UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

UM ESTUDO CONTEXTUALIZADO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Flávio Elias Carvalho Pereira

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

Vitória - Espírito Santo
Maio de 2023

Flávio Elias Carvalho Pereira

UM ESTUDO CONTEXTUALIZADO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Vitória - Espírito Santo

Maio de 2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

P436e

PEREIRA, FLÁVIO ELIAS CARVALHO, 1984-
Um estudo contextualizado das razões trigonométricas no triângulo retângulo / FLÁVIO ELIAS CARVALHO PEREIRA. - 2023.
111 f. : il.

Orientadora: Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Trigonometria. I. Ccoyllo, Rosa Elvira Quispe. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"Um Estudo Contextualizado das Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo"

Flávio Elias Carvalho Pereira

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 12/05/2023 por:

____

Prof.ª Dr.ª Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Orientadora – UFES

____

Prof. Dr. Milton Edwin Cobo Cortez
Membro Interno – UFES

____

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
Membro Externo – UFMT

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 16/05/2023 às 01:39:32

Folha de Assinaturas Flávio Elias Pereira

Data e Hora de Criação: 15/05/2023 às 14:14:40

Documentos que originaram esse envelope:
- Folha de Assinaturas Flávio Elias Pereira.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: d9efb66365e391420227655a489005a7dd1302435031d1ff279a9c371c952d56
[SHA512]: f38c0e378cd287d40d2660e1ea803a5ea1fc3dd5d50d55cfb24788abd206251053afa5ed33e29932f23602e688dfe5ec3ecfffe598c6ee429e01262196e3501d

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)
Data/Hora: 15/05/2023 - 14:20:48, IP: 200.137.65.100, Geolocalização: [-20.287285, -40.301573]
[SHA256]: 013f6e2129ba33ed47bd2dbc1c6430c20055a91c462945fe49955ef96b71b7bf

ASSINADO - milton.cortez@ufes.br
Data/Hora: 15/05/2023 - 15:29:50, IP: 177.26.84.58, Geolocalização: [-20.289069, -40.293209]
[SHA256]: 01fdaee22ffb4d12e90f92872a1baf212fb53d1fe06c514983a4151a728201f2

ASSINADO - vz_juan@yahoo.com.br
Data/Hora: 16/05/2023 - 01:39:32, IP: 190.237.60.218, Geolocalização: [-12.176588, -76.949094]
[SHA256]: 26eee654fc1381af0fb6ac1406e7211149a9bc1ad140e591ba393aba526cdfeb

Histórico de eventos registrados neste envelope

16/05/2023 01:39:32 - Envelope finalizado por vz_juan@yahoo.com.br, IP 190.237.60.218
16/05/2023 01:39:32 - Assinatura realizada por vz_juan@yahoo.com.br, IP 190.237.60.218
16/05/2023 01:39:17 - Envelope visualizado por vz_juan@yahoo.com.br, IP 190.237.60.218
15/05/2023 15:29:50 - Assinatura realizada por milton.cortez@ufes.br, IP 177.26.84.58
15/05/2023 15:29:48 - Envelope visualizado por milton.cortez@ufes.br, IP 177.26.84.58
15/05/2023 14:20:48 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.100
15/05/2023 14:20:38 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.100
15/05/2023 14:15:22 - Envelope registrado na Blockchain por wesley.a.silva@ufes.br, IP 200.137.65.102
15/05/2023 14:15:21 - Envelope encaminhado para assinaturas por wesley.a.silva@ufes.br, IP 200.137.65.102
15/05/2023 14:14:40 - Envelope criado por wesley.a.silva@ufes.br, IP 200.137.65.102

Agradecimentos

Agradeço à Deus por me proporcionar perseverança durante toda a minha vida.

À minha irmã Giselda Helena Pereira e a minha mãe Maria Rita de Carvalho Pereira, por terem sido, ao longo de toda a minha vida, as principais incentivadoras e patrocinadoras dos meus estudos.

À minha amiga Michele Benincá pela amizade e atenção dedicadas quando sempre precisei.

Aos meus gestores Sueder Dalgobo e Oziel de Abreu por terem sempre me incentivado e apoiado ao longo da caminhada, nunca deixando que eu desanimasse frente as dificuldades.

À minha professora orientadora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo pelas valiosas contribuições dadas durante todo o processo.

À todos os meus amigos do curso de mestrado que compartilharam dos inúmeros desafios que enfrentamos, sempre com espírito colaborativo.

À Universidade Federal do Espírito Santo e o seu corpo docente que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

Resumo

A trigonometria é uma importante área da matemática que ganha muito destaque devido às vastas contribuições a diferentes áreas de conhecimento, como a topografia, engenharia e, de forma especial, à astronomia. O objetivo desta pesquisa é proporcionar um estudo aprofundado e contextualizado das razões trigonométricas no triângulo retângulo, através da história e da resolução de problemas. Descreve-se um pouco da história da trigonometria, apresentam-se conceitos preliminares de matemática, necessários ao estudo em curso, definem-se as razões trigonométricas, destacando relações e identidades, fórmulas para cálculos de razões de ângulos complementares, arco duplo e arco metade e valores para os ângulos notáveis. Ainda, apresentam-se diversas situações de uso prático da matemática, por meio de resolução de problemas, em que empregasse a trigonometria, dessa forma evidenciando as suas contribuições para a humanidade. A trigonometria é trabalhada com rigor matemático, mas de forma acessível aos alunos de ensino fundamental II.

Palavras-chave: razões trigonométricas, contextualização, resolução de problemas.

Abstract

Trigonometry is an important area of mathematics that stands out because of the vast contributions to different areas of knowledge, such as topography, engineering and, especially, astronomy. The objective of this research is to provide an contextualized study of the trigonometric ratios in the right triangle, through history and problem solving. A little history of trigonometry is described, preliminary concepts of mathematics, necessary for the current study, are presented, trigonometric ratios are defined, highlighting relationships and identities, formulas for calculating ratio of complementary angles, double arc and half arc and values for notable angles. Evidencing several contributions of trigonometry to humanity, through problem solving, there are several mathematical and practical situations in which it is employed. Trigonometry is worked with mathematical rigor, but in an accessible way to elementary school students.

Keywords: Trigonometric ratios, Contextualization, Problem Solving.

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular
CEFET/MG - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
COTUCA - Colégio Técnico de Campinas
ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
EPCAR - Escola Preparatória de Cadetes do Ar
ESPCEX - Escola Preparatória de Cadetes do Exército
IFPE - Instituto Federal de Pernambuco
MEC - Ministério da Educação
PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PUCCAMP - Pontifícia Universidade Católica de Campinas
SEDU-ES - Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A matemática é uma ciência de grande prestígio, devido às diversas contribuições para o desenvolvimento das civilizações ao longo da história. Fruto da criação humana, a matemática sempre buscou atender necessidades e responder perguntas de culturas distintas e em momentos diferentes (BRASIL, 1998, p. 59)[5]. Inclusive nos dias atuais, a matemática é mais essencial em razão da sua grande aplicabilidade na sociedade contemporânea e porque o acesso a esta ciência na educação básica pode contribuir com o processo de cidadania, auxiliando na formação de um indivíduo crítico e consciente de sua responsabilidade social (BRASIL, 2018, p. 265)[3].

A presença da matemática em diversas atividades da vida humana é inquestionável, assim como sua grande utilidade. E apesar de reconhecermos a necessidade de se aprender matemática na formação escolar, ela sempre foi uma disciplina considerada de difícil compreensão pela maioria dos alunos. Tendo em vista que a matemática é um meio de comunicação e que, portanto, possui uma linguagem própria e formal, logo ela vai exigir uma prática constante de sua "gramática" e este é o primeiro obstáculo identificado por muitos estudantes que se dedicam ao seu estudo (BRASIL, 2005, p. 9)[6]. Porém, é necessário destacar que a beleza da matemática está exatamente neste processo, uma vez que "a Matemática permite a argumentação de forma clara, concisa, rigorosa e universal" (BRASIL, 2005, p. 9)[6].

Em consonância com esta questão, o Ministério da Educação (MEC) por meio da *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) destaca a importância da etapa educacional de Ensino Fundamental no processo de desenvolvimento do *letramento matemático* que define como:

> As competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimen-

> tos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 2018, p. 266)[3].

Um fator importante que influencia no modo como a matemática é vista pelo público em geral é a associação dos conteúdos estudados com sua utilidade prática. Ao longo do ensino fundamental, os alunos não duvidam da utilidade dos assuntos estudados em matemática e até mesmo percebem que seu aprendizado é uma medida de cidadania. Porém, as dificuldades vão aumentando ao passo que os alunos progridem na educação escolar. Ora, no ensino médio, em muitos conteúdos, os alunos encontram dificuldades de associação da matemática à sua utilidade prática, embora os conteúdos trabalhados nesse período escolar sejam base para que o aluno possa atingir patamares mais altos em sua formação educacional (BRASIL, 2005, p. 3)[6].

Neste mesmo entendimento, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Ensino Fundamental destacam que no quarto ciclo do ensino fundamental (8º e 9º anos), os alunos passam por mudanças corporais, emocionais e comportamentais que contribuem para novas preocupações relacionadas à continuidade dos estudos e futuro profissional. E estas inquietações passam a influenciar positivamente o processo de ensino e aprendizagem da matemática, conforme os alunos percebem que os conhecimentos adquiridos são essenciais para continuação dos estudos e que irão contribuir para sua inserção profissional no mercado de trabalho (BRASIL, 1998, p. 79)[4]. Desta forma, os PCN's reforçam que, nesta etapa, a aprendizagem matemática deve estar amparada em contextos sociais que reforcem as relações existentes entre o conhecimento matemático e o trabalho (BRASIL, 1998, p. 79)[4].

Em relação ao papel do ensino fundamental no processo de aprendizagem da matemática, os PCN'S propõem um ensino que favoreça ao aluno a compreensão de sua realidade, desenvolvendo habilidades, competências e capacidades cognitivas, bem como segurança para enfrentar desafios, ampliando assim as possibilidades para o exercício da cidadania durante o processo de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 60)[5]. Em complementação a esta proposta, a Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo (SEDU-ES), por meio do documento *Currículo Básico da Escola Estadual*, destaca que o ensino de matemática deve ir além da aplicação de ideias e processos matemáticos para resolução de problemas práticos, trabalhando também em contextos puramente matemáticos que envolvam raciocínios aritméticos, geométricos e algébricos (ESPIRITO SANTO, 2009, p. 85)[14]. Contudo, ambos os textos concordam quanto à necessidade do desenvolvimento de atividades contextualizadas aos alunos.

Levando em consideração este cenário e as propostas dos documentos oficiais quanto ao papel do ensino fundamental na formação matemática dos alunos, procurou-se refletir acerca de um conteúdo matemático, desenvolvido na última série do ensino fundamental II e posteriormente no ensino médio, cuja aplicação se estende dentro da própria matemática, enquanto base para outros conteúdos, em diversas aplicações práticas e que em determinadas épocas revolucionou processos de medições e em outras áreas de conhecimento: a trigonometria.

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: *tri* (três), *gonos* (ângulos) e *metron* (medir), logo a trigonometria é o ramo da matemática que estuda a relação entre as medidas de lados e ângulos de um triângulo. Com proposta voltada para um público de docentes e discentes do ensino fundamental II, restringiremos o estudo de trigonometria ao triângulo retângulo, uma vez que o desenvolvimento da trigonometria por meio do círculo trigonométrico tem seu estudo restrito ao ensino médio.

A humanidade sempre necessitou, ao longo de sua história, realizar medições diversas e, para isso, desenvolveu ferramentas próprias como trenas, réguas, etc. Porém, em certo momento, verificou-se a necessidade de calcular distâncias, cujas ferramentas até então desenvolvidas não eram capazes de medir. Por exemplo, o cálculo da altura de uma montanha torna-se inviável considerando apenas à disposição uma fita métrica, por maior que esta seja. O cálculo da largura de um rio, como o Amazonas, torna-se muito difícil, com este mesmo instrumento. O cálculo da distância da Terra à Lua já foi objeto de estudo de muitos astrônomos da antiguidade e todos esses cálculos tornam-se inviáveis sem o uso da trigonometria. Desta forma, destacamos que, desde tempos antigos e até os dias de hoje, a trigonometria não ficou somente limitada ao estudo de triângulos no âmbito teórico matemático, mas sim, abrangeu diversas áreas de conhecimento como astronomia, engenharia, medicina, cartografia, entre outros, em razão de suas aplicações práticas.

Percebe-se com os exemplos citados acima a relevância da trigonometria na matemática, nas outras ciências e no mundo. Quanto ao processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, os PCN's reforçam a necessidade de que seu estudo esteja relacionado às situações práticas, evitando assim, um esforço exclusivo em processos algébricos, mas enfatizando a aplicação da trigonometria na solução de problemas envolvendo medições (BRASIL, 2000, p. 44)[7]. Neste âmbito, é preciso ressaltar que em experiências pessoais em sala de aula, muitos alunos encontraram dificuldades na aprendizagem da trigonometria, especialmente quando era trabalhada de forma superficial ou voltada exclusivamente para cálculos matemáticos. Um processo de aprendizagem neste modelo, além de proporcionar dificuldades aos alunos, torna-se desinteressante. E como a trigonometria possui uma variedade de aplicações, torna-se imprescindível explorar essas possibilidades em sala de aula, especialmente no ensino fundamental.

Reforçando a discussão sobre a importância de se trabalhar a matemática com destaque para sua aplicabilidade na vida humana, é preciso refletir sobre como os documentos oficiais tratam esta questão. No Boletim *Matemática Não é Problema* (2005)[6] do Ministério da Educação (MEC), reforça-se que a contextualização é uma ferramenta de acesso às escolas para transformar o aluno em agente ativo de seu processo de aprendizagem. Mas também sinaliza como a contextualização deve ser empregada para favorecer positivamente a aprendizagem: "Em Matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada num sentido mais amplo e não empregada de modo artificial e forçado, ou que não se restrinja apenas a um universo mais imediato ("cotidiano")" (BRASIL, 2005, p. 11)[6]. Este documento destaca ainda a importância do papel do professor neste processo, que não deve se restringir ao livro didático, sua principal ferramenta de trabalho, mas, percebendo as necessidades e anseios dos alunos e da comunidade, que seja capaz de desenvolver práticas em sala de aula visando atender estas necessidades (BRASIL, 2005, p. 5 e 32)[6].

No âmbito do Estado do Espírito Santo, a Secretaria de Educação (SEDU-ES), no *Currículo Básico da Escola Estadual* ressalta que tendências atuais de educação matemática propõem a associação do que é feito em sala de aula e fora dela. Segundo o documento "a palavra-chave é "contextualização" e a meta é se ensinar uma Matemática para formar os cidadãos críticos exigidos pela sociedade dialógica" (ESPÍRITO SANTO, 2009, p. 82)[14]. E buscando esta realização, o documento apresenta como orientação metodológica, para auxiliar o trabalho em sala de aula, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas a fim de favorecer o raciocínio e a comunicação matemática (ESPÍRITO SANTO, 2009, p. 85)[14].

Acerca da metodologia de resolução de problemas, a SEDU-ES ressalta que:

> A resolução de problemas como metodologia tem a proposta de romper com o currículo linear e avançar num ensino que integre conteúdos e articule conhecimentos, propiciando o desenvolvimento de uma atitude de investigação frente às situações-problema, bem como a construção da capacidade de se comunicar matematicamente e utilizar processos de pensamentos mais elevados. Essa metodologia favorece o desenvolvimento da capacidade de se adaptar a novas situações, além de ver a Matemática como uma ciência dinâmica, construída pelo homem, na qual haja lugar para conjecturas, refutações e demonstrações (ESPÍRITO SANTO, 2009, p. 86)[14].

Esta pesquisa, baseada nas reflexões acima apresentadas, pretende contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria, trabalhada aqui por meio das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Deseja-se que os alunos sejam capazes de alcançar andares mais altos de educação, mas entende-se que isso só será possível com uma boa base matemática. Concordamos com a ideia de que "nossos alunos desejam e merecem ir além das contas do supermercado ou das medidas geométricas corriqueiras. É nossa tarefa mostrar a eles que a Matemática pode lhes oferecer oportunidades de um futuro interessante e produtivo" (BRASIL, 2005, p. 3)[6]. Desta forma, trata-se de um material voltado tanto para o aluno do 9º ano do ensino fundamental e de ensino médio, quanto para professores de matemática que atuam nestas séries escolares.

Pretende-se nesta pesquisa apresentar as razões trigonométricas no triângulo retângulo de forma contextualizada, partindo-se de uma análise do contexto histórico do surgimento, desenvolvimento e aplicações da trigonometria, destacando sua importância histórica até os dias atuais. Serão definidas e demonstradas as razões trigonométricas, bem como conceitos preliminares para seu desenvolvimento. E, utilizando como base a metodologia indicada pelos documentos oficiais de educação, abordar a resolução de problemas, embasadas em pesquisas de Polya[24], onde pretende-se estudar aplicações variadas para as razões trigonométricas dentro da matemática, em situações práticas e nas provas mais comuns realizadas pelos alunos da escola básica.

O objetivo geral desta pesquisa é proporcionar um estudo amplo das razões trigonométricas do triângulo retângulo, de forma contextualizada, por meio da história da matemática e da resolução de problemas.

Os objetivos específicos da pesquisa são: contextualizar as razões trigonométricas ao longo da história; apresentar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, relações trigonométricas e ângulos notáveis; analisar, pela metodologia de resolução de problemas, aplicações diversas da trigonometria na matemática, em situações práticas e em provas importantes da atualidade.

Esta pesquisa é composta por 6 capítulos. O Capítulo 1 apresenta a introdução com a justificativa para o estudo, embasada em diversas bibliografias e documentos oficiais de educação, os objetivos gerais e específicos e a organização da pesquisa.

O Capítulo 2 apresenta um pouco da história da trigonometria, destacando contribuições importantes e sua relevância para a matemática e outras ciências. Reflete ainda, sobre a história da matemática como ferramenta de contextualização.

O Capítulo 3 apresenta conceitos preliminares de matemática, especialmente de geometria plana, necessários para o desenvolvimento do estudo sobre relações trigonométricas.

O Capítulo 4 fornece o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, apresentando sua definição , relações e identidades trigonométricas, fórmulas para cálculo das razões de ângulos complementares, arco duplo e arco metade e um estudo sobre os ângulos notáveis.

O Capítulo 5 trata das aplicações das razões trigonométricas, divididas em três partes: aplicações na matemática, aplicações em situações práticas e aplicações na resolução de problemas.

O Capítulo 6 apresenta as considerações finais da pesquisa e propostas para continuação do estudo de trigonometria.

Capítulo 2

Sobre a História da Trigonometria

Este capítulo apresenta a importância da história da matemática enquanto metodologia de ensino e ferramenta de contextualização, bem como fornece elementos históricos sobre o desenvolvimento da trigonometria.

2.1 A história da matemática como ferramenta de contextualização

A matemática é fruto da construção humana e "o conhecimento matemático faz parte do patrimônio cultural que a humanidade vem acumulando" (BRASIL, 2005, p. 9)[6].

Muito se tem falado a respeito de um trabalho em sala de aula mais contextualizado, que permita ao aluno a compreensão dos conceitos, abrindo seus horizontes para as possibilidades de aplicação em sua vida. Ora, nesse sentido os conceitos matemáticos estudados atualmente nas escolas, têm sua origem em uma construção histórica, fruto de questionamentos, necessidades, pesquisas de muitos matemáticos e de diferentes civilizações ao longo da história da humanidade. Alguns conhecimentos, apresentados muitas vezes aos alunos de forma fria e acabada, foram desenvolvidos a passos lentos, ao longo de séculos e com contribuições em diferentes momentos.

Um estudo contextualizado, amparado na história da matemática, além de tornar a aprendizagem mais agradável e motivadora, aproxima o aluno do conhecimento. Esta prática diminui a distância entre a ciência e o estudante. Concordamos com o pensamento de que "somente através de um conhecimento aprofundado e global de nosso passado é que poderemos entender nossa situação no presente e, a partir daí, ativar nossa criatividade com propostas que ofereçam ao mundo todo um futuro melhor" (D'AMBROSIO, 1997, p. 113).

Para D'Ambrósio, o conhecimento da história visa "situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos, em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal, diversificada nas suas origens e na sua evolução" (D'AMBROSIO, 1999, p. 27). Reforçando esta ideia, D'Ambrósio considera que a história da matemática é fundamental em qualquer reflexão acerca do ensino da matemática. Destaca ainda que a maior parte dos programas, apresentam conteúdos mortos, acabados e fora do contexto moderno, tornando cada vez mais difícil a motivação dos alunos para o estudo desta ciência. E neste contexto, a história da matemática surge como um elemento motivador valioso (D'AMBROSIO, 1997, p. 29).

Neste cenário, defendemos a utilização da história da matemática como elemento importante para sua aprendizagem e concordamos com seu potencial motivador, uma vez que ao perceber a matemática como criação do homem, entendendo as razões pelas quais foi desenvolvida e as necessidades que buscou atender, proporciona-se ao aluno uma visão muito mais humana da matemática, desmistificando esta ciência que a muitos assusta.

Ao longo desta pesquisa, será trabalhada de forma contextualizada a trigonometria no triângulo retângulo. E este capítulo apresenta uma breve história da trigonometria.

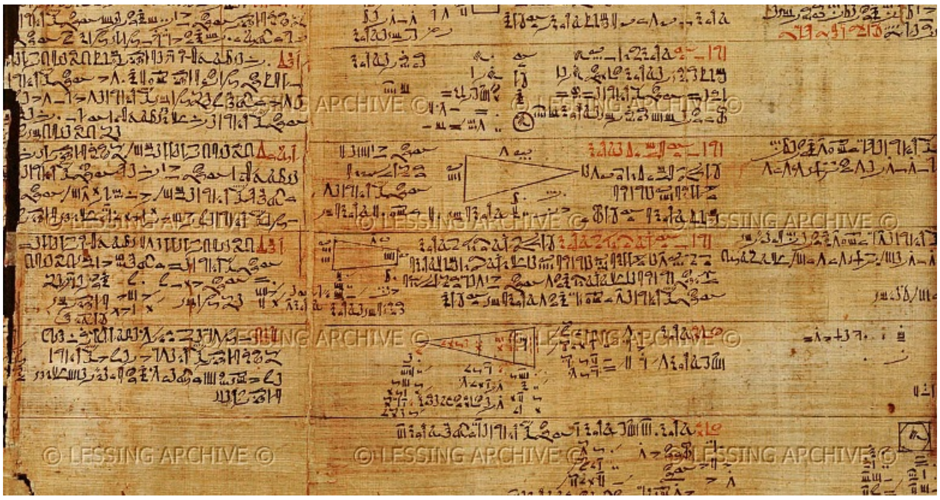
2.2 Um pouco da história da trigonometria

A trigonometria, assim como outras áreas da matemática, foi construída através do tempo, com aportes de diversos povos, em momentos distintos. O início de seu desenvolvimento perde-se na pré-história. A construção da trigonometria caminhava junto ao da astronomia, que demandava conhecimentos trigonométricos ao passo que fornecia ferramentas e teorias matemáticas para desenvolvê-la. E a relação entre astronomia e trigonometria era tamanha que apenas no século XV entenderam ser proveitoso o estudo de ambas separadamente (KENNEDY, 1992, p. 1).

A história da trigonometria inicia no Egito que, devido à sua "revolução agrícola", fomentou o surgimento de pesquisas relacionadas à matemática e de profissionais especializados nesta área, denominados *escribas* (REIS, 2016, p. 14).

Um dos textos matemáticos mais antigos, que se tem registro histórico, foi escrito pelo escriba Ahmes e é conhecido como Papiro de Rhind (ou Ahmes), ilustrado na Figura 2.1. Este texto matemático datado de 1650 a.C. foi adquirido pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, cujo nome foi atribuído ao papiro (EVES, 2011, p. 69).

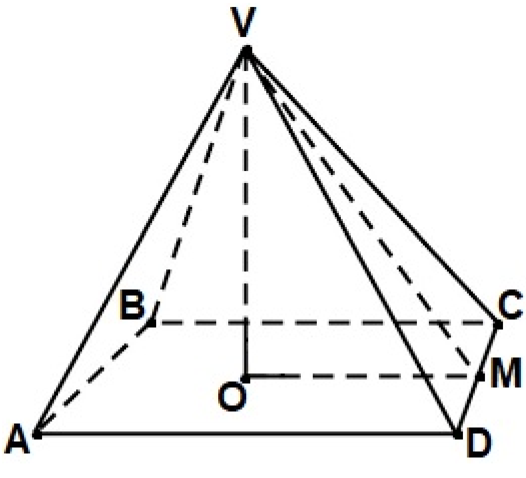
Figura 2.1: Papiro de Rhind



Fonte: Matemática é fácil.[1]

O Papiro de Rhind é um manual prático com 85 problemas trascritos por Ahmes de um trabalho mais antigo, dos quais quatro apresentam relações com a trigonometria ao citar o *seqt* de um ângulo. No texto, Ahmes não especifica qual o significado atribuído a esta palavra (*seqt*), mas pelo contexto em que era utilizado, entende-se que o *seqt* de uma pirâmide regular era equivalente ao que hoje conhecemos pela *cotangente* de um ângulo (COSTA, 2003, p. 2). Na figura 2.2, apresenta-se um exemplo de aplicação do *seqt* egípcio:

Figura 2.2: Aplicação do *seqt* egípcio



Fonte: O próprio autor

Na figura, se $\overline{OV} = 50$ e $\overline{OM} = 25$, então

$$seqt = \frac{50}{25} = 2.$$

[1]Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>. Acesso em: 16 abr. 2020.

