtidos por meio da solução numérica das equações de escoamento. O método de otimização consiste em calcular os valores das variáveis de projeto que minimizam ou maximizam a função-objetivo do problema.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

O método de otimização topológica (MOT) é um método computacional de otimização estrutural que redistribui o material de uma estrutura para determinadas condições de contorno. Ao longo dos últimos anos, o método vem ganhando atenção no ambiente científico, por permitir obter projetos mais eficientes e, dependendo do objetivo do projeto, obtém-se redução de custos de fabricação. Os algoritmos existentes do MOT são compostos pela utilização de um método de otimização, podendo esse ser determinístico ou probabilístico, em conjunto com um método numérico, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Atualmente, a aplicação de otimização é mais difundida na área de mecânica dos sólidos, mas aos poucos vem ganhando notoriedade em aplicações na área de mecânica dos fluidos. A

relevância do tema pode ser comprovada no trabalho de Nørgaard, Sigmund e Lazarov (2016), em que mostram o uso de otimização topológica em um sistema *bypass* sanguíneo na área de medicina, assim contribuindo para uma melhor qualidade de vida das pessoas. Em virtude da necessidade de obter um vantajoso método numérico para ser utilizado com as técnicas de otimização, garantir uma estrutura adequada de MEF aplicada a problemas fluidos se torna interesse na comunidade científica. Portanto, o desenvolvimento de técnicas de estabilização por meio do método elementos finitos se torna muito importante, por permitir uma implementação confiável e também com um menor custo computacional.

1.2 OBJETIVOS

Esta dissertação tem como objetivo desenvolver uma metodologia de otimização topológica para escoamentos laminares incompressíveis bidimensionais, por meio da integração do método elementos finitos multiescala no processo de otimização topológica. A utilização de um método de elementos finitos estabilizado permite corrigir as ineficiências numéricas que ocorrem em problemas de escoamentos que envolve as equações de Navier-Stokes, quando utilizado método de elementos finitos convencionais. Logo, uma boa implementação de um método de elementos finitos permite fornecer uma execução confiável e com um menor custo computacional para o processo de otimização. Os resultados deste trabalho foram comparados com a literatura para validação da metodologia, tendo como resultado final geometria otimizada.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Além da introdução, a dissertação é composta pelos seguintes capítulos:

- no capítulo 2, são apresentados os aspectos relativos à discretização da Equação de Navier-Stokes; em seguida, os conceitos importantes associados ao método de otimização topológica;
- no capítulo 3, é apresentada a metodologia de elementos finitos multiescala variacional que será utilizada em conjunto com o método de otimização topológica;
- no capítulo 4, é apresentado o conceito básico do processo de otimização topológica;

- no capítulo 5, são trazidos os resultados obtidos no processo de otimização e comparados a resultados encontrados na literatura; e
- no capítulo 6 são expostas as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A vida cotidiana está cercada de problemas relacionados à mecânica dos fluidos, os quais podem ser de cunho de fenômenos naturais ou problemas de engenharia. Por exemplo: uma bomba d'água de um carro com baixa eficiência; um alto ruído provindo de um sistema de exaustão do carro; o superaquecimento de computadores devido à ineficiência do *cooler* de resfriamento, entre outros problemas. O desejo de corrigir ou minimizar tais problemas vem sendo impulsionado ao longo dos anos, com os progressos tecnológicos, tornando possível agora estudar mais profundamente um problema fluido.

Com essa evolução de tecnologias e o desenvolvimento de software como o CFD, é possível realizar, por meio de simulações, o fluxo de fluido ao redor ou por meio de qualquer produto a ser analisado em grande detalhe. Continuando com os avanços, agora sendo complementados com o método de otimização topológica em estruturas e escoamentos, permitiu-se obter soluções de manufatura para topologias complexas e, com isso, resolvendo problemas relacionados ao projeto, produzindo produtos mais eficientes e, a depender do objetivo, consegue obter-se a redução de custos na manufatura de um produto/componente.

O método de elementos finitos, devido a sua robustez e capacidade de trabalhar com geometrias complexas, segundo Tsega e Katiyar (2018), se tornou uma das ferramentas mais úteis para auxílio a engenheiros e cientistas, nos últimos anos. O MEF é uma importante ferramenta para a solução de equações diferenciais parciais. Obter a solução exata para alguns problemas de engenharia, como problemas de fluidos, ainda é uma tarefa desafiadora, porém, por meio do MEF, aproximações resultantes permitem descrever tais fenômenos.

De acordo com Masud e Khurram (2018), em problemas de fluidos, as formulações do método de elementos finitos para as equações de Navier-Stokes sofrem algumas deficiências numéricas. Um dos fatores que contribuem para tais deficiências é a combinação inadequada de funções de interpolação para a velocidade e pressão e uma das formas de corrigi-las é adotar técnicas de estabilização como a do método de elementos finitos multiescala que é apresentado neste trabalho.

2.1 EQUAÇÃO DE NAVIER STOKES

As equações que regem o movimento de uma partícula fluida no espaço são dadas sob a forma de equações de Navier-Stokes (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2002). Para um escoamento em um meio poroso, as equações diferenciais que governam o escoamento em estado permanente são dadas por:

- conservação de momento

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \rho \mathbf{f} \quad (2.1)$$

- equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

Em que \mathbf{u} é o campo de velocidade, p é a pressão, μ é a viscosidade dinâmica, ρ é a densidade de massa e \mathbf{f} é o vetor força de corpo. Ao introduzir uma força resistiva por causa da porosidade, a equação (2.1) pode ser reescrita sendo (equação de Brinkman):

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \rho \mathbf{f} + \mathbf{f}_r \quad (2.3)$$

Sendo \mathbf{f}_r a força resistiva de Darcy para o fluido viscoso, que é dado por:

$$\mathbf{f}_r = -k(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.4)$$

Considera-se que a força de atrito que ocorre entre o fluido e a matriz sólida seja proporcional à velocidade do fluido no meio poroso (lei de Darcy). O coeficiente k (permeabilidade inversa) para esse caso é considerado o esquema de interpolação de material, interpolando entre uma pequena taxa de fluido (meio poroso com baixa permeabilidade $k \gg 1$) e uma taxa alta de fluxo (alta permeabilidade), ou no caso de um fluxo não perturbado ($k = 0$). Temos k sendo uma função da variável de projeto α .

Devido ao termo de advecção $\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ e a restrição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, a estabilização da equação de Navier-Stokes se torna necessária; e isso se torna possível por meio da utilização de métodos estabilizados, o que será visto nas próximas seções.

2.1.1 Forma forte da equação de Navier-Stokes

A forma forte de um problema de valor de contorno para as equações de Navier-Stokes é formulada na seguinte configuração: encontrar o campo de velocidade \mathbf{u} e o campo de pressão p , de tal modo que:

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla) \mathbf{u}^T) + \nabla p + k(\alpha) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{in } \Gamma_D \quad (2.7)$$

$$-p \mathbf{n} + \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{in } \Gamma_N \quad (2.8)$$

2.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

De acordo com Reddy (1993), o método de elementos finitos é um procedimento numérico para obter aproximações das soluções de problemas de valores de contorno de equações diferenciais. O procedimento MEF trata de seccionar o domínio de um problema em menores partes, ou seja, em subdomínios que são chamados de elementos finitos. Para cada elemento, a variável desconhecida é aproximada por uma combinação linear de aplicações chamada de funções de forma, estando essas funções associadas aos nós que definem o elemento. Essas aproximações são então montadas em único conjunto, assim formando um sistema global para todo o domínio. Em alguns métodos numéricos para resolver as equações diferenciais parciais, essas podem ser discretizadas diretamente na formulação forte do problema (isto é, escritas como equações algébricas lineares adequadas para soluções computacionais. Entretanto, isso não é possível no método de elementos finitos. Desta forma, é necessário obter uma formulação fraca do problema, que é uma forma integral das equações.

2.2.1 Formulação de Galerkin e forma fraca do problema de escoamento

Em razão da complexidade que é obter a solução analítica da equação de Navier-Stokes, o auxílio de métodos numéricos na resolução de problemas desse tipo se torna muito importante. Por meio da implementação do método de elementos finitos consegue-se achar a solução aproximada das equações de Navier-Stokes. A vantagem em adotar o MEF como método numérico, comparado a outros métodos, é a capacidade de poder trabalhar com geometrias, muitas vezes, complexas, e sua eficiência na solução de equações diferenciais. Desta forma, conforme citado por Tsega e Katiyar (2018), o método de elementos finitos (MEF) se tornou uma das ferramentas de engenharia mais importantes e úteis para engenheiros e cientistas, nas últimas décadas.

As formulações numéricas apresentadas aqui para resolver as equações de Navier-Stokes para um estado permanente dada pelas Equações (2.5) e (2.6), são baseadas no método de elementos finitos. Portanto, conforme explicado por Jacob e Belytschko (2009), em método de elementos finitos não é possível converter diretamente a forma forte para um conjunto de equações discretas. Para isso, uma formulação fraca do modelo se torna necessária, a qual apresente equivalência com a formulação forte.

A formulação fraca das Equações (2.5) e (2.6) é dada por: ache $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{S} \times Q$, tal que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}; w, \mathbf{u}) + a(w, \mathbf{u}) + b(w, p) + k(w, \mathbf{u}) &= (w, \mathbf{f}) + (w, \mathbf{t}) \quad \forall W \in \vartheta \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned} \quad (2.9)$$

Com as definições para os termos bilineares e formas bilineares utilizadas na forma fraca do problema

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.10)$$

$$b(\mathbf{w}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (2.11)$$

$$b(w, \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} w \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.12)$$

Em que $(\cdot, \cdot) = \int_{\Omega} (\cdot) d\Omega$ representa o produto interno $L2(\Omega)$ e w é a função de ponderação para \mathbf{u} conforme explicado no trabalho de Masud e Khurram (2004).

Introduz uma forma trilinear

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.13)$$

Sendo essa associada com o termo convectivo não linear presente na equação de momento.

Outra forma bilinear para o termo viscoso pode ser definida, sendo:

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) d\Omega \quad (2.14)$$

Para esse caso não foi utilizada a condição de incompressibilidade, evitando a simplificação do termo viscoso. Isso possibilita diferentes condições de contorno natural, utilizando a formulação da equação (2.14), a condição da equação (2.8) torna-se:

$$-p\mathbf{n} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (2.15)$$

Essa última opção é a mais adequada, uma vez que contém a forma exata do tensor da taxa de deformação.

A formulação de Galerkin do problema de Navier-Stokes é expressada da seguinte forma:

Dado \mathbf{f} , \mathbf{u} e \mathbf{t} ache o campo de velocidade $\mathbf{u}^h \in \mathcal{G}^h$ e o campo de pressões $p^h \in Q^h$ para todo $(w^h, q^h) \in \mathcal{G}^h \times Q^h$, tal que

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) + a(w^h, \mathbf{u}^h) + b(w^h, p^h) + k(w^h, \mathbf{u}^h) &= (w^h, \mathbf{f}^h) + (w^h, \mathbf{t}^h) \\ b(\mathbf{u}^h, q^h) &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

A partir da equação (2.16) e as funções de interpolação apropriadas para o campo de velocidade e pressão, obtém-se que a matriz do sistema que rege o problema discreto da equação de Navier-Stokes assume a seguinte forma particionada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{M} + \mathbf{C}(\mathbf{u}) & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Em que \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{K} é a matriz viscosa, \mathbf{Q} é a matriz do operador gradiente discreto e $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ é a matriz convectiva não linear.

A natureza do problema de ponto de sela, com pressão que atua como um multiplicador de Lagrange na restrição de incompressibilidade, produz um acoplamento entre a velocidade e pressão. O sistema apresentado em (2.17) é um sistema não linear e não simétrico (devido aos termos convectivos presentes).

Para o problema de Navier-Stokes em estado permanente, quando utilizado o método de elementos finitos de Galerkin há ao menos duas fontes potenciais de instabilidade numérica na solução do problema. A primeira ocorre em razão do tratamento do termo convectivo que se manifesta quando o número de Reynolds do escoamento é alto, quando o escoamento é não desenvolvido ou camadas limites estão presentes na formulação. Há outra fonte potencial geradora de instabilidade é a combinação inadequada de funções de interpolação para a velocidade e a pressão. No entanto, a fim de contornar tais problemas, existem procedimentos que auxiliam na estabilização na equação de Navier-Stokes, que são capazes de superar ambos os tipos de instabilidade numérica.

2.2.2 Implementação do Método de Elementos Finitos

A escolha do tipo de discretização das equações incompressíveis de Navier-Stokes deve satisfazer às condições Ladyzhenskaya – Babuška – Brezzi (LBB ou inf-sup) (FORTIN, BREZZI, 1991; REDDY, GARTLING, 2010; LANGTANGEN; LOGG, 2016), condições essas que permitem obter uma configuração mais estável para o problema.

O uso de contínuos de ordem igual ao elemento finito de Lagrange para pressão e velocidade leva a um problema instável (ABRAHAM; BEHR, 2005).

Para resolver as equações do problema de Navier-Stokes, o elemento Taylor-Hood, é um dos

empregados, visto que ele satisfaz a condição (LBB) (TAYLOR; HOOD, 1973; ARNOLD; BREZZI, 1984).

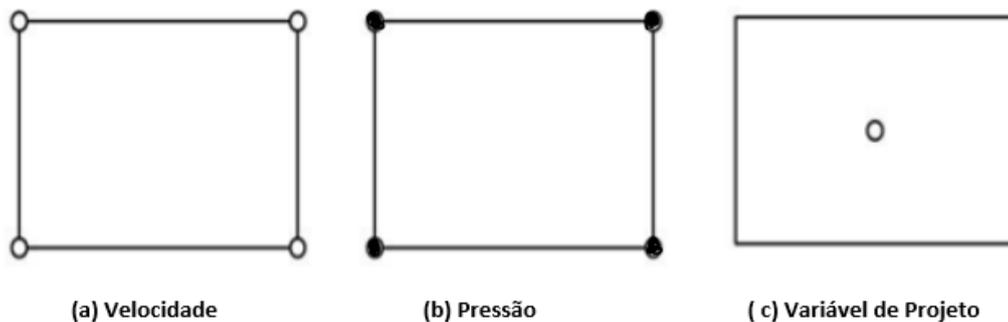
Uma das vantagens de desenvolver uma formulação estabilizada, como o método de elementos finitos multiescala estabilizado utilizado neste trabalho, é que além de atender à condição (LBB), ela também corrige o problema de instabilidade ocorrido devido à combinação inadequada de funções de interpolação para a velocidade e a pressão. Desenvolver um sistema estabilizado permite obter a função linear tanto para velocidade quanto para pressão, como pode ser visto na Figura 1. Uma das vantagens dessa configuração é poder obter quatro componentes para velocidade e quatro componentes para pressão, pois dessa forma haverá menos variáveis a serem analisadas.

