



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
DOUTORADO ACADÊMICO EM FÍSICA

# Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com Gás de Chaplygin e Poeira

Nathália Mattos Novaes da Rocha

Vitória-ES  
Março de 2023

Nathália Mattos Novaes da Rocha

Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o  
Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com  
Gás de Chaplygin e Poeira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Física.

*Linha de pesquisa:*  
Cosmologia Quântica

Orientador

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Coorientador

Prof. Dr. Germano Amaral Monerat

PPGFIS – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
UFES – UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Vitória-ES

Março de 2023

Tese de Doutorado sob o título *Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com Gás de Chaplygin e Poeira* apresentada por Nathália Mattos Novaes da Rocha e aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Espírito Santo, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

---

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves  
Presidente  
PPgFIS – Pós-Graduação em Física  
UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

---

Nome completo do examinador e titulação  
Examinador  
Departamento  
Universidade

---

Nome completo do examinador e titulação  
Examinador  
Departamento  
Universidade

---

Nome completo do examinador e titulação  
Examinador  
Departamento  
Universidade

---

Nome completo do examinador e titulação

Examinador

Departamento

Universidade

Vitória-ES, 14 de Março de 2023.

À Deus e minha família.

# Agradecimentos

Meu muito obrigada primeiramente a Deus por toda força que me deu para chegar até aqui, sem ele eu definitivamente não teria conseguido;

À minha mãe por sempre acreditar em mim e me dar todo apoio para continuar seguindo o meu sonho, apesar de todas as dificuldades; Ao meu falecido pai por ter despertado em mim, ainda pequena, o interesse em entender mais sobre o Universo, muito obrigada por isso;

Aos meus colegas da UFES pelo apoio quando precisei, especialmente ao Igor e ao Breno; Meu muito obrigada especial a minha eterna colega, e hoje uma das minhas melhores amigas na física e na vida, Zaira;

Ao secretário José Carlos por todo suporte e total apoio;

Aos professores Sérgio e Germano por não apenas acreditarem em mim, mas por todo ensinamento, bom ânimo, paciência e disposição em encarar esse desafio comigo;

Ao CNPq pelo apoio financeiro;

À UFES pela oportunidade.

*"This is Major Tom to Ground Control  
I'm stepping through the door  
And I'm floating in a most peculiar way  
And the stars look very different today."  
(David Bowie)*

# Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com Gás de Chaplygin e Poeira

Autora: Nathália Mattos Novaes da Rocha

Orientador: Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Germano Amaral Monerat

## RESUMO

O presente trabalho visa analisar a dinâmica quântica contida na era de Planck do Universo, seu mecanismo de emersão para a fase inflacionária e a sua dinâmica clássica em um modelo homogêneo e isotrópico, composto por um fluido perfeito na forma de poeira e um gás de Chaplygin. A análise deu-se através de cálculos probabilísticos de tunelamento quântico de um modelo quantizado numericamente pelo método de Crank-Nicolson, cujos cálculos foram realizados em termos dos parâmetros do modelo. Os resultados apresentam uma maior propensão para o surgimento clássico de um Universo preenchido com poeira e gás de Chaplygin, se comparados a resultados encontrados na literatura para um modelo no qual o Universo é preenchido com gás de Chaplygin e radiação.

*Palavras-chave:* Cosmologia Quântica, Tunelamento Quântico, Era de Planck, Poeira, Gás de Chaplygin.



# Probability of Quantum Tunneling for the Emergence of a Classical Universe Filled with Chaplygin's Gas and Dust

Author: Nathália Mattos Novaes da Rocha

Supervisor: Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Co-supervisor: Prof. Dr. Germano Amaral Monerat

## ABSTRACT

The present work aims to analyze the quantum dynamics contained in the Planck era of the Universe, its emergence mechanism for the inflationary phase and its classical dynamics in a homogeneous and isotropic model, composed of a perfect fluid in the form of dust and a Chaplygin gas. The analysis was carried out through probabilistic calculations of quantum tunneling of a numerical model quantized by the Crank-Nicolson method, whose calculations were performed in terms of the model parameters. The results show a greater susceptibility for the classical emergence of a Universe filled with dust and Chaplygin gas, when compared to results found in the literature for a model in which the Universe is filled with Chaplygin gas and radiation.

*Keywords:* Quantum Cosmology, Quantum Tunneling, Planck Era, Dust, Chaplygin's Gas.

# Lista de figuras

1	O Universo e suas eras. (Imagem: <i>History of the Universe</i> - Gonzales, A. 1989 Fermilab) . . . . .	p. 19
2	História evolutiva do Universo. (Imagem: <i>A sense of time</i> - (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007)). . . . .	p. 20
3	Breve resumo da evolução do Universo. (Imagem: <i>The birth of the Universe</i> - <a href="http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec20.html">http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec20.html</a> ) . . . . .	p. 25
4	Ilustração para um universo homogêneo e não isotrópico (a), e um universo homogêneo e isotrópico (b). O círculo pontilhado é a parte observável do Universo. (Imagens: (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007)). . . . .	p. 26
5	Incorporação de uma variedade 3D em uma variedade 4D. . . . .	p. 40
6	Foliação do espaço-tempo. . . . .	p. 41
7	Interpretação geométrica das funções lapso e deslocamento. . . . .	p. 45
8	Estrutura geométrica da proposta de não contorno de Hartle-Hawking . . . . .	p. 69
9	Barreira de potencial para um universo quantizado de FLRW. . . . .	p. 73
10	Barreira de potencial para exemplificar a aplicação do método WKB. . . . .	p. 78
11	Comportamento do potencial efetivo $V_{ef}(x)$ para o caso de poeira ( $\alpha = 0$ ). (Imagem: Rocha et al. (2022)). . . . .	p. 83
12	Retrato de fase, no qual as órbitas do plano $(x, p_x)$ representam modelos de universos de FLRW homogêneos e isotrópicos, com $A = 0.001$ e $B = 0.001$ ). (Imagem: Rocha et al. (2022)). . . . .	p. 84
13	Exemplo de retrato de fase com um ponto fixo do tipo sela hiperbólica. . . . .	p. 85
14	Comportamento do fator de escala $x(t)$ , com respeito ao tempo cósmico, para o nosso modelo, com $A = 0.001$ e $B = 0.001$ . (Imagem: Rocha et al. (2022)). . . . .	p. 87

15	Grade método de diferenças finitas. . . . .	p. 90
16	Grade método de Cranck-Nicolson - Intervalo $[0, T]$ dividido em $N$ subintervalos iguais indexados por $n = 0, \dots, N$ , e $[x_{min}, x_{max}]$ dividido em subintervalos $J$ indexados por $j = 0, \dots, J$ , para $U(x, t)$ a função de onda, e cujos tamanhos dos intervalos: $dt$ na direção temporal; $dx$ na direção espacial. . . . .	p. 93
17	Comportamento da densidade de probabilidade ( $\rho$ ), com $x_{max} = 100$ , $\tau_{max} = 15$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $dt = 0.05$ , com o ponto mais à direita da barreira: $x_2 = 22.0497989282069$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). . . . .	p. 98
18	Comportamento da norma em função do número de pontos $N$ (discretização espacial) em $\tau = 0$ (asterisco) e $\tau = \tau_{max}$ (ponto), para $A = 0.001$ , $B = 0.001$ , $\alpha = 0$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , e $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). . . . .	p. 99
19	Probabilidades de tunelamento $PT$ (em escala de $\log$ ) em função de $E_M$ , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$ , e diferentes valores de $A$ , com $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). . . . .	p. 103
20	Comparativos entre $PT$ e $PT_{WKB}$ (em escala de $\log$ ) em função de $E_M$ , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$ , com com $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . (Imagem: Rocha et al. (2022)). . . . .	p. 104
21	Probabilidades de tunelamento $PT$ (em escala de $\log$ ) em função do parâmetro $A$ , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$ , e diferentes valores fixos de $E_M$ , com $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). . . . .	p. 104
22	Probabilidade de tunelamento $PT$ (em escala de $\log$ ) em função do parâmetro $B$ , para $\alpha = 0$ (poeira), $A = 0.001$ , e $E_M = 19$ , com $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). . . . .	p. 105

- 23 Comparativos entre os potenciais efetivos  $V_{ef}$  para ambos os modelos com gás de Chaplygin e radiação ( $\alpha = \frac{1}{3}$ ), e gás de Chaplygin e poeira ( $\alpha = 0$ ), para  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ ,  $E_{max} = 223.5282022$  para o fluido de radiação, e  $E_{max} = 19.9344758644320$  para o fluido de poeira. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). . . . . p. 106
- 24 Comparativo entre as probabilidades de tunelamento de modelos com gás de Chaplygin e poeira ( $\alpha = 0$ ) e gás de Chaplygin e radiação ( $\alpha = \frac{1}{3}$ ), para  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ , com  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). . . . . p. 107

# Lista de tabelas

1	Processos de colisão de partículas. . . . .	p. 29
2	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$ , $A = 0.00080$ , $E_{max} = 21.0781424981805$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . . . . .	p. 116
3	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$ , $A = 0.00085$ , $E_{max} = 20.7610874836932$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . . . . .	p. 117
4	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$ , $A = 0.00090$ , $E_{max} = 20.4665292083541$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . . . . .	p. 118
5	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$ , $A = 0.00095$ , $E_{max} = 20.1917482467770$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . . . . .	p. 119
6	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$ , $A = 0.001$ , $E_{max} = 19.9344758644320$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . . . . .	p. 120
7	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $A = 0.001$ , $E_M = 19$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . . . . .	p. 121
8	Resultados para $\alpha = \frac{1}{3}$ (radiação), com $B = 0.001$ , $A = 0.001$ , $E_{max} = 223.5282022$ , $\tau_{max} = 15$ , $dt = 0.05$ , $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$ . . . . .	p. 122

# Lista de abreviaturas e siglas

TGU–Teoria da Grande Unificação

TRG–Teoria da Relatividade Geral de Einstein

CMB–Radiação Cós mica de Fundo

CDM–Matéria Escura Fria

FLRW–Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

ADM–Arnowitt, Deser e Misner

EDO–Equação diferencial ordinária

EDP–Equação diferencial parcial

# Lista de símbolos

$a(t)$ –Fator de escala do Universo

$z$ –*redshift*

$M_p$ –Massa de Planck

$H_0$ –Constante de Hubble

Mpc–Megaparsec

$k$ –Curvatura espacial da métrica de FLRW

MeV–Megaelétron-volt

GeV–Gigaelétron-volt

$l_p$ –Comprimento de Planck

$R_{\mu\nu}$ –Tensor de Ricci

$R$ –Escalar de curvatura

$\Lambda$ –Constante cosmológica

$G$ –Constante gravitacional

$c$ –Velocidade da luz

$T_{\mu\nu}$ –Tensor energia-momento

$g_{\mu\nu}$ –Tensor métrico

$g$ –Determinante do tensor métrico

$G_{\mu\nu}$ –O tensor de Einstein

$M$ –Variedade quadridimensional

$(M, g)$ –Espaço-tempo quadridimensional

$\Sigma$ –Hipersuperfície

$\aleph$ –Variedade tridimensional

$\gamma_{ij}$ —Métrica induzida

$n^\mu$ —Vetor normal

$R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ —Tensor de Riemann

$K_{\mu\nu}$ —Tensor de curvatura extrínseca

$K$ —Escalar de curvatura extrínseca

$N$ —Função lapso

$\vec{N}$ —Funções deslocamento

$m^\mu$ —Vetor evolução normal

$\gamma$ —Determinante da métrica induzida

$T$ —Escalar energia-momento

$\Psi$ —Função de onda do Universo

$U_\nu$ —Quadrivelocidade

$v_s$ —Velocidade do som

$\mu$ —Entalpia específica

$S$ —Entropia específica

$\Pi$ —Energia interna específica

$\Theta$ —Temperatura

$\rho_0$ —Densidade de massa de repouso

$h_{ij}$ —Métrica induzida

$V_{ef}$ —Potencial efetivo

$\hbar$ —Constante de Planck reduzida

$E_M$ —Valor médio da energia cinética do fluido de poeira

$x_{max}$ —Infinito numérico

$E_{max}$ —Valor máximo do potencial efetivo

$PT$ —Probabilidade de tunelamento quântico

$PT_{WKB}$ —Probabilidade de tunelamento WKB



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 18
1.1	A Evolução do Universo . . . . .	p. 18
1.1.1	O Universo Atual . . . . .	p. 24
1.1.2	O Universo Primitivo . . . . .	p. 28
1.2	Objetivo . . . . .	p. 33
<b>2</b>	<b>Cosmologia Quântica</b>	p. 34
2.1	O Formalismo ADM . . . . .	p. 36
2.1.1	Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral . . . . .	p. 36
2.1.2	Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral . . . . .	p. 39
2.1.2.1	Prelúdio Matemático e Definições . . . . .	p. 39
2.1.2.2	Decomposição $3 + 1$ do Espaço-Tempo . . . . .	p. 44
2.1.2.3	Projeção das Equações de Campo de Einstein . . . . .	p. 47
2.1.2.4	Desenvolvimento da Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral (ADM) . . . . .	p. 49
2.2	A Equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	p. 54
2.2.1	Quantização do Modelo de FLRW . . . . .	p. 55
2.2.2	Peculiaridades da Equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	p. 57
2.2.2.1	O Problema do Tempo da Cosmologia Quântica . . . . .	p. 58
2.2.2.2	Campos de Matéria e o Formalismo de Schutz: Uma Solução Para o Problema do Tempo da Cosmologia Quântica. . . . .	p. 60
2.3	Condições de Contorno . . . . .	p. 68

2.3.1	A Proposta de Não Contorno de Hartle-Hawking . . . . .	p. 68
2.3.2	Tunelamento Quântico do Universo . . . . .	p. 71
2.3.3	Aproximação Semiclássica . . . . .	p. 74
2.3.3.1	Aproximação WKB . . . . .	p. 75
<b>3</b>	<b>O Modelo</b>	p. 80
3.1	Modelo Clássico . . . . .	p. 80
3.2	Modelo Quântico . . . . .	p. 86
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	p. 90
4.1	Método de Diferenças Finitas . . . . .	p. 90
4.1.1	Método de Crank-Nicolson . . . . .	p. 93
4.1.1.1	Aplicação do Método de Crank-Nicolson ao Modelo . . . . .	p. 97
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	p. 101
5.1	Tunelamento em Função de $E_M$ . . . . .	p. 101
5.2	Tunelamento em Função dos Parâmetros do Gás de Chaplygin . . . . .	p. 103
5.3	Comparativos com Resultados Preexistentes . . . . .	p. 105
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	p. 108
	<b>Referências</b>	p. 111
	<b>Apêndice A – Tabelas</b>	p. 116
	<b>Anexo A – Artigo (ROCHA et al., 2022)</b>	p. 123

# 1 Introdução

Carl Sagan uma vez disse: “Se você deseja fazer uma torta de maçã do zero, primeiro você deve inventar o Universo.” Parece óbvio mas, para que pudéssemos estar aqui hoje estudando e discutindo sobre o Universo e toda a sua grandiosidade, primeiramente sobreveio a sua gênese e eventual evolução até o presente momento. Faz-se, então, relevante o processo de tentativa de elucidação de como o Universo, um adolescente em expansão com cerca de 14 bilhões de anos, adveio (ADAMS; LAUGHLIN, 1999; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; BENNETT et al., 2018).

Sob esta perspectiva, o nosso trabalho consistirá em uma tentativa probabilística de verificação da emersão do Cosmo e a análise da sua dinâmica quântica e clássica para um modelo homogêneo e isotrópico composto por um fluido perfeito na forma de poeira e gás de Chaplygin. Para tal, começaremos por tracejar a história evolutiva do Universo, ao transpassar os seus vários estágios (Figura 1).

## 1.1 A Evolução do Universo

Se colocarmos a evolução do Universo sob uma perspectiva temporal de um dia (com duração de 24 horas), ao iniciar sua história à meia noite, a formação da Terra teria ocorrido após às 16h, e os primeiros humanos teriam surgido nos últimos 2 segundos antes do relógio bater meia noite novamente (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007), como pode ser observado na Figura (2).

Seja,  $p = \alpha\rho$  a equação de estado de um fluido perfeito, com  $p$  a pressão,  $\rho$  a densidade de energia, e  $\alpha$  um número adimensional, temos que o fator de escala adimensional do Universo pode ser definido como  $a(t) \propto t^{2/3(1+\alpha)}$ , no qual  $a(t)$  é utilizado para caracterizar a expansão do Universo, com  $a(t) = 0$  em  $t = 0$  para a singularidade, isto é, o *Big Bang*, e  $a(t) = 1$  para o Universo atual.

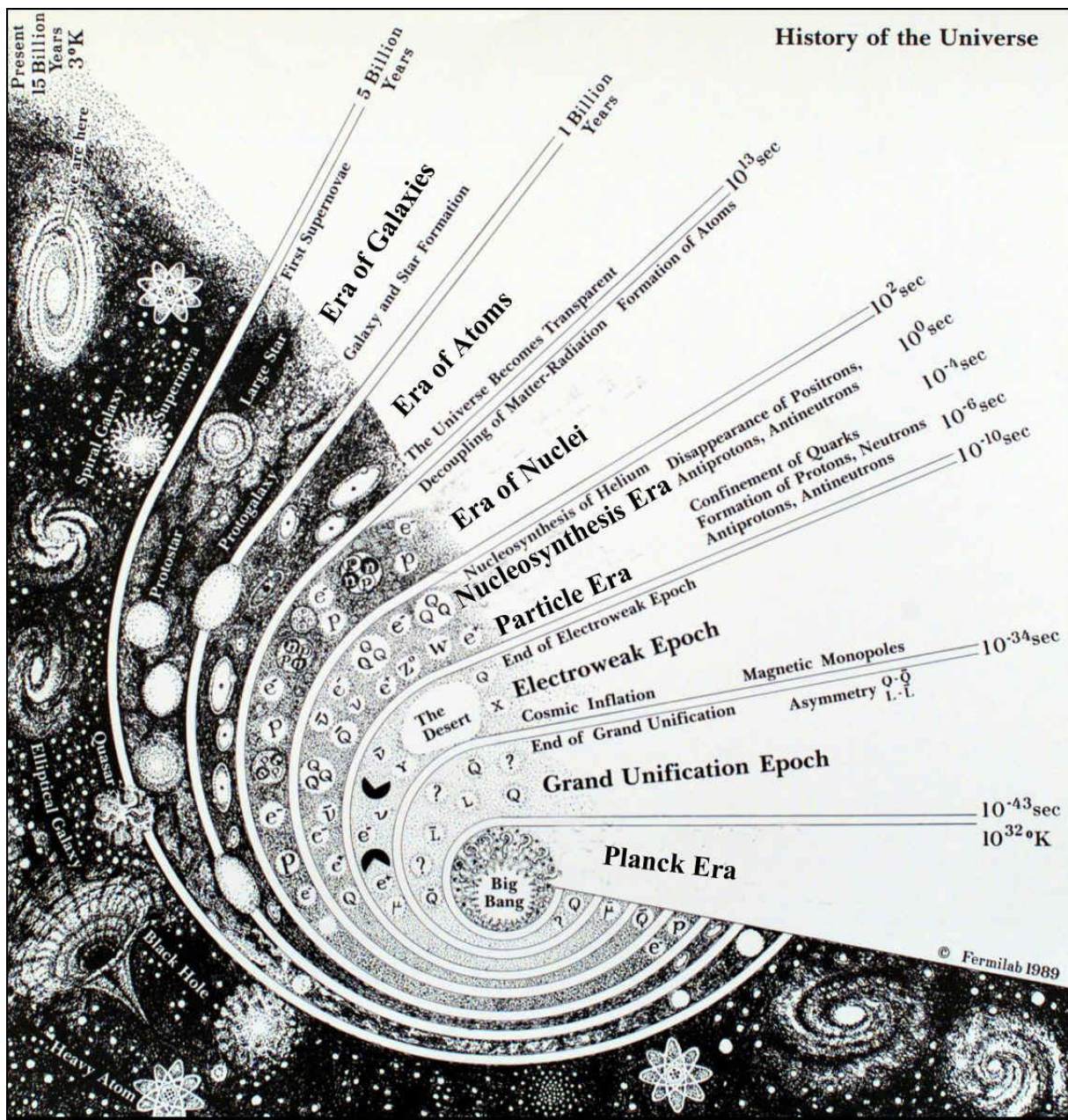


Figura 1: O Universo e suas eras. (Imagem: *History of the Universe* - Gonzales, A. 1989 Fermilab)

A história do Universo pode ser dividida em dois grandes grupos, o grupo de eras e/ou épocas cuja dinâmica é dominada pela radiação, e o grupo de eras e/ou épocas cuja dinâmica é dominada pela matéria, acrescido de uma era adicional cuja dinâmica é dominada pela energia escura (a era atual de expansão do Universo).

O grupo de eras e/ou épocas cuja dinâmica é dominada pela radiação contempla as eras de Planck, a época da Teoria da Grande Unificação (TGU), a inflação, a época eletrofraca, a era dos quarks, a era dos hádrons, a era dos léptons, a era dos fótons, e a era da nucleossíntese.

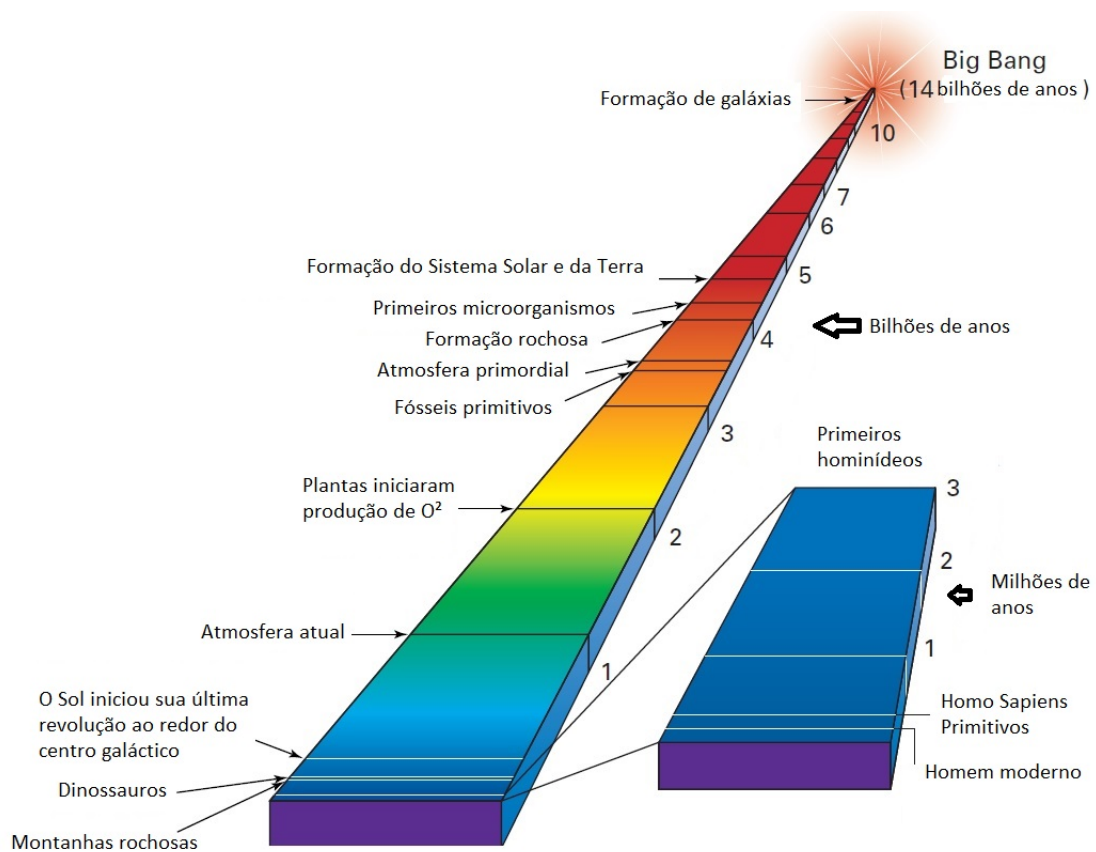


Figura 2: História evolutiva do Universo. (Imagem: *A sense of time* - (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007)).

Este primeiro grupo compreende um período que durou até aproximadamente 300.000 anos após o *Big Bang*, no qual o Universo era dominado por matéria ultra relativística, com pressão  $p = \rho/3$ , fator de escala  $a(t) \propto t^{1/2}$ , *redshift* (desvio para o vermelho)  $z \geq 3000$ , e  $\alpha = 1/3$ .

Já o grupo de eras cuja dinâmica é dominada pela matéria abrange a era dos núcleos, a era da recombinação, a era dos átomos, a era de formação das galáxias e estrelas, e a era de formação do Sol e do Sistema Solar, isto é, a sucessão de eventos que vão de cerca de 300.000 anos à  $\sim 9,2 \times 10^9$  anos desde o *Big Bang*.

Este grupo de eras é caracterizado por suas componentes sem pressão ( $p = 0$ ), as quais determinam a taxa de expansão do Universo, fator de escala  $a(t) \propto t^{2/3}$  com  $\alpha = 0$ , e *redshift*  $3000 \geq z \geq 0,5$ .

A era atual, na qual o Universo encontra-se em  $\sim 13,8 \times 10^9$  anos após o *Big Bang*, tem a sua dinâmica dominada pela energia escura, e é caracterizada por uma componente com pressão negativa ( $\alpha < -1/3$  para  $p = \alpha\rho$ ), a qual conduz a expansão acelerada do Universo. O fator de escala e o *redshift* são, respectivamente,  $a(t) \propto t^{2/3(1+\alpha)}$ , e  $z \leq 0,5$ ,

com  $a(t) \propto \exp(Ht)$  e  $p = -\rho$  para a constante cosmológica. É importante frisar que a era atual do Universo não poderia ter iniciado antes, uma vez que um período de dominação da matéria seria necessário para a formação de estruturas (LIDDLE, 1996; GARY, 2005; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; FRIEMAN; TURNER; HUTERER, 2008; TUOWA, 2011; WMAP, 2011; LYTH, 2016).

A evolução do Universo e suas várias eras (com suas principais características) serão descritas, cronologicamente, a seguir (PEEBLES et al., 1994; LIDDLE, 1996; SARAIVA; FILHO; MÜLLER, 2001; GARY, 2005; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; FRIEMAN; TURNER; HUTERER, 2008; TUOWA, 2011; WMAP, 2011; RIEKE, 2014; LYTH, 2016).

$< 10^{-43}$  s: os primeiros momentos após o *Big Bang*, ou seja, a **era de Planck**, é caracterizada por uma energia média de cerca  $10^{19}$  GeV e temperatura da ordem da massa de Planck ( $M_p = 1/\sqrt{G} = 1,22 \times 10^{19}$  GeV) ou maior. Nesse período, as quatro interações da natureza, possivelmente, encontram-se unificadas, e o espaço e o tempo perdem os seus significados convencionais. Apenas as leis da física quântica são passíveis de explicar os acontecimentos decorridos aqui.

$\sim 10^{-43}$  s  $\sim 10^{-38}$  s: com uma energia média entre  $10^{19}$  GeV e  $10^{14}$  GeV e temperatura entre  $10^{32}$  K e  $10^{28}$  K, a **época da TGU** é caracterizada por uma confusão flutuante e quente de partículas e campos interagentes. Nesse período ocorre a separação da interação gravitacional das demais interações (as quais, possivelmente, encontram-se unificadas), isto é, as interações eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca.

$\sim 10^{-38}$  s  $\sim 10^{-12}$  s: com uma energia da ordem de  $10^{14}$  GeV e temperatura da ordem de  $10^{28}$  K, os períodos da **Inflação** e **era eletrofraca** são caracterizados pela separação da interação nuclear forte da interação eletrofraca (união das interações eletromagnética e nuclear fraca). Essa separação seria responsável pela liberação de uma grande quantidade de energia geradora de uma expansão extrema do Universo, por um fator de cerca de  $10^{35}$  em  $10^{-32}$ s, conhecida como Inflação.

$\sim 10^{-12}$  s  $\sim 10^{-6}$  s: a **era Quark** é caracterizada por uma energia média entre 100 GeV e 200 MeV e temperatura de  $10^{15}$  K. Nessa era, as interações eletromagnética e nuclear fraca se separam, estabelecendo-se um Universo governado pelas quatro interações da natureza de forma separada. A interação gravitacional começa a governar a expansão do Universo e é descrita através da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG); as outras três interações são descritas através do Modelo Padrão (baseado na ideia de invariância de calibre local). Ainda nessa era, os quarks, os léptons e suas respectivas antipartículas se

formam, e os léptons se separam em elétrons, neutrinos e suas respectivas antipartículas. Essa era se encerra com a aniquilação mútua de matéria e antimatéria, e finaliza com um excesso significativo de partículas de matéria.

$\sim 10^{-6} \text{ s} \sim 10^{-4} \text{ s}$ : a **era Hádron** caracteriza-se por uma energia média entre 200 MeV e 3 MeV e temperatura da ordem de  $10^{14}$  K. Nessa era os quarks deixam de existir como partículas isoladas e combinam-se em dois e três para formar os prótons, nêutrons, e suas respectivas antipartículas. Os prótons e nêutrons se aniquilam com suas respectivas antipartículas mas finalizam essa era com um excesso de prótons e nêutrons.

$\sim 10^{-4} \text{ s} \sim 10^{-1} \text{ s}$ : a **era Lépton** caracteriza-se por uma energia média da ordem de 4 MeV à 1 MeV, com uma temperatura de cerca de  $10^{12}$  K. Nesse período, também conhecido como era das partículas leves, a temperatura não é suficiente para a colisão de fótons produzirem prótons e nêutrons, há apenas a produção de pares de elétron-pósitron. Prótons e nêutrons aniquilam-se com suas respectivas antipartículas, mas o número de nêutrons sobreviventes determina as abundâncias dos elementos primordiais. Os léptons e anti-léptons aniquilam-se, respectivamente, e produzem um excesso de léptons igual ao número de prótons. Com isso, a carga líquida do Universo torna-se nula. Por fim, neutrinos e anti-neutrinos não interagem mais com prótons e nêutrons, o que torna o Universo transparente para os neutrinos.

$\sim 1 \text{ s} \sim 10 \text{ s}$ : com uma energia média da ordem da massa do elétron, de cerca de 0,5 MeV e temperatura da ordem de  $10^{10}$  K, a **era dos Fótons** caracteriza-se pela aniquilação dos pares de elétron-pósitron quando a temperatura cai abaixo de sua massa de repouso. Apenas um pequeno excesso de elétrons (mais ou menos um a cada bilhões de fótons) sobrevive após a aniquilação. Os fótons produzidos encontram-se em equilíbrio térmico e a temperatura de radiação aumenta, se comparada à temperatura dos neutrinos (os quais desacoplaram anteriormente). Colisões entre partículas e antipartículas continuam a adicionar fótons ao Universo, mas a colisão de fótons não adiciona mais partículas à ele. Apesar da taxa de aniquilação de matéria ser superior à taxa de produção (o que gera uma diminuição do conteúdo de matéria do Universo, e um aumento do conteúdo de radiação), existe uma não-simetria entre matéria e antimatéria, a qual acarreta em um excesso de matéria no Universo em relação à quantidade de antimatéria.

$\sim 3 \text{ min} \sim 20 \text{ min}$ : a **Nucleossíntese** é uma era caracterizada por uma energia média da ordem de 0,05 MeV e uma temperatura de cerca de  $10^9$  K, na qual o Universo esfriou ao ponto de prótons e nêutrons se fundirem para a formação de hélio e núcleo de deutério, ao utilizar todos os nêutrons sobressalentes. A nucleossíntese primordial formou hidrogênio,

deutério, hélio, e uma pequena quantidade de lítio. Ao final dessa era, o Universo continha uma espécie de mistura primordial de hidrogênio, hélio e lítio necessária para a formação das estrelas. Os demais elementos se formaram, posteriormente, no interior das estrelas e em explosões de supernovas.

~ **300.000 anos ~ 380.000 anos:** a **era dos Núcleos** caracteriza-se por uma energia média da ordem de elétron-volt e temperatura superior à 3000 K, na qual o Universo seria constituído de um plasma com núcleos de hidrogênio, núcleos de hélio e elétrons livres. Um grande parte dos elétrons livres mantinha os fótons em colisão contínua com eles, o que acarretaria na opacidade do Universo.

~ **380.000 anos ~ 500.000 anos:** a **era da Recombinação**<sup>1</sup> caracteriza-se por uma energia média da ordem de 0,1 eV e temperatura de cerca de 3000 K, na qual fótons não mais interagem com partículas carregadas, o que faz o Universo parecer transparente para eles. Tais fótons são evidentes nos dias atuais na radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background Radiation*), a CMB. As flutuações de temperatura da CMB, induzidas pela distribuição de matéria inhomogênea na recombinação, sobrevive até o presente momento e fornece informação direta sobre o estado do Universo na última superfície de dispersão. É importante destacar que o hélio recombinau e tornou-se neutro antes deste período, e sua relevância está ligada à sua influência na velocidade do som, se levarmos em conta o cálculo das flutuações de fundo em microondas.

~ **500.000 anos ~ 1 bilhão de anos:** a **era dos Átomos** caracteriza-se por uma energia média de cerca de 0,03 eV e temperaturas entre 3000 K e 20 K, na qual o Universo continuou a expandir e esfriar, a medida que átomos, inicialmente quentes, combinaram-se lentamente e esfriaram-se, ou seja, a matéria lentamente se condensou, e formou nuvens protogalácticas.

~ **10<sup>8</sup> anos ~ 10<sup>9</sup> anos:** a era de formação das **Galáxias** e **Estrelas** caracteriza-se por uma energia média entre ~ 0,013 eV e ~ 0,0013 eV e temperaturas entre ~ 20 K e ~ 3 K, na qual a formação de estruturas pode ser descrita através da gravidade newtoniana. As primeiras estrelas formaram-se entre 100 e 200 milhões de anos, onde, como dito anteriormente, elementos foram produzidos em seus núcleos e em explosões de supernovas. Em cerca de ~ 1 bilhão de anos após o *Big Bang*, ocorreu a formação das galáxias e os aglomerados de galáxias, a partir de pequenas inhomogeneidades iniciais (resultantes de instabilidades gravitacionais).

---

<sup>1</sup>O nome dessa era vem da recombinação dos elétrons com o núcleo atômico, apesar dos elétrons e o núcleo atômico não terem se combinado em uma era anterior.



$\sim 9,2 \times 10^9$  anos: a era de formação **Solar** e do **Sistema Solar** caracteriza-se por uma energia média de cerca de  $\sim 0,0009$  eV e temperatura da ordem de  $\sim 3$  K. A formação do Sol, e do Sistema Solar teria ocorrido através do colapso de uma onda de choque (proveniente de uma explosão de supernova), com uma nebulosa conhecida como nebulosa Solar.

$\sim 13,8 \times 10^9$  anos: a temperatura do **Universo atual**, o qual encontra-se em expansão acelerada (decorrente da energia escura), é de  $\sim 3$  K com uma energia média de cerca de  $\sim 0,0006$  eV. Em grandes escalas, o Universo pode ser considerado homogêneo, mas no Universo local (composto de galáxias e aglomerados de galáxias) a distribuição dos aglomerados de galáxias é aproximadamente uniforme, ou seja, à medida que a escala da estrutura que está sendo investigada aumenta, as flutuações na densidade média da matéria diminuem, e o número de aglomerados de galáxias contidos em uma região de um determinado volume, contendo muitos aglomerados, é essencialmente independente da localização dessa região. Em outras palavras, apesar de estar em expansão acelerada, o Universo, em grandes escalas, pode parecer o mesmo não importa em qual galáxia estejamos situados, isto é, não existe um centro definido para o Universo. A nossa galáxia (a Via Láctea) reside em um aglomerado de cerca de duas dúzias de galáxias que faz parte de um outro aglomerado chamado superaglomerado local. A Via Láctea, juntamente com a galáxia M31, são as galáxias mais massivas e luminosas do Grupo Local, e contribuem com cerca de 86% da luminosidade total compreendida em uma esfera de 3 Mpc.

Um breve resumo da história evolutiva do Universo pode ser observado na Figura (3).

### 1.1.1 O Universo Atual

A composição de matéria do Universo é permeada por CMB com temperatura  $T \simeq 2.73$  K, e matéria bariônica (cerca de um bárion por  $10^{10}$  fótons, sem uma quantidade substancial de antimatéria), cuja composição química da matéria bariônica é de cerca de 75% hidrogênio, 25% hélio, mais traços de elementos mais pesados.

Pode-se afirmar que os bárions contribuem com apenas uma pequena porcentagem da densidade de energia total do Universo, cerca de 4,9%, onde o resto seria formado por uma componente escura, a qual é composta de matéria escura fria (*cold dark matter*), CDM, com pressão desprezível ( $\sim 26,6\%$ ), e energia escura com pressão negativa ( $\sim 68,5\%$ ).

