

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thales Danton de Souza Flores

HOMOLOGIA DE MORSE E UMA APLICAÇÃO EM
GEOMETRIA SIMPLÉTICA

VITÓRIA
2023

Thales Danton de Souza Flores

HOMOLOGIA DE MORSE E UMA APLICAÇÃO EM
GEOMETRIA SIMPLÉTICA

Dissertação de mestrado apresentada ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Marta Jakubowicz Batoréo

VITÓRIA
2023

Homologia de Morse e Uma Aplicação em Geometria Simplética

Thales Danton de Souza Flores

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 29 de maio de 2023 por:

Prof.^a Dr.^a Marta Jakubowicz Batoréo
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientadora

Prof. Dr. José Victor Goulart Nascimento
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof.^a Dr.^a Paula Balseiro
Universidade Federal Fluminense

Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, Maio de 2023





Folha de assinaturas Thales Flores

Data e Hora de Criação: 01/06/2023 às 08:33:48

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de assinaturas Thales Flores.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 770901fac132a6ada25dba6b25d5e61408d8ab89b6b365d940956a9807089bb0

[SHA512]: fb2b26641fa02917f0577fe5fd6dabfd9d88ea053fd293966d50edd8b70291042f99310e6e3cb5cacd046f734589ecd0aaa7e80b2f0ba883e1fc5a1b723ed555

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Marta Jakubowicz Batoreo (marta.batoreo@ufes.br)

Data/Hora: 02/06/2023 - 08:36:31, IP: 187.36.169.31

[SHA256]: de6ccb9ef22651ad16fd4aa95dd8e9e0220ab34b83bc65b2cefef848bfe7f33d



ASSINADO - jose.g.nascimento@ufes.br

Data/Hora: 02/06/2023 - 10:18:27, IP: 200.137.65.106

[SHA256]: e8c0fa7836e4dae10eabbd7389e09831dbf324f74b43925c6f6983ef6ad4ec12



ASSINADO - pbalseiro@id.uff.br

Data/Hora: 05/06/2023 - 12:26:22, IP: 189.60.49.149, Geolocalização: [-22.957844, -43.223117]

[SHA256]: ed85ad730704a84b316be99405abdd257c0e288a1857b6b199611d3bd4ed398a

Histórico de eventos registrados neste envelope

05/06/2023 12:26:22 - Envelope finalizado por pbalseiro@id.uff.br, IP 189.60.49.149

05/06/2023 12:26:22 - Assinatura realizada por pbalseiro@id.uff.br, IP 189.60.49.149

05/06/2023 12:26:10 - Envelope visualizado por pbalseiro@id.uff.br, IP 189.60.49.149

02/06/2023 10:18:27 - Assinatura realizada por jose.g.nascimento@ufes.br, IP 200.137.65.106

02/06/2023 08:36:31 - Assinatura realizada por marta.batoreo@ufes.br, IP 187.36.169.31

02/06/2023 08:36:21 - Envelope visualizado por marta.batoreo@ufes.br, IP 187.36.169.31

01/06/2023 08:36:56 - Envelope registrado na Blockchain por wesley.a.silva@ufes.br, IP 200.137.65.109

01/06/2023 08:36:55 - Envelope encaminhado para assinaturas por wesley.a.silva@ufes.br, IP 200.137.65.109

01/06/2023 08:33:48 - Envelope criado por wesley.a.silva@ufes.br, IP 200.137.65.109

Dedicatória

Dedico este trabalho às mulheres da minha vida, Victória Lordes e Maria Imaculada, pelo apoio e incentivo nesta jornada.

Agradecimentos

Quero começar agradecendo à minha orientadora Marta Jakubowicz Batoréo, que me amparou e me ajudou durante todo o meu percurso no mestrado. À Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) pela concessão de uma bolsa de estudos durante o meu curso de Mestrado. Queria também agradecer minha mãe, que sempre batalhou para me dar as melhores condições possíveis para eu continuar estudando. Por fim, não poderia deixar de agradecer à minha esposa e melhor amiga, Victória Lordes, que sempre me apoiou e nunca me deixou desistir.

Resumo

Neste trabalho são apresentados alguns conceitos e resultados principais da teoria de Morse, como o lema de Morse e o teorema de Smale. Além disso, apresentaremos um caso particular da conjectura de Arnold que é uma aplicação da teoria de Morse em geometria simplética.

Palavras-chave: teoria de Morse, geometria simplética, homologia de Morse, conjectura de Arnold.

Abstract

In this work some concepts and main results of Morse theory are presented, such as Morse's lemma and Smale's theorem. Furthermore, we will present a particular case of Arnold's conjecture which is an application of Morse theory in symplectic geometry.

Key-Words: Morse theory, symplectic geometry, Morse homology, Arnold's conjecture.

Sumário

Introdução	10
1 O Lema de Morse	12
1.1 Variedades	12
1.2 Funções de Morse	16
1.3 Existência de Funções de Morse	18
1.4 O Lema de Morse	20
1.5 Exemplos	25
2 A Condição de Smale	30
2.1 Fluxo e Pseudo-Gradientes	30
2.2 Uma Discussão Sobre Cartas de Morse	32
2.3 Variedades Estáveis e Instáveis	33
2.4 O Teorema de Reeb	35
2.5 A Condição de Smale	38
2.6 O Teorema de Smale	41
3 A Homologia de Morse	45
3.1 Homologia	45
3.2 A Homologia de Morse Módulo 2	46
3.3 A Independência da Homologia de Morse	47
3.4 O Espaço das “Trajetórias Quebradas”	52
4 Aplicações da Homologia de Morse	61
4.1 A Dualidade de “Poincaré”	61
4.2 A Fórmula de Künneth	62
4.3 A Característica de Euler	66
4.4 Conexidade	68
5 A Conjectura de Arnold	71
5.1 Geometria Simplética	71
5.2 A Conjectura de Arnold	78
5.3 Apêndice	78
Referências Bibliográficas	83

Introdução

Este trabalho é resultado de um estudo realizado pelo autor sobre homologia de Morse e uma aplicação em dinâmica simplética através, principalmente, da parte I do livro *Morse Theory and Floer Homology* ([1]) dos autores M. Audin e M. Damian.

A teoria de Morse envolve, a grosso modo, o estudo de pontos críticos de certas funções reais, designadas por funções de Morse. Este estudo utiliza ferramentas de áreas como cálculo das variações e inclui, por exemplo, a definição de um objeto algébrico associado a uma variedade, chamado homologia de Morse, e que é um invariante topológico dessa variedade. Alguns desenvolvimentos sobre este assunto podem ser encontrados no livro *Morse Theory* ([2]) do autor J. Milnor e em suas referências.

Neste trabalho, começamos por apresentar a homologia de Morse associada a uma variedade M e a uma função real (de Morse) definida em M . A construção desta homologia depende, inicialmente, da função f e de um campo vetorial que depende de f , ambos definidos em M . Entretanto, é possível provar que este objeto algébrico não depende da função e nem do campo vetorial e que esta homologia é de fato um invariante topológico da variedade. Este conteúdo é desenvolvido nos capítulos 3 e 4 e alguns preliminares são apresentados nos capítulos 1 e 2. Vale ressaltar que também é possível identificar a homologia de Morse com a homologia celular, no entanto, esse assunto não é abordado neste trabalho (veja, por exemplo, o apêndice 4.9 de [1]).

A dinâmica simplética é uma das áreas onde a homologia de Morse surge como ferramenta para discussão, por exemplo, de existência e número de órbitas periódicas em certos sistemas dinâmicos definidos em variedades chamadas simpléticas. De um modo mais geral, a geometria simplética estuda variedades suaves de dimensão par que generalizam a noção de espaço de fases onde estão definidos os sistemas dinâmicos conhecidos por sistemas Hamiltonianos.

No final deste trabalho, destacamos um resultado, conhecido por Conjectura de Arnold, que afirma sobre uma cota inferior no número de órbitas periódicas de período 1, que depende de um invariante topológico da variedade onde o sistema Hamiltoniano está definido. Neste trabalho fazemos a apresentação do enunciado desta conjectura e de uma demonstração num caso muito particular em que o sistema Hamiltoniano é autônomo. Notamos que o caso não autônomo pode ser demonstrado usando ferramentas mais avançadas da teoria de Floer apresentadas na parte II de [1] e que estão fora do objetivo principal deste trabalho. Este assunto é tratado no capítulo 5.

Por questões de organização, apresentamos a estrutura da dissertação. No capítulo 1 vamos relembrar alguns conceitos de variedades que serão muito importantes para fixarmos a notação usada neste trabalho. Além disso, provaremos o lema de Morse e daremos alguns exemplos de funções de Morse. O capítulo 2 tem como objetivo principal falar sobre a dinâmica da teoria de Morse. É nele que vamos definir fluxo, os pseudo-gradientes e as variedades estáveis e instáveis. Além disso, falaremos sobre a condição de Smale que é uma importante condição na teoria de Morse. Os capítulos 3

e 4 tem como objetivo construir a homologia de Morse e apresentar algumas aplicações importantes. Por fim, no capítulo 5 vamos lembrar alguns conceitos de geometria simplética que, novamente, serão importantes para fixarmos a notação. Além disso, enunciaremos e provaremos um caso particular da conjectura de Arnold.

É importante destacar que todas as imagens deste trabalho foram produzidas pelo autor usando o pacote TikZ do Latex, porém, a grande maioria do conteúdo apresentado neste trabalho foi baseada no livro guia dos autores M. Audin e M. Damian.

Capítulo 1

O Lema de Morse

Neste capítulo, apresentaremos o lema de Morse (teorema 1.4.2, §1.4) que descreve uma expressão local das funções de Morse. Para tal, apresentaremos seções preliminares sobre variedades (suaves), aplicações suaves (§1.1) e, posteriormente, definimos funções de Morse (§1.2), discutimos sua existência (§1.3) e exploramos alguns exemplos (§1.5).

Diremos que uma função é suave sempre que a função for diferenciável de classe \mathcal{C}^∞ . Neste capítulo, com exceção da primeira seção, todas as variedades e funções são consideradas suaves. Além disso, M denotará uma variedade suave, a menos que explicitamente digamos o contrário.

1.1 Variedades

Antes de adentrarmos a teoria de Morse, vamos relembrar algumas noções relacionadas com variedades e diferenciabilidade de aplicações definidas em variedades. Para maiores detalhes veja, por exemplo, os seis primeiros capítulos de [3].

1.1.a Variedades Suaves

Definição 1.1.1. Um espaço topológico M é chamado de variedade topológica de dimensão n quando satisfaz as seguintes propriedades:

- M é um espaço de Hausdorff;
- M tem base enumerável;
- para cada ponto p em M , existem um aberto $U \subset M$ que contém p e um homeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \widehat{U}$, onde \widehat{U} é um aberto de \mathbb{R}^n .

Chamamos o par (U, φ) , ou apenas a aplicação φ , de carta. Por outro lado, chamamos o par $(\widehat{U}, \varphi^{-1})$, ou apenas a função φ^{-1} , de parametrização.

Definição 1.1.2. Seja M uma variedade topológica de dimensão n . Um atlas suave de M é uma coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ de cartas tais que:

- $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$;

• para quaisquer $\alpha, \beta \in \Lambda$ tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{e} \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são funções suaves.

Definição 1.1.3. Uma variedade suave de dimensão n é um par (M, \mathcal{A}) , onde M é uma variedade topológica de dimensão n e \mathcal{A} é um atlas suave. Muitas vezes omitimos \mathcal{A} na notação.

Definição 1.1.4. Uma aplicação $f: M \longrightarrow N$ entre duas variedades suaves é dita suave se para toda carta (U, φ) de M e para toda carta (V, ψ) de N tais que $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ é um aberto, temos que

$$\widehat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$$

é uma função suave. Chamamos \widehat{f} de representação local de f com respeito a (φ, ψ) .

Observação 1.1.5. Se M é uma variedade suave e $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave, então, fixada uma carta φ , por vezes denotaremos $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(p)$ por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, onde \widehat{f} é a representação local de f com respeito a $(\varphi, \text{Id}_{\mathbb{R}})$ e $p \in M$.

Definição 1.1.6. Seja M uma variedade suave. Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma curva suave com $\alpha(0) = p$. Um vetor tangente a α em p é uma função $\alpha'(0): \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)g = \left. \frac{d}{dt}(g \circ \alpha) \right|_{t=0}, \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Definição 1.1.7. Dizemos que v é um vetor tangente a M em $p \in M$ se existe uma curva $\alpha: I \longrightarrow M$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. O espaço tangente a M em p , denotado por $T_p M$, é o conjunto de todos os vetores tangentes a M em p .

Proposição 1.1.8. *Seja M uma variedade suave de dimensão n . Para cada $p \in M$, o espaço tangente a M em p é um espaço vetorial. Além disso, se φ é uma parametrização centrada em p , isto é, $\varphi(0, \dots, 0) = p$ então*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$$

é uma base de $T_p M$, onde, para cada $i = 1, \dots, n$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ é o vetor tangente à curva

$$\begin{aligned} \alpha_i: I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \varphi(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

em p , onde t está na i -ésima coordenada. Além disso, se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(p),$$

onde \widehat{f} é a representação local de f com respeito a $(\varphi^{-1}, \text{Id}_{\mathbb{R}})$.

Veja, por exemplo, as páginas 39 e 40 de [4] para a prova.

Definição 1.1.9. Um campo vetorial suave de uma variedade suave M é um aplicação suave X definida em M tal que $X(p) \in T_pM$, para todo $p \in M$. Por vezes usaremos X_p ao invés de $X(p)$.

Exemplo 1.1.10. Sejam X e Y dois campos vetoriais suaves definidos em uma variedade suave M . Um importante campo vetorial suave é o colchete de X e Y , dado por $[X, Y] = XY - YX$.

Definição 1.1.11. Sejam M e N variedades suaves e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Para cada $p \in M$, definimos uma aplicação

$$(df)_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N,$$

chamada de diferencial de f em p , pela regra

$$(df)_p(v)(g) = v(g \circ f), \quad \forall g \in C^\infty(N).$$

Observação 1.1.12. Quando $M = \mathbb{R}^m$ e $N = \mathbb{R}^n$, muitas vezes identificamos $(df)_p$ com a matriz jacobiana de f .

Observação 1.1.13. Quando $M = \mathbb{R}^m$ e $N = \mathbb{R}$, a matriz jacobiana de f é identificada de forma natural com um vetor de \mathbb{R}^m denotado por $\text{grad } f$ e é chamado de gradiente de f . Além disso, o gradiente negativo de f nada mais é do que o vetor $-\text{grad } f$.

Exemplo 1.1.14. Um importante exemplo de variedade suave é o fibrado tangente. Se M é uma variedade suave de dimensão n , então o fibrado de tangente de M é o conjunto

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M \text{ e } v \in T_pM\}.$$

Este conjunto é uma variedade suave de dimensão $2n$ (veja, por exemplo, a proposição 3.18 de [3] para a demonstração).

Exemplo 1.1.15. Um outro exemplo importante de variedade suave é o fibrado cotangente. Se Q é uma variedade suave de dimensão n , podemos, para cada $p \in Q$, definir o espaço cotangente em p , denotado por T_p^*Q , como sendo o espaço dual do espaço tangente em p , isto é,

$$T_p^*Q = (T_pQ)^*.$$

O fibrado cotangente de Q é o conjunto

$$T^*Q = \{(p, \xi) \mid p \in Q \text{ e } \xi \in T_p^*Q\}.$$

Este conjunto é uma variedade suave de dimensão $2n$ (veja, por exemplo, a proposição 11.9 de [3] para a demonstração).

1.1.b Variedades Suaves Com Bordo

Definição 1.1.16. Sejam $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ e $U \subset \mathbb{H}^n$ um aberto. Dizemos que $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ é suave quando para cada $p \in U$ existe um aberto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ contendo p e uma função suave

$$\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{tal que} \quad \tilde{f}|_{\tilde{U} \cap \mathbb{H}^n} = f.$$

Definição 1.1.17. Um espaço topológico M é chamado de variedade topológica de dimensão n com bordo quando satisfaz as seguintes propriedades:

- M é um espaço de Hausdorff;
- M tem base enumerável;
- para cada ponto p em M , existem um aberto $U \subset M$ que contém p e um homeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \widehat{U}$, onde \widehat{U} é um aberto de \mathbb{H}^n .

Todas as definições feitas na subseção anterior podem ser facilmente adaptadas para variedades topológicas com bordo. A única diferença é que no caso das variedades topológicas com bordo a suavidade é de acordo com a definição 1.1.16. Assim, podemos definir uma variedade suave com bordo que vai satisfazer todas as condições da subseção anterior.

Definição 1.1.18. Uma variedade suave de dimensão n com bordo é um par (M, \mathcal{A}) , onde M é uma variedade topológica de dimensão n com bordo e \mathcal{A} é um atlas suave. Muitas vezes omitimos \mathcal{A} na notação.

Definição 1.1.19. Seja M uma variedade suave de dimensão n com bordo. Dizemos que $p \in M$ é um ponto de bordo se existe uma carta φ tal que $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$, onde $\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Denotamos por ∂M o conjunto de todos os pontos de bordo e designamos esse conjunto por bordo de M .

Proposição 1.1.20. O bordo ∂M de uma variedade suave M de dimensão n com bordo é uma variedade suave de dimensão $n - 1$.

Veja, por exemplo, a proposição 4.2 de [4] para a prova.

Observação 1.1.21. A noção de variedade suave no sentido da subseção 1.1.a é equivalente à noção de variedade suave com bordo onde o bordo é o conjunto vazio. Neste caso, designamos estas variedades por variedades sem bordo.

Observação 1.1.22. Quando falamos que M é uma variedade suave, estamos querendo dizer que M é uma variedade suave sem bordo, isto é, uma variedade suave no sentido da subseção 1.1.a.

Para terminar esta subseção vamos enunciar o teorema da classificação das variedades de dimensão 1.

Teorema 1.1.23 (Classificação de Variedades de Dimensão 1). *Seja M uma variedade compacta e conexa de dimensão 1 com bordo. Então M é difeomorfa a S^1 se $\partial M = \emptyset$ e difeomorfa a $[0, 1]$ caso contrário.*

Veja, por exemplo, o primeiro apêndice de [5] para a prova.

1.1.c O Teorema de Whitney

Definição 1.1.24. Dizemos que $f: M \rightarrow N$ é um mergulho entre as variedades suaves (com ou sem bordo) M e N quando f é um homeomorfismo sobre sua imagem, que também é uma imersão suave.

Definição 1.1.25. Dizemos que $V \subset M$ é uma subvariedade de M se a inclusão $i: V \hookrightarrow M$ é um mergulho.

Proposição 1.1.26. *Seja V um subconjunto de uma variedade suave M de dimensão m . Então V é uma subvariedade de dimensão k de M se, e somente se, para todo ponto $x \in V$ existe uma vizinhança U em M tal que $U \cap V = g^{-1}(0)$, onde $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ é uma submersão.*

Veja, por exemplo, a proposição 5.16 de [3] para a prova.

Teorema 1.1.27 (Mergulho de Whitney). *Toda variedade suave de dimensão k com ou sem bordo admite um mergulho em \mathbb{R}^{2k+1} .*

Veja, por exemplo, o teorema 6.15 de [3] para a prova.

Observação 1.1.28. Neste trabalho todas as variedades serão suaves com ou sem bordo e, conseqüentemente, todas podem ser mergulhadas em algum \mathbb{R}^n .

1.2 Funções de Morse

Definição 1.2.1. Um ponto $p \in M$ é chamado de ponto crítico da função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ quando $(df)_p = 0$. Além disso, chamamos $f(p)$ de valor crítico de f .

Denotaremos por $\text{Crit}(f)$ o conjunto dos pontos críticos de f , isto é,

$$\text{Crit}(f) = \{p \in M \mid (df)_p = 0\}.$$

Exemplo 1.2.2. A função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ tem um ponto crítico. De fato, como $(df)_{(x,y)} = (3x^2 - 3y^2, -6xy)$, resulta que $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f .

Iremos agora definir a hessiana (ou derivada de segunda ordem) de uma função. Porém, em geral, uma função definida em uma variedade não tem derivada de segunda ordem. Nós sempre podemos calculá-la em uma carta, mas sua expressão depende da carta escolhida. Para contornar esse problema vamos definir a hessiana em cada ponto crítico.

Definição 1.2.3. Seja $p \in M$ um ponto crítico de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. A hessiana $(d^2f)_p$ de f em p é definida por

$$(d^2f)_p(X, Y) = X(\tilde{Y}(f))(p), \quad (1.1)$$

onde $X, Y \in T_pM$ e \tilde{Y} é um campo vetorial que estende Y localmente.

Proposição 1.2.4. *A hessiana $(d^2f)_p$ é uma forma bem definida, bilinear e simétrica.*

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} (d^2f)_p(X, Y) - (d^2f)_p(Y, X) &= X(\tilde{Y}(f))(p) - Y(\tilde{X}(f))(p) \\ &= [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p(f) = (df)_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p) = 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de p ser ponto crítico. Logo, a hessiana de f em p é simétrica e não depende da escolha da extensão \tilde{Y} de Y . Para verificar que é bilinear, note que

$$\begin{aligned} (d^2f)_p(\alpha X + \beta Z, Y) &= (\alpha X + \beta Z)(\tilde{Y}(f))(p) \\ &= \alpha X(\tilde{Y}(f))(p) + \beta Z(\tilde{Y}(f))(p) \\ &= \alpha(d^2f)_p(X, Y) + \beta(d^2f)_p(Z, Y). \end{aligned}$$

Pela simetria, o mesmo argumento é válido para a segunda coordenada, chegando assim ao fim da demonstração. ■

Observação 1.2.5. Vale ressaltar que o fato de p ser ponto crítico foi essencial para provar a proposição 1.2.4. Em geral a expressão em (1.1) não fica bem definida em pontos que não são pontos críticos.

Observação 1.2.6. Numa carta podemos considerar a matriz com entradas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$. A representação local da hessiana de f em p é dada por essa matriz. Consideremos vetores

$$X = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \quad \text{e} \quad Y = \sum_j b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p$$

em $T_p M$, com $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ e $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ a base de $T_p M$ induzida por essa carta. Tomando $\tilde{Y} = \sum_j \tilde{b}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, onde \tilde{b}_j é a função constante b_j , temos

$$(d^2f)_p(X, Y) = X(\tilde{Y}(f))(p) = X\left(\sum_j \tilde{b}_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

Logo, a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{ij}$ é uma representação na base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ de $(d^2f)_p$. Muitas vezes denotaremos a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{ij}$ por $\text{Hess}_p(f)$.

Observação 1.2.7. Por vezes, quando não houver risco de confusão, omitiremos o ponto p da notação tanto de $(d^2f)_p$ quanto de $\text{Hess}_p(f)$.

Definição 1.2.8. Seja $p \in M$ um ponto crítico de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Chamaremos p de ponto crítico não degenerado de f quando $(d^2f)_p$ satisfaz a seguinte propriedade:

$$(d^2f)_p(X, Y) = 0, \forall Y \in T_p M, \text{ e somente se, } X = 0.$$

Em coordenadas, esta condição significa que a matriz de $(d^2f)_p$ é invertível.

Definição 1.2.9. Se todos os pontos críticos de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ forem não degenerados, então chamaremos f de função de Morse.

Proposição 1.2.10 (Exercício 4 de [1]). *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse, então*

$$\begin{aligned} f + g: M \times N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x) + g(y) \end{aligned}$$

é uma função de Morse.

Demonstração. Sejam (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) cartas de M e N , respectivamente. Chame $F(x) = f \circ \varphi_1^{-1}(x_1, \dots, x_m)$ e $G(y) = g \circ \varphi_2^{-1}(y_1, \dots, y_n)$. Note que

$$(d(f + g))_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0), \frac{\partial G}{\partial y}(y_0) \right),$$

logo, $(d(f + g))_{(x_0, y_0)} = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial G}{\partial y}(y_0) = 0$. Portanto, os pontos críticos de $f + g$ são os pares de pontos críticos de f e g . Note ainda que

$$\text{Hess}(f + g) = \begin{pmatrix} \text{Hess}(F) & 0 \\ 0 & \text{Hess}(G) \end{pmatrix},$$

ou seja, $\det \text{Hess}(f + g) = \det \text{Hess}(F) \cdot \det \text{Hess}(G)$. Se $\varphi_1^{-1}(x_0)$ e $\varphi_2^{-1}(y_0)$ são pontos críticos não degenerados de f e g , respectivamente, então $\det \text{Hess}_{x_0}(F) \neq 0$ e $\det \text{Hess}_{y_0}(G) \neq 0$. Segue que $\det \text{Hess}_{(x_0, y_0)}(f + g) \neq 0$. Portanto, $f + g$ é uma função de Morse. ■

1.3 Existência de Funções de Morse

Nesta seção, mostraremos a existência de funções de Morse definidas em variedades suaves que são mergulhadas em algum \mathbb{R}^n .

Proposição 1.3.1. *Seja V uma subvariedade de \mathbb{R}^n de dimensão d . Para quase todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$, a função*

$$\begin{aligned} f_p: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \|q - p\|^2 \end{aligned}$$

é uma função de Morse.

Antes de provarmos a proposição acima, vamos enunciar um teorema muito importante que será utilizado na demonstração.

Teorema 1.3.2 (Sard). *Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação suave, então o conjunto dos valores críticos de f tem medida nula em N .*

Veja, por exemplo, o teorema 6.10 de [3] para a prova.