No processo de construção das pirâmides do Egito, apresentadas na Figura 2.2, era necessário manter a mesma inclinação de todas as faces e o *seqt* era usado para que fosse mantida a razão entre a distância vertical e o afastamento horizontal das faces da pirâmide (COSTA, 2003, p. 2). Isso demonstra que este conhecimento matemático é ainda mais antigo do que se pensava, uma vez que foi empregado na construção das pirâmides do Egito, datadas de 2.600 a.C.

Figura 2.3: Pirâmides do Egito

Fonte: Toda Matéria.[2]

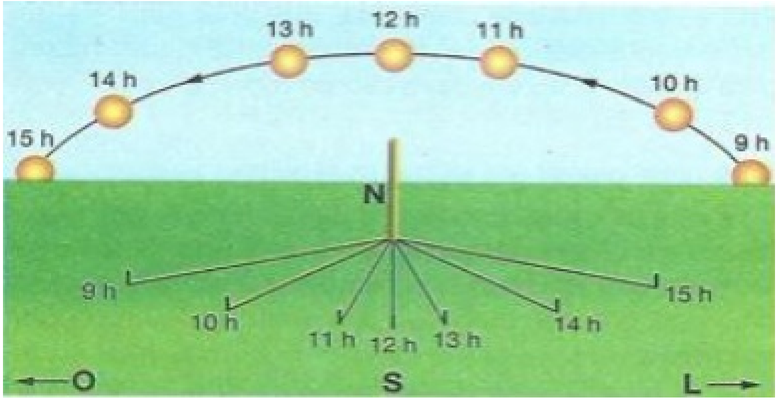
Por volta de 1.500 a.C. surgiu no Egito o que conhecemos por "relógio do sol" composto por uma vara vertical cuja sombra projetada sobre sequências numéricas, permitia relacionar seu comprimento às horas do dia. É possível dizer que aí víamos surgir a ideia de funções tangentes e cotangentes, formalizadas séculos depois (COSTA, 2003, p. 3).

Na China, aproximadamente 1.110 a.C., utilizava-se triângulos retângulos para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Não se tem registro de como eram feitas as medições, mas existem evidências de um conhecimento sobre as relações trigonométricas, do conceito de ângulo e como medi-lo (COSTA, 2003, p. 3).

No Ocidente, os gregos adquiriram o conhecimento egípcio e superaram seus mestres. A Grécia apresentou um desenvolvimento significativo na matemática, tornando-se orientadora de todas as outras nações (COSTA, 2003, p. 4). Os gregos também faziam uso do relógio do sol ao qual denominavam *gnômon*, representado na Figura 2.4. Tratava-se de uma vara perpendicular ao solo onde observava-se as sombras que produzia ao longo do dia a fim de se medir a duração do dia e do ano (REIS, 2016, p. 18). Temos aí uma aplicação da cotangente do ângulo.

[2]Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/as-piramides-do-egito/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

Figura 2.4: Gnômon Grego



Fonte: Reis (2016, p. 17)

O desenvolvimento da trigonometria está ligado ao da geometria. Grandes sábios gregos contribuíram com o avanço da trigonometria mediante suas descobertas geométricas. Tales de Mileto (625 - 546 a.C.) contribuiu significativamente com o teorema que leva seu nome, o Teorema de Tales (COSTA, 2003, p. 5).

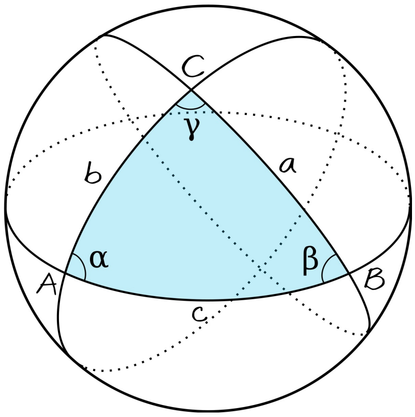
As contribuições de um grande matemático grego, Pitágoras (570 - 495 a.C.), discípulo de Tales, revolucionaram esta ciência. Ele fundou a *Escola Pitagórica* que promoveu grandes avanços em matemática, filosofia e astronomia (REIS, 2016, p. 18). "Abstração, prova e raciocínio dedutivo, três elementos básicos da Matemática, foram todos introduzidos pelos gregos antigos e há uma forte probabilidade de que o tenham sido pelo próprio Pitágoras"(STRATHERN, 1998, p. 30). Não foi Pitágoras quem fez a descoberta do teorema que leva seu nome, mas foi o primeiro a prová-lo. O Teorema de Pitágoras foi um marco importante para a trigonometria, aparecendo em diversos problemas trigonométricos, inclusive sendo base para a relação fundamental da trigonometria, tratada na página 53 desta dissertação.

Posteriormente a Pitágoras, no período de 300 a.C. a 200 a.C. destaca-se Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.), quem fez observações que posteriormente conduziriam à introdução do círculo de 360°. Ele também fez estudos sobre a razão entre a distância da Terra ao Sol e do Sol à Lua (REIS, 2016, p. 19).

Eratóstenes de Cirene (276 - 196 a.C.), contemporâneo de Aristarco, utilizou semelhança de triângulos e razões trigonométricas para obter a notável medida da circunferência da Terra. E para tal, o conhecimento de ângulos e a forma de medi-los foi determinante (COSTA, 2003, p. 5). Segundo Boyer, "durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de Astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática"(BOYER, 2010, p. 118).

Entre 180 a 125 a.C. viveu Hiparco de Nicéia que compilou a primeira tabela trigonométrica. Pelo feito, passou a ser chamado de “pai da trigonometria”(BOYER, 2010, p. 118). Hiparco foi considerado o mais ilustre astrônomo da Antiguidade, sendo a trigonometria esférica, conforme Figura 2.5, que estuda os triângulos na esfera, uma das suas grandes contribuições (REIS, 2016, p. 20).

Figura 2.5: Trigonometria esférica



Fonte: GrátisPNG.[3]

Por volta de 150 d.C. foi escrita a “mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade”(BOYER, 2010, p. 119). Trata-se da obra “*Syntaxis Mathemática*”, composta por treze livros e escrita por Ptolomeu de Alexandria. Esta obra, em comparação a outros trabalhos de astronomia considerados menores, era chamada de *magister*, que significa “o maior”, enquanto as demais eram chamadas de coleção “menor”. E, como consequência, mais tarde na Arábia, surgiu o costume de chamar a obra de Ptolomeu de *Almajesto* (“o maior”), ficando conhecida a partir de então por este nome (BOYER, 2010, p. 119).

A obra de Ptolomeu foi influenciada pelos estudos deixados por Hiparco, cujos escritos infelizmente não sobreviveram ao efeito do tempo. Portanto, o *Almajesto*, é o grande legado desta época que possibilitou às novas gerações conhecer, por exemplo, sua tabela trigonométrica e os métodos empregados na sua construção (BOYER, 2010, p. 120). “Para os matemáticos, o *Almajesto* tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu divisou para ajudá-lo a reunir dados para sua tábua de cordas (que é aproximadamente uma tábua de senos)”(KENNEDY, 1992, p. 28).

Ptolomeu utilizava a então conhecida divisão da circunferência em 360 partes (hoje chamadas de graus). Além disso, dividiu o círculo trigonométrico em 120 porções, que, por sua vez, eram divididas em 60 partes chamadas *partes minutae primae* (“primeiras menores partes”). E cada uma destas partes era dividida em 60 partes chamadas *partes minutae secundae* (“segundas menores partes”). Esta é a origem dos termos *minuto* e

[3]Disponível em: <https://www.gratispng.com/png-8cg2uz/>. Acesso em: 17 abr. 2020.

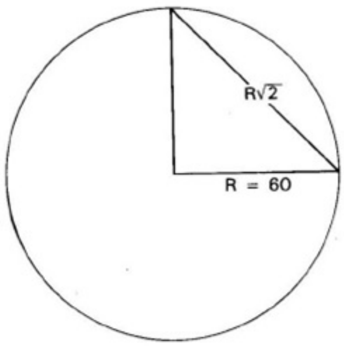
segundo. O processo de divisão citado teve influência do sistema sexagesimal babilônico, cujos trabalhos na área de astronomia eram conhecidos pelos gregos (KENNEDY, 1992, p. 28).

Em sua obra, Ptolomeu apresenta uma tábua de cordas, fornecendo a medida das cordas de $\frac{1}{2}^{\circ}$ a 180°, de meio em meio grau (KENNEDY, 1992, p. 28). “A função corda do arco x era definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de x graus em um círculo cujo raio é 60”(COSTA, 2003, p. 7). Logo, a medida da corda de um arco de 90° era

$$crd\ 90^{\circ} = R\sqrt{2} = 84^{p}51'10''$$

Tomando $R = 60$, temos

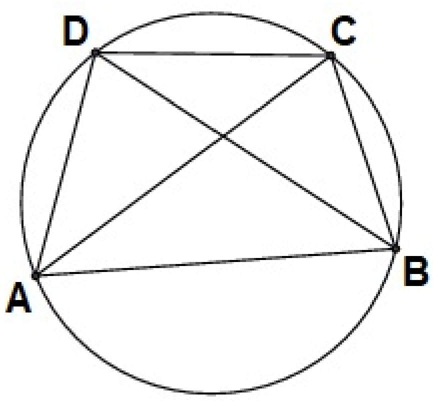
Figura 2.6: Medida da corda de um arco



Fonte: Kennedy (1992, p. 29).

De grande relevância para o cálculo das cordas, na utilização de identidades, Ptolomeu baseou-se em uma proposição geométrica, conhecida como Teorema de Ptolomeu: Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais, ou seja, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ (KENNEDY, 1992, p. 29). Veja ilustração na Figura 2.7.

Figura 2.7: Teorema de Ptolomeu



Fonte: O próprio autor.

Considerando AB como o diâmetro do círculo, o teorema de Ptolomeu, leva às conhecidas fórmulas de seno e cosseno da soma e da diferença de dois ângulos, ou seja, $sen(a \pm b)$ e $cos(a \pm b)$. Outra fórmula que lhe foi útil foi a equivalente à hoje conhecida para metade do ângulo (BOYER, 2010, p. 120).

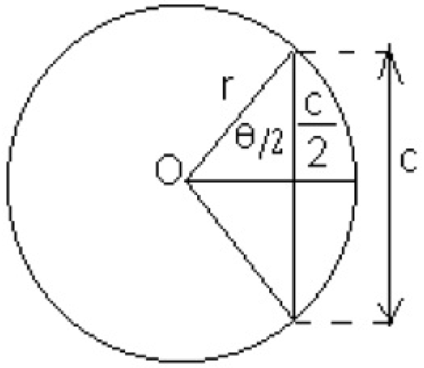
Com o tempo, a matemática grega enfraqueceu, em virtude das guerras que perduraram por séculos após a queda do Império Romano, ficando o século V conhecido pelo fim da matemática grega clássica (REIS, 2016, p. 21). Porém, neste mesmo período, verificou-se a ascensão da matemática na Índia, durante a dinastia Gupta (320 a 550 d.C.).

Durante este período, a Índia revolucionou a trigonometria por meio de um conjunto de textos chamados *Siddhantas* (sistemas) de astronomia. O único texto deste conjunto que preservou-se completamente é o *Surya Siddhanta*, escrito por volta de 400 d.C. De acordo com o texto, seu autor foi Surya, deus do Sol. “O *Surya Siddhanta* eram compêndios de astronomia contendo regras enigmáticas em verso sânscrito, com pouca explicação e sem prova”(BOYER, 2010, p. 153).

Surya Siddhanta se destacou por apresentar de forma nova a trigonometria, relacionando as cordas de um círculo com seus ângulos centrais correspondentes (COSTA, 2003, p.9). Tem-se então, a contribuição mais relevante dos *Siddhantas* à Matemática, pois surgiu aí a precursora da função trigonométrica, hoje conhecida por *seno* de um ângulo, mas que era chamada pelos hindus de *jiva* (BOYER, 2010, p. 153). Esses mesmos autores ainda construíram uma tabela trigonométrica que apresentava os valores de *jiva* (seno) para ângulos até 90° (REIS, 2016, p. 22).

A associação das cordas do círculo aos ângulos internos correspondentes proporcionou aos hindus a visualização de um triângulo retângulo na circunferência. Com isso, *Jiva* era definido como a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa do triângulo (COSTA, 2003, p. 9). Veja Figura 2.8.

Figura 2.8: Jiva Hindu



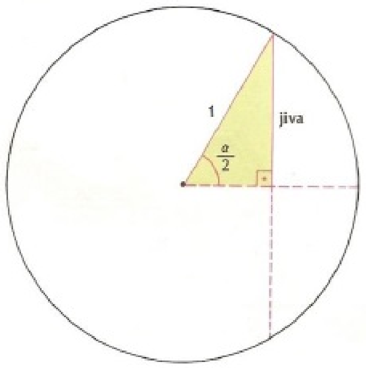
Fonte: Costa (2003, p. 9).

O matemático indiano *Varahamihira*, apresentou o equivalente à relação fundamental da trigonometria ($sen^2\theta + cos^2\theta = 1$) (COSTA, 2003, p. 10).

Do século VIII ao século XI, entra em ascensão o Império Muçulmano, vivendo notável avanço no campo das artes e das ciências. Neste período destaca-se Mohamed-ben-Geber, conhecido como *AL-Battani* e também chamado de *Ptolomeu de Bagdad*. Seus estudos foram influenciados tanto pelo Almagesto quanto pelos Siddhantas, mas adotou a trigonometria hindu e foi devido a ele que a trigonometria foi aceita pelos árabes (COSTA, 2003, p. 10).

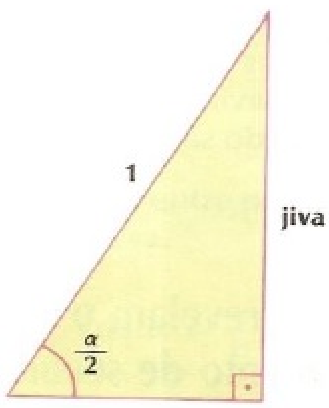
AL-Battani introduziu o círculo de raio unitário e demonstrou que a razão jiva é válida para qualquer triângulo retângulo, independente da medida da hipotenusa, conforme Figuras 2.9 e 2.10 (REIS, 2016, p. 23).

Figura 2.9: Jiva e círculo de raio unitário de AL-Battani



Fonte: Reis (2016, p. 23).

Figura 2.10: Triângulo Retângulo de AL-Battani



Fonte: Reis (2016, p. 23).

Durante o século X, outro matemático hindu se destacou na história da trigonometria, *Abu'l-Wefa*, que realizou demonstrações de teoremas tais como as fórmulas para ângulo duplo ou metade. Além disso, Abu'l-Wefa formulou de forma clara a lei dos senos e elaborou uma nova tabela trigonométrica para os senos de ângulos, diferindo de $\frac{1}{4}^{\circ}$, usando até oito casas decimais. Forneceu ainda uma tabela de tangentes, já conhecida a seu tempo, e utilizou as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) (BOYER, 2010, p. 173).

Com a queda do império árabe, no século XII, diversos astrônomos árabes mudaram-se para a Europa, em particular para a Espanha, onde passaram a trabalhar e disseminar conhecimentos. No século XIII surge Leonardo Fibonacci (1170-1250) também conhecido como Leonardo de Pisa, grande talento da Idade Média. Filho de comerciante, recebeu parte de sua educação no norte da África, viajando posteriormente pelo Egito, Sicília, Grécia e Síria, de onde adquiriu conhecimentos matemáticos orientais e árabes (EVES, 2011, p. 293). Publicou em 1220 a obra *"Practica Geometriae"* onde aplicava a trigonometria árabe na medição de terras (BOYER, 2010, p. 187).

De forma paralela aos estudos de trigonometria, desde o século XI, desenvolveu-se na Europa os estudos de funções. Nesta área, surgiu *Nicole Oresme* (1323-1382) que começou a consolidar o conceito de função (COSTA, 2003, p. 13).

Seguindo a ordem cronológica, surgiu *Regiomontanus* (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, contribuindo com um importante trabalho na trigonometria que a tornou independente da astronomia (COSTA, 2003, p. 13). Escreveu o tratado *"De triangulis omnimodis"* (tratado sobre triângulos), sua obra mais importante, que vinha a ser a primeira produção sistemática da Europa sobre trigonometria plana e esférica independente da astronomia (EVES, 2011, p.297). Regiomontanus calculou novas tábuas trigonométricas e em outro tratado, *"Tabulae directionum"*, apresentou uma nova tábua de tangentes (BOYER, 2010, p. 201).

Nesta época, foram introduzidas muitas ideias novas à trigonometria. Padronizou-se a lista de funções trigonométricas, passou-se a considerar a trigonometria em triângulos planos, pois até então o foco era em triângulos esféricos, o cosseno passou a ser visto como seno do ângulo complementar e seu cálculo tornava-se possível devido às tábuas de senos elaboradas (REIS, 2016, p. 25). "No século seguinte o cosseno passou a ser chamado de *sinus complementi*, e depois passou a ser apenas *co.sinus* e por fim *cosinus*"(REIS, 2016, p. 25).

Surge então *Nicolau Copérnico* (1473-1543), astrônomo revolucionário que introduziu ao mundo a ideia de que a Terra gira em torno do Sol. E como astrônomo, também publicou obras com contribuições à trigonometria. Mas seu aluno *Rhaeticus* (1514-1576), ao reunir as ideias de seu mentor com as de Regiomontanus e suas próprias, foi mais longe, ao produzir o tratado mais aprimorado de trigonometria até então, *"Opus palatinum de triangulis"* (BOYER, 2010, p. 213-214). Ainda segundo o autor, neste momento a trigonometria atingiu a maioridade. Neste tratado, Rhaeticus concentrou a trigonometria no triângulo retângulo, abandonando a ideia de relacionar as funções ao arco do círculo. Além disso, utilizou todas as seis funções trigonométricas e elaborou tabelas para todas (BOYER, 2010, p. 214).

O grande matemático francês *François Viète* (1540-1603) também contribuiu com a trigonometria, dando um tratamento analítico a ela. Em sua obra *"Canon mathematicus seu ad triangula"*, apresentou métodos sistemáticos para resolver triângulos planos e esféricos, utilizando para isso as seis funções trigonométricas (EVES, 2011, p. 309).

Em 1595, *Bartholomaus Pitiscus* (1561-1613) publicou uma obra que apresentava em seu título, pela primeira vez, a palavra *Trigonometria* (BOYER, 2010, p. 228), apresentada na Figura 2.11.

Figura 2.11: Capa do livro de Pitiscus

Fonte: Paschoal [4]

O século XVII foi revolucionário para a matemática, apresentando grandes nomes que contribuíram de forma expressiva para o avanço desta ciência, dentre eles Napier, Galileu, Kepler, Pascal, Descartes, Fermat, Newton e Leibniz (REIS, 2016, p. 26).

John Napier (1550-1617) não era matemático profissional, mas interessava-se por trigonometria. Produziu conceitos ligados à trigonometria esférica, mas sua principal contribuição para a matemática foram os *logarítmos*, aliados da trigonometria (BOYER, 2010, p. 228).

Albert Girard (1595-1632) interessou-se pela trigonometria. Em 1626, publicou um tratado apresentando o mais antigo uso das abreviações sin, tan e sec para seno, tangente e secante (EVES, 2011, p. 402).

[4] Disponível em: <https://matematicaaseuspes.wordpress.com/2012/07/17/historia-da-trigonometria-grega/>. Acesso em: 23 abr. 2020.

Isaac Newton (1642-1727) forneceu contribuições à trigonometria, já que, trabalhando com séries infinitas, expandiu $arcsen\, x$ em séries e, de forma reversa, deduziu a série para $sen\, x$. E ainda, transmitiu a Leibniz a fórmula geral para $sen\, nx$ e $cos\, nx$, possibilitando que $sen\, x$ e $cos\, x$ surgissem como números e não como grandezas (COSTA, 2003, p. 15). E, complementando, é preciso destacar *Thomas-Fanten de Lagny*, que em 1710 foi o primeiro matemático a verificar a *periodicidade* das funções trigonométricas (COSTA, 2003, p. 15).

A partir de Leonhard Euler (1707-1783), a trigonometria adquire seu formato atual. Euler adotou a unidade como medida para o raio do círculo e definiu as funções trigonométricas aplicadas a números e não mais a ângulos (COSTA, 2003, p. 15). Uma das ideias geniais de Euler foi a criação da função E denominada *função de Euler*. Esta descoberta, abriu as portas da Análise Matemática para a Trigonometria (LIMA, 1991, p. 35). Neste contexto, o professor Elon Lages Lima diz que:

> O surgimento do Cálculo Infinitesimal e, posteriormente, de seu prolongamento teórico, a Análise Matemática, veio dar uma nova dimensão às noções básicas da Trigonometria, como seno, cosseno e às noções associadas de tangente, secante, etc. Para isso, é indispensável considerar as funções $cos\, t$ e $sen\, t$ definidas para todo número real t. Ou seja, é preciso falar em cosseno e seno de um *número*, em vez de um *ângulo*. Essa transição é feita por meio de uma função E, que chamaremos a *função de Euler* (LIMA, 1991, p. 33).

Tem-se então, de forma resumida, parte da história de construção da trigonometria, que iniciou como ferramenta para medições de terras e apoio à agricultura, seguiu com aplicações práticas em diversas civilizações desde o Egito antigo, ganhou corpo ao tornar-se ferramenta indispensável à astronomia e culminou com sua transformação em parte da Análise Matemática, chegando ao seu formato atual.

O caminho trilhado pela humanidade para o desenvolvimento da trigonometria foi longo e durou alguns milênios. Contou com a contribuição de diversos matemáticos, astrônomos e estudiosos de diversas civilizações com destaque na história. E está longe de ser um conceito pronto e acabado.

Reforçamos que o objetivo desta pesquisa não é apresentar uma análise minuciosa e detalhada da história deste conceito, mas sim destacar cenários e personagens importantes em sua construção. Logo, partes da história não foram apresentadas, como a construção do conceito de ângulo.

O conhecimento da história da trigonometria possibilita uma mudança de atitude em relação ao conhecimento, pois a matemática não se resume mais a conhecimentos prontos, mas são fruto de árduos trabalhos de pesquisa de grandes gênios da história, com objetivo de resolver problemas e necessidades diversas. Isto abre também novas perspectivas aos alunos que se sentem estimulados à pesquisa e à ciência, pois poderão contribuir para o avanço da matemática e da humanidade.

A Figura 2.12 apresenta um quadro com o resumo histórico do desenvolvimento da trigonometria.

Figura 2.12: Resumo Histórico da Trigonometria

Fonte: O Próprio Autor

Capítulo 3

Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão apresentados conceitos matemáticos preliminares, compostos por teoremas, axiomas e proposições, indispensáveis ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Como o intuito da dissertação é o aprofundamento do estudo da trigonometria, o trabalho será limitado apenas à apresentação dos conceitos, mas sem demonstrá-los. Para verificar as demonstrações das proposições, sugere-se como leitura complementar as obras *Geometria Euclidiana Plana* de João Lucas Marques Barbosa, *Geometria* (Coleção Profmat) de Antonio Caminha Muniz Neto e *Fundamentos de Matemática Elementar 9* de Osvaldo Doce e José Nicolau Pompeo.

3.1 Razão e proporção

Nesta seção, apresenta-se a definição dos conceitos de razão e proporção.

3.1.1 Razão

Denomina-se *razão* o resultado da comparação de duas ou mais grandezas da mesma espécie. A razão é obtida a partir da relação dos números que representam as grandezas, consideradas na mesma unidade de medida. Ao comparar dois números ou duas grandezas, estabelece-se uma relação entre eles que, quando ocorre por meio de uma divisão, é denominada razão.

Em linguagem matemática, dados dois números reais a e b, com $b \neq 0$, a razão entre os valores a e b é representada por:

$$\frac{a}{b} \qquad \text{ou} \qquad a : b \qquad \text{ou} \qquad a \text{ está para } b$$

Em uma razão, os números a e b são chamados de termos, onde o primeiro, a, é o *antecedente* e o segundo, b, é o *consequente*.

O cálculo da razão entre duas grandezas nos permite verificar quantas vezes uma delas contém a outra, ou ainda, qual parte da segunda a primeira representa. Por exemplo, se uma casa possui $80m^2$ de área construída e $100m^2$ de área livre, a razão da área construída pela área livre será $\frac{80}{100} = 0,8 = 80\%$, ou seja, a área construída representa 80% da área livre.

3.1.2 Proporção

Define-se *proporção* como a igualdade de duas razões. Sendo esta igualdade verdadeira, diz-se que os números que compõem a razão, na ordem apresentada, são proporcionais. Caso a igualdade seja falsa, diz-se que os números não são proporcionais.

As proporções possibilitam a relação entre razões de grandezas que podem ser iguais ou distintas. Em linguagem matemática, dados os números a, b, c e d, com $b, d \neq 0$, diz-se que a, b, c e d são proporcionais se, e somente se, vale a igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{ou} \qquad a : b = c : d.$$

Na segunda notação, que não utiliza frações, os termos a e d são chamados *extremos* e os termos b e c são chamados *meios*. Temos a seguir uma importante propriedade das proporções.

Propriedade Fundamental da Proporção: *Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.*

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por bd, diferente de zero, temos

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}.$$

Resultando em

$$ad = bc.$$

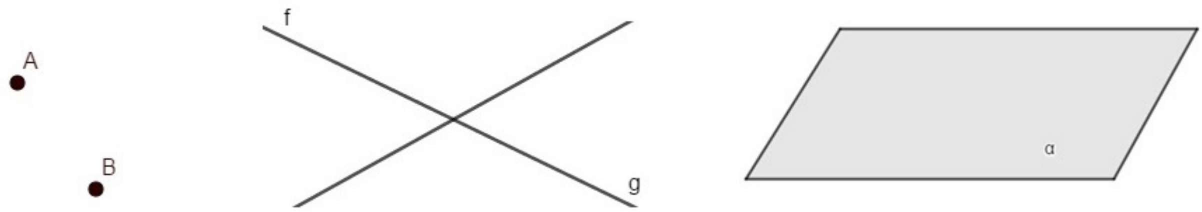
3.2 Conceitos geométricos primitivos

Nesta seção, define-se conceitos primitivos de matemática como ponto, reta, plano, semirreta e segmento de reta.