Para temperaturas abaixo de alguns MeV, os principais componentes da matéria do Universo, os quais desempenham papéis importantes, são: a radiação primordial, os bárions,

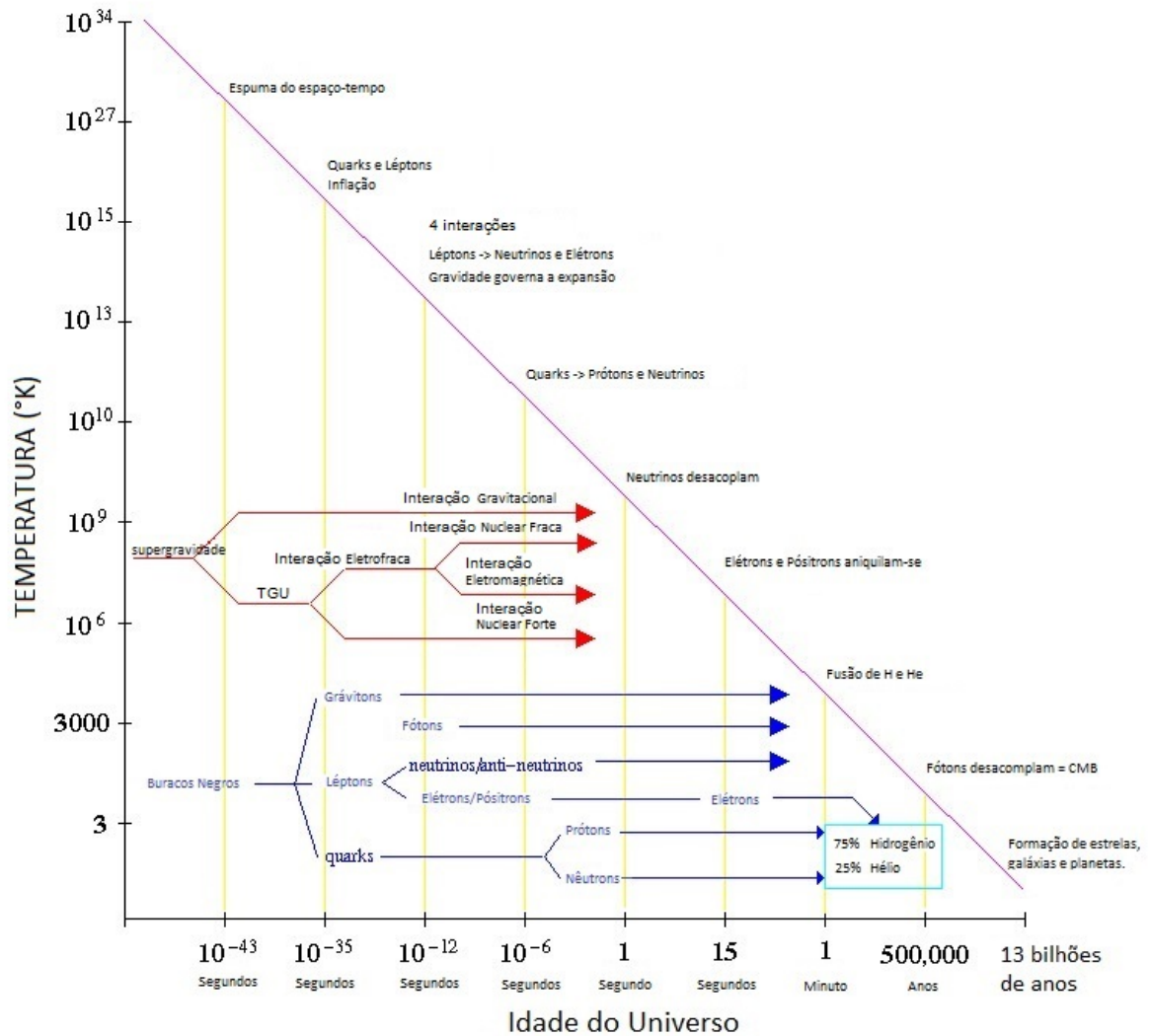


Figura 3: Breve resumo da evolução do Universo. (Imagem: *The birth of the Universe* - <http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec20.html>)

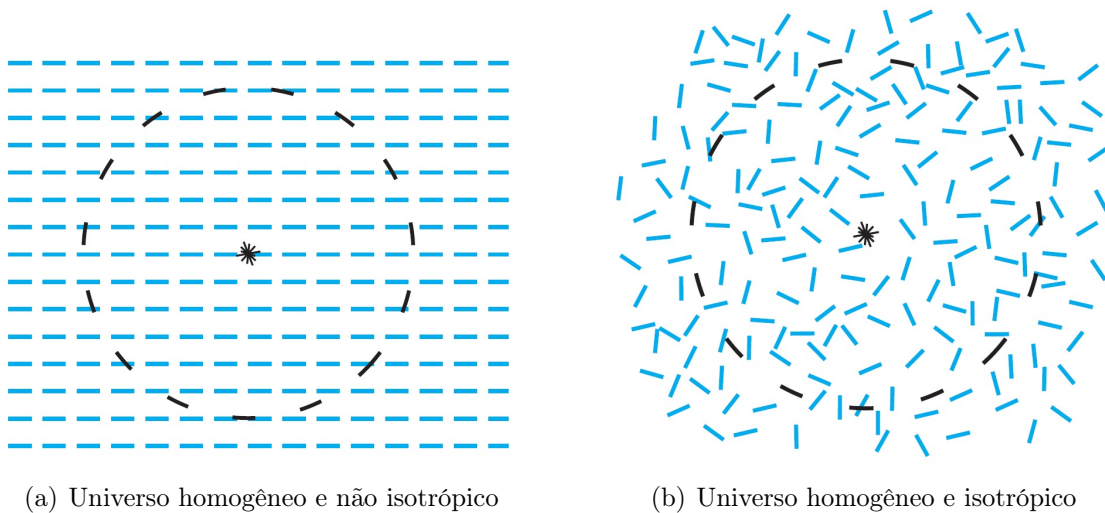
os elétrons, os neutrinos, e a energia e a matéria escura (MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; LIDDLE, 2015; LYTH, 2016).

O Universo atual encontra-se em expansão acelerada segundo a Lei de Hubble ( $\dot{v} = H_0 \bar{r}$ ), com  $H_0$  a constante de proporcionalidade conhecida como constante de Hubble, e, apesar de ser homogêneo e isotrópico em escalas maiores que 100 Mpc, possui uma estrutura inhomogênea bem desenvolvida em escalas menores, isto é, em grandes escalas o Universo é suave e pode ser definido através do princípio cosmológico (também conhecido como o princípio de Copérnico), o qual declara que o Universo em grandes escalas é uniforme e deve parecer o mesmo para todos os observadores.

A homogeneidade afirma que o Universo assemelha-se em cada ponto, isto é, possui um valor de densidade média igual em todos os lugares em um dado momento (apesar da

densidade poder variar com o tempo). Já a isotropia afirma que o Universo parece o mesmo em todas as direções.

Ou seja, não há um eixo preferencial ao longo do qual a maioria das galáxias esteja alinhada. Todavia, a homogeneidade não implica em isotropia, e a isotropia ao redor de um ponto único também não implica em homogeneidade, porém, a isotropia ao redor de qualquer ponto do Universo, combinado com o princípio cosmológico, implica em isotropia em todos os pontos do Universo, e isso implica necessariamente em homogeneidade. Uma das evidências mais fortes do princípio cosmológico é a CMB que permeia o Universo, uma vez que ela parece a mesma em todas as direções de observação (RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).



(a) Universo homogêneo e não isotrópico

(b) Universo homogêneo e isotrópico

Figura 4: Ilustração para um universo homogêneo e não isotrópico (a), e um universo homogêneo e isotrópico (b). O círculo pontilhado é a parte observável do Universo. (Imagens: (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007)).

A métrica responsável por descrever o Universo homogêneo e isotrópico é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), definida como,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

onde  $t$  é a variável temporal, conhecida como tempo próprio cosmológico, ou tempo cósmico, isto é, a medida temporal de um observador cujo universo expande uniformemente ao seu redor;  $r$ ,  $\theta$ , e  $\phi$  são coordenadas esféricas comóveis<sup>2</sup>, e  $a(t)$ , como mencionado anteriormente, é o fator de escala adimensional do Universo, o qual descreve como as

<sup>2</sup> $r$ ,  $\theta$ , e  $\phi$  são consideradas coordenadas comóveis à expansão do Universo, se, não havendo a atuação de forças externas, uma partícula em um determinado conjunto de coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  permanecer em repouso.

distâncias em um universo homogêneo e isotrópico crescem ou decrescem com o tempo, ou seja, é uma medida da taxa de expansão e ou contração do Universo. Por fim, temos que a constante  $k$  corresponde à curvatura espacial, com  $k = 0, 1, -1$  para um universo plano, fechado, e aberto, respectivamente (LIDDLE, 1996; RYDEN, 2006).

A forma de  $a(t)$  depende do tipo de material do qual o Universo encontra-se preenchido. Este material é determinado pela densidade de energia  $\rho$  e pela pressão  $p$ , relacionados através da equação de estado definida como  $p = p(\rho)$ , cujas propriedades do material são responsáveis pela expansão do Universo.

Ao definir,

$$H(t)^2 + \frac{k}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) \quad , \quad (1.2)$$

a equação de Friedmann (a qual descreve a expansão do Universo), e,

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \quad , \quad (1.3)$$

a equação de conservação da matéria (a qual descreve como a densidade do material que preenche o Universo evolui com o tempo); é possível derivar uma terceira equação,

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a \quad , \quad (1.4)$$

a equação da aceleração (a qual descreve a aceleração do fator de escala), com  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  o parâmetro de Hubble,  $G$  a constante gravitacional, e o ponto ( $\dot{\quad}$ ) a derivada em relação ao tempo  $t$ .

Ao levar-se em consideração as equações (1.2) e (1.4), percebe-se que a taxa de expansão do universo é determinada pela densidade de energia e pela equação de estado dos seus constituintes, como dito anteriormente. Ou seja, a combinação das equações (1.2) e (1.3) ou (1.4), acrescida da equação de estado  $p = p(\rho)$ , forma um sistema completo de equações que determinam as funções  $a(t)$  e  $\rho(t)$ .

Em outras palavras, o futuro do Universo não depende apenas da sua geometria mas também da sua equação de estado, definida como  $p = \alpha\rho$ , para substâncias de importância cosmológica, com  $p = \frac{1}{3}\rho$  para a radiação e  $p = 0$  para a matéria não-relativística, isto é, poeira (LIDDLE, 1996; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).

No que diz respeito ao futuro do Universo, muitas galáxias ainda produzem novas estrelas, mas muitas outras já esgotaram o seu suprimento de gás, e em cerca de 30 bilhões de anos as galáxias estarão cada vez mais escuras, e preenchidas com estrelas mortas e/ou em suas últimas fases evolutivas. Este fenômeno acarretaria em uma menor quantidade de planetas capazes de suportar a vida (como a conhecemos hoje em dia).

O Universo poderá, então, expandir para sempre, e entrar em um processo conhecido como *Big Chill* (Grande Frio, em tradução livre), também chamado de *Big Freeze*. Ou, em alternativa ao *Big Chill*, teríamos o chamado *Big Crunch*, isto é, se a massa do Universo for grande o suficiente, a gravidade começaria a agir de maneira contrária à expansão, ou seja, a gravidade reverteria a expansão, e toda a matéria do Universo e sua energia colapsariam (PEEBLES et al., 1994).

Acerca da nossa existência aqui na Terra, em cerca de 5 bilhões de anos, a fusão esgotará o hidrogênio no centro do Sol e a pressão interna do seu núcleo diminuirá, uma vez que as temperaturas ainda não são altas o suficiente para fundir o hélio em elementos mais pesados. A gravidade agirá no núcleo, o que causará o seu aquecimento. O hidrogênio começará, então, a queimar de forma mais intensa. Essa nova energia causará uma expansão das camadas externas do Sol, e fará com que ele se torne uma estrela do tipo gigante vermelha.

Em uma segunda fase, o núcleo do Sol, em contração, se tornará tão quente que eventualmente o hélio começará a se fundir em núcleos de carbono e oxigênio, e transformará o Sol em uma estrela mais fria e mais fraca. Sua atmosfera aumentará durante essa transição, para uma distância de cerca de 1 unidade astronômica (atual distância média da Terra ao Sol), o que implicará em Mercúrio, Vênus e, possivelmente, a Terra gradualmente engolidos pelo Sol (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

As características do Universo atual, e seu provável destino, são possíveis indicativos dos acontecimentos que ocorreram nos primórdios do Universo, o qual será o foco da nossa análise, e, portanto, explanado de forma mais aprofundada no item (1.1.2) do presente Capítulo.

### 1.1.2 O Universo Primitivo

Ao compreender o reino das eras iniciais da história do Cosmo, o Universo primitivo corresponde a um período anterior à 1 s após o *Big Bang* (WEINBERG, 1993; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015; LYTH, 2016).

Nesta época, o Universo era composto por várias espécies de partículas separadas, as quais interagem entre si, como prótons, nêutrons, fótons, elétrons, pósitrons, neutrinos e anti-neutrinos, cujas propriedades são especificadas através da função de distribuição de cada espécie (LIDDLE, 2015; LYTH, 2016).

Destacam-se os seguintes processos de colisão, que ocorriam com frequência nesse período: (i) a colisão de dois fótons gerando um elétron e um pósitron; (ii) a colisão de um neutrino com um anti-neutrino, gerando um elétron e um pósitron; (iii) a colisão de um fóton e um elétron, gerando um nêutron e um neutrino. Para os quais, tornam-se válidos todos os processos reversos, o que corresponde ao chamado equilíbrio térmico, como pode ser observado na Tabela 1 (LYTH, 2016).

Tabela 1: Processos de colisão de partículas.

fóton + fóton	$\rightleftharpoons$	elétron + pósitron
neutrino + anti-neutrino	$\rightleftharpoons$	elétron + pósitron
fóton + elétron	$\rightleftharpoons$	nêutron + neutrino

O estado de equilíbrio térmico, no qual o número de distribuições de todas as partículas fora determinado pelas leis da mecânica estatística, perdurou durante todo o primeiro estágio do Universo, e encerrou próximo ao primeiro segundo de existência do mesmo. Lembranças do estado de equilíbrio térmico podem ser observadas ao medirmos a abundância atual de hélio, da radiação de microondas, ou até mesmo dos neutrinos (WEINBERG, 1993).

Tocante às interações fortes entre as partículas elementares no Universo primitivo, uma característica importante é que tais interações prendem os prótons e os nêutrons juntos em um núcleo atômico, e afetam apenas uma classe de partículas conhecidas como hádrons.

Mas como lidar com altas temperaturas, quando hádrons e anti-hádrons estavam presentes em grandes quantidades? Alguns pesquisadores acreditam que não existe um hádron elementar, enquanto outros pesquisadores defendem que nem todas as partículas são iguais, isto é, algumas são elementares e outras são meras combinações das partículas elementares. Neste caso, as partículas elementares consistiriam do fóton e todos os léptons conhecidos, mas nenhuma delas de hádrons. No entanto, os hádrons seriam combinações de partículas mais fundamentais, isto é, os quarks (partículas normalmente ligadas por glúons, para a formação de prótons e nêutrons) (WEINBERG, 1993; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

Em  $t \simeq 1$  s a temperatura do Universo era da ordem de  $10^{10}$  K, e as energias típicas dos fótons não eram suficientes para produzir, espontaneamente, pares de elétron-pósitron. Com a aniquilação de pósitrons e elétrons, mais fótons foram produzidos, e nêutrons começaram a decair em prótons, elétrons e neutrinos, o que teria acarretado no desequilíbrio entre prótons e nêutrons, devido ao não reabastecimento rápido do suprimento de nêutrons (uma vez que nêutrons são levemente mais massivos do que os prótons e, portanto, mais difíceis de se produzir). O número de nêutrons seria de apenas um quarto do número de prótons (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

Para temperaturas acima de  $10^{10}$  K, as energias típicas dos fótons poderiam ser comparadas às energias de ligação nuclear (da ordem de 1 MeV), e para um Universo ainda mais anterior à esse momento, os fótons seriam energéticos o suficiente para destruir núcleos (ao separar prótons e nêutrons uns dos outros), o que torna incoerente pensar em nêutrons e prótons em temperaturas da ordem de  $10^{12}$  K. Ao invés disso, os quarks (seus constituintes) encontravam-se livres para vagar em um mar denso. Essa fase é conhecida como quark-hádron, a transição na qual os quarks iniciaram a sua condensação em prótons e nêutrons (LIDDLE, 2015).

Em uma temperatura ainda mais elevada, da ordem de  $10^{15}$ K, o Universo teria passado por uma transição de fase associada não às interações fortes mas às interações fracas (responsáveis por certos processos de decaimento radioativo, como o decaimento de um nêutron, ou de forma mais geral, por qualquer reação que envolva um neutrino), chamada temperatura crítica. Para temperaturas abaixo dessa temperatura, ocorre a quebra de simetria entre as interações eletromagnética e fraca (WEINBERG, 1993).

No intervalo temporal de  $t = 10^{-35}$  s à  $t = 10^{-6}$  s após o *Big Bang*, o que equivale a temperaturas acima da temperatura crítica, existia equilíbrio entre partículas, antipartículas, e fótons. Pares de partículas-antipartículas aniquilavam-se e produziam fótons, e fótons, espontaneamente, formavam pares de partículas-antipartículas. Em grande parte desse período, quarks eram abundantes e não vinculados. Cada quark (matéria) possuía um antiquark (antimatéria) correspondente, mas devido à uma pequena assimetria na formação deles (cerca de 1 em cada bilhão) deu-se início ao processo de existência da vida atual (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

A teoria das partículas, a qual descreve interações abaixo da escala de TeV, e que compreende a teoria eletrofraca unificada e a cromodinâmica quântica, é conhecida como Modelo Padrão. Duas questões cosmológicas importantes, além do Modelo Padrão, são a natureza das partículas massivas de interação fraca (uma possível componente da CDM), e a

geração da assimetria bariônica no Universo (MUKHANOV, 2005).

Grande parte do que sabemos atualmente sobre o Universo, nos foi apresentado através dos fótons, isto é, observações precisas do Universo atual são capazes de elucidar os tipos de processos que ocorreram no decurso dos primeiros estágios do mesmo, e/ou talvez esclarecer a natureza das leis físicas em energias tão altas que seria inconcebível explorar por outros meios. Por exemplo, este período denso e quente do Universo é corroborado através das evidências observacionais da CMB, uma vez que este cenário seria a condição necessária para a produção de radiação (PEEBLES et al., 1994; LIDDLE, 1996; RYDEN, 2006).

Portanto, saber que existem mais bárions do que anti-bárions no Universo, e esse relativo excesso de bárions ser suficiente para explicar a abundância de elementos leves e as observações das flutuações da CMB, torna o Modelo padrão detentor dos ingredientes necessários para a geração da assimetria bariônica, no qual o número de bárions por fóton é da ordem de  $10^{-10}$  para o Universo atual (corroborado por dados observacionais), mas da ordem de  $10^{-9}$  para os primeiros estágios do Universo (MUKHANOV, 2005; LYTH, 2016).

Porém, permanece o questionamento sobre o quão próximo do início de tudo o nosso conhecimento atual das leis da física é capaz de chegar, ao considerar a possibilidade lógica de um começo em  $t = 0$  para  $a(t) = 0$  (conhecido como o momento da singularidade, isto é, o *Big Bang*) (WEINBERG, 1993).

Em cerca de  $10^{-24}$  s, apesar da interação gravitacional ser fraca em altas temperaturas, cogita-se que o campo gravitacional do Universo teria sido grande o suficiente para produzir pares de partículas-antipartículas. Contudo, o número de partículas produzidas dessa forma teria tido uma contribuição desprezível comparada à quantidade de partículas já existentes no equilíbrio térmico. Portanto, ao referir-se ao Universo primitivo, a gravidade não teria um efeito significativo em suas propriedades internas, ainda que tenha desempenhado um papel importante na história do Universo, visto que ela controla a relação entre a densidade e a taxa de expansão do mesmo. No entanto, para temperaturas da ordem de  $10^{32}$  K, as energias de partículas em equilíbrio térmico podem ser tão grandes que a interação gravitacional entre elas torna-se tão importante quanto as outras interações (WEINBERG, 1993).

Portanto, independentemente de  $t < 1$  s após o começo de tudo compreender algo praticamente desprezível (em um contexto macroscópico como é o caso do Universo atual), muito aconteceu, ou especula-se que aconteceu, uma vez que as escalas temporais e de distância das interações eram muito menores que as atuais (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).



Posto isto, apesar das limitações dos atuais aceleradores de partículas de altas energias à certas temperaturas, somos aptos a atingir, com confiança substancial, conclusões para  $t = 10^{-12}$  s após o *Big Bang*, cujas maiores energias de partículas alcançadas pelos aceleradores atuais são da ordem de 100 GeV (o que equivale à  $10^{15}$  K).

Se quisermos obter informações sobre momentos ainda mais próximos à  $t = 0$ , dependemos da análise do nosso grande acelerador de partículas, o Universo primitivo. Assim como, de observações astrofísicas e cosmológicas, de fontes astrofísicas de partículas altamente energéticas, uma vez que os fenômenos físicos de calor do Universo primitivo evidenciam a simplicidade essencial da natureza (WEINBERG, 1993; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).

Quando o Universo excede uma certa densidade, e certas temperaturas, efeitos quânticos entram em ação e tornam-se importantes (inclusive para a física gravitacional), o que faz com que a relatividade geral (a qual parece ser inconsistente com a mecânica quântica) não possa ser aplicada no breve intervalo de tempo do nível de Planck ( $t < 10^{-43}$  s), do qual sabe-se praticamente nada. Contudo, vale ressaltar que em energias um pouco abaixo dessa escala, o espaço-tempo clássico começa a fazer sentido. Por exemplo, para  $t = 10^{-38}$  s (momento no qual ocorreu a inflação), as leis da física que regem os acontecimentos desta época seriam as leis da física clássica e não da física quântica (MUKHANOV, 2005; LIDDLE, 2015).

Assim sendo, a fusão da física quântica com a física gravitacional, a qual recebe o nome de teoria da gravitação quântica, estabelece-se como fundamental em escalas de energia da ordem de Planck, ou seja, cerca de  $\sim 10^{19}$  GeV, onde cogita-se a concepção de uma espécie de espuma espaço-temporal na qual pacotes de tempo e espaço teriam oscilado entre existência e não existência (MUKHANOV, 2005; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).

Sob esta perspectiva, ocorre na década de 1960, com os trabalhos pioneiros de Bryce Dewitt (DEWITT, 1967), Charles Misner (MISNER, 1972), e John Wheeler (WHEELER, 1968), o estabelecimento da cosmologia quântica, isto é, a aplicação das leis da física quântica à cosmologia, com a qual surge a possibilidade da explicação e/ou do entendimento dos eventos que desenrolaram-se no Universo primitivo, mais precisamente na era de Planck, uma vez que ainda não há uma concordância sobre uma definição precisa e fundamentada ao que concerne a teoria da gravitação quântica (GUTH, 1981; HARTLE, 1987; WEINBERG, 1993; ATKATZ, 1994; LIDDLE, 1996; HALLIWELL, 2002; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LYTH, 2016).

## 1.2 Objetivo

O presente trabalho visa, através da aplicação de cálculos numéricos, elucidar os possíveis eventos dos primórdios do Universo, tais como a emergência de um modelo de universo homogêneo e isotrópico, preenchido com um fluido de poeira e gás de Chaplygin cuja métrica é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker com  $k=1$ , através do processo de tunelamento quântico.

Para isso, após esse primeiro momento introdutório, no qual estabelecemos a ambientação e características principais da evolução do Universo, com ênfase em seus primórdios, faremos um breve resumo dos tópicos e formalismos fundamentais da cosmologia quântica, assim como delinearemos os aspectos teóricos, base para a compreensão dos processos aqui analisados.

Em seguida, apresentaremos todos os pontos chave do modelo de universo por nós considerado, tanto do modelo clássico, quanto da sua eventual quantização. Ulteriormente, será exposta a metodologia aplicada ao nosso modelo, os nossos excelentes resultados, e, por fim, nossas considerações finais e perspectivas para futuros trabalhos.

## 2 Cosmologia Quântica

Com a publicação da relatividade geral em 1915, e da mecânica quântica em 1926, não demorou muito para que já na década de 1930 assimilassem a possibilidade do campo gravitacional se comportar de forma quântica. Podemos destacar o trabalho de Rosenfeld (1930), o qual buscou desenvolver métodos gerais para lidar com as dificuldades técnicas que envolviam quantizar a gravidade, ao aplicar o método de Pauli para a quantização de campos com grupos de calibre, para as equações de campo de Einstein linearizadas. Contudo, sugestões teriam sido propostas anos antes, mais precisamente em 1916, quando Einstein havia alertado sobre a possibilidade de efeitos quânticos provocarem modificações na relatividade geral, e em 1926 com a indicação de Oskar Klein sobre uma eventual modificação dos conceitos de espaço-tempo, decorrente da gravidade quântica (DEWITT, 1967; ROVELLI, 2004; ESPOSITO, 2011).

Na medida em que a natureza e as leis da física são fundamentalmente quânticas, a cosmologia quântica é a aplicação da mecânica quântica ao Universo como um todo, o que permite uma maior compreensão ao que concerne sua origem, evolução e destino, assim como o comportamento da matéria e da energia em estágios primordiais do Cosmo, e as condições iniciais as quais levaram à sua existência e à formação de estruturas como as que conhecemos atualmente (BOJOWALD, 2015).

As leis clássicas divergem em energias e temperaturas da ordem da escala de Planck ( $t < 10^{-43}$  s), na qual a densidade média é demasiadamente maior em ordens de magnitude do que a densidade média encontrada em qualquer regime observacionalmente acessível, o que equivale à mais de um trilhão de massas solares em uma região do tamanho de um único próton, e a medida de distância dada pelo comprimento de Planck  $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-35}$  m é muito menor do que qualquer coisa que possa ser sondada por aceleradores de partículas. A cosmologia quântica pode ser utilizada como ferramenta para a compreensão dos eventos que ocorrem em tais condições de temperatura e energia (HARTLE, 1987; ATKATZ, 1994; ESPOSITO, 2011; BOJOWALD, 2015; KIEFER; SANDHÖFER, 2022).

Por que a cosmologia quântica e não a teoria da gravitação quântica? Por enquanto, não há uma teoria de gravitação quântica estabelecida e definitiva, portanto, utilizamos nossos conhecimentos de cosmologia quântica para investigar os acontecimentos em escalas do nível de Plack, como é o caso do Universo primordial.

Quando houver uma definição precisa da teoria da gravitação quântica, a cosmologia quântica se tornará obsoleta? O mais provável é que as teorias se combinem para formar um cenário mais completo do Universo, visto que apesar de ambos os campos buscarem conciliar as teorias aparentemente incompatíveis da mecânica quântica e da relatividade geral, isto é, almejem uma compreensão mais unificada do Cosmo, elas focam em aspectos e abordagens diferentes quanto a aplicação das leis da física quântica ao Universo, onde a principal diferença entre ambas reside no fato da cosmologia quântica lidar com o Universo como um todo, com foco em suas condições iniciais e na evolução do mesmo, enquanto que a gravitação quântica lida com a gravidade em um nível quântico, com foco na natureza do espaço e do tempo, em pequenas escalas.

Ademais, apesar de todas as perguntas ainda sem resposta, a cosmologia quântica apresenta desafios e reflexões fascinantes, na qual uma de suas maiores expectativas é uma possível solução para a singularidade da cosmologia clássica (derivada da relatividade geral), dado que  $a(t) = 0$  não pode ser evitado classicamente (BOJOWALD, 2015).

Embora a cosmologia quântica tenha, efetivamente, iniciado em 1967 com o trabalho de Bryce DeWitt<sup>1</sup>, ao longo dos anos, inúmeros trabalhos foram propostos e desenvolvidos com ênfase em três linhas principais de pesquisa: (i) a linha de pesquisa covariante, a qual busca construir uma teoria quântica de campos das flutuações da métrica, sobre um espaço plano de Minkowski, ou alguma outra métrica espacial de fundo; (ii) a soma sobre histórias, uma tentativa de definição da teoria através da utilização de uma versão quântica da integral funcional de Feynman; e, por fim, (iii) a linha de pesquisa canônica (ROVELLI, 2004).

Iniciada na década de 1950 por Bergmann e Dirac, a linha de pesquisa canônica, a qual consiste no desenvolvimento da estrutura canônica da relatividade geral, foi simplificada por Arnowitt, Deser e Misner (ADM) na década de 1960, e por Ashtekar na década de 1980.

As abordagens canônicas<sup>2</sup> procuram dividir o espaço-tempo em espaço e tempo e almejam

---

<sup>1</sup>DeWitt (1967).

<sup>2</sup>Trabalhos que seguem a linha de estudo canônico, podem ser conferidos em (ESPOSITO, 2011). Trabalhos e formalismos, os quais ajudaram a estabelecer a cosmologia quântica, inclusive a base teórica da análise aqui apresentada, encontram-se (cronologicamente) no apêndice B de (ROVELLI, 2004).

um formalismo hamiltoniano, como o formalismo ADM, no qual a métrica quadrimensional pode ser interpretada como a evolução de uma métrica tridimensional no tempo, em analogia à mecânica quântica, e o qual permite reescrever as equações de campo de Einstein em primeira ordem (KIEFER; SANDHÖFER, 2022).

O formalismo ADM, o formalismo canônico da relatividade geral, base para a cosmologia quântica, será descrito em maiores detalhes na seção (2.1) do presente Capítulo.

## 2.1 O Formalismo ADM

O formalismo canônico da relatividade geral, desenvolvido na década de 1960 por Arnowitt, Deser e Misner<sup>3</sup> é um dos passos necessários para a estruturação da cosmologia quântica, uma vez que a equação de Wheeler-DeWitt (equação fundamental da cosmologia quântica, análoga à equação de Schrödinger) advém da aplicação deste formalismo.

O desenvolvimento do capítulo se dará da seguinte forma, primeiramente será introduzido o formalismo lagrangiano da relatividade geral, seguido de um breve prelúdio matemático (composto de definições necessárias para o desenvolvimento do formalismo hamiltoniano). Posteriormente, após as explanações sobre a decomposição  $3 + 1$  do espaço-tempo, e da projeção das equações de campo de Einstein, será apresentado o desenvolvimento da formulação hamiltoniana da relatividade geral.

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento desta seção são: (DANIELI; MOLINARI, 2020; JHA, 2022).

### 2.1.1 Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral

Conhecida como equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{c^4}GT_{\mu\nu} \quad , \quad (2.1)$$

a relação acima pode ser definida como a distribuição da matéria para a geometria do espaço-tempo, na qual a gravidade se acompla ao tensor energia-momento da matéria, com  $R_{\mu\nu}$  o tensor de Ricci,  $R$  o escalar de curvatura,  $\Lambda$  a constante cosmológica,  $G$  a constante gravitacional,  $c$  a velocidade da luz,  $T_{\mu\nu}$  o tensor energia-momento, e  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico. Assumiremos  $\Lambda = 0$  e  $G = c = 1$ .

---

<sup>3</sup>(ARNOWITT; DESER; MISNER, 2008).

A abordagem variacional para a relatividade geral foi desenvolvida inicialmente por Einstein e Hilbert em 1915. Nesta abordagem, define-se a ação gravitacional como,

$$S_H = \frac{1}{16\pi} \int_V d^4x \sqrt{-g} R \quad , \quad (2.2)$$

com  $V$  o volume sobre o qual a integração é realizada e  $g$  o determinante (negativo) do tensor métrico.

A ação da matéria,

$$S_M = \int_V d^4x \sqrt{-g} L_M \quad , \quad (2.3)$$

é a contribuição dos campos de matéria  $\phi$ , com  $L_M$  a lagrangiana dependente apenas dos coeficientes do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .

Sendo a ação total definida como,

$$S = S_H + S_M \quad , \quad (2.4)$$

as equações de campo de Einstein podem ser derivadas a partir da estacionaridade de  $S$  sob variações arbitrárias de  $g_{\mu\nu}$ .

### Variação do termo gravitacional.

Dada a variação da lagrangiana  $L_H$

$$\delta L_H = \frac{1}{16\pi} [\delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g})] = -\frac{1}{16\pi} \left[ \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \right] \quad , \quad (2.5)$$

aplica-se a fórmula de Jacobi

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad , \quad (2.6)$$

com o intuito de obter o seguinte resultado para  $\delta L_H$ ,

$$\delta L_H = \frac{1}{16\pi} \left[ \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \quad . \quad (2.7)$$

Se for considerada a identidade de Palatini, isto é,

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \quad , \quad (2.8)$$

ou, de forma análoga,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} \quad , \quad (2.9)$$

é possível encontrar a seguinte relação para o último termo de (2.7)

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \nabla_{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\rho}] \\ &= \sqrt{-g}\nabla_{\rho}[g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - g^{\rho\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\mu}] \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

o qual é ignorado pois os termos de fronteira não são considerados.

Após realizar as devidas substituições, tem-se por fim, a variação do termo de Hilbert, isto é, a variação do termo gravitacional da ação (2.4)

$$\delta S_H = \frac{1}{16\pi} \int_V \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \quad (2.11)$$

### Variação do termo de matéria.

De maneira análoga à variação do termo gravitacional, a variação do termo de matéria se dará da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int_V \left[ \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + L_M \delta \sqrt{-g} \right] d^4x \\ &= \int_V \left[ \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}L_M g_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int_V T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad , \end{aligned} \quad (2.12)$$

com,

$$T_{\mu\nu} \equiv -2 \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} + L_M g_{\mu\nu} \quad , \quad (2.13)$$

para o tensor energia-momento.

Visto que a variação da ação total (2.4) é  $\delta S = \delta S_H + \delta S_M$ , temos,

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int_V \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \quad (2.14)$$

Com a arbitrariedade de  $\delta g^{\mu\nu}$ , a estacionariedade de  $S$  requer que o integrando seja idêntico à zero, ou seja,  $\delta S = 0$  (o princípio de mínima ação), o que resulta em,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.15)$$

ou seja, implica nas equações de campo de Einstein satisfeitas, e o sistema em estado de equilíbrio, como gostaríamos de encontrar.

Logo, é possível inferir a conservação do tensor energia-momento, isto é

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.16)$$

uma vez que (2.15) pode ser reescrita como  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , e as identidades de Bianchi determinam que  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$  (com  $G_{\mu\nu}$  o tensor de Einstein).

## 2.1.2 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

### 2.1.2.1 Prelúdio Matemático e Definições

Considere  $\aleph \subset M$ , uma subvariedade, através de uma incorporação  $\tilde{\Phi} : \aleph \rightarrow M$ , com  $\tilde{\Phi} : \aleph \rightarrow \tilde{\Phi}(\aleph)$  um difeomorfismo, no qual  $\tilde{\Phi}(\aleph) \subset M$  é uma subvariedade de dimensão  $k$  tal que  $k < n$ , em que  $n$  é a dimensão total da variedade  $M$ .

Com  $M$  uma variedade quadridimensional real e suave, e  $g$  uma métrica lorentziana de assinatura  $(-, +, +, +)$  em  $M$ , definida como  $g : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  (um mapa bilinear simétrico de valor real), assume-se que o espaço-tempo quadridimensional  $(M, g)$  é globalmente hiperbólico, isto é, admite uma hipersuperfície do tipo espaço  $\Sigma$ , tal que toda curva do tipo tempo ou nula intercepta  $\Sigma$  apenas uma vez, e cuja topologia é  $\mathbb{R} \times \Sigma$ .

$\Sigma$  é uma hipersuperfície de  $M$  se  $\Sigma = \tilde{\Phi}(\aleph)$ , isto é, se  $\Sigma$  for a imagem de  $\aleph$  através de  $\tilde{\Phi}$ , com  $\aleph$  uma variedade tridimensional.



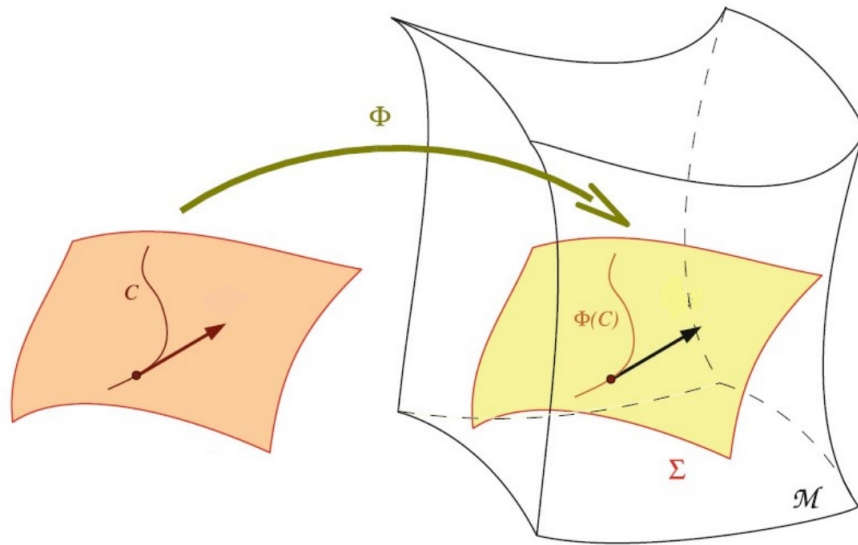


Figura 5: Incorporação de uma variedade 3D em uma variedade 4D.

O espaço-tempo pode ser foliado por hipersuperfícies  $\Sigma_t$  do tipo espaço, com  $t = \text{constante}$  e  $\Sigma_t (t \in \mathbb{R})$ , tal que  $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$ , com  $\{t\} \times \Sigma$  e  $\hat{t} = t$  a direção do tempo de  $\Sigma_t$  à  $\Sigma_{t+dt}$  (com  $\hat{t} : M \times \mathbb{R}$ ).

Algumas propriedades de  $\Sigma_t$ :

- Duas  $\Sigma_t$  não se interceptam;
- Assim como estabelecido pelas equações de movimento, a hipersuperfície inicial,  $\Sigma_{t=0}$ , incorpora o conhecimento fundamental que dá origem ao espaço-tempo.;
- Todas as  $\Sigma_t$  são do tipo espaço;
- $\Sigma_t$  surgem como superfícies de nível de uma função escalar  $t$ , a qual será interpretada como um tempo de função global.

A métrica do espaço-tempo induz uma métrica riemaniana  $\gamma_{ij}$  tridimensional chamada de métrica induzida em  $\Sigma_t$ , tal que  $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \leftrightarrow \gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu$ , com  $n^\mu$  um vetor normal em cada  $\Sigma_t$ , onde  $n^\mu n_\mu = -1$ .

Seja,  $n_\mu = \Omega \partial_\mu \hat{t}$ , com  $\Omega = \Omega(x^\mu)$  uma constante de normalização para a qual  $n^\mu n_\mu = -1$  (o que garante que  $n^\mu$  seja um vetor normal). Temos que,  $-1 = n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = \Omega^2 g^{tt}$ , com  $g^{tt} = g^{00}$ , o que significa que  $\hat{t}$  é a coordenada temporal, e  $\Omega = \pm \frac{1}{\sqrt{g^{00}}}$ , da qual escolheremos  $\Omega < 0$  para que  $n^\mu$  seja um vetor do tipo tempo, e, portanto,

$$n_\mu = \frac{-\delta_\mu^0}{\sqrt{-g^{00}}} \quad , \quad (2.17)$$

$$n^\mu = \frac{-g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}} \quad . \quad (2.18)$$

Ou seja, o vetor normal é utilizado para calcular a métrica induzida, a partir da métrica do espaço-tempo original  $g_{\mu\nu}$ , em que, o delta de Kronecker é empregue na equação (2.17) para isolar o componente temporal do vetor, o que torna a expressão igual a  $-1$  se  $\mu = 0$ , e 0 caso contrário. O sinal negativo é aplicado para garantir que o componente de tempo seja direcionado para dentro e a raiz quadrada de  $-g^{00}$  seja utilizada para normalizar o vetor. Na expressão (2.18), a componente temporal já está isolada no numerador.

Logo, a hipersupefície  $\Sigma$  pode ser definida como do tipo espaço, com assinatura  $(+,+,+)$ , com vetor normal do tipo tempo; do tipo tempo, com assinatura  $(-,+,+)$ , com vetor normal do tipo espaço; e do tipo nula, com assinatura  $(0,+,+)$ ; se  $\gamma$  for, respectivamente, positivo-definida, lorentziana, ou degenerada.

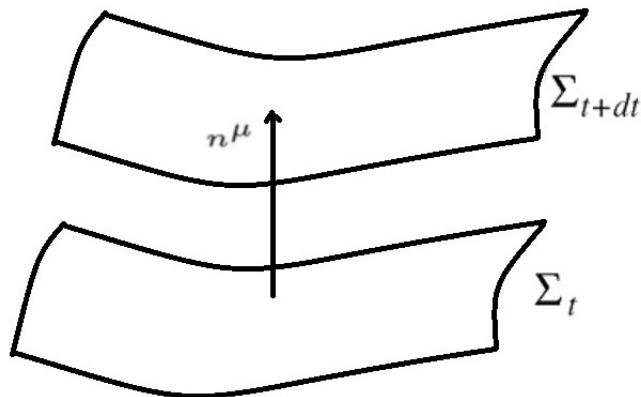


Figura 6: Foliação do espaço-tempo.

A métrica induzida ( $\gamma$ ) pode funcionar como um projetor do tipo espaço (projeção espacial), e do tipo tempo (projeção normal), sendo  $T_{\mu\nu}^S = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$  a parte espacial do tensor  $T_{\mu\nu}$  e  $\pi_\nu^\mu \equiv -n_\nu n^\mu = \delta_\nu^\mu - \gamma_\nu^\mu$  o projetor normal.

