

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Tales Augusto Oliveira Gomes

Estudo de soluções de buraco negro e buraco de minhoca na teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar

Vitória

2023

Tales Augusto Oliveira Gomes

Estudo de soluções de buraco negro e buraco de minhoca na
teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Física do Centro de Ciências
Exatas da Universidade Federal do Espírito
Santo como requisito parcial para a obtenção
do grau de Mestre em Física, na área de con-
centração de Física Teórica

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris
Coorientador: Prof. Dr. Denis Campos Rodrigues

Vitória
2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

G633e Gomes, Tales Augusto Oliveira, 1998-
Estudo de soluções de buraco negro e buraco de minhoca na teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar / Tales Augusto Oliveira Gomes. - 2023.
135 f. : il.

Orientador: Júlio César Fabris.

Coorientador: Denis Campos Rodrigues.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Buracos negros. 2. Buracos de minhoca. 3. Referencial de Einstein. 4. Referencial de Jordan. 5. Teorias escalares tensoriais. 6. Campo escalar. I. Fabris, Júlio César. II. Rodrigues, Denis Campos. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

“Estudo de soluções de buraco negro e buraco de minhoca na teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar”

TALES AUGUSTO OLIVEIRA GOMES

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
gov.br FELIPE TOVAR FALCIANO
Data: 09/08/2023 10:26:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano
(CBPF)

Documento assinado digitalmente

gov.br JUNIOR DINIZ TONIATO
Data: 08/08/2023 09:55:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Júnior Diniz Toniato
(UFES)

Documento assinado digitalmente

gov.br MARTIN GUSTAVO RICHARTE
Data: 07/08/2023 15:18:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Martin Gustavo Richarte
(UFES)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
(Orientador - PPGFis)

Prof. Dr. Jaziel Goulart Coelho
(PPGFis/UFES)

Documento assinado digitalmente

gov.br DENIS CAMPOS RODRIGUES
Data: 07/08/2023 13:44:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Denis Campos Rodrigues
(Coorientador - UFES)

Vitória-ES, 05 de maio de 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JAZIEL GOULART COELHO - SIAPE 1040921
Departamento de Física - DF/CCE
Em 07/08/2023 às 14:22

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/764995?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JULIO CESAR FABRIS - SIAPE 297051
Departamento de Física - DF/CCE
Em 08/08/2023 às 10:05

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/765476?tipoArquivo=O>

à minha família

Agradecimentos

Agradeço aos professores da Pós-graduação em Física da UFES, aos meus pais e a todos os meus amigos por todo suporte.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES).

Resumo

A existência de soluções carregadas de buraco negro e buraco de minhoca em teorias escalares tensoriais gerais é bastante explorado na literatura, sendo tais soluções, em geral, somente possíveis para um valor negativo pro termo cinético do campo escalar. Neste trabalho classificamos e analisamos as soluções carregadas de buracos negros e buracos de minhocas no sistema de Einstein-Maxwell na presença de um campo escalar, minimamente acoplado e sem massa. Essas soluções descrevem buracos de minhoca, singularidades nuas e uma classe restrita de buracos negros que podem conter até dois horizontes de eventos com área superficial infinita e uma singularidade do tipo tempo. Tais soluções se encontram no referencial de Einstein, sendo possível mapeá-las no referencial de Jordan, onde o campo escalar apresenta um acoplamento não mínimo com a geometria, por uma transformação conforme. As soluções classificadas neste trabalho possuem algumas especificidades com respeito às soluções encontradas no referencial de Jordan, discutidas no texto.

Palavras-chave

Buracos Negros, Buracos de Minhoca, referencial de Einstein, referencial de Jordan, Teorias Escalares Tensoriais, Campo Escalar.

Abstract

The existence of charged black hole and wormhole solutions in general tensor-scalar theories has been extensively explored in the literature, with such solutions generally only possible for a negative value of the scalar field's kinetic term. In this work, we classify and analyze charged black hole and wormhole solutions in the Einstein-Maxwell system in the presence of a minimally coupled, massless scalar field. These solutions describe wormholes, naked singularities, and a restricted class of black holes that can have up to two event horizons with infinite surface area and a time-like singularity. These solutions are found in the Einstein frame and can be mapped to the Jordan frame, where the scalar field exhibits a non-minimal coupling to the geometry through a conformal transformation. The classified solutions in this work possess certain specificities compared to the solutions found in the Jordan frame, as discussed in the text.

Keywords

Black Holes, Wormholes, Einstein's frame, Jordan's frame, Scalar Tensor Theories, Scalar Field.

Lista de Figuras

2.1	Cones de Luz formado por vetores nulos em um ponto p e Σ uma hipersuperfície a $t = constante$. Dentro dos cones temos vetores do tipo tempo, enquanto, fora temos vetores do tipo espaço.	12
2.2	Esquema representativo da variação do vetor V^μ ao longo da curva.	14
3.1	Coordenadas nulas em Minkowski. A interseção de uma superfície $v = constante$ com uma superfície $w = constante$ é uma esfera bidimensional. A coordenada $v(w)$ pode ser considerada como ondas esféricas entrantes (saindo) que viajam à velocidade da luz; elas são coordenadas de tempo avançadas (retardadas).	38
3.2	Diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo de Minkowski.	39
3.3	Gráficos do potencial efetivo para as geodésicas na solução de Schwarzschild. No gráfico à esquerda a curva laranja é para $\mathcal{E} = 1$, azul é para $\mathcal{E} = 0$ e verde é para $\mathcal{E} = -1$. As linhas verticais indicam a posição do horizonte de eventos e o raio da esfera de fótons, respectivamente. No gráfico à direita as curvas são para diferentes valores do parâmetro de impacto, sendo $b = 3, 2, 2\sqrt{3}, 3, 8$ e $4, 1$ de baixo para cima. Enquanto as linhas verticais indicam o horizonte e a última órbita estável.	42
3.4	Gráfico das coordenadas nulas de Schwarzschild. As linhas azuis representam a coordenada v , enquanto as vermelhas a w	44
3.5	Diagrama de Kruskal para solução de Schwarzschild. As linhas vermelhas representam a singularidade, enquanto as pretas o horizonte de eventos. As linhas tracejadas representam as curvas com $r = constante$ nas regiões interna e externa ao horizonte.	45
3.6	Diagrama de Carter-Penrose para a solução de Schwarzschild. As áreas I e I' correspondem a regiões externas do buraco negro ($r > 2m$), a área II a região interna ($r < 2m$) e a área II' é a inversão temporal do buraco negro, também conhecido como buraco branco.	46

3.7	Gráfico do potencial efetivo para as geodésicas em cada caso da solução de Reissner-Nordström. Sendo $m^2 > q^2$ na figura superior esquerda, $m^2 = q^2$ na superior direita e $m^2 < q^2$ nas inferiores. As linhas verticais em cada caso indicam os horizontes. E os possíveis raios para órbitas circulares de fótons. Em todos os casos, a curva laranja é para $\mathcal{E} = 1$, a azul é para $\mathcal{E} = 0$ e a verde para $\mathcal{E} = -1$	50
3.8	Coordenadas nulas nos espaços-tempos de Reissner-Nordström, sendo a figura superior esquerda o caso $m^2 > q^2$, a figura superior direita o caso $m^2 = q^2$ e as duas inferiores o caso $m^2 < q^2$, onde, a esquerda temos $q = 1.15m$ e a direita $q = 1.05m$	51
3.9	Diagrama CP da solução de Reissner-Nordström caso não extremo, $m^2 > q^2$	53
3.10	Diagrama CP da solução de Reissner-Nordström caso extremo (esquerda), $m^2 = q^2$ e caso de singularidade nua (direita), $m^2 < q^2$	54
3.11	Diagrama CP para soluções de Buraco de Minhoca com duas regiões assintóticas. As regiões I e I' podem ser dois universos diferentes ou partes distantes do mesmo universo. A linha tracejada no meio representa a garganta do Buraco de Minhoca.	56
4.1	Gráfico do campo escalar para métrica (4.41). A linha vertical vermelha indica o horizonte de eventos.	69
4.2	Gráficos do potencial efetivo para geodésicas nulas (esquerda) e do tipo tempo (direita), no caso em que a é par. A linha vertical vermelha separa as regiões interna e externa ao horizonte de eventos, enquanto a linha vertical tracejada indica um mínimo da função. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 2$, $h = 4$ e $L = 1$	71
4.3	Cones de Luz na solução de anti-Fisher para $a = 2$. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $h = 2$	72
4.4	Gráficos do potencial efetivo para geodésicas nulas (esquerda) e do tipo tempo (direita), no caso em que a é ímpar. A linha vertical vermelha separa as regiões interna e externa ao horizonte de eventos, enquanto a linha vertical tracejada indica um mínimo da função. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 2$, $h = 6$ e $L = 1$	72
4.5	Cones de Luz na solução de anti-Fisher para $a = 3$. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $h = 3$	73

4.6	Gráficos de algumas funções métricas de (4.50). Os dois gráficos mais acima são das funções métricas $e^{2\gamma}$ (esquerda) e $e^{2\beta}$ (direita). Os dois gráficos ao centro são do potencial efetivo para geodésicas nulas (esquerdo) e do tipo espaço (direito). A baixo temos as densidades de energia e pressão próximo a garganta (esquerda) e o comportamento do campo escalar (direita). A linha pontilhada, em todos os casos, indica a posição da garganta do buraco de minhoca.	74
5.1	Gráfico dos campos escalar e elétrico para $a = 2$. As linhas verticais vermelhas indicam a singularidade enquanto as escuras os horizontes. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $\lambda = 2$, $k = 1$ e $m = 3$	89
5.2	Gráfico do escalar de Kretschmann (esquerda) e do potencial efetivo (direita) para a primeira solução de buraco negro (5.60) com $a = 2$. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades enquanto as linhas mais escura os horizontes. Os valores usados para os parâmetros foram: $\lambda = 2$, $k = 1$, $m = 3$, $\mathcal{E} = 0$ e $L = 1$	89
5.3	Cones de Luz na primeira solução de buraco negro da teoria de Einstein-Maxwell na presença de um campo escalar para $a = 2$ (caso par). Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $\lambda = 2$	90
5.4	Gráfico dos campos escalar e elétrico para $a = 3$. A linha vertical vermelha indica a posição da singularidade, enquanto a escura indica o horizonte de eventos. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $\lambda = 3$, $k = 1$ e $m = 4$	91
5.5	Gráfico do escalar de Kretschmann (esquerda) e do potencial efetivo (direita) para a primeira solução de buraco negro (5.60) com $a = 3$. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades enquanto as linhas mais escura os horizontes. Os valores usados para os parâmetros foram: $\lambda = 3$, $k = 1$, $m = 4$, $\mathcal{E} = 0$ e $L = 1$	91
5.6	Cones de Luz na primeira solução de buraco negro da teoria de Einstein-Maxwell na presença de um campo escalar para $a = 3$ (caso par). Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $\lambda = 3$	92
5.7	Gráfico dos campos escalar e elétrico para a solução (5.69). A linha vertical vermelha indica a posição da singularidade, enquanto a escura indica o horizonte de eventos. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $\lambda = 3$, $k = 1$ e $m = 4$	93