3.2.1 Ponto, reta e plano

Ponto, **reta** e **plano** são considerados *conceitos primitivos* de geometria. Considera-se que toda reta é conjunto de pelo menos dois pontos. Na Figura 3.1 temos os pontos A e B, as retas f e g e o plano α (em geral, pontos são denotados por letras maiúsculas latinas, retas por letras minúsculas latinas e planos por letras minúsculas gregas).

Figura 3.1: Pontos, retas e plano



Fonte: O próprio autor

Assim como conceitos primitivos, existem proposições primitivas, chamadas de *postulados*, que também dispensam demonstrações. Porém, as proposições (propriedades, afirmações, teoremas, lemas e corolários) são aceitas mediante demonstração.

O **primeiro postulado** da geometria Plana afirma que: *Por dois pontos distintos A e B do plano, é possível traçar apenas uma reta.*

Logo, se os pontos distintos A e B determinam a reta r, então podemos denotar, alternativamente, $r = \overleftrightarrow{AB}$.

Figura 3.2: Reta r

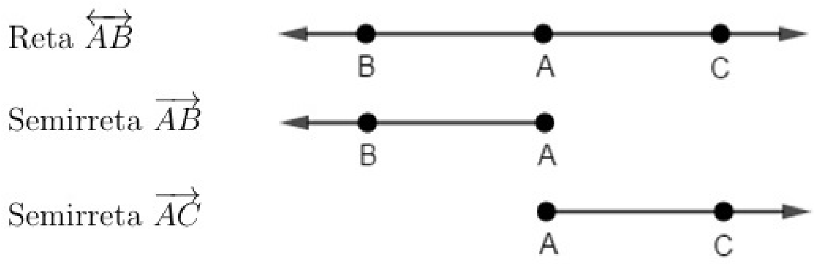
$$r = \overleftrightarrow{AB}$$

Fonte: O próprio autor

3.2.2 Semirreta e segmento de reta

Dado um ponto A sobre uma reta r, tem-se que A divide a reta em duas partes, chamadas **semirretas** de origem A. Tomando dois pontos, B e C sobre r, cada um em uma das partes, é possível denotar as semirretas de origem A por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

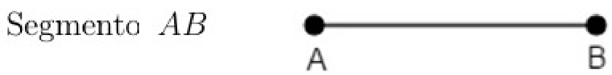
Figura 3.3: Semirretas



Fonte: O próprio autor

Dados os pontos A e B sobre uma reta r, o **segmento de reta** AB é definido como a porção da reta r situada de A a B. O comprimento do segmento AB é denotado por $\overline{AB}$.

Figura 3.4: Segmento de reta



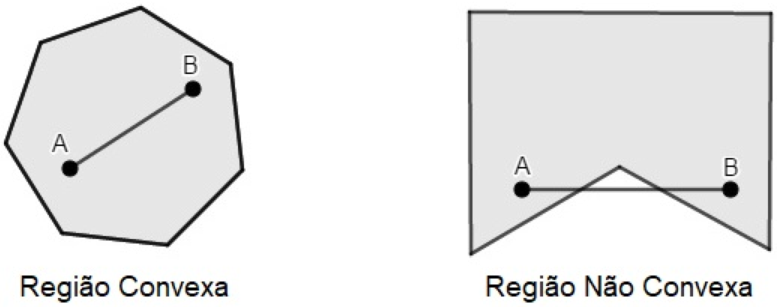
Fonte: O próprio autor

3.3 Ângulos

I) Região do Plano:

Uma região R do plano é dita **convexa** quando, para todos os pontos A e B que pertencem à região R, o segmento AB está contido em R. Em linguagem matemática, $A, B \in R$, $AB \subset R$. Caso contrário, R é uma região **não convexa**.

Figura 3.5: Regiões do Plano

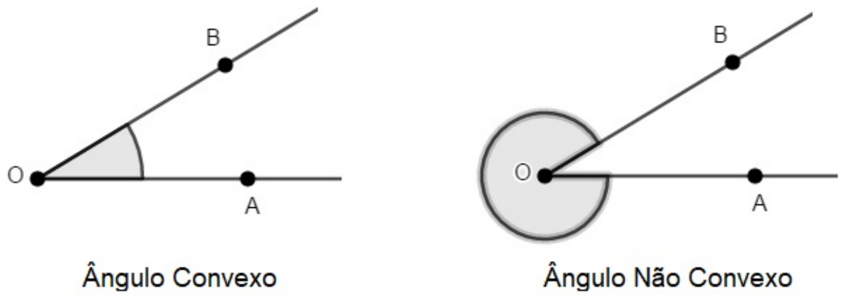


Fonte: O próprio autor

II) Definição de Ângulo:

Dadas duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ no plano, define-se **ângulo** de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, denotado por $A\widehat{O}B$, a abertura entre as duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ que se intersectam, conforme Figura 2.6. Para a notação de ângulos, é comum a utilização de letras gregas minúsculas, por exemplo, $A\widehat{O}B = \alpha$.

Figura 3.6: Ângulos

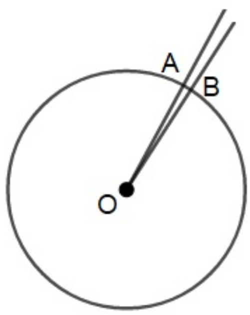


Fonte: O próprio autor

III) Unidade de Medida de Ângulos:

Considere a circunferência Σ de centro O e raio r e divida-o em 360 arcos iguais. Tome pontos A e B nas extremidades de um destes arcos. A *medida* do ângulo $A\widehat{O}B$ é de 1 **grau** ou 1°, logo escreve-se $A\widehat{O}B = 1°$. Portanto, 1° é a medida do ângulo que corresponde à $\frac{1}{360}$ do círculo, conforme Figura 3.7. E, por consequência, conclui-se que um círculo completo equivale a 360°.

Figura 3.7: O grau



Fonte: O próprio autor

O grau é subdividido em *minutos* e *segundos*, onde 1 grau equivale a 60 minutos e 1 minuto equivale a 60 segundos.

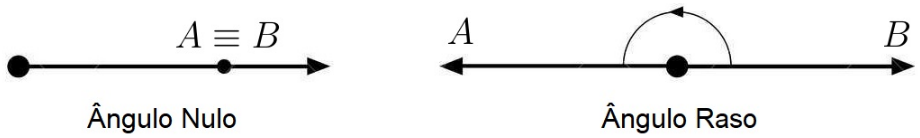
Para determinar a medida de um ângulo qualquer, basta verificar qual fração da circunferência ele representa e aplicá-la a 360°. Por exemplo, se um ângulo $A\widehat{O}B$ possui um arco correspondente a $\frac{1}{4}$ de circunferência, a medida do ângulo será $A\widehat{O}B = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$.

IV) Classificação dos Ângulos:

Um ângulo $A\widehat{O}B$ é dito **nulo** se as semirretas que o formam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são coincidentes. Neste caso, $A\widehat{O}B = 0°$.

Um ângulo $A\widehat{O}B$ é dito **raso** se as semirretas que o formam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas. Neste caso, $A\widehat{O}B = 180°$.

Figura 3.8: Ângulos nulo e raso



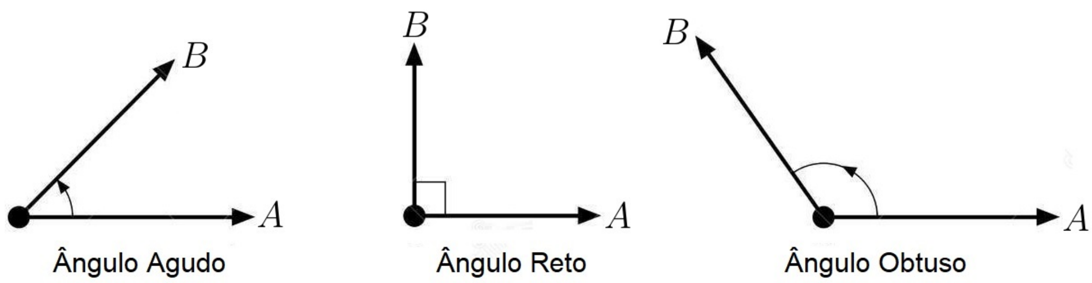
Fonte: O próprio autor

Um ângulo $A\widehat{O}B$ é dito **agudo** quando $0° < A\widehat{O}B < 90°$.

Um ângulo $A\widehat{O}B$ é dito **reto** quando $A\widehat{O}B = 90°$.

Um ângulo $A\widehat{O}B$ é dito **obtuso** quando $90° < A\widehat{O}B < 180°$.

Figura 3.9: Ângulos agudo, reto e obtuso



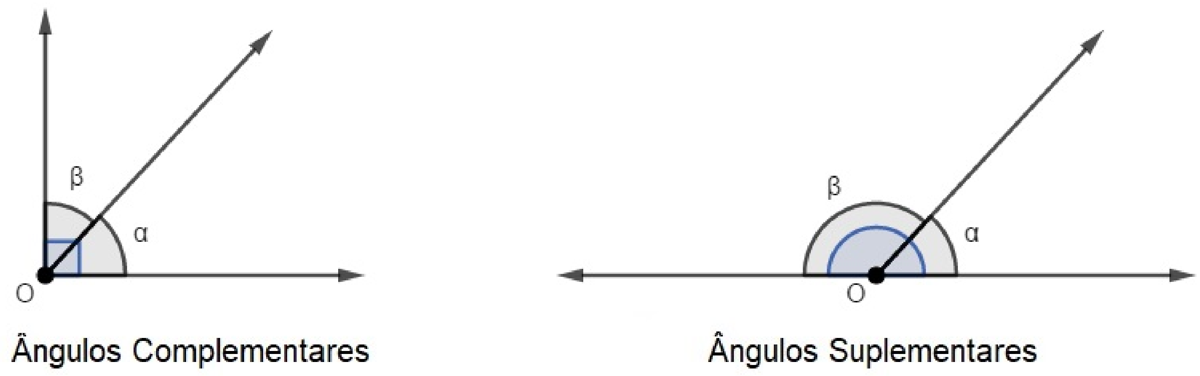
Fonte: O próprio autor

V) Complemento e Suplemento de um Ângulo:

Dois ângulos são **complementares** se, e somente se, a soma de suas medidas é 90°. Diz-se então, que um deles é o complemento do outro. Por exemplo, 30° e 60° são complementares já que $30° + 60° = 90°$.

Dois ângulos são **suplementares** se, e somente se, a soma de suas medidas é 180°. Diz-se então, que um deles é o suplemento do outro. Por exemplo, 50° e 130° são suplementares já que $50° + 130° = 180°$.

Figura 3.10: Ângulos complementares e suplementares

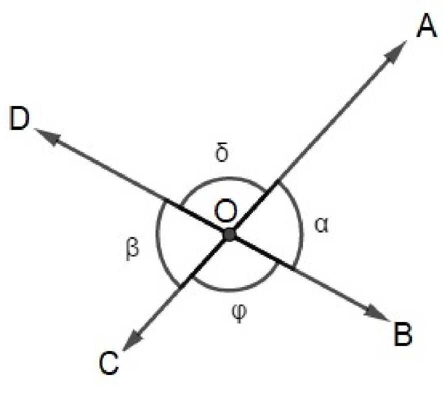


Fonte: O próprio autor.

VI) Ângulos Opostos Pelo Vértice

Definição: Dois ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$, de mesmo vértice, são **opostos pelo vértice** se seus lados forem semirretas opostas, conforme ilustra Figura 3.11.

Figura 3.11: Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: O próprio autor.

Proposição 1: Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

De fato, referindo-se à Figura 3.11, como $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semirretas opostas, $\alpha+\delta = 180°$. Do mesmo modo, como $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semirretas opostas, $\alpha + \varphi = 180°$. Portanto,

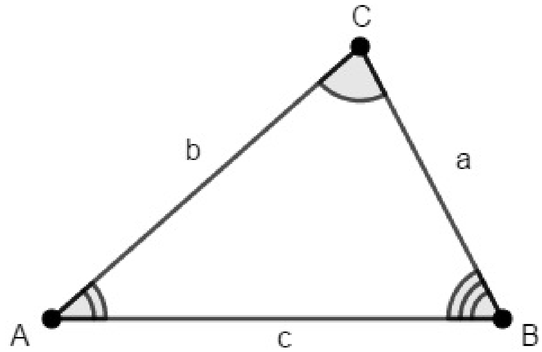
$$\delta = 180° - \alpha = \varphi \qquad \text{e} \qquad \alpha = \beta.$$

3.4 Triângulos

I) Definição de Triângulo:

Dados três pontos A, B e C não colineares, chama-se *triângulo* ABC à reunião dos segmentos AB, AC e BC e a *região triangular* é a região limitada do plano, delimitada por esses segmentos.

Figura 3.12: Triângulo ABC



Fonte: O próprio autor.

Um triângulo possui alguns elementos. Para exemplificar, será utilizado o triângulo ABC da Figura 3.12.

- *Vértices*: os pontos A, B e C são os vértices do triângulo ABC;
- *Lados*: os segmentos AB (de medida c), AC (de medida b) e BC (de medida a) são os lados do triângulo. Em geral escreve-se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$;
- *Ângulos internos*: os ângulos $B\widehat{A}C$ ou $\widehat{A}$, $A\widehat{B}C$ ou $\widehat{B}$ e $A\widehat{C}B$ ou $\widehat{C}$ são os ângulos internos do triângulo ABC.

O *perímetro* do triângulo ABC é dado pela soma dos comprimentos de seus lados. O *perímetro* do triângulo é denotado por $2p$ enquanto o *semiperímetro* é denotado por p. Utilizando as respectivas notações, temos

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

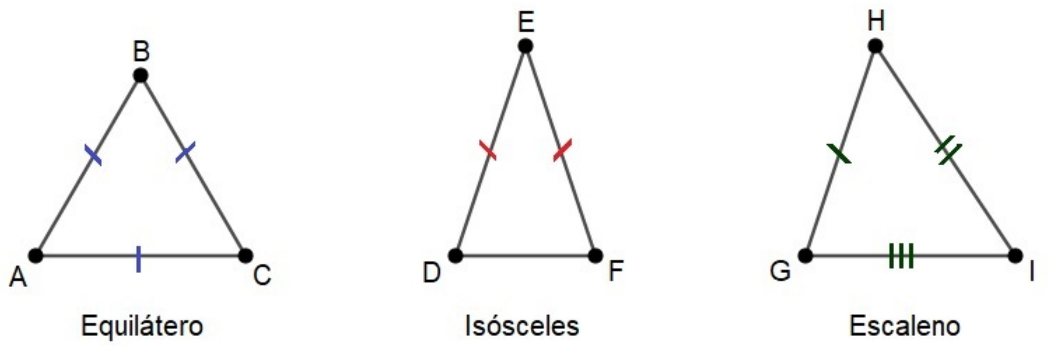
II) Classificação dos Triângulos:

É possível classificar o triângulo de duas maneiras: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos.

A) Classificação quanto à medida dos lados:

- *Equilátero*: se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$;
- *Isósceles*: se ao menos dois dentre $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ forem iguais;
- *Escaleno*: se os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são diferentes dois a dois.

Figura 3.13: Classificação quanto aos lados

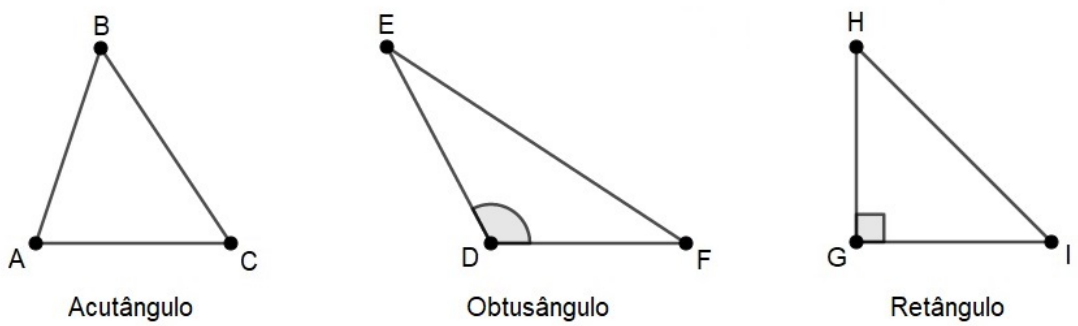


Fonte: O próprio autor.

B) Classificação quanto à medida dos ângulos:

- *Acutângulo*: se possui os três ângulos internos agudos;
- *Obtusângulo*: se possui um ângulo interno obtuso;
- *Retângulo*: se possui um ângulo interno reto.

Figura 3.14: Classificação quanto aos ângulos



Fonte: O próprio autor.

No triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* e os outros dois lados de *catetos* do triângulo.

3.5 Congruência de triângulos

Definição 1: Dois segmentos AB e CD são *congruentes* se $\overline{AB} = \overline{CD}$. E dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são *congruentes* se têm a mesma medida, logo diz-se que $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$.

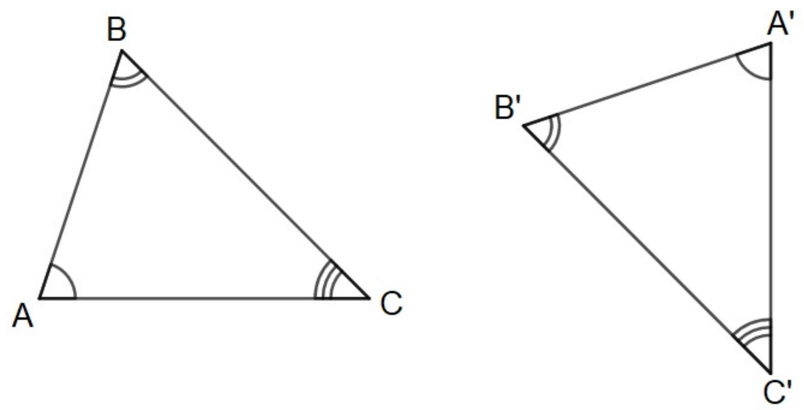
Para padronizar a notação, utilizaremos o símbolo $=$ para congruência de segmentos e o símbolo $\equiv$ para congruência de ângulos. Desta forma, $\overline{AB} = \overline{CD}$ é lido como "o segmento AB é congruente ao segmento CD e $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ é lido como o ângulo $\widehat{A}$ é congruente ao ângulo $\widehat{B}$.

Definição 2: Dois triângulos são ditos *congruentes* se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de forma que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam congruentes, assim como os lados opostos a vértices correspondentes.

A figura 3.15 apresenta dois triângulos congruentes ABC e $A'B'C'$, e escreve-se $ABC \equiv A'B'C'$, com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A'; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'.$$

Figura 3.15: Triângulos congruentes



Fonte: O próprio autor.

Para estes triângulos têm-se

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}; \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$
$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}; \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'}; \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}.$$

A definição de congruência de triângulos fornece todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes, porém existem condições mínimas para que isso ocorra, que são chamadas *casos de congruência*.

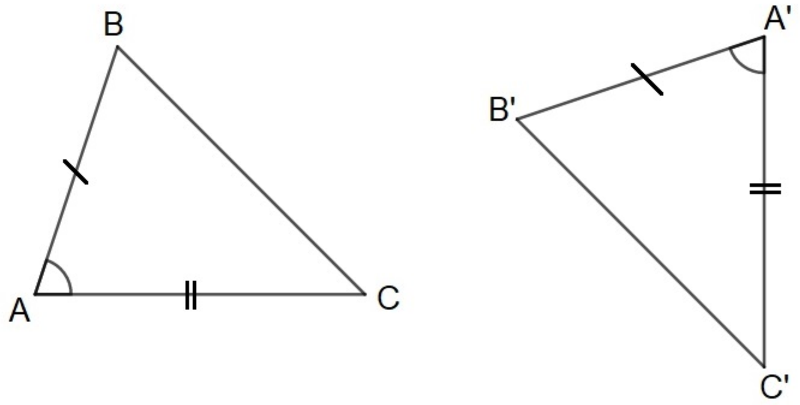
Apresentaremos a seguir os casos de congruência de triângulos e suas demonstrações podem ser vistas em [13] nas páginas 40 a 47.

1º Caso de Congruência - Caso LAL: *Se dois triângulos têm ordenadamente dois lados congruentes e o ângulo formado por eles, então eles são congruentes.*

Portanto, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, o caso de congruência LAL garante que:

$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\\ \widehat{A}\equiv\widehat{A'}\end{array}\right\}\overset{LAL}{\Rightarrow} ABC\equiv A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\widehat{B}\equiv\widehat{B'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \widehat{C}\equiv\widehat{C'}\end{array}\right.$$

Figura 3.16: Congruência caso LAL



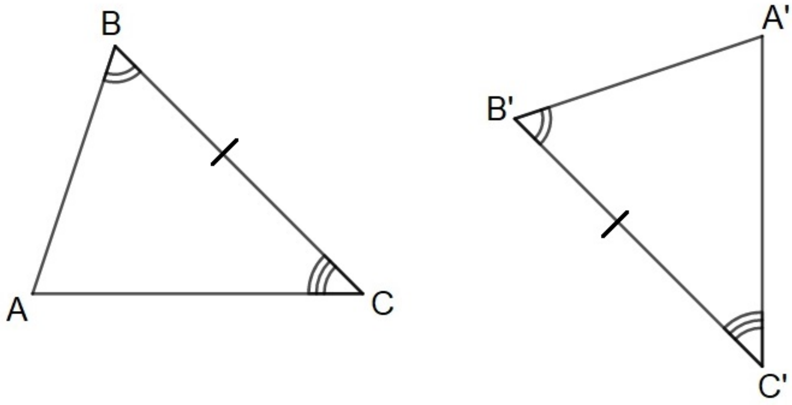
Fonte: O próprio autor.

2º Caso de Congruência - Caso ALA: *Se dois triângulos têm ordenadamente um lado congruente e dois ângulos a ele adjacentes, então eles são congruentes.*

Portanto, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, o caso de congruência ALA garante que:

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B}\equiv\widehat{B'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \widehat{C}\equiv\widehat{C'}\end{array}\right\}\overset{ALA}{\Rightarrow} ABC\equiv A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\widehat{A}\equiv\widehat{A'}\\ \overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right.$$

Figura 3.17: Congruência caso ALA



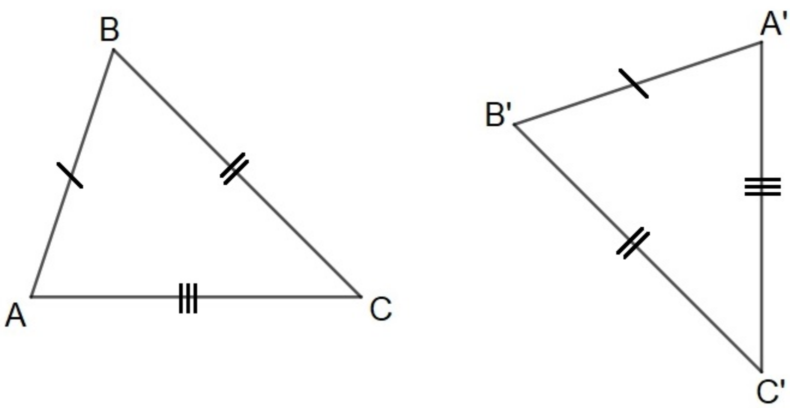
Fonte: O próprio autor.

3º Caso de Congruência - Caso LLL: *Se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então eles são congruentes.*

Portanto, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, o caso de congruência LLL garante que:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\end{array}\right\}\overset{LLL}{\Rightarrow} ABC\equiv A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\widehat{A}\equiv\widehat{A'}\\ \widehat{B}\equiv\widehat{B'}\\ \widehat{C}\equiv\widehat{C'}\end{array}\right.$$

Figura 3.18: Congruência caso LLL



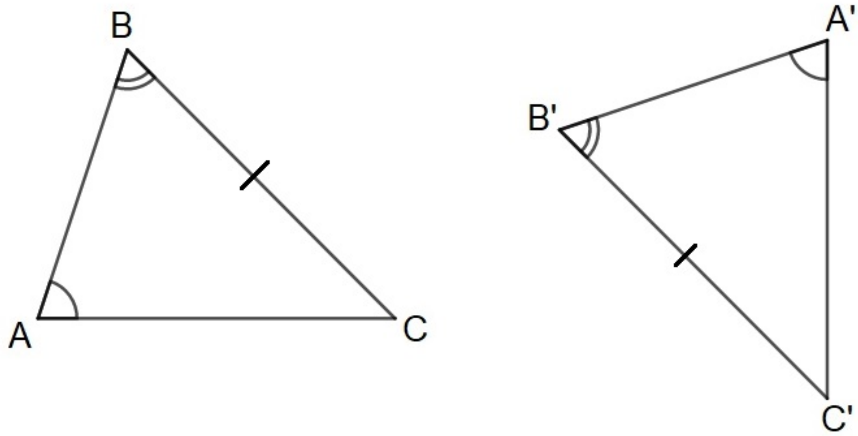
Fonte: O próprio autor.

4º Caso de Congruência - Caso LAA$_O$: *Se dois triângulos têm ordenadamente um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado congruentes, então eles são congruentes.*

Portanto, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, o caso de congruência LAA$_O$ garante que:

$$\left.\begin{array}{c}\overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \widehat{A}\equiv\widehat{A'}\\ \widehat{B}\equiv\widehat{B'}\end{array}\right\}\overset{LAA_O}{\Rightarrow} ABC\equiv A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\widehat{C}\equiv\widehat{C'}\\ \overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right.$$

Figura 3.19: Congruência caso LAA$_O$



Fonte: O próprio autor.