Dado que o tensor de Riemann  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$  e suas formas contraídas, associadas à conexão  $\nabla_\mu$  de Levi-Civita em  $(M, g)$ , expressam a curvatura intrínseca do espaço-tempo, também é possível construir, de forma análoga, uma conexão única de Levi-Civita  $D_i$  em  $(\Sigma, \gamma)$  e seus tensores de curvatura correspondentes,

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta \quad , \quad (2.19)$$

a curvatura intrínseca de Riemann<sup>4</sup> de cada hipersuperfície, induzida pela 3-métrica  $\gamma_{\mu\nu}$ , e denotada por  ${}^{(3)}R$ , a qual relaciona o tensor de Riemann ao comutador das derivadas covariantes, com  $V$  um vetor qualquer que pode ser separado em partes espacial e temporal,

$$V^\mu = \delta_\nu^\mu V^\nu = (\gamma_\nu^\mu + N_\nu^\mu)V^\nu = V^S + V^T \quad . \quad (2.20)$$

Contudo, como apenas consta informação sobre a curvatura intrínseca de  $\Sigma$ , faz-se necessário obter informação sobre como  $\Sigma_t$  se encaixa em  $(M, g)$ . Define-se, então, a medida da variação da normal  $n$  ao longo do vetor tangente, o tensor de curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$ ,

$$K_{\mu\nu} \equiv -\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta \quad , \quad (2.21)$$

o qual é simétrico em  $\mu$  e  $\nu$ , é puramente espacial, mede como a normal à hipersuperfície muda de um ponto a outro, assim como a taxa com a qual a hipersuperfície se deforma, ao ser carregada ao longo da normal, isto é, captura a noção intuitiva de como a curvatura varia de uma hipersuperfície para outra.

A rapidez com a qual a curvatura muda de uma hipersuperfície para a próxima é chamada de aceleração de uma foliação  $a_\mu$ , definida como

$$a_\mu \equiv n^\nu \nabla_\nu n_\mu \quad . \quad (2.22)$$

Isto permite que  $K_{\mu\nu}$  possa ser expressa de outras formas equivalentes,

$$K_{\mu\nu} \equiv -\nabla_\mu n_\nu - n_\mu a_\nu \quad , \quad (2.23)$$

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} \quad , \quad (2.24)$$

onde  $\mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu}$  é a derivada de Lie de  $\gamma_{\mu\nu}$  ao longo de  $n$ .

---

<sup>4</sup>Quantidades marcadas com sobrescrito <sup>(4)</sup> fazem referência a  $(M, g)$ , e as quantidades marcadas com <sup>(3)</sup>, ou sem sobrescrito, referem-se a variedade  $(\Sigma, \gamma)$ .

Assim como o escalar de Ricci, temos a curvatura média, ou escalar de curvatura extrínseca  $K$ ,

$$K \equiv g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} K_{\mu\nu} \quad , \quad (2.25)$$

a qual mede a mudança fracionária de um volume tridimensional ao longo da normal  $n^\mu$  de uma hipersuperfície do tipo espaço para a próxima.

Por fim, temos as três últimas relações necessárias para nos aprofundarmos na decomposição 3 + 1 do espaço-tempo (a base do formalismo ADM):

Dada a relação de Gauss,

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \gamma_\delta^\sigma {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho = {}^{(3)}R_{\delta\alpha\beta}^\gamma + K_\alpha^\gamma K_{\delta\beta} - K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta} \quad , \quad (2.26)$$

uma vez que,

$$\gamma_\lambda^\alpha \gamma_\beta^\lambda = \gamma_\beta^\alpha \quad , \quad (2.27)$$

estima-se a relação de Gauss contraída:

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma_\beta^\rho n^\sigma {}^{(4)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu \quad . \quad (2.28)$$

Ao contrair novamente com relação à métrica  $\gamma^{\mu\nu}$ , temos a generalização do *Theorema Egregium* de Gauss (ou relação escalar de Gauss),

$${}^{(4)}R + 2{}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} \quad . \quad (2.29)$$

Dada a relação de Codazzi-Mainardi,

$$\gamma_\rho^\gamma n^\sigma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho = D_\beta K_\alpha^\gamma - D_\alpha K_\beta^\gamma \quad , \quad (2.30)$$

efetua-se a contração dos índices livres restantes (com o objetivo de obter novos índices), e os aplica a  $\gamma$  e a  $\alpha$  no lado esquerdo da relação, o que resulta em,

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho^\mu n^\sigma \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\sigma\mu\nu}^\rho &= (\delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho) \gamma_\beta^\nu n^{\sigma(4)} R_{\sigma\mu\nu}^\rho \\
&= \gamma_\beta^\nu n^{\sigma(4)} R_{\sigma\nu} + \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\rho\sigma\mu\nu} n^\rho n^\sigma n^\mu \quad .
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Por fim, devido a auto-simetria de  ${}^{(4)}R_{\rho\sigma\mu\nu}$  com respeito aos primeiros dois índices, o último termo de (2.31) cai, o que permite definir a relação de Codazzi-Mainardi contraída,

$$\gamma_\alpha^\mu n^{\nu(4)} R_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha^\mu \quad . \tag{2.32}$$

### 2.1.2.2 Decomposição 3 + 1 do Espaço-Tempo

Para este tópico, será nossa intenção separar o espaço-tempo  $(M, g)$  em duas partes, uma puramente espacial, e uma puramente temporal.

Como apontado anteriormente, diz-se que  $M$  é globalmente hiperbólica, se admite uma superfície de Cauchy, isto é, uma hipersuperfície  $\Sigma$  do tipo espaço, e admite uma foliação por um conjunto de hipersuperfícies  $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , onde cada  $\Sigma_t$  é uma superfície de nível  $\hat{t}$  (campo escalar regular) em  $M$ .

Desse modo, introduzimos quatro novas variáveis com o intuito de especificar a geometria entre as hipersuperfícies, ou seja, a função lapso  $N$  e as funções deslocamento  $\vec{N}$ ,

$$N \equiv \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}} \quad , \tag{2.33}$$

$$N^i \equiv N^2 g^{0i} \quad , \tag{2.34}$$

as quais são utilizadas para descrever a maneira como o espaço-tempo é dividido em uma série de hipersuperfícies do tipo espaço, e definir as coordenadas nas quais o tensor métrico é expresso.

### Interpretação geométrica das funções lapso $N$ e deslocamento $\vec{N}$

Ao definirmos o vetor de evolução normal  $m^\mu$  como,

$$m^\mu \equiv N n^\mu \quad , \tag{2.35}$$

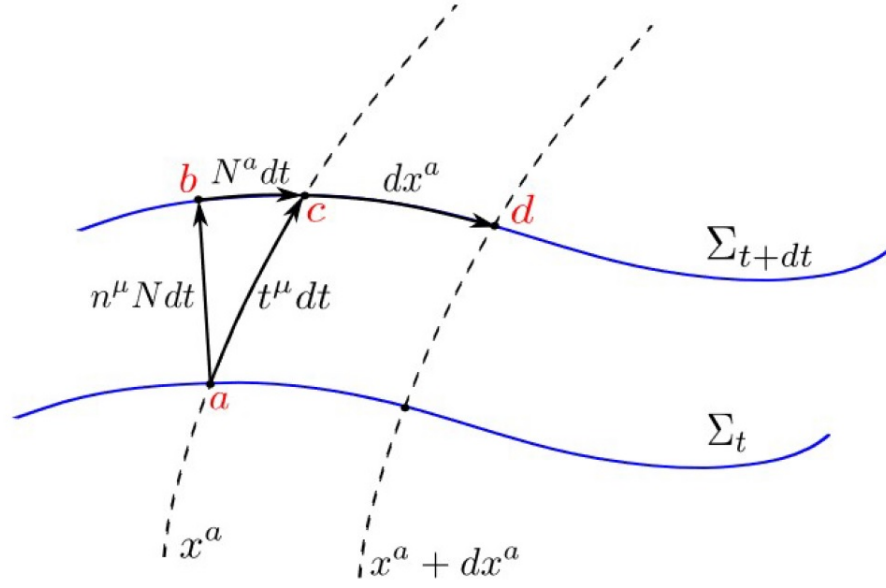


Figura 7: Interpretação geométrica das funções lapso e deslocamento.

temos que  $n^\mu N dt \equiv m^\mu dt$ , uma vez que  $n^\mu$  é o vetor normal à hipersuperfície (Figura 7).

A função lapso determina o lapso do tempo próprio  $\delta\tau$  entre  $\Sigma_{t+\delta t}$  e  $\Sigma_t$  (com  $\delta\tau = N\delta t$ ), enquanto que as funções deslocamento  $N^i$  medem a diferença das coordenadas na hipersuperfície  $\Sigma_{t+dt}$  entre os pontos  $b$  e  $c$  (o ponto de evolução temporal de  $a$ ).

Portanto, a função lapso mede o tempo próprio para ir de uma hipersuperfície para a próxima, ao passo que as funções deslocamento medem as mudanças nas coordenadas espaciais na mesma hipersuperfície.

Posto isto, o acoplamento destas quatro funções com a métrica  $\gamma_{ij}$ , isto é,  $\{N, \vec{N}, \gamma_{ij}\}$ , determina completamente a geometria espaço-temporal de  $M$ .

Seja,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_i N^i - N^2 & N_j \\ N_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad e \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & \gamma_{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix},$$

temos que  $\det(g_{\mu\nu}) = g$  (com  $g < 0$  devido a assinatura da 4-métrica ser  $(-, +, +, +)$ ) e  $\det(\gamma_{ij}) = \gamma$  (com  $\gamma > 0$  na hipersuperfície  $\Sigma_t$  devido a assinatura  $(+, +, +)$ ).

Portanto,  $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$  nos fornece a densidade do espaço-tempo  $\sqrt{-g}$  em termos da densidade  $\sqrt{\gamma}$  e da função lapso  $N$ , em que  $g^{00} = \frac{\det\gamma}{\det g} = \frac{\gamma}{g} = -\frac{1}{N^2}$ , com  $g$  o determinante da 4-métrica, e  $\gamma$  o determinante da 3-métrica.

Com este resultado, é possível definir explicitamente  $n_\mu$  e  $n^\mu$  em função de  $N$  e  $N^i$ , ao combinarmos as equações (2.17), (2.18), (2.33), e (2.34),

$$n_\mu = (-N, 0, 0, 0)_\mu \quad , \quad (2.36)$$

$$n^\mu = \left( \frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N} \right)^\mu \quad . \quad (2.37)$$

O próximo passo consistirá em substituir o tensor de Riemann  ${}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho$  com os tensores de curvatura intrínseca e extrínseca tridimensionais, e com as funções de lapso e deslocamento, ou seja, decompor em 3 + 1 o tensor de curvatura de Riemann.

Seja o tensor de Riemann aplicado à normal  $n^\mu$ , definido como,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]n^\rho = {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma \quad , \quad (2.38)$$

projeta-se este resultado duas vezes em  $\Sigma_t$  e uma vez ao longo de  $n^\mu$ , o que resulta em,

$$\gamma_{\rho\alpha}\gamma_\beta^\mu {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma n^\nu = -K_{\alpha\lambda}K_\beta^\lambda + \gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu \nabla_n K_{\mu\nu} + \frac{1}{N}D_\alpha D_\beta N \quad . \quad (2.39)$$

Esta relação permite substituir o tensor de Riemann do espaço-tempo com as quantidades tridimensionais. Ao compará-la e combiná-la com (2.28), é possível obter a expressão simplificada,

$$\gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu \nabla_n K_{\mu\nu} - \frac{1}{N}D_\alpha D_\beta N \quad , \quad (2.40)$$

que nada mais é do que a projeção do tensor de Ricci, e do escalar de Ricci com o intuito de obtê-los em termos das variáveis 3 + 1.

Finalmente, uma última contração com respeito a  $\gamma^{\mu\nu}$  proporciona o resultado o qual buscávamos encontrar, isto é,

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2\nabla_n K - \frac{2}{N}D^i D_i N \quad , \quad (2.41)$$

no qual houve uma substituição dos índices gregos por índices latinos, ao se explorar o caráter puramente espacial de  $K$  e  $\gamma$ ,

$$\gamma^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} = R + K^2 - \gamma^{ij} \nabla_n K_{ij} - \frac{1}{N} \gamma^{ij} D_i D_j N \quad . \quad (2.42)$$

Conclui-se assim, a decomposição 3 + 1 da curvatura do espaço-tempo.

### 2.1.2.3 Projeção das Equações de Campo de Einstein

Neste tópico serão expostas as projeções das equações de campo de Einstein no formalismo 3 + 1, visto que o tensor de curvatura foi decomposto.

A partir da contração das equações de campo de Einstein com relação a  $g_{\mu\nu}$ , para  $\Lambda = 0$ , (2.15), é possível derivar a seguinte relação,

$$g^{\mu\nu} \left[ {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^{(4)}R \right] = 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \rightarrow {}^{(4)}R = -8\pi T \quad , \quad (2.43)$$

da qual, infere-se

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = 8\pi \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right] \quad . \quad (2.44)$$

Visto que  $n^\mu$  é do tipo tempo, e pode ser identificada com a quadrivelocidade de um observador movendo-se perpendicular à  $\Sigma_t$ , projeta-se  $T_{\mu\nu}$  na densidade de energia  $E$ , medida por este observador,

$$E \equiv T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \quad ; \quad (2.45)$$

na densidade de momento  $p_\alpha$  (na qual o projetor  $\gamma'_\alpha$  garante que  $p_\alpha$  é tangente à  $\Sigma_t$ ),

$$p_\alpha \equiv -T_{\mu\nu} n^\mu \gamma'_\alpha{}^\nu \quad ; \quad (2.46)$$

e no tensor  $S_{\alpha\beta}$ , isto é, na projeção total de  $T_{\mu\nu}$  em  $\Sigma_t$ ,

$$S_{\alpha\beta} \equiv T_{\mu\nu} \gamma'_\alpha{}^\mu \gamma'_\beta{}^\nu \quad , \quad (2.47)$$

com,

$$S_{\alpha\beta} \equiv T_{\mu\nu} \gamma'_\alpha{}^\mu \gamma'_\beta{}^\nu = T_{\alpha\beta} + E n_\alpha n_\beta + n^\rho (T_{\alpha\rho} n_\beta + T_{\rho\beta} n_\alpha) \quad , \quad (2.48)$$



cujo traço  $S$  correspondente (ou escalar de tensão) com respeito a  $\gamma_{\mu\nu}$  será definido como,

$$S = S_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} = S_{ij}\gamma^{ij} \quad . \quad (2.49)$$

Ao combinarmos (2.48) e (2.49), obtemos o escalar energia-momento  $T$ ,

$$T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu) \quad , \quad (2.50)$$

e, por consequência, uma relação entre  $S$ ,  $E$ , e  $T$ , isto é,

$$T = S - E \quad . \quad (2.51)$$

Estas definições descrevem todas as quantidades decorrentes da projeção de  $T_{\mu\nu}$ .

Como as equações envolvem tensores de grau 2, a projeção das equações de campo de Einstein em termos das variáveis 3 + 1 podem ser realizadas de três formas (com duas projeções correspondentes à cada índice):

- Puramente espacial: duas vezes ao longo de  $\Sigma_t$ ;
- Puramente temporal: duas vezes ao longo de  $n^\mu$ ;
- Espacial e temporal: uma vez ao longo de  $\Sigma_t$  e uma vez ao longo de  $n^\mu$ .

Ao aplicar  $\gamma_t^\mu$  duas vezes em (2.44), obtém-se,

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda}K_\beta^\lambda + KK_{\alpha\beta} - \frac{1}{N}\left[\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + D_\alpha D_\beta N\right] = 8\pi\left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(S - E)\right] \quad , \quad (2.52)$$

na qual, todos os tensores envolvidos são tangentes à  $\Sigma_t$ .

Ao projetar as equações de campo de Einstein com relação à  $n^\mu$ , estima-se,

$${}^{(3)}R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 16\pi E \quad . \quad (2.53)$$

Finalmente, ao projetar uma vez ao longo de  $n^\mu$  e uma vez ao longo de  $\Sigma_t$ , temos,

$$D_\beta K_\alpha^\beta - D_\alpha K = 8\pi p_\alpha \quad . \quad (2.54)$$

Estas três equações contêm, coletivamente, a mesma quantidade de informações que a forma covariante das equações de campo de Einstein.

#### 2.1.2.4 Desenvolvimento da Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral (ADM)

A abordagem canônica tem como vantagem a possibilidade de uma formulação clara do problema de Cauchy, o problema de valor inicial. Ela também esclarece os problemas decorrentes das redundâncias das variáveis  $g_{\mu\nu}$  na abordagem covariante da relatividade geral. Um outro aspecto de destaque desta abordagem é a conexão entre os colchetes de Poisson e as equações de Hamilton, e a relação com a mecânica quântica através das relações de comutação. Logo, a formulação hamiltoniana é base para a quantização canônica da gravidade.

Após substituições necessárias na ação de Einstein-Hilbert, é possível obter a ação gravitacional (2.2) em termos das variáveis 3 + 1, isto é,

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x N \sqrt{\gamma} ({}^{(3)}R - K^2 + K^{ij} K_{ij}) \quad , \quad (2.55)$$

da qual infere-se a densidade lagrangiana,

$$L_H = N \sqrt{\gamma} ({}^{(3)}R - K^2 + K^{ij} K_{ij}) \quad , \quad (2.56)$$

para  $L = \int d^3x L_H$ , a lagrangiana  $L$  de  $S_H = \int dt L$ .

$L_H$  e  $S_H$  dependem de  $\{\gamma, \gamma_{ij}, N, \vec{N}, \partial_i N, \partial_i \vec{N}\}$  mas não dependem de  $\{\dot{N}, \dot{\vec{N}}\}$ , uma vez que  $N$  e  $\vec{N}$  são multiplicadores de Lagrange, isto é, não são variáveis dinâmicas.

Em mecânica clássica,  $L = \int d^3x L$  com  $L = L(q, \dot{q})$ , tal que  $q = \{q_i\}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  é a coordenada generalizada, e possui um momento canônico  $\pi^i$  correspondente a  $\dot{q}_i$ , isto é,  $\pi^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ .

É possível recuperar a densidade hamiltoniana  $H$  através da transformação de Legendre de  $L$ , isto é,

$$H(q, \pi) \equiv \Sigma_i \pi^i \dot{q}_i - L \quad . \quad (2.57)$$

Da mesma forma, é possível encontrar os momentos conjugados correspondentes a  $\{\gamma, \gamma_{ij}, N, \vec{N}\}$ ,

e aplicar a transformada de Legendre em  $L_H$  (2.56).

Primeiramente, definimos os momentos conjugados correspondentes a  $N$  e  $\vec{N}$ :

$$\pi_N \equiv \frac{\partial L_H}{\partial \dot{N}} = 0 \quad , \quad (2.58)$$

$$\pi_{N^i} \equiv \frac{\partial L_H}{\partial \dot{N}^i} = 0 \quad . \quad (2.59)$$

Dessa forma, restam os seis momentos conjugados independentes  $\pi^{ij}$ , correspondentes às componentes de  $\gamma_{ij}$ ,

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial L_H}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \quad , \quad (2.60)$$

cuja expressão explícita de  $\pi^{ij}$  é definida como,

$$\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij}) \quad . \quad (2.61)$$

Com a finalidade de escrever o resultado final em termos de  $\{^{(3)}R, \gamma, N, \vec{N}\}$ , elimina-se a referência da curvatura extrínseca de  $\pi^{ij}$ , ao aplicar a relação,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[ D_i N_j + D_j N_i - \dot{\gamma}_{ij} \right] \quad , \quad (2.62)$$

em,

$$\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij}) = \sqrt{\gamma} [K_{ab}\gamma^{ab}\gamma^{ij} - K_{ab}\gamma^{ia}\gamma^{jb}] \quad , \quad (2.63)$$

o que resulta em,

$$\pi^{ij} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2N} \left[ 2\gamma^{ij}D_k N^k - D^i N^j - D^j N^i + (\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl})\dot{\gamma}_{kl} \right] \quad . \quad (2.64)$$

Assim também, elimina-se os termos da curvatura extrínseca de (2.56), em favor das funções lapso e deslocamento.

Para tal, reorganiza-se (2.61) para obter,

$$K = \gamma^{ij} K_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (3\pi - 2\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}} \quad , \quad (2.65)$$

ao contrair,

$$K^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\pi\gamma^{ij} - 2\pi^{ij}) \quad , \quad (2.66)$$

com respeito a 3-métrica, para  $\gamma^{ij} K_{ij} = K$ , na qual  $\gamma^{ij}\gamma_{ij} = 3$  e  $\gamma^{ij}\pi_{ij} = \pi$ .

Agora, é possível definir a equação de evolução da 3-métrica, ao substituir (2.66) em (2.62),

$$\dot{\gamma}_{ij} = D_i N_j + D_j N_i - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi\gamma_{ij} - 2\pi_{ij}) \quad , \quad (2.67)$$

e ao aplicar (2.65) e (2.66) em (2.56), obter a densidade lagrangiana em termos de  $\{(^3)R, \gamma, N, \vec{N}\}$ ,

$$L_H = N\sqrt{\gamma} (^3)R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2) \quad . \quad (2.68)$$

Visto que a densidade hamiltoniana  $H_H$  (densidade hamiltoniana ADM) pode ser obtida através da transformada de Legendre de  $L_H$ , isto é,  $H_H \equiv \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - L_H$ , com o emprego das equações (2.58), (2.59), (2.67) e (2.68), é possível estimar,

$$\begin{aligned} H_H &= \pi_N \dot{N} + \pi_{N^i} \dot{N}^i + \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - L_H \\ &= \pi^{ij} [D_i N_j + D_j N_i - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi\gamma_{ij} - 2\pi_{ij})] - [N\sqrt{\gamma} (^3)R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2)] \\ &= 2\pi^{ij} D_i N_j - N\sqrt{\gamma} (^3)R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2}) \quad , \quad (2.69) \end{aligned}$$

da qual, é possível definir a hamiltoniana  $H_{ADM}$ , a partir da relação,

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma_t} d^3x H_H \quad . \quad (2.70)$$

O próximo passo consistirá em determinar as doze equações de movimento de Hamilton correspondentes à,

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} \quad , \quad (2.71)$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H}{\delta \gamma_{ij}} \quad . \quad (2.72)$$

Primeiro, definimos a ação  $S_{ADM}$ , a partir da aplicação de (2.69) em (2.55), isto é,

$$\begin{aligned} S_{ADM} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x (\pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - H) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left[ \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - (2\pi^{ij} D_j N_j - N \sqrt{\gamma} R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2})) \right] \quad . \quad (2.73) \end{aligned}$$

Para calcular as equações de movimento, faz-se necessário a imposição das condições de contorno,

$$\delta N |_{\partial \Sigma_t} = \delta N^i |_{\partial \Sigma_t} = \delta \gamma_{ij} |_{\partial t} = 0 \quad , \quad (2.74)$$

nas quais,  $\partial \Sigma_t$  exprime o limite da hipersuperfície  $\Sigma_t$ .

Ao variarmos  $S_{ADM}$  em relação a  $\{N, \vec{N}, \pi^{ij}, \gamma_{ij}\}$ , as variáveis independentes, obtemos as equações de movimento de Hamilton,

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} = D_i N_j + D_j N_i - 2N K_{ij} \quad , \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} &= -\frac{\delta H}{\delta \gamma_{ij}} = -N \sqrt{\gamma} (R^{ij} - \frac{1}{2} \gamma^{ij} R) + \frac{N}{2\sqrt{\gamma}} (\pi_{cd} \pi^{cd} - \frac{\pi^2}{2}) \gamma^{ij} \\ &\quad - \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ic} \pi_c^j - \frac{1}{2} \pi \pi^{ij}) + \sqrt{\gamma} (D^i D^j N - \gamma^{ij} D_c D^c N) \\ &\quad + D_c (\pi^{ij} N^c) - \pi^{ic} D_c N^j - \pi^{jc} D_c N^i \quad , \quad (2.76) \end{aligned}$$

em que,  $N$  e  $\vec{N}$ , isto é, as funções lapso e deslocamento, são multiplicadores de Lagrange e, portanto, não contribuem para a dinâmica.

Com as equações dinâmicas, é possível, enfim, definir os colchetes de Poisson,

$$\begin{aligned}\{\gamma_{ij}, \gamma_{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} &= 0 \quad , \\ \{\pi^{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} &= 0 \quad , \\ \{\gamma_{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} &= \delta_i^k \delta_j^l \quad .\end{aligned}\tag{2.77}$$

os quais são calculados com respeito às variáveis  $\gamma_{ij}$  e  $\pi^{kl}$ .

Com a definição dos colchetes de Poisson, é possível recuperar as relações de comutação canônicas,

$$\begin{aligned}\{\gamma_{ij}, \gamma_{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} = 0 &\rightarrow [\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\gamma}_{kl}] = 0 \\ \{\pi^{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} = 0 &\rightarrow [\hat{\pi}^{ij}, \hat{\pi}^{kl}] = 0 \\ \{\gamma_{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} = \delta_i^k \delta_j^l &\rightarrow [\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\pi}^{kl}] = i\hbar \delta_i^k \delta_j^l \quad ,\end{aligned}\tag{2.78}$$

visto que,

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad .\tag{2.79}$$

Ou seja, quando as variáveis canônicas do sistema ( $\gamma_{ij}$  e  $\pi^{ij}$ ) são identificadas, é possível transformá-las em operadores quânticos correspondentes ( $\hat{\gamma}_{ij}$  e  $\hat{\pi}^{ij}$ ), assim como introduzir um funcional de onda  $\psi[\gamma_{ab}]$ , definido no espaço de configurações de campo ( $\gamma_{ab}$ ), e caracterizar a ação de  $\hat{\gamma}_{ij}$  e  $\hat{\pi}^{ij}$  no estado  $|\psi\rangle$ ,

$$\hat{\gamma}_{ij} |\psi\rangle \equiv \gamma_{ij} \psi[\gamma_{ab}] \quad ,\tag{2.80}$$

$$\hat{\pi}^{ij} |\psi\rangle \equiv -i\hbar \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}} \psi[\gamma_{ab}] \quad ,\tag{2.81}$$

das quais deriva-se a equação que está no centro de toda abordagem canônica da cosmologia quântica, a equação de Wheeler-DeWitt (análoga à equação de Schrödinger),

$$\hat{H}\Psi[\gamma_{kl}] = \left[ \sqrt{\gamma} \, {}^{(3)}R - \frac{\hbar^2}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma_{cd} - \gamma_{ac} \gamma_{bd} \right) \frac{\delta}{\delta \gamma_{ab}} \frac{\delta}{\delta \gamma_{cd}} \right] \Psi[\gamma_{kl}] = 0 \quad , \quad (2.82)$$

e os vínculos dos momentos,

$$\hat{H}_k \Psi[\gamma_{kl}] = 2i \frac{\delta}{\delta \gamma_{kl}} \Psi[\gamma_{kl}] = 0 \quad , \quad (2.83)$$

com  $\Psi$  a função de onda do Universo.

Para  ${}^{(3)}R \rightarrow ({}^{(3)}R - 2\Lambda)$ , com  $\Lambda \neq 0$ , temos,

$$\hat{H}\Psi[\gamma_{kl}] = \left[ \sqrt{\gamma} \, ({}^{(3)}R - 2\Lambda) - \frac{\hbar^2}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma_{cd} - \gamma_{ac} \gamma_{bd} \right) \frac{\delta}{\delta \gamma_{ab}} \frac{\delta}{\delta \gamma_{cd}} \right] \Psi[\gamma_{kl}] = 0 \quad , \quad (2.84)$$

$$\hat{H}_k \Psi[\gamma_{kl}] = 2D_j \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}} \Psi[\gamma_{kl}] = 0 \quad . \quad (2.85)$$

A equação (2.84) possui dois termos, onde o primeiro termo se comporta como um potencial, com um fator o qual contém a raiz quadrada do determinante da 3-métrica, enquanto o segundo termo dispõe de uma estrutura de energia cinética, uma vez que ele contém segundas derivadas em relação à métrica.

A equação de Wheeler-DeWitt será exposta em maiores detalhes na seção (2.2) do presente Capítulo.

## 2.2 A Equação de Wheeler-DeWitt

Ao quantizar o universo fechado de Friedmann, preenchido com matéria, Bryce DeWitt em seu trabalho<sup>5</sup> de 1967 deu início à cosmologia quântica propriamente dita, ao desenvolver um modelo cosmológico com um número finito de graus de liberdade, o modelo de minisuperespaço, sendo a configuração espacial infinito-dimensional da relatividade geral chamada de superespaço.

Modelos dimensionalmente reduzidos, como são o caso de modelos de minisuperespaço, têm sua importância fundamentada em aspectos como o fato de fornecerem meios de investigação de questões matemáticas, como as condições de contorno, e a estrutura da

---

<sup>5</sup>(DEWITT, 1967).

equação de onda, ou o modo como permitem a comparação de vários esquemas de quantização; assim como podem desempenhar o papel de *toy models*, isto é, modelos simplistas, com o intuito de analisar problemas teóricos os quais não dependem do número de variáveis, como é o caso do papel dos observadores, o problema do tempo, e a emergência de um universo clássico.

Como exemplo de modelo de minisuperespaço, temos o modelo de um universo homogêneo e isotrópico preenchido com um fluido perfeito, o universo de FLRW com apenas um grau de liberdade, isto é, o fator de escala  $a$ , com constante cosmológica  $\Lambda \neq 0$ , o qual será quantizado em seguida.

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento desta seção são: (ATKATZ, 1994; MANSOURI; NASSERI, 1999; GOUSHEH; SEPANGI, 2000; SEN; SCHERRER, 2005; WANG et al., 2005; GORINI et al., 2005; KIEFER, 2007; ANDERSON, 2012; AVELINO; AZEVEDO, 2018; FILHO, 2020; MONERAT et al., 2020; MENDOZA; SILVA, 2021; KIEFER; PETER, 2022; KIEFER; SANDHÖFER, 2022).

### 2.2.1 Quantização do Modelo de FLRW

Seja,

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) = E \quad , \quad (2.86)$$

a hamiltoniana de um sistema em uma dimensão, isto é, a energia total expressa como uma função da coordenada  $x$  e do momento canonicamente conjugado  $p$ , de um sistema clássico.

O primeiro passo, para a quantização canônica deste sistema, ocorre a partir das seguintes transformações:

$$x \rightarrow \hat{x} = x \quad , \quad (2.87)$$

$$p \rightarrow \hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad (2.88)$$

$$E \rightarrow \hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (2.89)$$



Ao realizar as devidas transformações e substituições em (2.86), obtemos,

$$\hat{H}\Psi(x, t) = \left( -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad , \quad (2.90)$$

a equação de Schrödinger independente do tempo, isto é, a equação de movimento quântica do sistema, na qual,  $\hat{H}$  (o operador hamiltoniano resultante das transformações (2.87)(2.88)) age na função de onda  $\Psi(x, t)$ .

De semelhante forma, seja,

$$\dot{a}^2 + \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) = 0 \quad , \quad (2.91)$$

a equação de Friedmann (1.2) para  $\Lambda \equiv 8\pi G \rho_{vac}$ , com  $\rho_{vac}$  a densidade de energia do vácuo, equivalente à hamiltoniana para uma partícula de energia nula, cuja posição é descrita por  $a$  (fator de escala), com,

$$p_a \rightarrow \hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial a} \quad , \quad (2.92)$$

a transformação canônica do momento conjugado de  $a$  e  $k = 1$  (para um universo fechado de raio  $a$ ).

A ação gravitacional de Einstein-Hilbert (2.2), toma a forma,

$$S_{FLRW} \equiv \int dt L_{FLRW} = \frac{3\pi}{4G} \int dt \left[ -\dot{a}^2 a + a \left( 1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right] \quad , \quad (2.93)$$

para o universo fechado de FLRW, com  $a_0 \equiv \sqrt{3/\Lambda}$ .

A partir da ação (2.93), é possível reescrever a equação de Friedmann (2.91) para,

$$p_a \equiv \frac{\partial L_{FLRW}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G} \dot{a} a \quad , \quad (2.94)$$

isto é,

$$p_a^2 + \left( \frac{3\pi}{2G} \right)^2 a^2 \left( 1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) = 0 \quad . \quad (2.95)$$

Ao aplicar a transformação (2.92) em (2.95), temos,

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left( \frac{3\pi}{2G} \right)^2 a^2 \left( 1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right] \Psi(a) = 0 \quad , \quad (2.96)$$

ou seja, a equação de Wheeler-DeWitt para um universo fechado de FLRW, análoga à equação de Schrödinger independente do tempo (para uma partícula com meia unidade de massa e energia nula), cuja função de onda  $\Psi(a)$  é a função de onda do universo, e cujo potencial  $V(a)$  é definido como,

$$V(a) \equiv \left( \frac{3\pi}{2G} \right)^2 a_0^2 \left( \frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a^4}{a_0^4} \right) \quad , \quad (2.97)$$

com  $a_0^2 = G$ , ou seja, o universo quantizado de FLRW é equivalente ao problema unidimensional da mecânica quântica não-relativística.

Portanto, a quantização hamiltoniana suscita em uma equação matematicamente equivalente à equação de Schrödinger da mecânica quântica. Porém, algumas características intrínsecas à equação de Wheeler-DeWitt, a diferencia da equação de Schrödinger e serão expostas no ítem (2.2.2) do presente Capítulo.

## 2.2.2 Peculiaridades da Equação de Wheeler-DeWitt

Iremos destacar três aspectos da equação de Wheeler-DeWitt:

- Definição no espaço de configurações;
- Ausência de um parâmetro de tempo externo;
- Determinismo dos pacotes de onda.

Um dos principais atributos da equação de Wheeler-DeWitt diz respeito a sua definição no espaço de configuração. Por ser uma equação diferencial parcial, e sua solução (a função de onda) não ser definida no espaço, no tempo, ou no espaço-tempo, a equação de Wheeler-DeWitt não depende dos pontos do espaço-tempo, e sim dos graus de liberdade gravitacional e de matéria do sistema.

Ou seja, a equação de Wheeler-DeWitt é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução da função de onda do universo<sup>6</sup> em um espaço de configuração, isto é, um

---

<sup>6</sup>A função de onda do universo é uma função matemática que descreve a amplitude de probabilidade do universo encontrar-se em uma configuração particular.

espaço matemático que descreve as possíveis configurações do sistema, representadas por um conjunto de variáveis que descrevem os graus de liberdade do mesmo.

A segunda característica citada, concerne o chamado problema do tempo da cosmologia quântica, isto é, a ausência de um parâmetro de tempo externo, e a não unicidade de variáveis temporais internas.

Por fim, temos o determinismo dos pacotes de onda, isto é, uma das principais características da equação de Wheeler-DeWitt é o fato dela ser determinística, o que significa que ela dita a evolução da função de onda do universo, e das variáveis do espaço de configuração, dadas condições iniciais.

Em outras palavras, um pacote de ondas, um tipo de solução para a equação de Wheeler-DeWitt, descreve a distribuição de probabilidade de um universo em um determinado conjunto de configurações, ou seja, uma superposição de diferentes configurações possíveis cuja evolução é determinada pela equação. De forma geral, a construção de pacotes de onda em um universo de FLRW tem como objetivo encontrar pacotes de onda cujas distribuições de probabilidades coincidam com caminhos clássicos obtidos na cosmologia clássica.

Ademais, apesar de não haver um parâmetro de tempo externo, a equação possui uma forma hiperbólica, o que afeta como as condições de contorno são impostas. Isso ocorre porque a equação diferencial clássica no tempo é substituída por uma equação diferencial hiperbólica, o que altera o determinismo da teoria.

O fato da equação de Wheeler-DeWitt ser uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólica, significa que ela permite soluções que descrevem ondas que se propagam através do universo, as quais são utilizadas para estudar o comportamento do Cosmo em um nível quântico, assim como fornecer informações sobre suas origens, e a natureza do espaço e do tempo.

Nos aprofundaremos na problemática temporal e suas possíveis soluções no item (2.2.2.1) do presente Capítulo.

### **2.2.2.1 O Problema do Tempo da Cosmologia Quântica**

Como expresso anteriormente, a cosmologia quântica é a aplicação da teoria quântica ao Universo como um todo, e dado que a sua dinâmica é uma característica de grande importância, a noção não bem definida do tempo se torna um problema, uma vez que o papel do tempo é central para a dinâmica.

Este problema surge da divergência entre os significados de tempo, tanto para a teoria canônica clássica, isto é, a relatividade geral, quanto para a teoria quântica usual. Para a relatividade geral, o tempo está em pé de igualdade com o espaço, como manifestado pela invariância do difeomorfismo da teoria, já para a teoria quântica usual, o tempo é um parâmetro externo fixo, assim como na física newtoniana. Em outras palavras, o tempo para a relatividade geral é dinâmico, enquanto que para a teoria quântica ele é absoluto.

Quando ocorre a quantização da relatividade geral através de uma abordagem canônica, mais precisamente de uma equação com dependência de momento, como é o caso da hamiltoniana, este procedimento não nos fornece uma equação de onda com dependência temporal, mas sim uma equação estacionária, isto é,

$$\hat{H}\Psi = 0 \quad , \quad (2.98)$$

a equação de Wheeler-DeWitt, a qual implica em,

$$[\hat{H}, \hat{A}(t)] = 0 \quad , \quad (2.99)$$

a comutação do operador Hamiltoniano com um observável qualquer, ao invés de,

$$i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{A}(t)] \quad , \quad (2.100)$$

como ocorre na teoria quântica usual.

Inúmeras estratégias para estabelecer uma possível resolução deste problema foram desenvolvidas, e podem ser verificadas, de forma mais elaborada e completa, em (ANDERSON, 2017), e em suas referências.

Uma destas estratégias é a incorporação da variável temporal através de campos de matéria ao aplicar o formalismo de Schutz <sup>7</sup>, uma vez que o conteúdo material desempenha o papel de variável temporal neste formalismo.

Dado que este método foi empregue no desenvolvimento do presente trabalho, será exposto no ítem (2.2.2.2) do presente Capítulo.

---

<sup>7</sup>(SCHUTZ; BERNARD, 1970, 1971).

### 2.2.2.2 Campos de Matéria e o Formalismo de Schutz: Uma Solução Para o Problema do Tempo da Cosmologia Quântica.

Em 1970, Schutz desenvolve uma representação de potencial de velocidade para a quadrivelocidade  $U_\nu$  de um fluido perfeito na relatividade geral, expressa em termos de seis potenciais, isto é,

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\phi_{,\nu} + \alpha\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad , \quad (2.101)$$

na qual, os potenciais possuem equações de movimento próprias.

A partir da descrição do potencial de velocidade, deriva-se um princípio variacional, no qual a densidade lagrangiana é  $L = \sqrt{-g}(R + 16\pi p)$ , e da qual define-se a ação,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(R + 16\pi p) \quad , \quad (2.102)$$

cuja variação leva às equações de campo de Einstein, caso ela seja efetuada com respeito à métrica; e às equações de movimento eulerianas, caso a ela seja efetuada com respeito aos potenciais de velocidade; assim, todas as equações conhecidas para um fluido perfeito são recuperadas.

Já em 1971, Schutz introduz a teoria hamiltoniana de um fluido relativístico, ao aplicar o método de Dirac, e transformar as equações da hidrodinâmica do fluido perfeito na forma hamiltoniana, para teorias degeneradas, cuja densidade hamiltoniana corresponde à densidade de energia do fluido.