Na Equação (2.18) têm-se as funções de transformação, em que $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$.

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i \phi_i(\xi, \eta) \\ y &= \sum_{i=1}^n y_i \phi_i(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Sendo x_i e y_i as coordenadas dos nós dos elementos, as funções ϕ_i são elementos lagrangianos, $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$ e $\phi_i = 1$ no nó i e 0 para os demais nós.

Figura 1 – Nós de elementos finitos (a) Velocidade); (b) Pressão; (c) Variável de projeto em um elemento



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Para as velocidades, por meio das funções lineares a aproximação ocorre conforme a equação (2.19).

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1) \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + 1)(\eta - 1) \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + 1)(\eta + 1) \\ \phi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta + 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

No caso da pressão, a aproximação ocorre por meio de funções lineares, sendo determinadas pela Equação (2.20):

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \chi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \chi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \chi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

2.2.3 Implementação numérica das equações de Navier-Stokes

No modelo de Galerkin para o método de elementos finitos aplicado às equações de Navier-Stokes, a escolha das funções de ponderação está restrita ao espaço das funções de aproximação usadas para a pressão e o campo de velocidade. Para um sistema estabilizado, tem-se que a função de interpolação para velocidade e pressão é igual, neste caso sendo funções lineares. As variáveis $(\mathbf{u}_i, \mathbf{p})$ são aproximadas pela expansão de mesma ordem, o que pode ser visto nas equações (2.21) e (2.23):

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^4 \phi_n(\mathbf{x})u_i^n = \Phi^T \mathbf{u}_i \quad (2.21)$$

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^4 \chi_n(\mathbf{x})p_n = \chi^T \mathbf{p} \quad (2.22)$$

Para as funções pesos (\mathbf{w}, q_p) tem-se a seguinte correspondência:

$$\mathbf{w} \approx \Phi, \quad q_p \approx \Phi \quad (2.23)$$

O sistema não linear resultante pode demonstrado, sendo:

$$R_{m1}^i = \int_{\Omega} \left[\rho \phi_i \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + k \alpha \phi_i u_1 + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \rho g_1 \phi_i d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_1 \phi_i d\Gamma \quad (2.24)$$

$$R_c^i = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \phi_i d\Omega \quad i = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

De forma tensorial, as equações apresentadas acima podem ser escritas da seguinte forma:

- conservação de momento

$$\mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (2.26)$$

- equação da continuidade

$$-\mathbf{Q}^T \mathbf{u} = 0 \quad (2.27)$$

Em que: $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]^T$.

As Equações (2.26) e (2.27), no caso bidimensional, podem ser combinadas em um único sistema algébrico, passando a ter a seguinte expressão tensorial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} & -\mathbf{Q}_2 \\ -\mathbf{Q}_1^T & -\mathbf{Q}_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Pode-se escrever o sistema (2.28) como:

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{U} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (2.29)$$

Em que as matrizes $\hat{\mathbf{C}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$ são definidas na Equação (2.28), e tendo os coeficientes das matrizes definidos como:

$$\mathbf{C}_j(\mathbf{u}_j) = \int_{\Omega^e} \rho \Phi (\Phi^T \mathbf{u}_j) \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.30)$$

$$\mathbf{K}_k = \int_{\Omega^e} \Phi \Phi^T d\Omega \quad (2.31)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.32)$$

$$\mathbf{Q}_i = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Phi^T d\Omega; \quad (2.33)$$

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega^e} \rho \Phi f dx \quad (2.34)$$

Pode-se definir o sistema de uma forma mais compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_d & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Sendo os elementos que compõem o sistema (2.35) definidos como:

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2) & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

O sistema apresentado é um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas, não lineares e não simétricas, devido à contribuição do termo convectivo $\mathbf{C}(\mathbf{u})$. Portanto, a linearização do sistema torna-se necessária, e isso é possível com o uso adequado de algum método de

linearização para a solução, tais como Newton-Raphson e Picard. A contribuição da forma simétrica \mathbf{K}_d vem do termo difusivo. A matriz \mathbf{K}_k é simétrica e vem do termo de absorção. As variáveis de estado do problema ficam sendo os campos de velocidade e pressão, e podem ser definidas de uma forma compacta baseada na equação residual discreta (2.40), conforme abaixo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

Em que \mathbf{U} é o vetor que contém as variáveis de estado $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{p}]^T$

2.2.3.1 Método de Newton

Conforme foi possível observar, problemas de escoamento regidos pela equação de Navier-Stokes são *não lineares*, sendo importante a sua linearização. Conforme encontrado em Dhatt, Fomo e Bourque (1981), o método de Newton consiste em resolver problemas não lineares por meio do cálculo de vários incrementos do vetor das incógnitas até que o vetor dos resíduos seja minimizado.

Para obter uma taxa de convergência de segunda ordem utilizando o método de Newton, a Equação (2.40) é reescrita sendo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{U})\mathbf{U} - \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) \quad (2.41)$$

O método de Newton está baseado na série de Taylor truncada $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ em torno da solução conhecida \mathbf{U}^n :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}(\mathbf{U}^n) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^n} \Delta \mathbf{U} + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{U})^2 \quad (2.42)$$

Em que $\Delta \mathbf{U} = (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n)$, omitindo-se termos de ordem superior, incluindo os de segunda ordem, obtém-se:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) = - \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^n} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) \equiv -\mathbf{J}(\mathbf{U}^n)(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) \quad (2.43)$$

Em que \mathbf{J} é a matriz Jacobiana, também chamada de matriz tangencial. De acordo com Portella (1984), a matriz Jacobiana é obtida pela discretização da primeira variação da derivada funcional do método dos resíduos ponderados de Galerkin.

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^n} \quad (2.44)$$

Aproximando a solução \mathbf{U}^{n+1} para o sistema (2.41), obtém-se:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{U}^n) \mathbf{R}(\mathbf{U}^n) \quad (2.45)$$

No caso bidimensional, os componentes do vetor solução $\mathbf{U}^T = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{p}]$ e os componentes do vetor resíduo \mathbf{R} , são:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 + (2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22})\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_2 - \mathbf{Q}_1\mathbf{p} - \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2 + \mathbf{C}_2(\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{21}\mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22})\mathbf{u}_2 - \mathbf{Q}_2\mathbf{p} - \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{R}_3 &= -\mathbf{Q}_1^T\mathbf{u}_1 - \mathbf{Q}_2^T\mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

A equação (2.46) corresponde ao problema de um fluxo incompressível. Dessa forma, a matriz Jacobiana do método de Newton é dada como:

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_2} & \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{u}_2} & \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \mathbf{u}_2} & \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

2.2.4 Estabilização do problema de Navier-Stokes

Empregando o método de Galerkin, consegue-se obter uma aproximação central dos termos convectivos, mas quando há um escoamento com elevado número de Reynolds, em que ocorre convecção dominante, com relação à difusão (efeito da viscosidade) a aproximação não é ótima. Para contornar tais problemas e obter soluções numéricas que possam ser confiáveis ao problema, a implementação de uma formulação estabilizada de elementos finitos torna-se necessária. Uma condição também requerida ao se utilizar o método de Galerkin tradicional, quando aplicada a equação de Navier-Stokes incompressível, é que a estabilidade do método depende de satisfazer a condição de Babuska-Brezzi (LBB). Porém, por meio do emprego de técnicas de estabilização, essa condição pode ser contornada.

3 MÉTODO MULTIESCALA VARIACIONAL

Um esquema de estabilização conhecido é o método GLS (*Galerkin Least Squares*), que pode ser visto nos trabalhos de Hughes, Franca e Hulbert (1989) e Hughes, Franca e Balestra (1986). Nas formas de mínimos quadrados do método GLS dos resíduos que são baseados nas equações de Euler-Lagrange correspondentes é adicionada a formulação de Galerkin. Esses termos baseados em resíduos são definidos apenas sobre os interiores do elemento, e os termos no limite do elemento são excluídos.

De acordo com Reddy e Gartling (2010), os vários métodos de estabilização implementados na formulação GLS exigiam a definição de vários parâmetros τ , para os quais havia pouca teoria que servisse como orientação para o desenvolvimento da formulação estabilizada. A contínua evolução e o refinamento dos parâmetros de estabilização foram assuntos de algumas críticas e incertezas atribuídas ao método GLS com relação à sua utilização como um método estabilizador. Diante dessas dificuldades encontradas nas principais técnicas de estabilização, o método multiescala passou a ser um importante método para ser usado em problemas de Navier-Stokes.

No método variacional multiescala introduzido por Hughes (1995), são explicadas de forma clara as origens do parâmetro de estabilização em métodos baseados em resíduos. O método fornece a necessária estrutura matemática para a construção dos chamados modelos de submalhas. Como forma de entendimento mais claro, o método se assemelha aos métodos de viscosidade de submalha apresentado no trabalho de Guermond (1999). O objetivo aqui, é que aproximações de elementos finitos normais resolvam somente os aspectos na escala grosseira de problemas envolvendo comportamento multiescala.

De modo a obter um entendimento conciso sobre o método variacional multiescala, o conceito básico do método é decompor a solução de \mathbf{u} em dois componentes, sendo um na escala grosseira ou resolúvel, $\bar{\mathbf{u}}$, e outro componente na escala fina não resolúvel, \mathbf{u}' . O componente de escala grosseira $\bar{\mathbf{u}}$ é parte resolvida pela malha considerada de elementos finitos, enquanto o componente de escala fina \mathbf{u}' é a parte que se tenta determinar de forma analítica. Pode-se observar que a solução da escala fina \mathbf{u}' efetivamente representa o erro, $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, do componente em escala grosseira, enquanto a solução na escala grosseira $\bar{\mathbf{u}}$ é a escala resolúvel aproximada pelo método de elementos finitos.

Conforme citado por Masud e Khurram (2006), uma importante característica atribuída ao método variacional multiescala é que a definição do termo estabilizador τ aparece naturalmente na formulação, ficando, portanto, isenta de qualquer parâmetro projetado ou definido pelo usuário.

3.1 O MODELO DA FORMULAÇÃO FRACA DE GALERKIN

Tem-se que \mathbf{w} e q_p representando o espaço das funções de ponderação para o campo de velocidade e pressão, respectivamente. Os espaços apropriados de funções de ponderação para a velocidade e pressão ficam sendo:

$$\vartheta = \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \in (H^1(\Omega))^{nsd}, \quad \mathbf{w} = 0 \text{ em } \Gamma_u\} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{P} = \{q | q \in L_2(\Omega)\} \quad (3.2)$$

A formulação fraca clássica da Equação (2.5) e (2.6) passa a ser: ache $\mathbf{u} \in U$, $p \in P$, de modo que para todo $\mathbf{w} \in U$, $q \in P$.

$$(\mathbf{w}, \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{w}, \mu \nabla \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{w}, p) = (\mathbf{w}, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}, \mathbf{h})_{\Gamma_h}, \quad (3.3)$$

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (3.4)$$

A formulação apresentada atua como base no método de elementos finitos de Galerkin. Neste caso, apenas certas combinações de interpolações para a velocidade e pressão são estáveis, de acordo com Hughes, Franca e Balestra (1986). A forma fraca apresentada na sequência é inerentemente mais estável, permite acomodar uma variedade maior de interpolações estáveis, como por exemplo interpolações contínuas de igual ordem, que são conhecidas por serem instáveis nas formulações clássicas.

3.2 DECOMPOSIÇÃO MULTIESCALA

Para o desenvolvimento de uma formulação estabilizada para a equação de Navier-Stokes para este trabalho, foi utilizada a abordagem variacional multiescala de Hughes (1995). O princípio fundamental que rege a abordagem multiescala é a capacidade de poder reconhecer a presença das escalas finas que não podem ser capturadas por uma dada discretização espacial. Em problemas cuja solução desenvolve características nítidas que exigem uma resolução de malha impraticável ao recurso computacional, isso é de suma importância. De acordo com esse princípio, neste trabalho é assumida a premissa de que o problema possui múltiplas escalas.

Uma sobreposição de decomposição de soma para o campo escalar para escalas grosseiras ou resolúveis e as escalas finas ou escalas de submalhas não resolúveis ao problema é adotada.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})}_{\text{escala grossa}} + \underbrace{\mathbf{u}'(\mathbf{x})}_{\text{escala fina}} \quad (3.5)$$

A mesma ideia é aplicada para a função de ponderação: uma decomposição de soma da função para as componentes na escala grossa e na escala fina, identificada como $\bar{\mathbf{w}}$ e \mathbf{w}' , respectivamente.

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \underbrace{\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x})}_{\text{escala grossa}} + \underbrace{\mathbf{w}'(\mathbf{x})}_{\text{escala fina}} \quad (3.6)$$

É feita uma suposição de que as escalas de submalha, mesmo sendo diferentes de zero, no interior dos elementos, desaparecem identicamente ao longo dos limites do elemento.

$$\mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma. \quad (3.7)$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma. \quad (3.8)$$

A decomposição da solução na Equação (3.5) pode ser interpretada de uma outra forma. Pode-se escrever $\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^e$, em que \mathbf{u}^h é a solução obtida por meio de um método numérico sobre uma malha dada, e \mathbf{u}^e representa a solução que é perdida pelo fato de a sua escala ser menor do que a escala de comprimento característico da discretização. A melhor definição a ser dada à variável \mathbf{u}^e é tratá-la como o erro da solução.

O método multiescala a ser apresentado é um procedimento capaz de reconstruir o termo do

erro na forma fraca do problema. Esse procedimento leva automaticamente a uma forma estabilizada do problema, obtendo uma maior precisão para discretizações com menos refinamento.

Espaços apropriados de funções para os campos de escala grossa e escala fina são introduzidos, e uma decomposição em soma direta desses espaços é especificada.

$$\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{V}' \quad (3.9)$$

Em que $\bar{\mathcal{V}}$ e \mathcal{V}' representam o espaço de soluções de teste e as funções de ponderação para o campo de velocidade na escala grosseira e fina, respectivamente. Esse espaço é identificado com o espaço-padrão de elemento finito.

$$\bar{\mathcal{V}} = \left\{ \bar{\mathbf{u}} \mid \bar{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega), \bar{\mathbf{u}}(\Omega^e) = \mathcal{P}^k(\Omega^e) \right\} \quad (3.10)$$

Na Equação (3.10) $\mathcal{P}^k(\Omega^e)$ mostra polinômios completos de ordem k sobre (Ω^e) .