Demonstração da Proposição 1.3.1. Seja $\varphi: U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ uma parametrização de V definida em um aberto U de \mathbb{R}^d . Denotamos $\varphi(y_1, \dots, y_d)$ por

$q = (q_1, \dots, q_n)$ e, para cada $i, j = 1, \dots, d$, identificamos $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}$ e $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}$ com os vetores de \mathbb{R}^n $\left(\frac{\partial q_1}{\partial y_i}, \dots, \frac{\partial q_n}{\partial y_i}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial y_i \partial y_j}, \dots, \frac{\partial^2 q_n}{\partial y_i \partial y_j}\right)$, respectivamente. Segue que

$$\frac{\partial f_p}{\partial y_i} = 2(q - p) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f_p}{\partial y_i \partial y_j} = 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + (q - p) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j} \right),$$

onde \cdot denota o produto interno usual em \mathbb{R}^n . Logo, q é um ponto crítico não degenerado de f_p se, e somente se, $q - p$ é perpendicular a $T_q V$ e a matriz $\left(\frac{\partial^2 f_p}{\partial y_i \partial y_j}\right)$ tem posto d .

Considere o fibrado normal de V em \mathbb{R}^n , isto é, a subvariedade de $V \times \mathbb{R}^n$

$$NV = \left\{ (x, v) \in V \times \mathbb{R}^n \mid v \in (T_x V)^\perp \right\},$$

e a aplicação suave

$$\begin{aligned} E: NV &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto x + v. \end{aligned}$$

Agora, vamos enunciar e provar um lema que irá nos ajudar a terminar a demonstração da proposição 1.3.1.

Lema 1.3.3. *O ponto $p = q + v \in \mathbb{R}^n$ é um valor crítico de E se, e somente se, a matriz*

$$\left(\frac{\partial^2 f_p}{\partial y_i \partial y_j} \right) = 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - v \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j} \right)$$

não é invertível.

Demonstração. Considere uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{n-d}\}$ de $(T_q V)^\perp$. Então a aplicação

$$(y_1, \dots, y_d, t_1, \dots, t_{n-d}) \longmapsto \left(\varphi(y_1, \dots, y_d), \sum_{k=1}^{n-d} t_k v_k(y_1, \dots, y_d) \right)$$

é uma parametrização local de NV , onde, para cada $\ell = 1, \dots, n - d$, $v_\ell(y_1, \dots, y_d)$ denota $v_\ell(\varphi(y_1, \dots, y_d))$. Segue que as derivadas parciais de E com relação a parametrização são da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial y_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \\ \frac{\partial E}{\partial t_\ell} = v_\ell \end{cases}$$

Denotamos por J_E a matriz jacobiana de E , isto é,

$$J_E = \left(\frac{\partial E}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial E}{\partial y_d} \quad \frac{\partial E}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial E}{\partial t_{n-d}} \right).$$

Como os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_d}, v_1, \dots, v_{n-d}$ são linearmente independentes, então a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial y_d} & v_1 & \dots & v_{n-d} \end{pmatrix}$$

é invertível e, conseqüentemente, a matriz

$$(J_E)^T A = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + \sum_k t_k \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right) & \left(\sum_k t_k \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \cdot v_\ell \right) \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

tem o mesmo posto do que J_E , onde 0 é matriz nula $(n-d) \times d$ e Id é a matriz identidade $(n-d) \times (n-d)$. Uma vez que v_k é ortogonal a $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}$, então

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(v_k \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + v_k \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Já que $v = \sum_k t_k v_k$, então

$$\sum_k t_k \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = - \sum_k t_k v_k \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j} = -v \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Logo, $p = q + v$ é valor crítico de E se, e somente se,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + \sum_k t_k \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - v \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j} \right)$$

não é invertível. ■

Note que este lema provou que todos os pontos p que fazem f_p não ser uma função de Morse são valores críticos de E . Portanto, aplicando o teorema de Sard (1.3.2) temos o resultado que queríamos. ■

1.4 O Lema de Morse

Nesta seção vamos provar um dos teoremas mais importantes da teoria de Morse, o lema de Morse que apresenta uma expressão local de funções de Morse perto de um ponto crítico. A fim de alcançar nosso objetivo, provaremos um lema que irá nos auxiliar a prová-lo.

Lema 1.4.1 (Exercício 9 da página 46 de [6]). *Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então existe uma outra função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que*

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + t^2g(t).$$

Além disso, $g(0) = \frac{1}{2}f''(0)$.

Demonstração. Primeiramente, fixe $t \in \mathbb{R}$ e defina $h(s) = f(ts)$. Como $h(0) = f(0)$, $h(1) = f(t)$ e $h'(s) = tf'(ts)$, temos

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s)ds = t \int_0^1 f'(ts)ds,$$

isto é,

$$f(t) = f(0) + tq(t),$$

onde $q(t) = \int_0^1 f'(ts)ds$. Observamos que $q(0) = \int_0^1 f'(0)ds = f'(0)$.

Agora, fixe $t \in \mathbb{R}$ e defina $h_1(s) = q(ts)$. Como $h_1(0) = q(0)$, $h_1(1) = q(t)$ e $h_1'(s) = tq'(ts)$, temos

$$h_1(1) - h_1(0) = \int_0^1 h_1'(s)ds = t \int_0^1 q'(ts)ds,$$

isto é,

$$q(t) = q(0) + tg(t),$$

onde $g(t) = \int_0^1 q'(ts)ds$. Segue que

$$f(t) = f(0) + t(f'(0) + tg(t)) = f(0) + tf'(0) + t^2g(t).$$

Como q é suave, então o mesmo vale para g . Além disso,

$$g(0) = q'(0) = \int_0^1 sf''(0)ds = \frac{1}{2}f''(0). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.4.2 (Lema de Morse). *Se c é um ponto crítico não degenerado de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, então existe um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, onde U e $\varphi(U)$ são vizinhanças de c e 0 , respectivamente, tal que*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(c) - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2.$$

Antes de provarmos o lema de Morse, note que segue imediatamente do lema um importante resultado enunciado abaixo. Esse resultado é muito usado intrinsecamente na teoria de Morse.

Corolário 1.4.3. *Os pontos críticos não degenerados de uma função são isolados. Em particular, uma função de Morse definida em um variedade compacta tem um número finito de pontos críticos.*

Demonstração do Lema de Morse. Como o resultado é local, podemos assumir que $M = \mathbb{R}^n$ e o ponto crítico c é 0 . Além disso, podemos supor que a matriz hessiana $\text{Hess}_0(f)$ é diagonal, pois $\text{Hess}_0(f)$ é simétrica. Vamos provar o teorema por indução em n .

Caso $n = 1$.

Pelo lema 1.4.1, existe $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2g(x) = f(0) \pm x^2|g(x)|.$$

Como $g(0) = \frac{1}{2}f''(0) \neq 0$, então podemos tomar uma vizinhança U_1 de 0 com $g(x) \neq 0$ em todos os pontos de U_1 . Tome $x_1 = \varphi(x) = x\sqrt{|g(x)|}$ definido em U_1 . Note que

$$\varphi'(x) = \sqrt{|g(x)|} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{|g(x)|}} (|g(x)|)' = \sqrt{|g(x)|} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{|g(x)|}} \frac{g(x)}{|g(x)|} g'(x).$$

Já que $g(x) \neq 0$ em U_1 , então φ é suave. Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança $U \subset U_1$ de 0 onde φ é difeomorfismo, pois $\varphi'(0) = \sqrt{|g(x)|} \neq 0$. Segue que, em U ,

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1) = f(x) = f(0) \pm x_1^2,$$

como queríamos demonstrar.

Caso $n = k$, supondo que vale para $n = k - 1$.

Primeiramente, denote os elementos de \mathbb{R}^k como pares (x, y) , onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{k-1}$. Defina, para cada y , a função $f_y(x) = f(x, y)$. Pelo lema 1.4.1, existe $g_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que

$$f(x, y) = f_y(0) + x f'_y(0) + x^2 g_y(x).$$

Se $f'_y(0) = 0$, então podemos escrever f da forma

$$f(x, y) = f_y(0) \pm x^2 |g_y(x)|.$$

Note que $g_y(0) = \frac{1}{2} f''_y(0) \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos uma coluna nula na matriz hessiana e, conseqüentemente, o ponto $(0, 0)$ seria degenerado, o que é um absurdo. Defina $(x_1, y_1) = \varphi(x, y) = (x\sqrt{|g_y(x)|}, y)$. Por um argumento análogo ao caso $n = 1$, existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ onde φ é um difeomorfismo e

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, y_1) = f(x, y) = f(0, y_1) \pm x_1^2.$$

Aplicando a hipótese de indução em $f(0, y_1)$, a demonstração chega ao fim no caso em que $f'_y(0) = 0$.

Logo, basta provar que sempre podemos reduzir ao caso $f'_y(0) = 0$. Para isso, vamos analisar os pontos críticos de f_y , isto é, as soluções de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Como $(d^2 f)_0$ é não degenerada, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0.$$

Segue, pelo teorema da função implícita, que existe uma vizinhança Z de $(0, 0) \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1}(0) \cap Z = \{(\varphi(y), y); y \in A\},$$

onde φ é uma função suave definida numa vizinhança $A \subset \mathbb{R}^{k-1}$ de 0, com $\varphi(0) = 0$.

Como $\text{Hess}_0(f)$ é diagonal, então $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial x}(0, 0) = 0$, para cada $i = 1, \dots, k - 1$. Além disso,

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_i}(0) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y), y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(y), y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial x}(\varphi(y), y)$$

e, conseqüentemente, em $y = 0$, temos $0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(0)$. Uma vez que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$, resulta que $(d\varphi)_0 = 0$. Defina agora $\Phi(x, y) = (x + \varphi(y), y)$ em Z . Como $(d\Phi)_{(0,0)} = \text{Id}$, então, pelo teorema da função inversa, existe $Z_1 \subset Z$ tal que Φ é um difeomorfismo em Z_1 . Além disso $f \circ \Phi$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y), y) = 0 \\ (d^2(f \circ \Phi))_{(0,0)} = (d\Phi)_{(0,0)}^T (d^2 f)_0 (d\Phi)_{(0,0)} = (d^2 f)_0. \end{cases}$$

Podemos abusar a notação e chamar $f \circ \Phi$ de f . Dessa forma, $f'_y(0) = 0$, reduzindo ao caso já provado. Concluindo assim a demonstração do lema de Morse. ■

A carta do lema de Morse será chamada de carta de Morse. Além disso, o inteiro i que aparece será chamado de índice de c e denotado por $\text{Ind}_f(c)$ ou, quando não houver risco de confusão, por $\text{Ind}(c)$. Denotaremos por $\text{Crit}_k(f)$ o conjunto dos pontos críticos de f de índice k , isto é,

$$\text{Crit}_k(f) = \{p \in \text{Crit}(f) \mid \text{Ind}(p) = k\}.$$

Uma primeira pergunta que surge é se o índice i de um ponto crítico não depende da carta de Morse φ , isto é, se ψ é outro difeomorfismo tal que

$$f \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = f(c) - \sum_{j=1}^k y_j^2 + \sum_{j=k+1}^n y_j^2,$$

então $k = i$? A proposição abaixo afirma que sim.

Proposição 1.4.4 (Unicidade do Índice). *Sejam c um ponto crítico não degenerado de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e (U, φ) a carta do lema de Morse. Se (V, ψ) é outra carta tal que*

$$\psi(c) = (0, \dots, 0) \quad e \quad f \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = f(c) - \sum_{j=1}^k y_j^2 + \sum_{j=k+1}^n y_j^2,$$

então $k = i$.

Demonstração. Como

$$\text{Hess}_0(f \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2 \end{pmatrix},$$

então i é igual à dimensão do espaço onde $\text{Hess}_0(f \circ \varphi^{-1})$ é definida negativa. Analogamente, k é a dimensão do espaço onde $\text{Hess}_0(f \circ \psi^{-1})$ é definida negativa. Além disso, note que $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$. Chamando $F = (f \circ \varphi^{-1})$ e $G = (\varphi \circ \psi^{-1})$, temos

$$\text{Hess}_0(f \circ \psi^{-1}) = \text{Hess}_0(F \circ G) = (dG)_0^T \cdot \text{Hess}_0(F) \cdot (dG)_0.$$

Já que G é um difeomorfismo, então $(dG)_0$ e $(dG)_0^T$ são matrizes invertíveis e, conseqüentemente, não alteram a dimensão de espaços. Portanto, $k = i$. ■

Nas mesmas hipóteses da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.4.5. *Se (V, ψ) é outra carta tal que*

$$\psi(c) = (0, \dots, 0) \quad \text{e} \quad f \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = f(c) - \sum_{j=1}^k a_j y_j^2 + \sum_{j=k+1}^n a_j y_j^2,$$

com $a_j \geq 1, \forall j = 1, \dots, n$, então $k = i$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $\psi(V) = B(0, \varepsilon)$ para ε muito pequeno. Defina o difeomorfismo $\gamma: \psi(V) \rightarrow V_1 \subset \psi(V)$, com $\gamma(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{a_n}} \right)$. Note que γ está bem definido, pois

$$\|\gamma(y)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j}{\sqrt{a_j}} \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} < \varepsilon.$$

Chamando $\psi_1 = \gamma^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(V_1)}$, segue que

$$\psi_1(c) = (0, \dots, 0) \quad \text{e} \quad f \circ \psi_1^{-1}(y_1, \dots, y_n) = f(c) - \sum_{j=1}^k y_j^2 + \sum_{j=k+1}^n y_j^2.$$

Portanto, aplicando a proposição anterior a ψ_1 , resulta que $k = i$. ■

Proposição 1.4.6. *O máximo e o mínimo local de uma função de Morse são pontos críticos de índice n e 0 , respectivamente, onde n é a dimensão da variedade.*

Demonstração. Vamos provar apenas o caso em que o ponto é mínimo local, pois o outro é análogo. Dessa forma, seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Se a é um ponto de mínimo local de f , então, pelo lema de Morse (1.4.2), existem um difeomorfismo φ e uma vizinhança de a tais que

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(a) - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2,$$

com (x_1, \dots, x_n) nessa vizinhança de a . Caso $i \neq 0$, então, para todo $\varepsilon > 0$ o ponto $a_\varepsilon = (0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0)$, com ε na i -ésima coordenada, é tal que $f(\varphi^{-1}(a_\varepsilon)) < f(a)$. Toda vizinhança de a contém um ponto $\varphi^{-1}(a_\varepsilon)$, para algum ε . Como a é ponto de mínimo local, $f(\varphi^{-1}(a_\varepsilon)) > f(a)$, o que é um absurdo. ■

Proposição 1.4.7. *Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $c \in \text{Crit}(f)$. Se $\text{Ind}_f(c) = i$, então $\text{Ind}_{(-f)}(c) = n - i$, onde n é a dimensão de M .*

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta de Morse. Suponha, sem perda de generalidade, que $\varphi(U) = B(0, \varepsilon)$ para ε muito pequeno. Note que

$$(-f) \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = -f(c) + \sum_{j=1}^i x_j^2 - \sum_{j=i+1}^n x_j^2 = -f(c) + \sum_{k=n-i+1}^n x_{k-(n-i)}^2 - \sum_{k=1}^{n-i} x_{k+i}^2.$$

Defina o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi: \varphi(U) &\longrightarrow \varphi(U) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_i) \end{aligned}$$

Note que ψ é bem definido, pois $\|\psi(x)\| = \sqrt{\sum_j x_j^2} < \varepsilon$. Chamando $\psi_1 = \psi^{-1} \circ \varphi$, segue que

$$\psi_1(c) = (0, \dots, 0) \quad \text{e} \quad (-f) \circ \psi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) = -f(c) - \sum_{k=1}^{n-i} x_k^2 + \sum_{k=n-i+1}^n x_k^2.$$

Portanto, pela proposição 1.4.4, temos $\text{Ind}_{(-f)}(c) = n - i$. ■

1.5 Exemplos

Nesta seção, apresentaremos algumas funções de Morse definidas na esfera S^2 (ou, mais geralmente, em S^n), no plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ e no toro T^2 .

Exemplo 1.5.1. Seja $h: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com $h(x, y, z) = z$, a função altura (veja a figura 1.1). Então h é uma função de Morse.

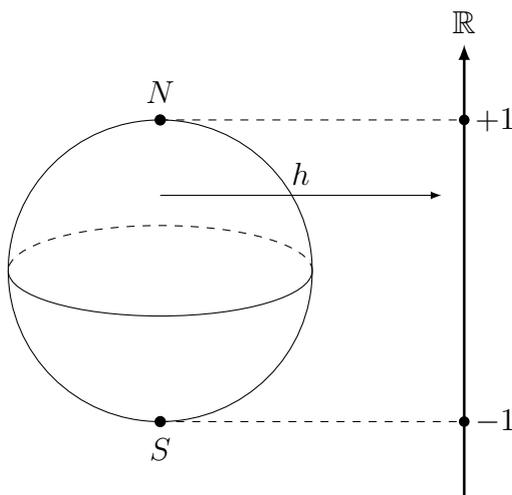


Figura 1.1: Função altura na esfera.

De fato, sejam $\varphi_1: S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2: S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ as cartas de S^2 , onde $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$, definidas por

$$\varphi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

As inversas de φ_1 e φ_2 são

$$\varphi_1^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

e

$$\varphi_2^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{-u^2 - v^2 + 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Além disso, as representações locais de h são

$$f_1 = h \circ \varphi_1^{-1}(u, v) = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \quad \text{e} \quad f_2 = h \circ \varphi_2^{-1}(u, v) = \frac{-u^2 - v^2 + 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Segue que

$$(df_1)_{(u,v)} = \left(\frac{4u}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4v}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right)$$

e

$$(df_2)_{(u,v)} = \left(\frac{-4u}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{-4v}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right).$$

Logo, $(df_1)_{(u,v)} = 0$ se, e somente se, $u = v = 0$ e, da mesma forma, $(df_2)_{(u,v)} = 0$ se, e somente se, $u = v = 0$.

Conseqüentemente, $\varphi_1^{-1}(0, 0) = S$ e $\varphi_2^{-1}(0, 0) = N$ são os únicos pontos críticos de h .

Por fim, uma vez que

$$\text{Hess}_{(0,0)}(f_1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \text{Hess}_{(0,0)}(f_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

segue que S e N são pontos críticos não degenerados de h . Portanto, h é uma função de Morse. Além disso, como S é ponto de mínimo e N é ponto de máximo, então, segue pela proposição 1.4.6, que $\text{Ind}(N) = 2$ e $\text{Ind}(S) = 0$.

Observação 1.5.2. No caso geral, sendo agora $h: S^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$, temos, por cálculos similares, que h é uma função de Morse com apenas dois pontos críticos $N = (0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, \dots, 0, -1)$, tais que $\text{Ind}(N) = n$ e $\text{Ind}(S) = 0$.

Exemplo 1.5.3 (Exercício 6 de [1]). Seja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x, y, z) = y^2 + 2z^2$. Consideremos $\varphi_i^\pm: U_i^\pm \rightarrow B$, $i = 1, 2, 3$, as cartas de S^2 , definidas por

$$\varphi_1^\pm(x, y, z) = (y, z), \quad \varphi_2^\pm(x, y, z) = (x, z) \quad \text{e} \quad \varphi_3^\pm(x, y, z) = (x, y),$$

onde

$$U_1^\pm = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \mid x = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2} \right\},$$

$$U_2^\pm = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \mid y = \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2} \right\},$$

$$U_3^\pm = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \mid z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\} \quad \text{e} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} (\varphi_1^\pm)^{-1}(y, z) &= \left(\pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z \right), & (\varphi_2^\pm)^{-1}(x, z) &= \left(x, \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z \right) \\ \text{e } (\varphi_3^\pm)^{-1}(x, y) &= \left(x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right). \end{aligned}$$

são as parametrizações de S^2 . Chame $h_i = f \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}$, $i = 1, 2, 3$, isto é,

$$h_1(y, z) = y^2 + 2z^2, \quad h_2(x, z) = 1 - x^2 + z^2 \quad \text{e} \quad h_3(x, y) = 2 - 2x^2 - y^2$$

Como $(dh_1)_{(y,z)} = (2y, 4z)$, então $(0, 0)$ é o único ponto crítico de h_1 . Além disso,

$$\text{Hess}_{(y,z)}(h_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

logo, $(\varphi_1^\pm)^{-1}(0, 0) = (\pm 1, 0, 0)$ são pontos críticos não degenerados de f . Como $h_1(y, z) = y^2 + 2z^2$ e $f(\pm 1, 0, 0) = 0$, resulta que $(\pm 1, 0, 0)$ têm índice 0.

Por outro lado, como $(dh_2)_{(x,z)} = (-2x, 2z)$, então $(0, 0)$ é o único ponto crítico de h_2 . Além disso,

$$\text{Hess}_{(x,z)}(h_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

logo, $(\varphi_2^\pm)^{-1}(0, 0) = (0, \pm 1, 0)$ são pontos críticos não degenerados de f . Como $h_2(x, z) = 1 - x^2 + z^2$ e $f(0, \pm 1, 0) = 1$, resulta que $(0, \pm 1, 0)$ têm índice 1.

Por outro lado, como $(dh_3)_{(x,y)} = (-4x, -2y)$, então $(0, 0)$ é o único ponto crítico de h_3 . Além disso,

$$\text{Hess}_{(x,y)}(h_3) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

logo, $(\varphi_3^\pm)^{-1}(0, 0) = (0, 0, \pm 1)$ são pontos críticos não degenerados de f . Como $h_3(x, y) = 2 - 2x^2 - y^2$ e $f(0, 0, \pm 1) = 2$, resulta que $(0, 0, \pm 1)$ têm índice 2.

Portanto, f é uma função de Morse com dois pontos de índice 0, dois pontos de índice 1 e dois pontos de índice 2, a saber, $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$, respectivamente.

Por fim, f induz uma função

$$\begin{aligned} g: \mathbb{RP}^2 = S^2 / \sim &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [p] &\longmapsto f(p), \end{aligned}$$

onde \sim é a relação antípoda. Observe que g está bem definida, pois $f(p) = f(-p)$. A fim de analisar os pontos críticos dessa função, tome a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi: S^2 &\longrightarrow \mathbb{RP}^2 \\ p &\longmapsto [p] \end{aligned}$$

e $a_i^\pm = \pi \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}$, $i = 1, 2, 3$. Como p pertence a U_i^+ se, e somente se, $-p$ pertence a U_i^- , segue que $\pi(U_i^+) = \pi(U_i^-)$ e, para simplificar, vamos usar $a_i = \pi \circ (\varphi_i^+)^{-1}$. A aplicação a_i é injetiva, pois $\pi|_{U_i^+}$ e $(\varphi_i^+)^{-1}$ são injetivas e, portanto, a_i é uma bijeção de seu domínio na sua imagem. Além disso, $\pi|_{U_i^+}$ admite uma inversa à esquerda, que denotaremos por ψ_i , definida em $\pi(U_i^+)$. Defina a bijeção $b_i = \varphi_i^+ \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$. Note que $(\pi(U_i^+), b_i)$, $i = 1, 2, 3$, é uma carta de \mathbb{RP}^2 cuja união forma um atlas e, além disso, $(b_i)^{-1} = a_i$, de fato, $b_i \circ a_i = \varphi_i^+ \circ \psi_i \circ \pi \circ (\varphi_i^+)^{-1} = \text{Id}_B$, logo, como a inversa é única, $b_i^{-1} = a_i$.

Segue que

$$g(b_i^{-1}(c, d)) = g\left(\pi\left((\varphi_i^+)^{-1}(c, d)\right)\right) = g\left([\left(\varphi_i^+\right)^{-1}(c, d)]\right) = f\left((\varphi_i^+)^{-1}(c, d)\right),$$

ou seja, $g \circ b_i^{-1} = f \circ (\varphi_i^+)^{-1}$. Logo, por um raciocínio análogo ao realizado para f , resulta que g é uma função de Morse com três pontos críticos não degenerados, a saber, $b_1^{-1}(0, 0) = [1, 0, 0]$, com índice 0, $b_2^{-1}(0, 0) = [0, 1, 0]$, com índice 1 e $b_3^{-1}(0, 0) = [0, 0, 1]$, com índice 2.

Exemplo 1.5.4. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - R)^2 = r^2 \text{ e } z = 0\}$, com $0 < r < R$. Seja T^2 o toro obtido pela rotação de S em torno do eixo Ox . Seja $h: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x, y, z) = z$, a função altura (veja a figura 1.2). Então h é uma função de Morse. De fato, seja

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T^2 \\ (u, v) &\longmapsto (r \sin u, (R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v). \end{aligned}$$

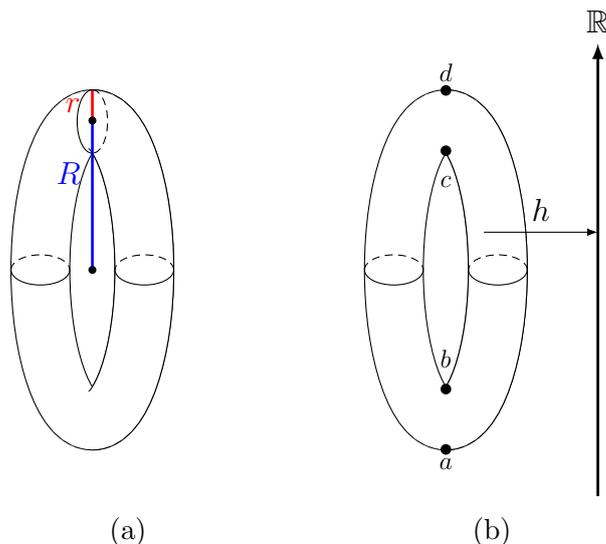


Figura 1.2: (a) Toro T^2 . / (b) A função altura no toro T^2 .

Note que $\text{Im } \varphi = T^2$, no entanto, φ não é uma parametrização do toro, pois φ não é injetiva.

Afirmção: $(d\varphi)_{(u,v)}$ é um isomorfismo para todo (u, v) em \mathbb{R}^2 .