Portanto, utiliza-se o formalismo de Schutz para descrever o fluido perfeito, com o intuito de selecionar a variável dinâmica do fluido como referência temporal, para então, aplicar a quantização canônica na hamiltoniana resultante, e obter uma equação de Wheeler-DeWitt no minisuperespaço (correspondente à equação de Schrödinger com dependência temporal), uma vez que o acoplamento da gravidade a um fluido perfeito recupera a noção de tempo para alguns casos da cosmologia quântica.

Os fluidos perfeitos têm como característica a não viscosidade, a não condução de calor, e possuem uma equação de estado definida como  $p = \alpha\rho$ , com  $p$  a pressão, e  $\rho$  a densidade de energia. Para a análise aqui desenvolvida, foram considerados dois fluidos perfeitos, o gás de Chaplygin e poeira.

### O gás de Chaplygin.

Sabemos, com base em evidências observacionais, que o Universo encontra-se em um estágio de expansão acelerada, cuja matéria responsável por essa condição ser satisfeita, em algum estágio da evolução cosmológica, é a energia escura. Para que esta expansão acelerada seja verdadeira, é preciso que a pressão  $p$  e a densidade de energia  $\rho$  violem a condição  $\rho + 3p < 0$ .

Existem alguns candidatos a energia escura, dentre eles o gás de Chaplygin, cuja equação de estado é definida como,

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad , \quad (2.103)$$

com  $A$  uma constante positiva (o que implica em um fluido perfeito com pressão negativa<sup>8</sup>), e  $\alpha$  um parâmetro entre 0 e 1, no qual  $\alpha = 1$  para o nosso modelo.

Uma particularidade do gás de Chaplygin é a sua velocidade do som  $v_s$ , definida como,

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho^2} \quad , \quad (2.104)$$

fato não trivial para fluidos com pressão negativa, cuja forma específica para o gás Chaplygin depende das condições e parâmetros específicos do sistema em questão, como os valores de  $A$  e  $\alpha$ , bem como da temperatura e pressão do gás.

A velocidade do som em um gás é normalmente dada pela raiz quadrada da razão entre o calor específico do gás e sua densidade, isto é, o índice adiabático, o qual, para o gás de Chaplygin, pode ser calculado ao utilizar a equação de estado e as propriedades termodinâmicas do gás.

Quando a pressão é negativa, o que ocorre em baixas pressões para o gás Chaplygin, o índice adiabático também se torna negativo. Isso significa que a velocidade do som é imaginária, o que implica que as ondas sonoras não podem se propagar através do gás. Este é um comportamento peculiar do gás Chaplygin, uma vez que a velocidade do som é geralmente um valor real positivo para fluidos normais.

Se considerarmos um universo de FLRW preenchido com gás de Chaplygin, ele descreve a transição entre um estágio de expansão cosmológica desacelerada a um estágio de expansão acelerada, e sua inhomogeneidade é capaz de combinar os papéis de energia e matéria escura,

---

<sup>8</sup>o gás Chaplygin descreve um fluido que se comporta como um gás em altas pressões e um fluido com pressão negativa em baixas pressões.

pois ao passo que a energia escura é responsável pela expansão acelerada do universo, a matéria escura fornece a atração gravitacional que mantém as galáxias unidas.

O que ocorre, é que o gás de Chaplygin possui uma equação de estado que pode conectar o comportamento de um fluido em altas pressões ao comportamento em baixas pressões, e isso permite que ele imite o comportamento da energia escura e da matéria escura. No entanto, deve-se atentar ao fato do modelo de gás Chaplygin ser um modelo teórico.

### Poeira.

Matéria não relativística a qual interage consigo mesma apenas através do campo gravitacional, e a qual é um fluido perfeito cuja equação de estado é definida como  $p = \alpha\rho$ , para  $\alpha = 0$ . Ou seja, poeira, em um modelo de FLRW, é um tipo de matéria que tem pressão nula, o que significa que sua energia interna não contribui para a expansão ou contração do universo, em vez disso, a densidade do fluido de poeira determina a dinâmica do universo através das equações de Friedmann, isto é, as equações de campo de Einstein para este fluido, no modelo de FLRW, são dadas pelas equações de Friedmann, as quais descrevem a evolução do fator de escala ( $a(t)$ ) em função do tempo.

### Aplicação do Formalismo de Schutz.

Seja a métrica de um universo homogêneo e isotrópico de FLRW, caracterizada pelo fator de escala  $a(t)$ , definida como,

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2\right) \quad , \quad (2.105)$$

com  $N$  a função lapso<sup>9</sup>,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$  o elemento de linha de uma esfera de duas dimensões e raio unitário, e  $k = 1$  para um universo espacialmente fechado.

O conteúdo material do modelo analisado no presente trabalho é descrito de acordo com o formalismo de Schutz, no qual (2.101) toma a forma reduzida,

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad , \quad (2.106)$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  ausentes no modelo, devido a ausência de rotação<sup>10</sup>,  $\mu$  a entalpia específica,  $S$  a entropia específica, e  $\phi$  e  $\theta$  sem um significado físico claro.

<sup>9</sup>Na equação (1.1)  $N = 1$ . Devido a invariância de difeomorfismo, a função lapso pode ser eliminada ao considerarmos  $N = 1$ .

<sup>10</sup> $\alpha$  e  $\beta$  estão conectados a rotação.

É possível expressar  $\mu$  em termos dos potenciais, isto é,

$$\mu = \frac{1}{N}(\dot{\phi} + \theta\dot{S}) \quad , \quad (2.107)$$

uma vez que  $U^\nu U_\nu = -1$ , a condição de normalização da quadri-velocidade, e,

$$\mu^2 = -g^{\alpha\beta}(\phi_{,\alpha} + \theta S_{,\alpha})(\phi_{,\beta} + \theta S_{,\beta}) = -g^{00}(\dot{\phi} + \theta\dot{S})^2 = \frac{1}{N^2}(\dot{\phi} + \theta\dot{S})^2 \quad . \quad (2.108)$$

Seja,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K + \int d^4x \sqrt{-g} p \quad , \quad (2.109)$$

a ação de Einstein-Hilbert, acrescida de um termo de contorno  $\partial M$  da variação quadri-dimensional  $M$ , e da ação de Schutz (último termo), a qual descreve a dinâmica do fluido perfeito que interage com o campo gravitacional em termos dos potenciais de velocidade, onde  $h$  é o determinante da métrica induzida  $h_{ij} \equiv \gamma_{ij}$  na hipersuperfície espacial tridimensional,  $K = h_{ij} K^{ij}$  o traço da curvatura extrínseca  $K_{ij}$ ,  $R$  o escalar de curvatura, e  $G$  a constante gravitacional de Newton, para  $8\pi G = 1$  (uma normalização arbitrária escolhida por conveniência para a ação de Einstein-Hilbert).

Da métrica (2.105), deriva-se o escalar de Ricci,

$$R = \frac{6\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{6\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} + \frac{6\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{6}{a^2} \quad , \quad (2.110)$$

no qual,  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij}$ , com,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( -N^2(t), \frac{a^2(t)}{1-r^2}, a^2(t)r^2, a^2(t)r^2 \text{sen}^2\theta \right) \quad , \quad (2.111)$$

as componentes da métrica, e  $g_{ij} = a^2(t)h_{ij}$ , com  $h^{ij}h_{ij} = 3$ , para  $i, j = 1, 2, 3$  os índices espaciais, e  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d}{dt}$ .

Para  $K = h_{ij} K^{ij}$ , com  $K_{ij} = -\frac{1}{2N} \dot{h}_{ij}$ , temos,

$$K = -\frac{3\dot{a}}{Na} \quad (2.112)$$



a curvatura extrínseca.

Ao substituir ambos os resultados para  $R$  e  $K$  na ação gravitacional,

$$S = \frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} R + \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K \quad , \quad (2.113)$$

obtemos,

$$S_g = \int dt \left( -\frac{3\dot{a}^2 a}{N} + 3Na \right) \quad , \quad (2.114)$$

em que,  $d^4x = dt d^3x$ , e  $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ .

De (2.114), é possível inferir a lagrangiana,

$$L_g = -\frac{3\dot{a}^2 a}{N} + 3Na \quad . \quad (2.115)$$

Como visto no ítem (2.1) do presente capítulo, através do formalismo canônico é possível encontrar a hamiltoniana  $H_g$ , isto é, a hamiltoniana gravitacional,

$$H_g = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a \quad , \quad (2.116)$$

em que,  $L_g = (\dot{a}p_a - NH_g)$ , com  $p_a = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{a}}$ , o momento canonicamente conjugado de  $a$ .

Para um fluido perfeito com equação de estado  $p = \alpha\rho$ , tem-se as seguintes relações termodinâmicas:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 + \Pi) \quad ; \\ \mu &= (1 + \Pi) + \frac{p}{\rho_0} \quad ; \\ \Theta dS &= d\Pi + pd \left( \frac{1}{\rho_0} \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.117)$$

com  $\Pi \equiv \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0}$  a energia interna específica,  $\mu = \frac{(\rho + p)}{\rho_0}$  a massa inercial específica,  $\Theta = (1 + \Pi)$  a temperatura,  $S = \ln \frac{(1 + \Pi)}{\rho_0^\alpha}$  a entropia, e  $\rho_0$  a densidade de massa de repouso.

Seja a ação de Schutz,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} p \quad , \quad (2.118)$$

é possível inferir a lagrangiana,

$$L_s = Na^3 p \quad , \quad (2.119)$$

com,

$$p_\theta = 0 \quad (2.120)$$

$$p_S = \theta p_\phi \quad (2.121)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L_s}{\partial \dot{\phi}} = Na^3 \rho_0 \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\phi}} = Na^3 \frac{(p + \rho)}{\mu} U^0 \quad , \quad (2.122)$$

os momentos canonicamente conjugados de  $\theta$ ,  $S$  e  $\phi$ , respectivamente, e para os quais utilizamos  $\mu = \frac{(p+\rho)}{\rho_0}$ , e equações (2.106) e (2.107), cujo único potencial tido não nulo será  $\phi$ , com o intuito de obter as equações de movimento corretas, já que o fluido considerado é o fluido de poeira.

Por consequência, encontra-se,

$$\begin{aligned} H_s &= -Na^3 T_0^0 \\ H_s &= N^3 a^3 [(p + \rho) U^0 U^0 + p g^{00}] \quad , \end{aligned} \quad (2.123)$$

a hamiltoniana do fluido, com  $T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$  o tensor energia-momento para o fluido perfeito, com  $u^\mu$  as componentes da quadri-velocidade.

Seja poeira o fluido em questão, (2.123) toma a forma,

$$H_s = N p_\phi \quad , \quad (2.124)$$

com,  $H_s = N^3 a^3 \rho U^0 U^0 = N^2 U^0 p_\phi = p_\phi N$ , para  $U^0 = \frac{1}{N}$  e  $U^0 N = 1$ .

Portanto, temos,

$$H_p = p_T \quad , \quad (2.125)$$

a hamiltoniana do fluido de poeira, após a aplicação de  $p = 0$ ,  $\mu = 1$ , e  $\phi = T$  (no qual, o tempo foi escolhido como o tempo próprio das partículas de poeira), ou seja, a variável  $T$  pode ser tomada como tempo, uma vez que a hamiltoniana  $H_p$  é linear no momento canonicamente conjugado ao tempo<sup>11</sup>  $p_T$ .

Nosso modelo considera um segundo fluido, isto é, o gás de Chaplygin, portanto, dada a métrica (2.105), e a combinação da equação de estado de Chaplygin (2.103) com a evolução do fator de escala,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho - \frac{k}{a^2} \quad , \quad (2.126)$$

e a conservação da energia relativística, é possível obter,

$$\rho(a) = \left(A + \frac{B}{a^6}\right)^{1/2} \quad , \quad (2.127)$$

a evolução da densidade de energia<sup>12</sup>, com  $B$  uma constante de integração, para a qual,

$$\rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3} \quad , \quad (2.128)$$

para valores de  $B > 0$  e pequenos valores de  $a$ , o que significa que  $\rho(a)$  corresponde a densidade de energia de poeira;

$$\rho \sim \sqrt{A} \quad , \quad (2.129)$$

para  $a \rightarrow \infty$ , o que significa que  $\rho(a)$  corresponde a um universo vazio com constante cosmológica; e,

---

<sup>11</sup>Esta afirmação encontra-se vinculada à condição da derivada com relação ao tempo ser de primeira ordem na equação de Schrödinger.

<sup>12</sup>com a evolução da densidade de energia do tipo matéria escura em períodos primordiais (*early times*), e do tipo energia escura em períodos tardios (*late times*), o modelo de gás de Chaplygin serve como um modelo unificado de matéria e energia escura.

$$\rho \approx \sqrt{A} + a^{-6} \sqrt{\frac{B}{4A}} \quad , \quad (2.130)$$

para uma fase intermediária, com  $a^6 \gg \frac{B}{A}$ , o que significa que  $\rho(a)$  pode descrever uma combinação de matéria e constante cosmológica.

Conforme a literatura<sup>13</sup>, a ação de um fluido perfeito pode ser expressa como,

$$S_M = - \int d^{(D+1)}x \sqrt{-g} \rho \quad , \quad (2.131)$$

portanto, a ação de Schutz (2.118) para o gás de Chaplygin se torna,

$$S_c = - \int d^4x \sqrt{-g} \rho \quad , \quad (2.132)$$

da qual, inferimos a lagrangiana  $L_c = -Na^3\rho$ .

Por consequência, temos a hamiltoniana correspondente ao gás de Chaplygin, isto é,

$$H_c = a^3 \left( \bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} \quad , \quad (2.133)$$

com  $\bar{A} = \frac{A}{\pi^2}$  e  $\bar{B} = \frac{B}{\pi^2}$ .

Por fim, ao combinar todas as equações das hamiltonianas aqui definidas para o modelo de FLRW, com  $k = 1$ , de um universo preenchido com gás de Chaplygin e poeira, tem-se a super hamiltoniana total,

$$H = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a + a^3 \left( \bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} + p_T \quad . \quad (2.134)$$

Ao aplicar o procedimento de quantização canônica ao resultado, obtemos a equação de Wheeler-DeWitt a qual gostaríamos de encontrar, ou seja, uma equação correspondente à equação de schrödinger genuinamente dependente do tempo, como consequência da contribuição linear ao momento associado à  $T$ .

O resultado deste procedimento será melhor explorado no Capítulo 3 do presente trabalho, juntamente com a exposição aprofundada do nosso modelo aqui analisado.

---

<sup>13</sup>(MANSOURI; NASSERI, 1999; MENDOZA; SILVA, 2021).

## 2.3 Condições de Contorno

Para a cosmologia, o Universo é visto como distinto e suas condições de contorno não estão totalmente a nossa disposição, mas tais condições são de suma importância para a compreensão dos primeiros instantes do Universo, e, portanto, crucial para a estrutura fundamental da cosmologia quântica. (KIEFER, 2007).

Quais seriam condições de contorno apropriadas para a equação de Wheeler-DeWitt? Apresentaremos duas das mais discutidas propostas para a definição das condições de contorno para a cosmologia quântica, a proposta de não contorno, também conhecida como proposta de Hartle-Hawking, e o tunelamento quântico do Universo.

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento desta seção são: (VILENKIN, 1982; HARTLE; HAWKING, 1983; VILENKIN, 1993; ATKATZ, 1994; MERZBACHER, 1998; HALLIWELL, 2002; KIEFER, 2007; BAND; AVISHAI, 2013; VILENKIN; YAMADA, 2018; KIEFER; SANDHÖFER, 2022).

### 2.3.1 A Proposta de Não Contorno de Hartle-Hawking

Se a relatividade geral está correta, existiu um ponto de densidade infinita na curvatura do espaço-tempo, conhecido como ponto de singularidade, o qual prevê um início para o Universo, mas o qual não explica como ocorreu este princípio.

Neste contexto, em 1983 Hartle e Hawking<sup>14</sup> propõem a aplicação das ideias desenvolvidas por Hawking na década de 1970, para a singularidade de buracos negros, mas agora à singularidade do início do Cosmo. O objetivo é explicar quanticamente o surgimento do Universo, uma vez que seria inevitável a aplicação da teoria quântica, em um momento no qual a gravidade teria se tornado tão intensa que ocorreria a quebra das leis da física clássica.

Hartle e Hawking, dissertam sobre a importância da especificação dos possíveis estados quânticos, os quais o Universo pode ocupar, ao se aplicar a mecânica quântica a ele como um todo, e a possibilidade desta especificação determinar o seu comportamento dinâmico.

Seja uma superfície finita em tamanho, formada pelo espaço e pelo tempo, a qual não possui limites e/ou bordas. Se tais limites não existem, quais seriam então, as condições físicas do Universo primitivo, necessárias para satisfazer tal condição? A proposta de Hartle-Hawking prevê que se voltarmos no tempo, para o seu princípio, o espaço e o

---

<sup>14</sup>(HARTLE; HAWKING, 1983).

tempo se tornam difusos, e apesar desta superfície dos primórdios do Universo ser suave e finita, não possui um ponto de origem específico.

Fundamentada na formulação de soma sobre histórias de Feynman, da teoria quântica (a qual descreve que se uma partícula se desloca de um ponto  $A$  a um ponto  $B$ , ela não percorre apenas um caminho, mas todos os caminhos possíveis entre os pontos  $A$  e  $B$ ), a proposta de Hartle-Hawking impõe uma integral de caminho à qual atribui-se um peso, isto é, probabilidades relativas às diferentes histórias possíveis do Universo.

A estrutura geométrica da proposta de não contorno de Hartle-Hawking pode ser observada na Figura (8).

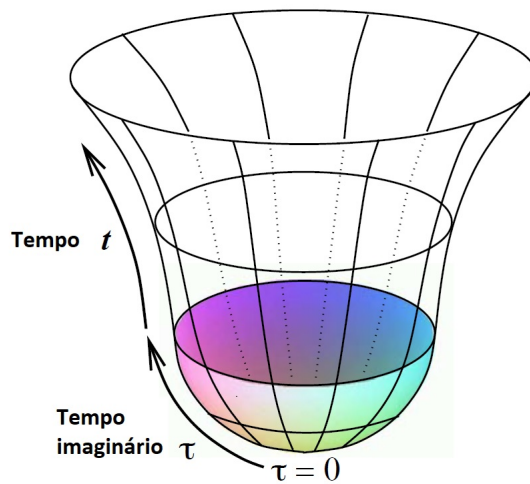


Figura 8: Estrutura geométrica da proposta de não contorno de Hartle-Hawking

Na parte inferior desta estrutura tem-se uma geometria euclidiana (com 4 dimensões no espaço, mas sem dimensões de tempo), e um universo de De Sitter em expansão no topo. A dimensão espacial, isto é, os círculos espaciais permanecem circulares e crescem, enquanto que a dimensão temporal se abre e se torna distinta em relação a dimensão espacial, o que acarreta na não intercalação do espaço e do tempo.

Por ser um princípio de seleção, a proposta de Hartle-Hawking seleciona subconjuntos de histórias do Universo, assim como permite a determinação de quais histórias teriam as maiores contribuições derivadas da geometria descrita na Figura (8), ou seja, esta proposta atribui diferentes probabilidades para diferentes histórias do Universo, e realiza isso através da associação de cada história a uma construção geométrica, na qual a história arredonda-se no tempo imaginário  $\tau$ , que, neste contexto, se comporta como uma direção no espaço.

Seja,

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = \int_{NC} \delta g_{\mu\nu} \delta \phi \exp \frac{-I_E[g_{\mu\nu}, \phi]}{\hbar} , \quad (2.135)$$

uma função de onda para o universo, a qual fornece um peso, isto é, uma amplitude  $(h_{ij}, \phi)$  para diferentes configurações em um momento de tempo, com  $NC \equiv$  não contorno,  $I_E$  a ação euclidiana,  $h_{ij}$  a métrica induzida, e  $\phi$  equivalente às configurações de campo no não contorno.  $h$  e  $\phi$  representam, cada um, um universo cuja amplitude é dada por uma integral de caminho euclidiana na qual não aparece a noção de tempo, e a qual não possui outro contorno a não ser aquele no qual a função de onda é avaliada.

Portanto, o passado e o futuro seriam probabilísticos, isto é, simétricos e se comportariam como uma função de onda, assim como na teoria quântica usual, e descreveriam um conjunto de caminhos, através de uma integral de caminho sobre a métrica euclidiana sem contorno.

É possível compreender a estrutura mais fundamental do Universo, ao derivar a cosmologia clássica de uma teoria quântica, e em vista disso, investigar como a evolução clássica emerge. A proposta de não contorno sugere que quando um universo clássico emerge, este sistema encontra-se em um estágio fundamental, basicamente uma não estrutura, o que implicaria no desenvolvimento de estruturas as quais seguem uma espécie de flecha temporal, do *Big-Bang* em direção ao futuro.

A noção de evolução clássica ocorreria, portanto, quando o Universo atinge um tamanho grande o suficiente, e cuja única forma de se conseguir um universo clássico, com uma noção de tempo determinístico, seria via um período inflacionário, isto é, um momento de rápida expansão.

A proposta de Hartle-Hawking explica como se deu o período inflacionário do Cosmo, ao prever que o Universo primitivo seria levemente não uniforme, o que acarretaria em pequenas variações na intensidade da CMB, em diferentes direções e, conseqüentemente, em uma expansão mais lenta de algumas regiões, favorecendo assim, a eventual formação das galáxias.

A teoria da inflação prevê apenas características genéricas das flutuações primordiais, já a função de onda de não contorno, ou mais precisamente  $|\Psi(h_{ij}, \phi)|^2$ , ou seja, as probabilidades para diferentes universos inflacionários, realiza predições mais precisas. Estas

predições são combinações das probabilidades fornecidas pelas funções de onda, e as probabilidades derivadas do modelo dinâmico descrito por um modelo inflacionário da teoria de cordas.

Segundo Hawking, a cosmologia tem como objetivo construir um modelo de universo o qual faz previsões que podem ser testadas observacionalmente, logo, um dos principais objetivos da cosmologia do conjunto de histórias descrita nesta seção, ou seja, a cosmologia dos multiversos, é tornar esta cosmologia uma estrutura física passível de verificação, a qual seria acessível através das predições probabilísticas realizadas pela proposta. Se o multiverso for uma estrutura de previsão verificável, pode vir a ser utilizado para prever observações em nosso próprio Universo.

### 2.3.2 Tunelamento Quântico do Universo

Análoga ao processo de decaimento  $\alpha$  da mecânica quântica, a segunda proposta aqui descrita será o tunelamento quântico do Universo, uma perspectiva quântica para o surgimento do Cosmo, idealizada inicialmente por Alexander Vilenkin<sup>15</sup> em 1982, e empregue na análise do presente trabalho.

Nas palavras de Vilenkin: “A singularidade (do Universo) não é algo útil a se ter na teoria física, pois você quer que a sua matemática funcione, você não quer que ela quebre.”

Se voltarmos no tempo alguns modelos para o Universo, quase sempre existirá algo, ou uma idealização de algo, que possa ter ocorrido antes. Qual seria uma possibilidade plausível capaz de quebrar essa ressurgência? Vilenkin sugere que a sua proposta, de origem quântica e espontânea de um universo a partir do nada, seria uma alternativa eficaz para encerrar essa percepção, assim como também evitar a singularidade inicial. Halliwell (2002), ademais, aponta que esta proposta substituiria a singularidade inicial ao torná-la uma região classicamente proibida. Onde o nada refere-se a um estado sem espaço clássico, tempo e matéria.

Na cosmologia quântica, o Universo pode ser descrito por uma função de onda  $\Psi(g, \phi)$  definida no superespaço, com  $g$  a 3-geometria, e  $\phi$  configurações de campo de matéria, cuja equação, que desempenha o papel de equação de Schrödinger, é a já discutida equação de Wheeler-DeWitt (2.98), da qual a função de onda  $\Psi$  é solução. Portanto, assim como na proposta de Hartle-Hawking, a proposta de tunelamento quântico lida com uma função de onda  $\Psi$  para o Universo.

---

<sup>15</sup>(VILENKIN, 1982).



No modelo analisado por Vilenkin, um modelo de interação de campos gravitacionais e de matéria (a qual pode ser considerada como sendo a da Teoria da Grande Unificação), supõe-se que um universo origina-se no estado de vácuo simétrico e é descrito pela métrica de FLRW (1.1) com  $k = 1$  (universo fechado)<sup>16</sup>, o qual contrai em  $t < 0$ , atinge uma dimensão mínima em  $t = 0$ , e expande em  $t > 0$ .

Neste modelo, o universo emerge com tamanho finito ( $a = H^{-1}$ ) e velocidade  $\dot{a} = 0$ . Este comportamento é análogo ao de uma partícula quicando em uma barreira de potencial em  $a = H^{-1}$ , com  $a$  (fator de escala) a coordenada da partícula, onde,

$$\left[ \frac{d^2}{da^2} - u(a) \right] \Psi(a) = 0 \quad , \quad (2.136)$$

com  $u(a) = a^2(1 - H^2a^2)$ , o potencial que possui a forma de uma barreira que separa  $a = 0$  e  $a = H^{-1}$ , já que no modelo de Vilenkin o universo tunela de  $a = 0$  para  $a = H^{-1}$ , com  $\Psi$  composta apenas de ondas propagatórias, isto é, nos limites do superespaço,  $\Psi$  deve incluir apenas ondas de saída.

A singularidade inicial é descartada, para este modelo, mesmo com a possibilidade de haver uma singularidade final.

Já o modelo de um universo de FLRW quantizado, como o descrito em (2.2.1), equivale matematicamente ao problema unidimensional da mecânica quântica não-relativística, com potencial  $V(a)$  definido como (2.97),

$$V(a) \equiv \left( \frac{3\pi}{2G} \right)^2 a_0^2 \left( \frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a^4}{a_0^4} \right) \quad ,$$

para este modelo, conforme pode ser observado na Figura (9), onde a região  $0 < a < a_0$  é classicamente proibida para a partícula de energia zero, e classicamente permitida para  $a \geq a_0$ .

A função de onda  $\Psi$  do Universo, solução da equação de Wheeler-DeWitt, é essencial para definir as condições iniciais de um modelo de universo, o qual pretende-se analisar, porém, como a equação de Wheeler-DeWitt possui um número infinito de soluções, torna-se necessário especificar as condições de contorno de  $\Psi$ . Tais condições precisam ser adici-

---

<sup>16</sup>O modelo precisa ser para um universo fechado pois, caso o contrário, seu volume seria infinito e a probabilidade de nucleação seria nula.

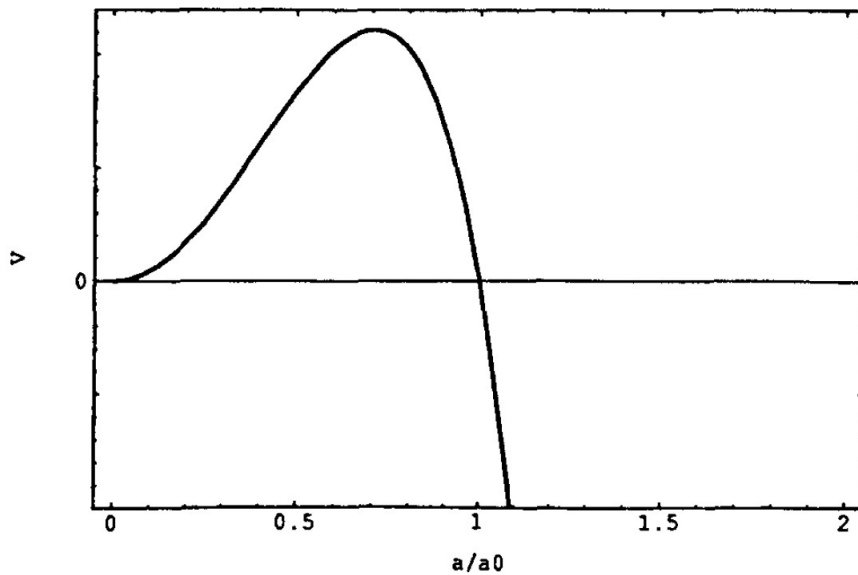


Figura 9: Barreira de potencial para um universo quantizado de FLRW.

onadas à equação de Wheeler-DeWitt como uma lei física independente, visto que não há uma configuração externa ao Universo para determiná-las, como ocorre na mecânica quântica usual.

Portanto, a fim de selecionar uma solução particular da equação de Wheeler-DeWitt, como a função de onda de minisuperespaço<sup>17</sup>, para o caso do universo quantizado de FLRW, as condições de contorno precisam ser especificadas.

Para o modelo de um universo de FLRW, ao considerar a região classicamente permitida, sua função de onda (complexa) deve conter apenas ondas de saída, e representar um universo em expansão. Uma partícula em  $a = 0$  tunela quanticamente através de uma barreira de potencial e surge em  $a = a_0$ , com  $a_0$  uma dimensão finita.

Após definir a função de onda  $\Psi$  para o evento de tunelamento quântico, calcula-se a probabilidade de ocorrer este evento, onde, para o exemplo de um universo quantizado de FLRW descrito em (2.2.1), temos,

$$P \equiv |\langle FLRW(a_0) | NADA \rangle|^2 \simeq \exp \left[ -\frac{3\pi}{G} \int_0^{a_0} da a \left( 1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{1/2} \right], \quad (2.137)$$

com  $\langle FLRW(a_0) | NADA \rangle$  a amplitude de criação quântica.

<sup>17</sup>Onde, em um contexto de minisuperespaço, considera-se apenas um número finito de graus de liberdade.

Se a densidade de energia for a densidade de energia do vácuo, isto é,  $\rho = \rho_{vac}$ ,

$$P(\rho_{vac}) \simeq \exp\left(-\frac{3}{8G^2\rho_{vac}}\right) . \quad (2.138)$$

Dessa forma, para este modelo, verifica-se a emergência de um espaço-tempo clássico de FLRW na região de minisuperespaço, no qual a função de onda oscila.

Se forem escolhidas ondas de entrada e de saída em uma mesma quantidade, para a região classicamente permitida, tem-se a função de onda da proposta de não contorno de Hartle-Hawking, descrita previamente, e a probabilidade não nula do surgimento de um universo colapsante.

Conforme Hartle, uma comparação possível entre ambas as propostas é a de que elas são propostas para a função de onda do Universo mas, que competem quanto às previsões para temas como a estrutura em larga escala.

Já para Vilenkin, a grande diferença entre o seu modelo e o de não contorno de Hartle-Hawking seria, precisamente, as condições iniciais. Onde, em seu modelo, o Universo surge preenchido com vácuo de alta energia, e possui (inicialmente) um tamanho muito pequeno, enquanto que na proposta de Hartle-Hawking, o Universo deve surgir preenchido com vácuo de energia muito baixa, e possuir um tamanho inicial muito grande.

A proposta de tunelamento quântico do Universo seleciona soluções particulares da equação de Wheeler-DeWitt, complexas, enquanto que as soluções da proposta de não contorno de Hartle-Hawking são soluções reais, ou seja, a proposta de tunelamento é imposta no regime oscilatório da função de onda, e a proposta de não contorno no regime euclidiano.

Contudo, apesar das demais diferenças entre as propostas, sabe-se que para ambas a função de onda pode ser bem definida na aproximação semiclássica.

### 2.3.3 Aproximação Semiclássica

No que concerne a aproximação semiclássica, há a possibilidade do sistema analisado ser aproximadamente clássico, isto é, o sistema pode ser descrito classicamente, mas também permite uma descrição quântica.

Um exemplo é o da teoria da gravidade quântica, a qual não possui uma concordân-

cia definitiva mas, se a gravidade semiclássica e o princípio da correspondência<sup>18</sup> forem considerados, um evento como o tunelamento quântico pode ser descrito.

Nomeada a partir da junção dos nomes dos físicos Gregor Wentzel, Hendrik Kramers, e Léon Brillouin, um exemplo de aproximação semiclássica é a aproximação WKB, a qual consiste em um método para a obtenção de soluções aproximadas para a equação de Schrödinger independente do tempo e em uma dimensão. Esta aproximação pode ser utilizada para determinar taxas de tunelamento quântico através de barreiras de potencial.

### 2.3.3.1 Aproximação WKB

Seja,

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0 \quad , \quad (2.139)$$

a equação de Schrödinger, para uma partícula de energia  $E$  que se move em uma região cujo potencial  $V(x)$  é constante, ou varia lentamente com  $x$ .

Para  $V(x)$  constante, as soluções de (2.139) são do tipo  $\Psi(x) = e^{\pm ikx}$ ; se  $V(x)$  é aproximadamente constante, as soluções são do tipo  $\Psi(x) = e^{iu(x)}$ .

A função  $u(x)$  satisfaz a equação não linear,

$$i\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + [k(x)]^2 = 0 \quad , \quad (2.140)$$

equivalente a (2.139), com,

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]} \quad , \quad (2.141)$$

para  $E > V(x)$ , isto é, a região classicamente permitida, e

$$k(x) = -i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]} = -ik(x) \quad , \quad (2.142)$$

para  $E < V(x)$ , isto é, a região classicamente proibida.

---

<sup>18</sup>O princípio da correspondência afirma que no limite dos grandes números quânticos, o comportamento dos sistemas descritos pela teoria da mecânica quântica reproduz a física clássica, isto é, um limite adequado da teoria quântica deve conduzir à concepção de um espaço-tempo clássico.

Seja,

$$u_0'^2 = [k(x)]^2 \quad , \quad (2.143)$$

uma primeira aproximação para  $u$ , cuja integração é definida como,

$$u_0 = \pm \int^x k(x) dx + C \quad , \quad (2.144)$$

uma solução exata se  $V$  constante.

Caso  $V$  varie com  $x$ , temos,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = k^2(x) + i\frac{d^2u}{dx^2} \quad , \quad (2.145)$$

uma outra forma para (2.140), a partir da qual uma sucessiva aproximação pode ser estabelecida.

Obtemos,

$$u_{n+1}(x) = \pm \int^x \sqrt{k^2(x) + iu_n''(x)} dx + C_{n+1} \quad , \quad (2.146)$$

a aproximação  $(n + 1)$ , ao substituir a  $n$ ésima aproximação no lado direito da equação (2.145), resultando em,

$$u_1(x) = \pm \int^x \sqrt{k^2(x) \pm ik'(x)} dx + C_1 \quad , \quad (2.147)$$

para  $n = 0$ .

Como solução geral de (2.140) temos,

$$\begin{aligned} u(x) &= u_+ - i \ln [1 + Ae^{i(u_- - u_+)}] + B \\ &= u_- - i \ln [A + e^{i(u_+ - u_-)}] + B \quad , \end{aligned} \quad (2.148)$$

com  $A$  e  $B$  constantes arbitrárias, onde  $u_-$  e  $u_+$  representam os sinais das equações (2.144), (2.146), e (2.147).

Seja,

$$|k'(x)| \ll |k^2(x)| \quad , \quad (2.149)$$

isto é,  $u_1(x)$  próximo de  $u_0(x)$ , a condição necessária para que (2.146) tenda ao  $u(x)$  correto. Se a condição (2.149) for válida, temos,

$$u_1(x) = \pm \int^x k(x)dx + \frac{i}{2} \ln k(x) + C_1 \quad , \quad (2.150)$$

a aproximação WKB de (2.140), cuja função de onda WKB aproximada é,

$$\Psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp \left[ \pm i \int^x k(x)dx \right] \quad . \quad (2.151)$$

Para  $E > V(x)$  e  $k(x)$  real, ambas as ondas de (2.151) se propagam de forma independente e em direções opostas.

Para  $E < V(x)$ , reescreve-se (2.151) como,

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp \left[ \pm \int^x k(x)dx \right] \quad , \quad (2.152)$$

sua forma real mais reconhecível.

Como aplicação deste método, temos o cálculo do coeficiente de transmissão para uma barreira na qual partículas incidem pela esquerda mas não possuem a energia necessária para atravessar classicamente a barreira de potencial da Figura (10), cujos pontos de retorno são  $a$  e  $b$ .

As soluções da equação de Schrödinger, para as regiões ( $x < a$ ), ( $a < x < b$ ), e ( $b < x$ ) da Figura (10) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \exp \left( i \int_a^x kdx \right) + \frac{B}{\sqrt{k(x)}} \exp \left( -i \int_a^x kdx \right) \quad , \\ \Psi(x) &= \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \exp \left( - \int_a^x kdx \right) + \frac{D}{\sqrt{k(x)}} \exp \left( \int_a^x kdx \right) \quad , \\ \Psi(x) &= \frac{F}{\sqrt{k(x)}} \exp \left( i \int_b^x kdx \right) + \frac{G}{\sqrt{k(x)}} \exp \left( -i \int_b^x kdx \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.153)$$

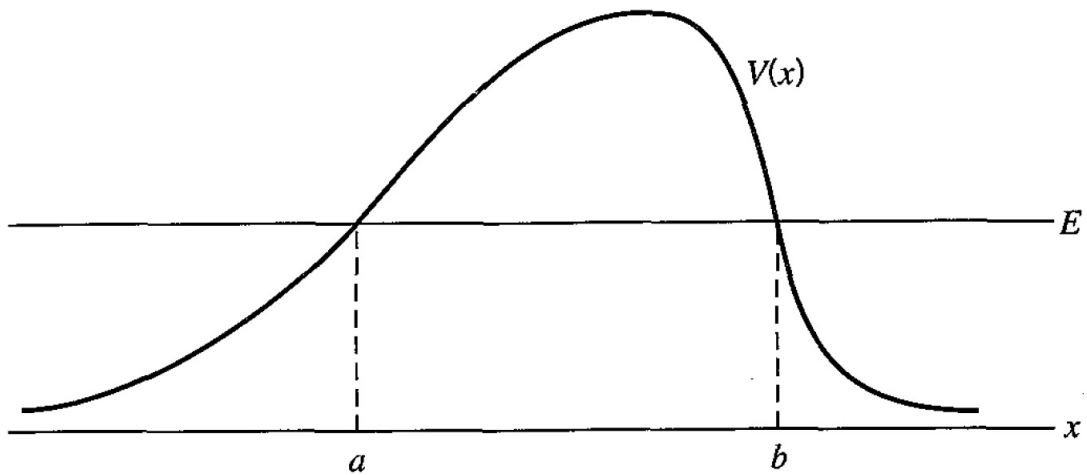


Figura 10: Barreira de potencial para exemplificar a aplicação do método WKB.

Para estabelecer uma relação linear entre os coeficientes de (2.153), utilizam-se fórmulas de conexão as quais servem para vincular soluções WKB do tipo (2.151) e (2.152), na região classicamente acessível, e na região classicamente inacessível, respectivamente, ou ainda, conectar funções de onda entre regiões de  $k(x)$  imaginário e real.

Com isso, temos,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\theta + \frac{1}{2\theta} & i\left(2\theta - \frac{1}{2\theta}\right) \\ -i\left(2\theta - \frac{1}{2\theta}\right) & 2\theta + \frac{1}{2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (2.154)$$

uma matriz  $M$  que conecta os coeficientes de (2.153) para,

$$\theta = \exp\left(\int_a^b k(x)dx\right), \quad (2.155)$$

o qual fornece a medida da espessura e da altura da barreira em função da energia.