3.6 Teorema de Tales

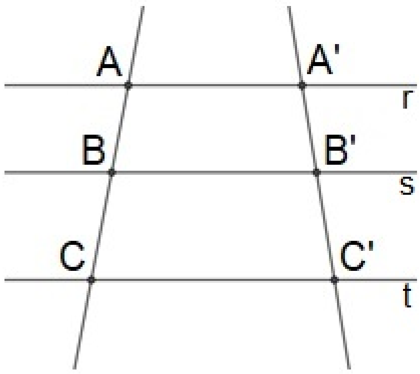
A seguir apresenta-se um importante teorema da geometria plana denominado **Teorema de Tales**. Sua demonstração pode ser vista em [13] nas páginas 183 a 187.

Teorema: *Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhe-se pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Uma representação do Teorema de Tales é apresentada na Figura 3.20.

Figura 3.20: Teorema de Tales



Fonte: O próprio autor.

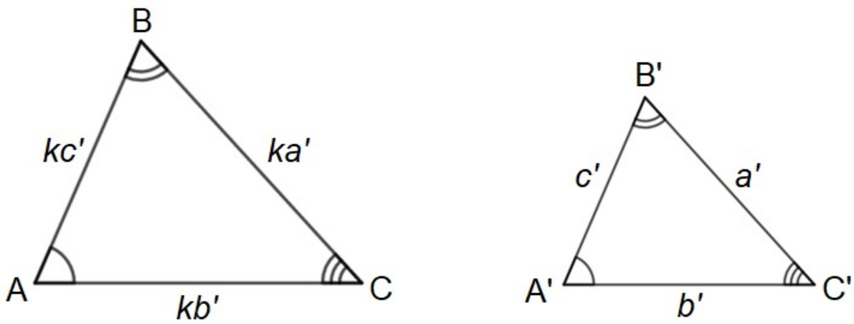
3.7 Semelhança de triângulos

Definição: Dois triângulos são ditos *semelhantes* se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de forma que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

A figura 3.21 apresenta dois triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$, e escreve-se $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A' \quad B \leftrightarrow B' \quad C \leftrightarrow C'.$$

Figura 3.21: Triângulos semelhantes



Fonte: O próprio autor.

Para estes triângulos têm-se

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'} \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}.$$

E existe $k > 0$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

Tem-se, então, que k é a razão de semelhança dos triângulos. Se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

A definição de semelhança de triângulos fornece todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam semelhantes, porém existem condições mínimas para que isso ocorra, que são chamadas *casos de semelhança*

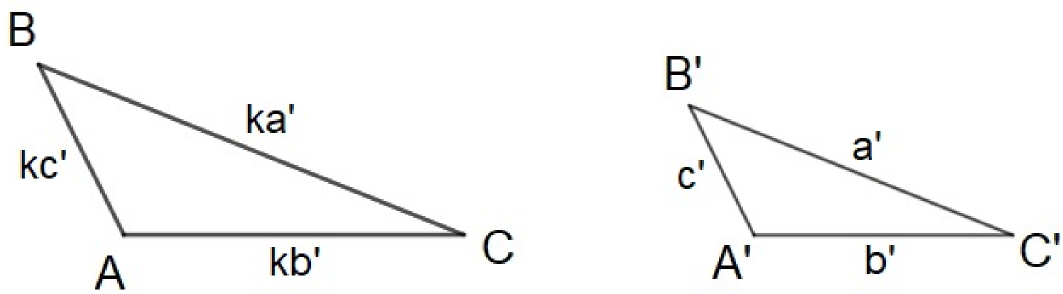
Apresentaremos a seguir os casos de semelhança de triângulos e suas demonstrações podem ser vistas em [13] nas páginas 204 a 206.

1º Caso de Semelhança - Caso LLL: *Se dois triângulos possuem três lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.*

Portanto, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, o caso de semelhança LLL garante

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \overset{LLL}{\Rightarrow} ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'}.$$

Figura 3.22: Semelhança caso LLL



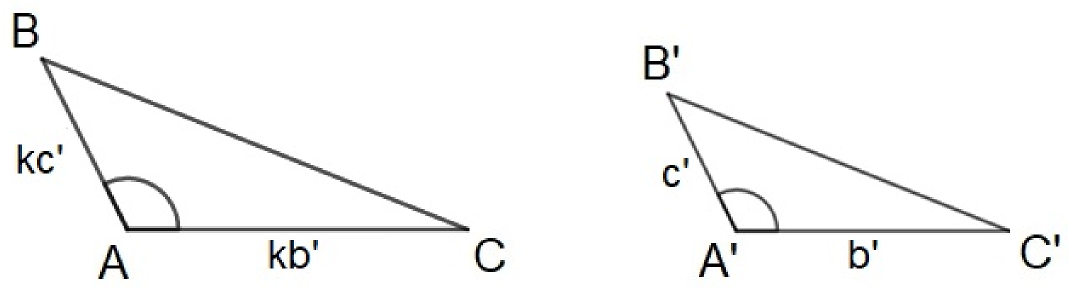
Fonte: O próprio autor.

2º Caso de Semelhança - Caso LAL: *Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos correspondentes de outro triângulo e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

Portanto, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, o caso de semelhança LAL garante

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \\ \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \end{array}\right. .$$

Figura 3.23: Semelhança caso LAL



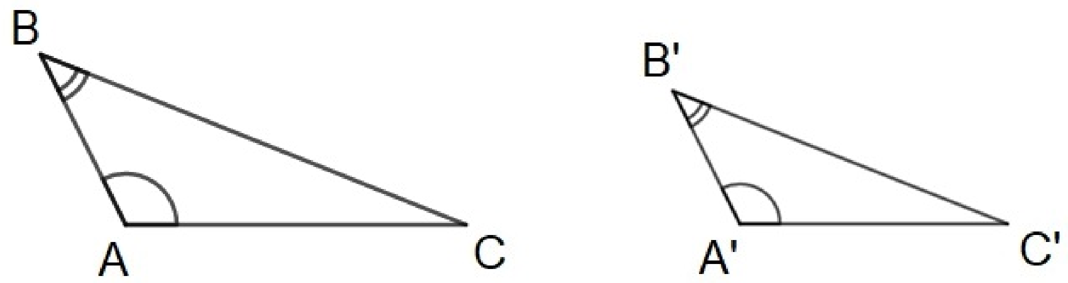
Fonte: O próprio autor.

3º Caso de Semelhança - Caso AA: *Se dois triângulos possuem ordenadamente dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.*

Portanto, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, o caso de semelhança AA garante

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \overset{AA}{\Rightarrow} ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{cases}.$$

Figura 3.24: Semelhança caso AA



Fonte: O próprio autor.

3.8 Teorema de Pitágoras

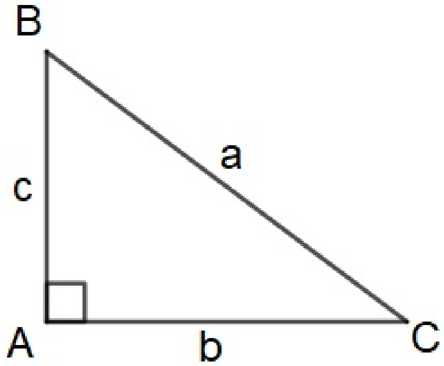
A seguir, apresenta-se uma relação matemática entre os catetos e a hipotenusa de qualquer triângulo retângulo: o **Teorema de Pitágoras** e sua demonstração pode ser vista em [13] nas páginas 224 e 225.

Teorema: *A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.*

Para o triângulo da Figura 3.25, o Teorema de Pitágoras diz que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

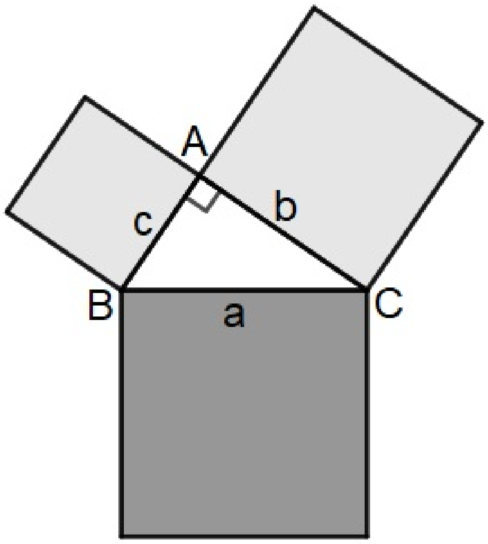
Figura 3.25: Teorema de Pitágoras



Fonte: O próprio autor.

É possível representar geometricamente o Teorema de Pitágoras, conforme Figura 3.26.

Figura 3.26: Teorema de Pitágoras - representação geométrica



Fonte: O próprio autor.

Capítulo 4

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

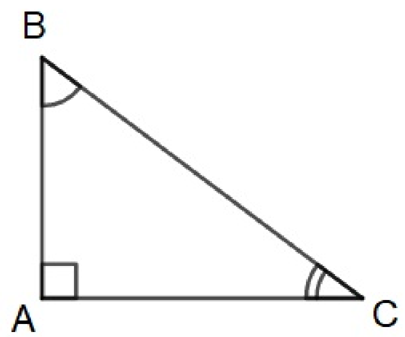
Conforme mencionado anteriormente, **trigonometria** é formada por três radicais gregos: *tri* (três), *gonos* (ângulos) e *metron* (medir), portanto a trigonometria estuda a relação entre as medidas de lados e ângulos de um triângulo. E as **razões trigonométricas** são razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Este capítulo pretende estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, relações entre elas e consequências. Propõe-se ainda um estudo de relações trigonométricas em triângulos quaisquer.

4.1 Elementos do triângulo retângulo

Seja um triângulo ABC, retângulo em A, conforme Figura 4.1.

Figura 4.1: Elementos do triângulo retângulo



Fonte: O próprio autor.

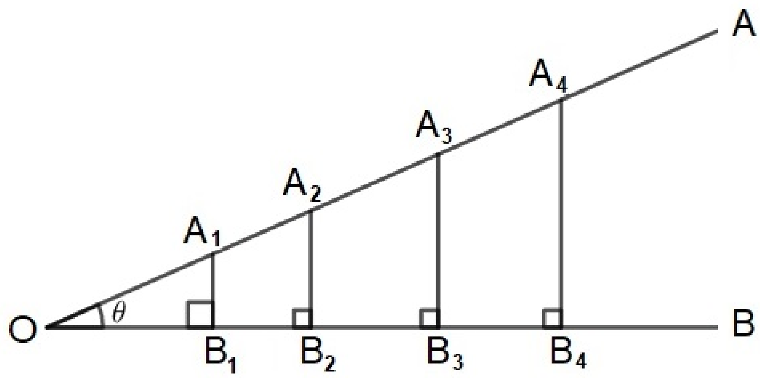
No triângulo ABC, BC é a hipotenusa e AB e AC são os catetos.

Em relação ao ângulo $\widehat{B}$, AC é o *cateto oposto* e AB é o *cateto adjacente*. E em relação ao ângulo $\widehat{C}$, AB é o *cateto oposto* e AC é o *cateto adjacente*.

4.2 Razões trigonométricas

Considere um ângulo $A\widehat{O}B = \theta$, com $0° < \theta < 90°$. Fixe sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ os pontos $A_1, A_2, A_3, ...$ e trace perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, ...$ à semirreta $\overrightarrow{OB}$, conforme Figura 4.2.

Figura 4.2: Construção dos triângulos



Fonte: O próprio autor.

Através da construção acima, serão definidas as razões trigonométricas.

I) Seno:

Os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3$, etc, são semelhantes pelo caso AA. Portanto

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$

Percebe-se que esta relação depende apenas do ângulo $A\widehat{O}B$ e não dos comprimentos envolvidos. O nome dado para esta razão é **seno**. Desta forma, para $0° < \theta < 90°$,

$$sen\,\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}.$$

Percebe-se que dado o triângulo retângulo OA_1B_1 e fixado $\widehat{O} = \theta$, A_1B_1 é o cateto oposto e OA_1 é a hipotenusa.

Portanto, em outras palavras, o **seno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa. Simplificando

$$sen\,\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.$$

II) Cosseno:

De modo análogo, pela semelhança dos triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3$, etc, conclui-se

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$

Esta relação também independe dos lados. Esta razão é chamada de **cosseno**. Logo, para $0° < \theta < 90°$,

$$cos\,\theta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}.$$

Do mesmo modo, dado o triângulo retângulo OA_1B_1 e fixado $\widehat{O} = \theta$, OB_1 é o cateto adjacente e OA_1 é a hipotenusa.

Portanto, em outras palavras, o **cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa. Simplificando

$$cos\,\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}.$$

III) Tangente:

Assim como as anteriores, temos

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots$$

Esta razão é chamada de **tangente**. Logo, para $0° < \theta < 90°$,

$$tg\,\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}.$$

Assim, dado o triângulo retângulo OA_1B_1 e fixado $\widehat{O} = \theta$, A_1B_1 é o cateto oposto e OB_1 é o cateto adjacente.

Portanto, a **tangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao mesmo ângulo. Simplificando

$$tg\,\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

IV) Cotangente, Secante e Cossecante:

Existem ainda três razões trigonométricas que são o **inverso multiplicativo** das razões tangente, cosseno e seno. São elas: **cotangente**, **secante** e **cossecante**, respectivamente.

A **cotangente** é a razão inversa da **tangente**. Logo, para $0° < \theta < 90°$,

$$cotg\,\theta = \frac{1}{tg\,\theta} = \frac{1}{\dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}} = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto}.$$

Assim, a **cotangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao mesmo ângulo.

A **secante** é a razão inversa do **cosseno**. Logo, para $0° < \theta < 90°$,

$$sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta} = \frac{1}{\dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente}.$$

Logo, a **secante** de um ângulo agudo é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo.

A **cossecante** é a razão inversa do **seno**. Logo, para $0° < \theta < 90°$,

$$cossec\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta} = \frac{1}{\dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto}.$$

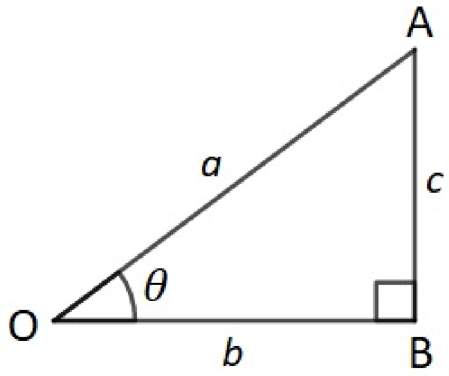
Portanto, a **cossecante** de um ângulo agudo é a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo.

4.3 Relações trigonométricas

Nesta seção serão definidas e demonstradas relações envolvendo as razões trigonométricas apresentadas. Como esta pesquisa trata das razões no triângulo retângulo, restringiremos as relações a ângulos agudos.

Como referência para todas as demonstrações a seguir, será utilizado o triângulo retângulo OAB mostrado na Figura 4.3.

Figura 4.3: Triângulo retângulo OAB



Fonte: O próprio autor.

4.3.1 Relações trigonométricas principais

I) Relação Fundamental da Trigonometria:

$$sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1.$$

Demonstração: Dado o triângulo OAB da Figura 4.3, temos

$$sen\,\theta = \frac{c}{a} \qquad \text{e} \qquad cos\,\theta = \frac{b}{a}.$$

Logo,

$$c = a \cdot sen\,\theta \qquad \text{e} \qquad b = a \cdot cos\,\theta.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo OAB

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow (a \cdot cos\,\theta)^2 + (a \cdot sen\,\theta)^2 = a^2.$$
$$a^2 \cdot sen^2\,\theta + a^2 \cdot cos^2\,\theta = a^2.$$

Portanto, conclui-se que

$$sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1.$$

□

II) Relação entre Tangente, Seno e Cosseno:

$$tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}.$$

Demonstração: Dado o triângulo OAB da Figura 4.3, temos

$$tg\,\theta = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}.$$

□

III) Relação entre Cotangente, Seno e Cosseno:

$$cotg\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}.$$

Demonstração: Dado o triângulo OAB da Figura 4.3, temos

$$cotg\,\theta = \frac{1}{tg\,\theta} = \frac{1}{\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}} = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}.$$

□

4.3.2 Outras relações trigonométricas

Apresentamos a seguir novas relações trigonométricas que são provenientes da relação trigonométrica fundamental.

IV) Relação entre Tangente e Secante:

$$tg^2\,\theta + 1 = sec^2\,\theta.$$

Demonstração: Dada a relação fundamental, dividindo todos os termos por $cos^2\,\theta$, temos

$$\frac{sen^2\,\theta}{cos^2\,\theta} + \frac{cos^2\,\theta}{cos^2\,\theta} = \frac{1}{cos^2\,\theta} \Rightarrow tg^2\,\theta + 1 = sec^2\,\theta.$$

□

V) Relação entre Cosseno e Tangente:

$$cos^2\,\theta = \frac{1}{1 + tg^2\,\theta}.$$

Demonstração: Dada a relação entre tangente e secante (IV), temos

$$tg^2\,\theta + 1 = sec^2\,\theta = \frac{1}{cos^2\,\theta} \Rightarrow cos^2\,\theta = \frac{1}{1 + tg^2\,\theta}.$$

□

VI) Relação entre Cotangente e Cossecante:

$$1 + cotg^2\,\theta = cossec^2\,\theta.$$

Demonstração: Dada a relação fundamental, dividindo todos os termos por $sen^2\,\theta$, temos

$$\frac{sen^2\,\theta}{sen^2\,\theta}+\frac{cos^2\,\theta}{sen^2\,\theta}=\frac{1}{sen^2\,\theta}\Rightarrow 1+cotg^2\,\theta=cossec^2\,\theta.$$

$\square$

VII) Relação entre Seno e Tangente:

$$sen^2\,\theta=\frac{tg^2\,\theta}{1+tg^2\,\theta}.$$

Demonstração: Dada a relação entre cotangente e cossecante (VI), temos

$$1+cotg^2\,\theta=cossec^2\,\theta\Rightarrow 1+cotg^2\,\theta=\frac{1}{sen^2\,\theta}$$

$$\Rightarrow sen^2\,\theta=\frac{1}{1+cotg^2\,\theta}=\frac{1}{1+\frac{1}{tg^2\,\theta}}=\frac{tg^2\,\theta}{1+tg^2\,\theta}.$$

$\square$

4.4 Identidades trigonométricas

Conforme visto na seção anterior, as relações trigonométricas originam outras expressões, relacionando razões de um mesmo arco. Chama-se **identidade trigonométrica** toda igualdade, passível de demonstração, envolvendo razões trigonométricas.

A seguir, apresentamos uma proposição com exemplos de identidades trigonométricas e suas demonstrações. Porém, é preciso destacar que as razões trigonométricas envolvidas foram construídas no triângulo retângulo, logo estão relacionadas a um ângulo θ agudo, ou seja, $0° < \theta < 90°$. Contudo, mediante o estudo de funções, é possível complementar esta pesquisa e estender a validade das identidades trigonométricas a seguir para ângulos maiores que $90°$.

Proposição 2:

$$tg\,\theta\cdot cos\,\theta=sen\,\theta \tag{4.1}$$

$$\frac{1-sen^2\,\theta}{cotg\,\theta\cdot sen\,\theta}=cos\,\theta \tag{4.2}$$

$$(1+cotg^2\,\theta)(1-cos^2\,\theta)=1 \tag{4.3}$$

$$tg\,\theta+cotg\,\theta=sec\,\theta\cdot cossec\,\theta \tag{4.4}$$

$$\frac{cos\,\theta + cotg\,\theta}{tg\,\theta + sec\,\theta} = cos\,\theta \cdot cotg\,\theta \tag{4.5}$$

Demonstração:

Identidade (4.1):

$$tg\,\theta \cdot cos\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} \cdot cos\,\theta = sen\,\theta.$$

Identidade (4.2):

$$tg\,\theta + cotg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} + \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta} = \frac{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta}{sen\,\theta \cdot cos\,\theta} = \frac{1}{sen\,\theta \cdot cos\,\theta} = \frac{1}{cos\,\theta} \cdot \frac{1}{sen\,\theta}$$
$$= sec\,\theta \cdot cossec\,\theta.$$

Identidade (4.3):

$$\frac{cos\,\theta + cotg\,\theta}{tg\,\theta + sec\,\theta} = \frac{cos\,\theta + \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}}{\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} + \frac{1}{cos\,\theta}} = \frac{\frac{sen\,\theta \cdot cos\,\theta + cos\,\theta}{sen\,\theta}}{\frac{sen\,\theta + 1}{cos\,\theta}} = \frac{\frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}(1 + sen\,\theta)}{\frac{1}{cos\,\theta}(1 + sen\,\theta)} = cos\,\theta \cdot \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}$$
$$= cos\,\theta \cdot cotg\,\theta.$$

□

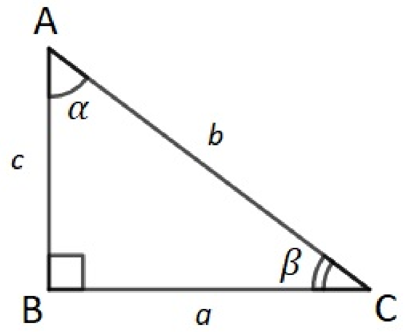
Existe uma diversidade de identidades trigonométricas, passíveis de demonstrações que são realizadas através de uma manipulação algébrica das relações e razões trigonométricas conhecidas.

4.5 Razões trigonométricas de ângulos complementares

Proposição 3: Se dois ângulos α e β são complementares, ou seja, $\alpha + \beta = 90°$, então $sen\,\alpha = cos\,\beta$.

Demonstração: Em outras palavras, a proposição diz que o cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu complementar ou ainda, $sen\,\alpha = cos\,(90° - \alpha)$. Para a demonstração, considere o triângulo ABC, retângulo em B, conforme Figura 4.4.

Figura 4.4: Razões de ângulos complementares



Fonte: O próprio autor.

De acordo com a definição das razões trigonométricas e aplicando-as ao triângulo, temos

$$sen\,\alpha = \frac{a}{b} = cos\,\beta.$$

E, por outro lado,

$$sen\,\beta = \frac{c}{b} = cos\,\alpha.$$

Em relação a ângulos complementares, temos ainda os seguintes resultados

$$tg\,\alpha = \frac{a}{c} = cotg\,\beta \qquad \text{e} \qquad tg\,\beta = \tfrac{c}{a} = cotg\,\alpha.$$

$\square$

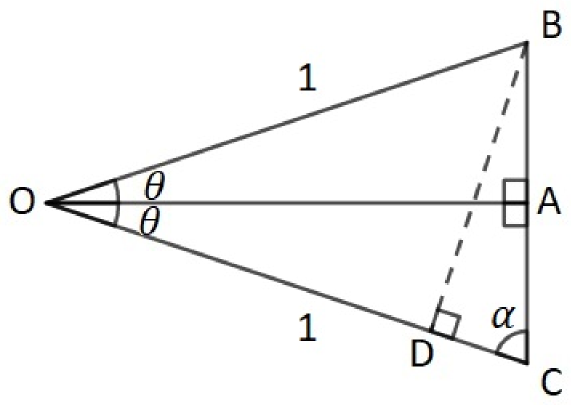
Como consequência deste resultados, conhecendo as razões trigonométricas referentes aos ângulos $0° < \theta < 45°$, passamos a conhecer as razões trigonométricas de seus ângulos complementares e vice versa.

4.6 Razões trigonométricas de arco duplo e arco metade

Proposição 4 : Seja um ângulo θ, com $0° < \theta < 45°$, então $sen\,2\theta = 2{\cdot}sen\,\theta{\cdot}cos\,\theta$.

Demonstração: Sejam os triângulos OAB e OAC, congruentes entre si e retângulos em A, tais que $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$ e $A\widehat{O}B \equiv A\widehat{O}C = \theta$, conforme Figura 4.5. Assim, temos $\overline{AB} = \overline{AC} = sen\,\theta$ e $\overline{OA} = cos\,\theta$.

Figura 4.5: Demonstração - arco duplo e arco metade



Fonte: O próprio autor.

Traçando o segmento BD, perpendicular a OC, com $D \in OC$, temos que $\overline{BD} = sen\, 2\theta$.

A área S de um triângulo é dada por:

$$S = \frac{base\ \cdot\ altura}{2}.$$

Logo, o dobro da área do triângulo OBC é igual a $\overline{OC} \cdot \overline{BD}$ e também igual a $\overline{BC} \cdot \overline{OA}$. Portanto,

$$\overline{OC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{OA} \Rightarrow sen\, 2\theta = 2 \cdot sen\, \theta \cdot cos\, \theta.$$

$\square$

Proposição 5: Seja um ângulo θ, com $0° < \theta < 90°$, então $sen\, \dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\, \theta}{2}}$.

Demonstração: Para esta demonstração, utilizaremos novamente a Figura 4.5. Observe que $\overline{OD} + \overline{DC} = 1$, ou seja, $1 \cdot cos\, 2\theta + \overline{BC} \cdot cos\, \alpha = 1$.

Como $\overline{BC} = 2 \cdot sen\, \theta$ e $cos\, \alpha = sen\, \theta$, pois θ e α são complementares, temos

$$cos\, 2\theta + 2sen\, \theta \cdot sen\, \theta = 1.$$

Como $0° < \theta < 90°$, então $sen\, \theta > 0$. Logo,

$$sen\, \theta = \sqrt{\frac{1 - cos\, 2\theta}{2}}.$$

Substituindo 2θ por θ e, por consequência, θ por $\frac{\theta}{2}$,

$$sen\, \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\, \theta}{2}}.$$

$\square$

4.7 Ângulos notáveis

Conhecendo as razões trigonométricas de um ângulo específico, por meio das proposições demonstradas até agora, é possível encontrar valores de senos, cossenos e tangentes de outros ângulos. Por exemplo, sabendo as razões de $12°$, conhecemos as razões de $24° = 2 \cdot 12°$, de $48° = 2 \cdot 24°$, de $6° = \frac{12°}{2}$, entre outros.