5.8	Gráfico do escalar de Kretschmann (esquerda) e do potencial efetivo (direita) para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.	94
5.9	Cones de Luz na segunda solução de buraco negro da teoria de Einstein-Maxwell na presença de um campo escalar. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $\lambda = 1$ e $m = 2$	94
5.10	Gráfico do campo escalar para as soluções de buraco de minhoca. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $C = 1$ e $k = 2$	95
5.11	Gráfico das funções temporal, radial, campo escalar, campo elétrico para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.	96
5.12	Gráfico da densidade de energia $\epsilon(y)$, da densidade de matéria, $\rho(y)$, e da pressão radial $P_r(y)$ para a primeira solução de buraco de minhoca. A linha tracejada indica a posição das gargantas.	97
5.13	Gráfico das funções temporal, radial, campo escalar, campo elétrico para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.	98
5.14	Gráfico da densidade de energia $\epsilon(y)$, da densidade de matéria, $\rho(y)$, e da pressão radial $P_r(y)$ para a segunda solução de buraco de minhoca. A linha tracejada indica a posição das gargantas.	99
5.15	Gráfico das funções temporal, radial, campo escalar, campo elétrico para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.	100
5.16	Gráfico da densidade de energia, matéria e a pressão radial para a terceira solução de buraco de minhoca.	100
A.1	Imagens formadas no limite $\rho \rightarrow a, b$ e para $ x < \infty$, sendo às duas da esquerda para $f > 0$ e as da direita para $f < 0$	108
A.2	Imagens formadas no limite $\rho \rightarrow a, b, \rho_i$ e para $ x \rightarrow \infty$, sendo às duas da esquerda para $f > 0$ e as da direita para $f < 0$	109
A.3	Exemplos de formas de adicionar as linhas, que representara as transições entre horizontes. As linhas que encostam em outras representaram os horizontes e as setas indicam as direções das transições. A letra R indica as regiões onde $f(\rho) > 0$ (do tipo R) e a letra T as regiões com $f(\rho) < 0$ (do tipo T).	109

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Teoria da Relatividade Geral	6
2.1 Fundamentação matemática	6
2.1.1 Variedade, vetores e tensores	6
2.1.2 Métrica	9
2.1.3 Derivada covariante	12
2.1.4 Curvatura	15
2.1.5 Geodésicas	18
2.1.6 Desvio geodésico	19
2.1.7 Simetrias e Vetores de Killing	21
2.1.8 Hipersuperfícies	22
2.2 Relatividade Geral	25
2.2.1 Ação de Einstein-Hilbert	25
2.2.2 Geodésicas em Relatividade Geral	26
2.2.3 Campos não gravitacionais	28
3 Espaços-tempos Estáticos e Esfericamente Simétricos	30
3.1 Sistema de Coordenadas	30
3.2 Invariantes de Curvatura	31
3.3 Geodésicas no espaço-tempo estático e esfericamente simétrico	32
3.4 Singularidades, planeza assintótica e horizontes	35
3.5 Espaço-tempo de Minkowski	37
3.6 Buracos Negros e Buracos de Minhoca	40
3.6.1 Solução de Schwarzschild	40
3.6.2 Solução de Reissner-Nordström	47
3.6.3 Ponte de Einstein-Rosen	52

3.6.4	Buracos de Minhoca	54
3.7	CrITÉrios de Seleção de Buracos Negros e Buracos de Minhoca	56
4	Teorias Escalar Tensoriais	59
4.1	Transformação Conforme	60
4.2	Soluções de vácuo na presença de campo escalar sem massa	62
4.3	Classificação das soluções de Fisher e anti-Fisher	65
4.4	Análise das soluções de anti-Fisher	68
4.4.1	Buraco Negro Frio	68
4.4.2	Buraco de Minhoca	72
5	Soluções estáticas e esfericamente simétricas na teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar	75
5.1	Equações de Campo e Solução Geral	75
5.1.1	Limites para soluções conhecidas	79
5.2	Classificando as Soluções	80
5.3	Buracos Negros frios carregados	86
5.3.1	Primeira Solução de Buraco Negro	86
5.3.2	Segunda Solução de Buraco Negro	92
5.4	Buracos de Minhoca	94
6	Conclusões	101
	Bibliografia	104
A	Apêndices	108
A.1	Método de Construção do Diagrama de Carter-Penrose	108
A.2	Condição de Energia	110
A.3	Termodinâmica de Buracos Negros	111
A.4	Classificação das soluções carregadas da teoria de Brans-Dicke	113

Introdução

A teoria da relatividade geral de Einstein é a teoria de gravitação mais bem sucedida que temos. Ela nos forneceu uma nova forma de interpretar os efeitos da gravitação, comparada à gravitação universal de Newton, nela temos uma descrição para gravidade como um efeito geométrico do espaço-tempo. Publicada em 1915, a relatividade geral descreve a relação da curvatura do espaço-tempo com sua energia através das equações de campo de Einstein, um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. Tal teoria foi capaz de explicar a precessão do periélio de Mercúrio, e até descrever fenômenos que a física newtoniana não consegue explicar, como o desvio da luz por objetos massivos e as ondas gravitacionais, ambos confirmados observacionalmente. Em especial, a primeira detecção das ondas gravitacionais foi feita em 2015, cem anos depois da publicação do artigo de Einstein, pelos detectores LIGO e VIRGO [1]. Outras previsões desta teoria incluem a existência de objetos com propriedades interessantes, sendo eles: os buracos negros e buracos de minhoca. Os buracos negros são regiões do espaço-tempo onde a densidade de matéria é tão grande, gerando uma curvatura tão intensa, que a partir de uma certa região, chamada de horizonte de eventos, nenhuma partícula conseguiria escapar, enquanto os buracos de minhoca seriam como pontes que conectam duas regiões distantes do espaço-tempo.

Em 1916, o físico alemão Karl Schwarzschild encontrou a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein [35], infelizmente falecendo no mesmo ano devido a complicações da Primeira Guerra Mundial. A solução de Schwarzschild descreve o espaço-tempo na região externa de uma distribuição esfericamente simétrica e estática. Uma importante característica dessa solução é o raio de Schwarzschild, uma região do espaço-tempo que divide uma parte interna de uma externa. Essa solução é a primeira a descrever um buraco negro, uma singularidade protegida pelo horizonte de eventos, com apenas um parâmetro (sua massa). Após Schwarzschild, diversas outras soluções de buracos negros foram encontradas, em especial as soluções de Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman. No meio do século XX, o estudo de buracos negros começou a se consolidar como uma linha independente de investigação. Na década de 1970, o estudo da termodinâmica desses objetos começou a apresentar resultados com os trabalhos de Jacob D. Bekenstein [2] e Stephen W. Hawking [29], que definiram as leis da termodinâmica dos

buracos negros, sua temperatura e entropia. Hawking também provou que buracos negros poderiam evaporar por meio de um processo de criação de partículas a partir do vácuo quântico [31], gerando uma radiação que leva seu nome. Esse objeto foi considerado por um longo período objeto puramente teórico, até que a primeira imagem de um buraco negro foi revelada pelo EHT (Event Horizon Telescope) [13]. Esse projeto de colaboração internacional também revelou uma imagem do buraco negro supermassivo no centro de nossa galáxia [14], deixando poucas dúvidas sobre a existência de buracos negros.

No mesmo ano em que a solução de Schwarzschild foi publicada, Ludwig Flamm [24] publicou um artigo em que ele observou que o espaço-tempo de Schwarzschild poderia descrever uma “ponte” entre dois universos ou partes distantes do mesmo universo, o que corresponderia à ideia moderna de um buraco de minhoca. Em 1935, Einstein e seu colega Nathan Rosen foram os primeiros a levar a ideia de Flamm a sério e tentaram construir um modelo geométrico para uma partícula fundamental que não tivesse singularidades [20]. Para isso, eles removeram a singularidade da solução de Schwarzschild, obtendo uma configuração de espaço-tempo que tinha a característica de uma ponte entre duas regiões assintoticamente distintas, conhecida como ponte de Einstein-Rosen. No entanto, John Archibald Wheeler e Robert W. Fuller demonstraram [25] que a ponte de Einstein-Rosen é instável e entraria em colapso mais rapidamente do que o tempo necessário para a luz atravessá-la.

Após o trabalho de Einstein-Rosen, o tema foi abandonado por cerca de vinte anos, até o trabalho de Misner e Wheeler em 1957 [32], no qual o termo “buraco de minhoca” foi introduzido e o tema voltou a ser discutido, levando a diversas soluções de buracos de minhoca. Uma das soluções mais simples que descreve esse tipo de espaço-tempo foi obtida, de forma independente, por K. Bronnikov e F. Ellis [5, 21], usando um sistema de vácuo na presença de um campo escalar livre do tipo fantasma com energia negativa. No entanto, essa solução apresenta um problema para um objeto que tente atravessá-la, pois a força de maré poderia destruí-lo. Além disso, essa solução é instável, o que significa que pequenas perturbações podem destruir toda a configuração.