A partir da relação entre os coeficientes em (2.154) e do coeficiente de transmissão, isto é,

$$T = \frac{|\Psi_{trans}\sqrt{K_{trans}}|^2}{|\Psi_{inc}\sqrt{K_{inc}}|^2} = \frac{|F|^2}{|A|^2}, \quad (2.156)$$

é possível calcular,

$$T = \frac{1}{|M_{11}|^2} = \frac{4}{\left(2\theta + \frac{1}{2\theta}\right)^2} \quad , \quad (2.157)$$

o coeficiente de transmissão quando se assume que não existe onda incidente da direita, ou seja,  $G = 0$ .

para  $\theta \gg 1$ , temos,

$$T \approx \frac{1}{\theta^2} = \exp\left(-2 \int_a^b k dx\right) \quad , \quad (2.158)$$

o que representa uma barreira alta e larga, e, por consequência,  $\theta$  uma medida da opacidade da barreira.

Um bom resultado para os cálculos de tunelamento quântico do Universo, isto é, a probabilidade de emersão quântica de um universo clássico, é aquele cujos resultados probabilísticos coincidem com os resultados da aproximação semiclássica em regiões próximas ao topo da barreira de potencial, como é o caso dos resultados que serão apresentados no Capítulo 5 do presente trabalho.

No Capítulo 3 do presente trabalho nos aprofundaremos na descrição do modelo definido para a nossa análise.



## 3 O Modelo

O modelo por nós analisado é definido por uma geometria do tipo FLRW com  $k = 1$ , isto é, um universo fechado, com curvatura positiva, preenchido com gás de Chaplygin e poeira<sup>1</sup>.

Por se tratar do cálculo probabilístico do surgimento quântico de um universo clássico através do processo de tunelamento, os dois fluidos perfeitos escolhidos para nossa análise, os quais representam estágios diferentes do conteúdo de matéria do universo, são: (i) poeira, cujo comportamento do potencial efetivo ( $V_{ef}$ ) ao se levar em conta  $\alpha = 0$  para  $p = \alpha\rho$ , exibe um perfil de potencial de barreira, e (ii) gás de Chaplygin, uma vez que modelos com esse tipo de fluido descrevem uma transição suave entre uma expansão desacelerada do universo e a presente época de aceleração cósmica, ou seja, a transição entre um período dominado por poeira e um estágio de expansão acelerada (BOUHMADI-LOPEZ; MONIZ, 2005; GORINI et al., 2005; BERNARDINI; BERTOLAMI, 2013).

O trabalho base utilizado para a construção e desenvolvimento deste Capítulo é: (ROCHA et al., 2022), o qual encontra-se no Anexo A do presente trabalho.

### 3.1 Modelo Clássico

Como previamente mencionado, a métrica de FLRW para um universo fechado ( $k = 1$ ) é definida através da equação (2.105),

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) ,$$

cujo sistema de unidades é o natural, isto é,  $\hbar = 8\pi G = c = 1$ .

Para um universo de FLRW preenchido com gás de Chaplygin e um fluido perfeito, no qual ambos representam o conteúdo de matéria do sistema, considera-se a hamiltoniana,

---

<sup>1</sup>Ambos descritos em maiores detalhes no ítem (2.2.2.2) do presente trabalho.

$$H = \frac{p_a^2}{12a^{1-3\alpha}} + \frac{V_{ef}(a)}{a^{1-3\alpha}} - p_T \quad , \quad (3.1)$$

com,

$$V_{ef}(a) = 3a^2 - a^4 \sqrt{\bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6}} \quad , \quad (3.2)$$

o potencial efetivo, no qual  $\bar{A} = \frac{A}{\pi^2}$  e  $\bar{B} = \frac{B}{\pi^2}$  são os parâmetros associados ao gás de Chaplygin, ou seja, o potencial contém os termos relacionados com a curvatura da seção espacial, e os termos do gás de Chaplygin, com  $p_a$  e  $p_T$  os momentos conjugados a  $a$  (fator de escala) e  $T$ , com  $p_T$  a variável canônica associada ao fluido, ou seja a variável que descreve o fluido perfeito.

A dinâmica clássica deste modelo foi obtida através do formalismo ADM, e do formalismo de Schutz, ambos descritos no Capítulo 2, onde a parte gravitacional da hamiltoniana foi derivada a partir do formalismo ADM, e a parte de matéria derivada a partir do formalismo de Schutz, cuja aplicação resultou na introdução da variável temporal.

Para (3.1), considera-se a equação barotrópica do fluido ( $p = \alpha\rho$ ), com  $-1 \leq \alpha \leq 1$ , em que, para poeira  $\alpha = 0$ , e  $p = \frac{-A}{\rho}$  para o gás de Chaplygin, da qual resulta a super hamiltoniana (2.134),

$$H = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a + a^3 \left( \bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} + p_T \quad ,$$

previamente calculada no Capítulo 2 do presente trabalho.

Como o primeiro termo de (3.1) apresenta problemas de ordenação do operador<sup>2</sup>, já que o processo de quantização será aplicado a  $a$  e  $p_a$ , adotamos as seguintes transformações canônicas<sup>3</sup>,

$$a = \left( \frac{3(1-\alpha)x}{2} \right)^{\frac{2}{3(1-\alpha)}} \quad , \quad (3.3)$$

e,

---

<sup>2</sup>Refere-se aos operadores cuja ordem de aplicação afeta o resultado, isto é, o problema de ordenação de operadores surge quando múltiplas ordenações possíveis dos operadores dão origem a diferentes expressões quantizadas, levando a ambiguidade nos resultados finais. Tais problemas ocorrem na quantização de sistemas clássicos, onde variáveis clássicas são substituídas por operadores que atuam em um espaço de Hilbert.

<sup>3</sup>(SILVA et al., 2009).

$$p_a = p_x a^{\frac{1-3\alpha}{2}} \quad , \quad (3.4)$$

válidas para  $\alpha \neq 1$ , ou seja, introduz-se novas variáveis do espaço de fase com o intuito de resolver tais problemas de ordenação, e simplificar o tratamento quântico do modelo, uma vez que encontrar a ordem correta das variáveis em uma equação pode levar a soluções únicas.

Onde,

$$F = \frac{2}{3(1-\alpha)} p_x a^{\frac{3(1-\alpha)}{2}} \quad , \quad (3.5)$$

a função geradora da transformação, a qual relaciona as variáveis originais com as novas, onde  $a = 0$  para  $x = 0$  em (3.3), na qual, para  $\alpha = 0$ ,  $a$  torna-se maior à medida que  $x$  torna-se maior.

Ao efetuar as devidas substituições das novas variáveis em (3.1), e em (3.2), temos,

$$\bar{H} = \frac{p_x^2}{12} + V_{ef}(x, \alpha) - p_T \quad , \quad (3.6)$$

$$V_{ef}(x, \alpha) = 3 \left[ \frac{3x(1-\alpha)}{2} \right]^{\frac{2+6\alpha}{3(1-\alpha)}} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{3}{2}(1-\alpha)x \right)^{\frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}} \sqrt{A + B \left( \frac{3x(1-\alpha)}{2} \right)^{\frac{4}{\alpha-1}}} \quad . \quad (3.7)$$

Como mencionado previamente, o potencial efetivo ( $V_{ef}$ ), ao se considerar o fluido de poeira, isto é, ( $\alpha = 0$ ), exibe um perfil de potencial de barreira, como pode ser observado na Figura (11), cuja conjuntura torna-se necessária para que sejam possíveis os cálculos probabilísticos de tunelamento quântico aqui analisados<sup>4</sup>.

Com o propósito de analisar todas as possíveis trajetórias do sistema, podemos observar o retrato de fase do modelo, para o qual, cada conjunto de condições iniciais é representado por uma curva ou ponto diferente (MONERAT et al., 2021).

Ou seja, o retrato de fase é uma ferramenta inestimável no estudo de sistemas dinâmicos, por ser uma representação das trajetórias do sistema no plano de fase, o qual é uma exibição visual de algumas características de certos tipos de equações diferenciais.

---

<sup>4</sup>Esta característica, de perfil de barreira de potencial, também é observada quando o fluido considerado é o de radiação.

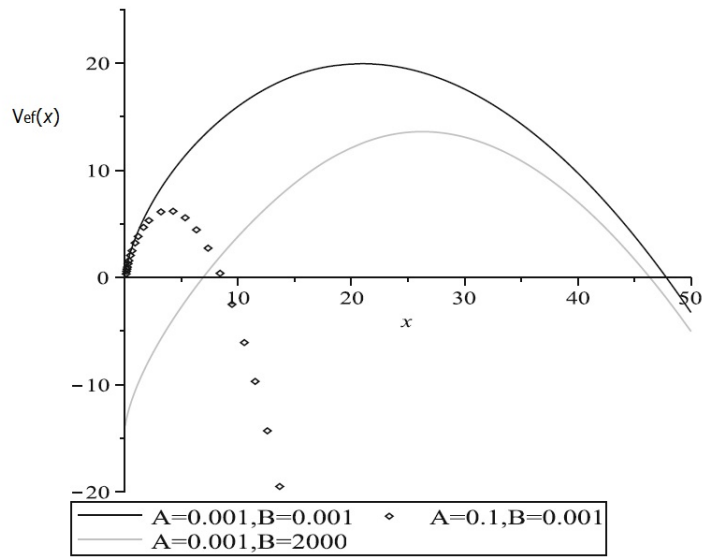


Figura 11: Comportamento do potencial efetivo  $V_{ef}(x)$  para o caso de poeira ( $\alpha = 0$ ). (Imagem: Rocha et al. (2022)).

Para o nosso modelo, a dinâmica clássica é governada pelo sistema de equações de Hamilton,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_x} = \frac{1}{6} p_x \quad ; \\
 \dot{p}_x &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = -\frac{\partial V_{ef}(x)}{\partial x} \quad ; \\
 \dot{T} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_T} = -1 \quad ; \\
 \dot{p}_T &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial T} = 0 \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

com  $\dot{(\ )}$  a derivada com respeito ao tempo cósmico<sup>5</sup>.

Na Figura (12) temos o retrato de fase do nosso sistema, o qual apresenta um ponto fixo do tipo sela hiperbólica, isto é, um ponto fixo que não possui variedades centrais, e o qual, para o nosso modelo, representa o universo estático de Einstein quando a repulsão cosmológica contrabalança a atração gravitacional.

Ademais, o retrato de fase da Figura (12) encontra-se separado em quatro regiões (diferen-

<sup>5</sup>O tempo cósmico é a coordenada temporal que pode ser definida para um universo homogêneo, isotrópico, e em expansão tal que o universo possua a mesma densidade em cada momento no tempo.

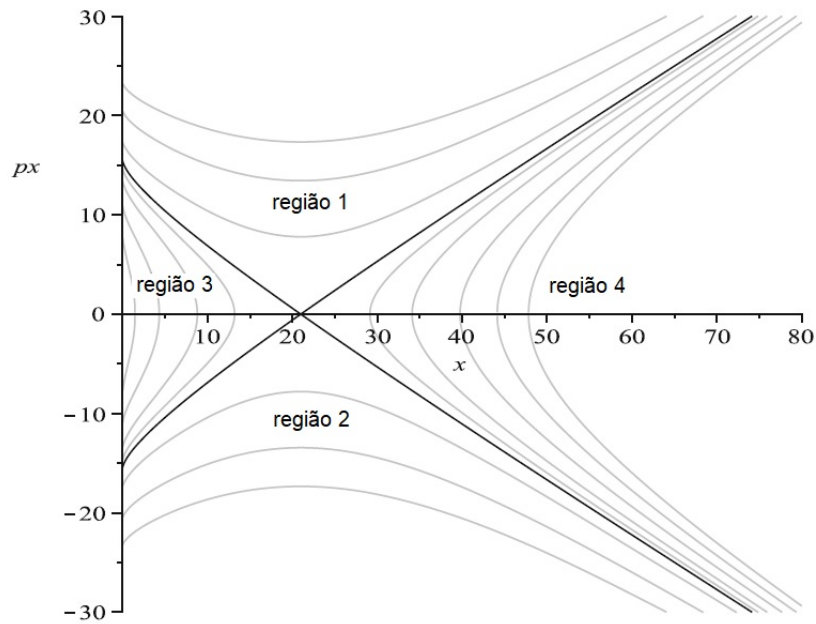


Figura 12: Retrato de fase, no qual as órbitas do plano  $(x, p_x)$  representam modelos de universos de FLRW homogêneos e isotrópicos, com  $A = 0.001$  e  $B = 0.001$ . (Imagem: Rocha et al. (2022)).

tes classes de soluções), por separatrizes, isto é, as órbitas em preto (extensões não-lineares das soluções para  $x$  e  $p_x$ ), cuja energia é a mesma do ponto fixo; onde as soluções para  $x$  e  $p_x$  são válidas somente na vizinhança linear do ponto. As órbitas no plano  $(x, p_x)$  representam modelos de FLRW, isto é, universos homogêneos e isotrópicos, preenchidos com poeira e gás de Chaplygin, cujos parâmetros assumem os valores  $A = 0.001$  e  $B = 0.001$ .

#### Descrição das regiões do retrato de fase da Figura (12):

- Região 1: as órbitas surgem na singularidade em  $x = 0$ , e expandem indefinidamente com  $p_x > 0$ ;
- Região 2: para  $p_x < 0$ , as órbitas representam universos os quais encontram-se inicialmente em seu estado de expansão máxima, e iniciam o processo de colapso até a singularidade  $x = 0, p_x = 0$ .
- Região 3: as órbitas que surgem na singularidade com  $p_x > 0$  expandem até um certo ponto, no qual o processo de contração se inicia, devido à supressão da repulsão cosmológica;
- Região 4: no início, o universo com  $p_x < 0$  e  $x > 20.97834927$  encontra-se em um estado de expansão máxima, passa por um processo de contração até um certo ponto,

no qual as contrações gravitacionais cessam, e a repulsão cosmológica se intensifica ao ponto do universo expandir indefinidamente.

O movimento torna-se restrito às regiões 1 e 2 em cenários cujas órbitas possuem energia maior que a energia do ponto fixo. Assim, como para quando as órbitas possuem energia menor que a energia do ponto fixo, o movimento estará restrito às regiões 3 e 4.

Na Figura (13), encontra-se um exemplo genérico de um retrato de fase com ponto fixo do tipo sela hiperbólica, no qual é possível observar o movimento das órbitas do retrato de fase da Figura (12).

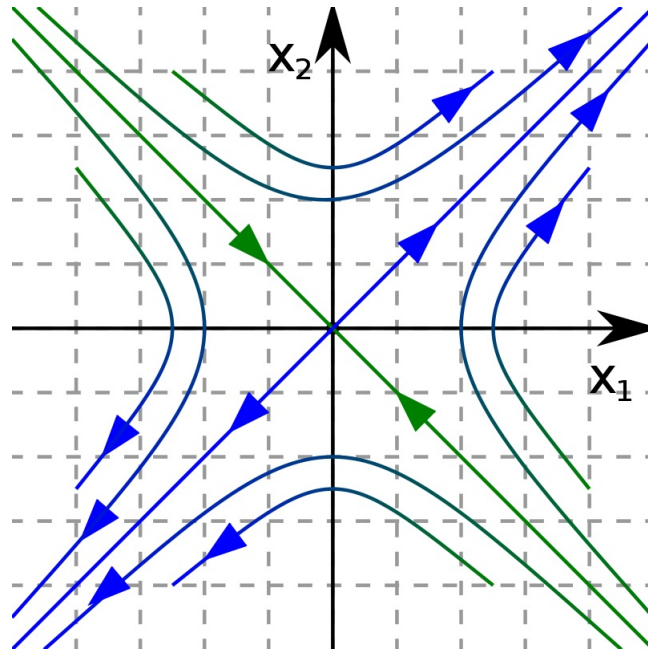


Figura 13: Exemplo de retrato de fase com um ponto fixo do tipo sela hiperbólica.

Ao combinar as primeiras duas equações de (3.8), temos,

$$\frac{1}{12} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{ef}(x)}{\partial x} = 0 \quad , \quad (3.9)$$

o qual será utilizado para investigar numericamente o comportamento do fator de escala  $x(t)$  no tempo cósmico para as quatro regiões do retrato de fase da Figura (12).

Ao considerar condições iniciais para cada uma das quatro regiões do retrato de fase, com  $x(0) = x_0$  valor do fator de escala  $x(t)$  em uma dada superfície de energia, e  $\dot{x}(0)$ ,

$$\dot{x}(0) = \pm \frac{1}{6} \sqrt{12(p_T - V_{ef}(x_0, \alpha))} \quad , \quad (3.10)$$

a derivada temporal do fator de escala, para  $\bar{H} = 0$ , é possível satisfazer a equação de Friedmann (1.2) e assim, resolver numericamente (3.10).

O comportamento do fator de escala  $x(t)$  pode ser observado na Figura (14), do qual infere-se que soluções de expansão são plausíveis, mas limitadas às condições iniciais das regiões 1 e 4 do retrato de fase, como pode ser observado nas Figuras (14.a) e (14.d).

Para as regiões 2 e 3 do retrato de fase, as Figuras (14.b) e (14.c) retratam o processo de colapso gravitacional de universos cuja configuração final é o chamado *Big Crunch*, isto é, o colapso na singularidade.

Apenas soluções cujas condições iniciais são escolhidas na região 4 do retrato de fase, são livres de singularidade (para soluções que descrevem um universo em expansão).

## 3.2 Modelo Quântico

A quantização<sup>6</sup> do modelo seguirá o formalismo de Dirac, no qual as coordenadas são elevadas ao grau de operadores, e seus momentos em operadores diferenciais, da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\hat{p}_x &\rightarrow -\frac{i\partial}{\partial x} \quad , \\ \hat{p}_T &\rightarrow -\frac{i\partial}{\partial T} \quad ,\end{aligned}\tag{3.11}$$

Seja,

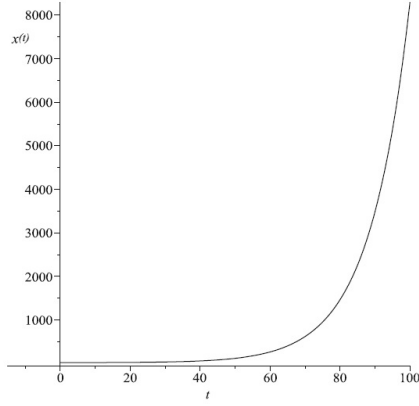
$$\hat{H}\Psi(x, T) = 0 \quad ,\tag{3.12}$$

a equação de Wheeler-DeWitt, na qual  $\Psi(x, T)$  é a função de onda de um universo que descreve as propriedades físicas do Universo como um sistema quântico, e da qual  $x$  e  $T$  são variáveis.

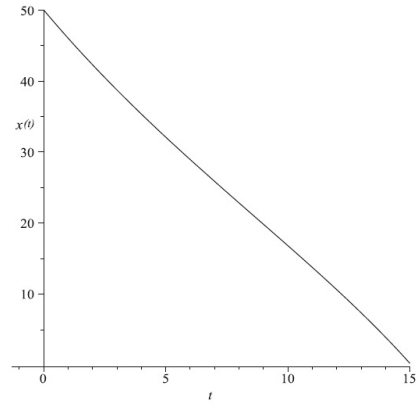
Ao considerar as variáveis canônicas do sistema, isto é,  $x$ ,  $p_x$ ,  $T$ , e  $p_T$ , a equação (3.12) torna-se,

---

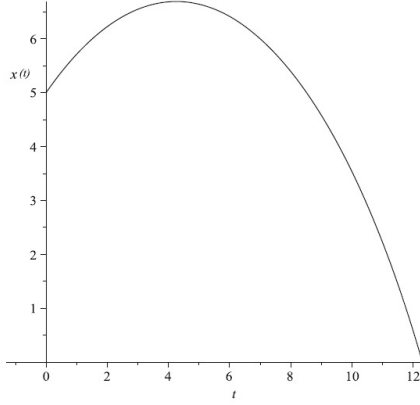
<sup>6</sup>A quantização do sistema torna-se necessária devido a relevância da aplicação deste processo à dinâmica dos primeiros instantes do Universo, como explicado nos Capítulos 1 e 2 do presente trabalho.



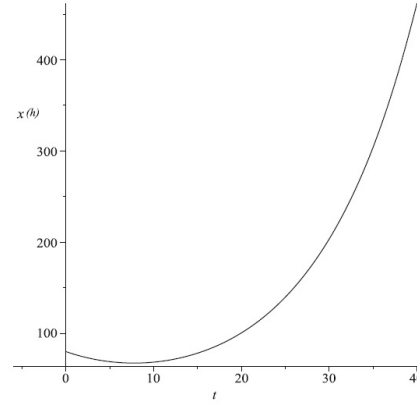
(a) Condições iniciais região 1:  $x(0) = 21$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1478042479$ ,  $p_x(0) = 0.8868254874$ , e energia  $p_T = 20$



(b) Condições iniciais região 2:  $x(0) = 50$ ,  $\dot{x}(0) = -4.093367192$ ,  $p_x(0) = -24.56020315$ , e energia  $p_T = -24.56020315$



(c) Condições iniciais região 3:  $x(0) = 5$ ,  $\dot{x}(0) = 0.8202095112$ ,  $p_x(0) = 4.921257067$ , e energia  $p_T = 12.94657931$



(d) Condições iniciais região 4:  $x(0) = 80$ ,  $\dot{x}(0) = -3.377915430$ ,  $p_x(0) = -31.92020424$ , e energia  $p_T = 12.94657927$

Figura 14: Comportamento do fator de escala  $x(t)$ , com respeito ao tempo cósmico, para o nosso modelo, com  $A = 0.001$  e  $B = 0.001$ . (Imagem: Rocha et al. (2022)).

$$\left( \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{ef}(x, \alpha) \right) \Psi(x, \tau) = -\frac{i\partial}{\partial \tau} \Psi(x, \tau) \quad , \quad (3.13)$$

a equação de Wheeler-DeWitt, mas agora com uma variável temporal, isto é, com a forma de uma equação genuína de Schrödinger dependente do tempo, com  $T = -\tau$ .

Devido à imposição do operador  $\hat{H}$  ser autoadjunto com respeito ao ponto interno<sup>7</sup>, temos,

$$(\Psi, \phi) = \int_0^\infty dx \Psi^*(x, \tau) \phi(x, \tau) \quad , \quad (3.14)$$

<sup>7</sup>(LEMOS, 1996).



conjuntura a qual restringe a estrutura do espaço de Hilbert às funções de onda que satisfazem as condições de contorno estabelecidas por Hartle-Hawking, isto é,

$$\Psi(0, \tau) = \Psi(\infty, \tau) = 0 \quad , \quad (3.15)$$

visto que é imprescindível impor condições de contorno às funções de onda, em razão da existência das mesmas apenas em  $[0, \infty)$ , em que,  $\Psi(0, \tau) = 0$  ou  $\Psi'(0, \tau) = 0$ , com  $()'$  derivada parcial com respeito a  $x$ .

Para o nosso modelo, consideramos,

$$\Psi(x, 0) = D \cdot x \exp(-Cx^2) \quad , \quad (3.16)$$

um pacote de onda inicial<sup>8</sup>, no qual  $D$  e  $C$  são constantes positivas e reais, e o qual satisfaz as condições de contorno (3.15).

As constantes  $D$  e  $C$  da equação (3.16) podem ser determinadas ao se fazer uso da condição de normalização, e do valor médio da energia cinética do fluido de poeira  $E_M$ , dados, respectivamente, por,

$$\int_0^\infty \Psi^+(x, 0)\Psi(x, 0)dx = 1 \quad , \quad (3.17)$$

$$\int_0^\infty \Psi^+(x, 0) \cdot \frac{p_a^2}{12} \Psi(x, 0)dx = E_M \quad . \quad (3.18)$$

Por imposição da norma do pacote de onda ser igual a 1, temos que (3.17) e (3.18) dão origem a um sistema algébrico de duas expressões, as quais podem ser resolvidas para  $D$  e  $C$ , o que conduz aos respectivos valores,

$$D = \left( \frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \quad , \quad (3.19)$$

$$C = 4E_M \quad , \quad (3.20)$$

a partir dos quais é possível obter,

---

<sup>8</sup>(MONERAT et al., 2022).

$$\Psi(x, 0) = \left( \frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} x \cdot \exp(-4E_M x^2) \quad , \quad (3.21)$$

o pacote de onda normalizado dependente do fator de escala  $x$  e do parâmetro  $E_M$ , ou seja, a condição inicial do nosso modelo.

Uma vez estabelecida a condição inicial do modelo, permite-se que a função de onda se propague até um infinito numérico ( $x_{max}$ ), na direção de  $x > 0$ , o qual será estabelecido em  $x_{max} = 100$  para o nosso modelo, isto é, como nossa análise refere-se ao cálculo de probabilidades de tunelamento quântico do universo, apenas consideramos ondas propagatórias, isto é, ondas de saída, como definido na proposta de tunelamento quântico, descrita no item (2.3.2) do presente trabalho.

Como soluções analíticas para (3.13) não são conhecidas, resolvemos (3.13) numericamente ao empregar o método de diferenças finitas, mais especificamente o método de Crank-Nicolson, o qual será descrito em maiores detalhes no Capítulo 4 do presente trabalho.

## 4 Metodologia

### 4.1 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas é uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais ordinárias e parciais, (EDO) e (EDP), por aproximação de derivadas com diferenças finitas, isto é, este método converte EDOs e EDPs em um sistema de equações lineares, as quais podem ser resolvidas ao empregar-se técnicas de álgebra matricial.

As equações diferenciais são aproximadas ao se utilizar fórmulas de diferenças finitas em pontos de uma grade, espaçados uniformemente (Figura 15), e converter uma equação diferencial em um conjunto de equações algébricas (KONG; SIAUW; BAYEN, 2020).

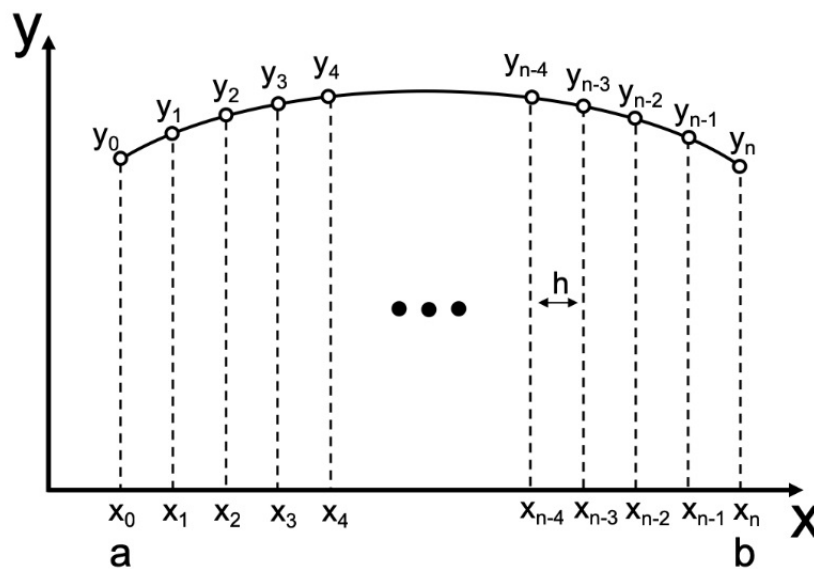


Figura 15: Grade método de diferenças finitas.

Na Figura (15) observa-se um intervalo  $[a, b]$  dividido em  $n$  subintervalos iguais de comprimento  $h$ .

Seja  $y$  uma função suave, cuja derivada<sup>1</sup> é definida como,

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} , \quad (4.1)$$

com,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} , \quad (4.2)$$

uma aproximação do tipo posterior,

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} , \quad (4.3)$$

uma aproximação do tipo anterior, e,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} , \quad (4.4)$$

uma aproximação do tipo central, cuja segunda derivada é definida como,

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} . \quad (4.5)$$

Costuma-se utilizar fórmulas de diferenças centrais devido ao fato delas fornecerem uma melhor precisão aos métodos de diferenças finitas.

Para uma análise de erro, executa-se uma expansão em série de Taylor do erro em torno de  $x$ , onde,

$$e(x; h) = y'(x) - \frac{y'(x+h) - y'(x-h)}{h} = -\frac{1}{12}(y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2))h^2 = -\frac{1}{6}y'''(\eta)h^2 , \quad (4.6)$$

com  $\eta \in (x-h, x+h)$  para diferenças centrais, em que  $e(x; h) = -\frac{1}{2}y''(\xi)h$  com  $\xi \in (x, x+h)$  para diferenças do tipo posterior, e  $e(x; h) = +\frac{1}{2}y''(\xi)h$  com  $\xi \in (x-h, x)$  para diferenças do tipo anterior.

---

<sup>1</sup>(KVAERNO, 2020).

As fórmulas com os termos de erro são,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta) \quad , \quad (4.7)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\eta) \quad , \quad (4.8)$$

para diferenças centrais, e

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi) \quad , \quad (4.9)$$

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi) \quad , \quad (4.10)$$

para diferenças do tipo posterior e anterior, respectivamente.

Se a equação diferencial for linear, as expressões de diferenças finitas serão aplicadas para substituir as derivadas de  $y$  na equação, o que resulta em um sistema de  $n + 1$  equações algébricas lineares, em que, equações algébricas também serão não lineares caso a equação diferencial seja não linear.

De forma resumida, ao implementar o método de diferenças finitas, realizamos os seguintes passos:

- Definimos a equação a resolver, e suas condições de contorno;
- Discretizamos o domínio no qual a equação é definida;
- As derivadas na equação são substituídas por aproximações de diferenças finitas;
- Formamos um sistema de equações lineares com base nas aproximações;
- Resolvemos o sistema de equações resultantes;

Para o nosso modelo, estamos interessados em soluções para EDPs, uma vez que a equação de Wheeler-DeWitt é uma EDP do tipo hiperbólica (como definido no ítem 2.2.2 do presente trabalho). Para este tipo de equação, procura-se uma função com mais de uma variável que satisfaça relações entre várias derivadas parciais. Para se obter uma solução única de uma EDP é necessária alguma informação sobre a solução, geralmente fornecida pelas condições de contorno (LEVEQUE, 1998).

Assim, após performar uma semi-discretização do sistema, também chamada de semi-discretização de EDP, isto é, combinar a discretização de problemas de contorno com técnicas para resolver EDOs, desempenha-se uma análise de estabilidade do sistema.

Devido a sua incondicionável estabilidade<sup>2</sup>, o método escolhido para a nossa análise é o método de Crank-Nicolson, o qual será apresentado no ítem (4.1.1) do presente Capítulo.

#### 4.1.1 Método de Crank-Nicolson

A equação de Wheeler-DeWitt, a ser tratada aqui, é definida como,

$$\left( \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{ef}(x, \alpha) \right) \Psi(x, \tau) = -\frac{i\partial}{\partial \tau} \Psi(x, \tau) \quad ,$$

ou seja, a equação (3.13), com valores discretos para as variáveis  $x$  e  $\tau$  dentro de intervalos de tempo e espaço apropriados, no qual o método de Crank-Nicolson<sup>3</sup> consiste em calcular numericamente os valores da função de onda  $\Psi(x, \tau)$  em pontos de uma grade (Figura 16).

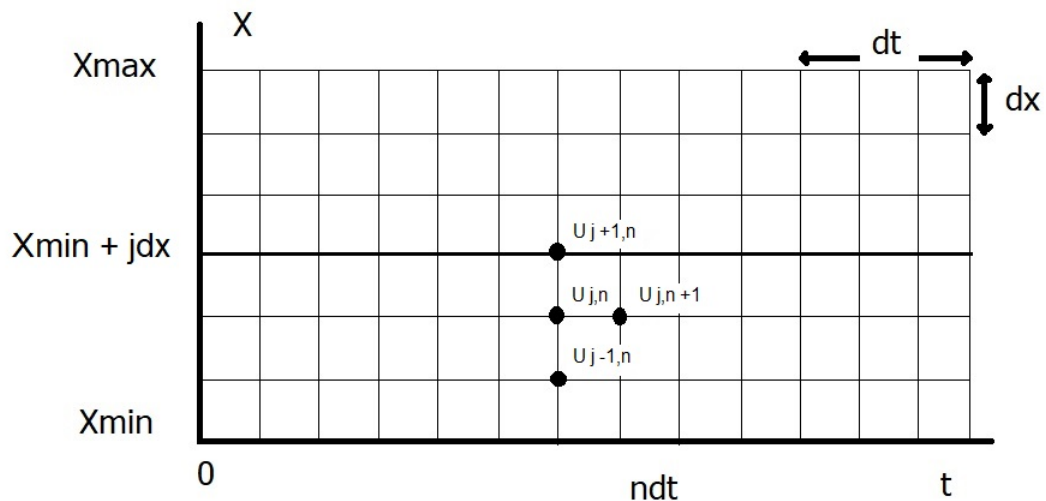


Figura 16: Grade método de Crank-Nicolson - Intervalo  $[0, T]$  dividido em  $N$  subintervalos iguais indexados por  $n = 0, \dots, N$ , e  $[x_{min}, x_{max}]$  dividido em subintervalos  $J$  indexados por  $j = 0, \dots, J$ , para  $U(x, t)$  a função de onda, e cujos tamanhos dos intervalos:  $dt$  na direção temporal;  $dx$  na direção espacial.

<sup>2</sup>(HITAKA, 1994; TEUKOLSKY, 2000).

<sup>3</sup>(CRANK; NICOLSON, 1947).

Vamos aplicar o método a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad . \quad (4.11)$$

Primeiramente, discretizamos no tempo para obter,

$$i\hbar(\Psi_{j,n+1} - \Psi_{j,n}) = dt \hat{H} \Psi_{j,n} \quad , \quad (4.12)$$

com,

$$i\hbar(\Psi_{j,n+1} - \Psi_{j,n}) = dt \hat{H} \Psi_{j,n+1} \quad , \quad (4.13)$$

devido a simetria.

No limite para  $dt \rightarrow 0$ , (4.12) e (4.13) são equivalentes; para  $dt$  finito, podem surgir erros, portanto, consideramos a média,

$$\Psi_{j,n+1} = \left(1 + \frac{idt}{2\hbar} \hat{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{idt}{2\hbar} \hat{H}\right) \Psi_{j,n} \quad , \quad (4.14)$$

para uma maior precisão, com,

$$E = 1 + \frac{idt}{2\hbar} \hat{H} \quad , \quad (4.15)$$

$$E^+ = 1 - \frac{idt}{2\hbar} \hat{H}^+ \quad . \quad (4.16)$$

Com a substituição de (4.15) e (4.16), em (4.14), temos,

$$\Psi_{j,n+1} = E^{-1} E^+ \Psi_{j,n} \quad , \quad (4.17)$$

em que,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_{ef}(x) \Psi \quad , \quad (4.18)$$

é o operador hamiltoniano.

Com o intuito de calcular os valores de  $\Psi$  nos diferentes pontos da grade, executa-se uma expansão em série de Taylor,

$$\Psi_{j+1,n} = \Psi_{j,n} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}dx^2 + \dots \quad , \quad (4.19)$$

$$\Psi_{j-1,n} = \Psi_{j,n} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}dx^2 + \dots \quad , \quad (4.20)$$

da qual é possível encontrar a primeira e a segunda derivadas de  $\Psi$ , ou seja,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\Psi_{j+1,n} - \Psi_{j-1,n}}{2dx} \quad , \quad (4.21)$$

com,

$$\Psi_{j+1,n} - \Psi_{j,n} = 2dx\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad , \quad (4.22)$$

e,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{j+1,n} - 2\Psi_{j,n} + \Psi_{j-1,n}}{dx^2} \quad . \quad (4.23)$$

Com este resultado, obtemos,

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\Psi_{j+1,n} - 2\Psi_{j,n} + \Psi_{j-1,n}}{dx^2}\right) + V_{ef}(x_j)\Psi_{j,n} \quad , \quad (4.24)$$

do qual, infere-se que (4.14),

$$\Psi_{j,n+1} = \left(1 + \frac{idt}{2\hbar}\hat{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{idt}{2\hbar}\hat{H}\right)\Psi_{j,n} \quad ,$$

é a solução<sup>4</sup> do problema em termos do operador hamiltoniano  $\hat{H}$  devido à aproximação por diferenças finitas centrais na variável tempo, com  $j$  e  $n$  índices os quais representam, respectivamente, o índice espacial e o índice temporal, isto é, os pontos de localização da grade.

Como exemplo, para  $j = 0, \dots, 4$ , temos (4.24) na forma de uma matriz tridiagonal ( $M \times M$ ),

---

<sup>4</sup>(MONERAT et al., 2022).



$$\hat{H}\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_1) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_2) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$$

com,

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\Psi_{2,n} - 2\Psi_{1,n} + \Psi_{0,n}}{dx^2} \right) + V_{ef}(x_1)\Psi_{1,n} \quad , \quad (4.25)$$

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\Psi_{3,n} - 2\Psi_{2,n} + \Psi_{1,n}}{dx^2} \right) + V_{ef}(x_2)\Psi_{2,n} \quad , \quad (4.26)$$

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\Psi_{4,n} - 2\Psi_{3,n} + \Psi_{2,n}}{dx^2} \right) + V_{ef}(x_3)\Psi_{3,n} \quad , \quad (4.27)$$

para  $j = 1, 2, 3$ , respectivamente, onde  $\Psi_0 = \Psi_4 = 0$ , devido as condições de contorno,

$$U(0, t) = U(\infty, t) = 0 \quad . \quad (4.28)$$

Para  $j = 0, \dots, n$ , temos,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_1) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_2) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_3) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} \quad \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

onde,

$$E = 1 + \frac{idt}{2} \hat{H} = \begin{pmatrix} b_1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & b_2 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & b_3 & -a & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

com,

$$a = \frac{i\hbar^2 dt}{4mdx^2} \quad , \quad (4.29)$$

$$b_j = 1 + 2a + \frac{idt}{2} V_{ef}(x_j) \quad , \quad (4.30)$$

para (4.17),

$$\Psi_{j,n+1} = E^{-1} E^+ \Psi_{j,n} \quad .$$

Como mencionado no início, o método de Crank-Nicolson permite calcular numericamente os valores de  $\Psi(x, \tau)$ , ou seja, permite obter soluções para (3.13) na forma de pacotes de onda de norma finita, bem definidos em todo espaço de solução, inclusive quando o fator de escala ( $x$ ) vai à zero.

No item (4.1.1.1) do presente Capítulo apresentaremos a aplicação do método ao nosso modelo.

#### 4.1.1.1 Aplicação do Método de Crank-Nicolson ao Modelo

Seja,

$$\Psi(x, 0) = \left( \frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} x \cdot \exp(-4E_M x^2) \quad ,$$

a condição inicial do modelo, isto é, o pacote de onda (3.21) definido em nosso modelo quântico (Capítulo 3).

Tomemos como exemplo, uma energia cinética média do fluido de poeira, com  $\alpha = 0$ ,  $E_M = 19.9$  menor que o valor máximo da energia  $E_{max} = 19.9344758644320$  da barreira de potencial  $V_{ef}$  da Figura (11), para o nosso modelo com fluido de poeira e gás de Chaplygin, com parâmetros  $A = 0.001$  e  $B = 0.001$ .

Ao aplicar o método de Crank-Nicolson é possível obter o comportamento da densidade de probabilidade,

$$\rho = | \Psi(x_{max}, \tau) |^2 \quad , \quad (4.31)$$

Figura (17), na qual  $x_{max} = 100$  (o infinito numérico),  $\tau_{max} = 15$ ,  $N = 9000$  (a discretização espacial), e  $dt = 0.05$ .