Por outro lado, várias caracterizações de \mathcal{V}' são possíveis, sujeitas à restrição imposta pela estabilidade da formulação que exige que \mathcal{V} e \mathcal{V}' sejam linearmente independentes. No caso discreto de \mathcal{V}' pode conter várias aproximações dimensionais finitas, por exemplo, funções bolha ou pré-refinamentos, que devem satisfazer a Equação (2.55), conforme é explicado no trabalho de Masud e Khurram (2006).

$$\mathcal{V}' = \{ \mathbf{u}' \mid \mathbf{u}' = 0 \text{ on } \Gamma' \} \quad (3.11)$$

Devido à Equação (3.8), o componente de escala fina da função de ponderação $\mathbf{w}' \in \mathcal{V}'$.

Para o campo de pressão, embora também possa ser decomposto em multiescala, mas com o intuito de facilitar o desenvolvimento da formulação e sem perder a generalidade, é assumido que o campo de pressão em escala fina é zero. Esse pressuposto contribui para a eliminação de termos desnecessários, que, caso contrário, originam-se da parte na escala fina da forma fraca da equação da continuidade em (3.4).

3.3 O PROBLEMA VARIACIONAL MULTIESCALA

Iniciado por meio das formulações de Galerkin convencionais, passa-se agora a substituir as soluções de teste (3.5) e as funções de ponderação (3.6) na forma-padrão variacional da Equação (3.3).

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}', \rho \nabla(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) + (\nabla(\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}'), \mu \nabla(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) - \\ (\nabla \cdot (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}'), p) = (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}', \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}', \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Fazendo-se considerações adequadas no campo de escala fina, como pode ser visto na Equação (3.8), e empregando a linearidade da função de ponderação, passa-se a dividir o problema em partes de escala grossa e fina, identificadas como \bar{W} e W' , respectivamente.

Para o subproblema em escala grossa \bar{W} , esse pode ser escrito da seguinte forma:

$$(\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) + (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \quad (3.13)$$

$$(q_p, \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) = 0 \quad (3.14)$$

O subproblema na escala fina W' pode ser escrito da seguinte forma:

$$(\mathbf{w}', \rho \nabla(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) + (\nabla \mathbf{w}', \mu \nabla(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) - (\nabla \cdot \mathbf{w}', p) = (\mathbf{w}', \mathbf{f}) \quad (3.15)$$

Como pode ser observado, as equações tanto na escala grosseira quanto na escala fina são equações não lineares, isto é justificado pelo termo advectivo. No entanto, para resolver as equações não lineares, é necessário primeiro linearizá-las. Com o objetivo de manter o processo de linearização de uma forma mais simples, uma proposta é, a partir do ponto fixo do método de iteração, considerar formulações linearizadas para os problemas de escala grossa e fina como indicadas, sendo \bar{W} e W' , respectivamente. O objetivo aqui é poder resolver o problema na escala fina, para obter a solução da escala fina \mathbf{u}' , a fim de que essa solução possa ser substituída no problema da escala grossa na Equação (3.13). Dessa maneira, as escalas finas são eliminadas, mas mantendo seu efeito na formulação.

3.4 O SUBPROBLEMA NA ESCALA FINA W'

Agora, considera-se a parte da escala fina da forma fraca W' , em que, em razão da suposição sobre o campo na escala fina, é definida sobre Ω' . Explorando-se a linearidade da solução na Equação (3.15), tem-se:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}', \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\mathbf{w}', \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}')_{\Omega'} + (\mathbf{w}', \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\mathbf{w}', \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}')_{\Omega'} + \\ & (\nabla \mathbf{w}', \mu \nabla \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\nabla \mathbf{w}', \mu \nabla \mathbf{u}')_{\Omega'} - (\nabla \cdot \mathbf{w}', p)_{\Omega'} = (\mathbf{w}', \mathbf{f})_{\Omega'} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Desprezando os termos de ordem superior $\nabla \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \approx 0$ e aplicando-se a integração por partes para o quinto termo do lado esquerdo, e utilizando-se as Equações (3.7) e (3.8), a Equação (3.16) passa a ser:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}', \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\mathbf{w}', \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}')_{\Omega'} + (\mathbf{w}', \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} - (\mathbf{w}', \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + \\ & (\nabla \mathbf{w}', \mu \nabla \mathbf{u}')_{\Omega'} + (\mathbf{w}', \nabla p)_{\Omega'} = (\mathbf{w}', \mathbf{f})_{\Omega'} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Reorganizando os termos, tem-se o problema na escala fina de forma reduzida, sendo:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}', \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}')_{\Omega'} + (\mathbf{w}', \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\nabla \mathbf{w}', \mu \nabla \mathbf{u}')_{\Omega'} = \\ & (\mathbf{w}', \mathbf{f} - \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \nabla p)_{\Omega'} \end{aligned} \quad (3.18)$$

De acordo com Masud e Khurram (2004), sem perder a generalidade no problema, assume-se que as escalas finas são representadas por meio de bolhas sobre os domínios dos elementos, conforme são apresentadas abaixo:

$$\mathbf{u}'|_{\Omega^e} = \phi_b^e \mathbf{u}'_e \quad \text{em } \Omega^e \quad (3.19)$$

$$\mathbf{w}'|_{\Omega^e} = \phi_b^e \mathbf{w}'_e \quad \text{em } \Omega^e \quad (3.20)$$

Em que ϕ_b^e representa a função de forma de bolha para as soluções de escala fina de velocidade e de ponderação, respectivamente.

Também se têm \mathbf{u}'_e e \mathbf{w}'_e , que representam os coeficientes para as soluções teste na escala fina e as funções de ponderação, respectivamente. Uma característica importante ao ser utilizada uma mesma função de bolha para a função de interpolação e a função de ponderação juntamente com as suposições sobre o campo de velocidade de escalas finas dado em (3.7) e (3.8) conduz

ao cancelamento do termo de distorção na definição de τ . Para o desenvolvimento deste trabalho e adotando a ideia de utilizar bolhas de ordem diferente para a função de interpolação de escala fina, foram utilizadas como referência as linhas de pesquisa Masud e Khurram (2004). Com isso, a definição de ϕ_b^e passa a ser:

$$\mathbf{u}'|_{\Omega^e} = \phi_{b_1}^e \mathbf{u}'_e \quad \text{em } \Omega^e. \quad (3.21)$$

$$\mathbf{w}'|_{\Omega^e} = \phi_{b_2}^e \mathbf{w}'_e \quad \text{em } \Omega^e \quad (3.22)$$

Aplicando-se as Equações (3.21) e (3.22) no problema de escala fina na Equação (3.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}'_e \phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1}^e \mathbf{u}'_e) + (\mathbf{w}'_e \phi_{b_2}^e, \rho \nabla \phi_{b_1}^e \mathbf{u}'_e \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\nabla \mathbf{w}'_e \phi_{b_2}^e, \mu \nabla \phi_{b_1}^e \mathbf{u}'_e) = \\ (\mathbf{w}'_e \phi_{b_2}^e, \mathbf{f} - \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \nabla p) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Deixando os coeficientes constantes \mathbf{w}'_e e \mathbf{u}'_e fora das expressões integrais e empregando a arbitrariedade de \mathbf{w}'_e , tem-se:

$$\mathbf{u}'_e = \frac{-1}{\left[(\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1}^e) + (\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \phi_{b_1}^e \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\nabla \phi_{b_2}^e, \mu \nabla \phi_{b_1}^e) \right]} (\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla p - \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f}), \quad (3.24)$$

Agora, pode-se reconstruir o campo de escala fina por meio das Equações (3.22) e (3.24).

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \phi_{b_1}^e \left[\frac{-1}{\left[(\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1}^e) + (\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \phi_{b_1}^e \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\nabla \phi_{b_2}^e, \mu \nabla \phi_{b_1}^e) \right]} (\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla p - \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \right] \quad (3.25)$$

Com o objetivo de tornar simples a apresentação, conforme apresentado no trabalho Masud e Khurram (2018), para o caso em que o resíduo das escalas grosseiras sobre o interior do elemento possa ser considerado constante, a Equação (3.25) pode ser simplificada conforme segue:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = -\tau (\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla p - \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \quad (3.26)$$

Em que τ é definida como a função de estabilidade, sendo expressada da seguinte forma:

$$\tau = \phi_{b_1}^e \left[(\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1}^e) + (\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \phi_{b_1}^e \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\nabla \phi_{b_2}^e, \mu \nabla \phi_{b_1}^e) \right]^{-1} \quad (3.27)$$

Para \mathbf{u}'_e da Equação (3.24) pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathbf{u}'_e(\mathbf{x}) = -\hat{\tau}(\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla p - \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \quad (3.28)$$

Em que $\hat{\tau}$ é expressado, sendo:

$$\hat{\tau} = \left[(\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1}^e) + (\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \phi_{b_1}^e \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\nabla \phi_{b_2}^e, \mu \nabla \phi_{b_1}^e) \right]^{-1} \quad (3.29)$$

Para o caso bidimensional $nsd = 2$, os termos de τ em um formato matricial são explicitados da seguinte forma:

$$(\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1}^e) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} \rho \left(\phi_{b_2}^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \phi_{b_1}^e + \phi_{b_2}^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \phi_{b_1}^e \right) d\Omega_e & 0 \\ 0 & \int_{\Omega^e} \rho \left(\phi_{b_2}^e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} \phi_{b_1}^e + \phi_{b_2}^e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_2} \phi_{b_1}^e \right) d\Omega_e \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$(\phi_{b_2}^e, \rho \nabla \phi_{b_1}^e \cdot \bar{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} \rho \left(\phi_{b_2}^e \bar{u} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_1} + \phi_{b_2}^e \bar{v} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_2} \right) d\Omega_e & 0 \\ 0 & \int_{\Omega^e} \rho \left(\phi_{b_2}^e \bar{u} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_1} + \phi_{b_2}^e \bar{v} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_2} \right) d\Omega_e \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$(\mu \nabla \phi_{b_2}^e, \nabla \phi_{b_1}^e) = \int_{\Omega^e} \mu \nabla \phi_{b_2}^e \otimes \nabla \phi_{b_1}^e d\Omega = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \phi_{b_2}^e}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_1} d\Omega & \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \phi_{b_2}^e}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_2} d\Omega \\ \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \phi_{b_2}^e}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_1} d\Omega & \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \phi_{b_2}^e}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{b_1}^e}{\partial x_2} d\Omega \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.5 O PROBLEMA NA ESCALA GROSSA $\bar{\mathbf{w}}$

O mesmo caso se aplica ao subproblema na escala grossa. Empregando-se a linearidade da solução no subproblema na escala grossa (3.13), tem-se:

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}')_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \\ (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \mathbf{u}') - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$(q, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}') = 0 \quad (3.34)$$

Organizando-se os termos, as Equações (3.33) e (3.34) passam a ser:

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}')_{\Omega'} + (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \mathbf{u}') + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + \\ (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$(q, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - (\nabla q, \mathbf{u}') = 0 \quad (3.36)$$

Fazendo a integração por partes ao terceiro termo da Equação (3.35), tem-se:

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}')_{\Omega'} - (\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{u}') + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + \\ (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Aplicando a integração por partes no primeiro termo e com $\mathbf{u}' = 0$ no contorno, tem-se:

$$(\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} = -(\bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}')_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho (\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}')_{\Gamma} = -(\bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}')_{\Omega'} \quad (3.38)$$

Utilizando a função de interpolação de escala fina contida na Equação (3.21) na Equação (3.37), tem-se:

$$\begin{aligned} (-\rho \bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \phi b_1 \mathbf{u}'_e)_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi b_1 \mathbf{u}'_e) - (\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{w}}, \phi b_1 \mathbf{u}'_e)_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + \\ (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pode-se representar os três primeiros termos da equação (3.39) em função de \mathbf{u}'_e , desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} & ((-\rho \bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \phi_{b_1}) + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1}) - (\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{w}}, \phi_{b_1}), \mathbf{u}'_e)_{\Omega'} + (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + \\ & (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Substituindo \mathbf{u}'_e da Equação (3.28), tem-se:

$$\begin{aligned} & (\rho \bar{\mathbf{w}} \nabla \phi_{b_1} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1} - \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{w}} \phi_{b_1}, \hat{\tau}(\phi_{b_2}, -\rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f}))_{\Omega'} + \\ & (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora a Equação (3.41) está totalmente expressada em termos de escala grossa (resolúvel ao problema), mas com os efeitos de escala fina inseridos no problema.

Em razão de as funções serem lineares, os termos de segunda ordem são nulos, desta forma, a equação (3.41) passa a ser:

$$\begin{aligned} & (\rho \bar{\mathbf{w}} \nabla \phi_{b_1} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \phi_{b_1} - \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{w}} \phi_{b_1}, \hat{\tau}(\phi_{b_2}, -\rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \nabla p + \mathbf{f}))_{\Omega'} + \\ & (\bar{\mathbf{w}}, \rho \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega'} + (\nabla \bar{\mathbf{w}}, \mu \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}, p) = (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{f}) + (\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{h})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.6 FUNÇÃO DE ESTABILIDADE

Pode-se escrever a função de estabilidade pela equação (3.27) da seguinte forma:

$$\tau = b_1^e \int_{\Omega^e} b_2^e d\Omega \hat{\tau} \quad (3.43)$$

Neste caso, a solução-teste está sendo representada pela função de bolha \mathbf{b}_1^e , enquanto a função de ponderação é representada pela função bolha \mathbf{b}_2^e . Na literatura, podem ser encontradas várias sugestões de funções de bolhas testadas. A escolha adequada da função bolha permitirá um melhor desempenho na estabilização da formulação, portanto, a sua escolha e seu aperfeiçoamento funcionam na base de teste. Neste trabalho, foram adotadas as funções bolhas citadas no trabalho de Masud e Khurram (2018), conforme podem ser vistas abaixo:

$$b_1^e(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \quad (3.44)$$

$$b_2^e(x, y) = (x + y)(1 - x^2)(1 - y^2) \quad (3.45)$$

4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

4.1 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

A necessidade de as indústrias otimizarem processos, fabricar produtos eficientes com garantia de qualidade, e ao mesmo tempo reduzindo custos de fabricação de um produto para se manterem constantemente competitivas no mercado, faz com que a otimização topológica seja um ótimo método que pode contribuir positivamente para a resolução de tais problemas.