A ideia de buracos de minhoca atravessáveis foi abordada no trabalho de Morris e Thorne de 1988 [33] como uma ferramenta matemática para o ensino da relatividade geral, descrevendo o que seria necessário para uma civilização avançada construir um buraco de minhoca que fosse de fato atravessável. O que podemos concluir a partir dos estudos desses objetos é que sua existência exigiria uma forma de matéria “exótica” que

violasse as condições de energia, possuindo uma pressão negativa necessária para sustentar a “garganta” do buraco de minhoca aberto¹. Até o momento, não conhecemos nenhum tipo de matéria que possua tais propriedades, embora existam candidatos como a constante cosmológica e o efeito Casimir. Apesar de serem objetos muito interessantes, os buracos de minhoca continuam sendo puramente teóricos.

Soluções de buracos negros (BN) e buracos de minhoca (BM) já foram encontradas em relatividade geral na presença de vários campos e em diversas teorias de gravidade modificada. Os campos escalares são os mais simples que podemos adicionar à relatividade geral. No entanto, sua presença favorece o surgimento de singularidades nuas (soluções com uma singularidade na ausência de um horizonte de eventos) em vez de BN e BM, a menos que o campo escalar possua energia negativa. Esse comportamento também ocorre em teorias escalares tensoriais, dependendo do acoplamento do campo escalar com a gravitação ou outros campos.

Podemos citar como exemplo a teoria de Einstein-Maxwell-dilaton (relatividade geral na presença de um campo escalar acoplado não minimamente com o campo eletromagnético), que contém soluções de BN e BM apenas para o campo escalar com energia negativa [11, 12, 26, 27]. Campos escalares minimamente acoplados foram considerados pela primeira vez por Fisher [23], levando em conta um campo com energia associada positiva, resultando apenas em soluções com singularidades nuas. Foi Bergmann e Leipnik [3] que primeiro consideraram o campo escalar como sendo fantasma (com energia negativa), o que levou a soluções mais ricas. Essas duas soluções foram redescobertas várias vezes posteriormente.

Um estudo do sistema de vácuo-escalar, incluindo acoplamentos não mínimos, foi realizado por Bronnikov [5], que identificou estruturas de BN e BM. O que se pode observar com esses estudos de configurações escalares é que os BM podem ser atravessáveis, sendo desprovidos de horizontes. No entanto, a densidade de energia em sua garganta seria negativa, enquanto os BN possuiriam propriedades peculiares, como gravidade superficial nula e área superficial infinita. Isso implica, de acordo com a termodinâmica de BN, em uma temperatura Hawking nula e entropia infinita. Esses BN foram denominados buracos negros frios (BNF) devido a essas propriedades.

¹O termo “garganta” refere-se à região de raio mínimo do buraco de minhoca que conecta as diferentes regiões assintóticas

Soluções carregadas da teoria de Brans-Dicke foram extensivamente estudadas em [7]. Nesta teoria, o campo eletromagnético é minimamente acoplado à gravidade, enquanto o campo escalar não é. Todos os BN, BM e singularidades nuas foram identificados, sendo que BN e BM estão presentes somente no caso em que o campo escalar possui energia negativa.

Teorias escalares tensoriais, como a teoria de Brans-Dicke, em que o acoplamento entre o campo escalar e a gravidade é não mínimo, podem ser mapeadas em uma teoria com acoplamento mínimo por meio de uma transformação conforme. Nos casos em que o campo escalar é não minimamente acoplado, dizemos estar trabalhando no referencial de Jordan. Por outro lado, quando é minimamente acoplado, é chamado de referencial de Einstein. As equações geralmente são mais fáceis de serem estudadas e resolvidas no referencial de Einstein. Dessa forma, podemos encontrar soluções no referencial de Jordan por meio de uma transformação conforme de uma solução no referencial de Einstein, e vice-versa.

Neste trabalho, o objetivo foi revisar o problema abordado em [7], estudando e caracterizando as soluções carregadas (na presença de campo eletromagnético) estáticas e esféricamente simétricas, mas no referencial de Einstein. Novamente, os BN e BM são encontrados somente no caso do campo escalar fantasma. Caso contrário, temos apenas singularidades nuas. Além de complementar o estudo realizado em [7], nosso objetivo foi destacar as propriedades das soluções, seu conteúdo físico e o papel desempenhado pela transformação conforme, bem como suas principais consequências na transição do referencial de Jordan para o de Einstein.

Por exemplo, ao contrário do caso original de Brans-Dicke, com seus diferentes tipos de estruturas de BN, existem apenas duas classes possíveis de BNs: uma com dois horizontes e outra com um único horizonte, apresentando características semelhantes ao BN de Reissner-Nordström, não extremo e extremo. Em ambos os casos, a singularidade central é temporal (portanto, repulsiva), o que pode estar relacionado à presença do campo eletromagnético. Ambas as soluções possuem horizontes de eventos com área superficial infinita (chamados de buracos negros frios), o que pode estar associado à presença de um campo escalar fantasma. A classe de soluções de BM também requer um campo escalar fantasma, mas é regular, ou seja, sem horizontes ou singularidades. Esse estudo resultou na publicação de um artigo [22].

No que se segue, no Capítulo 2 é feita uma revisão da fundamentação matemática da relatividade geral, introduzindo alguns conceitos importantes da geometria diferencial. No Capítulo 3, é apresentado o conceito de espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos, e como podemos classificar tais espaços-tempos em BN, BM e singularidades nuas. São revisadas as soluções de buraco negro de Schwarzschild e Reissner-Nordström, bem como a ponte de Einstein-Rosen. No Capítulo 4, discute-se sobre teorias escalares tensoriais, com ênfase nos referenciais de Einstein e Jordan, e como relacionamos esses referenciais. Também é realizada uma análise das soluções de vácuo na presença de um campo escalar livre, apresentando as soluções de Fisher e anti-Fisher. O Capítulo 5 é uma revisão do artigo [22], no qual é feita uma análise das soluções de vácuo na presença de campo escalar livre e campo eletromagnético no referencial de Einstein. Por último, no Capítulo 6, temos a conclusão, na qual são discutidos os resultados deste trabalho.

Teoria da Relatividade

Geral

2.1 Fundamentação matemática

A teoria da relatividade geral é uma teoria geométrica formulada por Einstein em 1915, na qual o espaço e o tempo se tornam uma única entidade geométrica chamada variedade, da qual podemos extrair sua curvatura, relacionada à densidade de matéria e energia por meio das equações de Einstein. Os fundamentos matemáticos da relatividade geral baseiam-se na geometria diferencial e são amplamente abordados em diversos livros e monografias, tais como [15, 30, 34, 36, 38], entre outros. Neste capítulo, são revisados alguns dos principais fundamentos da geometria diferencial necessários para o estudo da teoria de Einstein.

2.1.1 Variedade, vetores e tensores

Vamos começar pelo espaço-tempo, o qual é considerado uma variedade, \mathcal{M} , este objeto é definido como um conjunto de pontos $p \in \mathcal{M}$, onde, para cada ponto, temos uma vizinhança U_p , um subconjunto aberto, e um homeomorfismo (mapeamento que preserva todas as propriedades topológicas do espaço) com o espaço Euclidiano, \mathbb{R}^n , ou seja, pode-se definir um sistema de coordenadas $x^\mu(p)$ ¹ em uma certa vizinhança. Como cada ponto na variedade possui uma vizinhança, onde podemos definir um sistema de coordenadas, a princípio, dois pontos podem não ser mapeados pelo mesmo sistema de coordenadas, ou um ponto pode aceitar mais de um sistema de coordenadas. Considere um ponto qualquer que aceite dois sistemas de coordenada, x^μ e x'^μ , caso exista uma transformação de coordenadas tal que

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \quad x'^\mu = f^\mu(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n), \quad (2.1)$$

¹O índice μ se refere a cada coordenada do ponto e assume os valores de $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ sendo n a dimensão da variedade.

onde f^μ são funções suaves (de classe C^∞ ²) e invertíveis, a variedade é dita diferenciável. Assim a relação de transformação acima, pode ser escrita na forma diferencial da seguinte forma

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (2.2)$$

sendo a matriz $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$ conhecida como matriz jacobiana e utilizando a notação de Einstein, onde sempre que um índice aparecer repetido na expressão subentende-se que há uma soma de 0 até $n - 1$, sendo n a dimensão da variedade.

Para introduzir vetores em variedades diferenciáveis utilizamos a ideia de deslocamento infinitesimal, ou vetor tangente. Considere uma curva suave $x^\mu(\lambda)$ em \mathcal{M} , parametrizada por λ , o vetor tangente a essa curva no ponto p é definido como

$$X^\mu = \frac{dx^\mu(p)}{d\lambda}. \quad (2.3)$$

Aplicando uma transformação de coordenadas neste vetor, temos que ele se transforma da seguinte forma

$$X^\mu(x') = \frac{dx'^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu(x). \quad (2.4)$$

Essa lei de transformação nos define o que chamamos de vetor contravariante. Por outro lado, considerando uma função escalar $h(x^\mu)$, podemos, a partir dela, definir outro vetor

$$Y_\mu = \frac{\partial h}{\partial x^\mu}, \quad (2.5)$$

que se transforma da seguinte forma

$$Y_\mu(x') = \frac{\partial h}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial h}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} Y_\nu(x). \quad (2.6)$$

Note que a forma que esse vetor se transforma é diferente de (2.4). A quantidade que se transforma conforme a relação acima, é chamada vetor covariante, e a matriz $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ é a inversa da jacobiana. Dessa forma, vetores em variedades diferenciáveis, são definidos a partir de suas leis de transformação. Outra quantidade definida também a partir de suas leis de transformações são os tensores. Pode-se dizer que vetores e escalares são tensores

²Uma função de classe C^∞ é uma função que pode ser diferenciada infinitamente. Funções dessa classe também são chamadas de funções suaves.

de ordem 1 e 0, respectivamente. Tensores de ordem maiores são escritos com mais de um índice, de forma que, um tensor de ordem (k, l) tem o seguinte formato

$$T^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l}. \quad (2.7)$$

Sendo n a dimensão da variedade, o tensor acima possui n^{l+k} componentes. Assim como os vetores, os tensores com apenas índices sobrescritos são chamados contravariantes e os com índices subscritos são covariantes. Porém, os tensores podem ter tanto índices sobrescritos quanto subscritos, nesses casos são chamados tensores mistos. A lei de transformação dessas quantidades é similar à dos vetores, sendo

$$T^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}(x') = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^l \frac{\partial x'^{\mu_a}}{\partial x^{\alpha_a}} \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial x'^{\nu_b}} T^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l}(x). \quad (2.8)$$

Sabendo que os tensores se transformam segundo a expressão acima, é possível provar que a soma e a multiplicação de tensores também é um tensor, ou seja,

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma} = B^{\alpha}_{\beta\gamma} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}, \quad T^{\mu\alpha}_{\nu\beta} = X^{\mu\alpha} Y_{\nu\beta}. \quad (2.9)$$

Outra propriedade importante dos tensores é a simetria com respeito a troca de índices. Dizemos que um tensor é simétrico quando $X_{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha}$, e antissimétrico quando $X^{\mu\nu} = -X^{\nu\mu}$. Dessa forma, podemos estabelecer uma notação que caracterize essas simetrias. Por exemplo, a parte simétrica de um tensor $X_{\mu\nu}$ é dado por

$$X_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}), \quad (2.10)$$

enquanto a parte assimétrica é dado por

$$X_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu}). \quad (2.11)$$

A notação acima só existe para índices de mesma classificação, ou seja, apenas índices contravariantes ou apenas índices covariantes.