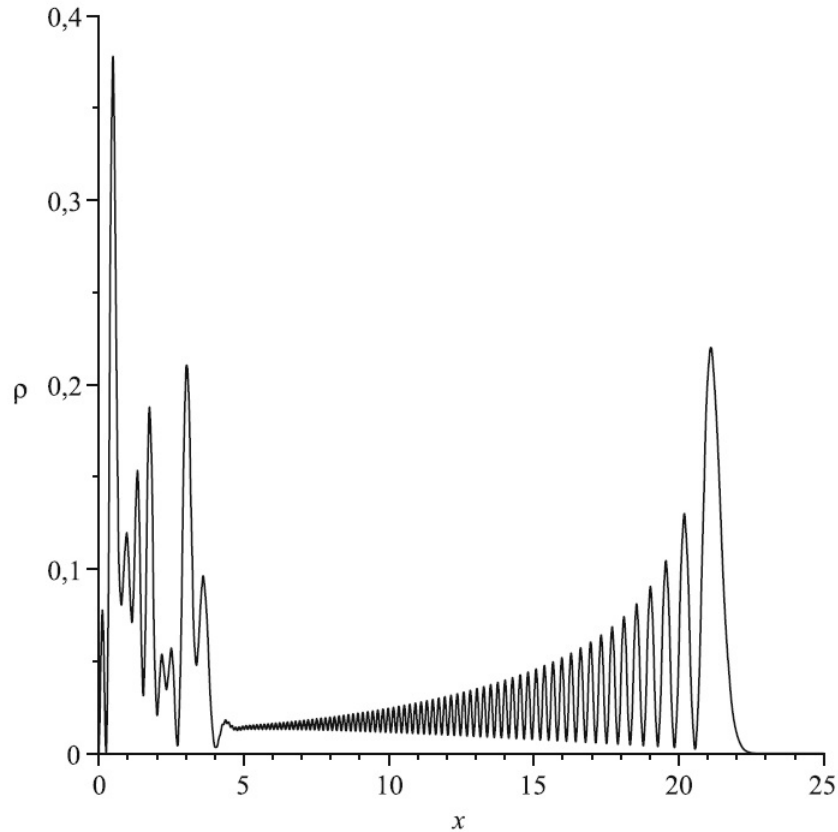


Figura 17: Comportamento da densidade de probabilidade ( $\rho$ ), com  $x_{max} = 100$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $dt = 0.05$ , com o ponto mais à direita da barreira:  $x_2 = 22.0497989282069$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Um dos critérios para avaliar a confiabilidade dos cálculos numéricos da evolução temporal das funções de onda, e a eventual estabilidade do método, é a conservação da norma.

Com esta finalidade, realizamos cálculos para estabelecer o comportamento da norma em termos do número de pontos  $N$  (discretização espacial), para  $\tau = 0$  e  $\tau = \tau_{max}$ , como pode ser observado na Figura (18).

Além dos pacotes de onda da Figura (17) reterem a norma ao longo do tempo com um erro menor que 5%, verifica-se na Figura (18) que a norma tende à 1 em todos os instantes de tempo  $\tau$ , ao aumentarmos o número de pontos  $N$ , o qual foi estabelecido entre  $N = 5000$  e  $N = 35000$ . Podemos assim, concluir a excelente estabilidade do método.

A partir da Figura (17), também é possível determinar que parte do pacote de onda atravessa a barreira de potencial  $V_{ef}$ , apesar da energia  $E_M$  ser menor que  $E_{max}$ .

Ou seja, indica a possibilidade do nosso modelo de universo tunelar quanticamente e surgir

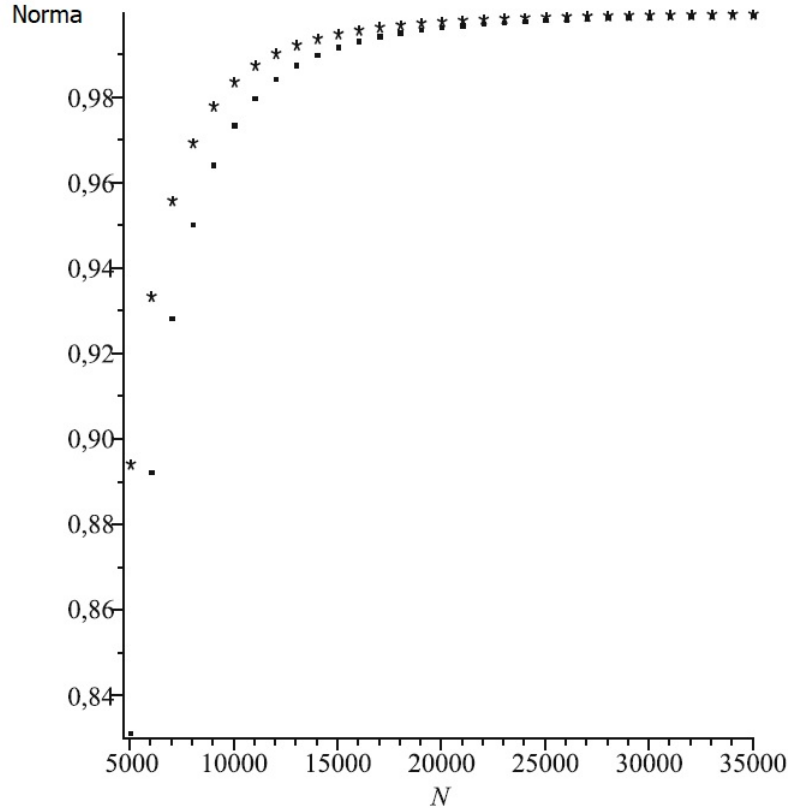


Figura 18: Comportamento da norma em função do número de pontos  $N$  (discretização espacial) em  $\tau = 0$  (asterisco) e  $\tau = \tau_{max}$  (ponto), para  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ , e  $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

do lado direito da barreira de potencial como um sistema clássico de tamanho finito.

A taxa de tunelamento numérico, isto é, a probabilidade de tunelamento pode ser calculada a partir da seguinte relação,

$$PT = \frac{\int_{x_2}^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx}{\int_0^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx} \quad , \quad (4.32)$$

cujo denominador é a norma, com  $x_{max}$  o infinito numérico,  $x_i$  o ponto de retorno da barreira de potencial efetivo (3.7), com  $x_1$  o ponto de retorno à esquerda e  $x_2$  o ponto de retorno à direita.

Os resultados das probabilidades de tunelamento para o nosso modelo serão apresentados no Capítulo 5 do presente trabalho, assim como o comparativo com os resultados das probabilidades de tunelamento WKB (aproximação semiclássica),

$$PT_{WKB} = \frac{4}{\left(2\theta + \frac{1}{2\theta}\right)^2} , \quad (4.33)$$

isto é, equação (2.157), com,

$$\theta = \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{12(V_{ef}(x) - E_M)}\right) , \quad (4.34)$$

bem como um comparativo com resultados obtidos através das mesmas técnicas, mas para o fluido de radiação ao invés do fluido de poeira, previamente calculados por (MONERAT et al., 2007).

## 5 Resultados

Neste Capítulo apresentaremos nossos resultados para as probabilidades de tunelamento quântico em função de (i) a energia cinética média  $E_M$  do fluido de poeira, e (ii) dos parâmetros A e B do gás de Chaplygin.

Também realizaremos um comparativo com resultados para (i) probabilidades de tunelamento WKB, e (ii) probabilidades de tunelamento para um modelo semelhante ao nosso, mas com fluido de radiação ao invés de poeira, cujos resultados foram previamente calculados por (MONERAT et al., 2007).

Os dados da nossa análise foram gerados ao utilizar uma rotina<sup>1</sup> do Mathematica 12.3.1, cujas tabelas, nas quais constam os dados utilizados para os nossos principais resultados, encontram-se no Apêndice A do presente trabalho.

### 5.1 Tunelamento em Função de $E_M$

Como mencionado ao final do Capítulo 4 do presente trabalho, a probabilidade de tunelamento quântico é calculada a partir de (4.32),

$$PT = \frac{\int_{x_2}^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx}{\int_0^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx} \quad , \quad (5.1)$$

e, para a aproximação semiclássica WKB, temos,

$$PT_{WKB} = \frac{4}{\left(2\theta + \frac{1}{2\theta}\right)^2} \quad , \quad (5.2)$$

cujo numerador representa o módulo quadrado da amplitude transmitida da função de

---

<sup>1</sup>(MELLO et al., 2018).

onda WKB, e o denominador o módulo quadrado da amplitude incidente da função de onda WKB, com,

$$\theta = \exp \left( \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{12(V_{ef}(x) - E_M)} \right) . \quad (5.3)$$

O comparativo entre  $PT$  e  $PT_{WKB}$  torna-se relevante pois consideramos a emersão de um sistema clássico a partir do processo de tunelamento quântico (o universo tunela através da barreira de potencial e surge ao lado direito da mesma, como um sistema clássico e finito), cuja comparação entre ambas as probabilidades expõe a existência de uma concordância apenas para valores de energia  $E_M$  próximos ao topo da barreira de potencial, uma vez que esta região corresponde à região semiclássica, na qual a aproximação WKB é válida.

Para  $PT$ , a onda incidente ( $\Psi_I$ ) atinge a barreira de potencial no ponto de retorno  $x_1$ , em que, parte de  $\Psi_I$  é transmitida, e parte é refletida ( $\Psi_R$ ); a parte da onda refletida, isto é,  $\Psi_R$ , atinge  $x = 0$  (uma vez que o fator de escala não pode ser menor que zero), reflete e se torna uma nova onda incidente. Esta nova onda incidente passa pelo mesmo processo de transmissão e reflexão, e sua nova onda transmitida contribui com a onda transmitida original.

Porém, próximo ao topo da barreira de potencial, isto é, na região semiclássica, o  $PT_{WKB}$  calculado quantifica a densidade de probabilidade que atravessa a barreira e vai até o infinito numérico ( $x_{max}$ ) sem retornar, onde o mesmo ocorre para  $PT$  nesta região. Portanto, como a concordância entre  $PT$  e  $PT_{WKB}$  se dá próximo ao topo da barreira, os maiores e melhores valores de  $PT$  são aqueles para os quais  $E_M$ , apesar de menor que a energia máxima  $E_{max}$  do potencial efetivo  $V_{ef}$ , encontra-se muito próximo de  $E_{max}$ .

Sendo assim, ao fixarmos os parâmetros  $A$  e  $B$  do gás de Chaplygin, realizamos cálculos para diferentes valores de  $E_M < E_{max}$ , os quais são calculados para a condição inicial (3.21),

$$\Psi(x, 0) = \left( \frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} x \cdot \exp(-4E_M x^2) ,$$

e cujos resultados podem ser observados na Figura (19), na qual verifica-se que quanto maior o valor de  $E_M$ , maior o valor de  $PT$  (para um dado valor fixo de  $A$  e  $B$ ), no qual  $PT$  encontra-se em escala logarítmica devido aos seus pequenos valores.

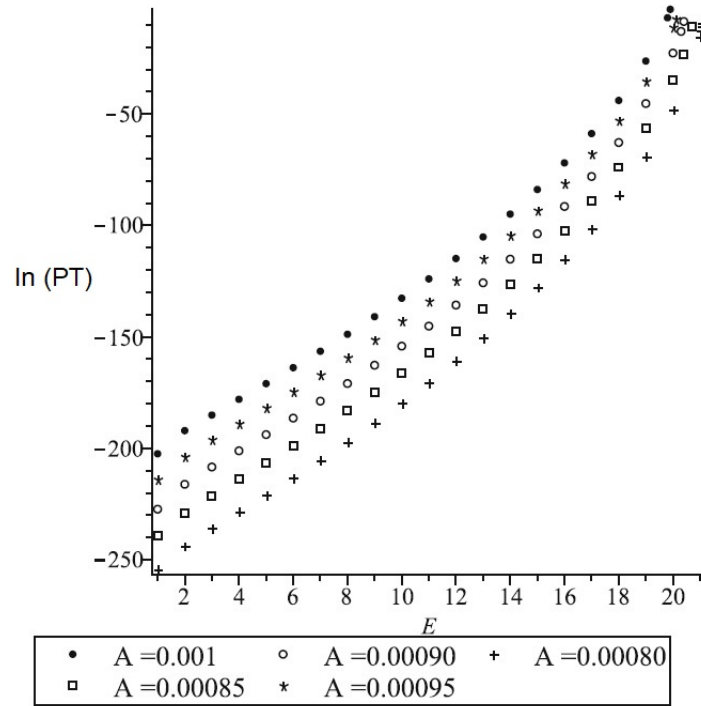


Figura 19: Probabilidades de tunelamento  $PT$  (em escala de  $\log$ ) em função de  $E_M$ , para  $\alpha = 0$  (poeira),  $B = 0.001$ , e diferentes valores de  $A$ , com  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Ao efetuar a comparação dos resultados de  $PT$ , em função de  $E_M$ , com os resultados obtidos para  $PT_{WKB}$  para as mesmas especificações, é possível perceber a concordância entre ambos para valores de  $E_M$  próximos ao topo da barreira (Figura 20).

## 5.2 Tunelamento em Função dos Parâmetros do Gás de Chaplygin

### Dependência de $PT$ com relação ao parâmetro $A$

Fixamos as condições do sistema (com  $B = 0.001$ ), para diferentes valores fixos de  $E_M$ , e variamos os valores de  $A$  com o intuito de obter a dependência de  $PT$  com relação a  $A$ , onde é possível verificar, a partir da Figura (21), que  $PT$  cresce com  $A$ .

### Dependência de $PT$ com relação ao parâmetro $B$

De semelhante forma, para avaliar a dependência de  $PT$  com relação ao parâmetro  $B$ , fixamos as condições do sistema (com  $A = 0.001$ ), para o valor fixo de  $E_M = 19$ , e variamos os valores de  $B$ .



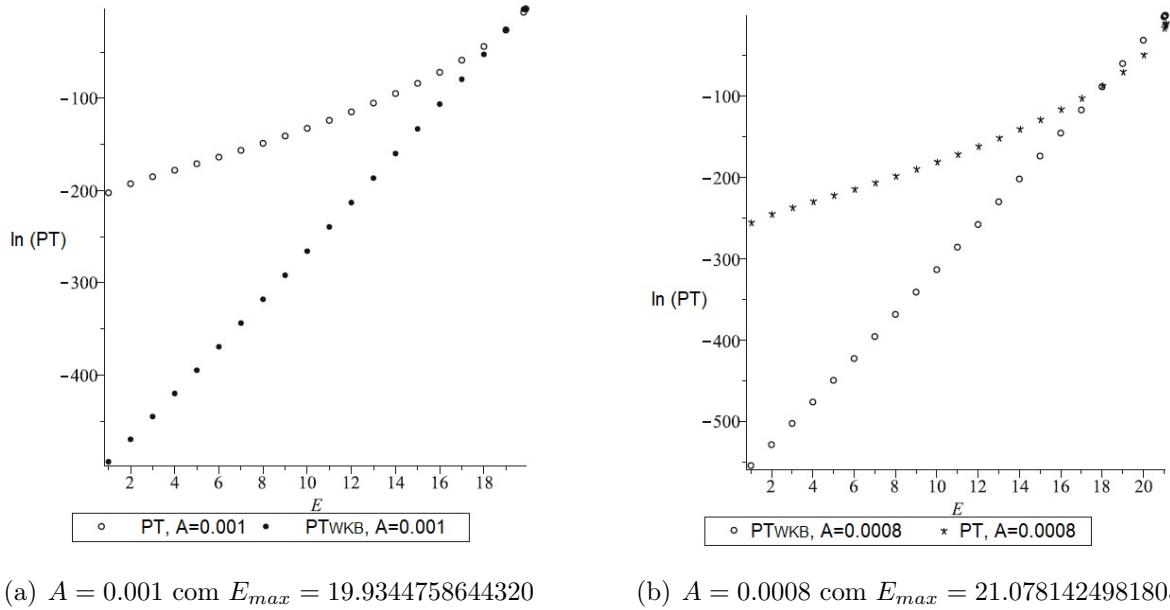


Figura 20: Comparativos entre  $PT$  e  $PT_{WKB}$  (em escala de  $\log$ ) em função de  $E_M$ , para  $\alpha = 0$  (poeira),  $B = 0.001$ , com  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ . (Imagem: Rocha et al. (2022)).

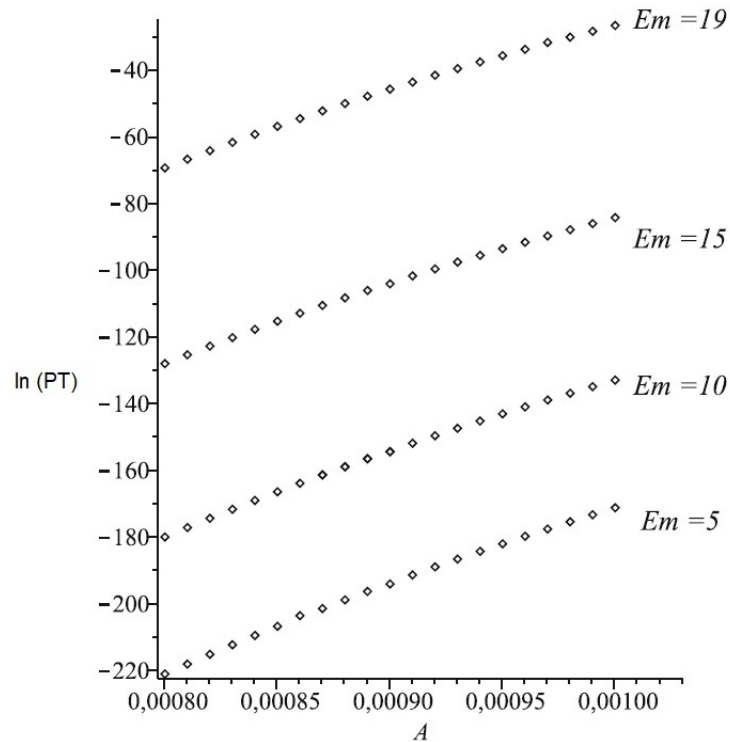


Figura 21: Probabilidades de tunelamento  $PT$  (em escala de  $\log$ ) em função do parâmetro  $A$ , para  $\alpha = 0$  (poeira),  $B = 0.001$ , e diferentes valores fixos de  $E_M$ , com  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Ao analisar os resultados da Figura (22), é possível perceber que  $PT$  também cresce com  $B$ , mas de forma mais lenta, e menos nítida se comparado aos resultados de  $PT$  obtidos para a dependência com relação ao parâmetro  $A$ .

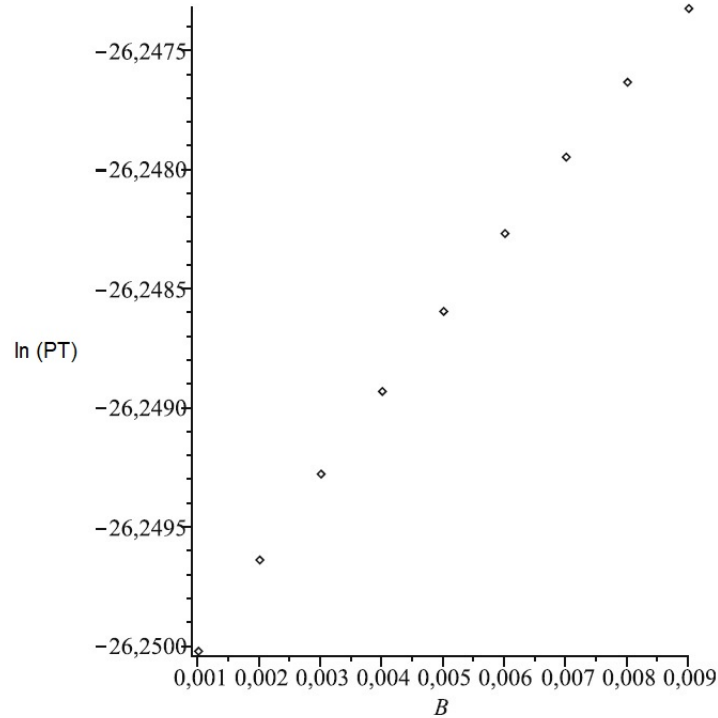


Figura 22: Probabilidade de tunelamento  $PT$  (em escala de  $\log$ ) em função do parâmetro  $B$ , para  $\alpha = 0$  (poeira),  $A = 0.001$ , e  $E_M = 19$ , com  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

### 5.3 Comparativos com Resultados Preexistentes

Previamente calculados por (MONERAT et al., 2007), os cálculos de probabilidade para o modelo com gás de Chaplygin, para um universo homogêneo e isotrópico, mas com fluido de radiação ( $\alpha = \frac{1}{3}$  para  $p = \alpha\rho$ ) no lugar do fluido de poeira ( $\alpha = 0$ ), serão comparados aos resultados probabilísticos do nosso modelo.

O potencial efetivo  $V_{ef}$  para o modelo com fluido de radiação também apresenta um perfil de barreira de potencial, assim como acontece com  $V_{ef}$  para o modelo com fluido de poeira, mas com o topo da barreira muito mais elevado, e, efetivamente, de largura mais estreita, como pode ser observado na Figura (23).

Reproduzimos alguns dos cálculos de  $PT$  para o fluido de radiação, e os comparamos com os nossos resultados de  $PT$  para o fluido de poeira, no qual consideramos os mesmos

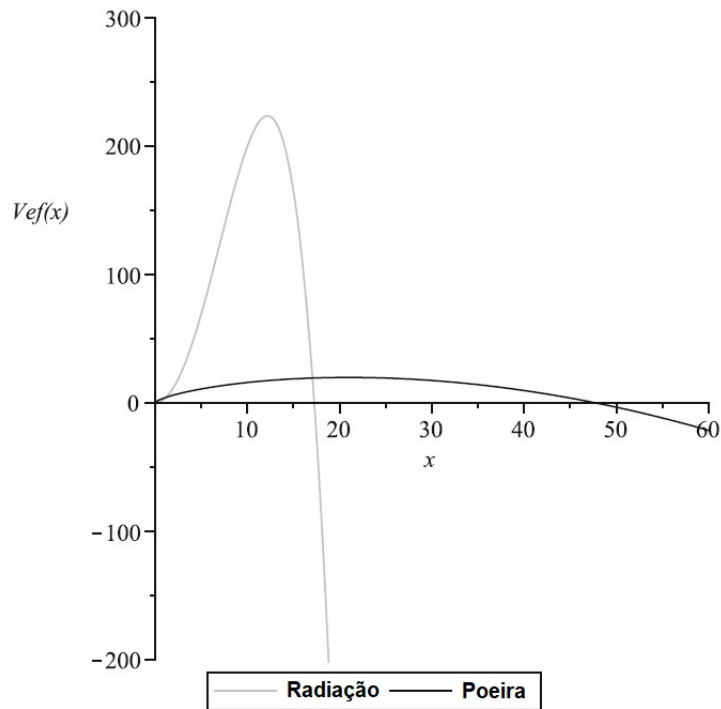


Figura 23: Comparativos entre os potenciais efetivos  $V_{ef}$  para ambos os modelos com gás de Chaplygin e radiação ( $\alpha = \frac{1}{3}$ ), e gás de Chaplygin e poeira ( $\alpha = 0$ ), para  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ ,  $E_{max} = 223.5282022$  para o fluido de radiação, e  $E_{max} = 19.9344758644320$  para o fluido de poeira. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

parâmetros para ambos os modelos, mas com  $\alpha = \frac{1}{3}$  para o fluido de radiação e  $\alpha = 0$  para o fluido de poeira.

Na Figura (24) é possível observar o comparativo de  $PT$  para ambos os modelos, no qual verifica-se que  $PT$  (em escala de  $\log$ ) é expressivamente maior para o nosso modelo com gás de Chaplygin e poeira, no qual, o universo surge classicamente muito maior em tamanho se comparado ao caso de radiação, ou seja, o fator de escala  $x$  assume grandes valores, e para grandes valores de  $x$  o termo do gás de Chaplygin no potencial efetivo  $V_{ef}$  se comporta como um termo do tipo constante cosmológica, isto é, após o processo de tunelamento quântico para o nosso modelo é possível inferir uma eventual fase acelerada para o Universo.

Portanto, os resultados para os cálculos de probabilidade de tunelamento quântico de um sistema clássico, para o modelo de um universo fechado de FLRW ( $k = 1$ ), homogêneo e isotrópico, preenchido com poeira ( $\alpha = 0$ ) e gás de Chaplygin, são considerados resultados excelentes, em virtude do seu bom comparativo com os resultados da probabilidade de tunelamento semiclássico (para os mesmos parâmetros), assim como em razão do comparativo com os resultados para o modelo com fluido de radiação, os quais apontam uma

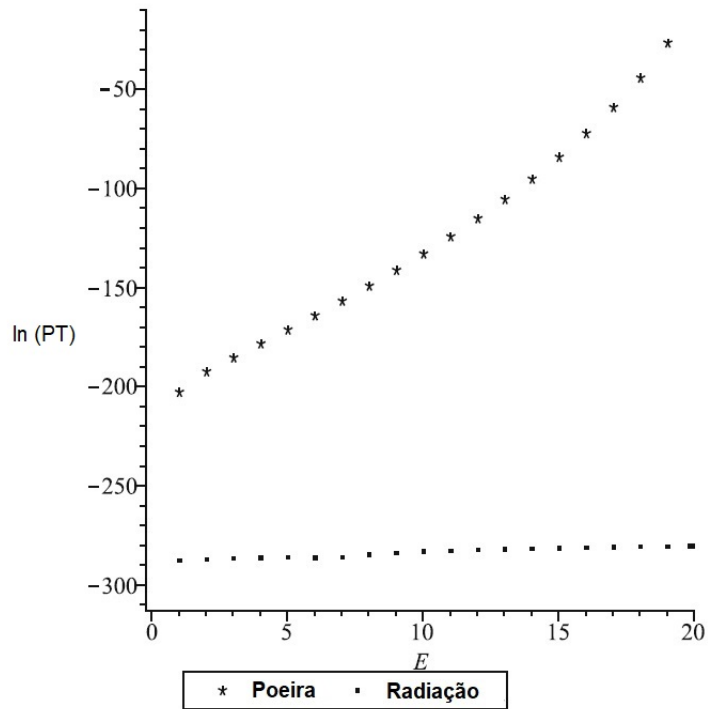


Figura 24: Comparativo entre as probabilidades de tunelamento de modelos com gás de Chaplygin e poeira ( $\alpha = 0$ ) e gás de Chaplygin e radiação ( $\alpha = \frac{1}{3}$ ), para  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ , com  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ . (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

maior probabilidade do universo surgir ao lado direito da barreira de potencial, mesmo com a barreira para o fluido de poeira sendo mais larga do que a barreira para o fluido de radiação.

## 6 Considerações finais

O trabalho aqui apresentado teve como objetivo a análise probabilística do tunelamento quântico de um modelo de universo fechado ( $k = 1$ ) de FLRW, homogêneo e isotrópico, preenchido com poeira e gás de Chaplygin.

Com esse propósito, em um primeiro momento, tracejamos a história evolutiva do nosso objeto de estudo, o Universo, bem como ambientamos os seus estágios iniciais, com foco no Universo primitivo, onde também destacamos possíveis evidências observacionais de seus primórdios, tal qual a CMB.

Ademais, apontamos a divergência das leis da física clássica em escalas do nível de Planck, e a conseqüente necessidade da criação de uma teoria gravitacional capaz de abranger e ser aplicada em escalas nas quais apenas as leis da física quântica são passíveis de atuação.

Assim, como uma alternativa a (ainda) não definitiva teoria da gravitação quântica, foi proposto a utilização das ferramentas disponíveis da cosmologia quântica (a aplicação das leis da física quântica ao Universo) como modo de análise dos primórdios do Cosmo.

Os fundamentos e formalismos, os quais constituem essa área da cosmologia, foram delineados no Capítulo 2 do presente trabalho, com notoriedade para o formalismo hamiltoniano da relatividade geral (o formalismo ADM), base para a descrição da equação fundamental da cosmologia quântica, a equação de Wheeler-DeWitt.

De igual relevância, foram apontados os principais aspectos do formalismo de Schutz, cuja aplicação nos permitiu acrescentar à equação de Wheeler-DeWitt uma variável temporal, uma vez que esse formalismo associa o tempo com os graus de liberdade de um fluido perfeito acoplado à gravidade, o que torna a equação de Wheeler-DeWitt uma expressão correspondente a equação de Schrödinger genuinamente dependente do tempo, a partir da qual nos é concedida a possibilidade de avaliação da dinâmica do sistema.

Com a finalidade de encontrar a condição inicial do modelo, ou seja, a solução para a equação de Wheeler-DeWitt,  $\Psi$  (a função de onda do Universo), delineamos propostas

que fornecem as condições de contorno apropriadas para a nossa análise, com destaque para as propostas de Hartle-Hawking e a de tunelamento quântico do Universo.

Para os resultados, foram construídos pacotes de onda de norma finita como soluções da equação de Wheeler-DeWitt, bem definidos em todo o espaço de configuração (mesmo quando  $x \rightarrow 0$ ), os quais foram produzidos numericamente, uma vez que resultados analíticos não são conhecidos para a equação de Wheeler-DeWitt do modelo, cujo método numérico escolhido foi o método de diferenças finitas de Cranck-Nicolson, devido a sua aplicabilidade a equações do tipo EDP (como é o caso da equação de Wheeler-DeWitt), assim como por sua incondicionável estabilidade.

Após a quantização do modelo (a partir da aplicação do formalismo de Dirac), e a avaliação da estabilidade do sistema através da observação do comportamento da norma, foi possível realizar os vários cálculos das taxas de probabilidade de tunelamento quântico  $PT$  do nosso modelo de universo, ao levar em conta a sua dependência quanto aos parâmetros  $A$  e  $B$  do gás de Chaplygin, bem como sua dependência da energia cinética média  $E_M$  do fluido de poeira para  $\alpha = 0$ . A partir dos resultados, constatamos que  $PT$  cresce com os parâmetros  $A$  e  $B$ , apesar do crescimento com relação a  $B$  (para valores fixos de  $A$  e  $E_M$ ) ser mais lento, e portanto, menos nítido se comparado com o crescimento de  $PT$  em função do parâmetro  $A$  (para valores fixos de  $E_M$  e  $B$ ), assim também, verificamos o crescimento de  $PT$  em função de  $E_M$  (para valores fixos de  $A$  e  $B$ ).

Todos os resultados para  $PT$  foram comparados com os resultados para os cálculos probabilísticos da aproximação semiclássica  $PT_{WKB}$ , a partir dos quais identificamos a concordância para valores de  $E_M < E_{max}$  próximos ao topo da barreira de potencial ( $V_{ef}$ ).

Nossos resultados também foram comparados a resultados preexistentes, calculados por (MONERAT et al., 2007), para um modelo com gás de Chaplygin, mas com fluido de radiação ao invés de poeira, do qual constatamos uma maior probabilidade de tunelamento quântico para o nosso modelo de universo (preenchido com gás de Chaplygin e poeira), apesar da barreira de potencial para este tipo de modelo ser significativamente mais larga que para o modelo com fluido de radiação, onde, após o processo de tunelamento quântico para o caso de poeira, o universo surge classicamente muito maior em tamanho se comparado ao caso de radiação, ou seja, após o tunelamento do nosso modelo de universo com poeira e gás de Chaplygin, o fator de escala  $x$  assume grandes valores, e para grandes valores de  $x$  o termo do gás de Chaplygin no potencial efetivo  $V_{ef}$  se comporta como um termo do tipo constante cosmológica, o que implica em uma fase acelerada para o Universo.

A relevância dos nossos resultados, para o surgimento de um sistema clássico ao lado direito de uma barreira de potencial, através do processo de tunelamento quântico, encontra-se atrelada a sua concordância com os valores da aproximação semiclássica (ao se considerar as mesmas condições e os mesmos parâmetros), bem como, a sua comparação com resultados de um modelo similar contido na literatura, e a previsão de uma fase acelerada para o Universo após o fenômeno de tunelamento, proporcionando assim, um entendimento mais aprofundado ao que concerne os eventos que circundam os primórdios do Universo e, por consequência, a sua notável contribuição ao aperfeiçoamento dos fundamentos da cosmologia quântica, e cuja potencial perspectiva almeja a aplicação do método em modelos mais sofisticados, nos quais consideraremos outras fontes de matéria, tal qual campos escalares, e a sua possível aplicação em modelos anisotrópicos, para os quais será necessária uma extensão do método para  $(2 + 1)$  dimensões e um aperfeiçoamento computacional.

Portanto, a análise aqui apresentada não apenas alcançou o objetivo desejado, mas também contém perspectivas significativas, tanto para a cosmologia quântica quanto para a cosmologia como um todo.

# Referências

- ADAMS, F.; LAUGHLIN, G. *The Five Ages of the Universe: Inside the Physics of Eternity*. illustrated. University of Michigan: Free Press, 1999.
- ANDERSON, E. Problem of time in quantum gravity. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 524, n. 12, p. 757–786, 2012.
- ANDERSON, E. *The problem of time*. [S.l.]: Springer, 2017.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, 2008.
- ATKATZ, D. Quantum cosmology for pedestrians. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 62, n. 7, p. 619–627, 1994.
- AVELINO, P.; AZEVEDO, R. Perfect fluid lagrangian and its cosmological implications in theories of gravity with nonminimally coupled matter fields. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 6, p. 064018, 2018.
- BAND, Y. B.; AVISHAI, Y. *Quantum mechanics with applications to nanotechnology and information science*. [S.l.]: Academic Press, 2013.
- BENNETT, J. O. et al. *The Essential Cosmic Perspective*. Eighth edition. NY, NY: Pearson Education, Inc., 2018.
- BERNARDINI, A. E.; BERTOLAMI, O. The hamiltonian formalism for scalar fields coupled to gravity in a cosmological background. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 338, p. 1–20, 2013.
- BOJOWALD, M. Quantum cosmology: a review. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 78, n. 2, p. 023901, 2015.
- BOUHMADI-LOPEZ, M.; MONIZ, P. V. Frw quantum cosmology with a generalized chaplygin gas. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 6, p. 063521, 2005.
- CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. [S.l.], 1947. v. 43, n. 1, p. 50–67.
- DANIELI, A.; MOLINARI, L. G. *ADM formalism: a Hamiltonian approach to general relativity*. Tese (Doutorado) — Master’s thesis, Università degli Studi di Milano, 2020.
- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Physical Review*, APS, v. 160, n. 5, p. 1113, 1967.



- ESPOSITO, G. An introduction to quantum gravity. *arXiv preprint arXiv:1108.3269*, 2011.
- FILHO, R. O. C. Estudo de modelos cosmológicos alternativos e análise do gás de chaplygin no contexto de expansão do universo. Universidade de São Paulo, 2020.
- FRIEMAN, J. A.; TURNER, M. S.; HUTERER, D. Dark energy and the accelerating universe. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 46, n. 1, p. 385–432, sep 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.11462Fannurev.astro.46.060407.145243>>.
- GARY, D. E. *Physics 202: Into Astronomy. Lecture 26*. October 2005. Fall 2005. Disponível em: <<http://web.njit.edu/~gary/202>>. Acesso em Agosto, 2022.
- GORINI, V. et al. The chaplygin gas as a model for dark energy. In: WORLD SCIENTIFIC. *The Tenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories (In 3 Volumes)*. [S.l.], 2005. p. 840–859.
- GOUSHEH, S.; SEPANGI, H. Wave packets and initial conditions in quantum cosmology. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 272, n. 5-6, p. 304–312, 2000.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.
- HALLIWELL, J. The interpretation of quantum cosmology and the problem of time. *arXiv preprint gr-qc/0208018*, 2002.
- HARTLE, J. B. Prediction in quantum cosmology. *NATO Sci. Ser. B*, v. 156, p. 329–360, 1987.
- HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Wave function of the universe. In: *Euclidean Quantum Gravity*. [S.l.]: World Scientific, 1983. p. 310–325.
- IITAKA, T. Solving the time-dependent schrödinger equation numerically. *Physical Review E*, APS, v. 49, n. 5, p. 4684, 1994.
- JHA, R. Introduction to hamiltonian formulation of general relativity and homogeneous cosmologies. *arXiv preprint arXiv:2204.03537*, 2022.
- KIEFER, C. *Quantum Gravity second edition International Series on Monographs in Physics*. [S.l.]: Oxford science publication, 2007.
- KIEFER, C.; PETER, P. Time in quantum cosmology. *Universe*, MDPI, v. 8, n. 1, p. 36, 2022.
- KIEFER, C.; SANDHÖFER, B. Quantum cosmology. *Zeitschrift für Naturforschung A*, De Gruyter, 2022.
- KONG, Q.; SIAUW, T.; BAYEN, A. *Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists*. [S.l.]: Academic Press, 2020.
- KVAERNO, A. *Partial differential equations and finite difference methods*. November 2020. 2020. Disponível em: Lecture notes for TMA4125/4130/4135 Mathematics 4N/D.

- LEMOS, N. A. Radiation-dominated quantum friedmann models. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 37, n. 3, p. 1449–1460, 1996.
- LEVEQUE, R. J. Finite difference methods for differential equations. *Draft version for use in AMath*, v. 585, n. 6, p. 112, 1998.
- LIDDLE, A. *An introduction to modern cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- LIDDLE, A. R. *The Early Universe*. arXiv, 1996. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9612093>>.
- LYTH, D. H. *The History of The Universe*. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- MANSOURI, R.; NASSERI, F. Model universe with variable space dimension: Its dynamics and wave function. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 12, p. 123512, 1999.
- MELLO, C. G. M. d. S. et al. Uso do método de diferenças finitas no esquema crank-nicolson em cosmologia quântica. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2018.
- MENDOZA, S.; SILVA, S. The matter lagrangian of an ideal fluid. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 18, n. 04, p. 2150059, 2021.
- MERZBACHER, E. *Quantum mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998.
- MISNER, C. W. Magic without magic: John archibald wheeler edt by J. Klauder. *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, p. 453–486, 1972.
- MONERAT, G. et al. The effects of dark energy on the early universe with radiation and an ad hoc potential. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 137, n. 1, p. 1–15, 2022.
- MONERAT, G. et al. Dynamics of the early universe and the initial conditions for inflation in a model with radiation and a chaplygin gas. *Physical Review D*, APS, v. 76, n. 2, p. 024017, 2007.
- MONERAT, G. et al. Quantum cosmology with many fluids and the choice of cosmological time. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 50, n. 1, p. 89–104, 2020.
- MONERAT, G. et al. The dynamics of the early universe in a model with radiation and a generalized chaplygin gas-early universe with radiation and a generalized chaplygin gas. *The European Physical Journal Plus*, Springer Berlin Heidelberg, v. 136, n. 1, p. 34, 2021.
- MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. First edition. New York: Cambridge University Press, 2005.
- PASACHOFF, J.; FILIPPENKO, A. *The Cosmos: Astronomy in the New Millennium*. Third edition. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2007.
- PEEBLES, P. J. E. et al. *Cosmology: Lecture 18. The Early Universe*. October 1994. 1994. Disponível em: <<https://www.scientificamerican.com/article/the-evolution-of-the-universe/>>. Acesso em Agosto, 2022.