Atualmente, é muito conhecida e utilizada a chamada *Tabela Trigonométrica* para ângulos agudos que expressa valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos menores que $90°$. Nesta tabela, alguns ângulos ganham destaque em virtude de sua importância e grande aplicação na geometria e em trigonometria. São os ângulos mais utilizados e, por isso, são chamados de **ângulos notáveis**. São eles: $30°$, $45°$ e $60°$.

A seguir, serão apresentados os processos de construção geométrica dos ângulos notáveis e serão calculadas as razões trigonométricas para cada um deles, utilizando as relações entre os lados de um triângulo retângulo.

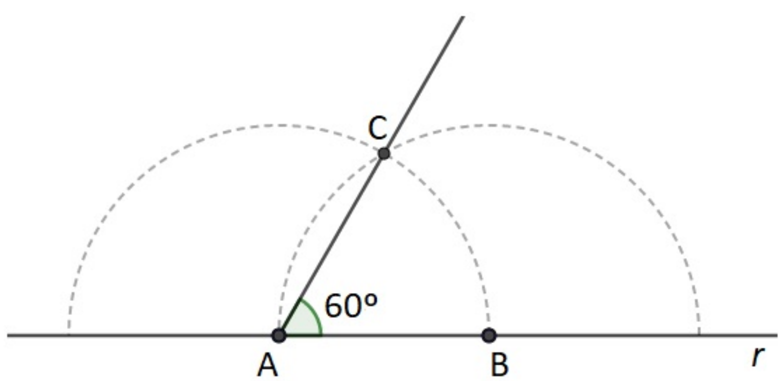
4.7.1 O Ângulo de $60°$

Iniciaremos com a apresentação da construção geométrica de um ângulo de $60°$ para, em seguida, identificar os valores das razões trigonométricas para este ângulo.

I) Construção de um Ângulo de $60°$

Para realizar a construção de um ângulo de $60°$, é preciso seguir os seguintes passos:

Figura 4.6: Construção do ângulo de 60°



Fonte: O próprio autor.

Sobre uma reta suporte r, fixe dois pontos A e B quaisquer, como na Figura 4.6.

Com o compasso, trace um semicírculo de raio $\overline{AB}$ e centro em A acima da reta r e um semicírculo de raio $\overline{AB}$ e centro em B também acima da reta r, fixando o ponto C na interseção destes semicírculos.

Trace a semirreta $\overrightarrow{AC}$.

Perceba que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, logo ABC é triângulo equilátero, assim $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} = 60°$.

Temos então $B\widehat{A}C = 60°$.

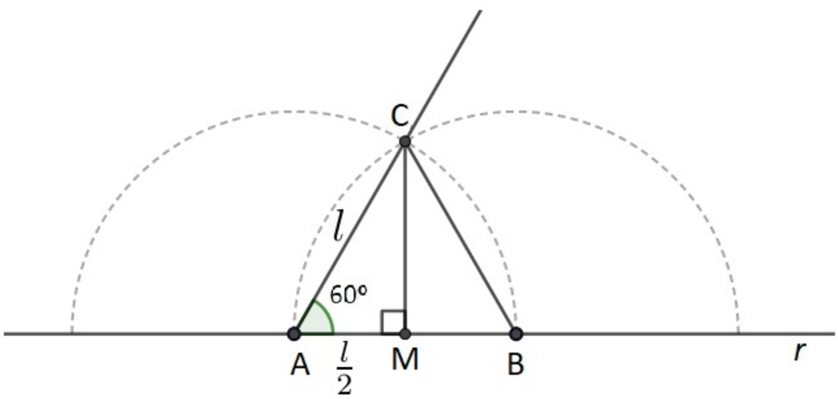
O processo de construção de um ângulo de 60° nos permite gerar diversos triângulos retângulos semelhantes, retângulos em B. Para isso, basta tomar um ponto qualquer na semirreta $\overrightarrow{AC}$ e por ele traçar a perpendicular à reta r.

Esta construção geométrica nos permite ainda obter o valor de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 60°, utilizando como ferramenta um triângulo retângulo obtido por meio desta construção.

II) Razões Trigonométricas de um Ângulo de 60°

Partindo da construção do ângulo de 60°, encontramos o triângulo equilátero ABC. Fixando o ponto médio M do segmento AB, trace o segmento CM. Temos então dois triângulos congruentes pelo caso LLL, AMC e BMC. Logo, CM é perpendicular a AB. Então, temos que o triângulo AMC é retângulo em M e sendo $\overline{AC} = l$, tem-se $\overline{AM} = \frac{l}{2}$, como Figura 4.7.

Figura 4.7: Razões trigonométricas do ângulo de 60°



Fonte: O próprio autor.

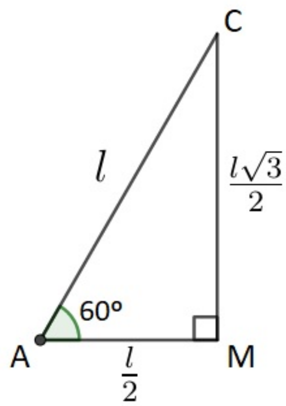
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AMC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 \Leftrightarrow l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \overline{CM}^2 \Leftrightarrow \overline{CM}^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow \overline{CM}^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CM} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Desta forma, temos o triângulo retângulo da Figura 4.8 e, por meio dele, é possível verificar os valores das razões trigonométricas para o ângulo de 60°.

Figura 4.8: Triângulo com ângulo de 60°



Fonte: O próprio autor.

Assim,

$$sen\,60° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$cos\,60° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow cos\,60° = \frac{1}{2}.$$

$$tg\,60° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow tg\,60° = \sqrt{3}.$$

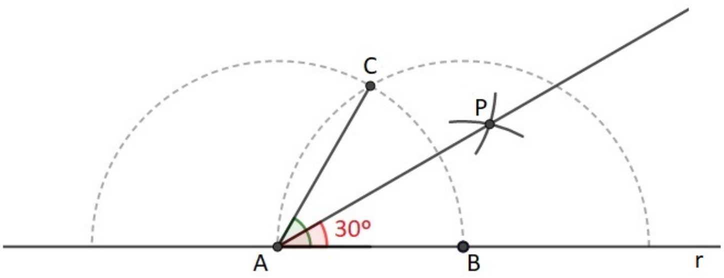
4.7.2 O Ângulo de 30°

Repetiremos o processo feito para o ângulo de 60°, descrevendo os passos para construção geométrica do ângulo de 30° e obtendo os valores das razões trigonométricas para ele.

I) Construção de um Ângulo de 30°

Para realizar a construção de um ângulo de 30°, é preciso realizar a construção do ângulo de 60° e, em seguida, realizar os seguintes passos:

Figura 4.9: Construção do ângulo de 30°



Fonte: O próprio autor.

Dado o ângulo $B\widehat{A}C = 60°$, dividiremos este ângulo ao meio, através do processo de construção da bissetriz, para obter um ângulo de 30°.

Para isso trace dois arcos de círculo de centros B e C com mesmo raio maior que $\frac{\overline{BC}}{2}$, fixando o ponto P na interseção destes arcos.

Trace a semirreta $\overrightarrow{AP}$.

Tem-se com esta construção, $\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\overline{CP} = \overline{BP}$, logo os triângulos ACP e ABP são congruentes (caso LLL), resultando em $C\widehat{A}P \equiv B\widehat{A}P = 30°$.

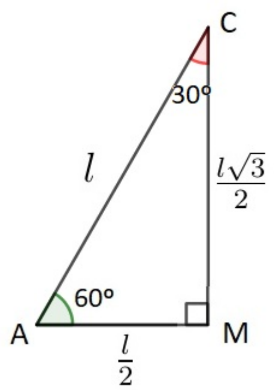
Tomando um ponto qualquer na semirreta $\overrightarrow{AP}$ e traçando a perpendicular à reta r, obtemos um triângulo retângulo com ângulo interno de 30°.

Resta, agora, verificar os valores das razões trigonométricas para este ângulo.

II) Razões Trigonométricas de um Ângulo de 30°

Sabendo-se que 30° e 60° são complementares, em um triângulo retângulo com ângulo interno de 60°, o outro ângulo agudo é de 30°. Logo, utilizaremos o mesmo triângulo retângulo usado para a verificação das razões trigonométricas do ângulo de 60°, como ilustra Figura 4.10.

Figura 4.10: Triângulo com ângulo de 30°



Fonte: O próprio autor.

Portanto,

$$sen\,30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow sen\,30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$cos\,30^\circ = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow cos\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$tg\,30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.7.3 O Ângulo de 45°

I) Construção de um Ângulo de 45°

Para realizar a construção de um ângulo de 45°, é preciso seguir alguns passos. Sobre uma reta suporte r fixe um ponto A e trace um semicírculo de centro em A e raio qualquer, fixando os pontos B e B' nas interseções do semicírculo com a reta r.

Trace dois arcos de círculo de mesmo raio com medida maior que $\overline{AB}$ e centros em B e B', fixando o ponto P na interseção destes arcos.

Trace a semirreta $\overrightarrow{AP}$.

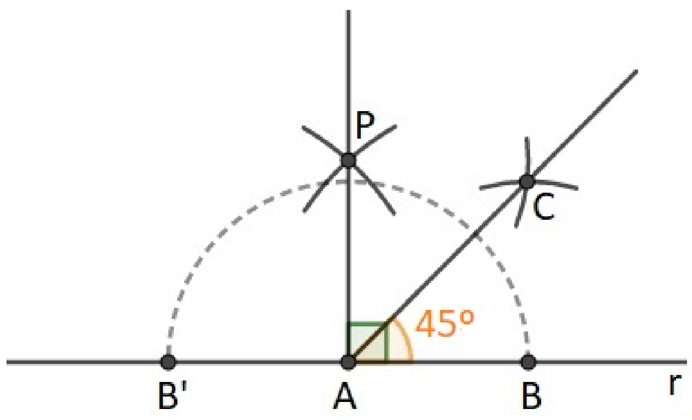
Temos então construído um ângulo de 90°, pois os triângulos ABP e $AB'P$ são congruentes pelo caso LLL.

Agora, como feito na construção do ângulo de 30°, traçaremos a bissetriz deste ângulo para obter, assim, o ângulo de 45°.

Trace dois arcos de círculo de centros B e P com mesmo raio maior que $\frac{\overline{BP}}{2}$, fixando o ponto C na interseção destes arcos.

Trace a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Logo, $B\widehat{A}C = 45^\circ$.

Figura 4.11: Construção do ângulo de 45°



Fonte: O próprio autor.

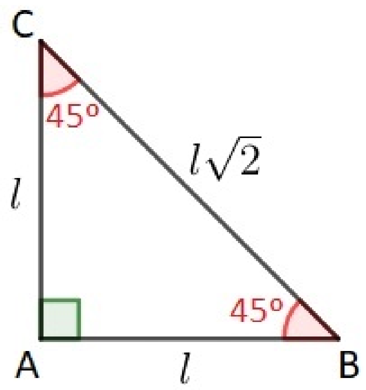
Do mesmo modo feito para os demais ângulos notáveis, tomando um ponto qualquer na semirreta $\overrightarrow{AC}$ e traçando a perpendicular à reta r constrói-se um triângulo retângulo com ângulos internos de $45°$. Perceba que este triângulo é isósceles com dois ângulos internos de $45°$.

Veremos a seguir como obter as razões trigonométricas para o ângulo de $45°$ com auxílio deste triângulo retângulo construído.

II) Razões Trigonométricas de um Ângulo de $45°$

Para verificar os valores das razões trigonométricas do ângulo de $45°$, seja um triângulo ABC isósceles e retângulo em A, com lados congruentes medindo l, conforme Figura 4.12.

Figura 4.12: Triângulo com ângulo de $45°$



Fonte: O próprio autor.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos lados do triângulo,

$$\overline{BC}^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = 2 \cdot l^2 \Rightarrow \overline{BC} = l\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$sen\,45° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$cos\,45° = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$tg\,45° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{l}{l} = 1 \Rightarrow tg\,45° = 1.$$

Desta forma, podemos simplificar a visualização das razões trigonométricas dos ângulos notáveis em uma tabela. Esta tabela, que chamaremos de *Tabela Trigonométrica dos Ângulos Notáveis*, é muito conhecida e bastante útil em problemas de trigonometria, conforme Figura 4.13.

Figura 4.13: Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

Razão \ Ângulo	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: O próprio autor.

Capítulo 5

Aplicações das Razões Trigonométricas

Conforme visto nos capítulos anteriores, a trigonometria possui grande importância dentro da matemática e em outras áreas de conhecimento. É uma boa ferramenta para resolução de problemas diversos. Pretende-se neste capítulo destacar a relevância do estudo de trigonometria, apresentando aplicações em outras áreas da matemática, como ferramenta para a resolução de problemas das provas comuns da atualidade, aplicações em situações práticas e em outras áreas de conhecimento. A aplicação da trigonometria é vasta, porém não pretendemos abordar todas as possíveis aplicações, mas sim uma seleção de aplicações interessantes e desafiadoras, compatíveis com um público de ensino fundamental II.

Neste capítulo, será utilizada como metodologia a Resolução de Problemas, amparada nas pesquisas de George Polya, que possui posição de destaque nesta área do ensino de matemática. Este autor, sintetizou em sua obra *A Arte de Resolver Problemas* um processo para a resolução de problemas composto de quatro fases: compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e, por fim, o retrospecto. Ele acredita que, seguindo esses passos para a resolução de um problema, o aluno consolida seu conhecimento e sua técnica para resolver problemas (POLYA, 1978, p. 3-13)[24]. E, seguindo esse roteiro, trataremos das aplicações da trigonometria.

5.1 Aplicações na matemática

Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações importantes das razões trigonométricas a outras áreas da matemática. Portanto, selecionamos para apresentação algumas aplicações de destaque.

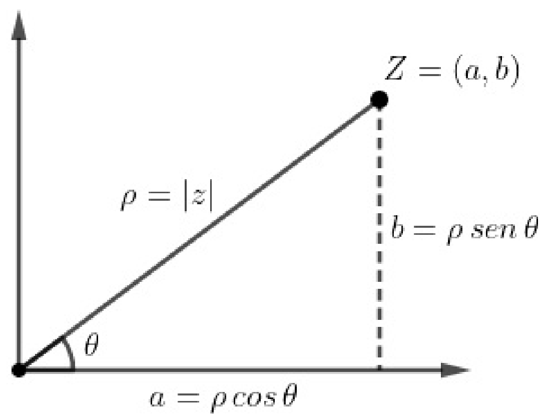
5.1.1 A forma trigonométrica dos números complexos

Uma importante aplicação das razões trigonométricas na matemática é na representação geométrica dos números complexos conhecida como *forma trigonométrica dos números complexos.*

Um número complexo z é representado algebricamente por $z = a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e onde a é chamada parte real de z e b é chamada parte imaginária de z, além disso, i é a unidade imaginária de $\mathbb{C}$, que satisfaz $i^2 = -1$.

Geometricamente, um número complexo $z = a + bi$ pode ser identificado com o ponto do plano $Z = (a, b)$ ou ainda com o vetor $\overrightarrow{OZ}$, de origem em O e extremidade em $Z = (a, b)$.

Figura 5.1: Representação trigonométrica de um número complexo



Fonte: O próprio autor.

Indicamos por $\rho = |z|$, e chamamos de módulo do número complexo z, o comprimento de $\overrightarrow{OZ}$ que, pelo teorema de Pitágoras, será $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e por θ, o ângulo positivo formado por $\overrightarrow{OZ}$ e o eixo das abscissas, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Aplicando as razões trigonométricas tem-se

$$a = \rho\, cos\, \theta \qquad \text{e} \qquad b = \rho\, sen\, \theta.$$

Desta forma,

$$z = a + bi = \rho\, cos\, \theta + \rho\, sen\, \theta\, i$$
$$z = \rho(cos\, \theta + i\, sen\, \theta).$$

Exemplo 1: Determinar a forma trigonométrica do número complexo $z = 1 + i$.

Solução: Como $a = b = 1$, então $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Daí segue que:

$$cos\,\theta = sen\,\theta = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{4}, \text{ considerando } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Portanto, a forma trigonométrica do complexo z será

$$z = \sqrt{2}(cos\,\tfrac{\pi}{4} + i\,sen\,\tfrac{\pi}{4}).$$

5.1.2 Cálculo da área de triângulos

Outra interessante aplicação das razões trigonométricas na matemática, é na fórmula do cálculo das áreas de um triângulo.

Definição: Dado um triângulo ABC de base AB com $\overline{AB} = b$ e altura h, relativa à base AB. A área S do triângulo ABC é dada por

$$S = \tfrac{b \cdot h}{2}.$$

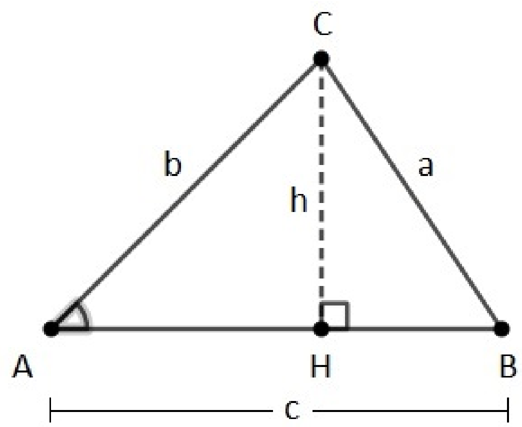
Como consequência desta definição, prova-se o teorema a seguir.

Teorema: Em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.

Demonstração: Considere um triângulo ABC com as medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e o ângulo $\widehat{A}$ entre esses lados. Iremos determinar a área do triângulo em função de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\widehat{A}$. Para isso, é necessário dividir a demonstração em três situações: $\widehat{A} < 90°$, $90° < \widehat{A} < 180°$ e $\widehat{A} = 90°$.

Caso I: Seja ABC um triângulo com $\widehat{A} < 90°$.

Figura 5.2: Área de triângulo - caso I



Fonte: O próprio autor.

No triângulo, AHC, retângulo em H, tem-se:

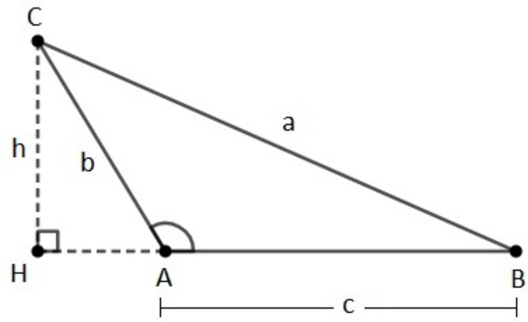
$$\overline{HC} = h = b \cdot sen\,\widehat{A}.$$

Então, a área S será:

$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot sen\,\widehat{A}.$$

Caso II: Seja ABC um triângulo com $90° < \widehat{A} < 180°$.

Figura 5.3: Área de triângulo - caso II



Fonte: O próprio autor.

Sabe-se que $sen\,(180° - \widehat{A}) = sen\,\widehat{A}$.[1] Portanto, no triângulo, AHC, retângulo em H, tem-se:

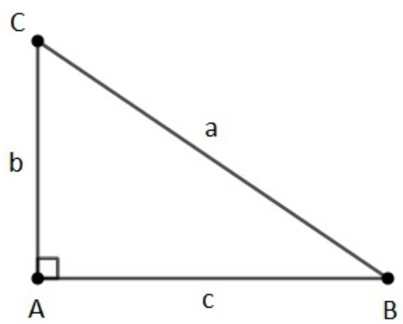
$$\overline{HC} = h = b \cdot sen\,(180° - \widehat{A}) = b \cdot sen\,\widehat{A}.$$

Então, a área S será:

$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot sen\,\widehat{A}.$$

Caso III: Seja ABC um triângulo com $\widehat{A} = 90°$.

Figura 5.4: Área de triângulo - caso III



Fonte: O próprio autor.

[1]Ver Iezzi (2004, p. 79).

Sabe-se que $sen\,90° = 1$.[2] Portanto, no triângulo ABC, retângulo em A, a área S é dada por:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot 1 = \frac{b \cdot c}{2} \cdot sen\,\widehat{A}. \tag{5.1}$$

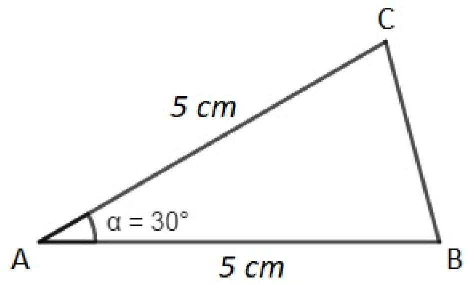
De forma análoga, verifica-se que:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot sen\,\widehat{C}. \tag{5.2}$$

$$S = \frac{a \cdot c}{2} \cdot sen\,\widehat{B}. \tag{5.3}$$

Exemplo 2: Determine a área do triângulo ABC dado na Figura 5.5.

Figura 5.5: Área de triângulo - exemplo



Fonte: O próprio autor.

Solução: Aplicando, ao triângulo ABC dado, a fórmula para cálculo da área de triângulos

$$S = \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot sen\,30° = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{4} = 6,25.$$

Portanto, a área do triângulo ABC é $6,25\,cm^2$

5.1.3 Lei dos cossenos

Outra consequência muito importante das razões trigonométricas é a chamada *Lei dos Cossenos*.

Teorema: Em qualquer triângulo ABC de lados medindo a, b e c, opostos aos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, valem as relações

[2]Ver Iezzi (2004, p. 40).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A}.$$

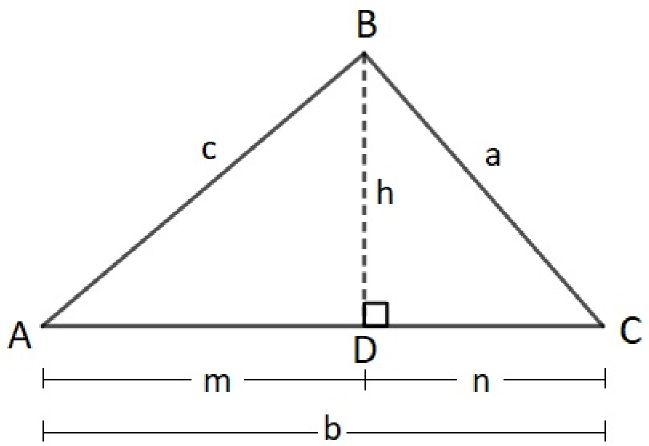
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{B}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\widehat{C}.$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em duas partes.

I) Seja ABC um triângulo com $\widehat{A} < 90°$.

Figura 5.6: Lei dos cossenos - parte I



Fonte: O próprio autor.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos BCD e BAD tem-se

$$a^2 = n^2 + h^2. \tag{5.4}$$

$$h^2 = c^2 - m^2. \tag{5.5}$$

Como $n = b - m$ e substituindo (5.5) em (5.4), temos

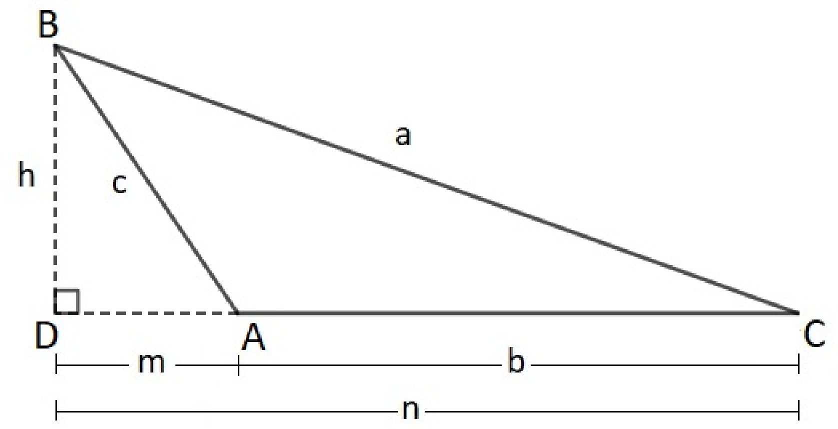
$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot m.$$

Porém, no triângulo BAD, $m = c \cdot cos\,\widehat{A}$, assim

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A}.$$

II) Seja ABC um triângulo com $90° < \widehat{A} < 180°$.

Figura 5.7: Lei dos cossenos - parte II



Fonte: O próprio autor.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos BCD e BAD, tem-se:

$$a^2 = n^2 + h^2. \tag{5.6}$$

E ainda

$$h^2 = c^2 - m^2. \tag{5.7}$$

Como $n = b + m$ e substituindo (5.7) em (5.6), temos

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot m.$$

Porém, no triângulo BAD, $m = c \cdot cos\,(180° - \widehat{A}) \Rightarrow m = -c \cdot cos\,\widehat{A}$, assim

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A}.$$

Analogamente, é possível provar que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{B}.$$

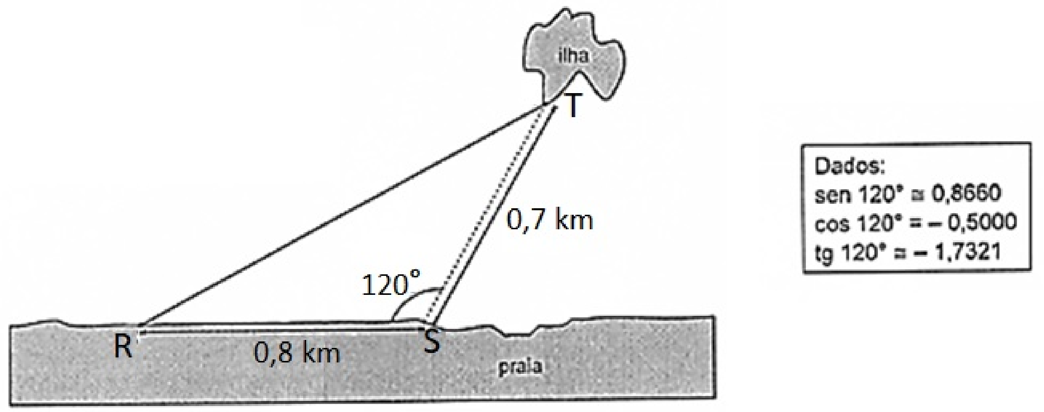
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\widehat{C}.$$

□

Exemplo 3: (PAEBES-TRI) Carlos é um nadador profissional e se preparou para uma maratona aquática nadando 26 vezes um trecho entre um ponto na praia e outro em uma pequena ilha. Esse trecho está representado no desenho abaixo pelo segmento ST. Carlos deseja se preparar para outra maratona aquática nadando a mesma distância que percorreu em seu treino anterior, porém, partindo de outro ponto na praia, representado pelo ponto R, e utilizando o percurso representado acima pelo segmento RT. Quantas vezes, no mínimo, Carlos deverá nadar o percurso RT no mar, para garantir que a distância percorrida nesse treino seja a mesma percorrida no anterior?

a) 14
b) 18
c) 25
d) 27
e) 46

Figura 5.8: Lei dos cossenos - exemplo



Fonte: PAEBES TRI.