Um tensor de ordem (p, q) pode ser reduzido a um tensor de ordem $(p-1, q-1)$ a partir da operação de contração de índices. Dado um tensor misto $T^{\alpha}_{\mu\nu\beta}$, podemos

contrair os índices α e ν para obter o tensor $T_{\mu\beta}$. A contração é equivalente à multiplicação por um delta de Kronecker, definida como

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases} \quad (2.12)$$

logo

$$T^{\alpha}_{\mu\nu\beta}\delta_{\alpha}^{\nu} = T_{\mu\beta}. \quad (2.13)$$

A contração só é possível para índices distintos, covariantes com contravariantes ou vice-versa. Note que caso o tensor seja de ordem $(1,1)$, a contração de seus índices nos fornecerá um tensor de ordem 0 (um escalar), e utilizando da propriedade de multiplicação de tensores (2.9), podemos escrever

$$X^{\alpha}_{\beta}\delta_{\alpha}^{\beta} = X^{\alpha}_{\alpha} = A_{\alpha}B^{\alpha} = \varphi, \quad (2.14)$$

onde φ é um escalar. Logo, a contração de um vetor contravariante por um covariante representa a operação de produto interno entre vetores. Como consequência dessa descrição podemos expressar a ortogonalidade e a norma de vetores como

$$A_{\alpha}B^{\alpha} = 0, \quad A_{\alpha}A^{\alpha} = A^2, \quad (2.15)$$

respectivamente. Porém, para construir um vetor covariante é utilizado uma função escalar de um vetor contravariante dessa forma, temos que com o mesmo vetor contravariante pode-se construir diversos vetores covariantes, dependendo da escolha da função escalar. Isso representa uma degenerescência no conceito de norma, que só é solucionada com a métrica, o qual é um tensor que mapeia unicamente um vetor covariante na sua versão contravariante.

2.1.2 Métrica

Na geometria Euclidiana, a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos, no espaço tri-dimensional, e em coordenadas cartesianas, é escrita como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.16)$$

Podemos escrever a mesma distância em coordenadas esféricas, usando a transformação de coordenadas

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta. \quad (2.17)$$

Assim, a distância ds^2 obtém o seguinte formato

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.18)$$

Dessa forma, com o auxílio da notação tensorial de Einstein, podemos escrever ds^2 como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.19)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é chamado tensor métrico, ou simplesmente métrica, e ela definirá a geometria da variedade, sendo que suas componentes dependem do sistema de coordenadas utilizado. Em geral, uma variedade diferencial dotada de uma métrica nos permite definir a noção de distância. Como a distância entre dois pontos, ds^2 , deve ser um invariante por transformações de coordenadas, temos que

$$ds^2(x') = ds^2(x) \rightarrow g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta, \quad (2.20)$$

logo

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

Conforme a lei de transformação acima, a métrica é um tensor covariante de ordem 2. Ainda temos que, segundo a equação (2.19), $g_{\mu\nu}$ deve ser simétrico com relação à troca de posição dos índices. Dessa forma, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pode ser representado por uma matriz quadrática de ordem n , sendo n a dimensão da variedade. Além disso, o determinante da métrica, $g = \det(g_{\mu\nu})$, deve ser não nulo, permitindo que exista a inversa $g_{\mu\nu}^{-1}$ que satisfaz

$$g_{\mu\beta} g_{\beta\nu}^{-1} = \delta_\mu^\nu. \quad (2.22)$$

Como o delta de Kronecker não depende do sistema de coordenadas, segundo sua definição (2.12), a inversa da métrica $g_{\mu\nu}^{-1}$ deve se transformar da forma inversa de $g_{\mu\nu}$ para que a

expressão acima seja verdadeira. Então, a inversa da métrica é um tensor contravariante de ordem 2, e podemos escrever a relação acima como:

$$g_{\mu\beta}g^{\beta\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (2.23)$$

Considere agora dois vetores, um contravariante e um covariante, definidos a partir das multiplicações

$$X^{\mu} = g^{\mu\alpha}A_{\alpha} \quad \text{e} \quad Y_{\nu} = g_{\nu\beta}A^{\beta}. \quad (2.24)$$

Agora, o produto escalar desses dois vetores, utilizando a propriedade de simetria e a relação (2.23) da métrica, resultará em

$$X^{\mu}Y_{\mu} = g^{\mu\alpha}g_{\mu\beta}A_{\alpha}A^{\beta} = A^{\mu}A_{\mu}, \quad (2.25)$$

onde podemos concluir que

$$A^{\mu} = g^{\mu\alpha}A_{\alpha} \quad \text{e} \quad A_{\mu} = g_{\mu\alpha}A^{\alpha}. \quad (2.26)$$

Então, a métrica não só define a geometria de uma variedade, mas também relaciona de forma única um tensor contravariante com seu equivalente covariante. Em outras palavras, a métrica pode ser usada para “levantar” ou “abaixar” índices. E definindo g como sendo o determinante de $g_{\mu\nu}$,

$$g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (2.27)$$

temos que o elemento de volume na variedade induzido pela métrica é

$$dV = \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n. \quad (2.28)$$

Como a métrica pode ser representado por uma matriz quadrática, portanto, o teorema da inércia de James Sylvester pode ser aplicado. Este teorema afirma que uma transformação de coordenadas não altera o número de componentes diagonais positivas, negativas e nulas de uma matriz quadrática. Por sua vez, as componentes diagonais determinam o que se chama de assinatura da métrica, uma característica independente do sistema de coordenadas. Variedade dotadas de uma métrica onde a assinatura seja unicamente positiva, é chamada de Riemanniana. Caso contrário, se a assinatura da métrica possuir uma ou mais componentes diagonais com entrada negativa, ela é chamada

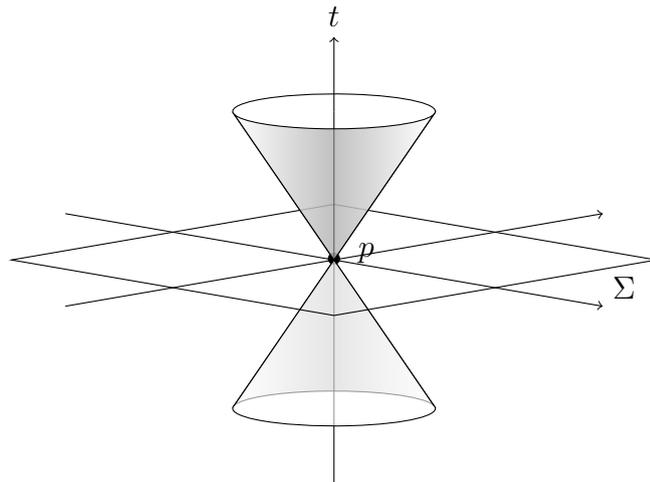


Figura 2.1.: Cones de Luz formado por vetores nulos em um ponto p e Σ uma hipersuperfície a $t = \text{constante}$. Dentro dos cones temos vetores do tipo tempo, enquanto, fora temos vetores do tipo espaço.

Lorentziana ou pseudo-Riemanniana. No caso da relatividade geral, o espaço-tempo é uma variedade diferencial pseudo-Riemanniana quadri-dimensional, onde a métrica possui a assinatura $(-, +, +, +)$, ou $(+, -, -, -)$, a depender da convenção.

Para uma variedade dotada de uma métrica Lorentziana, os vetores não nulos em um certo ponto p podem ser divididos em três classes, sendo vetores do tipo tempo (*timelike*), do tipo espaço (*spacelike*) e do tipo nulo, dependendo se sua norma é positiva, negativa ou nula, respectivamente. Os vetores nulos formam uma cone duplo em p que separa os vetores do tipo tempo e espaço, como mostra a figura 2.1. Estes cones duplos definem os cones de luz de uma partícula, e todos os pontos dentro deste cone estão ligados causalmente.

2.1.3 Derivada covariante

Nessa seção veremos como funcionam as operações diferenciais em vetores e tensores nas variedades diferenciais. Já vimos que a atuação de uma derivada parcial em um escalar gera um vetor covariante (2.5), porém a derivada parcial de um vetor não é um tensor. Isso porque a própria definição de derivada envolve avaliar um objeto em dois pontos distintos, enquanto um tensor é um objeto definido em um ponto da variedade.