Primeiramente, tome qualquer $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Em seguida, tome $w \in T_{(u_0, v_0)}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ e suponha que $(d\varphi)_{(u_0, v_0)}w = 0$. Seja λ a curva em \mathbb{R}^2 tal que $\lambda(0) = (u_0, v_0)$ e $\lambda'(0) = w$. Segue, omitindo o ponto (u_0, v_0) , que para toda $g \in \mathcal{C}^\infty(T^2)$ temos

$$0 = (d\varphi)(w)(g) = w(g \circ \varphi) = \left. \frac{d}{dt}(g \circ \varphi \circ \lambda) \right|_{t=0} = d(g \circ \varphi)w.$$

Tomando $g: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $g(x, y, z) = x + y$, note que

$$(g \circ \varphi)(u, v) = r \sin u + (R + r \cos u) \cos v$$

e, conseqüentemente,

$$d(g \circ \varphi)_{(u,v)} = (r \cos u - r \sin u \cos v, -(R + r \cos u) \sin v).$$

Como $d(g \circ \varphi)_{(u,v)} \neq (0, 0)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, resulta que para todo (u_0, v_0) que tomarmos $d(g \circ \varphi)_{(u_0, v_0)}$ será injetivo. Uma vez que $d(g \circ \varphi)w = 0$, segue que $w = 0$. Portanto, $(d\varphi)_{(u,v)}$ é um isomorfismo para todo (u, v) em \mathbb{R}^2 .

Logo, para encontrarmos os pontos críticos de h , basta analisar os pontos críticos de

$$\begin{aligned} f = h \circ \varphi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (R + r \cos u) \operatorname{sen} v. \end{aligned}$$

Como $(df)_{(u,v)} = (-r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, (R + r \cos u) \cos v)$, então (u, v) é ponto crítico de f se, e somente se,

$$\begin{cases} -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = 0 \\ (R + r \cos u) \cos v = 0. \end{cases}$$

Sabemos que $R + r \cos u > 0$ porque $-1 \leq \cos u \leq 1$ e $0 < r < R$ implica $-r \cos u \leq r < R$. Assim, pela segunda igualdade, temos $\cos v = 0$, isto é, $v = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um inteiro. Como $\operatorname{sen} v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1$, então, pela primeira igualdade, resulta que $\operatorname{sen} u = 0$, isto é, $u = n\pi$, onde n é um inteiro. Segue que os pontos críticos de f são os pontos em que $u = n\pi$ e $v = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Logo, uma vez que φ é uma função periódica de período 2π , segue que os pontos

$$\begin{aligned} a = \varphi\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) &= (0, 0, -(R + r)), & b = \varphi\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) &= (0, 0, -R + r), \\ c = \varphi\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) &= (0, 0, R - r) & \text{e} & \quad d = \varphi\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, R + r) \end{aligned}$$

são pontos críticos de h .

Agora, vamos mostrar que tais pontos são pontos críticos não degenerados. Para isso, observe que

$$\operatorname{Hess}_{(u,v)}(f) = \begin{pmatrix} -r \cos u \operatorname{sen} v & -r \operatorname{sen} u \cos v \\ -r \operatorname{sen} u \cos v & -(R + r \cos u) \operatorname{sen} v \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente, $\det \operatorname{Hess}_{(u,v)}(f) = rR \cos u \operatorname{sen}^2 v$. Como, no nosso caso, $u = n\pi$ e $v = \frac{\pi}{2} + k\pi$, então a matriz é invertível em tais pontos. Logo, a, b, c e d são pontos críticos não degenerados de h e, conseqüentemente, h é uma função de Morse.

Além disso, note que a é um ponto de mínimo e d é um ponto de máximo e b e c não são pontos nem de máximo e nem de mínimo (veja a figura 1.2(b)). Como a dimensão do toro é 2, resulta que o índice de a é 0, o índice de b é 1, o índice de c é 1 e o índice de d é 2.

Capítulo 2

A Condição de Smale

Neste capítulo, apresentaremos as noções de fluxo, pseudo-gradientes (§2.1) e variedades estáveis e instáveis (§2.3) a fim de descrever a condição de Smale (§2.5) sobre a transversalidade das variedades estáveis e instáveis. Por último (§2.6), apresentaremos o enunciado e uma demonstração do teorema de Smale que garante que qualquer pseudo-gradiente pode ser aproximado por um pseudo-gradiente satisfazendo a condição de Smale. Este teorema permitirá, por exemplo, no capítulo 3, mostrar a independência da homologia de Morse no sentido descrito na seção 3.3.

Neste capítulo, todas as variedades e funções são consideradas suaves. Além disso, M denotará uma variedade suave, a menos que explicitamente digamos o contrário.

2.1 Fluxo e Pseudo-Gradientes

Iniciaremos este capítulo falando de campos pseudo-gradientes, que são objetos muito importantes na teoria de Morse. Entretanto, vamos definir primeiro o que é um fluxo.

Definição 2.1.1. Seja X um campo vetorial definido em M . Um fluxo de X é uma aplicação $\varphi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que:

- $\frac{d\varphi}{dt}(x, t) = X_{\varphi(x, t)}$;
- $\varphi(x, 0) = x$;
- $\varphi(\cdot, t)$ é um difeomorfismo $\forall t \in \mathbb{R}$;
- $\varphi(\varphi(x, t_0), t_1) = \varphi(x, t_0 + t_1)$.

Denotaremos $\varphi(x, t)$ por $\varphi_X^t(x)$ ou, quando não houver risco de confusão, apenas por $\varphi^t(x)$.

Observação 2.1.2. A segunda propriedade é uma consequência da terceira e da quarta, de fato, $\varphi^0(\varphi^0(x)) = \varphi^{0+0}(x) = \varphi^0(x)$, ou seja, $\varphi^0(x) = x$, pois φ^0 é difeomorfismo.

Observação 2.1.3. Uma trajetória de X é a aplicação $\varphi(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow M$, para algum $x \in M$. A imagem de $\varphi(x, \cdot)$ é designada por linha de fluxo de X (que contém x).

Definição 2.1.4. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Um (campo) pseudo-gradiente adaptado a f é um campo vetorial X em M que satisfaz duas condições:

• Para todo ponto $p \in M$, temos $(df)_p(X_p) \leq 0$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, p é ponto crítico de f ;

• Em uma carta de Morse de uma vizinhança de um ponto $c \in \text{Crit}(f)$, X coincide com o gradiente negativo para a métrica canônica no \mathbb{R}^n , onde n é a dimensão de M .

Observação 2.1.5. Se X é um pseudo-gradiente adaptado a uma função de Morse f e $x \notin \text{Crit}(f)$, então

$$\frac{d}{ds}(f(\varphi^s(x))) = (df)_{\varphi^s(x)}(X_{\varphi^s(x)}) < 0,$$

ou seja, f é decrescente ao longo das linhas de fluxo de X .

Proposição 2.1.6. *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse definida em uma variedade compacta M . Então existe um pseudo-gradiente X adaptado a f .*

Demonstração. Note que $\#\text{Crit}(f) < \infty$, pois M é compacta. Assim, considere $\text{Crit}(f) = \{c_1, \dots, c_r\}$. O campo X pretendido será definido localmente em abertos de uma cobertura conveniente de M . A fim de obter essa cobertura, vamos tomar cartas de Morse disjuntas $(U_1, \psi_1), \dots, (U_r, \psi_r)$ centradas nesses pontos críticos e, além disso, adicionaremos mais cartas (U_j, ψ_j) até formar uma cobertura de M , que podemos supor finita (pois M é compacta), $\{U_j\}_{1 \leq j \leq k}$ tal que c_j está contido apenas em um U_j , para $j = 1, \dots, r$.

Para cada $j = 1, \dots, k$, podemos definir um campo vetorial em U_j dado por

$$X_j(x) = (d\psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} \left(-\text{grad}_{\psi_j(x)}(f \circ \psi_j^{-1}) \right).$$

Omitindo os pontos, note que em U_j vale

$$\begin{aligned} df(X_j) &= df(d\psi_j^{-1}(-\text{grad}(f \circ \psi_j^{-1}))) \\ &= -d(f \circ \psi_j^{-1})(\text{grad}(f \circ \psi_j^{-1})) = -\|\text{grad}(f \circ \psi_j^{-1})\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Porém, podemos estender X_j a M da seguinte forma:

$$\bar{X}_j(x) = \begin{cases} \varphi_j(x)X_j(x), & \text{se } x \in U_j \\ 0, & \text{se } x \notin U_j, \end{cases}$$

onde $\{\varphi_j\}$ é a partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_j\}$.

Por fim, podemos definir um campo vetorial em M dado por

$$X(x) = \sum_{j=1}^k \bar{X}_j(x).$$

Afirmção: X é um pseudo-gradiente adaptado a f .

De fato, primeiramente, observe que, para $x \in M$, temos

$$(df)_x(X_x) = \sum_{j=1}^k (df)_x(\bar{X}_j(x)) \leq \sum_{j=1}^k (\varphi_j(x))(df)_x(X_j(x)) \leq 0.$$

A segunda desigualdade segue de $\varphi_j(x) \geq 0$ e $(df)_x(X_j(x)) \leq 0, j = 1, \dots, k$, e, além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $(\varphi_j(x))(df)_x(X_j(x)) = 0, \forall j = 1, \dots, k$.

Como $\varphi_j(x) \neq 0$, para algum j , então isso ocorre quando $(df)_x(X_j(x)) = 0$. Entretanto, a desigualdade (2.1) é uma igualdade se, e somente se, x é ponto crítico.

Além disso, como c_j está apenas em um U_j , para $j = 1, \dots, r$, então podemos tomar uma carta de Morse $\tilde{U}_j \subset U_j$ tal que $\tilde{U}_j \cap U_i = \emptyset$, sempre que $j \neq i$. Segue que em \tilde{U}_j temos

$$\begin{aligned} (d\psi_j)_x(X_x) &= (d\psi_j)_x(\bar{X}_j(x)) = (d\psi_j)_x(X_j(x)) \\ &= (d\psi_j)_x\left(\left(d\psi_j^{-1}\right)_{\psi_j(x)}\left(-\text{grad}_{\psi_j(x)}(f \circ \psi_j^{-1})\right)\right) \\ &= -\text{grad}_{\psi_j(x)}(f \circ \psi_j^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto, X é um pseudo-gradiente adaptado a f . ■

2.2 Uma Discussão Sobre Cartas de Morse

Conversaremos agora um pouco sobre as cartas de Morse. Vamos apresentar uma representação das cartas de Morse como vizinhança de 0 no espaço euclidiano n -dimensional, identificando o ponto crítico com 0 e \mathbb{R}^n como $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ onde i é o índice do ponto crítico. Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e c um ponto crítico de índice i de f . Então, pelo lema de Morse (1.4.2), existe uma carta (A, φ) tal que, em $\varphi(A)$,

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(c) - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2 = f(c) + Q(x).$$

Primeiramente, vamos pensar que a forma quadrática Q vai de \mathbb{R}^n para \mathbb{R} . Defina $V_- = \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ e $V_+ = \text{span}\{e_{i+1}, \dots, e_n\}$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n . Dessa forma, Q é definida negativa em V_- , definida positiva em V_+ e $\mathbb{R}^n = V_- \oplus V_+$. Assim, se $x = (x_1, \dots, x_n)$, tome $x_- = (x_1, \dots, x_i)$ e $x_+ = (x_{i+1}, \dots, x_n)$. Note que, para cada $\varepsilon, \eta > 0$, podemos definir o conjunto

$$U = U(\varepsilon, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\varepsilon \leq Q(x) \leq \varepsilon \text{ e } \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta)\}.$$

Além disso, ∂U é composta por três partes, a saber, $\partial U = \partial_- U \cup \partial_+ U \cup \partial_0 U$ (veja a figura 2.1), onde

$$\begin{aligned} \partial_- U &= \{x \in U \mid Q(x) = -\varepsilon \text{ e } \|x_+\|^2 \leq \eta\}, \\ \partial_+ U &= \{x \in U \mid Q(x) = \varepsilon \text{ e } \|x_-\|^2 \leq \eta\}, \\ \partial_0 U &= \{x \in U \mid \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 = \eta(\varepsilon + \eta)\}. \end{aligned}$$

De fato, lembre que se A e B são conjuntos fechados, então

$$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B).$$

Tome $A = Q^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta)\}$. Note que

$$\partial A = Q^{-1}(-\varepsilon) \cup Q^{-1}(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 = \eta(\varepsilon + \eta)\}.$$

Afirmção: $A \cap \partial B = \partial_0 U$ e $\partial A \cap B = \partial_- U \cup \partial_+ U$.

Como é direto ver que $A \cap \partial B = \partial_0 U$, então provaremos apenas a segunda igualdade. Observe que $\partial A \cap B = C \cup D$, onde

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = \varepsilon \text{ e } \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta)\}$$

e

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = -\varepsilon \text{ e } \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta)\}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} x \in C &\Leftrightarrow \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 = \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta) \\ &\Leftrightarrow \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 = \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 + \eta) \\ &\Leftrightarrow \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 = \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 + \eta \|x_-\|^2 \leq \eta(\|x_+\|^2 + \eta) \\ &\Leftrightarrow \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 = \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_-\|^2 (\|x_+\|^2 + \eta) \leq \eta(\|x_+\|^2 + \eta) \\ &\Leftrightarrow \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 = \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_-\|^2 \leq \eta \\ &\Leftrightarrow x \in \partial_+ U. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $C = \partial_+ U$. Além disso, de forma análoga ao feito acima, teremos $D = \partial_- U$. Logo, $\partial A \cap B = \partial_- U \cup \partial_+ U$. Portanto, como $U = A \cap B$, resulta que

$$\partial U = \partial(A \cap B) = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B) = \partial_- U \cup \partial_+ U \cup \partial_0 U,$$

como queríamos demonstrar.

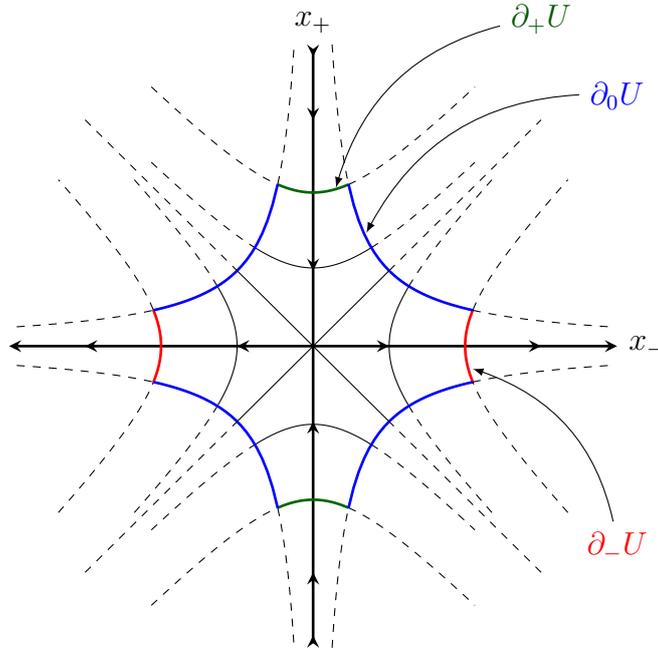


Figura 2.1: Representação de uma carta de Morse no plano.

Agora, se ε for suficientemente pequeno, então $U(\varepsilon, \eta) \subset \varphi(A)$. Logo, existe uma vizinhança de c que é descrita como a imagem de $U(\varepsilon, \eta)$ por um difeomorfismo h , a saber $h = \varphi|_{U(\varepsilon, \eta)}^{-1}$ com $h(0) = c$. Denotaremos tal vizinhança por $\Omega(c)$. Também vamos denotar $\partial_- \Omega(c) = h(\partial_- U)$, $\partial_+ \Omega(c) = h(\partial_+ U)$ e $\partial_0 \Omega(c) = h(\partial_0 U)$. Ao longo deste trabalho, pensaremos muitas vezes que as cartas de Morse são iguais às cartas $\Omega(c)$. Além disso, U é muitas vezes chamado de um modelo de Morse.

2.3 Variedades Estáveis e Instáveis

Nesta seção vamos falar um pouco sobre as variedades estáveis e instáveis, que são coleções de trajetórias que “terminam” ou “começam” em um certo ponto crítico. Além

disso, provaremos que as linhas de fluxo de um campo pseudo-gradiente “começam” e “terminam” em pontos críticos.

Definição 2.3.1. Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, $a \in \text{Crit}(f)$ e φ^s o fluxo de um pseudo-gradiente X adaptado a f . Chamaremos de variedade estável de a o conjunto

$$W^s(a) = \left\{ x \in M \mid \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi^s(x) = a \right\}$$

e chamaremos de variedade instável de a o conjunto

$$W^u(a) = \left\{ x \in M \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi^s(x) = a \right\}.$$

É importante observar que, na notação da seção anterior, se $U = U(\varepsilon, \eta)$, temos, para $f \circ h$,

$$W^s(0) = U \cap V_+ \quad \text{e} \quad W^u(0) = U \cap V_-.$$

Na verdade, é possível mostrar que as variedades estáveis e instáveis são de fato subvariedades de M , como enunciaremos abaixo.

Teorema 2.3.2. *As variedades estável e instável de um ponto crítico a são subvariedades de M que são difeomorfas a discos abertos. Além disso, nós temos*

$$\dim W^u(a) = \text{codim } W^s(a) = \text{Ind}(a).$$

Veja, por exemplo, o teorema 4.2 de [7] para a prova.

Observação 2.3.3. Aqui um disco aberto é o conjunto D^n definido em \mathbb{R}^n pelos pontos x tais que $\|x\|^2 < 1$. Ao longo deste trabalho, quando não houver risco de confusão, também denotaremos D^n o subconjunto de \mathbb{R}^n definido pelos pontos x tais que $\|x\|^2 \leq 1$, chamado de disco fechado. Neste caso, D^n é uma variedade com bordo onde ∂D^n é o conjunto dos pontos x tais que $\|x\|^2 = 1$, denotado por S^{n-1} (esfera unitária de dimensão $n - 1$).

Teorema 2.3.4. *Sejam M uma variedade compacta, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $\psi: \mathbb{R} \rightarrow M$ uma trajetória de um pseudo-gradiente X adaptado a f . Então existem $a, b \in \text{Crit}(f)$ tais que*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = a \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = b.$$

Antes da demonstração desse teorema, vamos falar um pouco sobre alguns termos que iremos utilizar. Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, tome c um ponto crítico de f e $\Omega(c)$ uma carta de Morse. Falaremos que ψ “entra” em $\Omega(c)$ quando existirem s_0 e δ_0 tais que para todos $s_0 - \delta_0 < s < s_0$ e $0 < \delta < \delta_0$ tivermos

$$\psi(s) \notin \Omega(c), \quad \psi(s_0) \in \partial_+ \Omega(c) \quad \text{e} \quad \psi(s_0 + \delta) \in \Omega(c).$$

Falaremos que ψ “sai” de $\Omega(c)$ quando existirem s_1, δ_1 tais que para todos $s_1 - \delta_1 < s < s_1$ e $0 < \delta < \delta_1$ tivermos

$$\psi(s) \in \Omega(c), \quad \psi(s_1) \in \partial_- \Omega(c) \quad \text{e} \quad \psi(s_1 + \delta) \notin \Omega(c).$$

Falaremos que ψ “nunca mais volta a entrar” em $\Omega(c)$ quando existir s_2 tal que para todo $s > s_2$ tivermos

$$\psi(s_2) \in \partial_- \Omega(c) \quad \text{e} \quad \psi(s) \notin \Omega(c).$$

Demonstração do Teorema 2.3.4. Provaremos a convergência apenas para o caso $+\infty$, o outro é análogo.

Suponha que não exista $a \in \text{Crit}(f)$ tal que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = a$, isto é, para todo $a \in \text{Crit}(f)$, $\psi(s) \notin W^s(a)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Tome

$$\Omega = \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \Omega(c),$$

onde $\Omega(c)$ é uma carta de Morse aberta centrada em c . Observe que essa união é finita, pois M é compacta. Como f é contínua e decrescente ao longo de ψ , então, para cada $c \in \text{Crit}(f)$ que ψ “entra” em $\Omega(c)$, ela deve sair e nunca mais volta a entrar. Seja s_0 o instante que ela “sai” de Ω pela última vez.

Já que $M - \Omega$ é compacto, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\forall x \in M - \Omega \quad \text{vale} \quad (df)_x(X_x) \leq -\varepsilon_0,$$

pois, caso contrário, teríamos uma sequência de pontos em $M - \Omega$ convergindo para um ponto crítico, o que é um absurdo, uma vez que $M - \Omega$ não possui pontos críticos. Consequentemente, para todo $s \geq s_0$, vale

$$\begin{aligned} f(\psi(s)) - f(\psi(s_0)) &= \int_{s_0}^s \frac{d(f \circ \psi)(t)}{dt} dt = \int_{s_0}^s (df)_{\psi(t)}(X_{\psi(t)}) dt \\ &\leq \int_{s_0}^s -\varepsilon_0 dt = -\varepsilon_0(s - s_0). \end{aligned}$$

Segue, fazendo $s \rightarrow +\infty$, que $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(\psi(s)) = -\infty$, o que é um absurdo, pois f é limitada. ■

Observação 2.3.5. O teorema acima nos garante que para todo $x \in M$, existem $a, b \in \text{Crit}(f)$ tais que $x \in W^s(a)$ e $x \in W^u(b)$.

Exemplo 2.3.6 (Veja a figura 2.2). Voltando ao exemplo 1.5.1, sendo h a função altura na esfera, $a = (0, 0, -1)$ e $b = (0, 0, 1)$, observe que para todo pseudo-gradiente adaptado a h vale

$$W^u(a) = \{a\} \quad \text{e} \quad W^s(b) = \{b\},$$

pois a é ponto de mínimo e b é ponto de máximo. Além disso, pelo teorema anterior, todo ponto x pertence a alguma variedade estável e instável. Logo, vale

$$W^s(a) = S^2 - \{b\} \quad \text{e} \quad W^u(b) = S^2 - \{a\},$$

para todo pseudo-gradiente adaptado a h .

2.4 O Teorema de Reeb

Nesta seção provaremos o teorema de Reeb, que nos fornece uma condição suficiente para uma variedade compacta ser homeomorfa à esfera.

Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então denotaremos por M^a o subnível $f^{-1}((-\infty, a])$.

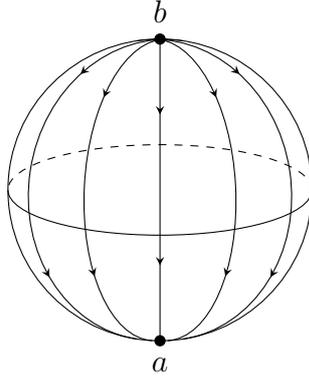


Figura 2.2: Linhas de fluxo na esfera do gradiente negativo da função altura.

Proposição 2.4.1. *Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que f não tem valores críticos no intervalo $[a, b]$. Se $f^{-1}([a, b])$ é compacto, então M^a é difeomorfo a M^b .*

Demonstração. Seja X um pseudo-gradiente adaptado a f . Defina

$$\begin{aligned} \lambda_0: f^{-1}([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\frac{1}{(df)_x(X_x)} \end{aligned}$$

Segue, pelo lema 2.26 de [3], que se U é uma vizinhança, que vamos supor limitada, de $f^{-1}([a, b])$, então existe $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $\lambda|_{f^{-1}([a, b])} = \lambda_0$ e $\text{supp } \lambda \subset U$, isto é,

$$\lambda(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(df)_x(X_x)}, & \text{se } x \in f^{-1}([a, b]) \\ 0, & \text{se } x \notin \text{supp } \lambda \subset U. \end{cases}$$

Logo, o campo vetorial $Y = \lambda X$ é nulo fora de um conjunto compacto, de modo que seu fluxo φ^s é definido para todo $s \in \mathbb{R}$.

Note que, se $\varphi^s(x) \in f^{-1}([a, b])$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(f(\varphi^s(x))) &= (df)_{\varphi^s(x)}\left(\frac{d}{ds}\varphi^s(x)\right) = (df)_{\varphi^s(x)}(Y_{\varphi^s(x)}) = \lambda(\varphi^s(x))(df)_{\varphi^s(x)}(X_{\varphi^s(x)}) \\ &= -\frac{1}{(df)_{\varphi^s(x)}(X_{\varphi^s(x)})}(df)_{\varphi^s(x)}(X_{\varphi^s(x)}) = -1. \end{aligned}$$

Logo, se $\varphi^s(x) \in f^{-1}([a, b])$, então

$$f(\varphi^s(x)) = -s + f(x).$$

Afirmção: o difeomorfismo φ^{a-b} de M leva M^a sobre M^b .

De fato, para todo $x \in M^b$, existe $y \in M$ tal que $\varphi^{a-b}(y) = x$. Note que $\varphi^{b-a}(x) \in M^b$, pois $b - a > 0$ e f é decrescente ao longo das linhas de fluxo. Como $M^b = f^{-1}(-\infty, a) \cup f^{-1}([a, b])$, então $\varphi^{b-a}(x) \in f^{-1}(-\infty, a)$ ou $\varphi^{b-a}(x) \in f^{-1}([a, b])$. Se $\varphi^{b-a}(x) \in f^{-1}(-\infty, a)$, então $\varphi^{b-a}(x) \in M^a$. Se $\varphi^{b-a}(x) \in f^{-1}([a, b])$, então

$$f(\varphi^{b-a}(x)) = a - b + f(x) \leq a - b + b = a,$$

ou seja, $\varphi^{b-a}(x) \in M^a$ e, conseqüentemente, $y = \varphi^{b-a}(x) \in M^a$. Portanto, o difeomorfismo φ^{a-b} leva M^a sobre M^b e, conseqüentemente, M^a é difeomorfo a M^b . ■

Teorema 2.4.2 (Teorema de Reeb). *Seja M uma variedade compacta de dimensão n . Se existe uma função de Morse em M com apenas dois pontos críticos, então M é homeomorfa à esfera.*

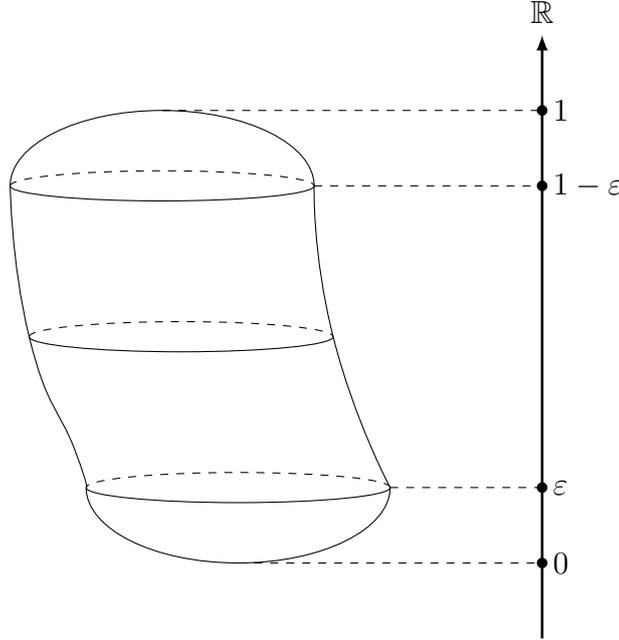


Figura 2.3: Teorema de Reeb.