- RIEKE, G. H. *The Start of Everything*. September 2014. 2014. Disponível em: <<http://ircamera.as.arizona.edu/NatSci102/NatSci102/lectures/eraplanck.htm>>. Acesso em Agosto, 2022.
- ROCHA, N. da et al. Early universe with dust and chaplygin gas. *The European Physical Journal Plus*, Springer Berlin Heidelberg, v. 137, n. 10, p. 1103, 2022.
- ROSENFELD, L. Zur quantelung der wellenfelder. *Annalen der Physik*, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 397, n. 1, p. 113–152, 1930.
- ROVELLI, C. *Quantum gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.
- RYDEN, B. Introduction to cosmology. The Ohio State University, p. 301, January 2006.
- SARAIVA, M. de F. O.; FILHO, K. de S. O.; MÜLLER, A. M. *Aula 27: Cosmologia – O início do Universo*. June 2001. 2001. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/tex/fis02001/aulas/Aula27-122.pdf>>. Acesso em Agosto, 2022.
- SCHUTZ, J.; BERNARD, F. Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle. *Physical Review D*, APS, v. 2, n. 12, p. 2762, 1970.
- SCHUTZ, J.; BERNARD, F. Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid. *Physical Review D*, APS, v. 4, n. 12, p. 3559, 1971.
- SEN, A.; SCHERRER, R. J. Generalizing the generalized chaplygin gas. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 6, p. 063511, 2005.
- SILVA, E. et al. A canonical transformation and the tunneling probability for the birth of an asymptotically desitter universe with dust. *arXiv preprint arXiv:0903.3933*, 2009.
- TEUKOLSKY, S. A. Stability of the iterated crank-nicholson method in numerical relativity. *Physical Review D*, APS, v. 61, n. 8, p. 087501, 2000.
- TUOWA. *ast0703/cosmology 1: Timeline of The Universe (factsheet) The University of Western Australia*. August 2011. 2011. Disponível em: <<https://www.uwa.edu.au/study/-/media/Faculties/Science/Docs/Timeline-of-the-Universe.pdf>>. Acesso em Agosto, 2022.
- VILENKIN, A. Creation of universes from nothing. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 117, n. 1-2, p. 25–28, 1982.
- VILENKIN, A. Quantum cosmology. *arXiv preprint gr-qc/9302016*, 1993.
- VILENKIN, A.; YAMADA, M. Tunneling wave function of the universe. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 6, p. 066003, 2018.
- WANG, I.-c. et al. Dust and radiation quantum perfect fluid cosmology: selection of time variable. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 37, n. 5, p. 971–976, 2005.
- WEINBERG, S. *The First Three Minutes, updated edition*. [S.l.]: New York: Basic Books, 1993.

WHEELER, J. A. pp. 242-307 in: *Batelle Rencontres 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, eds. CM DeWitt and JA Wheeler. [S.l.]: Benjamin New York, 1968.

WMAP. *Cosmology: The Study of the Universe*. June 2011. 2011. Disponível em: <[wmap.gsfc.nasa.gov](http://wmap.gsfc.nasa.gov)>. Acesso em Agosto, 2022.

## APÊNDICE A – Tabelas

Tabela 2: Resultados para  $\alpha = 0$  (poeira), com  $B = 0.001$ ,  $A = 0.00080$ ,  $E_{max} = 21.0781424981805$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ .

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
21.07	$6.66363 \times 10^{-10}$	22.261012485	23.359118398	$4.44236194638648 \times 10^{-1}$
21.06	$3.07743 \times 10^{-11}$	21.991415985	23.630519207	$2.60186661049263 \times 10^{-1}$
21.04	$3.66387 \times 10^{-13}$	21.624497499	24.001048002	$7.69009312586492 \times 10^{-2}$
21	$5.08979 \times 10^{-16}$	21.115694961	24.517077926	$5.64600250802772 \times 10^{-3}$
20	$8.85937 \times 10^{-49}$	16.602440569	29.214016069	$1.09402274735820 \times 10^{-31}$
19	$1.07226 \times 10^{-69}$	14.264792065	31.741371951	$2.54006477139099 \times 10^{-60}$
18	$5.46636 \times 10^{-87}$	12.486971953	33.715329751	$7.15154667239488 \times 10^{-89}$
17	$3.67537 \times 10^{-102}$	11.010251388	35.395069362	$2.46613946386146 \times 10^{-117}$
16	$7.36285 \times 10^{-116}$	9.7313864241	36.884337215	$1.05298323292470 \times 10^{-145}$
15	$1.93722 \times 10^{-128}$	8.5968774375	38.237195497	$5.63364375587524 \times 10^{-174}$
14	$3.99836 \times 10^{-140}$	7.5749220704	39.486079862	$3.82667195296508 \times 10^{-202}$
13	$4.54771 \times 10^{-151}$	6.6449560786	40.652271915	$3.34827359654494 \times 10^{-230}$
12	$2.20405 \times 10^{-161}$	5.7929371874	41.750632252	$3.83528490235682 \times 10^{-258}$
11	$3.73995 \times 10^{-171}$	5.0089408902	42.792026449	$5.85587448702708 \times 10^{-286}$
10	$1.90037 \times 10^{-180}$	4.2858284199	43.784685743	$1.21628387782904 \times 10^{-313}$
9	$2.5403 \times 10^{-189}$	3.6184684195	44.735023929	$3.51687279532158 \times 10^{-341}$
8	$7.98253 \times 10^{-198}$	3.0032730694	45.648154678	$1.45364289817580 \times 10^{-368}$
7	$5.31395 \times 10^{-206}$	2.4379328434	46.528233551	$8.85693290487120 \times 10^{-396}$
6	$6.74456 \times 10^{-214}$	1.9212977373	47.378692292	$8.24804991974136 \times 10^{-423}$
5	$1.44505 \times 10^{-221}$	1.4533964480	48.202404187	$1.22613440472891 \times 10^{-449}$
4	$4.40831 \times 10^{-229}$	1.0356306431	49.001803774	$3.06989249365875 \times 10^{-476}$

Continua na próxima página

Tabela 2 – continuação da página anterior

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
3	$1.36345 \times 10^{-236}$	0.67120078202	49.778975433	$1.38615356793378 \times 10^{-502}$
2	$1.5958 \times 10^{-244}$	0.36572815518	50.535720202	$1.23504554705470 \times 10^{-528}$
1	$5.63119 \times 10^{-255}$	0.13024323289	51.273607031	$2.46929371956256 \times 10^{-554}$

Tabela 3: Resultados para  $\alpha = 0$  (poeira), com  $B = 0.001$ ,  $A = 0.00085$ ,  $E_{max} = 20.7610874836932$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ .

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
20.07	$1.17509 \times 10^{-11}$	20.820988474	23.783213868	$6.73080169223172 \times 10^{-9}$
20.04	$3.63963 \times 10^{-24}$	18.730114955	25.928147763	$5.98178500126180 \times 10^{-11}$
20	$1.38028 \times 10^{-35}$	17.144286003	27.586870833	$2.90875951783196 \times 10^{-22}$
19	$3.18561 \times 10^{-57}$	14.531307308	30.386304651	$1.72366651166648 \times 10^{-39}$
18	$1.30819 \times 10^{-74}$	12.648347416	32.462075789	$1.23523263260423 \times 10^{-78}$
17	$1.02888 \times 10^{-89}$	11.116078530	34.193960000	$1.08113820152316 \times 10^{-106}$
16	$2.77287 \times 10^{-103}$	9.8035503320	35.713406824	$1.16824390466186 \times 10^{-134}$
15	$1.04152 \times 10^{-115}$	8.6470673833	37.084670820	$1.57703308771923 \times 10^{-162}$
14	$3.14653 \times 10^{-127}$	7.6101182082	38.344893137	$2.69437431015770 \times 10^{-190}$
13	$5.28221 \times 10^{-138}$	6.6696407620	39.517849366	$5.91073682704668 \times 10^{-218}$
12	$3.77711 \times 10^{-148}$	5.8101369073	40.619851954	$1.69180958192118 \times 10^{-245}$
11	$9.40738 \times 10^{-158}$	5.0207731160	41.662671293	$6.43244326533460 \times 10^{-273}$
10	$6.96089 \times 10^{-167}$	4.2938123012	42.655132534	$3.31506605245695 \times 10^{-300}$
9	$1.34204 \times 10^{-175}$	3.6237124262	43.604055555	$2.36958604293488 \times 10^{-327}$
8	$6.01767 \times 10^{-184}$	3.0065939307	44.514840975	$2.41189224552366 \times 10^{-354}$
7	$5.65026 \times 10^{-192}$	2.4399339536	45.391852695	$3.60438421466806 \times 10^{-381}$
6	$9.98749 \times 10^{-200}$	1.9224225104	46.238677198	$8.19868664319760 \times 10^{-408}$
5	$2.93781 \times 10^{-207}$	1.4539655579	47.058304926	$2.96418535305590 \times 10^{-434}$
4	$1.2096 \times 10^{-214}$	1.0358691259	47.853260600	$1.79689214158544 \times 10^{-460}$
3	$4.93367 \times 10^{-222}$	0.67126474310	48.625699010	$1.95540250557053 \times 10^{-482}$
2	$7.15917 \times 10^{-230}$	0.36573416122	49.377476858	$4.17935928848540 \times 10^{-512}$

Continua na próxima página

Tabela 3 – continuação da página anterior

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
1	$1.57285 \times 10^{-240}$	0.13024330376	50.110207582	$1.99490235190530 \times 10^{-537}$

Tabela 4: Resultados para  $\alpha = 0$  (poeira), com  $B = 0.001$ ,  $A = 0.00090$ ,  $E_{max} = 20.4665292083541$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ .

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
20.04	$3.00334 \times 10^{-9}$	20.305990144	23.353445050	$1.37846154117922 \times 10^{-2}$
20.03	$1.02018 \times 10^{-13}$	19.428357791	24.248916306	$2.24326404105508 \times 10^{-5}$
20	$1.99377 \times 10^{-23}$	17.833548245	25.89759024	$9.57038512512012 \times 10^{-14}$
19	$4.75649 \times 10^{-46}$	14.821999067	29.092570282	$1.35531592106532 \times 10^{-41}$
18	$1.54467 \times 10^{-63}$	12.816717775	31.287568899	$2.31522360949340 \times 10^{-69}$
17	$9.05785 \times 10^{-79}$	11.224112129	33.076623349	$4.81766704488168 \times 10^{-97}$
16	$3.23875 \times 10^{-92}$	9.8762600440	34.628151836	$1.23428777606423 \times 10^{-124}$
15	$1.70836 \times 10^{-104}$	8.6971949228	36.018676804	$3.93936763327206 \times 10^{-152}$
14	$7.41114 \times 10^{-116}$	7.6450500109	37.290691227	$1.58664355177835 \times 10^{-179}$
13	$1.79779 \times 10^{-126}$	6.6940246466	38.470705676	$8.18063548931536 \times 10^{-207}$
12	$1.85422 \times 10^{-136}$	5.8270650513	39.576584411	$5.48608041671048 \times 10^{-234}$
11	$6.62047 \times 10^{-146}$	5.0323848901	40.621046610	$4.87128919191228 \times 10^{-261}$
10	$6.96316 \times 10^{-155}$	4.3016292735	41.613531014	$5.84329262638500 \times 10^{-288}$
9	$1.88943 \times 10^{-163}$	3.6288371972	42.561272060	$9.68771616311508 \times 10^{-315}$
8	$1.17954 \times 10^{-171}$	3.0098344188	43.469960456	$2.27886924101688 \times 10^{-341}$
7	$1.52399 \times 10^{-179}$	2.4418843864	44.344168997	$7.84105927928200 \times 10^{-368}$
6	$3.659 \times 10^{-187}$	1.9235180132	45.187638233	$4.09050848565444 \times 10^{-394}$
5	$1.43999 \times 10^{-194}$	1.4545199448	46.003474552	$3.37807578597470 \times 10^{-420}$
4	$7.79549 \times 10^{-202}$	1.0361021072	46.794291448	$4.65790057754268 \times 10^{-446}$
3	$4.13698 \times 10^{-209}$	0.67132787158	47.562312701	$1.14794363798645 \times 10^{-471}$
2	$7.24347 \times 10^{-217}$	0.36574015543	48.309449321	$5.53226968917372 \times 10^{-497}$
1	$5.07521 \times 10^{-228}$	0.13024337462	49.037357985	$5.92742986264540 \times 10^{-522}$

Tabela 5: Resultados para  $\alpha = 0$  (poeira), com  $B = 0.001$ ,  $A = 0.00095$ ,  $E_{max} = 20.1917482467770$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ .

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
20.01	$4.26717 \times 10^{-8}$	19.628622438	23.159143845	$2.96544470309033 \times 10^{-3}$
20	$7.87979 \times 10^{-12}$	18.851250436	23.954250122	$5.23477409415780 \times 10^{-6}$
19	$5.21575 \times 10^{-36}$	15.144094420	27.842013515	$1.67204592543364 \times 10^{-33}$
18	$1.32816 \times 10^{-53}$	12.993346470	30.179589671	$6.42685799134584 \times 10^{-61}$
17	$1.50025 \times 10^{-68}$	11.334715585	32.031711806	$3.00169103346776 \times 10^{-61}$
16	$7.56607 \times 10^{-82}$	9.9496646293	33.617410218	$1.72170165971782 \times 10^{-115}$
15	$5.8635 \times 10^{-94}$	8.7473413476	35.028089886	$1.22696075995239 \times 10^{-142}$
14	$3.77853 \times 10^{-105}$	7.6797707542	36.312348719	$1.10041445255862 \times 10^{-169}$
13	$1.35922 \times 10^{-115}$	6.7181458561	37.499700140	$1.25980791516593 \times 10^{-196}$
12	$2.06312 \times 10^{-125}$	5.8437496565	38.609667966	$1.87043595312294 \times 10^{-223}$
11	$1.07289 \times 10^{-134}$	5.0437967364	39.655966608	$3.66576044472038 \times 10^{-250}$
10	$1.62442 \times 10^{-143}$	4.3092940337	40.648668936	$9.67484810774436 \times 10^{-277}$
9	$6.26748 \times 10^{-152}$	3.6338529064	41.595432798	$3.51762413503772 \times 10^{-303}$
8	$5.49396 \times 10^{-160}$	3.0130012628	42.502242330	$1.80846403286446 \times 10^{-329}$
7	$9.84055 \times 10^{-168}$	2.4437883277	43.373879939	$1.35516372214282 \times 10^{-355}$
6	$3.23309 \times 10^{-175}$	1.9245866260	44.214239715	$1.53400027928672 \times 10^{-381}$
5	$1.71772 \times 10^{-182}$	1.4550607637	45.026542918	$2.73836012104991 \times 10^{-407}$
4	$1.23546 \times 10^{-189}$	1.0363299659	45.813490542	$8.12944155164408 \times 10^{-433}$
3	$8.42332 \times 10^{-197}$	0.6713902001	46.577374056	$4.29593037975292 \times 10^{-458}$
2	$1.80917 \times 10^{-204}$	0.3657461379	47.320157541	$4.42082768020548 \times 10^{-483}$
1	$1.10401 \times 10^{-214}$	0.1302434454	48.043539773	$1.00711837786061 \times 10^{-507}$



Tabela 6: Resultados para  $\alpha = 0$  (poeira), com  $B = 0.001$ ,  $A = 0.001$ ,  $E_{max} = 19.9344758644320$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ .

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19.9	$8.34857 \times 10^{-4}$	19.912949964	22.049798928	$1.09056919606997 \times 10^{-4}$
19.8	$1.38894 \times 10^{-7}$	18.880435977	23.099901530	$2.20367859865101 \times 10^{-4}$
19	$5.62318 \times 10^{-27}$	15.508568628	26.614611533	$4.14592890516908 \times 10^{-26}$
18	$1.13616 \times 10^{-44}$	13.179764900	29.127535969	$3.406988744600880 \times 10^{-53}$
17	$1.6079 \times 10^{-59}$	11.448280120	31.049739800	$3.394101468817760 \times 10^{-80}$
16	$1.1398 \times 10^{-72}$	10.023910786	32.671916866	$4.14245075026068 \times 10^{-107}$
15	$1.28468 \times 10^{-84}$	8.7975817364	34.103692063	$6.26596591623660 \times 10^{-134}$
14	$1.21191 \times 10^{-95}$	7.7143279457	35.400650186	$1.18973547545198 \times 10^{-160}$
13	$6.35274 \times 10^{-106}$	6.7420378535	36.595605893	$2.87589943487092 \times 10^{-187}$
12	$1.39202 \times 10^{-115}$	5.8602151790	37.709858774	$8.99049073062144 \times 10^{-214}$
11	$1.0331 \times 10^{-124}$	5.0550265178	38.758167527	$3.69936407495571 \times 10^{-240}$
10	$2.20491 \times 10^{-133}$	4.3168193654	39.751260583	$2.04377852279185 \times 10^{-266}$
9	$1.18417 \times 10^{-141}$	3.6387684028	40.697228395	$1.55067454448431 \times 10^{-292}$
8	$1.4266 \times 10^{-149}$	3.0161003177	41.602352068	$1.65830991455862 \times 10^{-318}$
7	$3.46686 \times 10^{-157}$	2.4456494218	42.471624472	$2.57620773691694 \times 10^{-344}$
6	$1.52494 \times 10^{-164}$	1.9256304240	43.309092839	$6.02475674582604 \times 10^{-370}$
5	$1.06922 \times 10^{-171}$	1.4555890263	44.118092346	$2.21391673279029 \times 10^{-395}$
4	$9.98365 \times 10^{-179}$	1.0365530395	44.901410329	$1.34789719083793 \times 10^{-420}$
3	$8.653 \times 10^{-186}$	0.67145175933	45.661404755	$1.45508874447286 \times 10^{-445}$
2	$2.22424 \times 10^{-193}$	0.36575210868	46.400091636	$3.04693378733106 \times 10^{-470}$
1	$3.63503 \times 10^{-203}$	0.13024351633	47.119210800	$1.40674229260008 \times 10^{-494}$

Tabela 7: Resultados para  $\alpha = 0$  (poeira), com  $A = 0.001$ ,  $E_M = 19$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ .

<b><math>B = 0.001</math> e <math>E_{max} = 19.9344758644320</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.62318 \times 10^{-27}$	15.508568628	26.614611533	$4.14592890516908 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.002</math> e <math>E_{max} = 19.9344707817318</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.62814 \times 10^{-27}$	15.508595319	26.614601898	$4.14737806690712 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.003</math> e <math>E_{max} = 19.9344656990381</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.63282 \times 10^{-27}$	15.508622011	26.614592263	$4.14882773063588 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.004</math> e <math>E_{max} = 19.9344606163510</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.63732 \times 10^{-27}$	15.508648702	26.614582629	$4.15027789652928 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.005</math> e <math>E_{max} = 19.9344555336701</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.64168 \times 10^{-27}$	15.508675393	26.614572994	$4.15172856475720 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.006</math> e <math>E_{max} = 19.9344504509961</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.64593 \times 10^{-27}$	15.508702084	26.614563359	$4.15317973549360 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.007</math> e <math>E_{max} = 19.9344453683281</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.6501 \times 10^{-27}$	15.508728775	26.614553725	$4.15463140891192 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.008</math> e <math>E_{max} = 19.9344402856669</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.65419 \times 10^{-27}$	15.508755466	26.614544090	$4.15608358518296 \times 10^{-26}$
<b><math>B = 0.009</math> e <math>E_{max} = 19.9344352030119</math></b>				
$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19	$5.65822 \times 10^{-27}$	15.508782157	26.614534455	$4.15753626447760 \times 10^{-26}$

Tabela 8: Resultados para  $\alpha = \frac{1}{3}$  (radiação), com  $B = 0.001$ ,  $A = 0.001$ ,  $E_{max} = 223.5282022$ ,  $\tau_{max} = 15$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N = 9000$  (discretização espacial), e  $x_{max} = 100$ .

$E_M$	$PT$	$x_1$	$x_2$	$PT_{WKB}$
19.9	$1.03232 \times 10^{-280}$	2.6054155174	17.066039688	$5.46902658087064 \times 10^{-497}$
19.8	$9.91595 \times 10^{-281}$	2.5987057198	17.067062738	$4.33402893033764 \times 10^{-497}$
19	$7.12562 \times 10^{-281}$	2.5444510324	17.075235914	$6.77947906256704 \times 10^{-498}$
18	$4.60464 \times 10^{-281}$	2.4751158078	17.085424460	$6.76569034353356 \times 10^{-499}$
17	$2.88407 \times 10^{-281}$	2.4039577511	17.095582199	$6.86365884259176 \times 10^{-500}$
16	$1.73905 \times 10^{-281}$	2.3308086704	17.105709367	$7.08232029638092 \times 10^{-501}$
15	$1.00075 \times 10^{-281}$	2.2554736016	17.115806193	$7.43814695904628 \times 10^{-502}$
14	$5.43312 \times 10^{-282}$	2.1777244358	17.125872908	$7.95741787533848 \times 10^{-503}$
13	$2.73971 \times 10^{-282}$	2.0972914567	17.135909736	$8.67996777924676 \times 10^{-504}$
12	$1.25522 \times 10^{-282}$	2.0138518811	17.145916900	$9.66531358242420 \times 10^{-505}$
11	$5.05675 \times 10^{-283}$	1.9270139973	17.155894621	$1.10027932926446 \times 10^{-505}$
10	$1.69879 \times 10^{-283}$	1.8362946354	17.165843117	$1.28287947115992 \times 10^{-506}$
9	$4.31458 \times 10^{-284}$	1.7410861929	17.175762602	$1.53571386567315 \times 10^{-507}$
8	$6.55391 \times 10^{-285}$	1.6406066018	17.185653289	$1.89352727406723 \times 10^{-508}$
7	$1.98793 \times 10^{-286}$	1.5338200242	17.195515388	$2.41546227577630 \times 10^{-509}$
6	$1.39035 \times 10^{-286}$	1.4193041259	17.205349107	$3.20844877468783 \times 10^{-510}$
5	$2.12499 \times 10^{-286}$	1.2950118710	17.215154650	$4.48199514402724 \times 10^{-511}$
4	$1.1499 \times 10^{-286}$	1.1578021228	17.224932220	$6.69542491964104 \times 10^{-512}$
3	$5.70509 \times 10^{-287}$	1.0023838957	17.234682019	$1.10424931805836 \times 10^{-512}$
2	$2.43896 \times 10^{-287}$	0.81841198810	17.244404242	$2.17004947676598 \times 10^{-513}$
1	$6.8548 \times 10^{-288}$	0.57906177042	17.254099088	$7.14070505287416 \times 10^{-514}$

## ANEXO A – Artigo (ROCHA et al., 2022)



## Early universe with dust and Chaplygin gas

N. M. N da Rocha<sup>1,a</sup>, G. A. Monerat<sup>2,b</sup> , F. G. Alvarenga<sup>1,c</sup>, S. V. B. Gonçalves<sup>1,d</sup>, G. Oliveira-Neto<sup>3,e</sup>,  
E. V. Corrêa Silva<sup>4,f</sup>, C. G. M. Santos<sup>2,g</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES CEP 29075-910, Brazil

<sup>2</sup> Departamento de Modelagem Computacional Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, RJ CEP 28.625-570, Brazil

<sup>3</sup> Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Minas Gerais CEP 36036-330, Brazil

<sup>4</sup> Departamento de Matemática, Física e Computação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Resende, RJ CEP 27523-000, Brazil

Received: 6 September 2022 / Accepted: 24 September 2022

© The Author(s), under exclusive licence to Società Italiana di Fisica and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2022

**Abstract** In this work, we analyze the quantum dynamics contained in the Planck era, its emergence mechanism for the inflationary phase and its classical dynamics in an isotropic and homogeneous model composed of a perfect fluid in the form of dust and Chaplygin gas. The model is numerically quantized by the Crank–Nicolson method, and quantum tunneling probabilities are calculated in terms of the model parameters. When we compared the results with those corresponding to the solutions obtained from a model with radiation and Chaplygin gas, we observed that a higher probability of tunneling is observed in models with dust than in models with radiation. The results have shown that universes with Chaplygin gas and dust are more likely to arise than universes with Chaplygin gas and radiation.

### 1 Introduction

According to Atkatz (1994) [1], Nature does not quantify; it is intrinsically quantum. Therefore, if the fundamental laws of physics are essentially describe through quantum formalism and are applied to the Universe as a whole, then there must be a description of the Universe in terms of quantum physics [2].

Specifically, the need to apply such laws to the early stages of the Universe is essential, considering that in the period known as the Planck era, the size of the Universe is insignificant and the laws of classical physics become negligible [1–3]. Given that at Planck time, which corresponds to less than  $10^{-43}$  seconds after the Big Bang, the Universe was no larger than  $10^{-53}$  cm [1] and its temperature  $T$  was on the order of the Planck mass ( $M_p = 1/ = 1, 22 \times 10^{19} GeV$ ) or greater [3].

In light of this context, the genesis of Quantum Cosmology takes place in the 1960s [4], with the first publications in this sense of application of the laws of quantum physics to the Universe, highlighting the works of Bryce DeWitt [5], Charles Misner [6] and John Wheeler [7].

In 1973, the concept of the spontaneous emergence of the Universe through quantum processes was introduced by Tryon [8], who suggested a speculative model to explain such quantum cosmogenesis as a consequence of the fluctuation of the vacuum. The model predicts a homogeneous, isotropic and closed Universe, consisting equally of matter and anti-matter. [1, 9–12].

By making the standard model of the Universe to go back in time, it is possible to obtain a singular solution of Einstein's equations; such equations predict that singularities are unavoidable under a choice of general and physically reasonable initial conditions [12], for which the standard model of the Universe is represented by a radiation-dominated, adiabatically expanding Universe described by the Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metric [3].

The singularity of the standard model corresponds to a zero-volume singular three-geometry at  $t = 0$  [13]. Take into account that the scale factor of the Universe  $a(t)$  is a measure of its size,  $a(t) = 0$  at  $t = 0$  for the singularity.

<sup>a</sup> e-mail: [nathrocha86@gmail.com](mailto:nathrocha86@gmail.com)

<sup>b</sup> e-mail: [monerat@uerj.br](mailto:monerat@uerj.br) (corresponding author)

<sup>c</sup> e-mail: [flavio.alvarenga@ufes.br](mailto:flavio.alvarenga@ufes.br)

<sup>d</sup> e-mail: [sergio.v.goncalves@ufes.br](mailto:sergio.v.goncalves@ufes.br)

<sup>e</sup> e-mail: [gilneto@fisica.ufjf.br](mailto:gilneto@fisica.ufjf.br)

<sup>f</sup> e-mail: [eduardo.vasquez@pq.cnpq.br](mailto:eduardo.vasquez@pq.cnpq.br)

<sup>g</sup> e-mail: [cassia.gmsantos@gmail.com](mailto:cassia.gmsantos@gmail.com)

When  $t \rightarrow 0$ , the temperature  $T \rightarrow \infty$ . Therefore, no initial value problems can be defined at  $t = 0$ . However, as mentioned earlier, when  $T$  is on the order of the Planck mass, or greater, the standard model equations become trivial, while quantum gravitational effects establish themselves as essential [3].

But what can quantum gravity tell us about the initial singularity of the Universe? According to Halliwell (2002) [4], it is possible to replace, in some models, the initial singularity of the Universe by a type of quantum tunneling conjecture, making the singularity a classically forbidden region such as the proposed models of [9–11] and [12] for the emergence of the Universe through quantum tunneling.

In the model proposed by Atkatz and Pagels (1982) [12], the tunneling process, which would have given rise to the Universe, occurs through a static configuration of spacetime, classically stable, and the Big Bang could then be compared to a radioactive decay on a large scale. The main assumption is that, throughout its evolution, the Universe can be described by a homogeneous and isotropic FLRW metric, and matter must be treated phenomenologically as a perfect fluid. Furthermore, an equation of state of the form  $p = p(\rho)$  for matter is described, with  $p$  the pressure and  $\rho$  the energy density, so that the quantum tunneling process is possible.

Thus, there is a nonzero probability of a FLRW Universe of size  $a_0$  being born quantumly, considering that a particle of energy described by a wave function  $\psi(a)$  at  $a(t) = 0$  can tunnel quantumly through a potential barrier and appear at  $a(t) = a_0$  [1].

It is necessary to emphasize that for the FLRW Universe to be quantized, it is required to perform the canonical quantization of the system. The canonical quantization elevates the Hamiltonian  $H$  of the system to a quantum equation, yielding a stationary wave equation, an equation with no time variable called the Wheeler–DeWitt equation, defined as  $\hat{H}\psi = 0$  [14].

The quantized FLRW Universe is mathematically equivalent to a simple one-dimensional problem in non-relativistic quantum mechanics. And the Wheeler–DeWitt equation is equivalent to the one-dimensional time-independent Schrödinger equation, where  $\psi(a)$ , its solution, is known as the wave function of the Universe [1].

According to Halliwell (2002) [4], the Wheeler–DeWitt equation in minisuperspace models is of the form of a Klein–Gordon equation on a usual curved spacetime background with a spacetime-dependent mass term. As previously stated, no single variable in the Wheeler–DeWitt equation can represent time. The second quantization is applied to the usual Klein–Gordon equation, but, in a way, the Wheeler–DeWitt equation is already the second quantized theory. This absence of the time variable is referred to as the time problem of quantum cosmology. [14].

According to Anderson (2012) [15], the incompatibility of the meanings of time in General Relativity and in usual quantum theories raises serious problems when seeking to replace both theories by a structure in a regime in which none of them can be neglected, as is the case of the early Universe. That is, the problem of time in quantum gravity arises, since the meaning of time in the theory of General Relativity differs from the meaning in the usual quantum theory.

Strategies for a possible resolution to the problem of time are described in [15]. Among these, there is the incorporation of the time variable through matter fields using Schultz’s formalism [16–19]. According to Lemos et al. (2002) [19], the use of this method culminates in a genuine Schrödinger equation, and all the usual quantum mechanism can be implemented to obtain specific predictions for the evolution of the Universe.

The homogeneity and isotropy of the FLRW Universe require that the energy–momentum tensor be that of a fluid, in which matter is parameterized by two functions, energy density  $\rho$  and pressure  $p$ . The Chaplygin gas is a fluid with negative pressure and positive energy density, characterized by the equation of state  $p = -\frac{A}{\rho}$ , where  $A$  is a positive constant [20–22]. Dust is a perfect fluid but characterized by the equation of state  $p = \alpha\rho$  with  $\alpha = 0$  [1, 12, 23].

Chaplygin-type cosmological models describe a smooth transition from a decelerated expansion of the Universe to the present epoch of cosmic acceleration; they seek to present a phenomenological description of the macroscopic unification of dark energy and dark matter and possibly represent the simplest deformation of traditional models of  $\Lambda$ CDM.

When compared to observational data, models using Chaplygin’s gas can be more favorable because it exhibits a typical dust behavior for small values of the scale factor. Models with two ideal fluids can be thought of as being more realistic as a result [24].

Therefore, in our study presented here, we analyze the quantum dynamics contained in the Planck era, its emergence mechanism for the inflationary phase of the Universe and its classical dynamics in a homogeneous and isotropic model composed of a perfect fluid in the form of dust and a Chaplygin gas.

Here we find a wave function for the Universe as a solution of the Wheeler–DeWitt equation, as a function of the scale factor of the Universe, time, Chaplygin gas parameters and the average energy of the packet. The results show that, in addition to being well defined across the entire solution space, such numerical solutions indicate a tunneling effect. We quantified this effect in terms of the Chaplygin gas parameters and the average energy of the packet. The exact calculation of tunneling rates through numerical methods in homogeneous and isotropic models was obtained in 2007 by Barros et. al [25] for a model with positive cosmological constant and radiation. Subsequently, homogeneous and isotropic models with radiation and Chaplygin gas [26] and with generalized Chaplygin gas [27] were also studied.

This paper is organized as follows: in Sect. II, the model is constructed in Schutz’s formalism and we obtain the classic solutions using phase portraits. In Sect. III, the model is numerically quantized by the Crank–Nicolson method [28]. We also obtain the quantum tunneling probabilities as a function of model parameters. Finally, in Sect. IV we present our conclusions.

### 2 The classical model

Models with a FLRW geometry with positive spatial section ( $k = +1$ ), composed of a Chaplygin gas and a perfect fluid, have their classical dynamics obtained by using the Schutz’s variational formalism [16–18] for fluids and by the ADM formalism [29], in terms of a Hamiltonian that can be expressed as [26, 30, 31]

$$\mathcal{H} = \frac{p_a^2}{12a^{1-3\alpha}} + \frac{V_{eff}(a)}{a^{1-3\alpha}} - p_T, \tag{1}$$

where  $p_T$  represents the momentum associated with the perfect fluid, which obeys a linear barotropic equation of state of the form  $p = \alpha\rho$ , with  $-1 \leq \alpha \leq 1$ . For more details on the dust case ( $\alpha = 0$ ), see appendix A. The system of units used here will be the natural one, where  $\hbar = 8\pi G = c = 1$ . The effective potential of these models takes the form:

$$V_{eff}(a) = 3a^2 - a^4 \sqrt{\bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6}}, \tag{2}$$

where  $\bar{A} = \frac{A}{\pi^2}$  and  $\bar{B} = \frac{B}{\pi^2}$  are parameters associated with the Chaplygin gas. The usual quantization process on the variables  $a, p_a$  above presents not only operator ordering problems, but also the fact that the resulting equation does not take the form of a Schrödinger equation. To solve these problems, we shall use the following canonical transformation [32]

$$a = \left( \frac{3(1-\alpha)x}{2} \right)^{\frac{2}{3(1-\alpha)}}, \quad p_a = p_x a^{\frac{1-3\alpha}{2}}, \quad F = \frac{2}{3(1-\alpha)} p_x a^{\frac{3(1-\alpha)}{2}}, \tag{3}$$

where  $F$  is the generating function of the transformation. Note that the canonical transformation (3) is valid for all  $\alpha \neq 1$ . The Hamiltonian will have the following form in the new variables

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{p_x^2}{12} + V_{eff}(x, \alpha) - p_T. \tag{4}$$

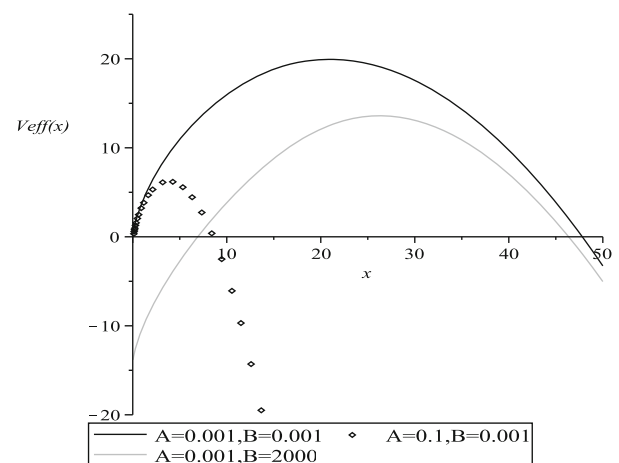
where the effective potential takes the form

$$V_{eff}(x, \alpha) = 3 \left[ \frac{3x(1-\alpha)}{2} \right]^{\frac{2+6\alpha}{3(1-\alpha)}} - \frac{1}{\pi} \sqrt{A + B \left( \frac{3x(1-\alpha)}{2} \right)^{\frac{4}{\alpha-1}}}. \tag{5}$$

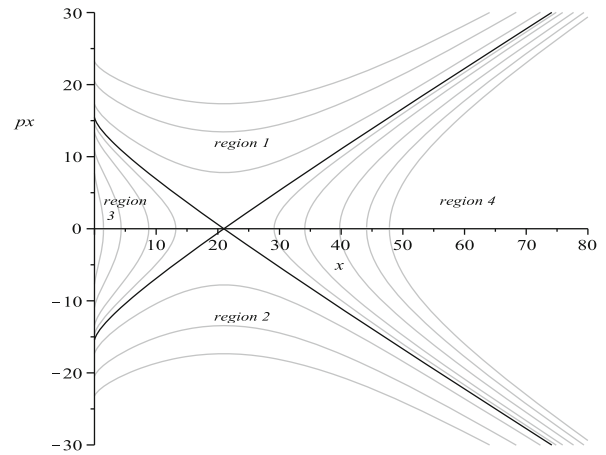
According to (4), the Hamiltonian in the new variables ( $x, p_x$ ) does not present crossed terms, thus being free of operator ordering problems.

Given that the model with radiation ( $\alpha = 1/3$ ) was studied by Monerat et. al [26, 27], we are going to investigate the dust case ( $\alpha = 0$ ), on the grounds that we are interested in the tunneling process (Fig. 1 shows the behavior of  $V_{eff}$ ). For the cases of rigid matter ( $\alpha = 1$ ), vacuum ( $\alpha = -1$ ), domain walls ( $\alpha = -2/3$ ), cosmic strings ( $\alpha = -1/3$ ) and phantom fluid ( $\alpha < -1$ ), there is no potential barrier. From Eq. (3), we have that  $a = 0$  for  $x = 0$ ; by letting  $\alpha = 0$  in Eq. (3), we obtain that  $a$  gets larger as  $x$  is larger.

**Fig. 1** Behavior of the effective potential  $V_{eff}(x)$  for the dust case ( $\alpha = 0$ )



**Fig. 2** Phase portrait. The orbits in the  $(x, p_x)$  plane represent the homogeneous and isotropic FLRW models with Chaplygin gas ( $A = 0.001$  e  $B = 0.001$ ) and dust



The classical dynamics of the model is governed by Hamilton’s equations

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial p_x} = \frac{1}{6} p_x \quad , \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial x} = -\frac{\partial V_{ef}(x)}{\partial x} \quad , \\ \dot{T} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial p_T} = -1 \quad , \\ \dot{p}_T = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial T} = 0 \quad , \end{cases} \tag{6}$$

where the dot indicates derivative with respect to the cosmic time.

The dynamics governed by the system (6) is rich and complex. Thus, we are going to analyze the phase portrait of the model, projecting its orbits in the  $(x, p_x)$  plane. An example of this is shown in Fig. 2.