Podemos verificar também que a lei de transformação da derivada parcial de um vetor não satisfaz a lei de transformação de um tensor,

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} X^{\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} X^{\beta}(x) + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} X^{\beta}(x). \quad (2.29)$$

Para obter uma operação diferencial que tenha um caráter tensorial, considere um vetor qualquer, $V^{\mu}(x^{\alpha})$, calculado em um ponto x^{α} infinitamente próximo de outro ponto x'^{α} . Como na vizinhança de um ponto sempre podemos considerar que o espaço é euclidiano, dessa forma temos que $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta x^{\alpha}$, sendo $\delta x^{\alpha} \ll x^{\alpha}$. Usando o teorema de Taylor para expandir o vetor V^{μ} em x'^{α} , em primeira ordem,

$$V^{\mu}(x^{\alpha} + \delta x^{\alpha}) \approx V^{\mu}(x^{\alpha}) + V^{\mu}_{,\beta} \delta x^{\beta}, \quad (2.30)$$

onde usamos a notação $V^{\mu}_{,\beta} \equiv \partial V^{\mu} / \partial x^{\beta}$. Agora deslocando paralelamente o vetor V^{μ} de x^{α} até x'^{α} teremos um novo vetor \bar{V}^{μ} , onde

$$\bar{V}^{\mu} = V^{\mu}(x^{\alpha}) + \delta \bar{V}^{\mu}. \quad (2.31)$$

Este novo vetor só pode depender do vetor antigo V^{μ} e da distância δx^{α} , assim escrevemos

$$\delta \bar{V}^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V^{\beta} \delta x^{\alpha}, \quad (2.32)$$

onde $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ é uma quantidade a ser determinada e o sinal negativo é devido à convenção. Tomando a diferença entre o vetor expandido (2.30) e o vetor deslocado (2.31), temos

$$V^{\mu}(x'^{\alpha}) - \bar{V}^{\mu} = V^{\mu}_{,\beta} \delta x^{\beta} - \delta \bar{V}^{\mu} = V^{\mu}_{,\beta} \delta x^{\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V^{\beta} \delta x^{\alpha}. \quad (2.33)$$

Podemos definir agora a derivada covariante do vetor V^{μ} como

$$\nabla_{\alpha} V^{\mu} = \lim_{\delta x^{\alpha} \rightarrow 0} \frac{V^{\mu}(x'^{\alpha}) - \bar{V}^{\mu}}{\delta x^{\alpha}} = \lim_{\delta x^{\alpha} \rightarrow 0} \frac{V^{\mu}_{,\beta} \delta x^{\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V^{\beta} \delta x^{\alpha}}{\delta x^{\alpha}}, \quad (2.34)$$

logo

$$V^{\mu}_{;\alpha} = V^{\mu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V^{\beta}, \quad (2.35)$$

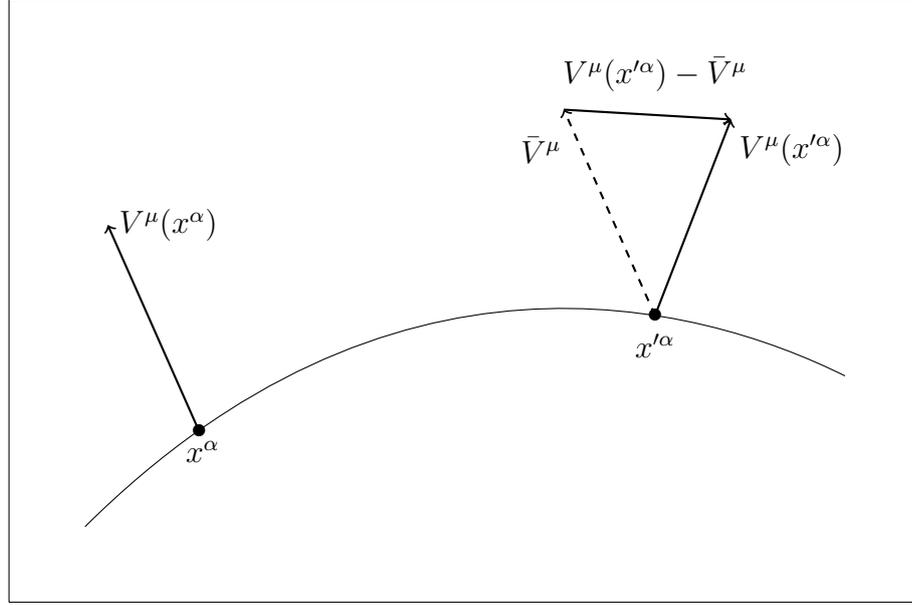


Figura 2.2.: Esquema representativo da variação do vetor V^μ ao longo da curva.

onde é usado a seguinte notação $V^\mu{}_{;\alpha} = \nabla_\alpha V^\mu$. Como buscamos uma operação diferencial que retorne um tensor a quantidade $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ deve se transformar da seguinte forma

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} \Gamma^\lambda_{\epsilon\sigma} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\epsilon}. \quad (2.36)$$

Note que a quantidade $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ não é um tensor, devido sua lei de transformação diferir a de um tensor. Qualquer quantidade que se transforme como a relação acima é chamada conexão. Segunda a lei de transformação da conexão, a sua parte assimétrica se transforma como um tensor de ordem (1, 2),

$$\mathcal{T}^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\alpha}), \quad (2.37)$$

$$\mathcal{T}'^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} \mathcal{T}^\lambda_{\epsilon\sigma}. \quad (2.38)$$

Este tensor é chamado torção e é muito importante, por estar diretamente relacionado com o princípio de equivalência. No caso da torção ser nula pode-se mostrar que a variedade é localmente plana e assim implicaria na anulação local dos efeitos da gravidade. Por outro lado, caso a torção seja não nula temos que a variedade não é localmente plana, e assim não é possível definir um referencial inercial. Devido a isso, a relatividade geral é formulada assumindo que a torção é nula.

Como a derivada parcial de um escalar pode ser usada para definir um tensor de ordem 1, (2.5), a derivada covariante de uma função escalar é a própria derivada parcial,

$$\varphi_{;\alpha} = \varphi_{,\alpha}. \quad (2.39)$$

Também foi mostrado que podemos obter um escalar a partir da contração de dois vetores, $\varphi = A_\mu B^\mu$. Então, da relação acima, exigindo que a derivada covariante satisfaça a regra de Leibniz, temos que

$$A_{\mu;\alpha} B^\mu + A_\mu B^\mu_{;\alpha} = A_{\mu,\alpha} B^\mu + A_\mu B^\mu_{,\alpha}. \quad (2.40)$$

Substituindo a definição da derivada covariante de um vetor contravariante (2.35), obtemos

$$A_{\mu;\alpha} = A_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta A_\beta. \quad (2.41)$$

Semelhantemente podemos deduzir a expressão geral da derivada covariante, usando tensores de diferentes ordens para obter um escalar e assim usar a relação (2.39). Portanto, para um tensor de ordem (l, k) a expressão da derivada covariante desse tensor é

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_k}^{\mu_1, \dots, \mu_l}{}_{;\alpha} = T_{\nu_1, \dots, \nu_k}^{\mu_1, \dots, \mu_l}{}_{,\alpha} + \sum_{i=1}^l \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu_i} (T_{\nu_1, \dots, \nu_k}^{\mu_1, \dots, \mu_l} \delta_{\mu_i}^\lambda) - \sum_{i=1}^k \Gamma_{\nu_i\alpha}^\epsilon (T_{\nu_1, \dots, \nu_k}^{\mu_1, \dots, \mu_l} \delta_\epsilon^{\nu_i}), \quad (2.42)$$

com o delta de Kronecker sendo contraído com o tensor T .

2.1.4 Curvatura

A curvatura de uma dada variedade é a quantidade pela qual uma curva se desvia de ser uma linha reta, ou uma superfície se desvia de ser um plano. Logo, podemos notar que a conexão pode nos fornecer uma ideia de curvatura, dado que ela mede o quanto um vetor falha ao ser transportado paralelamente ao longo de uma curva na variedade. No entanto, este objeto não é um tensor, ou seja, ele não é invariante por transformações de coordenada, fazendo com que ele não forneça uma boa noção de curvatura. Porém, podemos utilizá-lo

para construir uma quantidade invariante que nos forneça uma boa noção de curvatura, tome, por exemplo, a segunda derivada covariante de um vetor qualquer,

$$A^\mu{}_{;\alpha\beta} = (A^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} A^\lambda)_{,\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} (A^\lambda{}_{,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\gamma\alpha} A^\gamma) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} (A^\mu{}_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\gamma\lambda} A^\gamma). \quad (2.43)$$

Comutando os índices α e β , assumindo que as derivadas parciais comutam entre si, $A^\mu{}_{,\alpha\beta} = A^\mu{}_{,\beta\alpha}$, tem-se que

$$A^\mu{}_{;[\alpha\beta]} = -R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} A^\lambda, \quad (2.44)$$

onde é introduzido o tensor de Riemann, definido como

$$R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\lambda\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\lambda\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha}. \quad (2.45)$$

Esta quantidade é de fato invariante por transformações de coordenadas e é nulo para variedades planas. Por essa razão o tensor de Riemann também é usualmente chamado de tensor de curvatura de Riemann.

Para uma variedade de dimensão n , o tensor de Riemann possui n^4 componentes, logo, para $n = 4$ ele terá 256 componentes. Contudo, várias dessas componentes não são independentes, devido às suas simetrias. Usando a métrica para escrever o tensor de Riemann em sua forma covariante, podemos listar suas propriedades como sendo:

- 1 Anti-simétrico nos dois primeiros e últimos índices,

$$R_{(\mu\lambda)\alpha\beta} = R_{\mu\lambda(\alpha\beta)} = 0; \quad (2.46)$$

- 2 Simétrico em relação à troca do primeiro par de índices com o segundo,

$$R_{\mu\lambda\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\lambda}; \quad (2.47)$$

- 3 Para variedades com torção nula, satisfaz a primeira e segunda identidade de Bianchi. A primeira identidade é escrita como

$$R_{[\mu\lambda\alpha]\beta} = \frac{1}{3!} (R_{\mu\lambda\alpha\beta} + R_{\lambda\alpha\mu\beta} + R_{\alpha\mu\lambda\beta} - R_{\lambda\mu\alpha\beta} - R_{\mu\alpha\lambda\beta} - R_{\alpha\lambda\mu\beta}) = 0. \quad (2.48)$$

Onde, usando a primeira propriedade, a identidade acima pode ser escrita como

$$R_{\mu\lambda\alpha\beta} + R_{\mu\beta\lambda\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\lambda} = 0. \quad (2.49)$$

A segunda identidade é similar a primeira, porém envolve a derivada covariante, sendo escrita como

$$\nabla_{[\sigma} R_{\mu\lambda]\alpha\beta} = 0, \quad (2.50)$$

onde podemos usar das propriedades anteriores para escrever a equação acima como

$$R_{\mu\lambda\alpha\beta;\sigma} + R_{\mu\lambda\sigma\alpha;\beta} + R_{\mu\lambda\beta\sigma;\alpha} = 0. \quad (2.51)$$

A partir do tensor de Riemann, podemos definir outras quantidades relacionadas à curvatura de uma variedade. Contraindo o primeiro e terceiro índices com a métrica, obtém-se o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.52)$$

Esse tensor é simétrico por construção. Uma segunda contração com métrica fornece o escalar de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.53)$$

Contraindo os índices da segunda identidade de Bianchi, e usando as propriedades do tensor de Riemann e Ricci, obtém-se a seguinte equação:

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0, \quad \text{onde} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (2.54)$$

O tensor $G_{\mu\nu}$ é conhecido como o tensor de Einstein que, assim como o tensor de Ricci, é simétrico por construção.