Demonstração. Primeiramente, note que M é conexa, pois, como M é compacta e sem bordo, f tem em cada componente conexa de M pelo menos dois pontos críticos. Além disso, esses pontos precisam ser o máximo e o mínimo de f .

Suponha, sem perda de generalidade, que $f(M) = [0, 1]$. Segue, pelo lema de Morse (1.4.2), que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $f^{-1}([0, \varepsilon])$ e $f^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$ são difeomorfos a discos D^n (veja a figura 2.3). Além disso, pela proposição anterior, M^ε é difeomorfo a $M^{1-\varepsilon}$ e, conseqüentemente, $M^{1-\varepsilon}$ também é difeomorfo a um disco D^n . Logo, M é homeomorfa à união de dois discos, D_1^n e D_2^n , identificados ao longo de seus bordos, $S_1^{n-1} = \partial D_1^n$ e $S_2^{n-1} = \partial D_2^n$, por um difeomorfismo $\varphi: S_1^{n-1} \rightarrow S_2^{n-1}$, isto é, $M \cong D_1^n \cup_\varphi D_2^n$.

Por outro lado, S^n é homeomorfa à união de dois discos colados ao longo de seus bordos pela função identidade, isto é, $S^n \cong D_1^n \cup_{\text{Id}} D_2^n$. Dessa forma, podemos definir a aplicação

$$h: D_1^n \cup_{\text{Id}} D_2^n \rightarrow D_1^n \cup_\varphi D_2^n$$

dada por

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in D_1^n \\ \|x\| \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{se } x \in D_2^n - \{0\} \\ 0, & \text{se } x = 0 \in D_2^n. \end{cases}$$

cuja a inversa

$$h^{-1}: D_1^n \cup_\varphi D_2^n \rightarrow D_1^n \cup_{\text{Id}} D_2^n$$

é dada por

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{se } x \in D_1^n \\ \|y\|\varphi^{-1}\left(\frac{y}{\|y\|}\right), & \text{se } y \in D_2^n - \{0\} \\ 0, & \text{se } x = 0 \in D_2^n. \end{cases}$$

Note que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \|x\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0,$$

onde $x, 0 \in D_2^n$, pois

$$\left\| \|x\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - 0 \right\| = \|x\|.$$

Analogamente, teremos $\lim_{y \rightarrow 0} h^{-1}(y) = 0$ e, conseqüentemente, h é um homeomorfismo. Portanto, M é homeomorfa a S^n . ■

2.5 A Condição de Smale

Definição 2.5.1. Dizemos que duas subvariedades M e N de P são transversais no ponto $u \in P$ se

$$\begin{cases} \text{ou } u \notin M \cap N, \\ \text{ou } u \in M \cap N \text{ e } T_u M + T_u N = T_u P. \end{cases}$$

Se M e N são transversais em todos os pontos de P , então dizemos que M e N são transversais e denotamos por $M \pitchfork N$.

Proposição 2.5.2. Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, X é um pseudo-gradiente adaptado a f e a é um ponto crítico de f , então $W^u(a) \pitchfork f^{-1}(t)$ e $W^s(a) \pitchfork f^{-1}(t)$, para todo valor regular $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como $f^{-1}(t)$ tem codimensão 1 em M , então basta mostrar que X não é tangente a $f^{-1}(t)$, pois $X_p \in T_p W^u(a)$ e $X_q \in T_q W^s(a)$, para todo $p \in W^u(a)$ e $q \in W^s(a)$. Todavia, esse fato segue direto da definição de pseudo-gradiente, pois se X fosse tangente a $f^{-1}(t)$, ocorreria $df(X) = 0$, pois $-\text{grad } f$ é ortogonal aos conjuntos de nível. Porém, isso ocorreria em um ponto que não é crítico, o que é um absurdo. ■

Condição de Smale: Dizemos que um pseudo-gradiente X adaptado a uma função de Morse f satisfaz a condição de Smale quando

$$W^u(a) \pitchfork W^s(b), \quad \forall a, b \in \text{Crit}(f).$$

Exemplo 2.5.3. É verdade que, para todo ponto crítico a , $W^u(a) \pitchfork W^s(a)$. Veja o teorema 4.2 de [7] para mais detalhes.

Exemplo 2.5.4. Se a e b são pontos críticos distintos e, além disso, $f(a) < f(b)$, então $W^u(a) \pitchfork W^s(b)$, pois, como f é decrescente ao longo das linhas de fluxo, segue que $W^u(a) \cap W^s(b) = \emptyset$.

Proposição 2.5.5. *Sejam M e N duas subvariedades de uma variedade P . Seja $u \in M \cap N$ tal que*

$$T_u M + T_u N = T_u P. \quad (2.2)$$

Então, em um vizinhança de u , a interseção $M \cap N$ é uma subvariedade de P . Além disso,

$$\text{codim}(M \cap N) = \text{codim } M + \text{codim } N$$

e

$$T_u(M \cap N) = T_u M \cap T_u N.$$

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $P = \mathbb{R}^p$, pois o resultado é local. Sejam m a codimensão de M e n a codimensão de N em P . Pela proposição 1.1.26, podemos assumir que, em uma vizinhança de U de u em P , $M \cap U = f^{-1}(0)$ e $N \cap U = g^{-1}(0)$, onde $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ são submersões. Por (2.2) resulta que

$$\dim(\text{Ker}(df)_u + \text{Ker}(dg)_u) = p.$$

Tome $F = (f, g): U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e note que $F^{-1}(0) = M \cap N \cap U$. Além disso, uma vez que $(dF)_u = ((df)_u, (dg)_u)$, segue que

$$\text{Ker}(dF)_u = \text{Ker}(df)_u \cap \text{Ker}(dg)_u.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(dF)_u &= \dim \text{Ker}(df)_u + \dim \text{Ker}(dg)_u - \dim(\text{Ker}(df)_u + \text{Ker}(dg)_u) \\ &= (p - m) + (p - n) - p = p - (m + n) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $(dF)_u$ é sobrejetiva e F é uma submersão em uma vizinhança de u . Novamente, pela proposição 1.1.26, segue que $M \cap N$ é uma subvariedade de P em uma vizinhança de u . Além disso, pela demonstração, deduzimos que

$$T_u(M \cap N) = \text{Ker}(dF)_u = \text{Ker}(df)_u \cap \text{Ker}(dg)_u = T_u M \cap T_u N$$

e

$$\text{codim}(M \cap N) = \text{codim } \text{Ker}(dF)_u = m + n = \text{codim } M + \text{codim } N,$$

terminando assim a demonstração. ■

Corolário 2.5.6. *Se um pseudo-gradiente adaptado a uma função de Morse f satisfaz a condição de Smale, então, $\forall a, b \in \text{Crit}(f)$, $W^u(a) \cap W^s(b)$ é uma variedade e*

$$\dim(W^u(a) \cap W^s(b)) = \text{Ind}(a) - \text{Ind}(b),$$

sempre que $W^u(a) \cap W^s(b) \neq \emptyset$.

Demonstração. Da proposição anterior, segue que $W^u(a) \cap W^s(b)$ é uma variedade e

$$\text{codim}(W^u(a) \cap W^s(b)) = \text{codim } W^u(a) + \text{codim } W^s(b).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \dim(W^u(a) \cap W^s(b)) &= n - \text{codim}(W^u(a) \cap W^s(b)) \\ &= n - \text{codim } W^u(a) - \text{codim } W^s(b) \\ &= \dim W^u(a) - \dim W^u(b) = \text{Ind}(a) - \text{Ind}(b). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Se a condição de Smale for satisfeita, então denotaremos por $\mathcal{M}(a, b)$ a subvariedade $W^u(a) \cap W^s(b)$, isto é,

$$\mathcal{M}(a, b) = \left\{ x \in M \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi^s(x) = a \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi^s(x) = b \right\}.$$

Definição 2.5.7. Sejam a e b pontos críticos distintos de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\mathcal{M}(a, b) \neq \emptyset$. Definimos $\mathcal{M}(a, b)^t$ como sendo o conjunto $\mathcal{M}(a, b) \cap f^{-1}(t)$, onde $t \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f que está entre $f(a)$ e $f(b)$.

Proposição 2.5.8. $\mathcal{M}(a, b)^t$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}(a, b)$ (em particular de M) com codimensão 1.

Demonstração. Note que t continua sendo valor regular de $f|_{\mathcal{M}(a, b)}: \mathcal{M}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Consequentemente, $f|_{\mathcal{M}(a, b)}^{-1}(t) = \mathcal{M}(a, b)^t$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}(a, b)$ de codimensão 1, como queríamos demonstrar. ■

Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ valores regulares de f que estão entre $f(a)$ e $f(b)$ com $t_1 > t_2$. Observe que cada linha do fluxo de a para b de um campo pseudo-gradiente que satisfaz a condição de Smale intersecta $f^{-1}(t_1)$ e $f^{-1}(t_2)$ em exatamente um ponto (veja a figura 2.4). Assim, podemos identificar $\mathcal{M}(a, b)^{t_1}$ com $\mathcal{M}(a, b)^{t_2}$ de forma suave e, consequentemente, a partir de agora vamos denotar $\mathcal{M}(a, b)^t$ por $\mathcal{L}(a, b)$.

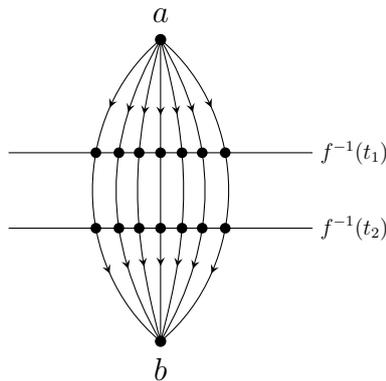


Figura 2.4: Linhas do fluxo de a para b .

Corolário 2.5.9. $\dim \mathcal{L}(a, b) = \text{Ind}(a) - \text{Ind}(b) - 1$.

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior. ■

Observação 2.5.10. Neste trabalho, sempre vamos trabalhar com $\mathcal{L}(a, b)$ não vazios, pois os casos vazios não são de nosso interesse.

Para finalizar esta seção, provaremos um resultado interessante.

Proposição 2.5.11 (Exercício 11 de [1]). *Sejam M uma variedade de dimensão 2 e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Se f tem apenas um ponto crítico de índice 1, então todo pseudo-gradiente adaptado a f satisfaz a condição de Smale.*

Demonstração. Se f tem apenas um ponto crítico, então nada temos a provar. Dessa forma, suponha que f tenha mais de um ponto crítico. Além disso, vamos supor que f tenha pontos críticos de índice 0 e 2, pois os outros casos são análogos.

Sejam a_i e c_i pontos de índice 0 e 2, respectivamente. Observe que $W^s(c_i) = \{c_i\}$ e $W^u(a_i) = \{a_i\}$, pois c_i são máximos locais e a_i são mínimos locais. Segue que $W^u(a_i) \pitchfork W^s(c_j)$, $W^u(a_i) \pitchfork W^s(a_j)$, $W^u(c_i) \pitchfork W^s(c_j)$.

Agora, sejam a e c pontos quaisquer de índice 0 e 2, respectivamente, e seja b o único ponto de índice 1. Pelo observado acima, $W^u(b) \pitchfork W^s(c)$ e $W^u(a) \pitchfork W^s(b)$, logo, só nos resta analisar $W^u(c) \cap W^s(b)$, $W^u(b) \cap W^s(a)$ e $W^u(c) \cap W^s(a)$. Se $W^u(c) \cap W^s(b) \neq \emptyset$, então observe que $\dim(T_p W^u(c) \cap T_p W^s(b)) \leq 1$, pois $\dim(T_p W^u(c)) = 2$ e $\dim(T_p W^s(b)) = 1$. Segue que

$$\begin{aligned} 2 &\geq \dim(T_p W^u(c) + T_p W^s(b)) \\ &= \dim(T_p W^u(c)) + \dim(T_p W^s(b)) - \dim(T_p W^u(c) \cap T_p W^s(b)) \\ &\geq 2 + 1 - 1 = 2, \end{aligned}$$

isto é, $\dim(T_p W^u(c) + T_p W^s(b)) = 2$. Logo, $W^u(c) \pitchfork W^s(b)$.

Além disso, se $W^u(b) \cap W^s(a) \neq \emptyset$, então observe que $\dim(T_p W^u(b) \cap T_p W^s(a)) \leq 1$, pois $\dim(T_p W^u(b)) = 1$ e $\dim(T_p W^s(a)) = 2$. Segue, por um raciocínio análogo ao caso anterior, que $W^u(b) \pitchfork W^s(a)$.

Por fim, se $W^u(c) \cap W^s(a) \neq \emptyset$, então $\dim(T_p W^u(c) \cap T_p W^s(a)) \leq 2$. Segue que

$$\begin{aligned} 2 &\geq \dim(T_p W^u(c) + T_p W^s(a)) \\ &= \dim(T_p W^u(c)) + \dim(T_p W^s(a)) - \dim(T_p W^u(c) \cap T_p W^s(a)) \\ &\geq 2 + 2 - 2 = 2, \end{aligned}$$

isto é, $\dim(T_p W^u(c) + T_p W^s(a)) = 2$. Logo, $W^u(c) \pitchfork W^s(a)$.

Portanto, já que nossos cálculos foram independentes do campo, resulta que todo pseudo-gradiente adaptado a f satisfaz a condição de Smale. ■

2.6 O Teorema de Smale

Teorema 2.6.1 (Teorema de Smale). *Seja M uma variedade com bordo e seja f uma função de Morse em M com valores críticos distintos. Fixamos, para cada ponto crítico de f , uma carta de Morse. Seja Ω a união de todas essas cartas e seja X um campo pseudo-gradiente em M que é transversal ao bordo. Então existe um campo pseudo-gradiente X' que está próximo de X (no sentido \mathcal{C}^1), igual a X em Ω e para o qual temos*

$$W_{X'}^s(a) \pitchfork W_{X'}^u(b)$$

para todos os pontos críticos a, b de f .

Demonstração. Por simplicidade, chamaremos tal X' de uma boa aproximação de X . Sejam c_1, \dots, c_q os pontos críticos de f . Como os valores críticos de f são distintos, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_q$, onde $\alpha_i = f(c_i)$. Antes de continuarmos a demonstração, enunciaremos um lema.

Lema 2.6.2. *Sejam $j \in \{1, \dots, q\}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\alpha_j + 2\varepsilon < \alpha_{j-1}$. Então existe uma boa aproximação X' (no sentido \mathcal{C}^1) de X tal que:*

- O campo vetorial X' coincide com X no complementar de $f^{-1}([\alpha_j + \varepsilon, \alpha_j + 2\varepsilon])$ em M .
- A variedade estável de c_j (para X') é transversal às variedades instáveis de todos os pontos críticos de f , isto é,

$$W_{X'}^s(c_j) \pitchfork W_{X'}^u(c_i), \forall i = 1, \dots, q.$$

Primeiramente, vamos supor o lema e provar o teorema. Tome $\mathcal{P}(r)$ denotando a seguinte propriedade: existe uma boa aproximação X'_r de X tal que para todo $p \leq r$ e todo i , temos

$$W_{X'_r}^s(c_p) \pitchfork W_{X'_r}^u(c_i).$$

A prova vai ser por indução em r . Note que $\mathcal{P}(q)$ é exatamente o teorema e $\mathcal{P}(1)$ é verdade, pois, uma vez que c_1 é ponto de máximo de f , segue que $W^s(c_1) = \{c_1\}$. Além disso, $\mathcal{P}(2)$ segue do lema com $j = 2$.

Suponha então que $\mathcal{P}(r-1)$ seja verdade. Segue que existe um campo vetorial X'_{r-1} tal que a variedade estável de c_{r-1} é transversal a todas as variedades instáveis. Aplicando o lema ao campo vetorial X'_{r-1} e $j = r$, encontramos um campo vetorial X'_r que coincide com X'_{r-1} fora da faixa $\alpha_r + \varepsilon \leq f \leq \alpha_r + 2\varepsilon$. Como, para $p \leq r-1$, a variedade estável de c_p com respeito a X'_{r-1} está situada acima desta faixa, resulta que a variedade estável de c_p com respeito a X'_r é igual à variedade estável com respeito a X'_{r-1} . Logo,

$$W_{X'_{r-1}}^s(c_p) \cap W_{X'_{r-1}}^u(c_i) = W_{X'_r}^s(c_p) \cap W_{X'_r}^u(c_i)$$

para $p \leq r-1$ e para todo i , de modo que

$$W_{X'_r}^s(c_p) \pitchfork W_{X'_r}^u(c_i).$$

Por fim, para $p = r$ a transversalidade segue diretamente do lema e, conseqüentemente, $\mathcal{P}(r)$ é verdade, encerrando assim a indução e a demonstração do teorema. ■

Demonstração do Lema 2.6.2. Tome ε suficientemente pequeno tal que $\alpha_j + 2\varepsilon < \alpha_{j-1}$. Sejam k o índice de c_j e $Q = W^s(c_j) \cap f^{-1}(\alpha_j + 2\varepsilon)$. Note que Q é uma esfera de dimensão $n - k - 1$. Pelo teorema da vizinhança tubular (teorema 6.24 de [3]), existe uma vizinhança (tubular) V de Q em $f^{-1}(\alpha_j + 2\varepsilon)$ e um difeomorfismo $h: Q \times D^k \rightarrow V$, onde D^k é identificado com um disco de dimensão k em $f^{-1}(\alpha_j + \varepsilon)$ e $h(q, 0) = q$, para todo $q \in Q$.

Segue que existe um mergulho, induzido pelo fluxo,

$$\Psi: D^k \times Q \times [0, m] \rightarrow f^{-1}([\alpha_j + \varepsilon, \alpha_j + 2\varepsilon])$$

tal que:

- Ψ restrito a $\{0\} \times Q \times \{0\}$ é um mergulho de Q em $f^{-1}(\alpha_j + \varepsilon)$;
- Ψ restrito a $\{0\} \times Q \times \{m\}$ é um mergulho de Q em $f^{-1}(\alpha_j + 2\varepsilon)$;
- Se z é a coordenada em $[0, m]$, então

$$d\Psi\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) = X.$$

Note que $\Psi(x, q, z) = \varphi_Y^{t(z)}(h(x, q))$, onde Y é o campo definido como na proposição 2.4.1, φ_Y^s é o respectivo fluxo e

$$t(z) = -\frac{\varepsilon}{m}z + \varepsilon,$$

é um mergulho que satisfaz as duas primeiras condições. A última propriedade pode ser obtida pelo teorema 9.22 de [3].

Como as variedades instáveis são transversais aos conjuntos de nível, então elas intersectam $V \cong D^k \times Q$ ao longo de uma variedade P' . Se $W_{X'}^s(c_j) \pitchfork P'$, então nada temos a provar. Dessa forma, o que faremos agora é modificar X para X' em $f^{-1}([\alpha_j + \varepsilon, \alpha_j + 2\varepsilon])$ de tal forma que

$$W_{X'}^s(c_j) \pitchfork P'.$$

Seja P a subvariedade $\Psi^{-1}(P') \subset D^k \times Q \times [0, m]$. Segue que $W_{X'}^s(c_j) \pitchfork P$ se, e somente se,

$$W_{X'}^s \pitchfork P, \quad \text{com } W_{X'}^s = \{\varphi_{X'}^{-s}(0, q, 0) \mid s > 0, q \in Q\}$$

e $\varphi_{X'}^s$ é o fluxo do campo Ψ^*X' em $D^k \times Q \times [0, m]$. Para simplificar a notação, denotaremos os campos Ψ^*X e Ψ^*X' em $D^k \times Q \times [0, m]$ por X e X' , respectivamente.

Inicialmente, tomamos $X' = X = -\frac{\partial}{\partial z}$ e, conseqüentemente,

$$P \cap W_X^s = P \cap \{(0, q, s) \mid s > 0, q \in Q\} = P \cap \{(0, q, m) \mid q \in Q\} = g^{-1}(0),$$

onde g é a projeção

$$\begin{aligned} g: P &\longrightarrow D^k \\ (x, q, z) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Sard (1.3.2) existe w em D^k , muito próximo de 0, tal que w é valor regular de g . Suponha que seja possível construir uma perturbação X' do campo vetorial X tal que

$$W_{X'}^s \cap \{z = m\} = \{\varphi_{X'}^{-m}(0, q, 0) \mid q \in Q\} = \{(w, q, m) \mid q \in Q\}.$$

Segue que $W_{X'}^s \cap P = g^{-1}(w)$ e, conseqüentemente, $W_{X'}^s \cap P$ é uma subvariedade de codimensão k em P . Logo, uma vez que

$$\text{codim}_P W_{X'}^s \cap P = \text{codim}_M W_{X'}^s,$$

temos que $W_{X'}^s$ é transversal a P , como queríamos demonstrar. Vamos agora construir tal perturbação. A construção segue do seguinte lema:

Lema 2.6.3. *Existe um campo vetorial X' próximo de $-\partial/\partial z$ (no sentido \mathcal{C}^1) tal que:*

- $X' = -\partial/\partial z$ próximo de $\partial(D^k \times Q \times [0, m])$;
- $\varphi_{X'}^{-m}(0, q, 0) = (w, q, m)$.

Demonstração. Seja (w_1, \dots, w_k) as coordenadas de w em D^k . Defina

$$X' = -\frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^k \beta(z)\gamma(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde:

• A função suave β_i é nula no complementar de $[0, m]$ e satisfaz $|\beta_i(s)| < \eta$, $|\beta'_i(s)| < \eta$ e $\int_0^m \beta_i(t)dt = w_i$, com η suficientemente pequeno;

• A função suave γ é definida em D^k , toma valores em $[0, 1]$, é identicamente nula perto de ∂D^k e satisfaz $\gamma = 1$ em $\|x\| \leq 1/3$ e $|\partial\gamma/\partial x_i| \leq 2$.

Como γ é nula perto de ∂D^k , segue que X' satisfaz a primeira propriedade. Falta provar que ele satisfaz a segunda propriedade. Para isso, tome o campo vetorial

$$X'' = -\frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^k \beta_i(z) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Para determinar $\varphi_{X''}^{-m}(0, q, 0)$, precisamos resolver o sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial s} = -\beta_i(z(s)), & x(0) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial s} = 0, & q(0) = q \\ \frac{\partial z}{\partial s} = -1, & z(0) = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} x_i(s) = \int_0^s -\beta_i(-t)dt = \int_0^{-s} \beta_i(t)dt \\ q(s) = q \\ z(s) = -s. \end{cases}$$

Logo, $\varphi_{X''}^{-m}(0, q, 0) = (w, q, m)$. Como $s \in [-m, 0]$ e $\|x(s)\| \leq 1/3$, para $\|w\|$ suficientemente pequeno, então nós permanecemos na parte do disco onde $\gamma = 1$, de modo que a fórmula encontrada é, na verdade, também do fluxo de X' . ■

Concluindo assim a prova do lema 2.6.2. ■

Capítulo 3

A Homologia de Morse

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos básicos de homologia (§3.1), definiremos a homologia de Morse (§3.2) associada a uma função de Morse f e a um pseudo-gradiente X adaptado a f , provaremos que esta homologia é independente de f e de X (§3.3) e mostraremos que ela está bem definida (§3.4).

Neste capítulo, todas as variedades e funções são consideradas suaves. Além disso, M denotará uma variedade suave compacta, f denotará uma função de Morse definida em M e X denotará um pseudo-gradiente adaptado a f , a menos que explicitamente digamos o contrário.

3.1 Homologia

Inicialmente, vamos falar de alguns conceitos básicos de homologia. Para maiores detalhes veja, por exemplo, [8].

Definição 3.1.1. Seja A um anel comutativo com unidade. Um complexo de cadeias sobre A ou simplesmente um complexo é uma sequência $\mathcal{C} = (C_k, \partial^k)$ de A -módulos C_k , $k \geq 0$ inteiro, e homomorfismos $\partial^k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ tais que $\partial^k \circ \partial^{k+1} = 0$, isto é,

$$\mathcal{C}: \cdots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial^{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial^k} C_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial^1} C_0 \xrightarrow{\partial^0} 0.$$

Se A é um corpo, então C_k são espaços vetoriais sobre A . Além disso, o homomorfismo ∂^k será chamado de operador de bordo, muitas vezes denotado apenas por ∂ .

Observação 3.1.2. Como $\partial^k \circ \partial^{k+1} = 0$, então $\text{Im } \partial^{k+1} \subset \text{Ker } \partial^k$.