Aplicando-se a otimização na mecânica dos sólidos, é possível desenvolver projetos com menor peso, uma melhor distribuição de material, porém mantendo as propriedades dos materiais exigidas no projeto. Na mecânica dos fluidos, por meio da otimização consegue-se melhorar a dissipação térmica em equipamentos, desenvolver dispositivos com menores taxas de perda carga, entre outras em que possam ser otimizados seus principais parâmetros. Aplicar a otimização em processos e projetos por muitos anos caminhou sob certa dificuldade quanto ao seu uso, devido a restrições dos métodos de manufatura para topologias complexas. Porém, com o passar dos anos, os avanços tecnológicos embutidos em novos processos de fabricação permitiram viabilizar a manufatura de projetos otimizados.

Basicamente, existem três abordagens de otimização: paramétrica; de forma; e topológica, sendo a escolha adequada a depender do nicho específico e do objetivo.

Na otimização paramétrica, partindo-se de um modelo inicial com parâmetros predeterminados, tais como geometria e material, os parâmetros são alterados buscando uma convergência para a otimização do sistema. É importante destacar que nessa abordagem a capacidade de convergência dependerá do quanto detalhado for o modelo proposto e, principalmente, dos parâmetros que a constituem.

Pelo método de otimização de forma, a alteração ocorre na forma dos contornos de um determinado domínio, porém sendo limitado. Na otimização de forma, é definida uma configuração inicial – composta pelos contornos que delimitam o sistema – e que pode ter sua forma alterada durante o processo de otimização. O método de otimização de forma se assemelha ao de otimização paramétrica, visto que o método necessita da criação de uma configuração inicial, possuindo uma forma predefinida, servindo como base para a otimização.

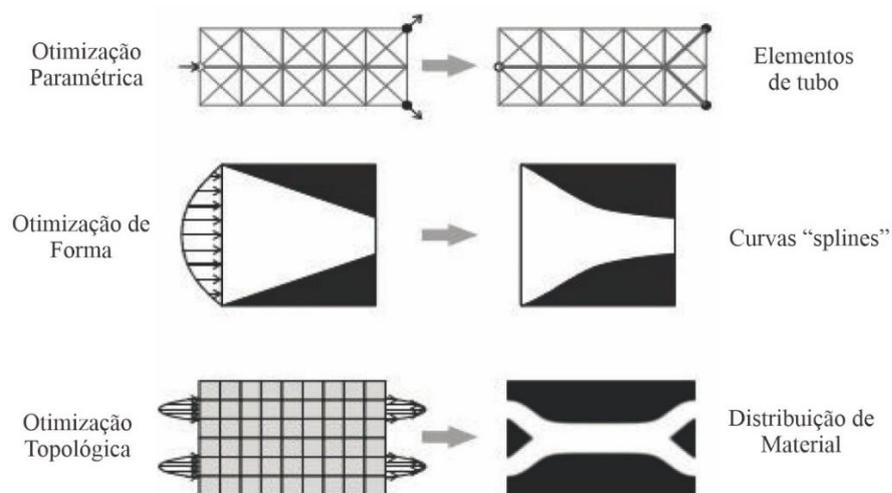
O emprego dessa abordagem depende expressivamente do nível de detalhamento, o famoso

“chute inicial”, com isso, levando a uma limitação na otimização, fazendo com que na maioria das vezes a otimização fique presa à forma inicial. Em geral, a utilização desse método é mais adequada em uma topologia já conhecida, em que é realizado o refinamento dos parâmetros até convergir em um resultado ótimo, sem grande diferença de geometria ao ser comparado ao modelo inicial. Diante disso, o método é ótimo para a etapa de “acabamento” de projetos.

Já a otimização topológica apresenta uma abordagem diferente dos métodos de otimização citados anteriormente, pois não é necessária uma configuração inicial predefinida.

A ideia do método é buscar a topologia ótima de um sistema por meio da distribuição de um material de um domínio fixo de projeto. Inicialmente, o domínio pode ser todo sólido (total presença de material) ou todo fluido (sem presença de material), também podendo assumir densidades intermediárias entre fluido e sólido, dependendo de como o modelo de material foi definido. A otimização topológica é realizada por meio da variação de densidade dentro do domínio de estudo, em que há uma moldagem da geometria ótima para o problema específico. O método permite uma distribuição livre de material disponível em qualquer ponto do sistema, com isso, permitindo o inserimento ou a remoção de material em qualquer região do domínio de projeto, sempre buscando a melhor relação entre desempenho e compatibilidade com os requisitos de projeto. Essa característica proporcionada pelo método de otimização topológica torna-o mais versátil, quando comparado aos demais métodos, sendo o seu emprego mais adequado às etapas de projeto conceitual. Na Figura 2, podem ser vistos os três principais métodos de otimização.

Figura 2 – Métodos de otimização



Fonte: Koga (2010).

O método de otimização topológica (MOT), tem como objetivo projetar uma topologia ótima de um sistema (sólido, elétrico, térmico, fluidos, etc.), visando alcançar uma determinada característica, definida por meio de uma função-objetivo, ou função de custo (por exemplo, aumentar a velocidade de um escoamento, maximizar a rigidez de uma estrutura, aumentar a dissipação térmica, reduzir a perda de energia em sistemas fluidos), a depender do projeto.

Um dos principais conceitos do MOT é o domínio fixo estendido, no qual se deseja obter uma solução ótima. Nele existe uma premissa de um espaço, inicialmente podendo ser totalmente fluido ou sólido, em que, utilizando-se um processo iterativo, ocorrerá a remoção ou a inclusão de material, sendo atualizado por meio de gradientes com base na função-objetivo da otimização. Para obter um melhor controle no processo de otimização, com resultados dentro dos parâmetros estabelecidos, um parâmetro de parcela fluída ou sólida é utilizado.

Outro conceito relevante para um melhor entendimento do método é a pseudodensidade, que é uma variável responsável pelo controle do material presente e, conseqüentemente, por suas características físicas em cada ponto do domínio de projeto. A característica da pseudodensidade permite em um ponto do domínio o aparecimento de estados entre regiões de fluidos e regiões sólidas.

O processo de otimização baseia-se na variação de densidade nos elementos, estando em um intervalo entre “0” e “1” (representando as regiões de fluido e sólido, respectivamente) até se obter uma topologia de melhor desempenho de acordo com as características exigidas.

Durante o processo iterativo, é muito frequente que as pseudodensidades tenham valores intermediários entre “0” e “1”. Em virtude dessa condição, para os elementos, um método de penalização é aplicado, fazendo com que valores intermediários tenham resultados extremos nas regiões de pseudodensidades intermediárias, as quais são também conhecidas como regiões escalas cinzas. Para uma melhor compreensão sobre os efeitos causados na geometria por meio do processo de otimização, um método numérico deve ser utilizado, tais como o método de elementos finitos (MEF), elementos de contornos ou Lattice Boltzmann, o que pode ser visto no trabalho de Nørgaard, Sigmund e Lazarov (2016).

O fato de o MEF poder trabalhar com geometrias muitas vezes complexas, sua boa adequação em problemas de otimização – permitindo definir as pseudodensidades por meio da própria malha discretizada no método de elementos finitos, ou seja, em que é permitido utilizar a mesma malha para aproximações das velocidades e pressões considerando as pseudodensidades – fez

dele o método mais difundido na aplicação de MOT, podendo ser visto seu emprego inicialmente no trabalho de Bendsøe (1995).

4.2 PROJETO OTIMIZADO

Em escoamentos fluidos, a variável de projeto a ser considerada é a pseudodensidade, que é a responsável por definir o tipo de material que está sendo aplicado em cada elemento, seja sólido, seja fluido.

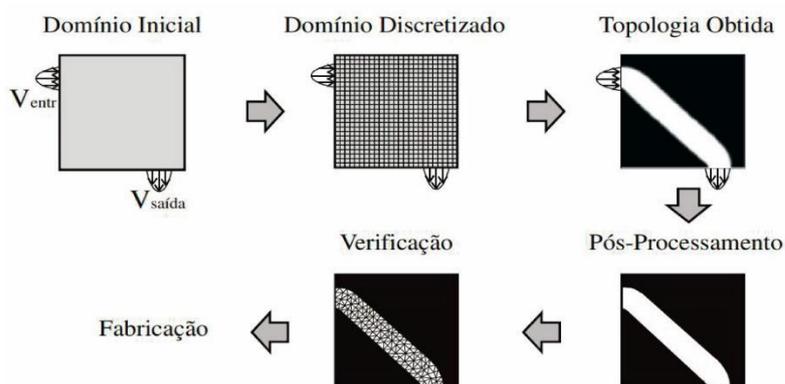
A primeira etapa em um processo de otimização topológica consiste na análise do problema proposto por meio de um método numérico (ex: MEF), sendo calculados os campos de velocidades, pressão e a temperatura para todo o domínio. Depois de obtidos os resultados, o próximo seguinte é calcular a função-objetivo, assim permitindo medir o “desempenho” da topologia com relação às características ou aos objetivos de interesse. Além da função-objetivo, é calculado o gradiente da função-objetivo e das restrições relativas à variável de projeto, juntamente com uma verificação das restrições impostas ao problema de otimização.

Por meio dessa etapa, consegue-se verificar em quais direções as pseudodensidades devem ser modificadas, para que a topologia seja otimizada. Esse processo é realizado iterativamente, até se obter uma convergência para uma solução ótima da topologia.

Depois da convergência e obtida a topologia ótima, uma nova análise da topologia é realizada, com o intuito de obter-se a topologia final, sendo essa chamada de pós-processamento. Com o resultado dessa etapa, visando agora ao processo de manufatura, uma nova análise é realizada e ajustes finais necessários na topologia são realizados.

A Figura 3 mostra as etapas de um processo de otimização topológica de um projeto.

Figura 3 – Etapas do processo de otimização



Fonte: Koga (2010).

O MEF, por causa da sua robustez e capacidade de analisar geometrias, muitas vezes complexas, tornou-se o principal método numérico de análise utilizado na implementação da otimização topológica. O domínio fixo estendido é então discretizado em elementos finitos, tendo essa discretização mantida fixa durante a otimização, ou seja, o modelo de elementos finitos não se altera, o que ocorre é apenas a distribuição de material dentro desses elementos.

Vale destacar que no processo de otimização topológica, especialmente com relação ao MEF, a escolha do tipo de elemento e a discretização adotada na otimização são de suma importância. A escolha de elementos de baixa ordem requer uma maior discretização da malha, com isso, obtendo mais elementos na sua composição. No desenvolvimento deste trabalho, cada elemento está relacionado a uma região sólida ou fluida de modo individual. Essa maior discretização reflete numa maior resolução na definição da topologia ótima. Isso se deve ao fato de que quanto mais elementos são utilizados na discretização, esses serão proporcionalmente menores, e maior precisão terá a definição das regiões sólidas/fluidas.

4.3 DOMÍNIO FIXO ESTENDIDO

Em um processo de otimização topológica, dois conceitos básicos são sustentados; um deles é conhecido como domínio fixo estendido (Ω), consistindo esse nos limites da região em que é realizada a otimização. É nessa região que ocorre o acréscimo ou a remoção de material, conforme a indicação dos gradientes de otimização. A solução ótima (Ω_d), a priori, é desconhecida.

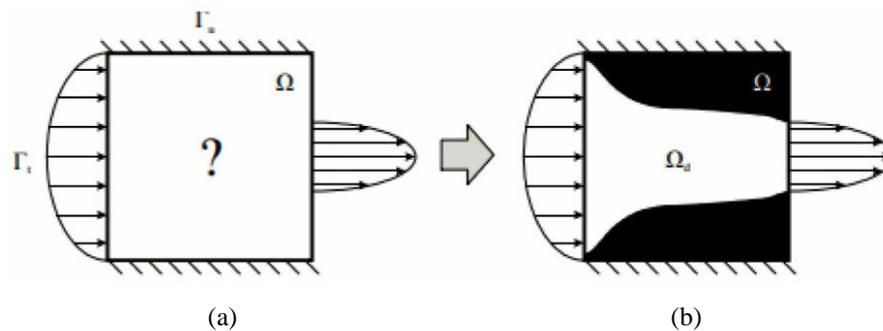
O domínio fixo estendido apresenta algumas vantagens quanto à sua utilização, sendo estas:

- permite uma maior liberdade de distribuição de material;
- não há necessidade de adaptar a malha de projeto conforme a solução obtida, durante as iterações.

Em contrapartida, há uma desvantagem ao se trabalhar com um domínio estendido. A necessidade de trabalhar com um domínio que possui mais elementos do que seria razoavelmente necessário ocasiona um aumento do custo computacional. Mas, ainda assim, a eficiência e a facilidade de implementação ao se trabalhar com um domínio fixo estendido se sobressai diante dessa desvantagem.

A Figura 4 contém uma representação do conceito de domínio fixo estendido, em que pode ser vista na parte (b) a região do domínio fixo estendido (Ω), na qual é acrescido ou removido material.

Figura 4 – Domínio Fixo Estendido



Fonte: Koga (2010).

4.4 MODELO DE MATERIAL

O modelo de material é o segundo conceito em um processo de otimização. O problema discreto pode não possuir uma solução única, sendo um problema mal-posto; com isso, torna-se interessante adotar um modelo contínuo do problema, bem-posto, capaz de obter uma solução única. Esse modelo com essa característica de variação contínua de material é denominado de modelo de material.

É esse modelo que define o tipo de material a ser utilizado na otimização e como ocorre uma transição contínua entre suas propriedades, ou seja, quais são suas características e como é a

formação de material em cada ponto. A partir do modelo de material consegue-se realizar a distribuição de material no domínio fixo estendido e obter a topologia ótima.

Com relação ao modelo de material, duas abordagens se destacam: a primeira consiste na otimização do modelo de microestrutura que compõe o material por meio do emprego de métodos de homogeneização, conforme Cheng e Olhoff (1981); a segunda abordagem baseia-se em modelos de material artificial, também conhecido como o método das densidades (BENDSØE, 1989).

O método das densidades, também conhecido como SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), permite o relaxamento do problema discreto, com isso facilitando a solução do problema de otimização. O relaxamento do problema no SIMP permite alterar uma propriedade do material num determinado ponto, conforme a variação contínua de densidade (variando de 0 a 1) para essa região, por meio da seguinte relação vista na equação (4.1).

$$C(x) = k(\alpha)C_0 \quad (4.1)$$

Sendo $C(x)$ e (C_0) relacionadas às propriedades efetivas do material, considerando a pseudodensidade e a propriedade-base, respectivamente. Por meio da propriedade (C_0) (módulo de elasticidade, permeabilidade, condutividade térmica etc.) do material-base, é possível definir propriedades intermediárias conforme o valor da pseudodensidade k ($0 \leq k(x) \leq 1$). Deve-se destacar que $C(x)$ representa propriedades efetivas intermediárias, ou seja, podendo variar linearmente de 0 até o valor C_0 , assim constituindo um modelo artificial de material.