Podemos ainda usar o tensor de Riemann para construir o escalar de Kretschmann, definido como a soma dos quadrados de todos os termos não nulos do tensor de Riemann,

$$\mathcal{K} = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.55)$$

Quando estudamos uma variedade, é importante saber se todos esses tensores são finitos, ou seja, se a variedade é regular, em todos os pontos ou se contém alguma singularidade de curvatura, onde pelo menos um deles é infinito. O escalar de Kretschmann,

em muitos casos, é o melhor invariante de curvatura para checar a regularidade da variedade.

2.1.5 Geodésicas

Em uma variedade qualquer, as curvas são caminhos que conectam dois pontos quaisquer. No caso euclidiano, podemos citar as retas, sendo as curvas que representam a menor distância entre dois pontos e tendo o vetor tangente paralelo a ele mesmo em qualquer ponto da curva. Neste caso dizemos que a reta transporta paralelamente seu vetor tangente. Podemos usar a ideia de transporte paralelo para generalizar as retas para variedades mais gerais. Seja $x^\mu(\lambda)$ uma curva em uma variedade qualquer, em que λ é o seu parâmetro, o vetor tangente a essa curva é dado por

$$V^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}. \quad (2.56)$$

Dessa forma, fazendo o transporte deste vetor ao longo da curva, o vetor transportado só será paralelo ao original caso a diferença entre ambos for perpendicular ao vetor tangente inicial, ou seja, o vetor tangente deve satisfazer a seguinte equação,

$$V^\alpha V^\beta_{;\alpha} = 0. \quad (2.57)$$

Usando a definição da derivada covariante,

$$V^\alpha \left(\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta V^\gamma \right) = 0 \quad (2.58)$$

e a definição do vetor tangente, (2.56), ficamos com

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0. \quad (2.59)$$

As curvas que satisfazem esta equação são chamadas geodésicas afim, ou autoparalelas, e neste caso a quantidade $\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta$ é chamada de conexão afim.

Por outro lado, usando a ideia de curva que representar a menor distância entre dois pontos, tendo que em variedades dotadas de uma métrica temos que a distância entre dois pontos é dada pela integral do elemento de linha, (2.19),

$$s = \int \sqrt{ds^2} = \int \sqrt{g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu} d\lambda, \quad (2.60)$$

Dessa forma, podemos usar do formalismo lagrangiano para obter uma equação para esta curva. Para simplificar as contas, podemos utilizar a seguinte integral

$$s' = \int L d\lambda = \int g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu d\lambda, \quad (2.61)$$

que fornecerá o mesmo resultado da variação de (2.60), sendo L a função lagrangiana. A partir da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial V^\mu} \right) = 0, \quad (2.62)$$

obtém-se

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \gamma \end{array} \right\} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (2.63)$$

onde é introduzido o símbolo de Christoffel, definido como

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \gamma \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\gamma\mu,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}). \quad (2.64)$$

As curvas que satisfazem a equação (2.87) são chamadas de geodésicas métricas. Então, a princípio, temos duas classes distintas de curvas em variedades diferenciáveis, as geodésicas afim e geodésicas métricas. No caso em que as duas classes descrevam uma mesma curva identificamos a conexão como sendo o símbolo de Christoffel, e dizemos que a variedade é dotada de uma conexão métrica. A igualdade entre essas quantidades é conhecida como condição de compatibilidade métrica, ou metricidade.

2.1.6 Desvio geodésico

Considere uma família de geodésicas descritas pelas curvas $x^\alpha(s, \tau)$, onde τ é o parâmetro afim das curvas e s especifica a curva geodésica. O vetor $u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}$ é tangente

às geodésicas e satisfaz a equação $u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta = 0$, por outro lado, o vetor $\xi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}$ é tangente ao desvio entre a família de geodésicas caracterizadas por s e ortogonal ao vetor tangente às geodésicas, logo $\xi^\alpha u_\alpha = 0$. Pela definição desses vetores, temos que

$$\frac{du^\alpha}{ds} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \Rightarrow u^\alpha{}_{;\beta}\xi^\beta = \xi^\alpha{}_{;\beta}u^\beta. \quad (2.65)$$

Agora vamos calcular a “aceleração” do vetor de desvio ξ^α ao longo das geodésicas, dada pela segunda derivada do mesmo com respeito ao parâmetro afim da geodésica, ou seja

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = (\xi^\alpha{}_{;\beta}u^\beta)_{;\sigma}u^\sigma, \quad (2.66)$$

e utilizando das relações entre os vetores ξ^α e u^α e a definição do tensor de Riemann (2.44), obtemos que

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha{}_{;\beta}u^\beta)_{;\sigma}u^\sigma &= (u^\alpha{}_{;\beta}\xi^\beta)_{;\sigma}u^\sigma = u^\alpha{}_{;\beta\sigma}\xi^\beta u^\sigma + u^\alpha{}_{;\beta}\xi^\beta{}_{;\sigma}u^\sigma, \\ &= u^\alpha{}_{;\sigma\beta}\xi^\beta u^\sigma - R^\alpha{}_{\mu\beta\sigma}u^\mu\xi^\beta u^\sigma + u^\alpha{}_{;\beta}\xi^\beta{}_{;\sigma}u^\sigma, \\ &= (u^\alpha{}_{;\sigma}u^\sigma)_{;\beta} - u^\alpha{}_{;\sigma}u^\sigma{}_{;\beta}\xi^\beta - R^\alpha{}_{\mu\beta\sigma}u^\mu\xi^\beta u^\sigma + u^\alpha{}_{;\beta}\xi^\beta{}_{;\sigma}u^\sigma. \end{aligned}$$

O primeiro termo da equação acima é nulo devido a equação das geodésicas, enquanto o segundo e o último termo se anulam devido a relação entre os vetores (2.65). Dessa forma, ficamos com

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha{}_{\mu\beta\sigma}u^\mu\xi^\beta u^\sigma. \quad (2.67)$$

Esta é a equação de desvio geodésico, ela nos mostra que a curvatura produz uma “aceleração” relativa entre geodésicas vizinhas, mesmo que elas comecem paralelas.

Vamos introduzir o tensor $B_{\alpha\beta} = u_{\alpha;\beta}$, que mede o quanto o vetor de desvio ξ^α falha em ser transportado paralelamente ao longo da família de geodésicas u^α ,

$$\xi^\alpha{}_{;\beta}u^\beta = B^\alpha{}_{\beta}\xi^\beta.$$

Avaliando a evolução do tensor $B_{\alpha\beta}$ ao longo das geodésicas u^α ,

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\beta;\sigma}u^\sigma &= u_{\alpha;\beta\sigma}u^\sigma, \\
&= (u_{\alpha;\sigma\beta} - R_{\alpha\rho\beta\sigma}u^\rho)u^\sigma, \\
&= (u_{\alpha;\sigma}u^\sigma)_{;\beta} - u_{\alpha;\sigma}u^\sigma{}_{;\beta} - R_{\alpha\rho\beta\sigma}u^\rho u^\sigma, \\
&= -B_{\alpha\sigma}B^\sigma{}_\beta - R_{\alpha\rho\beta\sigma}u^\rho u^\sigma.
\end{aligned}$$

Definindo o escalar de expansão como o traço do tensor $B_{\alpha\beta}$, ou seja, $\theta = g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = u^\alpha{}_{;\alpha}$, temos que sua evolução é dada pela equação

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta. \quad (2.68)$$

Esta equação é conhecida como equação de Raychaudhuri, e descreve a congruência de uma família de geodésicas.

2.1.7 Simetrias e Vetores de Killing

Costumamos pensar em simetrias quando temos uma invariância sob algum grupo de transformação. Então, as simetrias de uma variedade \mathcal{M} estão associadas com os grupos de transformação que deixem invariante suas quantidades tensoriais. Campos tensoriais podem ter diferentes grupos de transformação, porém quanto temos alguma simetria na métrica chamamos de isometria. No contexto de variedade plana, considere a métrica de Minkowski,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.69)$$

podemos identificar duas isometrias desse espaço, a de translação ($x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$) e de Lorentz ($x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$). Podemos identificar uma isometria verificando se a métrica é independente de alguma das coordenadas. Digamos, por exemplo x^b , dessa forma teremos que

$$\partial_b g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.70)$$

para b fixo temos a seguinte simetria: $x^b \rightarrow x^b + a^b$. Isometrias dessa forma possuem consequências na trajetória de partículas testes, pois implica que a componente do vetor tangente à trajetória da partícula na direção x^b é constante.

Seja ξ^μ um vetor onde, se o vetor tangente a uma curva em uma variedade qualquer for constante na direção deste vetor, temos que $\xi^\mu V_\mu = \text{constante}$, e sua derivada direcional será

$$V^\alpha \nabla_\alpha (V^\mu \xi_\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad V^\mu V^\alpha \nabla_\alpha \xi_\mu + \xi_\mu V^\alpha \nabla_\alpha V^\mu = 0. \quad (2.71)$$

Considerando a equação da geodésica e a simetria na troca dos índices α e μ na equação acima, chegamos a

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (2.72)$$

Esta equação é conhecida como equação de Killing e os vetores K_ν são chamados de vetores de Killing sendo responsáveis por gerarem as isometrias. Nesse sentido, se temos um objeto nessa variedade e movemos cada ponto dele na direção do vetor de Killing a distância entre os pontos não se altera.