Definição 3.1.3. A homologia de dimensão k do complexo \mathcal{C} é o A -módulo quociente

$$H_k(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ker } \partial^k}{\text{Im } \partial^{k+1}}.$$

Definição 3.1.4. Sejam $\mathfrak{X} = (X_k, \partial_1^k)$ e $\mathfrak{Y} = (Y_k, \partial_2^k)$ complexos. Um morfismo $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ é uma sequência de homomorfismos $f_k: X_k \rightarrow Y_k$ tais que

$$f_k(\partial_1^{k+1}x) = \partial_2^{k+1}f_{k+1}(x), \forall x \in X_{k+1}.$$

Note que se $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ é um morfismo, então todos os retângulos do diagrama abaixo são comutativos.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & X_{k+1} & \xrightarrow{\partial_1^{k+1}} & X_k & \xrightarrow{\partial_1^k} & X_{k-1} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & X_0 \\ & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & & & \downarrow f_0 \\ \cdots & \rightarrow & Y_{k+1} & \xrightarrow{\partial_2^{k+1}} & Y_k & \xrightarrow{\partial_2^k} & Y_{k-1} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & Y_0 \end{array}$$

Além disso, f_k induz um homomorfismo $(f_k)_*: H_k(\mathfrak{X}) \rightarrow H_k(\mathfrak{Y})$, dado por $(f_k)_*([x]) = [f_k(x)]$. Note que $(f_k)_*$ está bem definido, pois $f_k(\text{Ker } \partial_1^k) \subset \text{Ker } \partial_2^k$ e $f_k(\text{Im } \partial_1^{k+1}) \subset \text{Im } \partial_2^{k+1}$.

Definição 3.1.5. Uma sequência exata é uma sequência de homomorfismos de A -módulos

$$\cdots \rightarrow M_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} M_k \xrightarrow{f_k} M_{k-1} \rightarrow \cdots$$

tal que o $\text{Ker}(f_k) = \text{Im}(f_{k+1})$.

3.2 A Homologia de Morse Módulo 2

Lembrando que $\text{Crit}_k(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de f de índice k , vamos definir o espaço vetorial

$$C_k(f) = \left\{ \sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c \mid a_c \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

Definição 3.2.1. Chamaremos de operadores de bordo ou diferenciais de Morse as aplicações

$$\begin{aligned} \partial_X^k: C_k(f) &\longrightarrow C_{k-1}(f) \\ a &\longmapsto \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}} n_X(a, b)b, \end{aligned}$$

onde $n_X(a, b) = \#\mathcal{L}(a, b) \pmod{2}$.

Nós vamos provar, na seção 3.4, que o operador de bordo ∂_X^k dado acima está bem definido, isto é, que $\#\mathcal{L}(a, b)$ é de fato finito quando $\text{Ind}(a) = \text{Ind}(b) + 1$. Para simplificar a notação, muitas vezes, usaremos ∂_X ou ∂^k ou simplesmente ∂ em vez de ∂_X^k .

Definição 3.2.2. Chamaremos a sequência $\mathcal{C}(f) = (C_*(f), \partial_X)$ de complexo de Morse de f . Além disso, sua homologia de dimensão k será denotada por

$$H_k(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ker } \partial_X^k}{\text{Im } \partial_X^{k+1}}.$$

Quando não houver risco de confusão, denotaremos $\mathcal{C}(f)$ por \mathcal{C} . Observe que precisamos provar que $\partial_X^2 = 0$ para, de fato, \mathcal{C} ser um complexo. Provaremos isso na seção 3.4.

Observação 3.2.3. Para provar que $\partial_X^2 = 0$, note que, se $a \in \text{Crit}_{k+1}(f)$, temos

$$\partial_X \circ \partial_X(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}} \left(\sum_{c \in \text{Crit}_k} n_X(a, c) n_X(c, b) \right) b.$$

Logo, basta provar que

$$\sum_{c \in \text{Crit}_k} n_X(a, c) n_X(c, b) = 0 \pmod{2}.$$

Porém, este número é igual à cardinalidade da união disjunta

$$\bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b).$$

Com isso em mente, vamos definir uma “compactificação” de $\mathcal{L}(a, b)$ (§3.4). Em seguida, depois de alguns resultados, mostraremos que a união acima (com $\text{Ind}(a) - \text{Ind}(b) = 2$) é o bordo de dimensão 0 dessa compactificação de dimensão 1, o que irá resultar em uma cardinalidade par dessa união, ou seja, uma cardinalidade 0 módulo 2.

Observação 3.2.4. Da mesma maneira que definimos a homologia com os coeficientes em \mathbb{Z}_2 , podemos definir uma homologia sobre \mathbb{Z} , porém, nela consideramos a orientação das variedades estáveis e instáveis. Ela é chamada de homologia integral e não será usada ao longo deste trabalho, porém, a maioria dos resultados permanecem válidos nela.

Exemplo 3.2.5. Seja $h: S^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$, a função altura (como na observação 1.5.2). Note que $C_0(h) = C_n(h) = \mathbb{Z}_2$ e $C_k(h) = 0$, para $k \neq 0, n$ e $\partial^k = 0$ para todo k . Logo,

$$H_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq 0, n \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } k = 0, n. \end{cases}$$

3.3 A Independência da Homologia de Morse

Antes de provarmos que a homologia de Morse módulo 2 está bem definida, vamos provar que ela não depende da função nem do campo pseudo-gradiente escolhido. Para isso, suponha que a homologia que definimos esteja bem definida.

Teorema 3.3.1. *Sejam $f_0, f_1: M \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de Morse e sejam X_0, X_1 pseudo-gradientes adaptados a f_0 e f_1 , respectivamente, satisfazendo a condição de Smale. Então existe um morfismo de complexos*

$$\Phi_*: (C_*(f_0), \partial_{X_0}) \rightarrow (C_*(f_1), \partial_{X_1})$$

que induz um isomorfismo na homologia.

Demonstração. Considere a homotopia de f_0 para f_1

$$\begin{aligned} F: M \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, s) &\mapsto F_s(x) = F(x, s) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{cases} F_s = f_0, & \text{se } s \in [0, 1/3] \\ F_s = f_1, & \text{se } s \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Note que podemos supor F suave. De fato, no teorema 2.25 de [3] tome $A = [0, 1/3]$ e $U = (-\varepsilon, 2/3)$, onde ε é pequeno. Segue que existe uma função *bump* suave β para A com suporte em U . Podemos então definir

$$F_s(x) = (1 - \beta(s))f_1(x) + \beta(s)f_0(x), \quad s \in [0, 1]$$

que é suave. Sempre que considerarmos uma homotopia nessa demonstração, iremos considerar ela suave.

Para provar o teorema seguiremos os seguintes passos:

- (1) Usaremos F para construir um morfismo $\Phi^F : (C_*(f_0), \partial_{X_0}) \longrightarrow (C_*(f_1), \partial_{X_1})$;
- (2) Provaremos que se $(f_1, X_1) = (f_0, X_0)$ e $I_s(x) = f_0(x)$ para todo $x \in M$ e $s \in [0, 1]$, então $\Phi^I = \text{Id}$;
- (3) Por fim, provaremos que se f_2 é uma função de Morse, X_2 é um pseudo-gradiente adaptado a f_2 satisfazendo a condição de Smale, G é uma homotopia entre f_1 e f_2 que é constante em $[0, 1/3]$ e em $[2/3, 1]$ e H é uma homotopia de f_0 e f_2 com as mesmas propriedades de G , então os morfismos induzidos na homologia por $\Phi^G \circ \Phi^F$ e Φ^H coincidem.

Antes de provar essas propriedades, suponha que elas sejam válidas. Para ver que Φ^F induz um isomorfismo na homologia, tome uma homotopia G de f_1 e f_0 e a homotopia constante $H = I$ entre f_0 em si mesmo. Denote os morfismos induzidos por Φ^F e Φ^G nas homologias por Φ_F e Φ_G . Pelas propriedades acima teremos que $\Phi_F \circ \Phi_G = \text{Id}$, isto é, Φ_F é um isomorfismo cujo o inverso é Φ_G . Portanto, Φ^F induz um isomorfismo na homologia e, conseqüentemente, a homologia de Morse não depende da função e nem do campo pseudo-gradiente escolhido.

Primeiro Passo.

Primeiramente, vamos estender F para $M \times [-1/3, 4/3]$ como segue

$$\begin{cases} F_s = f_0, & \text{se } s \in [-1/3, 0] \\ F_s = f_1, & \text{se } s \in [1, 4/3]. \end{cases}$$

Tome agora uma função de Morse $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (veja a figura 3.1) que é crescente em $(-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty)$, cujos pontos críticos são 0 e 1. Além disso, tome $g(0)$ suficientemente grande (de forma que $g(0) > f_1(y) - f_0(x)$ para todo $x, y \in M$) e g suficientemente decrescente em $(0, 1)$ tal que

$$\forall x \in M, \forall s \in (0, 1), \frac{\partial F}{\partial s}(x, s) + g'(s) < 0.$$

Essa função g existe, pois $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ quando $s \in (0, 1/3] \cup [2/3, 1)$.

Note que a função $\tilde{F} = F + g: M \times [-1/3, 4/3] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse tal que

$$\text{Crit}(\tilde{F}) = \text{Crit}(f_0) \times \{0\} \cup \text{Crit}(f_1) \times \{1\}.$$

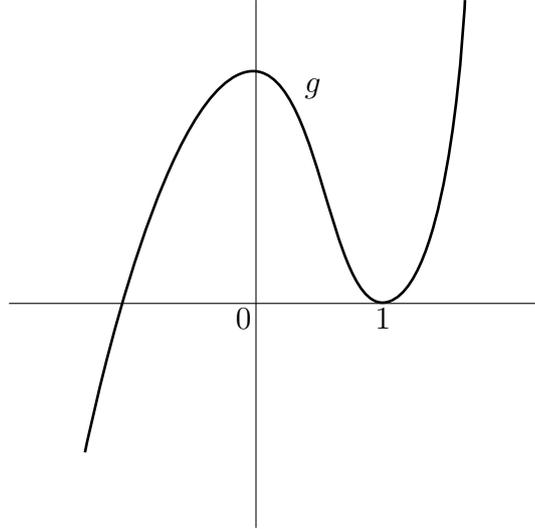


Figura 3.1: A função g .

Além disso, se $a \in \text{Crit}(f_0)$ e $b \in \text{Crit}(f_1)$, então

$$\text{Ind}_{\tilde{F}}(a, 0) = \text{Ind}_{f_0}(a) + 1 \quad \text{e} \quad \text{Ind}_{\tilde{F}}(b, 1) = \text{Ind}_{f_1}(b).$$

Usando uma partição da unidade podemos construir um campo pseudo-gradiente X que é adaptado a \tilde{F} e coincide com

$$\begin{cases} X_0 - \text{grad } g & \text{em } M \times [-1/3, 1/3] \\ X_1 - \text{grad } g & \text{em } M \times [2/3, 4/3]. \end{cases}$$

Note que este campo pseudo-gradiente é transversal ao bordo de $M \times [-1/3, 4/3]$. Segue, pelo teorema de Smale (2.6.1) que podemos perturbar um pouco X para ele satisfazer a condição de Smale e, além disso, podemos assumir que o campo pseudo-gradiente resultante \tilde{X} é transversal a $M \times \{s\}$, onde $s \in \{-1/3, 1/3, 2/3, 4/3\}$. Mais ainda, podemos fazer essa perturbação suficientemente pequena para que $\partial_X = \partial_{\tilde{X}}$, isto é, o número de trajetórias de X conectando dois pontos críticos de índices consecutivos é o mesmo número de trajetórias de \tilde{X} conectando estes mesmos dois pontos críticos. Logo, podemos escolher \tilde{X} tal que

$$\begin{aligned} \left(C_* \left(\tilde{F} \Big|_{M \times [-1/3, 1/3]} \right), \partial_{\tilde{X}} \right) &= \left(C_* \left(f_0 + g \Big|_{[-1/3, 1/3]} \right), \partial_{X_0 - \text{grad } g} \right) \\ &= (C_{*+1}(f_0), \partial_{X_0}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(C_* \left(\tilde{F} \Big|_{M \times [2/3, 4/3]} \right), \partial_{\tilde{X}} \right) &= \left(C_* \left(f_1 + g \Big|_{[2/3, 4/3]} \right), \partial_{X_1 - \text{grad } g} \right) \\ &= (C_*(f_1), \partial_{X_1}). \end{aligned}$$

Vamos agora analisar o complexo associado a \tilde{F} e \tilde{X} em $M \times [-1/3, 4/3]$. É possível dividir em dois grupos as trajetórias de \tilde{X} que ligam dois pontos críticos de \tilde{F} . O primeiro grupo são as trajetórias que permanecem na seção $s \in [-1/3, 1/3]$ e na seção $s \in [2/3, 4/3]$, isto é, as trajetórias de X_0 e X_1 respectivamente. O segundo grupo

são as trajetórias que saem de um ponto crítico de f_0 (na seção $s \in [-1/3, 1/3]$) e vão para um ponto crítico de f_1 (na seção $s \in [2/3, 4/3]$). Note que não existe um grupo de trajetórias que saem de um ponto crítico de f_1 para um ponto crítico de f_0 , pois $\tilde{F}(x, 0) > \tilde{F}(y, 1)$ para todo $x, y \in M$, uma vez que tomamos $g(0)$ suficientemente grande. Logo,

$$C_{k+1}(\tilde{F}) = C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_1).$$

Segue que

$$\partial_{\tilde{X}}: C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_1) \longrightarrow C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1)$$

é matricialmente da forma

$$\partial_{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi^F: C_k(f_0) &\longrightarrow C_k(f_1) \\ a &\longmapsto \sum_{b \in \text{Crit}_k(f_1)} n_{\tilde{X}}(a, b)b, \end{aligned}$$

com $n_{\tilde{X}}(a, b)$ sendo o número de trajetórias de \tilde{X} conectando $(a, 0) \in M \times \{0\} \cap \text{Crit}(\tilde{F})$ em $(b, 1) \in M \times \{1\} \cap \text{Crit}(\tilde{F})$ módulo 2. De fato, tome $(a, 0) \in \text{Crit}_k(f_0) \times \{0\} \subset \text{Crit}_{k+1}(\tilde{F})$ e $(c, 1) \in \text{Crit}_{k+1}(f_1) \times \{1\} \subset \text{Crit}_{k+1}(\tilde{F})$. Segue que

$$\partial_{\tilde{X}}(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_k(\tilde{F})} n_{\tilde{X}}(a, b)b = \partial_{X_0}(a) + \Phi^F(a)$$

e

$$\partial_{\tilde{X}}(c) = \sum_{b \in \text{Crit}_k(\tilde{F})} n_{\tilde{X}}(c, b)b = \sum_{b \in \text{Crit}_k(f_0)} n_{\tilde{X}}(c, b)b + \partial_{X_1}(c) = \partial_{X_1}(c),$$

pois $n_{\tilde{X}}(c, b) = 0$ quando $b \in \text{Crit}_k(f_0)$. Consequentemente, $\partial_{\tilde{X}}$ é matricialmente da forma (3.1).

Como $\partial_{\tilde{X}} \circ \partial_{\tilde{X}} = 0$, então

$$\Phi^F \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_1} \circ \Phi^F = 0,$$

ou seja,

$$\Phi^F \circ \partial_{X_0} = \partial_{X_1} \circ \Phi^F \pmod{2}.$$

Portanto, Φ^F é um morfismo entre complexos.

Segundo Passo.

Se $f_1 = f_0$ e $X_0 = X_1$, então defina

$$\begin{aligned} I: M \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, s) &\longmapsto f_0(x). \end{aligned}$$

Tomando g como no primeiro passo, temos que o campo vetorial $X = X_0 - \text{grad } g$ é um campo pseudo-gradiente que satisfaz a condição de Smale. Além disso, para todo ponto crítico a de f_0 existe uma única trajetória de X que conecta $(a, 0)$ em $(c, 1)$ com $\text{Ind}_{f_0}(a) = \text{Ind}_{f_0}(c)$. Essa trajetória é a trajetória que liga $(a, 0)$ em $(a, 1)$. Portanto, $\Phi^I = \text{Id}$.

Terceiro Passo.

Tome agora homotopias F, G e H de f_0 para f_1 , f_1 para f_2 e f_0 para f_2 , respectivamente. Defina agora a função

$$\begin{aligned} K: M \times [-1/3, 4/3] \times [-1/3, 4/3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, s, t) &\longmapsto K_{s,t}(x) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{cases} K_{s,t} = H_t, & \text{se } s \in [-1/3, 1/3] \\ K_{s,t} = G_t, & \text{se } s \in [2/3, 4/3] \\ K_{s,t} = F_s, & \text{se } t \in [-1/3, 1/3] \\ K_{s,t} = f_2, & \text{se } t \in [2/3, 4/3]. \end{cases}$$

Tome g a mesma função de Morse do primeiro passo mas agora satisfazendo

$$\frac{\partial K}{\partial s}(x, s, t) + g'(s) < 0, \forall (x, s, t) \in M \times (0, 1) \times [-1/3, 4/3]$$

e

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, s, t) + g'(t) < 0, \forall (x, s, t) \in M \times [-1/3, 4/3] \times (0, 1).$$

Note que a função

$$\begin{aligned} \tilde{K}: M \times [-1/3, 4/3] \times [-1/3, 4/3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, s, t) &\longmapsto K_{s,t}(x) + g(s) + g(t) \end{aligned}$$

é uma função de Morse tal que

$$\begin{aligned} \text{Crit}(\tilde{K}) = & (\text{Crit}(f_0) \times \{0\} \times \{0\}) \cup (\text{Crit}(f_1) \times \{1\} \times \{0\}) \cup \\ & (\text{Crit}(f_2) \times \{0\} \times \{1\}) \cup (\text{Crit}(f_2) \times \{1\} \times \{1\}). \end{aligned}$$

Além disso, se $a \in \text{Crit}(f_0)$, $b \in \text{Crit}(f_1)$ e $c \in \text{Crit}(f_2)$, então

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\tilde{K}}(a, 0, 0) &= \text{Ind}_{f_0}(a) + 2, & \text{Ind}_{\tilde{K}}(b, 1, 0) &= \text{Ind}_{f_1}(b) + 1 \\ \text{Ind}_{\tilde{K}}(c, 0, 1) &= \text{Ind}_{f_2}(c) + 1 & \text{e } \text{Ind}_{\tilde{K}}(c, 1, 1) &= \text{Ind}_{f_2}(c). \end{aligned}$$

Sejam X, Y, Z e X_2 pseudo-gradientes adaptados a $F, G, H + g$ e f_2 , respectivamente. Como no primeiro passo, podemos usar uma partição da unidade para definir um pseudo-gradiente \mathcal{X} que é adaptado a \tilde{K} tal que

$$\begin{cases} \mathcal{X}(x, s, t) = Z(x, t) - \text{grad } g(s), & \text{se } s \in [-1/3, 1/3] \\ \mathcal{X}(x, s, t) = Y(x, t) - \text{grad } g(s), & \text{se } s \in [2/3, 4/3] \\ \mathcal{X}(x, s, t) = X(x, s) - \text{grad } g(t), & \text{se } t \in [-1/3, 1/3] \\ \mathcal{X}(x, s, t) = X_2(x) - \text{grad } g(s) - \text{grad } g(t), & \text{se } t \in [2/3, 4/3]. \end{cases}$$

Como no primeiro passo, podemos pegar uma perturbação $\tilde{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} que vai satisfazer a condição de Smale e, mais ainda, $\partial_{\tilde{\mathcal{X}}} = \partial_{\mathcal{X}}$, isto é, o número de trajetórias de $\tilde{\mathcal{X}}$ conectando dois pontos críticos de índices consecutivos é o mesmo número de trajetórias de \mathcal{X} conectando estes mesmos dois pontos críticos.

Logo, analogamente ao primeiro passo, resulta que

$$C_{k+1}(\tilde{K}) = C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1) \oplus C_k(f_2) \oplus C_{k+1}(f_2).$$

Segue que

$$\partial_{\tilde{\mathcal{X}}}: C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1) \oplus C_k(f_2) \oplus C_{k+1}(f_2) \longrightarrow C_{k-2}(f_0) \oplus C_{k-1}(f_1) \oplus C_{k-1}(f_2) \oplus C_k(f_2)$$

é matricialmente da forma

$$\partial_{\tilde{\mathcal{X}}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} & 0 & 0 \\ \Phi^H & 0 & \partial_{X_2} & 0 \\ S & \Phi^G & \text{Id} & \partial_{X_2} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} S: C_{k-1}(f_0) &\longrightarrow C_k(f_2) \\ a &\longmapsto \sum_{b \in \text{Crit}_k(f_2)} n_{\tilde{\mathcal{X}}}(a, b)b, \end{aligned}$$

com $n_{\tilde{\mathcal{X}}}(a, b)$ sendo o número de trajetórias de $\tilde{\mathcal{X}}$ conectando $(a, 0, 0) \in M \times \{0\} \times \{0\} \cap \text{Crit}(\tilde{K})$ em $(b, 1, 1) \in M \times \{1\} \times \{1\} \cap \text{Crit}(\tilde{K})$ módulo 2. Como $\partial_{\tilde{\mathcal{X}}} \circ \partial_{\tilde{\mathcal{X}}} = 0$, então

$$S \circ \partial_{X_0} + \Phi^G \circ \Phi^F + \Phi^H + \partial_{X_2} \circ S = 0$$

ou seja,

$$\Phi^G \circ \Phi^F - \Phi^H = S \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_2} \circ S \pmod{2}.$$

Logo, as imagens de elementos por $\Phi^G \circ \Phi^F$ e Φ^H estão na mesma classe de homologia e, conseqüentemente, estes morfismos induzem o mesmo morfismo na homologia. ■

Como a homologia de Morse módulo 2 não depende da função e nem do campo pseudo-gradiente escolhido, então daqui para frente iremos denotar tal homologia por $HM_k(M, \mathbb{Z}_2)$, onde k é a dimensão da homologia.

3.4 O Espaço das “Trajetórias Quebradas”

Nosso objetivo aqui é mostrar que a homologia de Morse, que definimos na seção 3.2, está bem definida.

3.4.a A “Compactificação” de $\mathcal{L}(a, b)$

Primeiro vamos construir uma “compactificação” de $\mathcal{L}(a, b)$ com uma topologia conveniente.

Definição 3.4.1. Se $a, b \in \text{Crit}(f)$ e $\text{Ind}(a) > \text{Ind}(b)$, então definimos o espaço das trajetórias quebradas de a para b como sendo o conjunto:

$$\bar{\mathcal{L}}(a, b) = \mathcal{L}(a, b) \cup \bigcup_{c_1, \dots, c_{q-1} \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(a, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{q-1}, b).$$

Além disso, os elementos de $\bar{\mathcal{L}}(a, b)$ são chamados de trajetórias quebradas de a para b .

Observação 3.4.2. Se $\text{Ind}(a) - \text{Ind}(b) = 1$, então $\overline{\mathcal{L}}(a, b) = \mathcal{L}(a, b)$.

Observação 3.4.3. Como o índice é decrescente ao longo das linhas de fluxo, então as únicas “parcelas” não vazias desta união ocorrem quando

$$\text{Ind}(a) > \text{Ind}(c_1) > \dots > \text{Ind}(c_{q-1}) > \text{Ind}(b).$$

Vamos agora definir uma topologia em $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$. Para isso, tome $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ uma trajetória quebrada, com $c_0 = a, c_1, \dots, c_{q-1}, c_q = b \in \text{Crit}(f)$ e $\lambda_i \in \mathcal{L}(c_{i-1}, c_i), i = 1, \dots, q$. Além disso, considere Ω_i como sendo uma carta de Morse em torno c_i . Seja U_{i-1}^- uma vizinhança do ponto de saída de λ_i de Ω_{i-1} contida em seu conjunto de nível e seja U_i^+ uma vizinhança do ponto de entrada de λ_i em Ω_i contida em seu conjunto de nível (veja a figura 3.2).

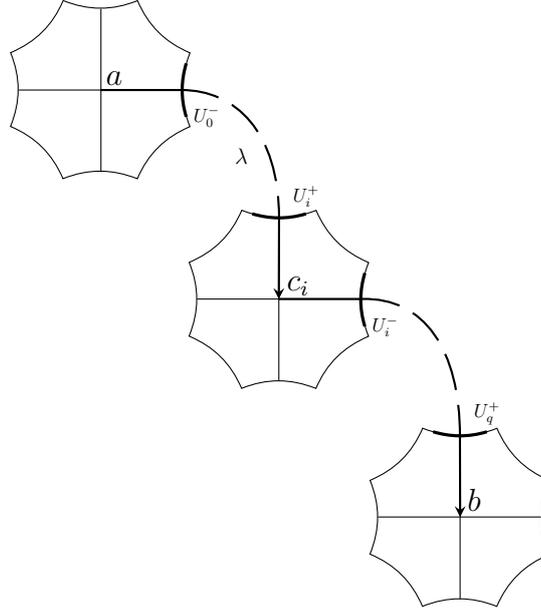


Figura 3.2

Logo, denotaremos por \mathbf{U}^- e \mathbf{U}^+ as coleções dos conjuntos U_i^- e U_i^+ , respectivamente e, a seguir, definiremos um certo conjunto de trajetórias quebradas $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$.

Definição 3.4.4. Dizemos que $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ pertence a $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ se existem inteiros $0 < i_0 < \dots < i_{k-1} < i_k = q$ tais que

- $\mu_j \in \mathcal{L}(c_{i_j}, c_{i_{j+1}}), \forall j < k$;
- μ_j sai de $\Omega_{i_j}, \Omega_{i_j+1}, \dots, \Omega_{i_{j+1}-1}$ no interior de $U_{i_j}^-, U_{i_j+1}^-, \dots, U_{i_{j+1}-1}^-$ e entra em $\Omega_{i_j+1}, \Omega_{i_j+2}, \dots, \Omega_{i_{j+1}}$ no interior de $U_{i_j+1}^+, U_{i_j+2}^+, \dots, U_{i_{j+1}}^+$.

Desta maneira, $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ define um sistema fundamental de vizinhanças abertas para uma topologia em $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$.

Observação 3.4.5. Para $\mu \in \mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ temos, necessariamente, que $k \leq q$. Conseqüentemente, μ “passa” nos mesmos pontos críticos que λ ou menos.