A ideia em utilizar o modelo de material em problemas fluidos é poder anular a velocidade de escoamento nas regiões de paredes das superfícies, e controlar a permeabilidade nos elementos fluidos.

Uma melhor definição sobre o conceito modelo de material pode ser encontrada no trabalho de Borrvall e Petersson (2003), em que para definir o modelo de material entre duas placas, havendo entre as placas um perfil de velocidade parabólica, um conceito de escoamento de Couette completamente desenvolvido foi utilizado. Nesse caso, um modelo bidimensional simplificado é obtido e isso se deve à característica desse tipo de escoamento com base no número de Stokes, no qual o comprimento característico é expressivamente maior do que a distância entre as placas.

4.5 PENALIZAÇÃO

O problema discreto, que na maioria das vezes não possui uma única solução é transformado em um problema contínuo por meio do relaxamento do problema, agora tornando possível obter a solução do problema de otimização. O problema desse processo de relaxamento, é que se permite que a variável de projeto assuma valores intermediários entre fluidos e sólidos. Com isso, surgem regiões porosas (também conhecidas como regiões cinzas), que são indesejáveis do ponto de vista de manufatura. Para a solução final, é desejado que esta seja constituída apenas pelo material-base (fluido), ou regiões “vazias” (sólido), restabelecendo a natureza discreta no projeto, evitando valores intermediários para o material. Uma das formas de evitar que a condição de material assuma características intermediárias é forçar a pseudodensidade por meio da penalização, fazendo com que valores extremos (0 ou 1) sejam assumidos.

As pseudodensidades, ao serem numericamente forçadas em valores-limites podem ter sua solução ótima degradada, pois para uma transição mais gradativa e contínua da solução, poderia apresentar um melhor desempenho ao ser comparada a uma solução penalizada por valores extremos. Mas, do ponto de vista de manufatura, a penalização é necessária para a obtenção de um projeto viável, permitindo contornar as situações indesejáveis de regiões cinzas.

Com o intuito de evitar regiões cinzas ocorridas devido ao relaxamento do problema, é utilizada a Equação (4.2) do modelo SIMP proposto por Bendsøe (1989), sendo q representando o coeficiente de penalização.

$$C(x) = k(\alpha)^q C_0 \quad (4.2)$$

No modelo de material apresentado por Borrvall e Petersson (2003), utilizado em problema fluido, o relaxamento empregado, no qual se permite a variação contínua das variáveis de projeto no domínio ($0 \leq \alpha(x) \leq 1$), leva à variação na permeabilidade para cada elemento. Por conseguinte, uma alteração da velocidade de escoamento em cada elemento ocorre; com isso, diferenças entre um material sólido e fluido são obtidos. Nesse caso, a penalidade está baseada na relação entre a pseudodensidade α e permeabilidade inversa k , conforme é apresentado na equação (4.3).

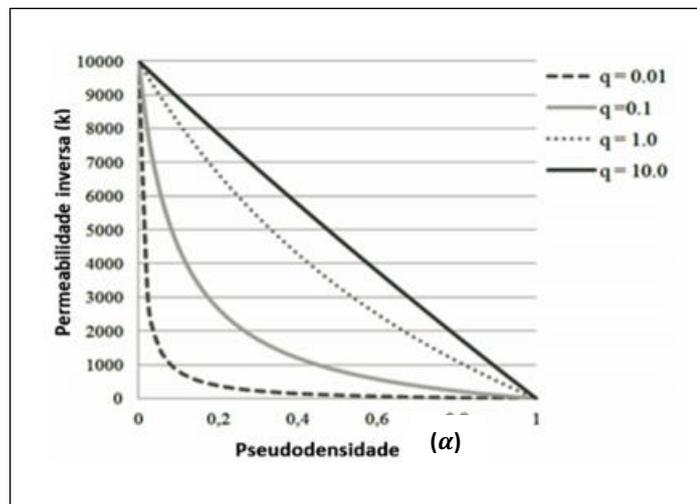
$$k(\alpha) = k_{\max} + (k_{\min} - k_{\max})\alpha \frac{1+q}{\alpha+q} \quad (4.3)$$

A penalização força os valores intermediários a tenderem a um dos extremos de propriedades efetivas.

Para valores altos de penalização, a curva da propriedade efetiva do material fica mais próxima de um degrau. Entretanto, valores elevados do coeficiente de penalização podem implicar uma otimização excessiva, ou seja, na solução ótima ocorrerá o aparecimento de mais regiões cinzas. No caso de valores baixos, pode-se ter uma não convergência da solução para resultados ótimos. Portanto, uma escolha adequada do valor de penalização passa a ser muito importante.

Na figura 5 pode ser visualizado o efeito da penalização em relação aos valores das pseudodensidades.

Figura 5 – Aplicação de diferentes valores de penalização aplicadas à permeabilidade inversa



Fonte: Adaptado de Olason e Tidman (2010).

De acordo com o trabalho de Angot, Bruneau e Fabrie (1999), para o modelo de Brinkman entende-se a permeabilidade inversa como a resistência ao escoamento do meio poroso, isto é, quanto maior o valor para k , menor será o fluxo por meio deste ponto e vice-versa, constituindo, assim, um escoamento somente por dissipações viscosas nos limites dos contornos. Nos pontos em que há valores de pseudodensidades $\alpha \approx 0$, compreendida como material sólido, tem-se, nesse caso, valores muito altos de permeabilidade inversa, de modo que quando a pseudodensidade assume valores próximos a 1, o k se torna desprezível. Para uma melhor

compreensão referente à aplicação do conceito do modelo de Brinkman no processo de otimização topológica, sua aplicação está relacionada à adoção dos valores de velocidades, sendo nulas nas regiões sólidas, enquanto nas regiões fluídas são modeladas por meio da formulação do escoamento de Stokes.

Uma importante vantagem do modelo de Brinkman consiste na possibilidade de incluir “obstáculos virtuais” e reproduzir os conceitos de velocidade de interface com as paredes sólidas do domínio fixo estendido. Para o processo de otimização, os obstáculos virtuais são mantidos constantes, assim, interferindo no resultado final. Mais especificamente, é possível criar regiões sólidas fixas no centro de canais sem necessidade de impor condições de contorno extras, o que torna mais versátil a mudança do domínio de projeto.

4.6 RESTRIÇÕES

A principal restrição imposta no método de otimização topológica consiste na limitação do material utilizado, em que é definida a fração máxima de volume permitida. A fração de volume é uma variável responsável pelo controle da quantidade de material que estará presente na solução final com relação ao domínio fixo inicial. Na mecânica dos sólidos, a restrição de material possui uma grande relevância devido ao emprego do método de otimização para a maximização da rigidez de uma estrutura, assim obtendo uma melhor relação peso x estrutura e, com isso, conseguindo uma redução significativa do custo de um projeto.

Para o campo da mecânica dos fluidos, a restrição do material se torna importante para a comparação entre soluções ótimas com diferentes frações de material, assim permitindo selecionar a melhor solução para o projeto proposto dentro das soluções de diferentes quantidades de materiais.

Bendsøe (1989) propôs uma equação básica para representar a restrição de fração de material, como pode ser visto nas equações (4.4) e (4.5).

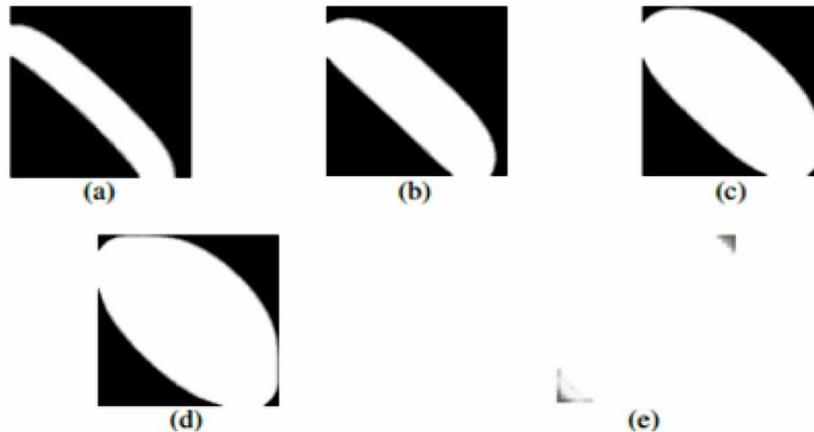
$$\int_{\Omega} \alpha d\Omega \leq V_f | \Omega | \quad (4.4)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.5)$$

Em que α representa o valor das pseudodensidades para cada ponto do domínio e V_f representa a fração de material fluido da geometria final da otimização no domínio Ω .

Na Figura 6, pode ser observado, para um mesmo domínio, um volume final depois de variar os valores de restrição.

Figura 6 – Frações de volume: (a) $V_f = 0,25$; (b) $V_f = 0,4$; (c) $V_f = 0,6$; (d) $V_f = 0,7$; (e) $V_f =$ sem restrição



Fonte: Koga (2010).

4.7 MÉTODO DAS ASSÍNTOTAS MÓVEIS

Em problemas de otimização topológica, é muito comum que o problema tenha um número expressivo de variáveis de projeto, visto que, para obter uma representação de geometria adequada, malhas mais refinadas se tornam necessárias e com isso há um maior número de elementos para análise, em que para cada elemento existe ao menos uma variável de projeto a ser otimizada. Para achar a solução do problema de otimização, dentre os métodos de programação matemática destaca-se o algoritmo otimizador, conhecido como método das assíntotas móveis (MAM). O MAM é um método para programação não linear aplicado em otimização, em que, para cada etapa do processo iterativo do algoritmo de programação matemática, um subproblema de aproximação convexa é gerado e resolvido.

A geração desses subproblemas é controlada pelas assíntotas móveis, as quais podem ambas estabilizar e acelerar a convergência do processo geral Svanberg (1987).

Algumas vantagens podem ser observadas ao se utilizar o MAM, sendo estas: modelos de aproximação convexos; separáveis; e que exigem apenas uma função de avaliação em cada ponto de iteração. O conceito de um modelo de aproximação convexo se baseia no fato de que

os métodos de programação dual ou primal-dual podem ser utilizados para a solução dos subproblemas, nos quais são métodos que buscam, respectivamente, minimizar ou maximizar um objetivo em um problema de otimização.

A ideia de separabilidade trata de que as condições ótimas necessárias do subproblema não acoplem as variáveis de projeto, ou seja, ao invés de um problema n-dimensional, é necessário resolver n problemas unidimensionais. Com isso, o custo computacional pode ser reduzido de forma expressiva. Svanberg (1987) desenvolveu um algoritmo no qual somente se referenciam as restrições de desigualdades, logo, na equação (4.6) tem-se a função-objetivo e restrições.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_0(a) && (a \in \mathbb{R}^1) \\ &\text{sujeito a} && f_i(a) \leq \hat{f}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.6)$$

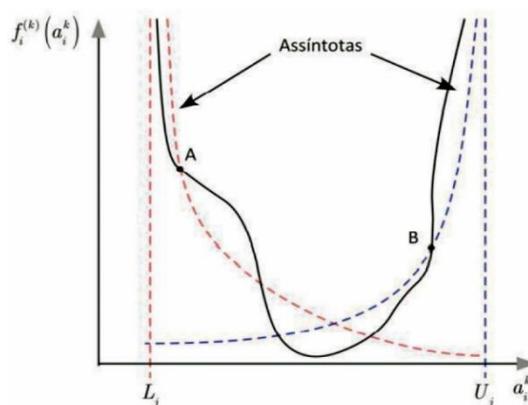
Sendo que $a = (a_1, \dots, a_n)$ representa o vetor das variáveis de projeto, $f_0(a)$ é a função-objetivo e $f_i(a) \leq \hat{f}$ são as restrições de projeto. Para obter a linearidade da função-objetivo e as restrições de projeto, variáveis intermediárias, também chamadas de assíntotas móveis, são introduzidas.

Para o processo iterativo no qual o vetor das variáveis é considerado, há uma restrição por desigualdade para os valores das assíntotas móveis, nos quais são controlados os limites superiores e inferiores, como pode ser observado na figura 7.

$$L_j^{(k)} < a_j^{(k)} < U_j^{(k)} \quad (4.7)$$

Na equação (4.7), tem-se que L e U representam os limites inferiores e superiores, e j refere-se à posição vetorial da variável.

Figura 7 – Curva de aproximação convexa por meio do Método das Assíntotas Móveis



Fonte: Lahuerta (2012, p. 57).

4.8 FUNÇÃO-OBJETIVO

Para escoamentos de fluidos por meio de um canal, uma das principais abordagens de interesse é a perda de carga do escoamento, assim, é desejado otimizar a dissipação de energia do escoamento.

A minimização da dissipação de energia potencial do sistema é tratada sendo a função-objetivo do problema de otimização. A função da energia potencial é obtida por meio do princípio dos trabalhos virtuais e calculada na solução de equilíbrio \mathbf{u} . Quando existem forças aplicadas no sistema, a minimização potencial total tem relação com a maximização das velocidades na região de aplicação das forças, juntamente com a minimização da energia potencial dissipada. Para os casos nos quais não há presença de forças aplicadas ao sistema, essa minimização está diretamente relacionada à dissipação da energia do fluido.

Para casos específicos em que há velocidades prescritas nos contornos de entrada e as saídas serem normais às fronteiras, a função-objetivo corresponde à perda de carga no canal Borrvall e Petersson (2003).

A dissipação de energia é dada por:

$$\varphi = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \kappa(\mathbf{x}) \mathbf{u}^2 \right] d\Omega \quad (4.8)$$

A função-objetivo é dada abaixo na forma contínua pela Equação (4.8):

$$\varphi = \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} k(\alpha) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (4.9)$$

Para a equação (4.9) são mostrados basicamente três termos, sendo o primeiro referente à dissipação, devido aos efeitos dissipativos viscosos no plano de escoamento, o segundo termo refere-se à dissipação de energia, por causa da porosidade do meio, e o último termo – sendo somente utilizado em casos em que há força aplicada em algum ponto do escoamento – faz referência à maximização das velocidades.

A função-objetivo apresentada na equação (4.9) é apropriada em várias aplicações, destacando-se principalmente em aplicações nas quais há uma limitação de energia disponível no

bombeamento do fluido, por isso necessita de um ótimo desempenho do canal por meio do qual ocorre o escoamento do fluido.

Demonstrando de forma discreta, a função-objetivo para a minimização da dissipação de energia pode ser representada conforme a equação (4.10).

$$\varphi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{K}}_d + \bar{\mathbf{K}}_k) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} \quad (4.10)$$

Em que os termos de \mathbf{C} são representados pela Equação (4.11).