2.1.8 Hipersuperfícies

Em uma variedade quadri-dimensional podemos definir um hipersuperfície como sendo uma subvariedade, podendo ser tanto do tipo tempo, espaço ou nulo. Uma hipersuperfície específica Σ é selecionada através da imposição de uma restrição nas coordenadas,

$$f(x^\alpha) = 0,$$

ou por uma equação paramétrica na forma

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a),$$

em que $y^a = (y^1, y^2, y^3)$ são as coordenadas intrínsecas de Σ . Por exemplo, uma esfera em um espaço tri-dimensional pode ser descrita por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

ou pela parametrização

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \cos \theta.$$

A partir da função que descreve essa hipersuperfície $f(x^\alpha)$, podemos definir um vetor normal a mesma como $\partial_\mu f(x^\alpha)$. Dessa forma, caso Σ seja não nulo, podemos introduzir o vetor unitário normal a Σ como

$$n_\alpha = \frac{\epsilon f_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} f_{,\mu} f_{,\nu}|^{1/2}}, \quad \Rightarrow \quad n_\alpha n^\alpha = \epsilon, \quad (2.73)$$

sendo $\epsilon = -1$ caso a hipersuperfície seja tipo espaço ou $\epsilon = +1$ caso seja do tipo tempo. Para uma hipersuperfície nula temos que $g^{\mu\nu} f_{,\mu} f_{,\nu} = 0$, por isso não é possível definir um vetor unitário normal para a mesma. Neste caso utilizamos o vetor normal

$$k_\alpha = -f_{,\alpha}.$$

Como k_α é ortogonal a si ($k_\alpha k^\alpha = 0$), este vetor também é tangente à hipersuperfície nula.

Também podemos introduzir uma métrica intrínseca à hipersuperfície Σ restringindo o elemento de linha confinados na mesma. Os vetores tangentes às curvas em Σ são definidos como

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad (2.74)$$

e são ortogonais aos vetores normais, $e_a^\alpha n_\alpha = 0$ e $e_a^\alpha k_\alpha = 0$. Dessa forma, para deslocamentos em Σ , o elemento de linha pode ser escrito como

$$ds_\Sigma^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = h_{ab} dy^a dy^b,$$

sendo

$$h_{ab} = \left(g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} \right), \quad (2.75)$$

a métrica induzida em Σ , ou primeira forma fundamental. Este objeto se comporta como um escalar para transformações $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$, porém se comporta como tensor sob transformações $y^a \rightarrow y^{a'}$. Note que agora podemos escrever a métrica do espaço-tempo como

$$g^{\mu\nu} = \epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab} e_a^\mu e_b^\nu, \quad (2.76)$$

sendo uma parte normal e outra tangente à hipersuperfície Σ .

Os tensores que são puramente tangentes a hipersuperfície podem ser escritos como

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots$$

Essa decomposição implica que este tensor é ortogonal aos vetores normais à Σ , $A^\alpha n_\alpha = A^\beta n_\beta = \dots = 0$. Podemos observar também que os índices latinos “sobem” e “descem” utilizando a métrica induzida. Seja A^α um vetor tangente à Σ , a derivada covariante deste vetor em Σ é definido como

$$A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta,$$

logo

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{ab}^c A_c, \quad \Gamma_{ab}^c = e_a^\alpha e_b^\beta e_\rho^c \Gamma_{\alpha\beta}^\rho. \quad (2.77)$$

A partir desta definição é possível estender para casos mais gerais assim como para a derivada covariante normal (2.42). As quantidades $A_{a|b}$ são as componentes tangentes ao vetor $A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta$, e decompondo este vetor, usando (2.76),

$$A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta = (\epsilon n^\alpha n_\mu + h^{ac} e_a^\alpha e_{c\mu}) A^\mu_{;\beta} e_b^\beta,$$

$$A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta = A^a_{|b} e_a^\alpha + \epsilon n^\alpha n_\mu A^\mu_{;\beta} e_b^\beta,$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é tangente à Σ , enquanto o segundo é normal a ela. Como A^α é ortogonal à n^α ,

$$A^\alpha n_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad A^\alpha_{;\beta} n_\alpha = -A^\alpha n_{\alpha;\beta}, \quad (2.78)$$

e assim obtemos que

$$A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta = A^a_{|b} e_a^\alpha - \epsilon (e^\beta_b e^\mu_a n_{\mu;\beta}) A^a n^\alpha.$$

Agora podemos introduzir a curvatura extrínseca, ou segunda forma fundamental, como

$$K_{ab} = n_{a|b} = n_{\mu;\nu} e^\mu_a e^\nu_b, \quad (2.79)$$

e contraindo com a métrica induzida obtemos

$$K = h^{ab} K_{ab} = n^\alpha_{;\alpha}.$$

que representa a expansão de uma congruência de geodésicas que intersectam a hipersuperfície ortogonalmente (de forma que seu vetor tangente seja igual a n^α na hiper-superfície). Portanto, podemos concluir que a hipersuperfície é convexa se $K > 0$ (a congruência está divergindo) ou côncava se $K < 0$ (a congruência está convergindo).

2.2 Relatividade Geral

2.2.1 Ação de Einstein-Hilbert

Na teoria da relatividade geral, temos que o espaço-tempo é uma variedade quadridimensional pseudo-Riemanniana munida de uma métrica Lorentziana³, $g_{\mu\nu}$, e a curvatura dessa métrica é relacionada com a densidade de energia através das equações de Einstein. A ação do espaço-tempo que gera as equações de Einstein é chamada ação de Einstein-Hilbert,

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{c^4}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right], \quad (2.80)$$

onde R é o escalar de Ricci, \mathcal{L}_m é a densidade de Lagrangiana da matéria e Λ é a constante cosmológica, que pode ser desconsiderada em configurações “locais” (até escalas de aglomerado de galáxias). Assim, a partir do princípio de mínima ação ($\delta S = 0$), e variando a ação (2.80) com respeito a métrica, obtêm-se as equações de dinâmica

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.81)$$

conhecidas como equações de Einstein. A quantidade $T_{\mu\nu}$ é o tensor Energia-Momento definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.82)$$

e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, definido em (2.54). Contraíndo a equação de Einstein, obtém-se

$$-R - 4\Lambda = \kappa T, \quad (2.83)$$

³Uma métrica Lorentziana a coordenada temporal se difere das coordenadas espaciais pela sua assinatura. Neste trabalho é adotado a assinatura $(+, -, -, -)$

e introduzindo esta relação em (2.81) podemos reescrever as equações de Einstein como

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - g_{\mu\nu} \Lambda. \quad (2.84)$$

O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ possui 16 componentes, porém, como ele é simétrico, apenas 10 dessas componentes são independentes. Logo, as equações de Einsteins, a princípio, são compostas por 10 equações diferenciais parciais não lineares acopladas. No entanto, a liberdade de escolha de coordenadas nos permite impor 4 condições arbitrárias para as componentes da métrica, assim ficamos com 6 equações independentes. Por último, como o tensor de Einstein satisfaz a identidade de Bianchi (2.54), temos ainda mais 4 dependências diferenciais, restando apenas duas equações de dinâmica reais independentes. Estas circunstâncias são extremamente importantes para os processos dinâmicos na RG, e isso reflete nas ondas gravitacionais, que podem ter apenas duas polarizações independentes.

2.2.2 Geodésicas em Relatividade Geral

A variação da ação (2.80) com respeito à conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ fornece a equação de compatibilidade métrica,

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.85)$$

que implica na identificação da conexão afim com o símbolo de Christoffel, e assim, as geodésicas, em variedades de Einstein⁴, satisfazem a equação

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0, \quad (2.86)$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \alpha \beta \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\beta} g_{\nu\alpha} + \partial_{\alpha} g_{\beta\nu} - \partial_{\nu} g_{\alpha\beta}), \quad (2.87)$$

e τ é um parâmetro afim que coincide com o tempo próprio da partícula se movendo ao longo da geodésica. Podemos também derivar a equação de movimento da matéria a partir das equações de Einstein e da identidade de Bianchi, que nos fornece a seguinte equação para o tensor Energia-Momento

$$\nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.88)$$

⁴Variedades dotadas de uma métrica que satisfaça as equações de campo de Einstein.

Consideraremos o tensor energia-momento para um fluido perfeito, definido como

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.89)$$

onde u_μ é a quadri-velocidade das partículas do fluido, $\epsilon = \rho c^2$ é a densidade de energia e p sua pressão. No caso particular em que temos um fluido onde suas partículas se movem sem interagir entre si (tal fluido se comportaria como poeira) temos que $p = 0$, logo

$$T_{\mu\nu} = \epsilon u_\mu u_\nu. \quad (2.90)$$

Como as partículas não se interagem, elas iram se mover apenas com a influência da gravidade, portanto suas equações de movimento coincidem com as de partículas livres. Agora, introduzindo o tensor EM descrito acima na equação (2.88), ficamos com

$$u_\mu \nabla^\nu (\epsilon u_\nu) + \epsilon u_\nu \nabla^\nu u_\mu = 0. \quad (2.91)$$

Contraindo a equação acima com u^α , e levando em conta que devido à invariância por transformações de Lorentz temos que $u_\mu u^\mu = \delta^\mu_\mu$, portanto ficamos com duas equações,

$$\nabla^\mu (\epsilon u_\mu) = 0, \quad (2.92)$$

$$u_\mu \nabla^\mu u_\nu = 0. \quad (2.93)$$

A primeira equação é a equação da continuidade, ou equação de conservação de energia, enquanto a segunda é a equação de movimento das partículas. Como a quadri-velocidade é definida como a derivada do quadri-vetor posição x^μ com respeito ao tempo próprio da partícula τ , $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, a equação de movimento pode ser reescrita como (2.86)

Outra forma de obter a equação das geodésicas é a partir do formalismo lagrangiano, identificando que a partir da seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (2.94)$$

obtemos o tensor energia-momento (2.89) no caso $p = 0$, dessa forma, a equação de Euler-Lagrange nos fornece as equações de movimento, (2.86).