Solução: Se Carlos nadou o percurso ST 26 vezes, ele percorreu $26 \cdot 0,7 = 18,2\,km$. Precisamos encontrar a medida do segmento RT e, para isso, aplicamos a lei dos cossenos ao triângulo RST. Logo,

$$\overline{RT}^2 = (0,7)^2 + (0,8)^2 - 2 \cdot (0,7) \cdot (0,8) \cdot cos\,120°.$$

$$\overline{RT}^2 = 0,49 + 0,64 + 0,56.$$

$$\overline{RT} = \sqrt{1,69} = 1,3\,km.$$

Como $18,2 \div 1,3 = 14$, Carlos precisará realizar o percurso RT no mínimo 14 vezes para garantir a mesma distância percorrida no treino anterior. E a resposta correta é o item a).

5.1.4 Lei dos senos

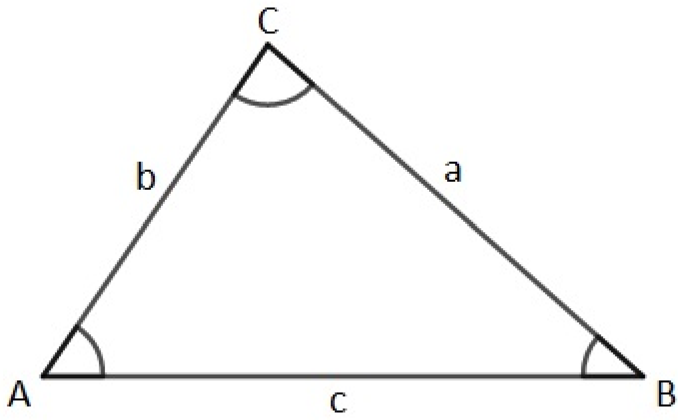
Uma consequência da fórmula de área para triângulos, abordada na subseção 5.1.2, é a conhecida *Lei dos Senos*.

Teorema: Em qualquer triângulo ABC de lados medindo a, b e c, opostos aos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, vale a relação:

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}}.$$

Demonstração: Para demonstrar a lei dos senos é necessário recorrer à equação 5.1 e multiplicá-la por a.

Figura 5.9: Lei dos senos



Fonte: O próprio autor.

Logo,

$$a \cdot S = a \cdot \frac{b \cdot c}{2} \cdot sen\,\widehat{A} \Rightarrow \frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{abc}{2S}. \tag{5.8}$$

De modo análogo, multiplicando a equação 5.2 por c e a equação 5.3 por b temos

$$c \cdot S = c \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot sen\,\widehat{C} \Rightarrow \frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{abc}{2S}. \tag{5.9}$$

$$b \cdot S = b \cdot \frac{a \cdot c}{2} \cdot sen\,\widehat{B} \Rightarrow \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{abc}{2S}. \tag{5.10}$$

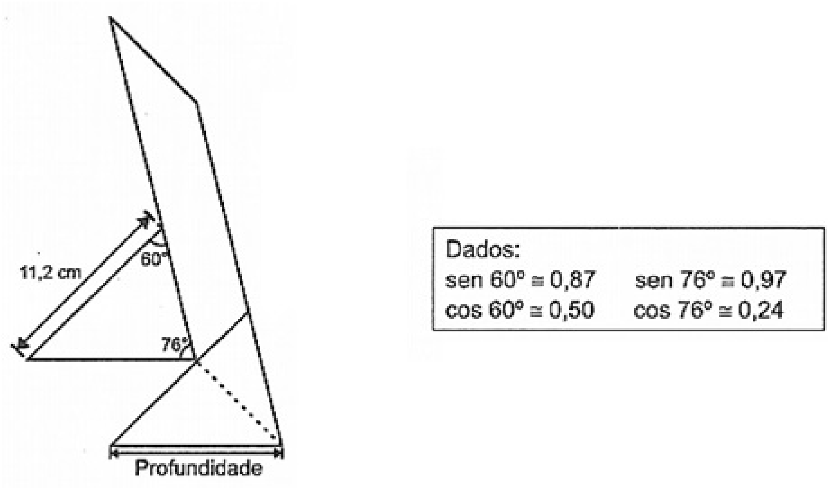
Assim, de (5.8), (5.9) e (5.10) conclui-se que

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}}$$

□

Exemplo 4: (PAEBES-TRI) Paulo precisa confeccionar dois apoios triangulares e idênticos que servirão de suporte para uma determinada placa. Na figura abaixo, estão representados esses apoios e a placa, além de algumas medidas.

Figura 5.10: Lei dos senos - exemplo



Fonte: PAEBES TRI.

Qual é a medida aproximada da profundidade de cada um desses apoios?

a) 2,69 cm

b) 9,74 cm

c) 10,05 cm

d) 12,49 cm

e) 23,33 cm

Solução: Aplicando a lei dos senos ao triângulo que forma o apoio da placa e sendo x a medida da profundidade do apoio, temos

$$\frac{11,2}{sen\,76^\circ} = \frac{x}{sen\,60^\circ} \Rightarrow \frac{11,2}{0,97} = \frac{x}{0,87} \Rightarrow 0,97x = 11,2 \cdot 0,87 \Rightarrow 0,97x = 9,744$$

$$\Rightarrow x \approx 10,05.$$

Portanto, a respostas correta é a letra c).

5.1.5 Fórmula de Heron

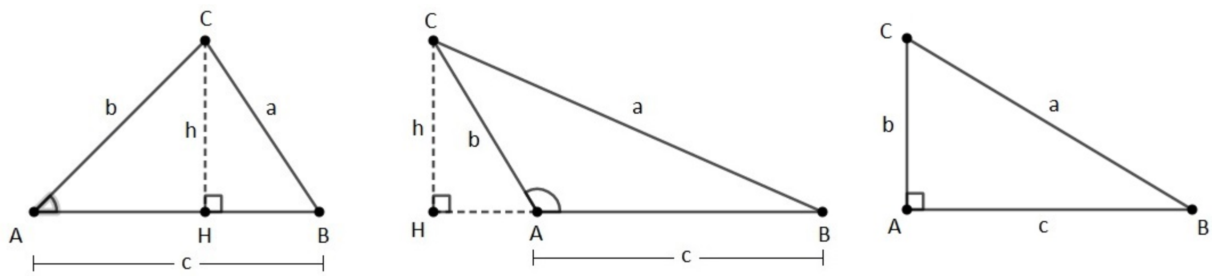
Outra forma que resulta das razões trigonométricas no triângulo retângulo é a *Fórmula de Heron*, que exprime a área de um triângulo qualquer pelas medidas de seus lados.

Teorema: Dado um triângulo ABC qualquer de lados medindo a, b e c, sendo $2p$ o perímetro do triângulo, temos:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Demonstração: De forma análoga à Subseção 5.1.2, onde provamos outra fórmula para área de triângulos por meio de dois lados e do seno do ângulo entre eles, é necessário dividir em três casos, idênticos aos utilizados naquela demonstração.

Figura 5.11: Fórmula de Heron



Fonte: O próprio autor.

Desta forma, como resultado da Subseção 5.1.2, temos:

$$h = b \cdot sen\,\widehat{A}.$$

Então,

$$h^2 = b^2 \cdot sen^2\,\widehat{A} = b^2(1 - cos^2\,\widehat{A}) = b^2 - b^2 \cdot cos^2\,\widehat{A}$$

$$= b^2 - b^2 \cdot \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}.$$

$$= \frac{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{(2c)^2} = \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{(2c)^2}.$$

$$= \frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}{(2c)^2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}.$$

Como $p = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow a+b+c = 2p$, logo:

$$a+b = 2p-c \qquad b+c = 2p-a \qquad a+c = 2p-b.$$

Portanto,

$$h^2 = \frac{2p \cdot (2p-a-a)(2p-c-c)(2p-b-b)}{4c^2} = \frac{16p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}{4c^2}.$$

$$h^2 = \frac{4p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

E daí, resulta

$$h = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pela definição da área de triângulo

$$S = \frac{c \cdot h}{2}.$$

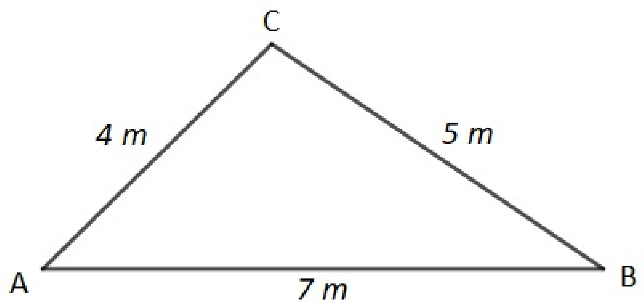
Logo,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

□

Exemplo 5: Determine a área do triângulo na Figura 5.12.

Figura 5.12: Fórmula de Heron - exemplo



Fonte: O próprio autor.

Solução: Para aplicar o fórmula de Heron, devemos inicialmente determinar o semiperímetro p.

$$p = \frac{4+5+7}{2} = 8.$$

Aplicando agora a fórmula de Heron para o cálculo da área do triângulo

$$S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \approx 9,8.$$

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente $9,8\,m^2$.

5.2 Aplicações em situações práticas

Nesta seção, serão apresentadas diversas aplicações da trigonometria em situações práticas e em diferentes áreas do conhecimento, através de problemas contextualizados.

5.2.1 Teodolito: uma ferramenta de medição

O **teodolito** é um instrumento óptico utilizado para medir ângulos, tanto horizontais como verticais. Basicamente, o teodolito é um telescópio com movimentos graduados na vertical e na horizontal, montado sobre um tripé.

Figura 5.13: Teodolito

Fonte: Wikipedia. [3]

Para utilizar o teodolito deve-se fixá-lo em um ponto, encontrar o Norte verdadeiro, com o uso de uma bússola, apontar seu telescópio para esse Norte ou para outro ponto e nivelá-lo com o horizonte. O teodolito emprega o uso das razões trigonométricas para o cálculo de ângulos e de distâncias entre pontos fixos e, para isso, é necessário o uso de três pontos distintos.

Com os dados coletados no teodolito é possível confeccionar plantas topográficas e mapas. Desta forma, o teodolito é empregado na **topografia**, **geodésia** e na **engenharia**.

I) Construção de um teodolito caseiro:

[3]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teodolito>. Acesso em: 13 mai. 2020.

Uma solução prática para substituir o teodolito original é a confecção de um teodolito caseiro cujo processo é apresentado a seguir.

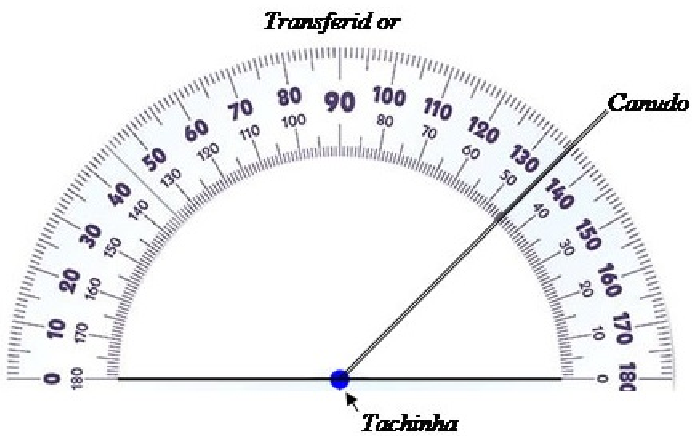
Materiais necessários:

- Um transferidor de plástico ou madeira;
- Canudo
- Cola
- Tachinha

Modo de construção:

Fixar a tachinha na base central do transferidor de forma que ela fique com mobilidade, conforme a Figura 5.14. Colar o canudo na tachinha, de modo que a sua movimentação seja completa.

Figura 5.14: Teodolito caseiro



Fonte: Brasil Escola. [4]

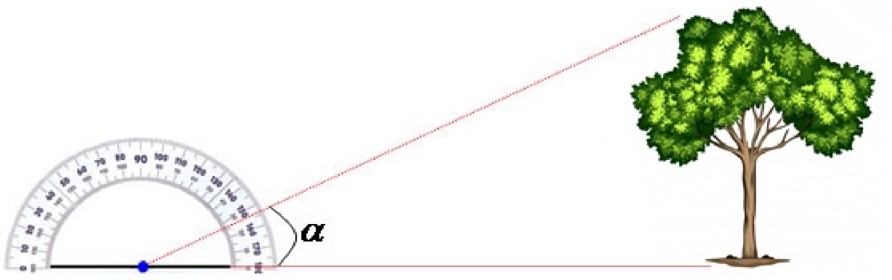
Utilização do Teodolito:

A seguir, apresentaremos um exemplo prático de utilização do teodolito para cálculo da altura de uma árvore.

[4]Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/construindo-um-teodolito.htm>. Acesso em: 13 mai. 2020.

Exemplo 6: Suponha que você deseja calcular a altura de uma árvore, mas que não seja possível medir com uma trena.

Figura 5.15: Utilização do teodolito

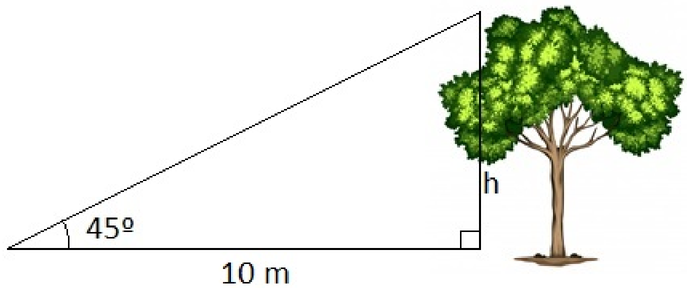


Fonte: O próprio autor.

Para utilizar o teodolito nesta medição, você deve mirar o canudo na posição horizontal correspondente à base da árvore. Depois, movimente o canudo focando o ponto extremo no topo da árvore e verifique o ângulo indicado no transferidor. Meça, com uma trena, a distância do teodolito (na tachinha fixada em seu centro) até a base da árvore, formando um triângulo retângulo. Para obter a medida desejada, recorre-se à trigonometria, por meio das razões trigonométricas.

Suponha, então, que o teodolito encontra-se a 10 metros de distância da base da árvore e que o ângulo medido pelo transferidor seja de 45°, conforme esquema abaixo.

Figura 5.16: Teodolito - exemplo



Fonte: O próprio autor.

Sendo h a altura da árvore, aplicamos a fórmula da tangente para obter sua medida, utilizando a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis. Logo,

$$tg\, 45^\circ = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{h}{10} \Rightarrow 1 = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10.$$

Logo, a altura da árvore é $h = 10\, m$.

5.2.2 Cálculo da largura de um rio

A **topografia** é o estudo da superfície terrestre e de suas características e formas, tendo como resultado a descrição das superfícies, formas e elevações, representada em mapas. Desta forma, a topografia é indispensável para a implantação e e acompanhamento de obras diversas. Para isso, a topografia faz uso da trigonometria em seus cálculos e utiliza como importante ferramenta o já conhecido teodolito.

Figura 5.17: Topografia

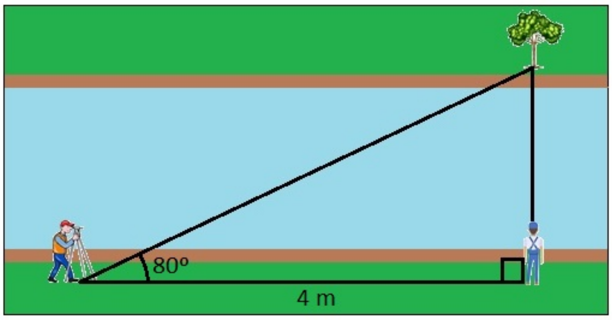
Fonte: S S Topografia. [5]

Uma aplicação prática da trigonometria na topografia será apresentada a seguir.

Exemplo 7: Suponha que um engenheiro deseja construir uma ponte sobre um rio e, portanto, precisa medir a largura deste rio no trecho que construirá a ponte.

Para isso, ele avista na margem oposta do rio uma árvore e resolve utilizá-la como ponto de referência em sua medição.

Figura 5.18: Largura do rio - exemplo 1



Fonte: O próprio autor.

Assim, solicita a um ajudante que se posicione na margem oposta a da árvore de forma que aviste a árvore perpendicularmente ao rio. O engenheiro, na mesma margem do

[5]Disponível em: <http://sstopografia.com.br/o-que-e-topografia/>. Acesso em: 13 mai. 2020.

rio de seu assistente, se afasta dele, percorrendo uma trajetória paralela ao rio, medindo a distância percorrida, que totaliza 4 metros.

Com a ajuda de um teodolito, verifica que a linha entre ele e seu ajudante forma com a linha entre ele e a árvore um ângulo de 80°. Aplicando a razão trigonométrica tangente, é possível calcular a largura do rio. Sendo l a largura do rio e $tg\,80° = 5,67$ temos:

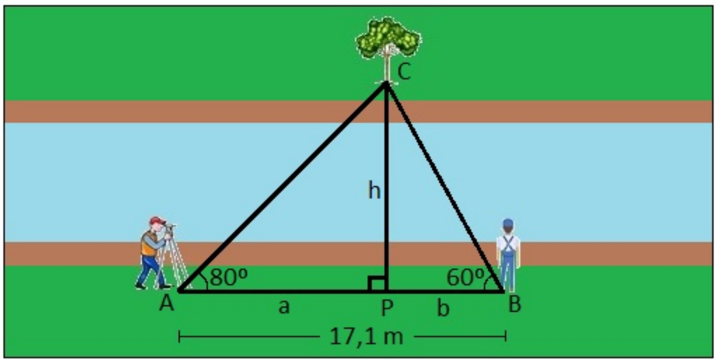
$$tg\,80° = \frac{l}{4} \Rightarrow 5,67 = \frac{l}{4} \Rightarrow l = 22,68.$$

Desta forma, a largura do rio é $22,68\,m$.

Exemplo 8: Suponha agora que o mesmo engenheiro do exemplo anterior, resolve realizar o cálculo da largura do rio de forma diferente.

Para isso, utilizando novamente a árvore da margem oposta como ponto de referência, posicionando-se no mesmo ponto da medição anterior, ponto A, visualiza a árvore sob um ângulo de 80° com a margem do rio e pede que seu ajudante se afaste paralelamente à margem do rio, parando no ponto B de onde visualiza a árvore com um ângulo de 60° em relação ao engenheiro. A distância entre os dois é de $17,1\,m$. Um esquema representando esta situação pode ser visto na Figura 5.19.

Figura 5.19: Largura do rio - exemplo 2



Fonte: O próprio autor.

No triângulo APC, tem-se

$$tg\,80° = \frac{h}{a} \Rightarrow 5,67 = \frac{h}{a}.$$

Como $a + b = 17,1 \Rightarrow a = 17,1 - b$, assim:

$$5,67 = \frac{h}{a} \Rightarrow 5,67 = \frac{h}{17,1 - b} \Rightarrow 96,957 - 5,67b = h \Rightarrow b = \frac{96,957 - h}{5,67}. \tag{5.11}$$

No triângulo BPC, considerando $\sqrt{3} = 1,73$, tem-se:

$$tg\,60° = \frac{h}{b} \Rightarrow 1,73 = \frac{h}{b} \Rightarrow h = 1,73 \cdot b \overset{(5.11)}{\Rightarrow} h = 1,73 \cdot \frac{96,957 - h}{5,67}$$

$$\Rightarrow 5,67h = 167,73561 - 1,73h \Rightarrow 7,4h = 167,73561 \Rightarrow h \approx 22,66.$$

Assim, a largura do rio é de aproximadamente $22,66\,m$.

5.2.3 Cálculo da altura de um edifício

Em diversas situações cotidianas de engenharia ou topografia, por exemplo, torna-se necessário realizar o cálculo de alturas inacessíveis como de prédios, montanhas, torres e construções diversas. Nesses casos, a trigonometria é uma grande aliada. Veremos a seguir uma aplicação da trigonometria no cálculo da altura de um edifício. O mesmo processo pode ser usado para cálculo de altura de montanhas e picos.

Exemplo 9: O maior arranha-céu do Brasil é a torre Infinity Coast Tower e está localizada em Balneário Camboriú, SC.

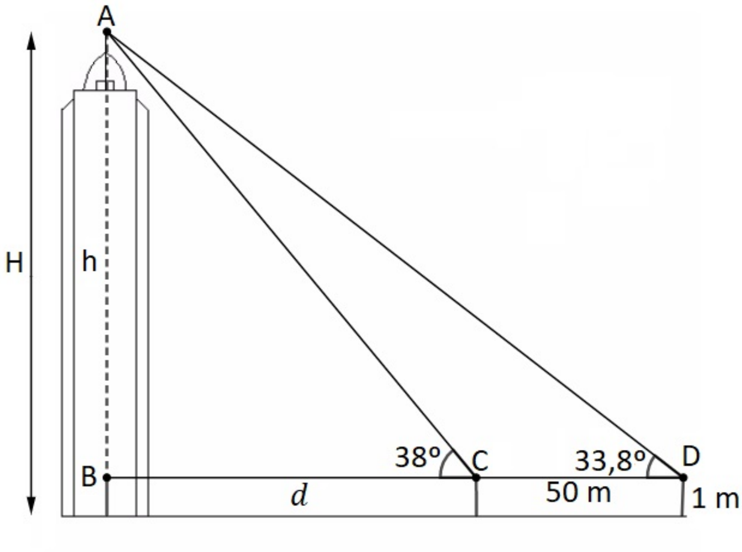
Figura 5.20: Infinity Coast Tower

Fonte: FG Empreendimentos [6]

Suponha que se deseja calcular a altura H desta torre com o auxílio de um teodolito que está a uma altura de $1\,m$ do solo. Para isso, Seja A o ponto mais alto da torre. A uma distância d do edifício, no ponto C, avista-se, com o teodolito, o ponto A sob um ângulo de $38°$. Afastando-se $50\,m$, atingindo o ponto D, avista-se o ponto A sob um ângulo de $33,8°$. O esquema que ilustra a situação descrita está na Figura 5.21.

[6]Disponível em: <https://economia.ig.com.br/financas/casapropria/2013-12-29/edificio-mais-alto-do-brasil-consumira-785-betoneiras-de-concreto-so-na-fundacao.html.>. Acesso em: 19 mai. 2020.

Figura 5.21: Altura de um edifício



Fonte: O próprio autor.

Como o teodolito encontra-se a $1\,m$ do solo, destacamos o ponto B, interno ao edifício, nesta mesma altura, de forma que $H = h + 1$.

No triângulo ABC, tem-se

$$tg\,38^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{tg\,38^\circ}. \tag{5.12}$$

E, no triângulo ABD tem-se

$$tg\,33,8^\circ = \frac{h}{d+50}. \tag{5.13}$$

Substituindo (5.12) em (5.13)

$$tg\,33,8^\circ = \frac{h}{\frac{h}{tg\,38^\circ} + 50} = \frac{tg\,38^\circ \cdot h}{h + 50 \cdot tg\,38^\circ}$$

$$\Rightarrow tg\,33,8^\circ \cdot h + 50 \cdot tg\,38^\circ \cdot tg\,33,8^\circ = tg\,38^\circ \cdot h.$$

$$\Rightarrow h(tg\,38^\circ - tg\,33,8^\circ) = 50 \cdot tg\,38^\circ \cdot tg\,33,8^\circ.$$

$$\Rightarrow h = \frac{50 \cdot tg\,38^\circ \cdot tg\,33,8^\circ}{tg\,38^\circ - tg\,33,8^\circ}.$$

Considerando $tg\,38^\circ = 0,7812$ e $tg\,33,8^\circ = 0,6694$,

$$h = \frac{50 \cdot 0,7812 \cdot 0,6694}{0,7812 - 0,6694} = \frac{26,146764}{0,1118} \approx 233,87.$$

E como $H = h + 1$,

$$H = 233,87 + 1 = 234,87.$$

Desta forma, a altura do edifício é de aproximadamente $234,87\,m$.

A altura oficial do edifício Infinity Coast Tower é de $234,7\,m$, logo os cálculos realizados apresentam uma boa aproximação da altura desejada. Certamente, com um instrumento de medição de ângulo mais calibrado, o erro seria menor.