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_d + \bar{\mathbf{K}}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Nas equações (4.12) e (4.13), têm-se os componentes da matriz simétrica \mathbf{C} .

$$\bar{\mathbf{K}}_d = \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

4.9 FORMULAÇÃO MOT PARA ESCOAMENTO

Depois de definidas a função-objetivo e as restrições, podem ser formulados os problemas a serem otimizados na forma contínua.

Para o caso de minimização de perda de carga, é dada da seguinte forma:

$$\text{minimizar: } \varphi = \frac{1}{2}\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} k(\alpha) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega$$

$$\text{sujeito a : } a_{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w})$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (4.14)$$

$$\int_{\Omega} \alpha d\Omega \leq V$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

As funções-objetivo acima são apresentadas em sua forma discreta.

4.10 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Conforme Hasund (2017), para realizar a otimização de geometrias em problemas de escoamento são necessários os cálculos dos gradientes da função-objetivo (φ) em relação à variável de projeto (α). Esse método é conhecido como análise de sensibilidade, em que é verificado de que forma uma alteração na variável de projeto pode modificar a função-objetivo e as restrições. A partir desse ponto, a otimização é então direcionada iterativamente ao ponto ótimo até ocorrer a convergência.

É possível determinar analiticamente o gradiente da função de dissipação de energia, como demonstrado abaixo. Nesse caso, a matriz \mathbf{C} é simétrica, portanto $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$, por diferenciação à Equação (4.8).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha_i} \mathbf{C} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \alpha_i} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha_i} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \alpha_i} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha_i} \quad (4.15)$$

Do sistema da equação de equilíbrio FEM, o termo $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha_i}$ pode ser obtido. Assim, da Equação (2.28), o vetor residual é dado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_G \mathbf{z} - \mathbf{F} \quad (4.16)$$

Em que:

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Sendo \mathbf{u} e \mathbf{p} os vetores com os valores nodais da velocidade e pressão da solução aproximada do método de elemento finito.

Por diferenciação, por meio da Equação (4.18), com relação à variável de projeto α , é obtido:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\alpha_i} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{d\alpha_i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (4.18)$$

Em que $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{J}$ é a resultante da matriz Jacobiana da aplicação do método de Newton para a solução do sistema não linear. Assim, tem-se:

$$\mathbf{J} \frac{d\mathbf{z}}{d\alpha_i} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial \alpha_i} \mathbf{z} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_i} = \mathbf{r}_i \quad (4.19)$$

Da Equação (4.19), tem-se:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\alpha_i} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{r}_i. \quad (4.20)$$

Substituindo a expressão anterior no segundo termo da Equação (4.15), tem-se:

$$\mathbf{z}^T \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha_i} = \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{r}_i = \mathbf{S}^T \mathbf{r}_i, \quad (4.21)$$

Em que \mathbf{S}^T é definido, sendo:

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{J}^{-1}. \quad (4.22)$$

Reorganizando a expressão anterior, obtém-se o sistema linear

$$\mathbf{J}^T \mathbf{S} = \mathbf{c} \mathbf{z} \quad (4.23)$$

Dessa forma, o vetor \mathbf{S} é obtido por meio da resolução do sistema linear acima. Esse sistema é independente da derivada com relação à variável de projeto, então ela é resolvida uma vez por iteração do processo de otimização. Porque o sistema é dependente do campo de velocidade anterior \mathbf{U} , e o vetor residual \mathbf{R} é assumido como zero; esse sistema é resolvido considerando as velocidades resultantes do processo de convergência de Newton.

Na Equação (4.21), o vetor \mathbf{r}_i é dado pela Equação (4.19), sendo calculado para cada elemento i no domínio.

4.11 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Para a realização deste trabalho foi utilizado como recurso computacional um computador com processador Intel(R) Core (TM) i7-9750H CPU @ 2.60GHz, 2.59 GHz, 32GB de memória RAM; e para geração dos resultados, as malhas utilizadas foram de 2.500 a 2.800 elementos.

Para proceder à implementação do MOT, há uma combinação de um método de análise (no caso deste trabalho foi adotado o MEF) e um algoritmo de otimização de forma iterativa, para determinar a distribuição de material no domínio de projeto. De forma resumida, os passos da implementação são: cálculo do MEF para o domínio de projeto (neste trabalho, é um domínio fluido); cálculo da função-objetivo e restrições; e por fim, a otimização do modelo. Esse processo é repetido em forma de *loop* até que se obtenha a convergência da solução, controlada pela diferença relativa entre iterações sucessivas.

Na Figura 8, é demonstrado o fluxograma com as etapas que envolvem o processo de otimização topológica, tendo sido definidas as informações iniciais do sistema, como o domínio de projeto, as restrições e as condições de contorno. Em seguida, as equações de Navier-Stokes são resolvidas a partir do método de elementos finitos.

A função-objetivo e as restrições são calculadas com base na distribuição atual da iteração das variáveis de projeto e velocidades. Em uma nova etapa, são resolvidas as análises de sensibilidade para todas as etapas de tempo de forma inversa, ou seja, iniciadas pela última etapa. Depois do cálculo das sensibilidades para todas as etapas do intervalo de tempo analisado, as direções de otimização são analisadas com base no algoritmo do Método das Assíntotas Móveis.

Esse processo ocorre de forma iterativa até que a convergência seja alcançada, obtendo como resultado a distribuição de pseudodensidades da geometria ótima.

Na equação (4.24) é apresentado o critério de convergência para a otimização.

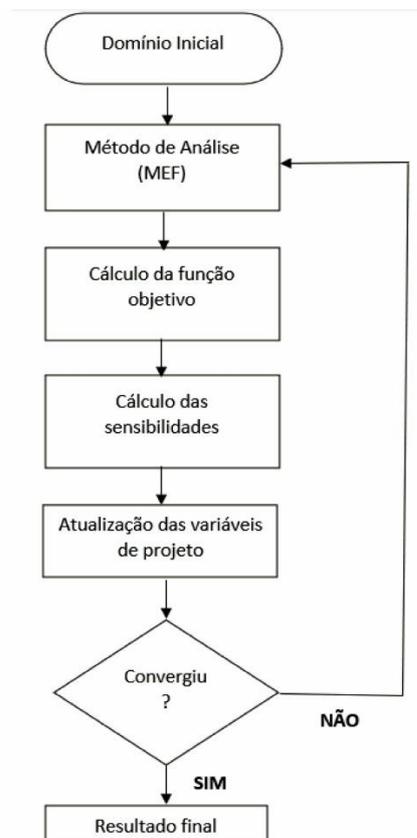
$$\|\alpha^k - \alpha^{k-1}\|_{\infty} \ll 1 \times 10^{-3} \quad (4.24)$$

Em que α é a distribuição da variável de projeto ao longo do domínio, e k é o número de iteração.

Na equação (4.25), é apresentada a restrição de volume, em que V representa o volume total do domínio, a_i é área de cada elemento i e V_f é o coeficiente de fração de volume fluido, no qual assume valores entre 0 e 1.

$$\sum_{i=1}^{ne} \alpha_i a_i \leq V_f V \quad (4.25)$$

Figura 8 – Fluxograma de implementação da otimização topológica



Fonte: Elaborado pelo autor.

O processo de otimização, considerando o avanço do tempo, é iterativo e consiste nas etapas elencadas a seguir.

- Dada uma estimativa (k) para a distribuição ideal de material, primeiro são resolvidas as Equações do sistema Navier-Stokes-Darcy, utilizando-se o método de elementos finitos, no qual é realizada a solução a partir das condições iniciais montadas.
- Em seguida, a análise de sensibilidade é realizada, na qual o gradiente do objetivo em relação às variáveis de projeto e as restrições são avaliados, e os adjuntos são utilizados para permitir essa solução. Nessa etapa, são empregados os valores armazenados no primeiro passo do processo de otimização.
- Com o apoio do método adjunto são calculados os gradientes de otimização.
- Com os gradientes e objetivos calculados, é utilizado o MAM para obter-se uma nova estimativa ($k + 1$) para o projeto ótimo, com base nas informações do gradiente e do histórico de iterações anteriores.
- O resultado do MAM indica quais elementos devem sofrer as devidas modificações em suas variáveis de projeto, gerando, assim, uma nova topologia, na qual posteriormente é analisada a nova distribuição de pseudodensidades com restrição de volume imposta na equação (3.2).
- A partir da nova distribuição de pseudodensidades é calculado o critério de convergência identificado na equação (4.24); caso a mudança de distribuição de material ao longo do domínio total possuir valor menor que 1×10^{-3} ou o limite máximo de iterações tenha sido alcançado, o processo de otimização é interrompido, e o resultado final de topologia é obtido.
- Caso contrário, se a convergência não tiver sido alcançada, são calculados novos valores de velocidade, objetivo e gradientes para a nova distribuição de materiais, sendo esse processo repetido até que a convergência seja alcançada.

5 RESULTADOS

Nesta seção, serão apresentados os resultados da aplicação do método de otimização topológica (MOT) em alguns exemplos clássicos da literatura para escoamento permanente, utilizando-se os métodos de elementos finitos. Os resultados são comparados com exemplos propostos por Borrvall e Petersson (2003), Deng (2011), Aage *et al.* (2008), e Koga (2010). Para o desenvolvimento deste trabalho, todos os casos são considerados bidimensionais, com escoamento de fluidos newtonianos e os valores de Reynolds variando de acordo com cada proposta de otimização apresentada pelas literaturas usadas como referência, nas quais os casos de otimização são iniciados considerando um domínio totalmente fluido. A Tabela 1 apresenta os valores iniciais de parâmetros do algoritmo otimizador Método das Assíntotas Móveis (MAM).

Tabela 1 – Parâmetros MAM

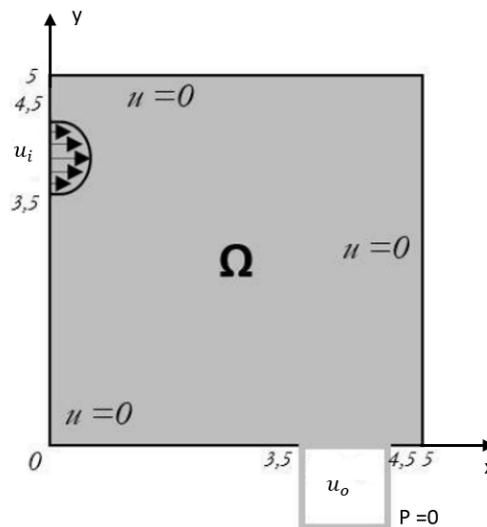
Parâmetro	Valor
Tamanho do passo (Δs)	0.1
Adaptação das assíntotas iniciais	0.5
Fator de escala para a violação de restrição	10^2
Número máximo de subciclos	1
Mudança relativa nas variáveis de otimização	10^{-5}

5.1 RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

5.1.1 Canal em curva de 90° (cotovelo)

O primeiro teste a ser avaliado trata-se de um canal em curva de 90° “cotovelo”, em que a geometria possui uma entrada e uma saída. Pode-se ver o domínio avaliado na Figura 9, em que a função-objetivo para essa otimização consiste na minimização da perda de carga. Para a velocidade, é formado um perfil parabólico, obedecendo à condição de continuidade entre entrada e saída.

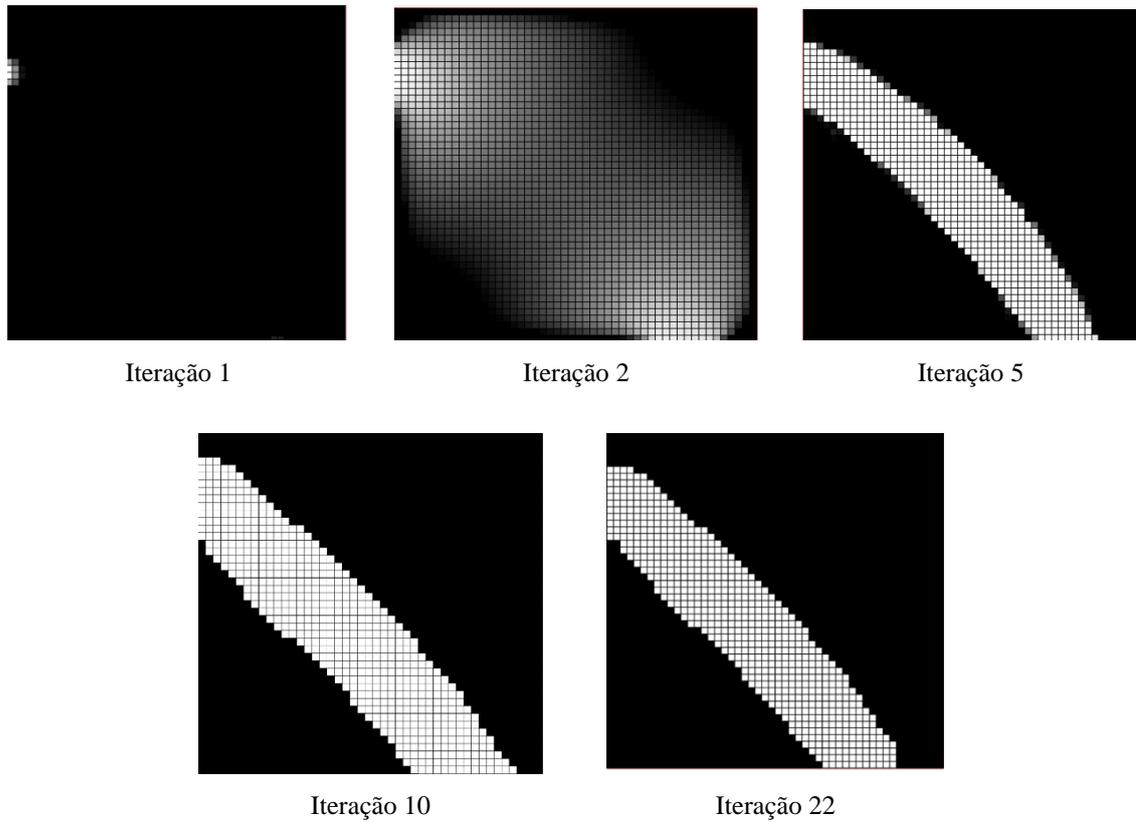
Figura 9 – Modelo de teste para um canal em curva



Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em Deng (2011).