Observação 3.4.6. Esta topologia estabelece que uma trajetória quebrada μ está “próxima” de λ se todos os pontos críticos conectados por μ também estão conectados por λ e, além disso, μ sai de $\Omega_{i_j}, \Omega_{i_j+1}, \dots, \Omega_{i_{j+1}-1}$ e entra em $\Omega_{i_j+1}, \Omega_{i_j+2}, \dots, \Omega_{i_{j+1}}$ suficientemente próximo de λ , para todo $j < k$.

3.4.b A Finitude de $\#\mathcal{L}(a, b)$

Lema 3.4.7. *Sejam $x \in M - \text{Crit}(f)$ e (x_k) uma seqüência que tende a x . Sejam (y_k) uma seqüência de pontos tais que y_k e x_k pertencem à mesma trajetória de X para cada k , e y pertence à mesma trajetória de x (veja a figura 3.3). Além disso, suponha $f(y_k) = f(y), \forall k \in \mathbb{N}$. Então*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y.$$

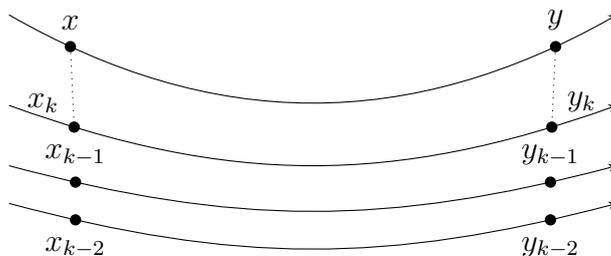


Figura 3.3

Demonstração. Seja U uma vizinhança de $\text{Crit}(f)$ que não contenha x, y, x_k e y_k (para k suficientemente grande). Defina em $M - U$ o campo vetorial

$$Y = -\frac{1}{df(X)}X.$$

Seja φ^s o fluxo de Y . Como em cada ponto $p \in M - U$ os vetores $X(p)$ e $Y(p)$ são paralelos, então X e Y possuem as mesmas trajetórias. Além disso, temos

$$\frac{d}{ds}(f \circ \varphi^s) = (df)\left(\frac{d}{ds}\varphi^s\right) = (df)(Y) = (df)\left(-\frac{1}{(df)(X)}X\right) = -1.$$

Segue que $f(\varphi^s(z)) = f(z) - s$ e, conseqüentemente,

$$y_k = \varphi^{f(x_k)-f(y_k)}(x_k) = \varphi^{f(x_k)-f(y)}(x_k)$$

e

$$y = \varphi^{f(x)-f(y)}(x).$$

Portanto, $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y$. ■

Teorema 3.4.8. *O espaço $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ é compacto.*

Demonstração. Basta provar que $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ é seqüencialmente compacto, isto é, toda seqüência (ℓ_k) possui uma subsequência que converge para algum $\ell \in \overline{\mathcal{L}}(a, b)$. Para isso, vamos supor inicialmente que $\ell_k \in \mathcal{L}(a, b), \forall k \in \mathbb{N}$.

Seja ℓ_k^- o ponto de saída de ℓ_k em $\Omega(a)$. Como $\ell_k^- \in \partial\Omega(a)$ e $\partial\Omega(a)$ é compacto, então existe uma subsequência de (ℓ_k^-) , que ainda denotaremos por (ℓ_k^-) , tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ell_k^- = a^- \in \partial_-\Omega(a)$.

Sejam $\gamma(s) = \varphi^s(a^-)$ e $c_1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s)$. Observe que c_1 é ponto crítico (teorema 2.3.4) e, conseqüentemente, $\gamma \in \mathcal{L}(a, c_1)$. Tome d_1^+ como sendo o ponto de entrada de γ em $\Omega(c_1)$ (veja a figura 3.4). Segue, pelo teorema da dependência contínua das soluções

de equações diferenciais ordinárias nas condições iniciais, que ℓ_k , para k suficientemente grande, entra em $\Omega(c_1)$ em pontos d_k^+ . Logo, como ℓ_k^- e d_k^+ estão na mesma trajetória, a^- e d_1^+ também estão na mesma trajetória e $f(d_k^+) = f(d_1^+)$, $\forall k$, segue, pelo lema 3.4.7, que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k^+ = d_1^+$.

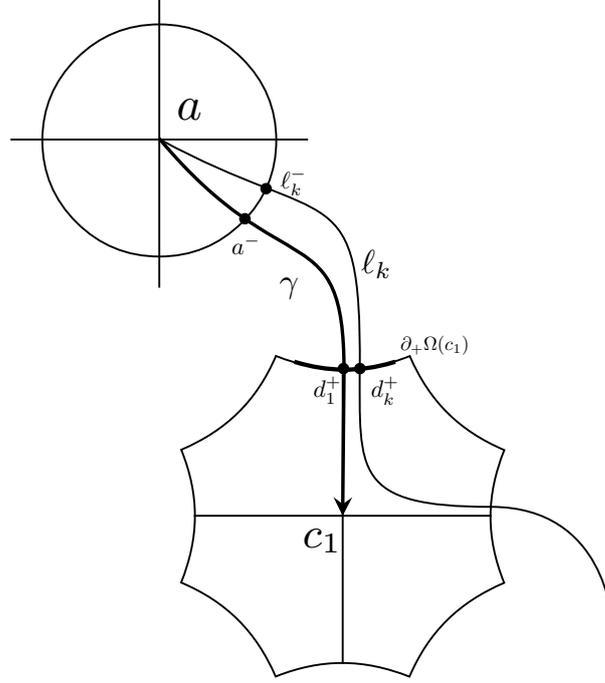


Figura 3.4

Se $c_1 = b$, então a sequência (ℓ_k) admite uma subsequência convergente com limite $\gamma \in \mathcal{L}(a, b)$.

Se $c_1 \neq b$, então $d_k^+ \notin W^s(c_1)$, pois $\ell_k \notin \mathcal{L}(a, c_1)$. Assim, ℓ_k sai de $\Omega(c_1)$ em um ponto d_k^- . Logo, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por (d_k^-) , tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k^- = d^- \in \partial_- \Omega(c_1)$.

Afirmção: $d^- \in W^u(c_1)$.

De fato, suponha que ele não pertença. Seja μ a trajetória de X passando por d^- . Segue que existe um ponto $d_0 \notin W^s(c_1)$ tal que $f(d_0) = f(d_k^+)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo lema 3.4.7, resulta que $d_0 = d^+$, o que é um absurdo, pois $d^+ \in W^s(c_1)$. Portanto, $d^- \in W^u(c_1)$.

Agora, podemos repetir esse mesmo argumento um número finito de vezes, pois há finitos pontos críticos, gerando assim uma trajetória quebrada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ que é limite de uma subsequência de (ℓ_k) (veja a figura 3.5).

Por fim, suponha que (ℓ_k) é uma sequência em $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$. Como $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ é uma união finita, então existem infinitos elementos de (ℓ_k) em alguma “parcela” desta união. Segue que existe uma subsequência de (ℓ_k) , que ainda denotaremos por (ℓ_k) , e pontos críticos c_1, \dots, c_{q-1} tais que

$$\ell_k = (\ell_k^1, \dots, \ell_k^q) \in \mathcal{L}(a, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{q-1}, b).$$

Portanto, aplicando o argumento anterior às sequências $(\ell_k^1), \dots, (\ell_k^{q-1})$ e (ℓ_k^q) , temos o resultado que queríamos. ■

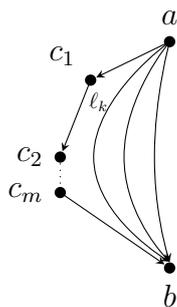


Figura 3.5

Corolário 3.4.9. *Se $\text{Ind}(a) - \text{Ind}(b) = 1$, então o espaço $\mathcal{L}(a, b)$ é finito.*

Demonstração. Como $\dim \mathcal{L}(a, b) = 0$, então $\mathcal{L}(a, b)$ é discreto. Por outro lado, $\overline{\mathcal{L}(a, b)} = \mathcal{L}(a, b)$. Portanto, como $\overline{\mathcal{L}(a, b)}$ é compacto, resulta que $\mathcal{L}(a, b)$ é finito. ■

3.4.c O Bordo de $\overline{\mathcal{L}(a, b)}$

Teorema 3.4.10. *Se $\text{Ind}(a) - \text{Ind}(b) = 2$, então $\overline{\mathcal{L}(a, b)}$ é uma variedade compacta de dimensão 1 com bordo. Além disso, o conjunto*

$$\bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b)$$

é o bordo de $\overline{\mathcal{L}(a, b)}$.

O teorema acima é consequência da proposição seguinte.

Proposição 3.4.11. *Sejam M uma variedade compacta, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e X um pseudo-gradiente adaptado a f satisfazendo a condição de Smale. Sejam a, c e b pontos críticos de índice $k + 1, k$ e $k - 1$, respectivamente. Sejam $\lambda_1 \in \mathcal{L}(a, c)$ e $\lambda_2 \in \mathcal{L}(c, b)$. Então existe um mergulho contínuo ψ , do intervalo $[0, \delta)$ em uma vizinhança de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathcal{L}(a, b)}$, que é diferenciável no aberto $(0, \delta)$ e satisfaz*

$$\begin{cases} \psi(0) = (\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathcal{L}(a, b)} \\ \psi(s) \in \mathcal{L}(a, b), s \neq 0. \end{cases}$$

Além disso, se (ℓ_n) é uma sequência em $\mathcal{L}(a, b)$ que tende para (λ_1, λ_2) , então ℓ_n está na imagem de ψ para n suficientemente grande.

Demonstração. Tome $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$ e $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ intersectam a carta de Morse $\Omega(c)$ ao longo de $\partial_+ \Omega(c)$ e $\partial_- \Omega(c)$, respectivamente, onde $\alpha = f(c)$. Tome agora

$$S_+(c) = W^s(c) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \quad \text{e} \quad S_-(c) = W^u(c) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon).$$

Note que $S_+(c) \cong S^{n-k-1}$ e $S_-(c) \cong S^{k-1}$. Como $W^u(a)$ é a transversal a $f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$, então $P = W^u(a) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$ é uma subvariedade de dimensão k . Além disso, como X satisfaz a condição de Smale e

$$P \cap S_+(c) = W^s(c) \cap W^u(a) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \cong \mathcal{L}(a, c),$$

resulta que P intersecta transversalmente $S_+(c)$ em um número finito de pontos. Em particular, $a_1 = S_+(c) \cap \lambda_1$ está nesta interseção. Seja

$$D^k(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < \delta\}.$$

Podemos supor, diminuindo δ se preciso for, que existe uma parametrização local $\Psi: (D^k(\delta), 0) \rightarrow (P, a_1)$ de P tal que

$$\text{Im } \Psi \cap S_+(c) = \{a_1\}.$$

Tomando $D = \text{Im } \Psi$, note que $D \subset P \subset f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$. Logo, podemos assumir que D está contido em $\partial_+\Omega(c)$. Tomando $D - \{a_1\}$ descendo ao longo das linhas do fluxo de X até $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$, nós obtemos um mergulho

$$\Phi: D - \{a_1\} \rightarrow \partial_-\Omega(c).$$

Antes de continuarmos, vamos enunciar uma proposição que nos auxiliará a terminar a demonstração. Na demonstração desta proposição será apresentada uma expressão local do mergulho Φ (lema 3.4.14).

Proposição 3.4.12. *Diminuindo δ se necessário for, a união $Q = \text{Im } \Phi \cup S_-(c)$ é uma variedade de dimensão k com bordo, e seu bordo é $\partial Q = S_-(c)$.*

Primeiramente, vamos assumir que essa proposição seja válida. Como Φ é um mergulho, segue que $\text{Im } \Phi$ é um aberto de $W^u(a) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$. Já que X satisfaz a condição de Smale, resulta que

$$W^s(b) \pitchfork \text{Im } \Phi \quad \text{e} \quad W^s(b) \pitchfork S_-(c).$$

Além disso, note que

$$W^s(b) \cap \text{Im } \Phi \cong \mathcal{L}(a, b) \quad \text{e} \quad W^s(b) \cap S_-(c) \cong \mathcal{L}(c, b).$$

Consequentemente, $W^s(b) \cap Q$ é uma subvariedade de dimensão 1 em $\partial_-\Omega(c)$, com

$$\partial(W^s(b) \cap Q) = W^s(b) \cap \partial Q = W^s(b) \cap S_-(c) = W^s(b) \cap W^u(c) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon) \cong \mathcal{L}(c, b).$$

A primeira igualdade acima vem do teorema da página 60 de [6] tomando $f = \text{Id}_Q$ e $Z = W^s(b) \cap Q$.

Agora, tome $\{a_2\} = S_-(c) \cap \lambda_2$ e considere χ como sendo uma parametrização local de uma vizinhança de a_2 , isto é, a aplicação suave

$$\chi: [0, \delta) \rightarrow W^s(b) \cap Q,$$

com $\chi(0) = a_2$. Podemos assim considerar um difeomorfismo

$$\Phi^{-1} \circ \chi: (0, \delta) \rightarrow W^s(b) \cap (D - \{a_1\}).$$

(ele está bem definido por que Φ é definido ao longo das linhas de fluxo de X , então $W^s(b)$ é invariante por esta ação). Note que, aplicando o lema 3.4.7, podemos deduzir que

$$\lim_{s \rightarrow 0} (\Phi^{-1} \circ \chi)(s) = a_1,$$

pois caso este limite fosse um certo $u \neq a_1$, teríamos, aplicando o lema 3.4.7, uma sequência $s_n \rightarrow 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(s_n) = \Phi(u) \neq a_2$, o que é absurdo. Logo, podemos estender $\Phi^{-1} \circ \chi$ continuamente para a aplicação

$$\psi: [0, \delta) \longrightarrow (W^s(b) \cap P) \cup \{a_1\},$$

com $\psi(0) = a_1$. Além disso, note que

$$W^s(c) \cap P = W^s(b) \cap W^u(a) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \cong \mathcal{L}(a, b)$$

e a_1 é uma representação natural de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b)$. Portanto, podemos reescrever ψ como sendo

$$\psi: [0, \delta) \longrightarrow \bar{\mathcal{L}}(a, b),$$

com $\psi(0) = (\lambda_1, \lambda_2)$, que é o mergulho desejado.

Agora, seja (ℓ_n) uma sequência em $\mathcal{L}(a, b)$ que tende para (λ_1, λ_2) . Se ℓ_n^+ e ℓ_n^- são os pontos de entrada e de saída de ℓ_n em $\Omega(c)$, respectivamente, então temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n^+ = a_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n^- = a_2 \quad \text{e} \quad \Phi(\ell_n^+) = \ell_n^-.$$

Com estas identificações, segue que, para n suficientemente grande, $\ell_n^+ \in D - \{a_1\}$ e, conseqüentemente, $\ell_n^- \in Q$. Logo,

$$\ell_n^- \in Q \cap W^s(b) = \text{Im } \chi.$$

Portanto, para n suficientemente grande, $\ell_n \in \text{Im } \psi$. ■

Agora vamos provar a proposição 3.4.12, porém, provaremos ela em um modelo de Morse $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, com

$$\begin{aligned} f(x_-, x_+) &= -\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2, \quad X = -\text{grad } f, \\ S_+ &= \{(x_-, x_+) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid x_- = 0, \|x_+\|^2 = \varepsilon\} \subset f^{-1}(\varepsilon) \text{ e} \\ S_- &= \{(x_-, x_+) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid x_+ = 0, \|x_-\|^2 = \varepsilon\} \subset f^{-1}(-\varepsilon). \end{aligned}$$

Segue que a proposição 3.4.12 pode ser enunciada de uma outra forma.

Proposição 3.4.13. *Seja $a \in S_+$ e $D \subset \partial_+ U$ um disco de dimensão k e raio δ que intersecta S_+ transversalmente em a . Seja*

$$\Phi: \partial_+ U - S_+ \longrightarrow \partial_- U - S_-$$

o mergulho definido pelo fluxo de X . Então

$$Q = \Phi(D - \{a\}) \cup S_-$$

é uma variedade de dimensão k com bordo, e seu bordo é $\partial Q = S_-$.

Para provar essa proposição, vamos precisar de um lema.

Lema 3.4.14. *O mergulho*

$$\Phi: \partial_+ U - S_+ \longrightarrow \partial_- U - S_-$$

definido pelo fluxo de X é dado por

$$\Phi(x_-, x_+) = \left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right).$$

Demonstração. Note que o fluxo de X é dado por

$$\varphi^s(x_-, x_+) = (e^{2s}x_-, e^{-2s}x_+).$$

Segue que se $(x_-, x_+) \in \partial_+U$ e $x_- \neq 0$, então existe s tal que

$$\left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|}x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|}x_+ \right) = (e^{2s}x_-, e^{-2s}x_+).$$

Como $\|x_+\| > \|x_-\|$ em ∂U_+ , então s é positivo. Além disso, temos

$$\left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|}x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|}x_+ \right) \in \partial_-U.$$

Portanto,

$$\Phi(x_-, x_+) = \left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|}x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|}x_+ \right).$$

■

Demonstração da Proposição 3.4.12 ou 3.4.13. Como S_+ consiste nos pontos x tais que $x_- = 0$ e D é transversal a S_+ em a , resulta que 0 é valor regular de

$$\begin{aligned} \pi: D &\longrightarrow D^k \\ (x_-, x_+) &\longmapsto x_-. \end{aligned}$$

Segue, pelo teorema da função inversa, que existe $D_1 \subset D$ aberto tal que $\pi|_{D_1}$ é um difeomorfismo. Diminuindo δ , se necessário for, podemos supor que $D = D_1$. Conseqüentemente,

$$D = \{(x_-, h(x_-)) \mid x_- \in D^k(\delta)\},$$

onde $h: D^k(\delta) \longrightarrow D^{n-k}$ é suave tal que

$$(x_-, h(x_-)) \in \partial_+U, \text{ isto é, } \|h(x_-)\|^2 = \|x_-\|^2 + \varepsilon.$$

Tomando $g = h/\|h\|$, resulta que

$$D = \{(x_-, \sqrt{\varepsilon + \|x_-\|^2}g(x_-)) \mid x_- \in D^k(\delta)\}.$$

Segue, pelo lema anterior, que

$$\Phi(D - \{a\}) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{\varepsilon + \|x_-\|^2}}{\|x_-\|}x_-, \|x_-\|g(x_-) \right) \mid x_- \in D^k(\delta) - \{0\} \right\}.$$

Usando coordenadas polares $(\rho, u) \in (0, \delta) \times S^{k-1}$ em $D^k(\delta) - \{0\}$, temos que $\Phi(D - \{a\})$ é a imagem de

$$\begin{aligned} H: (0, \delta) \times S^{k-1} &\longrightarrow \partial_-U \\ (\rho, u) &\longmapsto (\sqrt{\rho^2 + \varepsilon}u, \rho g(\rho, u)). \end{aligned}$$

Como g é definida em todo o disco D^k , nós podemos estender H para $[0, \delta) \times S^{k-1}$ tomando

$$H(0, u) = (\sqrt{\varepsilon}u, 0) \in S_-.$$

Conseqüentemente, resulta que $Q = \Phi(D - \{a\}) \cup S_-$ é uma variedade de dimensão k com bordo, e seu bordo é $\partial Q = S_-$ ■

Corolário 3.4.15. *A diferencial de Morse da definição 3.2.1 satisfaz $\partial^2 = 0$.*

Demonstração. Sejam a, c e b pontos críticos de f com índices $k + 1, k$ e $k - 1$, respectivamente. Pela observação 3.2.3, basta provar que

$$\sum_{c \in \text{Crit}_k} n_X(a, c)n_X(c, b) = 0 \pmod{2},$$

isto é, provar que a cardinalidade do conjunto

$$A = \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b)$$

é par. Primeiramente, note que A é finito, pois os pontos críticos de f são finitos. Além disso, A é o bordo de uma variedade compacta de dimensão 1 com bordo. Portanto, pelo teorema 1.1.23, segue que a cardinalidade A é par. ■

Capítulo 4

Aplicações da Homologia de Morse

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações da homologia de Morse. Falaremos sobre a dualidade de “Poincaré” (§4.1), a fórmula de Künneth (§4.2), a característica de Euler (§4.3) e, por fim, uma aplicação em variedades conexas (§4.4).

Neste capítulo todas as variedades e funções são consideradas suaves. Além disso, M denotará uma variedade suave compacta, f denotará uma função de Morse definida em M e X denotará um pseudo-gradiente adaptado a f , a menos que explicitamente digamos o contrário. Vale lembrar que sempre que estamos falando sobre complexos tais complexos são compostos por espaços vetoriais sobre \mathbb{Z}_2 .

4.1 A Dualidade de “Poincaré”

Teorema 4.1.1 (Dualidade de Poincaré). *Suponha que a dimensão de M seja n . Então $HM_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $HM_k(M; \mathbb{Z}_2)$.*

Demonstração. Lembre que se a é um ponto crítico de índice k de f , então ele é um ponto crítico de índice $n - k$ de $-f$ (proposição 1.4.7). Além disso, se X é um pseudo-gradiente adaptado a f , então $-X$ é um pseudo-gradiente adaptado a $-f$. Dessa forma, temos um isomorfismo vetorial natural

$$\begin{aligned} g: C_k(f) &\longrightarrow C_{n-k}(-f) \\ a &\longmapsto a^*, \end{aligned}$$

onde a^* denota o ponto a visto como um ponto crítico de $-f$. Porém, é melhor pensar que $C_{n-k}(-f)$ é o dual de $C_k(f)$, isto é,

$$C_{n-k}(-f) = C_k(f)^*.$$

Segue que a transposta $(\partial_X^k)^*: C_{n-k+1}(-f) \longrightarrow C_{n-k}(-f)$ de $\partial_X^k: C_k(f) \longrightarrow C_{k-1}(f)$ é o operador de bordo ∂_{-X}^{n-k+1} do complexo $(C_*(-f), \partial_{-X})$. Segue, pelo teorema 3.3.1, que

$$HM_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_{-X}^{n-k}}{\text{Im } \partial_{-X}^{n-k+1}} = \frac{\text{Ker}(\partial_X^{k+1})^*}{\text{Im}(\partial_X^k)^*}.$$

Como $\text{Ker}(\partial_X^{k+1})^* = (\text{Im } \partial_X^{k+1})^\perp$, $\text{Im}(\partial_X^k)^* = (\text{Ker } \partial_X^k)^\perp$ e

$$HM_k(M; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_X^k}{\text{Im } \partial_X^{k+1}},$$

resulta que a dimensão de $HM_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ é igual a dimensão de $HM_k(M; \mathbb{Z}_2)$ e, consequentemente, $HM_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $HM_k(M; \mathbb{Z}_2)$. ■

4.2 A Fórmula de Künneth

4.2.a A Homologia da Soma

Definição 4.2.1. A soma entre dois complexos \mathcal{C} e \mathcal{D} é o complexo $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ definido por

$$(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D})_k = C_k \oplus D_k,$$

onde o operador de bordo é dado por

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}}^k: (\mathcal{C} \oplus \mathcal{D})_k &\longrightarrow (\mathcal{C} \oplus \mathcal{D})_{k-1} \\ c + d &\longmapsto \partial_{\mathcal{C}}^k c + \partial_{\mathcal{D}}^k d. \end{aligned}$$

Proposição 4.2.2. Se \mathcal{C} e \mathcal{D} são dois complexos, então vale

$$H_k(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) = H_k(\mathcal{C}) \oplus H_k(\mathcal{D}).$$

Demonstração. Basta ver que

$$\text{Ker } \partial_{\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}}^k = \text{Ker } \partial_{\mathcal{C}}^k \oplus \text{Ker } \partial_{\mathcal{D}}^k \quad \text{e} \quad \text{Im } \partial_{\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}}^{k+1} = \text{Im } \partial_{\mathcal{C}}^{k+1} \oplus \text{Im } \partial_{\mathcal{D}}^{k+1}.$$

■

4.2.b A Homologia do Produto Tensorial

Definição 4.2.3. O produto tensorial de dois espaços vetoriais C e D é uma operação denotada por $C \otimes D$, com elementos $c \otimes d$, que satisfazem as seguintes condições:

- $(c_1 + c_2) \otimes d = c_1 \otimes d + c_2 \otimes d$;
- $c \otimes (d_1 + d_2) = c \otimes d_1 + c \otimes d_2$;
- $\lambda(c \otimes d) = (\lambda c) \otimes d = c \otimes (\lambda d)$, onde λ é um escalar.

Definição 4.2.4. O produto tensorial entre dois complexos \mathcal{C} e \mathcal{D} é o complexo $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ definido por

$$(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})_k = \bigoplus_{i+j=k} C_i \otimes D_j,$$

onde o operador de bordo é dado por

$$\partial_{(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})}^k(c \otimes d) = (\partial_{\mathcal{C}}^i c) \otimes d + c \otimes (\partial_{\mathcal{D}}^j d) \in C_{i-1} \otimes D_j \oplus C_i \otimes D_{j-1} \subset (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})_{k-1},$$

onde $c \otimes d \in C_i \otimes D_j \subset (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})_k$.

Observação 4.2.5. Segue, direto das definições de produto tensorial e soma direta de complexos, que

$$\mathcal{C} \otimes (\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2) \cong (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}_1) \oplus (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}_2).$$

Proposição 4.2.6. *Se \mathcal{C} e \mathcal{D} são dois complexos, então vale*

$$H_k(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) = \bigoplus_{i+j=k} H_i(\mathcal{C}) \otimes H_j(\mathcal{D}). \quad (4.1)$$

Demonstração. Primeiramente, note que, pela observação anterior, se a igualdade (4.1) vale para \mathcal{C} e \mathcal{D}_1 e também para \mathcal{C} e \mathcal{D}_2 , então ela vale para \mathcal{C} e $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$. Vamos provar a igualdade (4.1) por indução no comprimento $\ell(\mathcal{D})$ do segundo complexo, onde

$$\ell(\mathcal{D}) = \#\{j | D_j \neq 0\}.$$

Caso $\ell(\mathcal{D}) = 1$.

A igualdade (4.1) é direta.