The phase portrait shown in Fig. 2 presents a fixed point of hyperbolic saddle type, described by the coordinates  $P_1(x = 20.97834926, p_x = 0)$ , on a surface of energy  $p_T = 19.93447587$ . This point represents the static universe of Einstein, when the gravitational attraction is counterbalanced by cosmological repulsion. The solutions in the linear neighborhood of the fixed point  $P_1$  take the form

$$\begin{cases} x(t) = 20.97834927 + c_1 e^{0.1003287231 t} + c_2 e^{-0.1003287231 t} \\ p_x(t) = 0.6019723386 \cdot (c_1 e^{0.1003287231 t} - c_2 e^{-0.1003287231 t}), \end{cases} \tag{7}$$

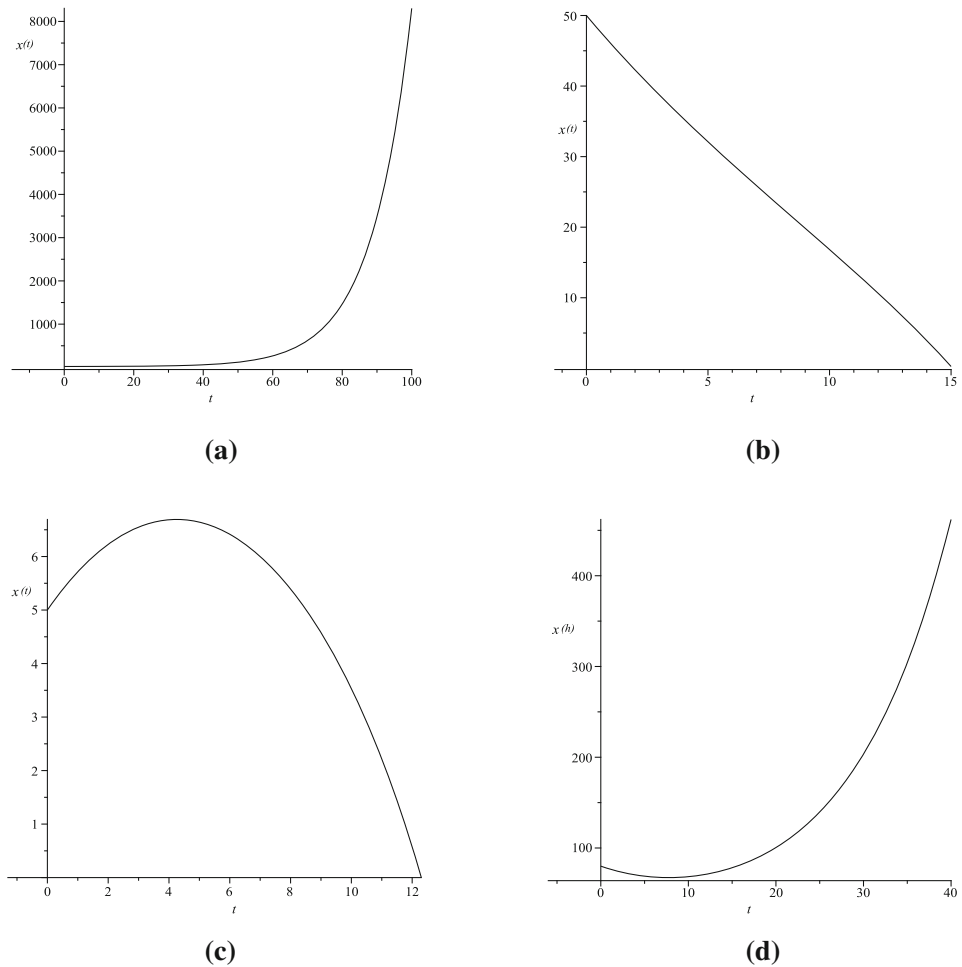
where  $c_1$  and  $c_2$  are arbitrary integration constants, whose values will depend on the established initial conditions. The solutions (7) for  $x$  and  $p_x$  are only valid in the linear neighborhood of the point. In other words, they are valid for all  $x(t)$  such that  $x(t) - 20.97834927 \ll 1$ . The orbits in black are nonlinear extensions of these and are called separatrices because they separate different classes of solutions (in 4 regions in this case). These separatrices have the same energy as the fixed point. Note that for an initial condition, in particular  $c_2 = 0$ , we obtain the well-known de Sitter solution, when the Universe presents an exponential expansion.

The orbits represent homogeneous and isotropic universes with Chaplygin gas and dust. For scenarios where the orbits have energy greater than the energy of the fixed point ( $p_T > 19.93447587$ ), the movement will be restricted to regions 1 and 2 of the phase portrait (see Fig. 2). In region 1, the orbits are born at the singularity and expand indefinitely with  $p_x > 0$ . In region 2, the orbits with  $p_x < 0$  represent universes that are initially in their state of maximum expansion and start the process of collapse until the singularity at  $x = 0, p_x = 0$ .

For scenarios where the orbits have energy lower than the energy of the fixed point ( $p_T < 19.93447587$ ), the motion will be restricted to regions 3 and 4 of the phase portrait (see Fig. 2). In region 3, all orbits, born at the singularity with  $p_x > 0$ , expand to a given point, at which cosmological repulsion ceases and contraction begins, driving the Universe back to the singularity (Big Crunch). In region 4, the Universe initially with  $p_x < 0$  and  $x > 20.97834927$  is in a state of maximum expansion. Then, the contraction begins until a given moment in which the gravitational contraction ceases and the cosmological repulsion gains strength and the Universe expands indefinitely (rebound solutions). Such universes are free of singularities!



**Fig. 3** Behavior of the scale factor  $x(t)$  with respect to cosmic time. Here we consider the Chaplygin gas with  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$  and a dust fluid  $\alpha = 0$ . The initial conditions used were: **a** Region 1:  $x(0) = 21$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1478042479$  (or  $p_x(0) = 0.8868254874$ ), with an energy  $p_T = 20$ . **b** Region 2:  $x(0) = 50$ ,  $\dot{x}(0) = -4.093367192$  (or  $p_x(0) = -24.56020315$ ), with an energy  $p_T = -24.56020315$ . **c**Region 3:  $x(0) = 5$ ,  $\dot{x}(0) = 0.8202095112$  (or  $p_x(0) = 4.921257067$ ), with an energy  $p_T = 12.94657931$ . **c** Region 4:  $x(0) = 80$ ,  $\dot{x}(0) = -3.377915430$  (or  $p_x(0) = -31.92020424$ ), with an energy  $p_T = 12.94657927$



For the description of solutions for the scale factor  $x(t)$  outside the linear neighborhood of the fixed point, we will combine the two first Hamilton’s Eq. (6)

$$\frac{1}{12} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{\partial V_{eff}(x)}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Using Eq. (8), we will numerically investigate the four regions described in Fig. 2, considering initial conditions located in each of them. This investigation will provide us with the behavior of the scale factor  $x(t)$  in the cosmic time in each of the regions. Regarding the initial conditions, these will be chosen with a given value of the scale factor  $x(0) = x_0$  located on a given energy surface, while its time derivative  $\dot{x}(0)$  will be determined by the hamiltonian constraint ( $\mathcal{H} = 0$ )

$$\dot{x}(0) = \pm \frac{1}{6} \sqrt{12(p_T - V_{eff}(x_0, \alpha))}, \tag{9}$$

in order to satisfy the Friedmann equation.

Numerically solving Eq. (8) for four sets of chosen initial conditions, one in each region of Fig. 2, we observe the behavior of the scale factor  $x(t)$  shown in Fig. 3.

The results shown in Fig. 3 reveal that expansionary solutions are possible (Fig. 3a and d), although restricted to initial conditions chosen in regions 1 and 4 of the phase portrait (Fig. 2). In the case of solutions that describe the expanding Universe, only solutions whose initial conditions are chosen in region 4 of the phase portrait are singularity-free (Fig. 3d). Figure 3b and c describes universes in the process of gravitational collapse whose final configuration is the collapse at the singularity (Big Crunch). These solutions are obtained, respectively, for initial conditions chosen in regions 2 and 3 of the phase portrait.

### 3 The quantum model

For the description of the primordial phase of the Universe, when the quantum effects become relevant to the dynamics of the system, the quantization of the model is required. For this, we will use Dirac's canonical formalism such that

$$\hat{p}_x \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_T \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial T}. \quad (10)$$

Thus, the physical properties of the Universe as a quantum system will be described by the so-called Universe wave function  $\Psi(x, T)$ , which is a function of the variables  $x$  and  $T$ . Using the super hamiltonian constraint, we have

$$\hat{H}\Psi(x, T) = 0. \quad (11)$$

Equation (11) is the well-known Wheeler–DeWitt equation, which for the present model in the canonical variables  $(x, p_x, T, p_T)$  assumes the form of a time-dependent Schrödinger equation

$$\left( \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{eff}(x, \alpha) \right) \Psi(x, \tau) = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(x, \tau), \quad (12)$$

in which we apply the reparametrization  $T = -\tau$ .

As demonstrated in Lemos (1996) [33] since the wave functions must exist only in the range  $[0, \infty)$ , it becomes necessary to impose boundary conditions on them, which will ensure that the Hamiltonian operator is self-adjoint with respect to its inner product

$$(\Psi, \Phi) = \int_0^\infty dx \Psi^*(x, \tau) \Phi(x, \tau), \quad (13)$$

and in this way, we will have that the evolution of time is unitary. Here we will consider wave functions that satisfy the boundary conditions established by Hartle–Hawking (1983) [34]

$$\Psi(0, \tau) = \Psi(\infty, \tau) = 0. \quad (14)$$

We shall consider as our initial condition the wave packet

$$\Psi(x, 0) = \left( \frac{8192 E_m^3}{\pi} \right)^{1/4} x e^{-4 E_m x^2}, \quad (15)$$

where the parameter  $E_m$  represents the average kinetic energy of the dust fluid. The wave function (15) not only satisfies the boundary conditions (14), but it is also normalized, as shown in [35].

Analytical solutions for the Wheeler–DeWitt equation of this model are not known. Thus, we solve numerically Eq. (12) using the well-known Crank–Nicolson method [28] due to the fact that it is unconditionally stable [36, 37]. This is a finite differences method, which allows writing the Hamiltonian operator in the form of a tridiagonal matrix ( $M \times M$ ), as shown in [35]. The application of the method allowed to obtain solutions to Eq. (12) in the form of well-defined, finite-norm wave packets across the entire solution space, even when the scale factor goes to zero.

As an example, we consider the initial wave packet (15) with an energy  $E_m = 19.9$ , lower than the maximum energy  $E_{max} = 19.9344758644320$  of the potential barrier  $V_{eff}$  shown in Fig. 1, for the case of dust ( $\alpha = 0$ ) and a Chaplygin gas with  $A = 0.001$  and  $B = 0.001$ . Figure 4 exhibits the probability density when it reaches the numerical infinity.

The wave packets shown in Fig. 4 retain the norm over time with an error smaller than 5%. And yet, when we increase the number of lattice points, we observe the norm tending to 1 at all instants of time  $\tau$ . This fact highlights the excellent stability of the method. To illustrate this, Fig. 5 shows the behavior of the norm in terms of the number of points  $N$  of the lattice, in the instants of time  $\tau = 0$  e  $\tau = \tau_{max}$ .

Figure 4b shows that a part of the wave packet, even with an energy lower than the maximum energy of the barrier, managed to cross the barrier. Such a result indicates the possibility of the Universe appearing to the right of the potential barrier as a classical physical system. This mechanism is called tunneling. Next, we will calculate the tunneling probabilities as a function of the energy and Chaplygin gas parameters.

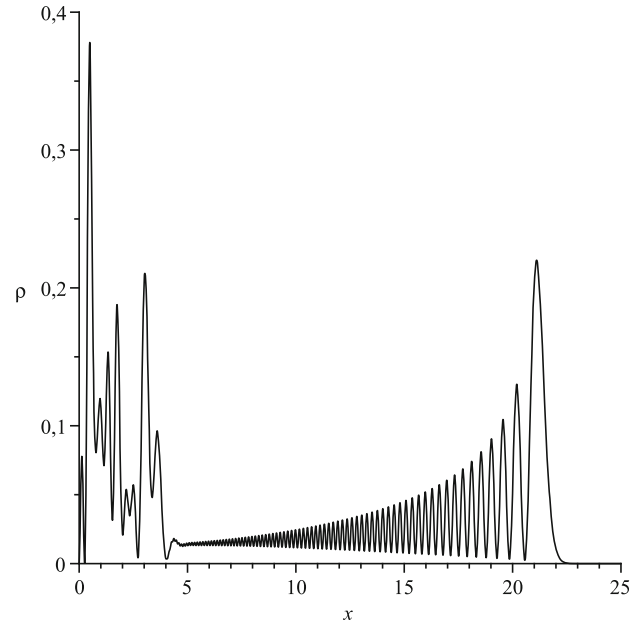
#### 3.1 Tunneling as a function of $E_m$

The result shown in Fig. 4b can be quantified by calculating the tunneling rate  $TP$ . For this, we calculate the integral

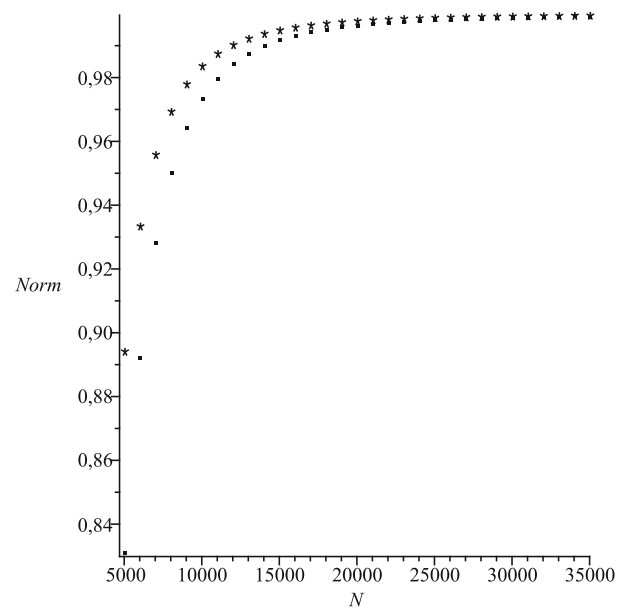
$$TP = \frac{\int_{x_2}^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx}{\int_0^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx}, \quad (16)$$

where  $x_{max}$  represents the numerical infinity and  $x_2$  represents the rightmost returning point of the effective potential  $V_{eff}(x)$ . Fixing the values of the Chaplygin gas parameters ( $A$  and  $B$ ), we perform the calculations of (16) for different values of  $E_m < V_{eff}^{max}$ . We

**Fig. 4** Behavior of the probability density  $\rho = |\Psi(x_{max}, \tau)|^2$  for  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ ,  $E_m = 19.9$  in the time  $\tau_{max} = 15$ , with a numerical infinity at  $x_{max} = 100$ . Here we have consider  $N = 9000$  (spatial discretization),  $dt = 0.05$ . The barrier right return point in this scenario is  $x_2 = 22.0497989282069$



**Fig. 5** Behavior of the norm as a function of the number  $N$  of points of the spatial discretization, calculated in two time instants:  $\tau = 0$  (asterisk) and  $\tau = \tau_{max}$  (point). Here we consider  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ ,  $\alpha = 0$ ,  $dt = 0.005$ ,  $\tau_{max} = 15$  and  $x_{max} = 100$



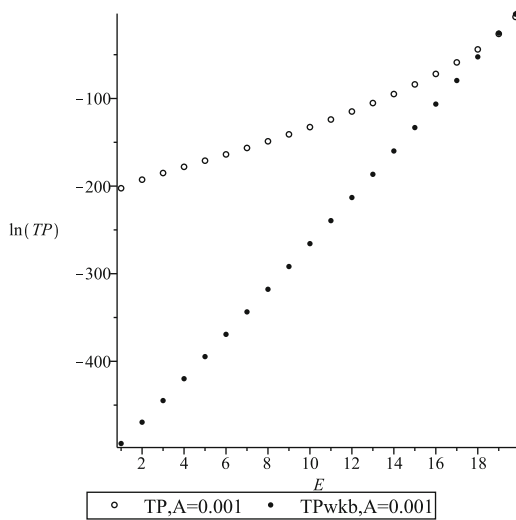
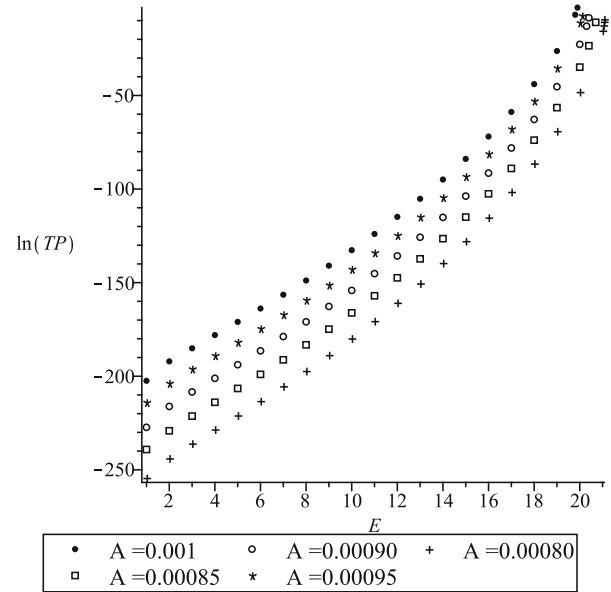
repeat this procedure for different values of the  $A$  parameter. We observe that the larger  $E_m$ , the greater the tunneling probability  $TP$  for a given fixed value of  $A$  and  $B$ . Figure 6 shows this.

We then compare the results with the tunneling rate in the WKB approximation [38] given by:

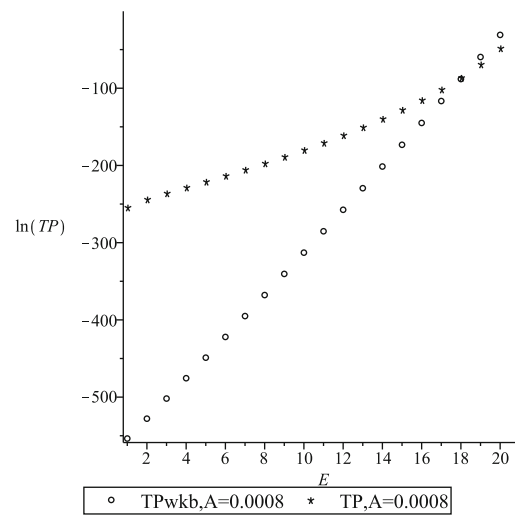
$$TP_{WKB} = \frac{4}{(2\theta + \frac{1}{2\theta})^2}, \text{ where } \theta = \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{12(V_{ef}(x) - E_m)}\right), \tag{17}$$

where  $x_1$  and  $x_2$  are, respectively, the left and right return points of the effective potential barrier (5), associated with the energy  $E_m$ . Figure 7 shows a comparison of the numerical tunneling rates ( $TP$ ) and WKB ( $TP_{WKB}$ ) as a function of energy  $E_m$  for different values of the Chaplygin gas parameters. Note that in Fig. 7a and in Fig. 7b, the tunneling probabilities  $TP$  and  $TP_{WKB}$  defined, respectively, by (16) and (17) agree for average energies  $E_m$  near the top of the effective potential barrier, in each case. This result shows the agreement of the method when applied to the semi-classical regime, where the WKB approximation holds.

**Fig. 6** Tunneling probabilities  $TP$  (log scale), as a function of the average energy  $E_m$ . Here we consider the case of dust ( $\alpha = 0$ ),  $B = 0.001$ . We calculate the  $TP$ s for different values of the Chaplygin gas parameter  $A$ . Calculations were performed using  $N = 9000$  (spatial discretization),  $dt = 0.005$ ,  $\tau_{max} = 15$  and  $x_{max} = 100$



(a)



(b)

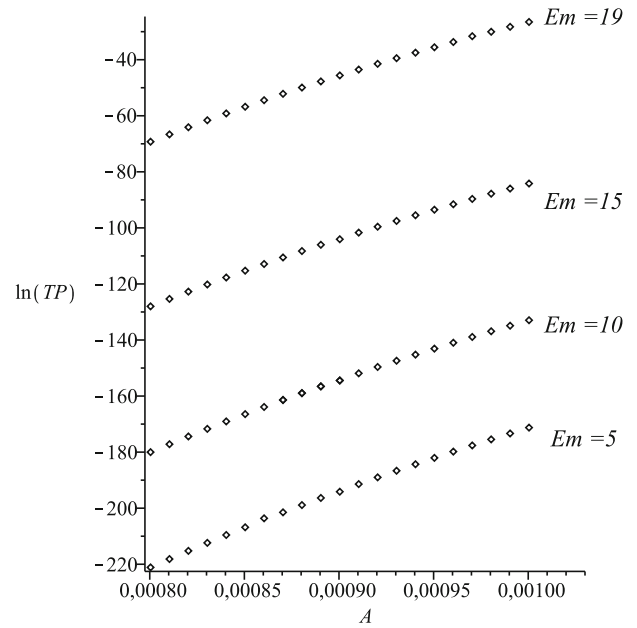
**Fig. 7** Tunneling probabilities  $TP$  and  $TP_{WKB}$ , in log scale, as a function of the average energy  $E_m$ . Here we consider the case of dust ( $\alpha = 0$ ) and  $B = 0.001$ . **a**  $A = 0.001$  which leads to an effective potential with a maximum energy  $V_{ef}^{max} = 19.9344758644320$  and **b**  $A = 0.0008$  which leads to an effective potential with a maximum energy  $V_{ef}^{max} = 21.0781424981805$ . In both cases, calculations were performed using  $N = 9000$  (spatial discretization),  $dt = 0.005$ ,  $\tau_{max} = 15$  and  $x_{max} = 100$

### 3.2 Tunneling as a function of the Chaplygin gas parameters

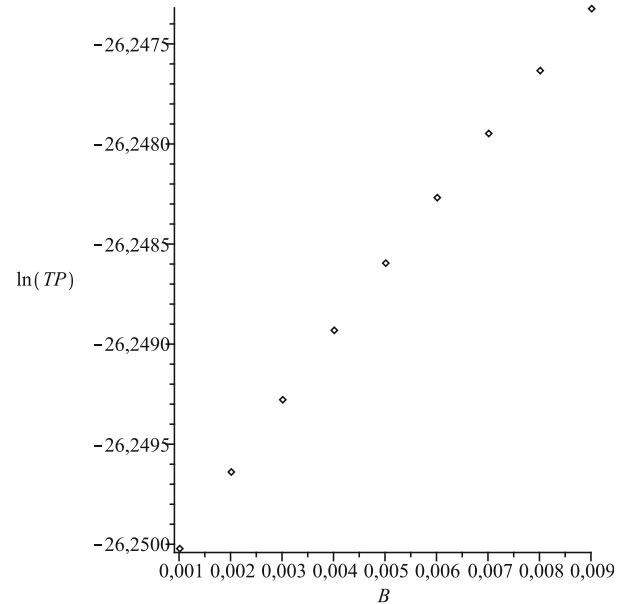
As we know, the Chaplygin gas depends on two parameters  $A$  and  $B$ . We are going to investigate the dependence of the tunneling probability on such parameters. First, we shall see how  $TP$  depends on the  $A$  parameter. For this, we fix the other system parameters and vary  $A$ . The results show that the greater the parameter  $A$ , the greater the tunneling probability, for fixed  $B$  and  $E_m$ . This behavior holds for different values of  $E_m$ . Figure 8 exhibits this behavior.

Now, fixing the parameters  $A$  and  $E_m$ , we calculate the tunneling probabilities  $TP$  as a function of the second parameter of the Chaplygin gas  $B$ . The results revealed that the higher  $B$ , the higher the tunneling rate. However, this growth is slower than when we varied  $A$  (see Fig. 9).

**Fig. 8** Tunneling probabilities  $TP$  (in log scale), as a function of the  $A$  parameter. Here we consider the case of dust ( $\alpha = 0$ ),  $B = 0.001$ . We calculate the  $TP$ s for different fixed values of  $E_m$ . Calculations were performed using  $N = 9000$  (spatial discretization),  $dt = 0.005$ ,  $\tau_{max} = 15$  and  $x_{max} = 100$



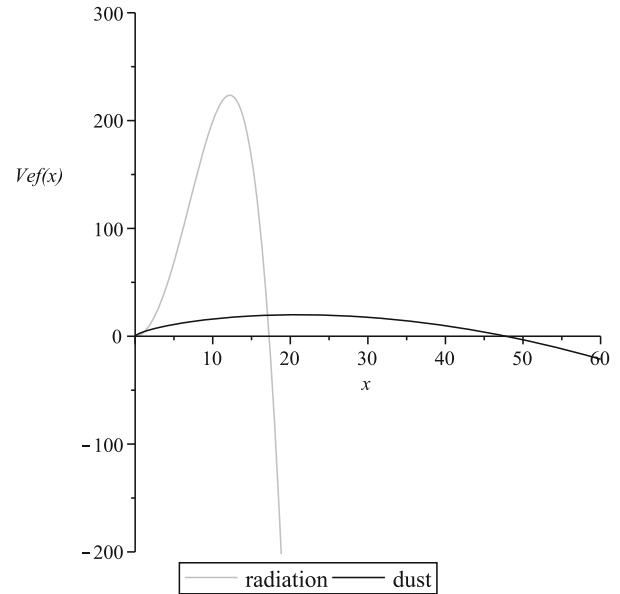
**Fig. 9** Tunneling probabilities  $TP$  (in log scale), as a function of the  $B$  parameter. Here we consider the case of dust ( $\alpha = 0$ ),  $E_m = 19.9$  and  $A = 0.001$ . Calculations were performed using  $N = 9000$  (spatial discretization),  $dt = 0.005$ ,  $\tau_{max} = 15$  and  $x_{max} = 100$



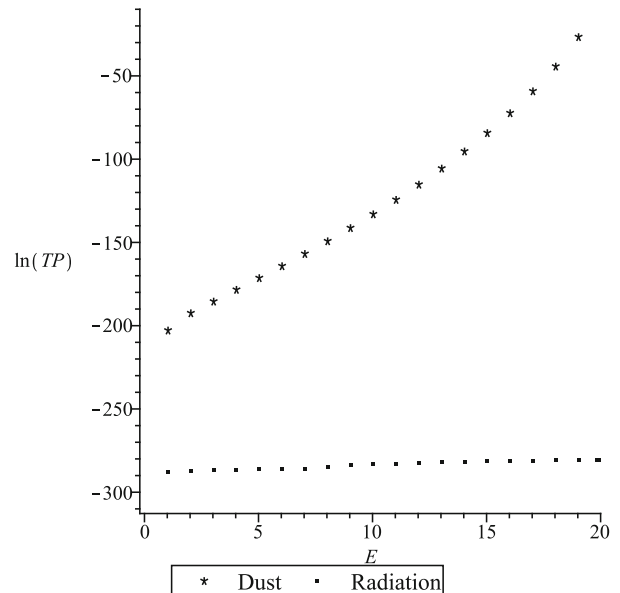
The quantization of the Chaplygin gas model with radiation was, already, performed by Monerat et al [26] in 2007. In the radiation case, the potential barrier is much higher than the potential barrier in the dust case. On the other hand, the radiation case presents a potential barrier with a much smaller width. Figure 10 shows this comparison.

To better understand the effects of a perfect gas in the tunneling process, we calculated the  $TP$ s under the same parameter values and energy ranges common to both cases. We also set  $\tau_{max}$  and  $x_{max}$  equal in both cases. The results show that the tunneling probabilities for the dust case are higher than for the radiation case, regarding the same set of parameters and boundary conditions. An example is shown in Fig. 11.

**Fig. 10** Comparison between the effective potentials with Chaplygin gas ( $A = 0.001$  and  $B = 0.001$ ) and (i) dust ( $\alpha = 0$ ) with an  $V_{eff}^{dust} = 19.9344758644320$ , (ii) radiation ( $\alpha = 1/3$ ) with an  $V_{eff}^{rad} = 223.5282022$



**Fig. 11** Comparison between the tunneling probabilities  $TPs$  in the dust ( $\alpha = 0$ ) and radiation ( $\alpha = 1/3$ ) cases. Here we consider:  $A = 0.001$ ,  $B = 0.001$ ,  $N = 9000$  (spatial discretization),  $dt = 0.05$ ,  $x_{max} = 100$  and  $\tau_{max} = 15$



### 4 Conclusion

In this paper, we studied the FLRW quantum cosmological model with dust and Chaplygin gas. The introduction of a time variable in the theory was performed using the Schutz’s formalism, which associates time with degrees of freedom of a dust perfect fluid coupled to gravitation. We constructed wave packets as solutions of the Wheeler–DeWitt equation. The packets obtained are well defined throughout the configuration space, even when  $x \rightarrow 0$ .

We investigate the possibility that the Universe classically arises through a tunneling mechanism. The tunneling rate depends on the average energy of the wave packet ( $E_m$ ) and the parameters  $A$  and  $B$  of the Chaplygin gas. Tunneling rates increase as the average energy ( $E_m$ ) of the wave packet increases (for constant  $A$  and  $B$  parameters). When we fix  $E_m$  and  $B$ , we observe that the tunneling rates grow with  $A$ . On the other hand, for fixed  $E_m$  and  $A$ , we find that the tunneling rates grow with  $B$ . The tunneling rate varies more sharply with respect to parameter  $A$  than with respect to parameter  $B$ . It is important to mention that for energies close to the top of the potential barrier, the numerical tunneling rates coincide with the tunneling rates given by the WKB approximation.

Finally, we compare our results with those of reference [27] that describes the same model with radiation instead of dust. We observed that in the case of dust fluid the tunneling rates are much higher than in the case of radiation. This result shows that models

with higher potential barriers have lower tunneling rates, even with a much smaller width. In the case of dust after tunneling, the Universe classically appears much larger in size than in the case of radiation.

After tunneling, the scale factor  $x$  takes on large values, and for large values of  $x$  the Chaplygin gas term in the effective potential behaves like a cosmological constant-type term, leading the Universe to an accelerated phase.

**Acknowledgements** N.M.N. da Rocha thanks CNPq for the financial support. G.A. Monerat thanks FAPERJ for the financial support. F.G. Alvarenga and S.V.B. Gonçalves thank FAPES for the financial support.

**Data Availability** No data are associated are this manuscript.

### Appendix A Super-hamiltonian of the gravitation plus dust and Chaplygin gas

In our model, we consider the Einstein–Hilbert action plus a boundary term

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K \quad , \tag{A1}$$

where  $R$  is the scalar curvature, taken as a function of  $g^{\mu\nu}$  and its derivatives,  $K = h_{ij} K^{ij}$  such that  $K_{ij}$  is the extrinsic curvature and  $h_{ij}$  is the induced metric over the three-dimensional spatial hypersurface, which is the boundary  $\partial M$  of the four dimensional manifold  $M$ . In (A1)  $G$  is the Newtonian gravitational constant and the factor  $8\pi G$  will be assumed to be equal to 1.

We will consider a closed spatially model of a universe ( $k = +1$ ) that is homogeneous and isotropic. Thus, we shall deal with a spacetime described by the Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker metric (FLRW)

$$ds^2 = -\mathcal{N}(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \tag{A2}$$

where  $\mathcal{N}(t)$  denotes the lapse function,  $a(t)$  is the scale factor and  $d\Omega$  is the angular line element of a 2D sphere.

We can compute the Ricci scalar  $R$ , which for the FLRW metric turns out to be

$$R = \frac{6}{\mathcal{N}^2} \frac{\ddot{a}}{a} - 6 \frac{\dot{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}^3} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{6}{\mathcal{N}^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6}{a^2} \quad . \tag{A3}$$

The extrinsic curvature  $K$  is given by

$$K = -\frac{3}{\mathcal{N}} \frac{\dot{a}}{a} \quad . \tag{A4}$$

Replacing Eqs. (A3) and (A4) in the Einstein–Hilbert action (A1), we obtain

$$S_g = \int dt \left( -3 \frac{\dot{a}^2 a}{\mathcal{N}} + 3\mathcal{N}a \right) \quad . \tag{A5}$$

With the gravitational action (A5), the gravitational Lagrangian of the FLRW model is given as follows

$$L_g = -3 \frac{\dot{a}^2 a}{\mathcal{N}} + 3\mathcal{N}a \quad .$$

Using the canonical formalism, the gravitational super-Hamiltonian can be expressed as

$$\mathcal{H}_g = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a \quad . \tag{A6}$$

The material content considered in the model is described according to the so-called Schutz’s formalism [16–18]. Schutz introduced, in the context of general relativity, a representation for a perfect fluid in terms of velocity potentials. The formalism describes the dynamics of a relativistic fluid in interaction with the gravitational field.

The hydrodynamic equations are put in Eulerian form, with the four-velocity expressed in terms of six potentials  $\phi$ ,  $\zeta$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  and  $S$

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\nu} + \zeta \beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad , \tag{A7}$$

each satisfying its own equation of motion. In this expression,  $\mu$  is the specific enthalpy, the variable  $S$  is the specific entropy, while the potentials  $\zeta$  and  $\beta$  are connected with rotation and are absent in this model. The variables  $\phi$  and  $\theta$  have no clear physical meaning. Through the normalization condition,

$$U^\nu U_\nu = -1 \quad , \tag{A8}$$

$\mu$  can be expressed in terms of the potentials.

The Schutz's action is especially simple

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} p . \quad (\text{A9})$$

where  $p$  is the pressure.

In the case in which we are interested, dust fluid, it suffices to take  $\varphi$  as the only nonzero velocity potential to obtain the correct equations of motion [39]. Thus, from the fluid's Lagrangian

$$L_f = \mathcal{N} a^3 p . \quad (\text{A10})$$

The fluid conjugated momentum  $p_\phi$  is

$$p_\phi = \frac{\partial L_f}{\partial \dot{\phi}} = \mathcal{N} a^3 \rho_0 \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\phi}} = \mathcal{N} a^3 \frac{(p + \rho)}{\mu} U^0 . \quad (\text{A11})$$

Above we use Eqs. (A7), (A8) and the definition of specific inertial mass [16, 17]

$$\mu = \frac{(p + \rho)}{\rho_0} , \quad (\text{A12})$$

where  $\rho_0$  is the density of rest mass.

So, the fluid's Hamiltonian is

$$H_f = \mathcal{N}^3 a^3 [(p + \rho) U^0 U^0 + p g^{00}] . \quad (\text{A13})$$

Finally, in the case of dust ( $p = 0$  and  $\mu = 1$ ) the fluid's super-Hamiltonian is reduced to

$$\mathcal{H}_f = p_T . \quad (\text{A14})$$

where the time has been chosen as the proper time of the dust particles ( $\phi = T$ ).

In our model, we will also consider a second fluid: the Chaplygin gas [20–22] which obeys an exotic equation of state:

$$p = -\frac{A}{\rho} , \quad (\text{A15})$$

where  $A$  is a positive constant. By the relativistic energy conservation equation, we obtain that the energy density evolves as

$$\rho(a) = \left( A + \frac{B}{a^6} \right)^{1/2} , \quad (\text{A16})$$

Above  $B$  is a constant. The action for this perfect fluid may be expressed as [40, 41]

$$S_{CG} = - \int d^4x \sqrt{-g} \rho . \quad (\text{A17})$$

The Lagrangian of the Chaplygin gas is

$$L_{CG} = -\mathcal{N} a^3 \rho , \quad (\text{A18})$$

which implies the following corresponding Hamiltonian

$$\mathcal{H}_{CG} = a^3 \left( \bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} . \quad (\text{A19})$$

So, the total super-Hamiltonian of the model FRW ( $k = +1$ ) with dust and Chaplygin gas is given by

$$\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a + a^3 \left( \bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} + p_T . \quad (\text{A20})$$

## References

1. D. Atkatz, Am. J. Phys. **62**, 619 (1994). <https://doi.org/10.1119/1.17479>
2. J. B. Hartle, Part of the NATO ASI Series book series (NSSB, volume 156), (1986); [https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1897-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1897-2_12).
3. A.H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347>
4. J. J. Halliwell, The interpretation of quantum cosmology and the problem of time, To appear in Proceedings of Stephen Hawking's 60th Birthday Conference, (2002); <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0208018>
5. B.S. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.160.1113>
6. C.W. Misner, in Magic Without Magic: John Archibald Wheeler, a Collection of Essays in Honor of his 60th Birthday, edited by J (Klauder (Freeman, San Francisco, 1972)
7. J.A. Wheeler, in Batelles Rencontres, eds.C.DeWitt and J.A.Wheeler (Benjamin, New York, 1968)



8. E. Tryon, Is the Universe a Vacuum Fluctuation? *Nature* **246**, 396–397 (1973). <https://doi.org/10.1038/246396a0>
9. A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* **117**, 25–28 (1988)
10. A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **27**, 2848–2855 (1983)
11. A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30**, 509–511 (1984)
12. D. Atkatz, H. Pagels, *Phys. Rev. D* **25**, 2065 (1982). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.25.2065>
13. J.B. Hartle, S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2960>
14. E. Anderson, The problem of time and quantum cosmology in the relational particle mechanics Arena, (2013); <https://doi.org/10.48550/arXiv.1111.1472>.
15. E. Anderson, The problem of time in quantum gravity, (2012); <https://doi.org/10.48550/arXiv.1009.2157>.
16. B.F. Schutz, *Phys. Rev. D* **2**, 2762 (1970)
17. B.F. Schutz, *Phys. Rev. D* **4**, 3559 (1971)
18. F.G. Alvarenga, R.G. Furtado, R. Fractalossi, S.V.B. Gonçalves, *Braz. J. of Phys.* **47**, 96 (2016). [arXiv:1610.04589](https://arxiv.org/abs/1610.04589) [gr-qc]
19. F.G. Alvarenga, J.C. Fabris, N.A. Lemos and G.A. Monerat, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 651–663 (2002), [arXiv:0106051](https://arxiv.org/abs/0106051) [gr-qc]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0106051>.
20. S. Chaplygin, *Sci. Mem. Moscow. Univ. Math. Phys.* **21**, 1 (1904)
21. M.C. Bento, O. Bertolami, A.A. Sen, *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002). [[arXiv:gr-qc/0202064](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0202064)]
22. A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, An alternative to quintessence, (2001) <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0103004>
23. I-Chin Wang, Dust and radiation quantum perfect fluid cosmology : selection of time variable, (2004); <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0402075>
24. V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, The Chaplygin gas as a model for dark energy, (2004); <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0403062>
25. J. Acacio de Barros, E.V. Corrêa Silva, G.A. Monerat, G. Oliveira-Neto, L.G. Ferreira Filho, and P. Romildo, Jr., *Phys. Rev. D* **75**, 104004, (2007)
26. G.A. Monerat, G. Oliveira-Neto, E.V. Corrêa Silva, L.G. Ferreira Filho, P. Romildo Jr., J.C. Fabris, R. Fractalossi, S.V.B. Gonçalves and F.G. Alvarenga, *Phys. Rev. D* **76**, 024017 (2007), <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.024017>[[arXiv:0704.2585](https://arxiv.org/abs/0704.2585) [gr-qc]]
27. G.A. Monerat, C.G.M. Santos, G. Oliveira-Neto, E.V. Corrêa Silva and L. G. Ferreira Filho. *The European Physical Journal Plus* volume 136, Article number: 34 (2021)
28. J. Crank, P.A. Nicolson, *Adv. Comput. Math.* **6**, 207 (1996)
29. R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, editado por L. Witten (Wiley, New York, 1962), 227–265
30. P. Pedram, M. Mirzaei, S.S. Gousheh, *Comput. Phys. Commun.* **176**, 581 (2007). [arXiv:0701015v2](https://arxiv.org/abs/0701015v2) [math-ph]
31. M. Bouhmadi-Lopez, P.V. Moniz, *Phys. Rev. D* **71**, 063521 (2005). [arXiv:0404111v1](https://arxiv.org/abs/0404111v1) [gr-qc]
32. E.V. Corrêa Silva, G.A. Monerat, G. Oliveira-Neto, C. Neves, L.G. Ferreira Filho, *Phys. Rev. D* **800**, 47302 (2009)
33. N.A. Lemos, *J. Math. Phys.* **37**, 1449 (1996). [arXiv:9511082v1](https://arxiv.org/abs/9511082v1) [gr-qc]
34. J.B. Hartle, S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983)
35. G.A. Monerat, F.G. Alvarenga, S.V.B. Gonçalves, G. Oliveira-Neto, C.G.M. Santos, E.V. Corrêa Silva, *Eur. Phys. J. Plus*, 137:117, <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02316-9>(2022)
36. T. Iitaka, *Phys. Rev. E* **49**, 4684 (1994)
37. S.A. Teukolsky, *Phys. Rev. D* **61**, 087501 (2000)
38. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*. 3rd ed. (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998), Chap. 7
39. N.A. Lemos, *Class. Quant. Grav.* **8**, 1303–1310 (1991)
40. G.F.R. Ellis and S.W. Hawking, *Large Scale Structure of Space Time*, (Cambridge University Press, 1973)
41. R. Mansouri, F. Nasserri, *Phys. Rev. D* **60**, 123512 (1999). [[arXiv:gr-qc/9902043](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9902043)]

Springer Nature or its licensor holds exclusive rights to this article under a publishing agreement with the author(s) or other rightsholder(s); author self-archiving of the accepted manuscript version of this article is solely governed by the terms of such publishing agreement and applicable law.