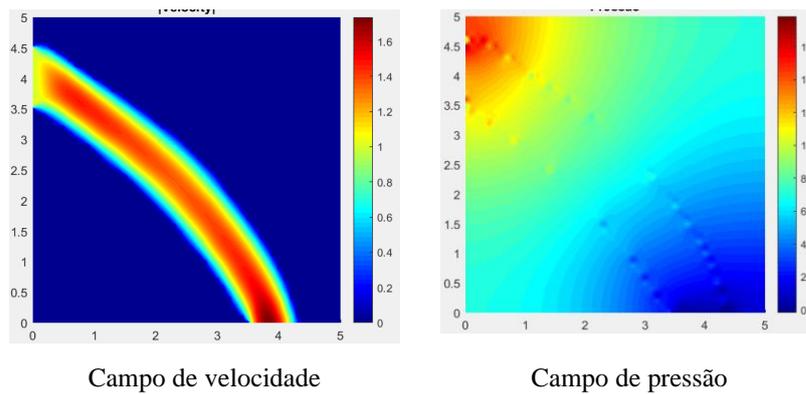
Os resultados do processo de otimização conforme o número de iterações, considerando uma fração de volume $V = 0,25$ é apresentado na Figura 10. Nestes resultados, para essa geometria específica variou-se a penalização entre 0,001 e 0,1. Para o domínio inicial (quadro 1), com densidades uniformemente distribuídas, o valor baixo de penalização ($q = 0,001$) se mantém até a 4.^a iteração, podendo ser observada no quadro 2 a presença forte de regiões intermediárias (cinzas). Na 5.^a iteração, o valor da penalização passa a ser ($q = 0,01$), em que já pode ser observada uma presença menor de escala de cinza no domínio. O valor da penalização é aumentado ($q = 0,1$), visto no Quadro 4, obtendo uma maior redução de escala de cinza. A partir da 15.^a iteração, as regiões de cinzas são eliminadas, como pode ser observado no quadro 5, em que a iteração 22 está totalmente sem a presença de escala de cinza, e o projeto é então direcionado para a solução otimizada.

Figura 10 – Ciclo de iterações que ocorrem no processo de otimização da geometria curva em “cotovelo”



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

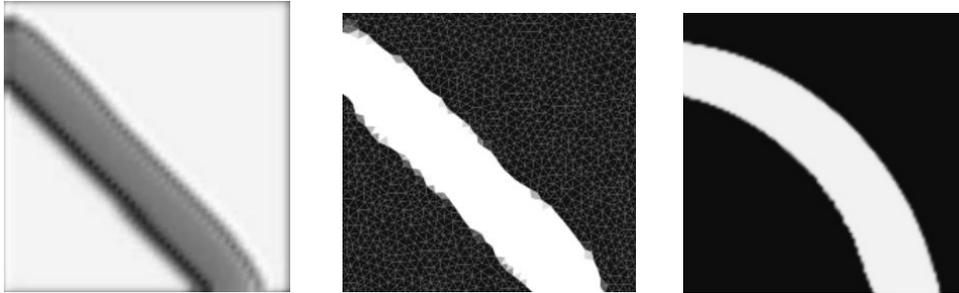
Figura 11 – Resultado obtido para o canal em curva em “cotovelo”



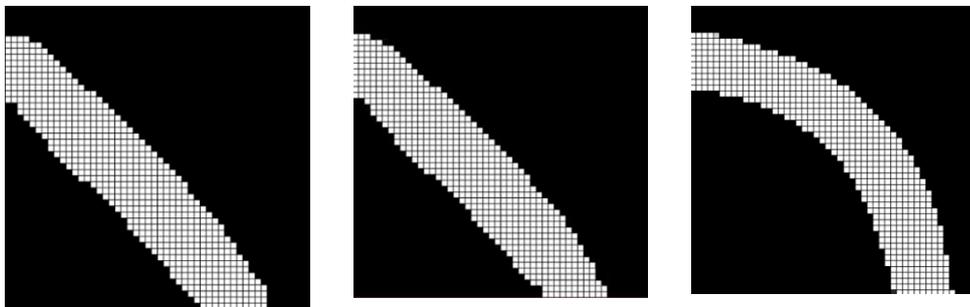
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 12 – Geometrias otimizadas obtidas com a aplicação do método considerando a variação do número de Reynolds

(I)



(II)



(a) $Re = 10$

(b) $Re = 50$

(c) $Re = 300$

Fonte: Elaboradas pelo autor (2023).

Os quadros na parte de cima da Figura 12 representam os resultados obtidos por Deng (2011) para $Re = 300$; Gersborghansen Allan; Sigmund (2005) para $Re=50$; e Pinggen (2010) para $Re=10$. Os quadros da parte de baixo são os resultados obtidos pelo autor.

Na Figura 12, buscou-se obter geometrias otimizadas por meio da variação do número de Reynolds. Os resultados são comparados com aqueles obtidos por: Deng (2011), para $Re = 300$; Gersborg-Hansen e Sigmund (2005), para $Re=50$; e Pinggen (2010) para $Re=10$.

Como pode ser observado na Figura 12, quando há um aumento significativo no número de Reynolds, o canal passa a obter uma curvatura em sua geometria.

A ideia principal deste trabalho é poder avaliar o efeito do método de elementos finitos multiescala estabilizado aplicado ao processo de otimização topológica, visto que sua aplicação fornece uma estrutura com menor número de elementos, implicando menos graus de liberdade e com isso obtendo vantagem com relação ao custo computacional.

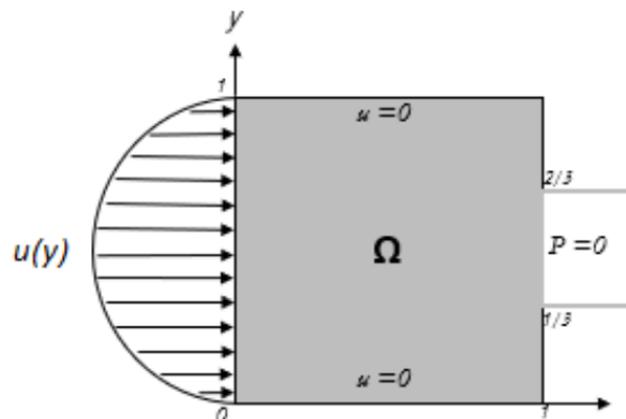
5.1.2 Problema do bocal/difusor

O problema de otimização de difusores é um exemplo clássico encontrado nos estudos referentes à mecânica dos fluidos. Para esse problema a função-objetivo a ser minimizada é a perda de carga ao longo do canal.

Para o domínio analisado, representado na Figura 13, a fração de volume aplicada ao problema é $V = 0.5$, com perfil de velocidade parabólico na entrada e a pressão de saída igual a zero ($P = 0$), característica de condição de tração livre. No domínio do problema, a velocidade é nula próximo às regiões de parede, e valores máximos no centro do escoamento.

Os dados do escoamento do problema podem ser vistos na Tabela 2.

Figura 13 – Domínio fixo e condições de contorno para o difusor



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em Borrval e Petersson (2003).

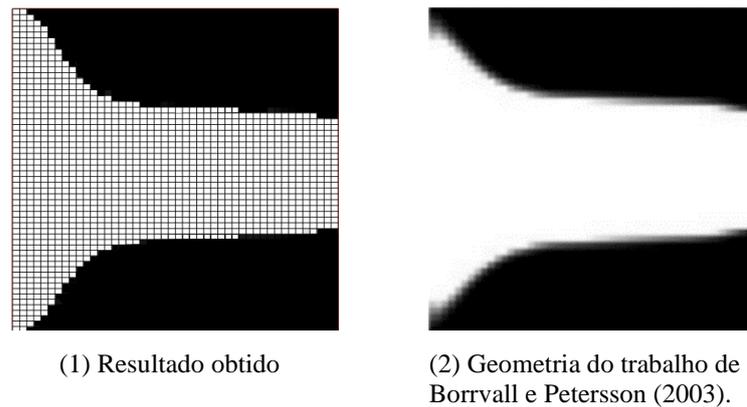
Tabela 2 – Parâmetros do escoamento para o Difusor

Parâmetro	Valor
Velocidade máxima na entrada	3.0 m/s
Viscosidade dinâmica	0.1 m ² /s
Densidade	1 g/cm ²

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

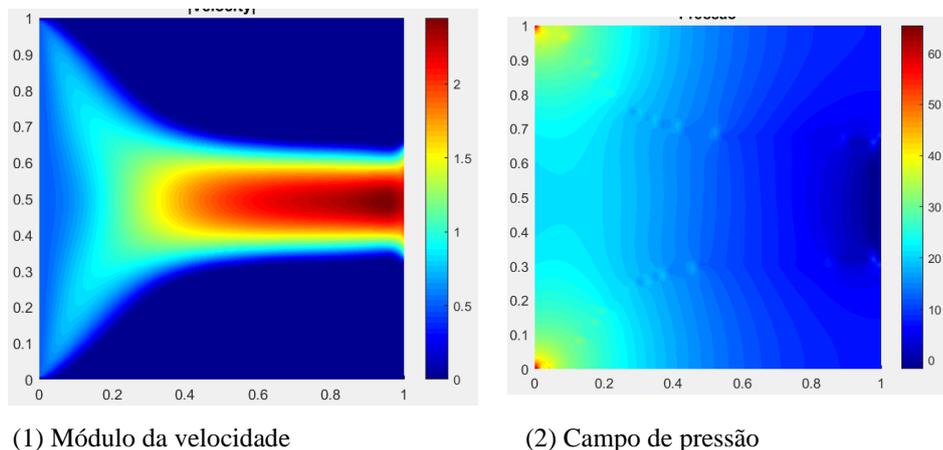
Por meio da metodologia adotada neste trabalho, o resultado obtido para a otimização do problema do difusor pode ser comparado com a proposta por Borrval e Petersson (2003), uma vez que foram utilizadas as mesmas condições de contorno. Logo, pode ser observado na Figura 14 o resultado da geometria sendo muito próxima ao que é apresentado no trabalho de Borrval e Petersson (2003).

Figura 14 – Resultado obtido do bocal, sendo comparado ao proposto por Borrval e Petersson (2003)



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Figura 15 – Resultados obtidos do campo de velocidade e pressão para a geometria do difusor



Fonte: Elaborada pelo autor (2003).

Para a solução do problema do difusor foram utilizados elementos finitos com 9 pontos de integração para a velocidade e 4 pontos para a variável de pressão. Os resultados do problema foram gerados utilizando-se uma malha de 2.600 elementos e um fator de penalização variando entre 0,001 e 0,1, sendo a melhor configuração encontrada, depois de vários testes iniciados

com um menor valor do fator de penalização. Essa configuração foi a que apresentou um melhor tempo de execução associado a um resultado de otimização satisfatório. A partir da iteração 21, o resultado já apresentava a geometria otimizada, já caminhando para a eliminação de regiões de cinzas restantes.

Na figura 16, pode-se observar a curva de convergência da dissipação de energia no projeto do bocal. Até a iteração 12 há um crescimento gradativo da função-objetivo, que é uma característica provocada pela restrição aplicada pelo processo de otimização; nesse caso, as células ainda sem uma definição de seu estado são forçadas a obter um estado definido (sólido ou fluido). A partir da iteração 19 a função-objetivo começa a apresentar um valor estabilizado.

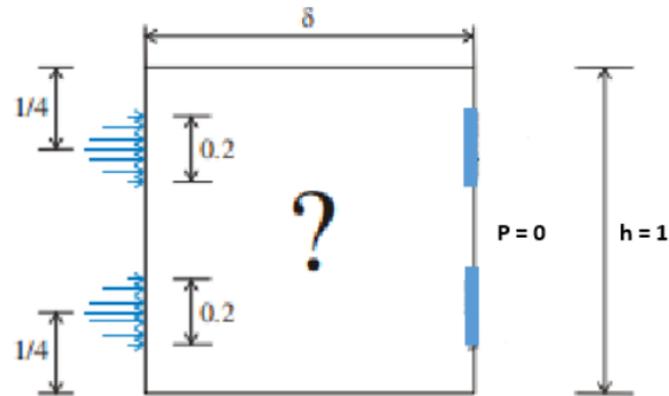
Figura 16 – Curva de convergência para otimização do problema de bocal



5.1.3 Canal duplo

O canal duplo é formado por meio de dois pontos para entrada e saída, obtendo cada um deles um perfil de velocidade parabólica, conforme pode ser visto na Figura 17. O domínio de projeto possui valor de altura fixado em ($h = 1$) enquanto o comprimento (δ) é variável. Por meio dessa variação do comprimento, é avaliada a sua influência no resultado final.

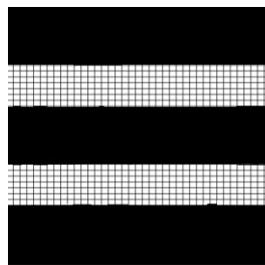
Figura 17 – Geometria e condições de contorno para o projeto de canal duplo



Fonte: Elaborada pelo autor, modificado de Koga (2010).

Para o problema de canal duplo, foram feitas várias verificações, variando o seu comprimento, conforme pode ser visto na Figura 18, sendo o objetivo para esse problema a minimização da perda de carga ao longo dos canais.

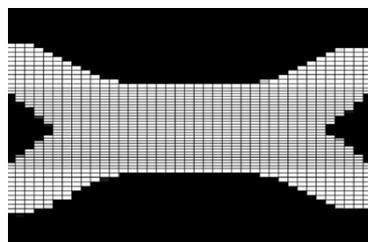
Figura 18 – Resultados obtidos para o problema de canal duplo



(a) Resultado obtido para o domínio de $h = 1$ e $\delta = 1$.



(b) Resultado final com $\delta = 1$ proposto por Koga (2010)



(c) Resultado obtido para um domínio de $h = 1$ e $\delta = 1,5$



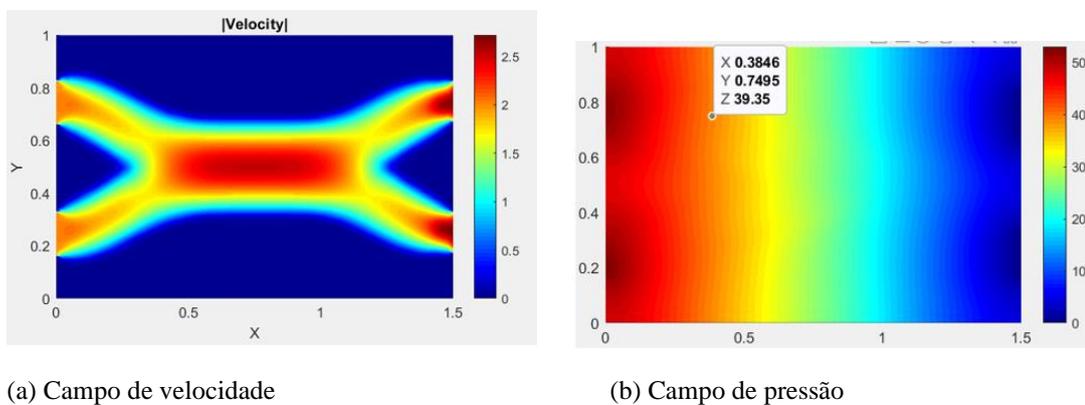
(d) Resultado final obtido para um domínio de $\delta = 1,5$ proposto por Koga (2010)

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Para chegar ao resultado do problema de canal duplo, foi necessário usar a técnica de continuação, para poder evitar mínimos locais na solução. Para o processo de otimização para a resolução do problema, o fator de penalização foi iniciado com $q = 0,01$, permanecendo esse valor até a 5.^a iteração; da 6.^a iteração passou a ter o valor $q = 0,05$, mantendo até a 10.^a iteração. Nesse intervalo de iteração, já é possível observar uma grande redução de escala de cinzas. Da 16.^a iteração é assumido o valor do fator de penalização, sendo $q = 1,0$. A partir dessa iteração já é demonstrado o formato da geometria próximo ao resultado final, eliminando quaisquer regiões de cinza do domínio.