Caso $\ell(\mathcal{D}) = 2$, onde $D_{j_1}, D_{j_2} \neq \{0\}$ e $j_1 \neq j_2 \pm 1$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $j_2 > j_1$. Note que \mathcal{D} pode ser decomposto da forma $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_{j_1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \\ \mathcal{D}_2: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow D_{j_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Como o comprimento de \mathcal{D}_1 e de \mathcal{D}_2 é 1, então, pela observação 4.2.5 a igualdade (4.1) vale para \mathcal{C} e $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$.

Observe que, no caso anterior, temos $(\mathcal{D})_k = (\mathcal{D}_1)_k \oplus (\mathcal{D}_2)_k$ e $\partial_{\mathcal{D}}^k = \partial_{\mathcal{D}_1}^k + \partial_{\mathcal{D}_2}^k$ para todo k . Porém, no próximo caso, a relação dos operadores de bordo pode não ser satisfeita e, por isso, a seguir não usamos o mesmo argumento diretamente.

Caso $\ell(\mathcal{D}) = 2$, onde $D_j, D_{j-1} \neq \{0\}$.

Note que

$$\mathcal{D}: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow D_j \xrightarrow{\partial_{\mathcal{D}}} D_{j-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0.$$

Se $\partial_{\mathcal{D}} = 0$, então podemos prosseguir igual ao caso anterior. Se $\partial_{\mathcal{D}} \neq 0$, então vamos supor inicialmente que $\partial_{\mathcal{D}}$ seja um isomorfismo. Neste caso $H_l(\mathcal{D}) = 0$ para todo l , conseqüentemente, o lado direito de (4.1) é nulo. Vamos mostrar que o lado esquerdo também é nulo. Para isso, vamos denotar por $c_p \otimes d_q + c_{p+1} \otimes d_{q-1}$ um elemento de $C_p \otimes D_q \oplus C_{p+1} \otimes D_{q-1}$. Tome um elemento $(c_i \otimes d_j + c_{i+1} \otimes d_{j-1}) \in \text{Ker } \partial^{i+j}$. Segue que

$$\begin{aligned} \partial^{i+j}(c_i \otimes d_j + c_{i+1} \otimes d_{j-1}) &= \partial^{i+j}(c_i \otimes d_j) + \partial^{i+j}(c_{i+1} \otimes d_{j-1}) \\ &= \partial^i c_i \otimes d_j + c_i \otimes \partial^j d_j + \partial^{i+1} c_{i+1} \otimes d_{j-1} + c_{i+1} \otimes \partial^{j-1} d_{j-1} \\ &= \partial^i c_i \otimes d_j + (c_i \otimes \partial^j d_j + \partial^{i+1} c_{i+1} \otimes d_{j-1}) = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\partial c_i \otimes d_j = 0 \quad \text{e} \quad c_i \otimes \partial d_j + \partial c_{i+1} \otimes d_{j-1} = 0.$$

Como $\partial_{\mathcal{D}}$ é um isomorfismo, então podemos aplicar $\text{Id} \otimes \partial_{\mathcal{D}}^{-1}$ na segunda igualdade. Dessa forma, temos

$$c_i \otimes d_j = \partial c_{i+1} \otimes \partial^{-1} d_{j-1} \pmod{2}.$$

Segue que

$$\partial(c_{i+1} \otimes \partial^{-1} d_{j-1}) = \partial c_{i+1} \otimes \partial^{-1} d_{j-1} + c_{i+1} \otimes d_{j-1} = c_i \otimes d_j + c_{i+1} \otimes d_{j-1} \text{ e,}$$

consequentemente, $\text{Ker } \partial^{i+j} \subset \text{Im } \partial^{i+j+1}$. Logo, o lado esquerdo de (4.1) é nulo.

No caso em que $\partial_{\mathcal{D}}$ não é um isomorfismo, note que

$$D_j = \text{Ker } \partial^j \oplus D'_j \quad \text{e} \quad D_{j-1} = E'_{j-1} \oplus \text{Im } \partial^j,$$

onde $D'_j = (\text{Ker } \partial^j)^\perp$ e $E'_{j-1} = (\text{Im } \partial^j)^\perp$. Logo, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Ker } \partial^j \xrightarrow{0} E'_{j-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \\ \mathcal{D}_2: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow D'_j \xrightarrow{\cong} \text{Im } \partial^j \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Voltando assim para os casos anteriores.

Caso $\ell(\mathcal{D}) = n + 1$ supondo que vale para $\ell(\mathcal{D}) \leq n$.

Primeiramente, suponha que $D_1, \dots, D_{n+1} \neq \{0\}$. Note que

$$D_{n+1} = \text{Ker } \partial^{n+1} \oplus D'_{n+1} \quad \text{e} \quad D_n = E'_n \oplus \text{Im } \partial^{n+1},$$

onde $D'_{n+1} = (\text{Ker } \partial^{n+1})^\perp$ e $E'_n = (\text{Im } \partial^{n+1})^\perp$. Logo, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Ker } \partial^{n+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \mathcal{D}_2: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow D'_{n+1} \xrightarrow{\cong} \text{Im } \partial^{n+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \mathcal{D}_3: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow E'_n \longrightarrow D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Como o comprimento de \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 e \mathcal{D}_3 é menor do que n , então a igualdade (4.1) vale para \mathcal{C} e $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}$, como queríamos demonstrar. Agora suponha que os $D_j \neq \{0\}$ não sejam consecutivos. Segue que existe $D_k = \{0\}$ tal que existem $j < k < j'$ tais que $D_j, D_{j'} \neq \{0\}$. Logo, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1: \cdots \longrightarrow D_{j'} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \mathcal{D}_2: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_k \longrightarrow D_j \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_0 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Como $\ell(\mathcal{D}_1), \ell(\mathcal{D}_2) \leq n$, o resultado segue aplicando a hipótese de indução em \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 . ■

4.2.c A Fórmula de Künneth

Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse. Sejam X, Y pseudo-gradientes adaptados a f e g , respectivamente, satisfazendo a condição de Smale. Note que (X, Y) é um pseudo-gradiente adaptado a função $f + g: M \times N \rightarrow \mathbb{R}$. Os pontos críticos de $f + g$ são pontos (a, a') , onde a é um ponto crítico de f e a' é um ponto crítico de g (proposição 1.2.10). Além disso, o índice de (a, a') é a soma dos índices de a e a' .

Suponha que o índice de a é i , o índice de a' é j e o índice de (a, a') é k (é claro que $i + j = k$). Seja (b, b') um ponto crítico de índice $k - 1$ que se liga a (a, a') por uma trajetória do fluxo de (X, Y) . Como o fluxo de (X, Y) é

$$\varphi_{(X,Y)}^t(x, y) = (\varphi_X^t(x), \varphi_Y^t(y)).$$

então os espaços das trajetórias relacionam-se como

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) \cong \mathcal{L}_X(a, b) \times \mathcal{L}_Y(a', b').$$

Note que se $a \neq b$ e $a' \neq b'$, então, para $\mathcal{L}_X(a, b) \times \mathcal{L}_Y(a', b') \neq \emptyset$, devemos ter

$$\text{Ind}(a) \geq \text{Ind}(b) + 1 \quad \text{e} \quad \text{Ind}(a') \geq \text{Ind}(b') + 1.$$

Conseqüentemente, para $\mathcal{L}_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) \neq \emptyset$ devemos ter

$$\text{Ind}(a, a') \geq \text{Ind}(b, b') + 2.$$

Assim, se (a, a') e (b, b') tem índices consecutivos, resulta que

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) = \begin{cases} \{a\} \times \mathcal{L}_Y(a', b'), & \text{se } a = b \\ \mathcal{L}_X(a, b) \times \{a'\}, & \text{se } a' = b'. \end{cases}$$

Conseqüentemente, temos

$$n_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) = \begin{cases} n_Y(a', b'), & \text{se } a = b \\ n_X(a, b), & \text{se } a' = b' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Por fim, note que a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_k: \bigoplus_{i+j=k} C_i(f) \otimes C_j(g) = (\mathcal{C}(f) \otimes \mathcal{C}(g))_k &\longrightarrow C_k(f+g) \\ a \otimes a' &\longmapsto (a, a') \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre grupos para todo k .

Proposição 4.2.7. *A sequência Φ_k define um isomorfismo Φ de complexos.*

Demonstração. Sejam a um ponto crítico de f de índice i e a' um ponto crítico de g de índice j , com $i + j = k$. Vamos omitir os índices de Φ_{k-1} e Φ_k . Note que

$$\begin{aligned} \Phi(\partial_{(\mathcal{C}(f) \otimes \mathcal{C}(g))}(a \otimes a')) &= \Phi((\partial_X a) \otimes a' + a \otimes (\partial_Y a')) \\ &= \Phi \left(\sum_{b \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, b) b \otimes a' + \sum_{b' \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a', b') a \otimes b' \right) \\ &= \sum_{b \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, b) (b, a') + \sum_{b' \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a', b') (a, b'). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \partial_{(X,Y)} \Phi(a \otimes a') &= \sum_{(b,b') \in \text{Crit}_{i+j-1}(f+g)} n_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) (b, b') \\ &= \sum_{b \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, b) (b, a') + \sum_{b' \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a', b') (a, b'), \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem de (4.2). Portanto, Φ é um isomorfismo de complexos. ■

Corolário 4.2.8 (Fórmula de Künneth). *Se M e N são duas variedades compactas, então*

$$HM_k(M \times N; \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{i+j=k} HM_i(M; \mathbb{Z}_2) \otimes HM_j(N; \mathbb{Z}_2).$$

Demonstração. Pela proposição anterior, temos

$$HM_k(M \times N; \mathbb{Z}_2) \cong H_k(\mathcal{C}(f) \otimes \mathcal{C}(g)),$$

onde $\mathcal{C}(f)$ é um complexo em M e $\mathcal{C}(g)$ é um complexo em N . Logo, pela proposição 4.2.6, resulta que

$$H_k(\mathcal{C}(f) \otimes \mathcal{C}(g)) = \bigoplus_{i+j=k} H_i(\mathcal{C}(f)) \otimes H_j(\mathcal{C}(g)) = \bigoplus_{i+j=k} HM_i(M; \mathbb{Z}_2) \otimes HM_j(N; \mathbb{Z}_2).$$

■

4.3 A Característica de Euler

Teorema 4.3.1. *O número (módulo 2) de pontos críticos de uma função de Morse depende apenas da variedade e não da função.*

Demonstração. Seja $n = \dim M$. Note que $\dim C_k(f) = \dim \text{Ker } \partial^k + \dim \text{Im } \partial^k$, $\text{Im } \partial^{n+1} = \text{Im } \partial^0 = 0$ e $\dim HM_k(M; \mathbb{Z}_2) = \dim \text{Ker } \partial^k - \dim \text{Im } \partial^{k+1}$. Segue que

$$\begin{aligned} \# \text{Crit}(f) &= \sum_{k=0}^n \dim C_k(f) = \sum_{k=0}^n (\dim \text{Ker } \partial^k + \dim \text{Im } \partial^k) \\ &= \sum_{k=0}^n (\dim \text{Ker } \partial^k + \dim \text{Im } \partial^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n (\dim \text{Ker } \partial^k - \dim \text{Im } \partial^{k+1}) \pmod{2} \\ &= \sum_{k=0}^n \dim HM_k(M; \mathbb{Z}_2) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Portanto, como $\dim HM_k(M; \mathbb{Z}_2)$ depende apenas da variedade e não da função, então o mesmo vale para $\# \text{Crit}(f)$. ■

Definição 4.3.2. A característica de Euler de M é o número $\chi(M)$ dado por

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim HM_k(M, \mathbb{Z}_2).$$

Observação 4.3.3. A característica de Euler de M é a soma alternada do número de

pontos críticos de uma função de Morse f . De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}
 \chi(M) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim HM_k(M, \mathbb{Z}_2) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (\dim \text{Ker } \partial^k - \dim \text{Im } \partial^{k+1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (\dim \text{Ker } \partial^k + \dim \text{Im } \partial^k) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim C_k(f).
 \end{aligned}$$

Observação 4.3.4. A característica de Euler em uma variedade compacta de dimensão ímpar é sempre zero, pois, pela dualidade de Poincaré (teorema 4.1.1), os termos da soma alternada se cancelam.

Proposição 4.3.5. *O número de pontos críticos de uma função de Morse em uma variedade M é maior do que ou igual à soma das dimensões das homologias de M (módulo 2).*

Demonstração. Basta ver que

$$\begin{aligned}
 \# \text{Crit}(f) &= \sum_{k=0}^n (\dim \text{Ker } \partial^k + \dim \text{Im } \partial^{k+1}) \\
 &\geq \sum_{k=0}^n (\dim \text{Ker } \partial^k - \dim \text{Im } \partial^{k+1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \dim HM_k(M; \mathbb{Z}_2). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Definição 4.3.6. O k -ésimo número de Betti de M é o número $\beta_k(M)$ dado por

$$\beta_k(M) = \dim HM_k(M, \mathbb{Z}_2).$$

Chamando de $c_k(f)$ o número de pontos críticos de índice k de f , note que podemos deduzir da demonstração da proposição anterior as inequações

$$c_k(f) \geq \beta_k(M), \quad \forall k \geq 0,$$

pois

$$\dim C_k(f) = \dim \text{Ker } \partial^k + \dim \text{Im } \partial^k \geq \dim \text{Ker } \partial^k - \dim \text{Im } \partial^{k+1}.$$

Essas inequações são chamadas de inequações de Morse.

Definição 4.3.7. O polinômio de Poincaré de M é o polinômio $P_M(t)$ dado por

$$P_M(t) = \sum_k \beta_k(M) t^k.$$

Note que, pela fórmula de Künneth, temos

$$P_{M_1 \times M_2}(t) = P_{M_1}(t)P_{M_2}(t).$$

Em particular, para $t = -1$ temos

$$\chi(M_1 \times M_2) = \chi(M_1)\chi(M_2). \quad (4.3)$$

Exemplo 4.3.8. Segue, pelo exemplo 3.2.5, que a característica de Euler da esfera S^n é

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n,$$

isto é, ela é 2 se n é par e 0 se n é ímpar. Além disso,

$$P_{S^n}(t) = 1 + t^n.$$

Exemplo 4.3.9. Se $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, então $\chi(T^n) = 0$, pelo exemplo anterior e por (4.3).

4.4 Conexidade

Proposição 4.4.1. *Se M é uma variedade suave compacta e conexa, então*

$$HM_0(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Demonstração. Primeiramente, suponha que existam pontos críticos de índice 1 de f . É suficiente provar que a dimensão da $\text{Im } \partial^1$ é $r - 1$, onde r é a dimensão de $C_0(f)$, pois $\dim HM_0(M, \mathbb{Z}_2) = \dim \text{Ker } \partial^0 - \dim \text{Im } \partial^1$. Com isso em mente e lembrando que M é compacta, sejam a_1, \dots, a_r pontos críticos de índice 0 de f . Tome B como sendo o subespaço de dimensão $r - 1$ gerado por $\{a_1 + a_i\}$, com $i = 2, \dots, r$.

Afirmção: $\text{Im } \partial^1 \subset B$.

De fato, se b é um ponto crítico de índice 1 de f , então sua variedade instável tem dimensão 1. Logo, existem apenas duas trajetórias começando em b . Tais trajetórias terminam em dois pontos a_i e a_j , não necessariamente distintos. Portanto, módulo 2,

$$\partial^1 b = a_i + a_j = a_i + a_j + 2a_1 = (a_1 + a_i) + (a_1 + a_j) \in B,$$

isto é, $\text{Im } \partial^1 \subset B$.

Afirmção: $B \subset \text{Im } \partial^1$.

Se provarmos que a_i está na classe de homologia de a_1 , para cada $i = 2, \dots, r$, então $a_1 + a_i = a_1 - a_i = \partial^1 b_0 \in \text{Im } \partial^1$, com $b_0 \in C_1(f)$, ou seja, $B \subset \text{Im } \partial^1$. Dessa forma, tome

$$A = M - \bigcup_{\text{Ind}(x), \text{Ind}(y) \geq 2} \mathcal{M}(x, y).$$

Como $\text{Ind}(x), \text{Ind}(y) \geq 2$, então $\text{codim } \mathcal{M}(x, y) \geq 2$ e, conseqüentemente, A é conexo. Para cada $j = 1, \dots, r$, tome A_j sendo o conjunto dos x em A tais que x está em uma trajetória (quebrada ou não), contida em A , terminando em a_j . Note que os A_j são conexos, pois todos os pontos de A_j são ligados em a_j . Observe ainda que A é a união

dos A_j e, além disso, todas as trajetórias quebradas contidas em A_j passam por um ponto de índice 1.

Afirmarmos que, para cada $j = 1, \dots, r$, A_j é fechado em A . De fato, tome uma sequência (x_n) em A_j que converge para $x_0 \in A$. Suponha, sem perda de generalidade, que x_n não é ponto crítico de f para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam ℓ uma trajetória passando por x_0 e ℓ_n uma trajetória passando por x_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Como os pontos críticos são finitos, então existem infinitas trajetórias chegando num mesmo ponto crítico, logo, tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que todos os ℓ_n terminam no mesmo ponto crítico b . Como $x_n \in A_j$, então b é igual a a_j ou é outro ponto crítico de índice 1 (tal ponto é conectado em a_j por uma trajetória).

Seja c o ponto de chegada de ℓ . Como $x_0 \in A$, então o índice de c é 0 ou 1. Se $c = b$, então $x_0 \in A_j$, como queríamos. Caso contrário, seja ℓ^+ o ponto de entrada de ℓ na carta de Morse de c . Segue, pelo teorema da dependência das soluções de equações diferenciais nas condições iniciais, que ℓ_n entra nesta carta para n suficientemente grande. Seja ℓ_n^+ o ponto de entrada de ℓ_n nesta carta. Como x_n converge para x e $f(\ell_n^+) = f(\ell^+)$ para todo n , então, pelo lema 3.4.7, temos ℓ_n^+ convergindo para ℓ^+ . Já que $c \neq b$, então ℓ_n sai desta carta em um ponto ℓ_n^- . Da mesma forma que na demonstração do teorema 3.4.8, resulta que a sequência ℓ_n^- converge para um ponto $d \in W^u(c)$. Se λ é uma trajetória passando por d , então λ termina em um ponto crítico a de índice 0, pois nesse caso índice de c é 1. Note que $a = a_j$, pois, para n suficientemente grande, ℓ_n entra na carta de a . Logo, para cada $j = 1, \dots, r$, A_j é fechado em A .

Como A é conexo e A_1 é fechado, então existe $j_1 \neq 1$ tal que $A_1 \cap A_{j_1} \neq \emptyset$, caso contrário existiria um cisão não trivial

$$A = (A_1)^c \cup \left(\bigcup_{j \neq 1} A_j \right)^c.$$

Note que existe $c_1 \in A_1 \cap A_{j_1}$ tal que índice de c_1 é 1. Segue que $\partial^1 c_1 = a_1 + a_{j_1}$, isto é, a_{j_1} está na mesma classe de homologia de a_1 .

Por outro lado, como A é conexo e $A_1 \cup A_{j_1}$ é fechado e conexo, então existe $j_2 \neq 1, j_1$ tal que $(A_1 \cup A_{j_1}) \cap A_{j_2} \neq \emptyset$. Note que existe $c_2 \in (A_1 \cup A_{j_1}) \cap A_{j_2}$ tal que índice de c_2 é 1. Segue $\partial^1 c_2 = a_1 + a_{j_2}$ ou $\partial^1 c_2 = a_{j_1} + a_{j_2}$. Em todo caso, a_{j_2} está na mesma classe de homologia de a_1 . Repetindo esse argumento mais $r - 2$ vezes, resulta que, para cada $j = 2, \dots, r$, a_j está na mesma classe de homologia de a_1 . Portanto, $\dim \text{Im } \partial^1 = r - 1$, como queríamos demonstrar.

Agora, se f não tem pontos críticos de índice 1, então podemos construir A da mesma forma que no caso anterior. Porém, agora, para cada $j = 1, \dots, r$, A_j é igual a $W^s(a_j)$. Como $A_j \cap A_i = \emptyset$, para todo $i \neq j$, então $\dim C_0(f) = r = 1$, pois, caso contrário, existiria um cisão não trivial como no caso anterior. Portanto, $HM_0(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. ■

Pela dualidade de Poincaré (teorema 4.1.1), resulta um importante corolário.

Corolário 4.4.2. *Seja M uma variedade compacta conexa de dimensão n . Então*

$$HM_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Corolário 4.4.3. *Suponha que a dimensão de M seja n e M seja compacta. Então $HM_0(M; \mathbb{Z}_2)$ e $HM_n(M; \mathbb{Z}_2)$ são espaços \mathbb{Z}_2 -vetoriais de dimensão igual ao número de componentes conexas de M .*

Demonstração. Note que

$$M = \bigcup_{j=1}^l M_j,$$

onde M_j são as componentes conexas de M . Dada uma função de Morse f definida em M e um pseudo-gradiente adaptado X , tome, para cada $j = 1, \dots, l$, $f_j = f|_{M_j}$ e $X_j = X|_{M_j}$. Note que, para cada j , f_j é uma função de Morse definida em M_j com pseudo-gradiente adaptado X_j . Segue que

$$C_k(f) = \bigoplus_j C_k(f_j) \quad \text{e} \quad \partial_X = \bigoplus_j \partial_{X_j}.$$

Portanto, aplicando os resultados anteriores em cada componente conexa, temos o resultado pretendido. ■

Capítulo 5

A Conjectura de Arnold

Neste capítulo, apresentaremos a conjectura de Arnold (conjectura 5.2.1, §5.2) que afirma sobre uma cota inferior no número de órbitas periódicas de período 1 de um sistema Hamiltoniano. Para tal, apresentaremos alguns conceitos da geometria simplética (§5.1) e, posteriormente, enunciaremos e provaremos um caso particular da conjectura de Arnold (§5.2).

Neste capítulo todas as variedades são consideradas suaves. É recomendado ler o apêndice deste capítulo (§5.3) para uma melhor compreensão de alguns detalhes das seções anteriores, onde definimos conceitos importantes, como formas diferenciais e derivada de Lie.

5.1 Geometria Simplética

Antes de falarmos sobre a conjectura de Arnold, vamos relembrar algumas definições de geometria simplética. Para maiores detalhes veja, por exemplo, [9].

5.1.a Espaços Vetoriais Simpléticos

Definição 5.1.1. Um espaço vetorial simplético é uma par (V, ω) , onde V é um espaço vetorial real de dimensão finita e ω é uma forma bilinear antissimétrica e não degenerada, isto é,

- $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ (ω é antissimétrica);
- $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ se, e somente se, $u = 0$ (ω é não degenerada).

Por vezes, quando não houver risco de confusão, chamaremos V de espaço vetorial simplético em vez do par (V, ω) .

Observação 5.1.2. Pela anti-simetria, segue que $\omega(u, u) = 0$.

Exemplo 5.1.3. Chamamos de espaço vetorial simplético canônico o espaço $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ com $\omega_0((q, p), (q', p')) = p \cdot q' - p' \cdot q$, onde \cdot denota o produto interno usual em \mathbb{R}^n .

Teorema 5.1.4. *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Então existe uma base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de V tal que*

$$\begin{cases} \omega(e_i, e_j) = 0 \\ \omega(f_i, f_j) = 0 \\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \end{cases}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Em particular, a dimensão de V é par.

Demonstração. Tome $e_1 \neq 0$ em V . Como ω é não degenerada, resulta que existe $g_1 \neq e_1$ em V tal que $\omega(e_1, g_1) = \lambda \neq 0$. Tomando $f_1 = \frac{g_1}{\lambda}$, temos $\omega(e_1, f_1) = 1$. Sejam

$$V_1 = \text{span}\{e_1, e_2\} \quad \text{e} \quad V_1^\omega = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0, \forall v \in V_1\}.$$

Afirmção: $V_1 \cap V_1^\omega = \{0\}$.

De fato, suponha que $v = \alpha e_1 + \beta f_1 \in V_1 \cap V_1^\omega$. Segue que

$$0 = \omega(v, e_1) = -\beta \quad \text{e} \quad 0 = \omega(v, f_1) = \alpha.$$

Consequentemente, $v = 0$.

Afirmção: $V_1 \oplus V_1^\omega = V$.

De fato, suponha que $v \in V$. Se $\omega(v, e_1) = \alpha_1$ e $\omega(v, f_1) = \beta_1$, então $v = (\beta_1 e_1 - \alpha_1 f_1) + (v + \alpha_1 f_1 - \beta_1 e_1)$. Note que $(\beta_1 e_1 - \alpha_1 f_1) \in V_1$ e $(v + \alpha_1 f_1 - \beta_1 e_1) \in V_1^\omega$, pois

$$\omega(v + \alpha_1 f_1 - \beta_1 e_1, e_1) = \omega(v, e_1) - \alpha_1 = 0 \quad \text{e} \quad \omega(v + \alpha_1 f_1 - \beta_1 e_1, f_1) = \omega(v, f_1) - \beta_1 = 0.$$

Agora, se $V_1^\omega = \{0\}$, então $\{e_1, f_1\}$ é a base que queremos. Caso contrário, tome $e_2 \neq 0$ em V_1^ω . Como ω é não degenerada, resulta que existe $f_2 \neq e_2$ em V_1^ω tal que $\omega(e_2, f_2) \neq 0$. Podemos, sem perda de generalidade, supor $\omega(e_2, f_2) = 1$ (mesmo argumento inicial). Tomando $V_2 = \text{span}\{e_2, f_2\}$ temos, de forma análoga à primeira parte, que $V_1^\omega = V_2 \oplus V_2^\omega$ e, consequentemente, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_2^\omega$. Repetindo esse argumento um número finito de vezes, teremos a base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ que queremos. ■

Chamaremos $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de base simplética. Em particular, a matriz da forma bilinear ω , na base simplética, é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação 5.1.5. Note que se $u = \sum_i a_i e_i + \sum_i b_i f_i$ e $v = \sum_j c_j e_j + \sum_j d_j f_j$ na base simplética, então $\omega(u, v) = \sum_i (a_i d_i - b_i c_i)$.