Exemplo 10: O Convento da Penha é um dos santuários religiosos mais antigos do Brasil, além de ser cartão postal e uma atração turística muito visitada no município de Vila Velha no estado do Espírito Santo. Fica localizado no alto de um penhasco, conforme Figura 5.22

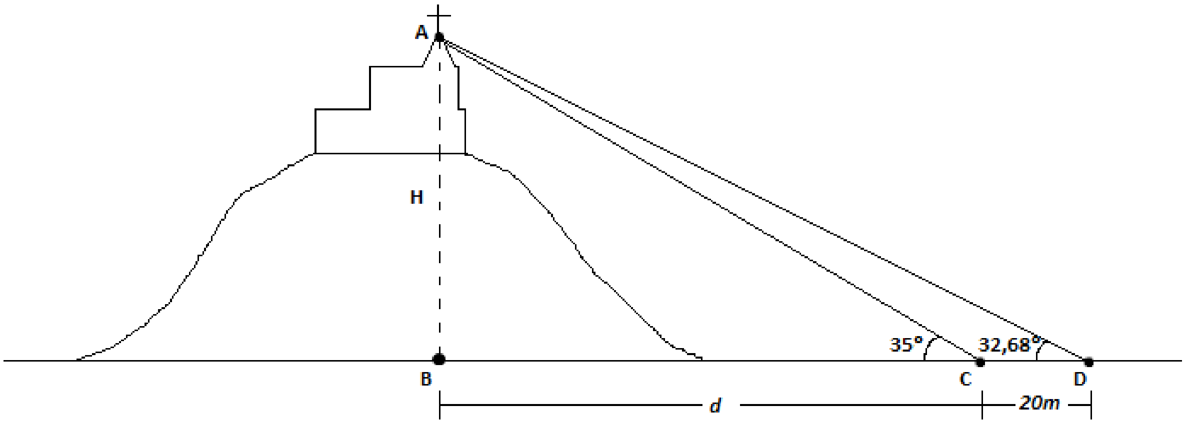
Figura 5.22: Convento da Penha

Fonte: Convento da Penha [7]

Para calcular a altura H do Convento da Penha, seja A o ponto mais alto do Convento. Suponha que um barco que está no ponto C a uma distância d do pé da perpendicular baixada do Convento ao plano horizontal no nível do mar, representado pelo ponto B, observe, com o teodolito, o ponto A sob um ângulo de $35°$. Afastando-se $20\,m$, atingindo o ponto D, avista-se o ponto A sob um ângulo de $32,68°$. O esquema que ilustra a situação descrita está na Figura 5.23.

[7] Disponível em: <https://conventodapenha.org.br/redescubraoes-conheca-o-convento-de-nossa-senhora-da-penha/>. Acesso em: 25 junho. 2023.

Figura 5.23: Altura do Convento da Penha



Fonte: O próprio autor

No triângulo ABC, tem-se

$$tg\,35^\circ = \frac{H}{d} \Rightarrow d = \frac{H}{tg\,35^\circ}. \tag{5.14}$$

E, no triângulo ABD tem-se

$$tg\,32,68^\circ = \frac{H}{d+20}. \tag{5.15}$$

Substituindo (5.14) em (5.15)

$$tg\,32,68^\circ = \frac{H}{\frac{H}{tg\,35^\circ}+20} = \frac{tg\,35^\circ \cdot H}{H + 20 \cdot tg\,35^\circ}$$

$$\Rightarrow tg\,32,68^\circ \cdot H + 20 \cdot tg\,35^\circ \cdot tg\,32,68^\circ = tg\,35^\circ \cdot H.$$

$$\Rightarrow H(tg\,35^\circ - tg\,32,68^\circ) = 20 \cdot tg\,35^\circ \cdot tg\,32,68^\circ.$$

$$\Rightarrow H = \frac{20 \cdot tg\,35^\circ \cdot tg\,32,68^\circ}{tg\,35^\circ - tg\,32,68^\circ}.$$

Considerando $tg\,35^\circ = 0,7$ e $tg\,32,68^\circ = 0,6414$,

$$H = \frac{20 \cdot 0,7 \cdot 0,6414}{0,7 - 0,6414} = \frac{8,9796}{0,0586} \approx 153,23.$$

Desta forma, a altura do Convento da Penha é de aproximadamente $153,23\,m$.

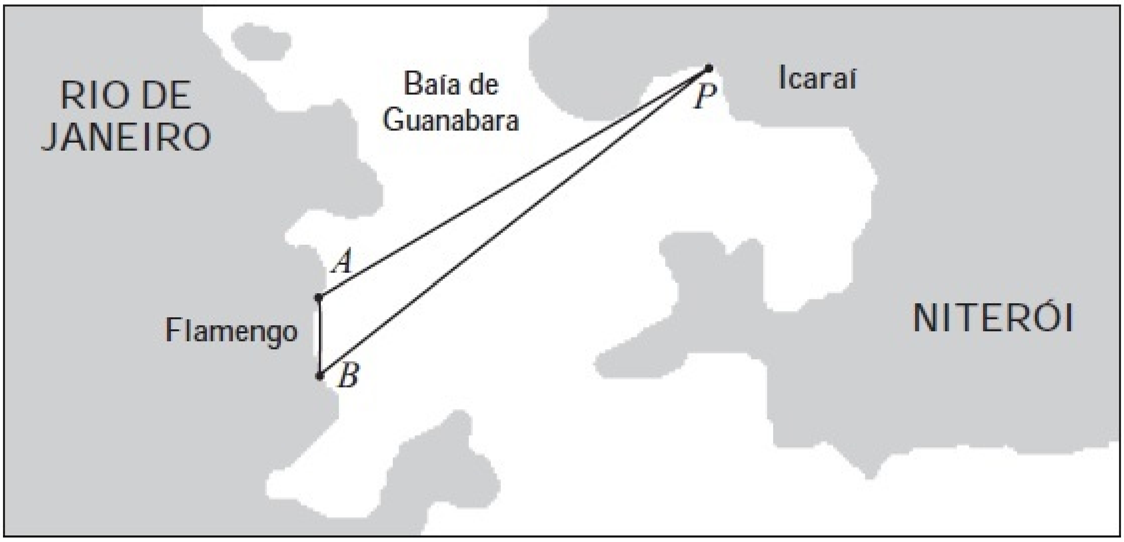
A altura oficial do Convento da Penha é de $154\,m$, logo os cálculos realizados apresentam uma boa aproximação da altura desejada.

5.2.4 Distâncias inacessíveis no plano horizontal

A trigonometria também é muito útil para o cálculo da distância de um ponto a outro, inacessível em um plano horizontal. Para exemplificar esta situação, apresentamos a seguir dois problemas propostos por Elon Lages Lima no livro *Temas e Problemas Elementares.*

Exemplo 11: De um ponto A na praia do Flamengo no Rio de Janeiro, avista-se um ponto P na praia de Icaraí em Niterói (estes dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto B na Praia do Flamengo, distante 1km de A também se avista o ponto P. Um observador no Rio de Janeiro mediu os ângulos $B\widehat{A}P = 119°$ e $A\widehat{B}P = 52°$, conforme Figura 5.24. Qual é a distância entre A e P?

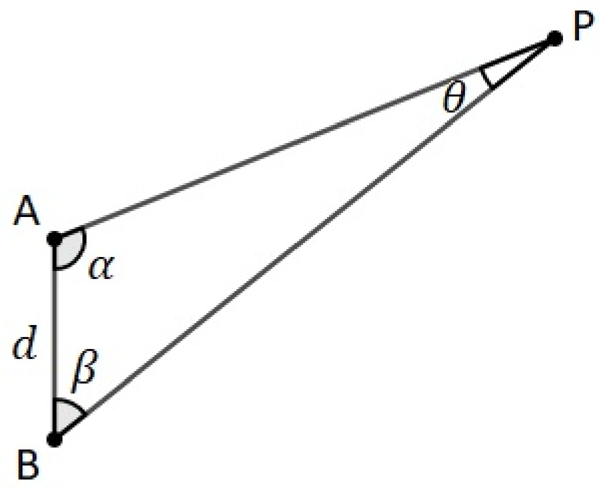
Figura 5.24: Baía de Guanabara



Fonte: Lima et. al. (2010, p. 68).

Solução: Antes de trabalharmos com os dados do problema, vamos refletir sobre a questão com um triângulo qualquer, atendendo as especificações do enunciado.

Figura 5.25: Triângulo ABP



Fonte: O próprio autor.

Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180°, logo, $\theta = 180° - (\alpha + \beta)$.

Pela lei dos senos, abordada na seção 5.1.4, temos

$$\frac{d}{sen\,[180° - (\alpha + \beta)]} = \frac{\overline{AP}}{sen\,\beta}$$

$$\overline{AP} = \frac{d \cdot sen\,\beta}{sen\,[180° - (\alpha + \beta)]}.$$

Como em nosso problema, $\alpha = 119°$, $\beta = 52°$ e $d = 1\,km$, e considerando $sen\,52° = 0,788$ e $sen\,9° = 0,1564$, temos

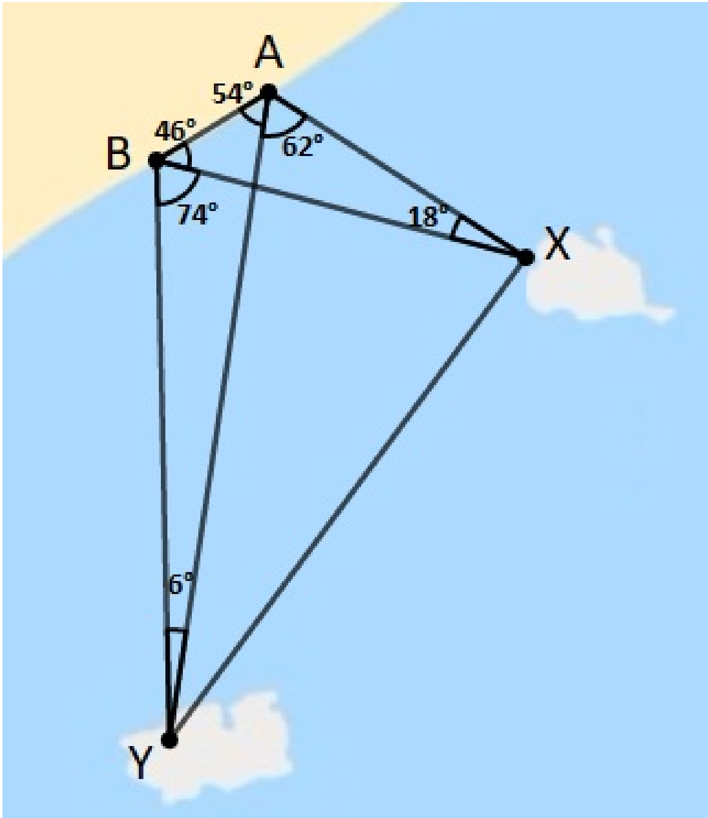
$$\overline{AP} = \frac{1 \cdot sen\,52°}{sen\,[180° - (119° + 52°]} = \frac{sen\,52°}{sen\,9°} = \frac{0,788}{0,1564} \approx 5,04.$$

Portanto, a distância do ponto A na praia do Flamengo ao ponto P da praia da Icaraí é de aproximadamente $5,04\,km$.

No problema a seguir, será realizado o cálculo da distância entre dois pontos, ambos inacessíveis.

Exemplo 12: De uma praia é possível ver duas ilhas X e Y. Um observador assinala nesta praia dois pontos A e B distantes 1km entre si, e com seu instrumento mede os seguintes ângulos: $X\widehat{A}Y = 62°$, $Y\widehat{A}B = 54°$, $A\widehat{B}X = 46°$ e $X\widehat{B}Y = 74°$. Qual é a distância entre X e Y?

Figura 5.26: Distância entre ilhas X e Y



Fonte: O próprio autor.

Solução: Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, $A\widehat{X}B = 18°$ e $A\widehat{Y}B = 6°$.

Aplicando a lei dos senos ao triângulo XAB,

$$\frac{\overline{AX}}{sen\,46°} = \frac{1}{sen\,18°}.$$

Sendo, $sen\,46° \approx 0,7193$ e $sen\,18° \approx 0,3090$, temos que $\overline{AX} \approx 2,328\,km$.

Agora, aplicando a lei dos senos ao triângulo ABY,

$$\frac{\overline{AY}}{sen\,120°} = \frac{1}{sen\,6°}.$$

Sendo, $sen\,120° \approx 0,8660$ e $sen\,6° \approx 0,1045$, temos que $\overline{AY} \approx 8,285\,km$.

Conhecendo as medidas dos segmentos AX e AY e do ângulo $X\widehat{A}Y$, aplicamos a lei dos cossenos, tratada na seção 5.1.5, ao triângulo XAY para descobrir a medida do segmento XY que é a distância que se deseja descobrir entre as ilhas. Logo,

$$\overline{XY}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 - 2 \cdot \overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot cos\,62°$$

$$\overline{XY}^2 = (2,328)^2 + (8,285)^2 - 2 \cdot (2,328) \cdot (8,285) \cdot 0,4695$$

$$\overline{XY}^2 = 5,419584 + 68,641225 - 18,10984676$$

$$\overline{XY} = \sqrt{55,9509414} \approx 7,48.$$

Portanto, a distância entre as ilhas X e Y é de, aproximadamente, $7,48\,km$.

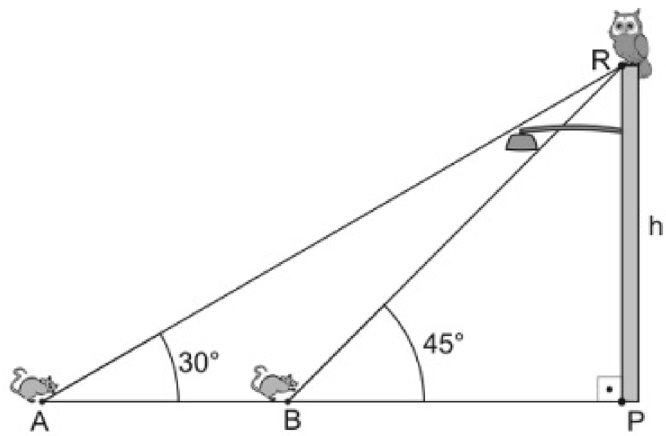
5.3 Aplicações na resolução de problemas

A trigonometria é uma área muito importante da matemática e uma excelente ferramenta para a resolução de problemas. Conforme apresentado ao longo desta dissertação, foi utilizada desde tempos antigos na resolução de problemas diversos e atualmente é um dos assuntos mais cobrados em importantes provas realizadas pelos alunos da educação básica. Pensando nisso, propomos nesta seção a resolução de uma sequência de exercícios interessantes sobre trigonometria no triângulo retângulo, contemplando questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e outros vestibulares, provas de acesso a institutos federais (IF), exame nacional de acesso ao Profmat (ENA-Profmat), entre outros.

5.3.1 Problemas de provas de acesso a escolas militares e universidades

Problema 1: (EPCAR - 2012) Uma coruja está pousada em R, ponto mais alto de um poste, a uma altura h do ponto P, no chão. Ela é vista por um rato no ponto A, no solo, sob um ângulo de 30°, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 5.27: Rato e coruja



Fonte: EPCAR (2012).

O rato se desloca em linha reta até o ponto B, de onde vê a coruja, agora sob um ângulo de 45° com o chão e a uma distância $\overline{BR}$ de medida $6\sqrt{2}$ metros. Com base nessas informações, estando os pontos A, B e P alinhados e, desprezando-se a espessura do poste, pode-se afirmar então que a medida do deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é um número entre:

a) 3 e 4
b) 4 e 5
c) 5 e 6
d) 6 e 7

Solução: O triângulo BPR é isósceles, logo $\overline{BP} = \overline{PR} = h$. Pelo teorema de Pitágoras,

$$h^2 + h^2 = (6\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 \Leftrightarrow h = 6\,m.$$

Considere $\overline{AB} = x$. No triângulo APR, temos:

$$tg\,30^\circ = \frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} = \frac{6}{x+6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{x+6} \Rightarrow \sqrt{3}x = 18 - 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{18-6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6(\sqrt{3}-1)\,m.$$

Como

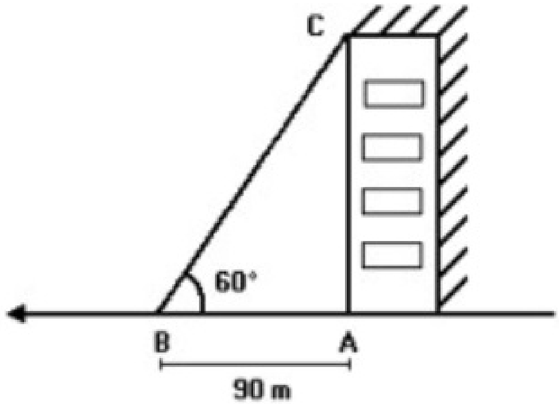
$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Rightarrow 0,7 < \sqrt{3} - 1 < 0,8 \Rightarrow 4,2 < 6(\sqrt{3}-1) < 4,8.$$

Portanto, o deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é um número entre 4 e 5. A resposta correta é o item b).

Problema 2: (PUCCAMP-SP) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60°. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

a) 150
b) 180
c) 270
d) 300
e) 310

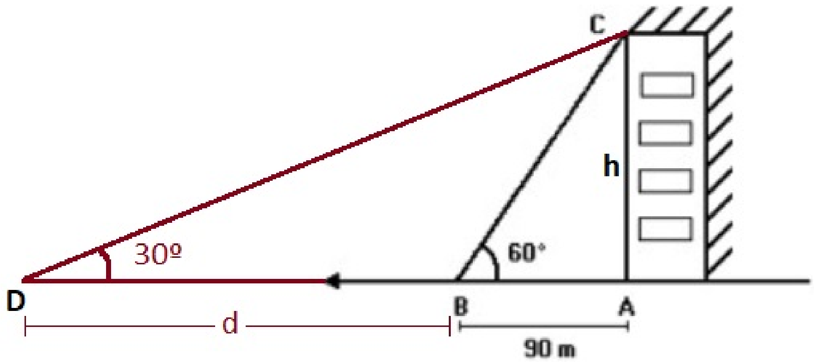
Figura 5.28: Visualizando o topo do prédio



Fonte: PUCCAMP-SP.

Solução: Perceba que o ângulo de visão do topo do prédio diminui conforme a pessoa se afasta do prédio, logo, para visualizar o topo sob um ângulo de 30°, o visualizador deve estar mais afastado da base do prédio. É possível criar o esquema abaixo, onde h é a altura do prédio e d é a distância percorrida pela pessoa ao se afastar do prédio a partir do ponto B até o ponto D, onde observa o topo do prédio sob um ângulo de 30°.

Figura 5.29: Visualizando o topo do prédio - solução



Fonte: O próprio autor.

No triângulo ABC, temos:

$$cos\,60^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{90}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = 180m.$$

No triângulo BCD, isósceles, com ângulos $\widehat{C} = \widehat{D} = 30^\circ$, tem-se:

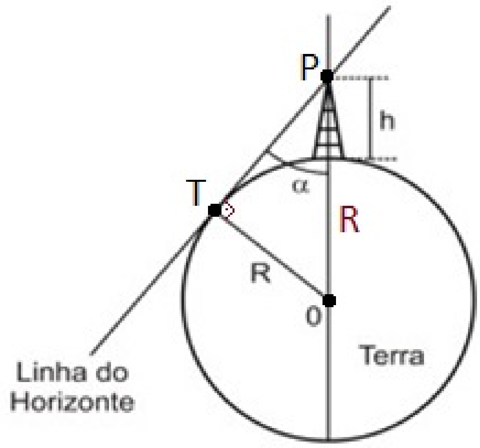
$$\overline{BD} = \overline{BC} = 180m.$$

Portanto, deve-se afastar do ponto A, $180 + 90 = 270$ metros. Logo, a resposta correta é a letra c).

Problema 3: (ESPCEX – 2012 - adaptada) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, determine o raio terrestre em função do ângulo.

Solução: O esquema a seguir representa a situação do enunciado.

Figura 5.30: Raio da Terra



Fonte: ESPCEX (2012).

Percebe-se que a linha do horizonte tangencia o círculo da Terra, logo forma com o raio da Terra OT um ângulo reto. O triângulo OPT é retângulo, cuja hipotenusa mede $(R+h)$. Assim, aplicando o seno do ângulo α, temos:

$$sen\,\alpha = \frac{R}{R+h} \Rightarrow R\cdot sen\,\alpha + h\cdot sen\,\alpha = R \Rightarrow R(1-sen\,\alpha) = h\cdot sen\,\alpha$$

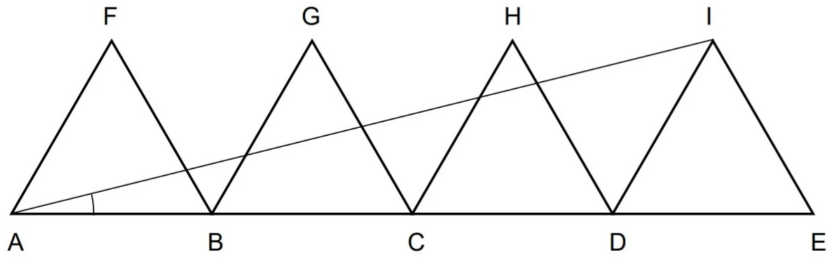
$$\Rightarrow R = \frac{h\cdot sen\,\alpha}{1-sen\,\alpha}.$$

Por meio desta fórmula, com as medidas h e do ângulo α, é possível obter um resultado bem aproximado para o raio da Terra.

5.3.2 Problemas de institutos federais, escolas técnicas e ENEM

Problema 4: (COTUCA - 2019) Os quatro triângulos equiláteros congruentes, na figura a seguir, estão enfileirados de modo que os pontos A, B, C, D e E são colineares. Sabendo que o lado do triângulo equilátero mede $1\,cm$, qual é o valor da tangente do ângulo $I\widehat{A}E$?

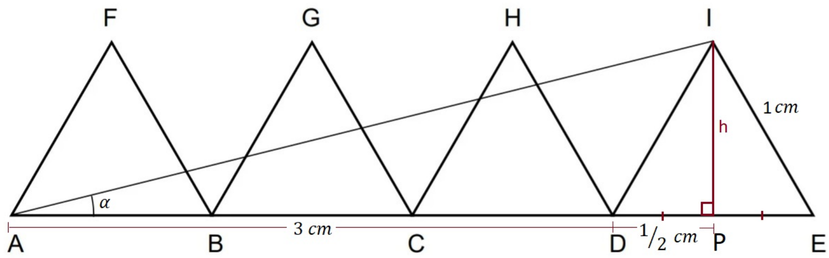
Figura 5.31: Triângulos equiláteros congruentes



Fonte: COTUCA (2019).

Solução: Para calcular a tangente do ângulo $I\widehat{A}E$ devemos, inicialmente, determinar um triângulo retângulo onde este seja um ângulo interno. Para isso, traçamos a altura em relação ao lado DE no triângulo DEI e determinamos sua medida.

Figura 5.32: Triângulos equiláteros congruentes - solução



Fonte: O próprio autor.

Seja IP a altura em relação ao lado DE do triângulo DEI de medida h. Como DEI é equilátero, de lado medindo $1\,cm$, $\overline{DP} = \overline{PE} = \frac{1}{2}\,cm$. Aplicando o teorema de Pitágoras:

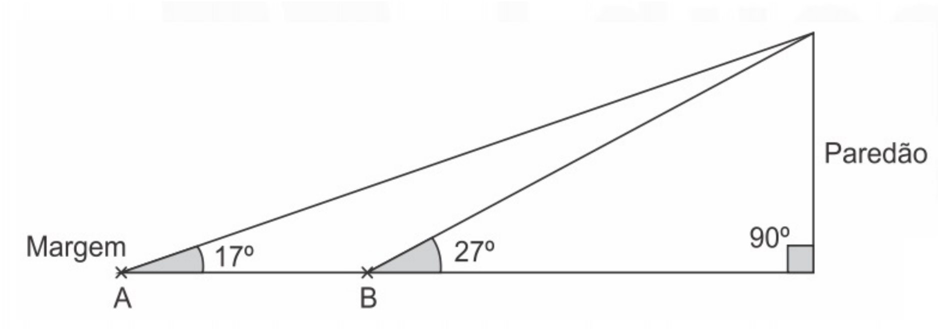
$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

O segmento AP mede $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\,cm$. Portanto, calculando a tangente de α no triângulo API, temos:

$$tg\,\alpha = \frac{h}{\overline{AP}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{7}\,cm.$$

Problema 5: (IFPE - 2018) Os alunos pré-egressos do campus Jaboatão dos Guararapes resolveram ir até a Lagoa Azul para celebrar a conclusão dos cursos. Raissa, uma das participantes do evento, ficou curiosa pra descobrir a altura do paredão rochoso que envolve a lagoa. Então pegou em sua mochila um transferidor e estimou o ângulo no ponto A, na margem onde estava, e, após nadar, aproximadamente, 70 metros em linha reta em direção ao paredão, estimou o ângulo no ponto B, conforme mostra a figura a seguir. De acordo com os dados coletados por Raissa, qual a altura do paredão rochoso da Lagoa Azul? (Dados: $sen\, 17° = 0,29$, $tg\, 17° = 0,30$, $cos\, 27° = 0,89$ e $tg\, 27° = 0,51$).

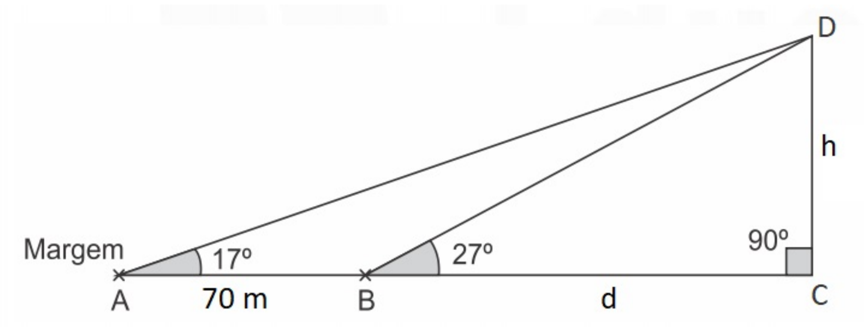
Figura 5.33: Paredão da Lagoa Azul



Fonte: O próprio autor.