Na solução do problema de canal duplo, pode ser observado nos resultados que à medida que o comprimento do domínio é aumentado, a melhor condição passa a ser a união dos canais, isso é explicado pelo fato de que nessa configuração passará a ter uma vazão única, na qual apresenta uma menor perda de carga com relação a canais isolados. Na Figura 19 podem ser vistos os resultados dos campos de velocidade e pressão para geometria otimizada, e na Tabela 3 é mostrado resultado da função-objetivo de acordo com o comprimento do domínio.

Figura 19 – Resultados obtidos do campo de velocidade e pressão para a geometria de canal duplo



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Tabela 3 – Comparação da função-objetivo para o canal duplo

Comprimento do Canal δ	φ
$\delta = 1$	17,11
$\delta = 1,5$	15,97

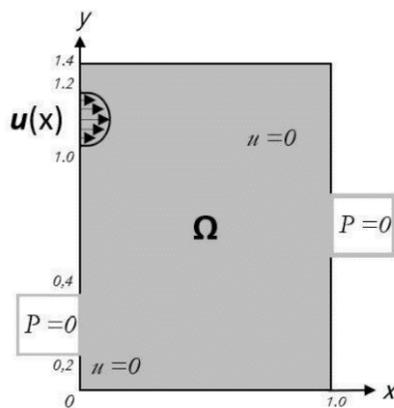
Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

5.1.4 Dispositivos com multissaídas

Em relação ao problema que envolve uma geometria de múltiplas saídas, neste trabalho foi seguida a geometria proposta por Deng (2011) e Aage *et al.* (2008). As condições de contorno para o problema podem ser verificadas nas Figuras 20 e 21. Na Tabela 4, são apresentados os valores configurados dos parâmetros de escoamento para o dispositivo de multissaídas.

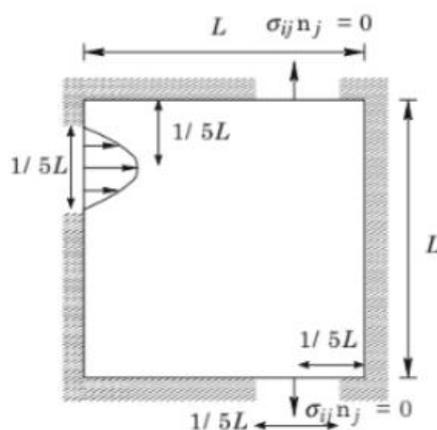
A proposta aqui é obter a otimização desses exemplos de dispositivos de multissaídas, obedecendo às condições de contornos e compará-los aos exemplos dos autores citados anteriormente. Os exemplos consistem em uma única entrada com duas saídas de fluxo. Os resultados obtidos do problema de multissaídas podem ser vistos nas Figuras 22 e 23.

Figura 20 – Primeiro exemplo de geometria, com uma entrada e duas saídas para o escoamento (saídas laterais)



Fonte: Elaborada com base em Deng (2011).

Figura 21 – Segundo exemplo de geometria, com uma entrada e duas saídas para o escoamento (saídas verticais)



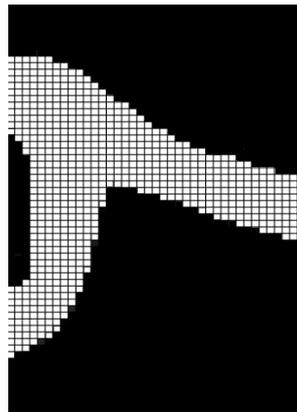
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em Aage *et al.* (2008).

Tabela 4 – Parâmetros de simulação do escoamento nos dispositivos multissaídas

Geometria	Viscosidade cinamética (m ² /s)	Densidade (kg/m ³)	Velocidade m/s	Restrição de volume
Dispositivo com duas saídas laterais (DENG, 2011)	0.01	1	3	0,3
Dispositivo com saídas verticais (AAGE <i>et al.</i> , 2008)	1.0	1	1	0,45

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Geometria do dispositivo de multissaída (saídas laterais) e comparado à geometria encontrada na literatura para o mesmo problema



(a) Geometria otimizada de multissaídas

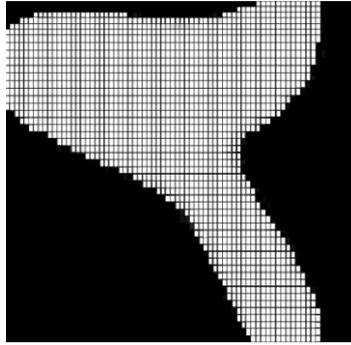
Fonte: Elaborada pelo autor (2023).



(b) Geometria otimizada de multissaídas, proposto por Deng (2011)

Fonte: Deng (2011).

Figura 23 – Geometria do dispositivo de multissaída (saídas verticais) e comparado à geometria encontrada na literatura para o mesmo problema



(a) Geometria otimizada de multissaídas

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).



(b) Geometria otimizada de multissaídas, proposto por Aage *et al.* (2008)

Fonte: Aage *et al.* (2008).

No resultado da otimização para saídas laterais, pode ser observada a diferença das pernas do canal quando se compara com o resultado proposto (DENG, 2011). No exemplo da literatura, podem ser observadas curvaturas acentuadas, enquanto no exemplo deste trabalho obteve-se uma geometria com contornos dos canais mais retos. O motivo dessa diferença pode estar associado aos padrões de escoamentos e discretização adotados por ambos. Embora observadas tais diferenças na geometria final obtida, a geometria deste trabalho apresenta similaridade com o resultado da literatura.

Nos exemplos de geometria da literatura usados como referência, é possível observar um grau elevado de refinamento da geometria, em que o contorno do canal formado possui um traçado suave. Esse maior grau de refinamento pode ser atribuído à utilização de elementos triangulares com maior refinamento de malha no exemplo proposto por Deng (2011), enquanto no trabalho de Aage *et al.* (2008), pode ser observada a adoção de técnicas de pós-processamento de alto refinamento da malha.

6 CONCLUSÃO

De forma geral, a otimização de dispositivos hidrodinâmicos utilizando o MOT, em conjunto com o método de elementos finitos multiescala estabilizado, mostrou-se viável e atendeu aos objetivos propostos neste trabalho. A utilização desse método de elementos finitos estabilizado permitiu fornecer uma implementação robusta e eficiente capaz de corrigir problemas de instabilidade gerados a partir de oscilações espúrias que ocorrem em resultados que envolvem as equações de Navier-Stokes, devido à presença de termos convectivos na formulação. A aplicação do modelo de Brinkman, combinando o escoamento de Navier-Stokes com o modelo de escoamento em meios porosos (lei de Darcy), mostrou-se eficiente e, com isso, foram obtidos os dois tipos de materiais (fluido e sólido) envolvidos no processo de otimização topológica.

Os resultados dos projetos de otimização mostraram similaridade com os resultados encontrados na literatura. É importante destacar a unificação da vazão dos problemas multissaiadas quando é alterado o valor do comprimento do domínio, fato explicado pela diminuição da perda de carga no caso de uma única vazão.

É importante ainda destacar neste trabalho a eficiência dos resultados de otimização topológica integrados ao método de elementos finitos multiescala obtidos com as malhas utilizadas; com isso, não houve necessidade de utilizar uma malha mais refinada.

Para o processo de otimização, a escolha adequada dos fatores de penalização envolvidos no modelo é de suma importância para o trabalho. Pode observar-se, nos resultados, que as regiões de cinzas eram eliminadas à medida que aumentava o número de iterações juntamente com a mudança do fator de penalização, como pode ser observado na otimização do canal em curva.

Os resultados obtidos neste trabalho reafirmam o que pode ser visto na literatura, desde a eficiência da adoção do método de elementos finitos multiescala, suas vantagens com relação ao método de elementos finitos tradicionais, bem como a parte de otimização topológica em que, partindo de uma restrição da fração de volumes e um valor de função-objetivo inicial não predefinida para uma geometria com condições de contorno atribuídas, é possível obter uma topologia otimizada, sem haver inicialmente a necessidade de uma restrição de forma.

Deve-se também destacar o papel desempenhado pela restrição de volume no processo de otimização com relação à perda de carga do sistema. Pode ser entendido que, quanto menor for a perda de carga, há uma maior região de fluido no domínio. Essa menor perda de carga é

atribuída ao fato de haver maior disponibilidade do meio para o escoamento.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Como trabalhos futuros, o autor sugere aplicar o método de elementos finitos multiescala estabilizado no processo de otimização topológica para modelos de escoamentos turbulentos, e análise de fluxos de fluidos não newtonianos para escoamentos constantes. Também pode ser pensada como oportunidade de trabalhos futuros a implementação das técnicas adotadas neste trabalho para escoamentos laminares ou não, considerando problemas tridimensionais.

REFERÊNCIAS

- AAGE, N.; POULSEN T.; GERSBORG-HANSEN, A.; SIGMUND, O. Topology optimization of large scale stokes flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 35, n. 2, p. 175-180, 2008.
- ABRAHAM F.; BEHR, M. H. M. Shape optimization in steady blood flow: a numerical study of non-newtonian effects. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, p. 127-137, 2005.
- ALONSO, D. H. *et al.* Topology optimization applied to the design of 2d swirl flow devices. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 58, n. 6, p. 2341-2364, 2018.
- ARNOLD, D. N.; FORTIN, M.; BREZZI, F. F. M. A stable finite element method for the stokes equations. [*S.l.*]: *Calcolo*, n. 21, p. 337-344, Jan. 1984.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, Springer, v. 1, n. 4, p. 193-202, 1989.
- BENDSØE, M. P. *Optimization of structural topology, shape, and material*. [*S.l.*]: Springer, 1995. v. 414.
- BENDSØE M. P., SIGMUND, O. *Topology Optimization – Theory, methods and applications*. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2003.
- BORRVALL, T.; PETERSSON, J. Topology optimization of fluids in stokes flow. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 41, n. 1, p. 77-107, 2003.
- CHENG, K.-T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 17, n. 3, p. 305-323, 1981.
- DENG, Y. *et al.* Topology optimization of unsteady incompressible Navier-Stokes flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 230, n. 17, p. 6688-6708, 2011.
- DHATT, G.; FOMO, B. K.; BOURQUE, C. A ψ - ω finite element formulations for the Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 17, n. 2, p. 199-212, 1981.

FORTIN, M.; BREZZI, F. *Mixed and hybrid finite element methods*. New York; Berlin: Springer-Verlanger, 1991.

FRANCA, L. P.; HAUKE, G.; MASUD, A. Revisiting stabilized finite element methods for the advective-diffusiv equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, i. 13-16, p. 1560-1572, Feb. 2006.

GERSBORG-HANSEN Allan; SIGMUND, O. H. R. B. Topology optimization of channel flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 30, n. 3, p. 181-192, 2005.

GUERMOND, J.-L. Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, EDP Sciences, v. 33, n. 6, p. 1293-1316, 1999.

HASUND, K. E. S. *Topology optimization for unsteady flow with applications in biomedical flows*. 2017. 97 f. Dissertation (Master of Science in Physics and Mathematics) – Department of Mathematical Sciences – Norwegian University of Science and Technology – NTNU, 2017.

HUGHES, T. J. Multiscale phenomena: Green's functions, the dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 127, n. 1-4, p. 387-401, 1995.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 85-99, 1986.

HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P., HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73 n. 2, p. 173-189, 1989.

HUGHES, T. J. R., TEZDUYAR, T. E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 45, p. 217-284, 1984.

KOGA, Adriano Akio. Projeto de dispositivos de microcanais utilizando o método de otimização topológica. 2010. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Controle e Automação Mecânica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

LANGTANGEN, Hans Petter; LOGG, A. *Solving PDEs in minutes – The FEniCS Tutorial*, 2016. v. I. Disponível em: <http://www.logg.org/anders/wp-content/uploads/2016/09/ftut1.pdf>.

MASUD, A.; KHURRAM, R. A multiscale finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 195, n. 13-16, p. 1750-1777, 2006.

MASUD, A.; KHURRAM, R. A. A multiscale/stabilized finite element method for the advection-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, i. 21-22, p. 1997-2018, may 2004.

NØRGAARD, S.; SIGMUND, O.; LAZAROV, B. Topology optimization of unsteady flow problems using the lattice boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 307, p. 291-307, 2016.

OLASON, A.; TIDMAN, D. *Methodology for topology and shape optimization in the design process*. 2010. 74 f. Dissertation (Master's Programme Solid and Fluid Mechanics) – Department of Applied Mechanics Division of Dynamics Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2010.

PINGEN, G.; WAIDMANN, M.; EVGRAFOV, A.; MAUTE, K. A parametric level-set approach for topology optimization of flow domains. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 1, p. 117-131, 2010.

PORTELLA, P. E. *Equações de Navier-Stokes pelo método dos elementos finitos*. 1984. 97 f. Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1984.

REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill, 1993.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The finite element method in heat transfer and fluid dynamics*. [S.l.]: CRC press, 2010.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 24, n. 2, p. 359-373, 1987.

TAYLOR C.; HOOD, P. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computers Fluids*, v. 1, p. 73-100, 1973.

TSEGA, E. G.; KATIYAR, V. Finite element solution of the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations using matlab. *Applications & Applied Mathematics*, v. 13, i. 1, p. 535-565, Jun. 2018.

ZIENKIEWICZ OLEK C.; TAYLOR, R. L. Z. J. Z. *The Finite Element Method*. [S.l.]: Elsevier, 2002.

JACOB, F.; BELYTSCHKO, T. *Um primeiro curso em elementos finitos*. 1. ed. São Paulo: LTC, 2009. 256 p.