Exemplo 5.1.6. No exemplo 5.1.3, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , então $\{(0, e_1), \dots, (0, e_n), (e_1, 0), \dots, (e_n, 0)\}$ é uma base simplética de \mathbb{R}^{2n} . De fato, basta observar que $\omega_0((0, e_i), (e_j, 0)) = \delta_{ij}$.

5.1.b Variedades Simpléticas

Definição 5.1.7. Uma variedade simplética é um par (W, ω) , onde W é uma variedade e ω é uma 2-forma fechada e não degenerada, isto é, $d\omega = 0$ e ω_p é não degenerada para todo $p \in W$. Neste caso, dizemos que ω é uma forma simplética.

Quando não houver risco de confusão, denotaremos (W, ω) simplesmente por W .

Definição 5.1.8. Um simpletomorfismo φ entre duas variedades simpléticas (W_1, ω_1) , (W_2, ω_2) é um difeomorfismo φ tal que $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$.

Exemplo 5.1.9. No exemplo 5.1.3, $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética. De fato, ω_0 é uma 2-forma constante e logo, $d\omega_0 = 0$.

Exemplo 5.1.10. Seja S^2 a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . Tome a forma ω que em cada u em S^2 é dada por

$$\omega_u(v, w) = u \cdot (v \times w),$$

onde \times denota o produto vetorial real e $v, w \in T_u S^2$. Assim, (S^2, ω) é uma variedade simplética. De fato, note que $\omega_u = u_1 dy \wedge dz + u_2 dz \wedge dx + u_3 dx \wedge dy$. É fácil ver que $d\omega = 0$. Além disso, ω_u é não degenerada para todo u , basta notar que a forma só é nula em vetores da forma $v = \lambda w$, onde λ é um escalar não nulo.

Para finalizar essa subseção, vamos enunciar, mas não provar, um importante teorema da geometria simplética.

Teorema 5.1.11 (Darboux). *Seja (W, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$. Então para cada ponto $p \in W$ existe uma parametrização*

$$\begin{aligned} \varphi: U_1 \subset \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow U \subset W \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

tal que

$$\varphi^* \omega = \omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i.$$

Veja, por exemplo, o teorema 3.2.2 de [9] para a prova.

5.1.c Campos Vetoriais Hamiltonianos

Definição 5.1.12. Sejam (W, ω) uma variedade simplética e $H: W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um campo vetorial Hamiltoniano é um campo vetorial X_H definido pela relação

$$\omega_x(u, X_H(x)) = (dH)_x(u), \quad \forall u \in T_x W. \quad (5.1)$$

Além disso, H é às vezes chamado de Hamiltoniano.

Pela definição acima, segue que $X_H(x) = 0$ se, e somente se, x é ponto crítico de H e, além disso,

$$(dH)_x(X_H) = \omega_x(X_H(x), X_H(x)) = 0.$$

O sistema Hamiltoniano é o sistema de equações diferenciais associado a este campo vetorial, isto é,

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

Quando W é o fibrado cotangente de $Q = \mathbb{R}^n$, isto é, $W = T^*Q$, podemos identificar W com \mathbb{R}^{2n} e interpretá-lo como o espaço de fases de um sistema Hamiltoniano determinado por um Hamiltoniano $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ com espaço de configurações $Q = \mathbb{R}^n$. Neste caso, a forma simplética é dada por

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

onde $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ são as coordenadas em T^*Q . Nestas coordenadas, a equação

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

corresponde às equações clássicas Hamiltonianas

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

Proposição 5.1.13. *Se φ^t é o fluxo de X_H , então $(\varphi^t)^*\omega = \omega, \forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((\varphi^t)^*\omega) &= (\varphi^t)^*\mathcal{L}_{X_H}\omega \\ &= (\varphi^t)^*(i_X d\omega + d(i_X\omega)) \\ &= (\varphi^t)^*(d(i_X\omega)) \\ &= (\varphi^t)^*(-ddH) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi^t)^*\omega$ não depende de t e, conseqüentemente, $(\varphi^t)^*\omega = (\varphi^0)^*\omega = \omega$ para todo t , como queríamos demonstrar. ■

Até o momento definimos os Hamiltonianos independentes do tempo, porém, convém também considerá-los dependentes do tempo.

Seja $H: W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, onde W é uma variedade simplética. Denotando $H(x, t)$ por $H_t(x)$, o campo vetorial Hamiltoniano X_t é definido, para cada t , por $X_t = X_{H_t}$, onde X_{H_t} satisfaz (5.1). Quando o sistema Hamiltoniano resultante

$$\dot{x}(t) = X_t(x(t))$$

é independente do tempo, dizemos que o sistema é autônomo. Porém, como no caso autônomo, as soluções de um sistema não autônomo nos permitem definir uma família de simpletomorfismos φ^t tais que

$$\frac{d}{dt}\varphi^t = X_t \circ \varphi^t \quad \text{e} \quad \varphi^0 = \text{Id}.$$

Dessa forma, identificamos as soluções periódicas de período 1 do sistema Hamiltoniano como sendo os pontos fixos do simpletomorfismo φ^1 .

Definição 5.1.14. Uma solução periódica x do sistema Hamiltoniano é chamada de não degenerada se a diferencial de φ^1 não tem autovalor 1, isto é,

$$(d\varphi^1)_{x(0)}(Z) - Z \neq 0, \forall Z \neq 0.$$

Observação 5.1.15. Quando H é independente de t , os pontos críticos de H são exatamente as soluções constantes do sistema Hamiltoniano.

Proposição 5.1.16. *Sejam (W, ω) uma variedade simplética e $H: W \rightarrow \mathbb{R}$ um Hamiltoniano. Se um ponto crítico de H é não degenerado como uma solução periódica do sistema Hamiltoniano, então ele é um ponto crítico não degenerado da função H .*

Demonstração. Se Y, Z são dois vetores tangentes a W em x , então

$$(d^2H)_x(Y, Z) = \omega_x([X_H, Z]_x, Y),$$

onde Z denota qualquer extensão de Z em uma vizinhança de x (o que é possível, pois, localmente, toda forma fechada é exata). De fato, estendendo Y para um campo vetorial Hamiltoniano X_f em um vizinhança de x , temos

$$\begin{aligned} \omega([X_H, Z], Y) &= \omega([X_H, Z], X_f) \\ &= df([X_H, Z]) \\ &= [X_H, Z] \cdot f \\ &= X_H \cdot (Z \cdot f) - Z \cdot (X_H \cdot f). \end{aligned}$$

Como

$$X_H \cdot f = df(X_H) = \omega(X_H, X_f) = -\omega(X_f, X_H) = -dH(X_f) = -X_f \cdot H$$

então

$$\omega([X_H, Z], Y) = X_H \cdot (Z \cdot f) + Z \cdot (X_f \cdot H).$$

Quando x é ponto crítico de H , a primeira parcela é nula e a segunda é exatamente

$$(d^2H)_x(X_f, Z) = (d^2H)_x(Y, Z).$$

Suponha agora que x seja uma solução constante não degenerada do sistema Hamiltoniano, isto é, para todo $Z \neq 0$, temos $(d\varphi^1)_x(Z) - Z \neq 0$. Como $\varphi^0 = \text{Id}$, então existe t_0 tal que

$$\left. \frac{d}{dt}((d\varphi^t)_x(Z)) \right|_{t=t_0} \neq 0.$$

Porém,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((d\varphi^t)_x(Z)) &= -\frac{d}{ds}((d\varphi^{t-s})_x(Z)) \Big|_{s=0} \\ &= -(d\varphi^t)_x \left(\frac{d}{ds}(d\varphi^{-s})_x(Z) \Big|_{s=0} \right) \\ &= -(d\varphi^t)_x((\mathcal{L}_{X_H}Z)_x) \\ &= -(d\varphi^t)_x([X_H, Z]_x). \end{aligned}$$

Logo, para todo $Z \neq 0$, existe t_0 tal que $(d\varphi^{t_0})_x([X_H, Z]_x) \neq 0$. Segue que para todo $Z \neq 0$, deve ocorrer $[X_H, Z]_x \neq 0$. Como $(d^2H)_x(Y, Z) = \omega_x([X_H, Z]_x, Y)$, resulta que $(d^2H)_x$ é não degenerada e, conseqüentemente, x é ponto crítico não degenerado de H . ■

5.1.d Estruturas Complexas e Quase Complexas

Definição 5.1.17. Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Uma estrutura complexa calibrada por ω é um endomorfismo J de V tal que

- $J^2 = -\text{Id}$; (J é uma estrutura complexa)
- $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$; (J é simplética)

- $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ é um produto interno em V .

Proposição 5.1.18. *Todo espaço vetorial simplético (V, ω) admite uma estrutura complexa calibrada.*

Demonstração. Suponha que dimensão de V seja $2n$ e tome uma base simplética $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$. Defina $J: V \rightarrow V$ por

$$J\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n y_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n -y_i e_i + \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

Afirmção: J é uma estrutura complexa calibrada por ω .

De fato, primeiro observe que $J^2 = -\text{Id}$. Além disso, se $u = \sum_i a_i e_i + \sum_i b_i f_i$ e $v = \sum_j c_j e_j + \sum_j d_j f_j$, então

$$\omega(u, v) = \sum_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i).$$

Segue que

$$\omega(Ju, Jv) = \sum_{i=1}^n (-b_i c_i - (-a_i d_i)) = \sum_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i) = \omega(u, v).$$

Por fim, note que

$$g(u, v) = \omega(u, Jv) = \sum_{i=1}^n (a_i c_i - (-b_i d_i)) = \sum_{i=1}^n (a_i c_i + b_i d_i)$$

é um produto interno em V . Portanto, J é uma estrutura complexa calibrada por ω . ■

Exemplo 5.1.19. No exemplo 5.1.3 note que $\omega_0(u, v) = \langle Ju, v \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em \mathbb{R}^{2n} e J é matriz $2n \times 2n$ dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais ainda,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{Id} & 0 \\ 0 & -\text{Id} \end{pmatrix} = -\text{Id}$$

e

$$J^T = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} = -J.$$

Segue que $\omega_0(Ju, Jv) = \langle J^2 u, Jv \rangle = -\langle u, Jv \rangle = -\omega_0(v, u) = \omega_0(u, v)$ e $\omega_0(u, Jv) = \langle Ju, Jv \rangle = \langle u, J^T Jv \rangle = \langle u, v \rangle$. Logo, J é uma estrutura complexa em \mathbb{R}^{2n} calibrada por ω_0 .

Definição 5.1.20. Seja (W, ω) uma variedade simplética. Uma estrutura quase complexa é um endomorfismo J do fibrado tangente de W tal que $J_x^2 = -\text{Id}, \forall x \in W$.

Definição 5.1.21. Seja (W, ω) uma variedade simplética. Uma estrutura quase complexa J é dita calibrada por ω se J_x é calibrada por $\omega_x, \forall x \in W$.

Proposição 5.1.22. Se (W, ω) é uma variedade simplética, então existe uma estrutura quase complexa J calibrada por ω .

Demonstração. Seja g uma métrica Riemanniana em W . Para cada $x \in W$, vamos construir J_x em $T_x W$. Como em toda a construção a dependência em x será suave pela suavidade das aplicações usadas, então omitiremos tal dependência. Uma vez que ω é não degenerada, então existe um único isomorfismo linear $A: T_x W \rightarrow T_x W$ tal que

$$\omega(u, v) = g(Au, v), \quad u, v \in T_x W.$$

Podemos então decompor A da forma $A = JB$ (decomposição polar), onde B é um endomorfismo simétrico definido positivo, J é uma isometria e A e B comutam e, conseqüentemente, A e B^{-1} comutam.

Afirmção: $J = AB^{-1}$ é uma estrutura quase complexa calibrada por ω .
De fato, note que

$$g(Au, v) = \omega(u, v) = -\omega(v, u) = -g(Av, u) = -g(v, A^T u) = g(-A^T u, v),$$

ou seja, A é antissimétrica. Além disso,

$$J^T = (B^{-1})^T A^T = -B^{-1} A = -AB^{-1} = -J.$$

Como J é uma isometria, então $J^T J = \text{Id}$ e, conseqüentemente, $J^2 = -\text{Id}$. Segue que

$$JB = A = -A^T = -(JB)^T = -B^T J^T = BJ,$$

isto é, B e J comutam e, conseqüentemente, A e J comutam. Logo,

$$\omega(Ju, Jv) = g(AJu, Jv) = g(JAu, Jv) = g(Au, v) = \omega(u, v).$$

Por fim, observe que

$$\omega(u, Jv) = g(Au, Jv) = g(J^T Au, v) = g(J^{-1} Au, v) = g(Bu, v),$$

que é um produto interno em $T_x W$, uma vez que g é um produto interno e B é definida positiva. ■

Exemplo 5.1.23. Sejam (W, ω) uma variedade simplética, J uma estrutura quase complexa calibrada de W e $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ uma métrica Riemanniana de W . Então, dada uma função $H: W \rightarrow \mathbb{R}$, podemos relacionar X_H com o $\text{grad } H$. De fato, observe que

$$\omega(u, X_H) = dH(u) = g(u, \text{grad } H) = \omega(u, J \text{grad } H).$$

Logo,

$$X_H = J \text{grad } H \quad \text{ou} \quad \text{grad } H = -JX_H.$$

5.2 A Conjectura de Arnold

A questão sobre a existência de pontos fixos de simpletomorfismos está interligada com o desenvolvimento da topologia simplética e, de fato, V. I. Arnold propôs a seguinte ideia, hoje conhecida como conjectura de Arnold (que enunciamos aqui apenas no caso não-degenerado): numa variedade compacta, o número de pontos fixos de um difeomorfismo Hamiltoniano (ou seja, do fluxo em tempo $t = 1$ de um sistema hamiltoniano) é minorado pela soma das dimensões das homologias da variedade simplética. Esta conjectura foi provada, por exemplo, para superfícies de Riemann por Y. Eliashberg, para o toro T^{2n} por C. Conley e E. Zehnder e para variedades simpléticas conhecidas como monótonas por A. Floer que desenvolveu novos métodos e ferramentas, dando origem ao que se designa atualmente por teoria de Floer. Esta teoria inclui uma variante da homologia de Morse, mas em dimensão infinita, e que conhecemos por homologia de Floer. (Estas informações podem ser encontradas em [9].) Mais detalhes sobre esta teoria e a demonstração da conjectura de Arnold podem ser encontrados na parte II da referência principal deste trabalho [1]. A seguir, nesta seção, voltamos a enunciar a conjectura de Arnold e provamos um caso particular.

Conjectura 5.2.1 (Arnold). *Seja W uma variedade simplética compacta e seja*

$$H: W \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

um Hamiltoniano que depende do tempo. Suponha que as soluções de período 1 do sistema Hamiltoniano associado sejam não degeneradas. Então a quantidade delas é maior do que ou igual à soma

$$\sum_i \dim HM_i(W; \mathbb{Z}_2).$$

Como referido acima, para a demonstração desta conjectura usando a homologia de Floer veja, por exemplo, a parte II de [1]. Em particular, quando H não depende do tempo, a conjectura de Arnold pode ser enunciada como segue.

Proposição 5.2.2. *O número de soluções periódicas de período 1 de um sistema Hamiltoniano autônomo não degenerado em uma variedade simplética compacta W é maior do que ou igual à soma*

$$\sum_i \dim HM_i(W; \mathbb{Z}_2).$$

Demonstração. Segue diretamente da proposição 4.3.5. ■

5.3 Apêndice

Formas Diferenciais, Pullback e Derivada Exterior

Aqui vamos relembrar algumas definições e propriedades de formas diferenciais. Para maiores detalhes e demonstrações veja, por exemplo, os capítulos 1 e 2 de [4].

Definição 5.3.1. Seja M uma variedade suave. Uma k -forma diferencial ω é uma aplicação que em cada ponto $p \in M$ faz corresponder uma aplicação k -linear alternada ω_p definida em $(T_p M)^k$. Muitas vezes chamamos ω apenas de k -forma.

Por simplicidade, às vezes vamos omitir a dependência do ponto p nas formas.

Definição 5.3.2. Se

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \quad \text{e} \quad \varphi = \sum_J b_J dx_J,$$

então o produto exterior de ω por φ , denotado por $\omega \wedge \varphi$, é definido por

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Proposição 5.3.3. *Se ω é uma k -forma, φ é uma s -forma e θ é uma r -forma, então valem as seguintes propriedades:*

- $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$;
- $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$;
- $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$, se $r = s$.

Definição 5.3.4. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação suave, onde M e N são variedades suaves. Se ω é uma k -forma definida em N , então o pullback de ω por f , denotado por $f^*\omega$, é a k -forma dada por

$$(f^*\omega)_p(u_1, \dots, u_k) = \omega_p\left((df)_p(u_1), \dots, (df)_p(u_k)\right),$$

onde $p \in M$ e $u_1, \dots, u_k \in T_pM$. Além disso, se g é uma 0-forma, então, por convenção,

$$f^*g = g \circ f.$$

Proposição 5.3.5. *Sejam M, N e V variedades suaves. Sejam $f: M \rightarrow N$ uma aplicação suave, ω e φ k -formas em N , $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma em N e $h: V \rightarrow M$ uma aplicação suave, então valem as seguintes propriedades:*

- $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$;
- $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*\omega$;
- se $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ são 1-formas em N , então $f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\varphi_k)$;
- $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$;
- $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$.

Definição 5.3.6. Seja $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma k -forma na variedade suave M . A derivada exterior $d\omega$ de ω é definida por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Proposição 5.3.7. *A derivada exterior goza das seguintes propriedades:*

- $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$, onde ω_1 e ω_2 são k -formas;
- $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$, onde ω é uma k -forma e φ é uma s -forma;
- $d(d\omega) = d^2\omega = 0$;
- $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, onde ω é uma k -forma na variedade suave N e $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação suave, onde M é uma variedade suave.

A Derivada de Lie e a Fórmula de Cartan

Definição 5.3.8. A derivada de Lie de uma k -forma ω com respeito ao campo vetorial X é a k -forma

$$\mathcal{L}_X \omega = \frac{d}{dt} ((\varphi^t)^* \omega) \Big|_{t=0},$$

onde φ^t é o fluxo de X .

Observação 5.3.9. Em particular, quando estamos com uma 0-forma g , temos

$$\mathcal{L}_X g = \frac{d}{dt} (g \circ \varphi^t) \Big|_{t=0} = X(g).$$

Observação 5.3.10. Da definição acima, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((\varphi^t)^* \omega) \Big|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{t+t_0})^* \omega - (\varphi^{t_0})^* \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^t \circ \varphi^{t_0})^* \omega - (\varphi^{t_0})^* \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{t_0})^* ((\varphi^t)^* \omega) - (\varphi^{t_0})^* \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{t_0})^* ((\varphi^t)^* \omega - \omega)}{t} = (\varphi^{t_0})^* \mathcal{L}_X \omega, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} ((\varphi^t)^* \omega) = (\varphi^t)^* \mathcal{L}_X \omega.$$

Definição 5.3.11. Seja ω uma $(k+1)$ -forma. O produto interior de um campo vetorial X e ω é a k -forma

$$i_X \omega = \omega(X, (\cdot), \dots, (\cdot)).$$

Observação 5.3.12. Uma propriedade importante do produto interior é que dado uma k -forma ω e uma l -forma ψ , então

$$i_X(\omega \wedge \psi) = (i_X \omega) \wedge \psi + (-1)^k \omega \wedge (i_X \psi).$$

Para a demonstração dessa propriedade veja, por exemplo, o lema 14.13 de [3].

Proposição 5.3.13 (Fórmula de Cartan). *Sejam ω uma k -forma e X um campo vetorial definidos em uma variedade de dimensão n . Então a derivada de Lie de ω com respeito a X é*

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d(i_X \omega),$$

onde d denota a derivada exterior.

Demonstração. Como localmente toda forma diferencial é dada como combinação linear de produtos exteriores de 0-formas g e suas derivadas exteriores dg , então iremos dividir nossa prova em três passos. No primeiro passo provaremos que a fórmula é válida para uma 0-forma g . No segundo passo provaremos que cada lado da fórmula comuta com a derivada exterior d . Por fim, no terceiro passo, mostraremos que se a fórmula é válida para ω e ψ , então ela é válida para $\omega + \psi$ e $\omega \wedge \psi$.

Primeiro Passo.

Seja g uma 0-forma. Como

$$\mathcal{L}_X g = X(g), \quad i_X dg = dg(X) = X(g) \quad \text{e} \quad i_X g = 0,$$

temos que

$$\mathcal{L}_X g = X(g) = i_X dg = i_X dg + d(i_X g).$$

Logo, a fórmula é válida para 0-formas.

Segundo Passo.

Seja ω uma k -forma. Note que

$$d(i_X d\omega + d(i_X \omega)) = d(i_X d\omega) + d(d(i_X \omega)) = d(i_X d\omega) = i_X dd\omega + d(i_X d\omega),$$

isto é, o lado direito da fórmula comuta com a derivada exterior. Por outro lado, se $(\varphi^t)^* \omega = \sum_J a_J(x, t) dx_J$, com $J = (j_1, \dots, j_k), j_1 < j_2 < \dots < j_k$, então

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_X \omega &= d\left(\frac{d}{dt}((\varphi^t)^* \omega)\Big|_{t=0}\right) = d\left(\sum_J \frac{\partial a_J}{\partial t}(x, 0) dx_J\right) \\ &= \sum_J \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 a_J}{\partial x_l \partial t}(x, 0) dx_l \wedge dx_J \\ &= \sum_J \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_l}(x, t) dx_l \wedge dx_J \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_J \frac{\partial}{\partial t} (da_J \wedge dx_J) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (d((\varphi^t)^* \omega)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} ((\varphi^t)^* d\omega) \Big|_{t=0} = \mathcal{L}_X d\omega, \end{aligned}$$

isto é, o lado esquerdo da fórmula comuta com a derivada exterior.

Terceiro Passo.

Suponha que a fórmula seja válida para uma k -forma ω e uma l -forma ψ , então ela é válida para $\omega + \psi$, pois a derivada de Lie, a derivada exterior e o produto interior são lineares. Além disso, note que

$$\begin{aligned} i_X d(\omega \wedge \psi) &= i_X (d\omega \wedge \psi + (-1)^k \omega \wedge d\psi) = i_X (d\omega \wedge \psi) + (-1)^k i_X (\omega \wedge d\psi) \\ &= (i_X d\omega) \wedge \psi + (-1)^{k+1} d\omega \wedge (i_X \psi) + (-1)^k (i_X \omega) \wedge d\psi + \omega \wedge (i_X d\psi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(i_X (\omega \wedge \psi)) &= d\left((i_X \omega) \wedge \psi + (-1)^k \omega \wedge (i_X \psi)\right) = d((i_X \omega) \wedge \psi) + (-1)^k d(\omega \wedge (i_X \psi)) \\ &= d(i_X \omega) \wedge \psi + (-1)^{k-1} (i_X \omega) \wedge d\psi + (-1)^k d\omega \wedge (i_X \psi) + \omega \wedge d(i_X \psi). \end{aligned}$$

Logo, uma vez que

$$(-1)^{k+1} d\omega \wedge (i_X \psi) + (-1)^k d\omega \wedge (i_X \psi) = 0$$

e

$$(-1)^{k-1}(i_X\omega) \wedge d\psi + (-1)^k(i_X\omega) \wedge d\psi = 0,$$

temos que

$$\begin{aligned} i_X d(\omega \wedge \psi) + d(i_X(\omega \wedge \psi)) &= i_X d\omega \wedge \psi + \omega \wedge (i_X d\psi) + d(i_X\omega) \wedge \psi + \omega \wedge d(i_X\psi) \\ &= (i_X d\omega + d(i_X\omega)) \wedge \psi + \omega \wedge (i_X d\psi + d(i_X\psi)) \\ &= \mathcal{L}_X\omega \wedge \psi + \omega \wedge \mathcal{L}_X\psi. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega \wedge \psi) &= \frac{d}{dt}((\varphi^t)^*(\omega \wedge \psi))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\varphi^t)^*\omega \wedge (\varphi^t)^*\psi)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}((\varphi^t)^*\omega)\Big|_{t=0} \wedge (\varphi^0)^*\psi + (\varphi^0)^*\omega \wedge \frac{d}{dt}((\varphi^t)^*\psi)\Big|_{t=0} \\ &= \mathcal{L}_X\omega \wedge \psi + \omega \wedge \mathcal{L}_X\psi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \psi) = i_X d(\omega \wedge \psi) + d(i_X(\omega \wedge \psi)),$$

terminando assim a demonstração. ■

Definição 5.3.14. A derivada de Lie de um campo vetorial Z com respeito ao campo vetorial X é dada por

$$\mathcal{L}_X Z = \frac{d}{dt}(d\varphi^{-t})(Z)\Big|_{t=0},$$

onde φ^t é o fluxo de X .

Proposição 5.3.15. Se X e Z são campos vetoriais definidos na variedade suave M , então $\mathcal{L}_X Z = [X, Z]$.

Para a demonstração dessa proposição veja, por exemplo, o teorema 9.38 de [3].

Referências Bibliográficas

- [1] M. Audin, M. Damian, and R. Ern e, *Morse Theory and Floer Homology*. Universitext, Springer London, 2013.
- [2] J. Milnor, *Morse Theory*. Annals of mathematics studies, Princeton University Press, 1963.
- [3] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2012.
- [4] M. P. do Carmo, *Formas diferenciais e aplica es*. Monografias de matem tica, Instituto de Matem tica Pura e Aplicada, 1983.
- [5] J. Milnor and D. W. Weaver, *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, Princeton University Press, 1997.
- [6] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*. Mathematics Series, Prentice-Hall, 1974.
- [7] A. Banyaga and D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*. Texts in the Mathematical Sciences, 29, Springer Netherlands, 1st ed., 2004.
- [8] E. L. Lima, *Homologia b sica*. Projeto Euclides, IMPA, 2009.
- [9] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, OUP Oxford, 2017.