Solução: Conforme enunciado, temos $\overline{AB} = 70\, m$. Seja h a altura do paredão e d a distância horizontal do ponto B à base do paredão, conforme figura a seguir.

Figura 5.34: Paredão da Lagoa Azul - solução



Fonte: O próprio autor.

No triângulo ACD temos:

$$tg\, 17° = \frac{h}{70 + d} \Rightarrow 0,30 = \frac{h}{70 + d} \Rightarrow h - 0,3d = 21. \tag{5.16}$$

No triângulo BCD temos:

$$tg\, 27° = \frac{h}{d} \Rightarrow 0,51 = \frac{h}{d} \Rightarrow h = 0,51d. \tag{5.17}$$

Substituindo (5.15) em (5.14),

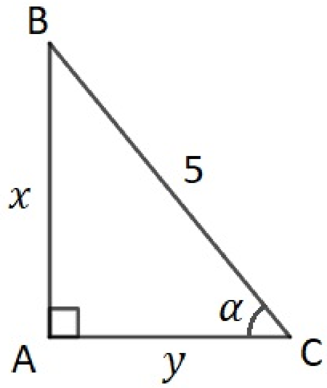
$$h - 0,3d = 21 \Rightarrow 0,51d - 0,3d = 21 \Rightarrow 0,21d = 21 \Rightarrow d = 100\, m.$$

Portanto, $h = 0,51 \cdot 100 = 51\,m$. Logo, a altura do paredão da Lagoa Azul tem $51\,m$.

Problema 6: (Cefet/MG - 2017) Em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos é 2. Sabendo-se que a hipotenusa desse triângulo é 5, determine o valor do seno desse mesmo ângulo.

Solução: Para ilustrar o problema, seja o triângulo retângulo ABC a seguir.

Figura 5.35: Triângulo de hipotenusa 5



Fonte: O próprio autor.

Sabendo que a tangente do ângulo α é 2, temos:

$$\tfrac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo,

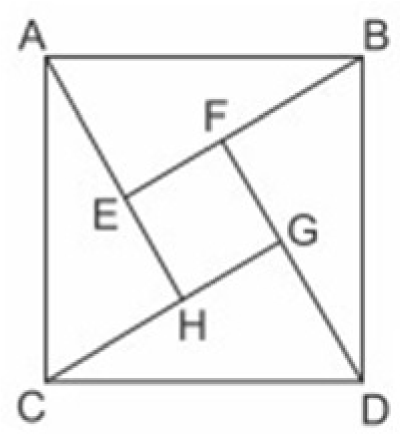
$$y^2 + (2y)^2 = 5^2 \Rightarrow y = \sqrt{5} \text{ e } x = 2\sqrt{5}.$$

Assim, o seno do ângulo α será

$$sen\,\alpha = \frac{x}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Problema 7: (Cefet/MG - 2018) O Hindu Bhaskara, ao demonstrar o Teorema da Pitágoras, utilizou uma figura em que $ABCD$ e $EFGH$ são quadrados, conforme mostrado abaixo.

Figura 5.36: Demonstração de Bhaskara

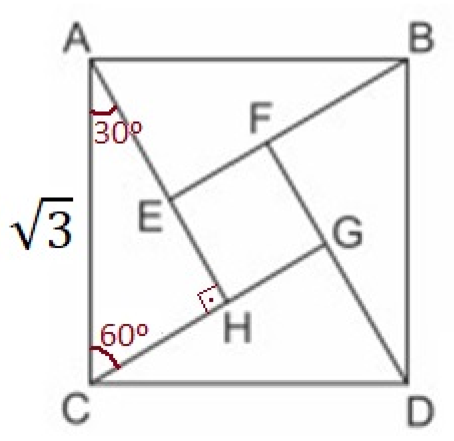


Fonte: Cefet/MG (2018).

Se este quadrado $ABCD$ tem lado de medida $\sqrt{3}\,cm$ e o ângulo $A\widehat{C}H$ mede $60°$, determine a área de $EFGH$ em cm^2.

Solução: Na Figura 5.34, tem-se $\overline{AC} = \sqrt{3}$, $A\widehat{H}C = 90°$, $A\widehat{C}H = 60°$ e, por consequência, $C\widehat{A}H = 30°$. Temos, ainda, que os triângulos ACH, BAE, DBF e CDG são congruentes.

Figura 5.37: Demonstração de Bhaskara - solução



Fonte: O próprio autor.

Aplicando as razões trigonométricas ao triângulo ACH, obtemos as medidas dos lados CH e AH, logo

$$sen\,60° = \frac{\overline{AH}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AH}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{3}{2}\,cm.$$

$$sen\,30° = \frac{\overline{CH}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{CH}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm.$$

Sabe-se que, pela congruência dos triângulos BAE e ACH, $\overline{AE} = \overline{CH}$. Portanto, o lado do quadrado menor $EFGH$ é dado por:

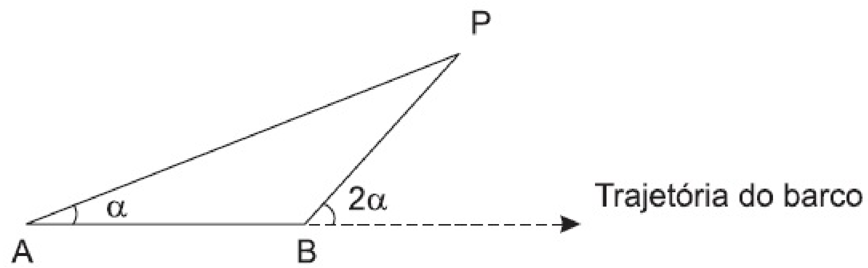
$$\overline{EH} = \overline{AH} - \overline{AE} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a área do quadrado $EFGH$ será:

$$S = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{4} = \frac{12-6\sqrt{3}}{4} = 3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,cm^2.$$

Problema 8: (ENEM - 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

Figura 5.38: Trajetória do barco



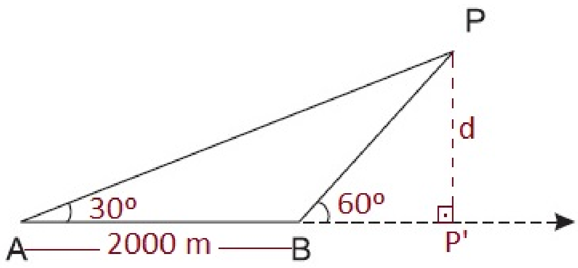
Fonte: ENEM (2011).

Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $\overline{AB} = 2000\,m$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) $1000\,m$
b) $1000\sqrt{3}\,m$
c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}\,m$
d) $2000\,m$
e) $2000\sqrt{3}\,m$

Solução: Sabendo que $\overline{AB} = 2000\,m$ e $\alpha = 30°$, então $2\alpha = 60°$. Temos ainda que a menor distância da trajetória do barco ao ponto P se dá quando a linha que liga o barco ao ponto P for perpendicular a linha de trajetória do barco, ou seja, quando o barco estiver no ponto P' onde $\overline{PP'} = d$, conforme ilustração abaixo.

Figura 5.39: Trajetória do barco - solução



Fonte: O próprio autor.

Analisando a ilustração, temos que $A\widehat{B}P = 120°$, logo $A\widehat{P}B = 30°$ e o triângulo ABP é isósceles. Assim, $\overline{BP} = 2000\,m$. Utilizando a razão trigonométrica seno, obtemos a medida d desejada. Logo,

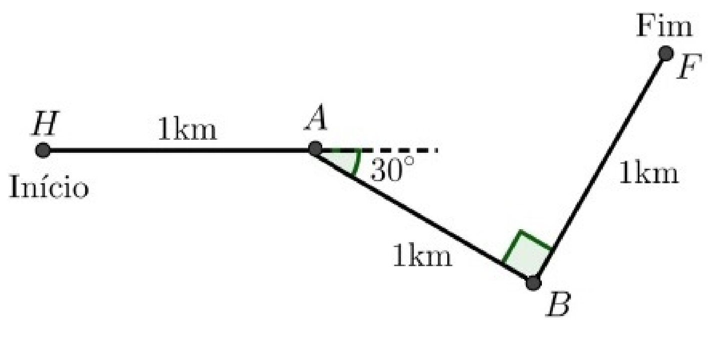
$$sen\,60° = \frac{d}{2000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{2000} \Rightarrow d = 1000\sqrt{3}\,m.$$

Assim, a resposta correta é o item b.

5.3.3 Problemas do exame nacional de acesso ao Profmat

Problema 9: (PROFMAT/ENA - 2018) Uma pessoa anda 1km em linha reta, depois gira 30° à sua direita e anda mais 1km. Por fim, gira 90° à sua esquerda e anda mais 1km. A figura abaixo ilustra o deslocamento. Qual a distância, em km, entre os pontos inicial e final deste deslocamento?

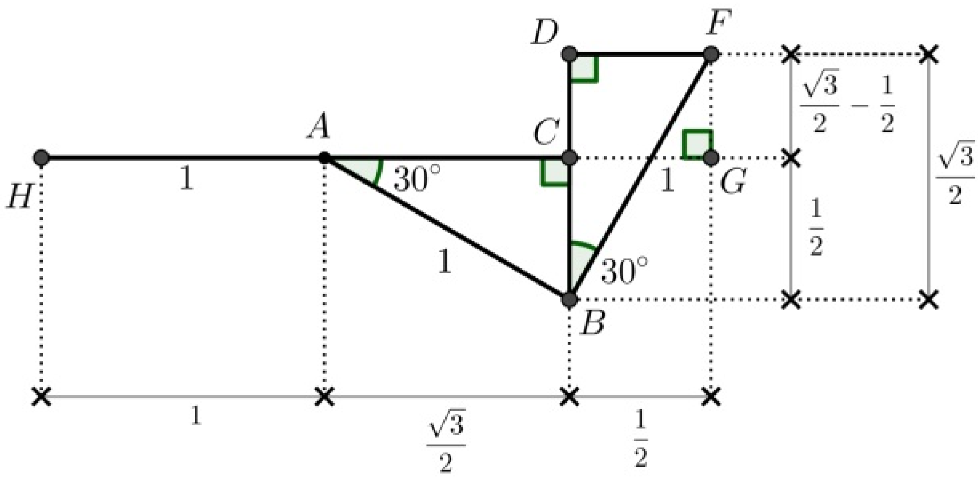
Figura 5.40: Deslocamento de uma pessoa



Fonte: Profmat (2018).

Solução: Trace por B uma reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{HA}$, fixando C na interseção destas e trace por F uma reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{BC}$, fixando D na interseção destas. Temos, então, dois triângulos retângulos ABC e BFD, ilustrados na figura a seguir.

Figura 5.41: Deslocamento de uma pessoa - solução



Fonte: Profmat (2018).

Pelos dados do problema, $\overline{AB} = \overline{BF} = 1$. Como $B\widehat{A}C = 30°$, então $A\widehat{B}C = 60°$, $D\widehat{B}F = 30°$ e $D\widehat{F}B = 60°$. Assim, pelo caso ALA, os triângulos ABC e BFD são congruentes. Portanto,

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 1 \cdot cos\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\overline{BC} = \overline{DF} = 1 \cdot sen\, 30° = \frac{1}{2}.$$

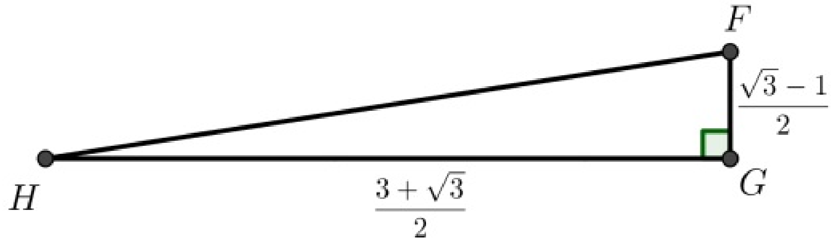
Com isso,

$$\overline{HG} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$\overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} == \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

De acordo com a Figura 5.40, para obter a distância $\overline{HF}$, basta aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo HGF.

Figura 5.42: Deslocamento de uma pessoa - continuação



Fonte: Profmat (2018).

Logo,

$$\overline{HF}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{FG}^2$$

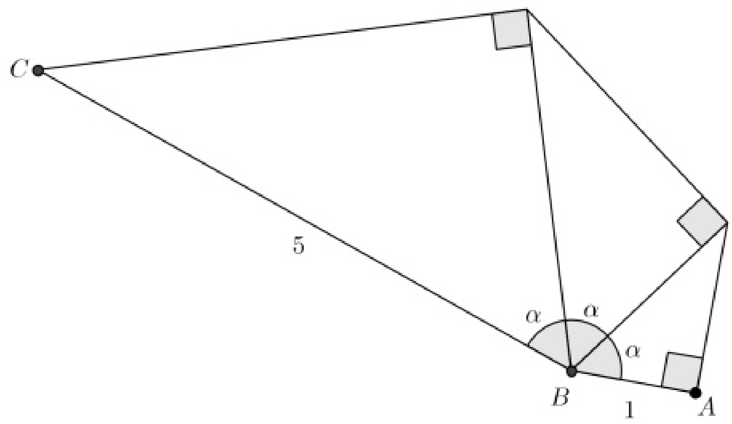
$$\overline{HF}^2 = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$$

$$\overline{HF}^2 = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{4} + \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} = \frac{16+4\sqrt{3}}{4} = 4+\sqrt{3}.$$

Portanto, $\overline{HF} = \sqrt{4+\sqrt{3}}$.

Problema 10: (PROFMAT/ENA - 2015) Na figura, estão assinalados três ângulos retos, e três ângulos de medida α. Se $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 5$, qual é o valor de $cos\,\alpha$?

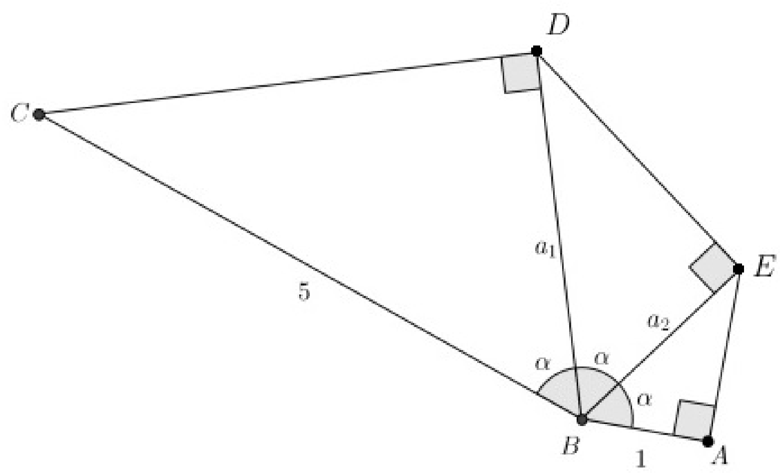
Figura 5.43: Três triângulos retângulos



Fonte: Profmat (2015).

Solução: Vamos denotar por a_1 e a_2 as medidas dos segmentos que formam os lados adjacentes aos ângulos de medida α, conforme figura a seguir.

Figura 5.44: Três triângulos retângulos - solução



Fonte: Profmat (2015).

No triângulo BCD, tem-se

$$cos\,\alpha = \frac{a_1}{5} \Leftrightarrow a_1 = 5\,cos\,\alpha.$$

No triângulo BDE, tem-se

$$cos\,\alpha = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow a_2 = a_1\,cos\,\alpha \Leftrightarrow a_2 = (5\,cos\,\alpha)\,cos\,\alpha \Leftrightarrow a_2 = 5\,cos^2\,\alpha.$$

E no triângulo ABE tem-se

$$cos\,\alpha = \frac{1}{a_2} \Leftrightarrow 1 = a_2\,cos\,\alpha \Leftrightarrow 1 = (5\,cos^2\,\alpha)\,cos\,\alpha \Leftrightarrow 1 = 5\,cos^3\,\alpha.$$

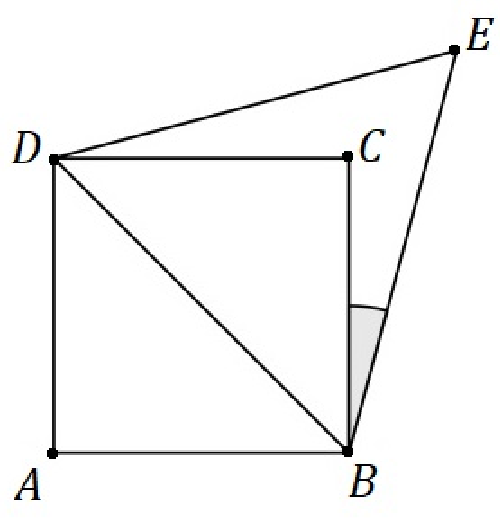
Desta forma,

$$cos^3\,\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}.$$

Portanto, $cos\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Problema 11: (PROFMAT/ENA - 2017) Na figura abaixo, tem-se um quadrado e um triangulo equilátero, coplanares. Qual o seno do ângulo destacado?

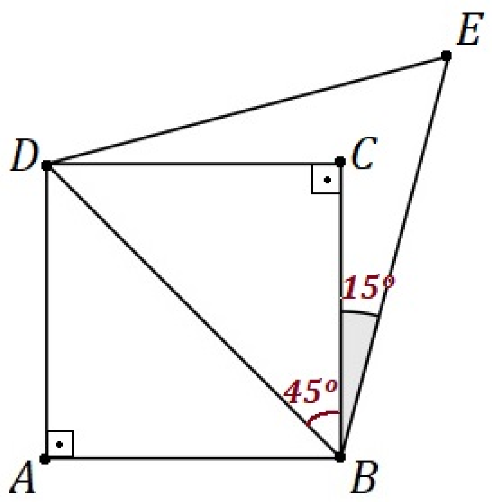
Figura 5.45: Quadrado e triângulo equilátero



Fonte: Profmat (2017).

Solução: O segmento BD é diagonal do quadrado $ABCD$, logo $C\widehat{B}D = 45°$. Como EBD é um triângulo equilátero, seus ângulos internos medem $60°$. Assim, $E\widehat{B}C = 15°$, conforme representado na figura abaixo.

Figura 5.46: Quadrado e triângulo equilátero - solução



Fonte: O próprio autor.

Portanto, o problema deseja o seno de 15°. Para determinar este valor, utilizamos a fórmula para seno da diferença de ângulos

$$sen\,(a-b) = sen\,a \cdot cos\,b - sen\,b \cdot cos\,a.$$

Como $15° = 60° - 45°$, tem-se

$$sen\,15° = sen\,(60° - 45°) = sen\,60° \cdot cos\,45° - sen\,45° \cdot cos\,60°.$$

$$sen\,15° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \approx 0,2588.$$

Capítulo 6

Considerações Finais

A pesquisa realizada para esta dissertação teve como objetivo proporcionar, para um público de docentes e discentes das séries finais de Ensino Fundamental II, um estudo mais abrangente das razões trigonométricas no triângulo retângulo, com diversas situações de aplicabilidade das mesmas, além disso, proporcionar recursos didáticos que possibilitem aos docentes o planejamento das suas aulas com outra perspectiva, a de utilizar novas metodologias de ensino, não se limitando ao ensino tradicional, em razão da trigonometria ser uma importante área da matemática, milenar e muito instigante, como salientado ao longo do trabalho, pois atende a diversas necessidades, não só da sociedade atual, como também o fez ao longo de toda sua história.

A proposta didática deste estudo, amparada na BNCC, PCN's e no currículo básico do Estado do Espírito Santo, tem como base a contextualização, que possibilitou, ao longo de toda a pesquisa, uma análise interessante e rica das razões trigonométricas. Contribuindo significativamente com a contextualização, fez-se uso da história da matemática, de maneira envolvente, evidenciando e justificando a posição de destaque que a trigonometria tem na matemática, na astronomia e em outras ciências.

Procurou-se ainda nesta pesquisa proporcionar ao leitor os conhecimentos básicos para o entendimento das razões trigonométricas, perpassando desde os conceitos primitivos da geometria plana até grandes e importantes teoremas, como congruência e semelhança de triângulos, teorema de Tales e teorema de Pitágoras.

Sobre o estudo das razões trigonométricas, em face do público ser de ensino fundamental, limitou-se o estudo da trigonometria ao triângulo retângulo, ficando como sugestão a continuidade dos estudos no círculo trigonométrico através das referências bibliográficas listadas ao final desta pesquisa. Porém, foram apresentadas outras razões trigonométricas, além de seno, cosseno e tangente, que são as usualmente trabalhadas neste nível de ensino escolar. Apresentou-se diversas relações trigonométricas e suas demonstrações, além de identidades trigonométricas, com o intuito de despertar o raciocínio e o interesse dos alunos por esse assunto. Ao trabalhar com os ângulos notáveis, buscou-se utilizar uma abordagem diferenciada, inserindo o processo de construção geométrica dos ângulos e, a partir disso, verificar os valores das razões trigonométricas para estes ângulos, culminando na sistematização dos resultados por meio da tabela trigonométrica dos ângulos notáveis.

O Capítulo 5, que apresenta aplicações das razões trigonométricas, merece destaque, pois contribuindo com a perspectiva de contextualização, trabalhou-se com a resolução de problemas, segundo Polya (1978)[24]. Evidenciando a relevância da trigonometria, apresentou-se aplicações diversas, com muito cuidado para que o público alvo da pesquisa conseguisse compreender e acompanhar as aplicações. Primeiramente, destacou-se contribuições das razões trigonométricas em conceitos matemáticos, procurando apresentar, além do estudo teórico, exemplos de aplicações práticas e atuais destes conceitos. Em um segundo bloco de aplicações, apresentou-se a utilização da trigonometria em situações práticas, como o uso do teodolito, onde fornecemos os passos para construção caseira desta ferramenta, a fim de estimular o leitor a experimentá-la. Destacamos, ainda, o uso na topografia, com o cálculo da largura de um rio, na engenharia, com o cálculo da altura de um edifício e na medição de distâncias inacessíveis. Finalizou-se o capítulo com aplicações das razões trigonométricas em problemas de provas comuns realizadas pelos alunos como vestibulares, exames de acesso a escolas técnicas e, como desafio, em questões de exames de acesso ao Profmat.

Deseja-se, portanto, estimular o interesse dos alunos pela matemática, de forma que possam ver sua utilidade prática e, acima de tudo, que docentes e discentes possamos entender a necessidade de um estudo mais contextualizado da trigonometria, tanto do ponto de vista histórico, uma vez que ela tanto contribuiu para o progresso da humanidade, quanto de sua aplicabilidade. Desta forma, espera-se que a pesquisa tenha cumprido seu objetivo e que os leitores se sintam motivados a continuar seus estudos sobre esse tema.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 257p. (Coleção do Professor de Matemática)

[2] BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. 3. ed. Tradução de Elza F. Gomide. 496 p. São Paulo, SP: Blucher, 2010.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: SEF/MEC, 1998.

[5] BRASIL, Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: terceiro e quarto ciclos. Brasília. SEF/MEC, 1998.

[6] BRASIL, Secretaria de Educação Básica. *Matemática não é problema*. Brasília: MEC, 2005.

[7] BRASIL, Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: Matemática. Brasília: SEF/MEC, 2000.

[8] CARMO, Manfredo Perdigão do.; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria / Números Complexos*. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[9] COSTA, Nielce M. Lobo. A história da Trigonometria. *Educação Matemática em Revista*, Brasília, Ano 10, n.13, p.60-69, mar. 2003.

[10] COSTA, Nielce M. Lobo. *Funções Seno e Cosseno*: Uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental"e do Computador. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

[11] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: da teoria à prática. 2 ed., Campinas-SP: Papirus, 1997.

[12] D'AMBROSIO, Ubiratan. *A História Da Matemática*: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexos na Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

[13] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 9*: Geometria Plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[14] ESPÍRITO SANTO, Secretaria de Educação. *Currículo Básico da Escola Estadual.* 8v. Vitória: SEDU, 2009.

[15] EVES, Howard. *Introdução da história da matemática.* 5a ed. Tradução de Hygino H. Domingues. 843p. Campinas: Unicamp, 2011.

[16] IEZZI. Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar 3*: Trigonometria. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[17] KENNEDY, Edward. S. *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula*: trigonometria (v.5). 6. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

[18] LIMA, Elon. Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro: Lamgraf Artesanato Gráfico Ltda., 1991.

[19] LIMA, Elon. Lages. et al. *Temas e problemas elementares.* 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.225p. (Coleção do Professor de Matemática)

[20] MIGUEL, Antonio. *As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão*: Argumentos Reforçadores e Questionadores. São Paulo: Editora Zetetiké, 1997.

[21] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Geometria.* 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 471p. (Coleção PROFMAT).

[22] NOÉ, Marcos. Construindo um teodolito. *Brasil Escola*, 2020. Disponível em: <https:// educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/construindo-um-teodolito.htm>. Acesso em: 13 de maio. de 2020.

[23] OLIVEIRA, Vanessa Castro; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. *A História da Matemática e o Processo de Ensino Aprendizagem.* In: XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, Bagé: UNIPAMPA, p. 459 – 462, 2014.

[24] POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de janeiro: Interciência, 1978.

[25] REIS, Fabiana dos. *Uma Visão Geral Da Trigonometria*: História, Conceitos e Aplicações. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016.

[26] STRATHERN, Paul. *Pitágoras e seu Teorema em 90 minutos*; tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

[27] VIANNA, João José Luiz. *Elementos de Arithmetica.* 11 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1906.

Apêndice A

Tabela Trigonométrica

Figura A.1: Tabela Trigonométrica

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1
46°	0,7193	0,6947	1,0355

Figura A.2: Tabela Trigonométrica continuação

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1	0	—