2.2.3 Campos não gravitacionais

A descrição de da gravitação utilizando a ação de Einstein-Hilbert, nos permite introduzir diversos campos de matéria na ação e assim identificar como esses campos alteram as configurações do espaço-tempo. O campo mais simples que podemos introduzir na ação (2.80) é o campo escalar Φ , com uma autointeração dada pelo potencial $V(\Phi)$. A Lagrangiana que descreve tal campo é definida como

$$\mathcal{L}^\Phi = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Phi\nabla_\beta\Phi + V(\Phi), \quad (2.95)$$

e sua variação com respeito ao campo escalar fornece a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo,

$$\square\Phi + \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} = 0, \quad (2.96)$$

sendo \square o operador d'Alambertiano, definido como

$$\square = \nabla^\alpha\nabla_\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta). \quad (2.97)$$

O potencial $V(\Phi)$ irá descrever a massa do campo escalar, sendo o caso sem massa para $V(\Phi) = 0$. O tensor Energia-Momento para um campo escalar, segundo sua definição, é escrito como

$$T^\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\Phi\partial^\alpha\Phi - V(\Phi)\right). \quad (2.98)$$

Outro campo de matéria que podemos adicionar na ação de Einstein Hilbert é o campo eletromagnético que descreve o movimento de partículas carregadas e do fóton. No eletromagnetismo de Maxwell, os campos elétrico e magnético são vetores espaciais descritos pelas equações de Maxwell. Agora, em relatividade geral, esses campos são combinados em um único tensor antissimétrico chamado tensor de Maxwell, definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.99)$$

sendo A_μ é o quadri-potencial. A Lagrangiana que descreverá o comportamento do campo eletromagnético em um espaço-tempo curvo longe da fonte, é escrita como

$$\mathcal{L}^{EM} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.100)$$

As equações de Maxwell neste contexto são escritas como

$$\nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0, \quad \text{e} \quad \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.101)$$

A primeira equação é uma identidade do tensor de Maxwell devido sua definição, enquanto a segunda equação é obtida a partir da variação da Lagrangiana \mathcal{L}_{em} . O tensor Energia-Momento para o campo eletromagnético é

$$T^{EM}_{\mu\nu} = -F_{\mu\sigma} F^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.102)$$

Quando consideramos a ação (2.80) junto com a lagrangiana do campo eletromagnético, chamamos o conjunto de equações resultantes de teoria de Einstein-Maxwell. De forma geral, todo tipo de matéria (ou campo) pode ser associado a uma densidade de lagrangiana para adicionar na ação da teoria e assim definir um tensor Energia-Momento para o mesmo. À vista disso, podemos estudar o efeito de diferentes campos na geometria do espaço-tempo (gravitação) a partir das equações de campo geradas pelo princípio de mínima ação.

Espaços-tempos Estáticos e Esfericamente Simétricos

3.1 Sistema de Coordenadas

Quando estudamos soluções estáticas e esfericamente simétricas, é útil utilizarmos a métrica no seguinte formato

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} du^2 - e^{2\beta} d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.1)$$

Onde α , β e γ são funções da coordenada radial u e da coordenada temporal t . Outra notação muito usada também é $r \equiv e^{2\beta}$, em que r representa o raio de uma esfera em $u = \text{constante}$ e $t = \text{constante}$. No caso estático, podemos escolher um referencial tal que as funções métricas α , β e γ são funções apenas da coordenada radial. A métrica acima, ainda possui a liberdade de escolha de referencial, ou seja, de um sistema de coordenadas. Essa liberdade se expressa na escolha de uma relação para as funções métricas α , β e γ .

Dependendo do problema que se quer resolver, diferentes sistemas de coordenadas podem ser convenientes, para melhor interpretação das soluções. No caso da relatividade geral, um sistema de coordenadas importante é o de Schwarzschild, representado por

$$u = r, \quad \alpha = -\gamma \quad \text{e} \quad \beta = \ln r. \quad (3.2)$$

Alguns outros sistemas de coordenadas importantes são:

- $\alpha = -\gamma$: Coordenadas quasi-globais, mais adequado para o estudo de buracos negros e buracos de minhoca;
- $\alpha = \gamma$: Coordenadas tartaruga, em que a métrica do subespaço (t, u) toma uma forma conformalmente plana, que simplifica a análise de equações de onda;

- $\alpha = \gamma + 2\beta$: Coordenadas harmônicas, utilizada em problemas com campo escalar, por simplificar as soluções da equação de Klein-Gordon no espaço curvo.

3.2 Invariantes de Curvatura

Apresentaremos a forma de algumas quantidades geométricas para uma métrica estática, esféricamente simétrica, em um sistema de coordenadas arbitrário (sem especificar a relação entre as funções métricas). Para obter essas quantidades em uma coordenada específica, como as citadas acima, basta substituir a condição correspondente.

Primeiramente temos que obter os símbolos de Christoffel. E assim, com essa quantidade em mãos podemos construir os tensores de Ricci e Einstein, e seus respectivos escalares, assim como o escalar de Kretschmann. Então, para a métrica (3.1), os termos não nulos do símbolo de Christoffel serão

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{10} &= \gamma', & \Gamma^1_{00} &= e^{-2\alpha+2\gamma}\gamma', & \Gamma^1_{11} &= \alpha', & \Gamma^1_{22} &= -e^{-2\alpha+2\beta}\beta', & \Gamma^1_{33} &= \Gamma^1_{22} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2_{21} &= \Gamma^3_{31} = \beta', & \Gamma^2_{33} &= -\cos \theta \sin \theta, & \Gamma^3_{32} &= \cot \theta,\end{aligned}$$

onde ' representa derivada com respeito à coordenada u . Os termos do tensor de Riemann, utilizando as quantidades acima, são

$$\begin{aligned}R^0_{101} &= \gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha), & R^0_{202} &= \gamma'\beta'e^{2\beta-2\alpha}, \\ R^0_{303} &= -R^0_{202} \sin^2 \theta, & R^1_{212} &= e^{2\beta-2\alpha} [\beta'' + \beta'(\beta' - \alpha')], \\ R^1_{313} &= R^1_{212} \sin^2 \theta, & R^2_{323} &= (e^{2\beta-2\alpha}\beta'^2 - 1) \sin^2 \theta.\end{aligned}\tag{3.3}$$

E assim, os termos não nulos do tensor de Ricci são escritos como

$$\begin{aligned}R_{00} &= e^{2\gamma-2\alpha} [\gamma'' - \gamma'(\alpha' - \gamma' - 2\beta')], \\ R_{11} &= -\gamma'' - 2\beta'' - \gamma'^2 - 2\beta'^2 + \alpha'(\gamma' + 2\beta'), \\ R_{22} &= e^{-2\alpha+2\beta} [-\beta'' + \beta'(\alpha' - \gamma' - 2\beta') + e^{2\alpha-2\beta}], \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta,\end{aligned}\tag{3.4}$$

e seu escalar

$$R = -2e^{-2\beta} + 2e^{-2\alpha} [3\beta'^2 + 2\beta'\gamma' + \gamma'^2 - 2\alpha'\beta' - \alpha'\gamma' + 2\beta'' + \gamma'']. \quad (3.5)$$

O escalar de Kretschmann é muito importante no estudo de qualquer espaço-tempo, pois ele nos informa a respeito da regularidade desse espaço-tempo. Caso esse escalar seja finito em uma certa região então dizemos que essa região é regular, caso contrário dizemos ser singular. Em espaços-tempos esfericamente simétricos e estáticos, o escalar de Kretschmann assume a seguinte forma

$$\mathcal{K} = 4K_1^2 + 8K_2^2 + 8K_3^2 + 4K_4^2, \quad (3.6)$$

sendo que

$$K_1 = -R_{01}{}^{01} = e^{-\alpha-\gamma} (\gamma' e^{\gamma-\alpha})', \quad (3.7)$$

$$K_2 = -R_{02}{}^{02} = -R_{03}{}^{03} = e^{-2\alpha} \beta' \gamma', \quad (3.8)$$

$$K_3 = -R_{12}{}^{12} = -R_{13}{}^{13} = e^{-\alpha-\beta} (\gamma' e^{\beta-\alpha})', \quad (3.9)$$

$$K_4 = -R_{23}{}^{23} = -e^{-2\beta} + e^{-2\alpha} \beta'^2. \quad (3.10)$$

Como \mathcal{K} é uma soma de quadrados, é suficiente que um de seus termos seja infinito para que todo o escalar divirja, indicando uma singularidade de curvatura. No entanto, é importante mencionar que essa não é o único tipo de singularidade que pode aparecer em um espaço-tempo. De forma geral, uma singularidade é um ponto, ou conjunto de pontos, onde as geodésicas, para um valor finito de seu parâmetro afim, cessam. Em outras palavras, singularidades são regiões de incompletude geodésica.

3.3 Geodésicas no espaço-tempo estático e esfericamente simétrico

Então para classificar um espaço-tempo, além de analisar o comportamento dos invariantes de curvatura, é importante também analisar as geodésicas nesse espaço-tempo. Como vimos, a análise das geodésicas é bastante simplificada quando usamos o formalismo

lagrangiano/hamiltoniano, que nos permite escrever a Lagrangiana do espaço-tempo como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \mathcal{E}, \quad (3.11)$$

sendo

$$\mathcal{E} = \begin{cases} +1 & \text{para geodésicas tipo tempo,} \\ 0 & \text{para geodesicas tipo nulas,} \\ -1 & \text{para geodesicas tipo espaço,} \end{cases}$$

em que “tipo” da geodésica se refere ao módulo da quadri-velocidade da partícula, sendo assim, para velocidades com módulo positivo dizemos ser tipo-tempo, nulo do tipo-nulas e negativo do tipo-espaço. Essa natureza da geodésica não se altera ao longo da mesma, uma vez que $\partial_\alpha(u_\mu u^\mu) = 0$.

No caso estático e esfericamente simétrico, onde temos a métrica no formato (3.1), a Lagrangiana terá o seguinte formato

$$e^{2\gamma} \dot{t}^2 - e^{2\alpha} \dot{u}^2 - e^{2\beta} [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2] = \mathcal{E}. \quad (3.12)$$

Definindo os seguintes momentos conjugados conservados

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = e^{2\gamma} \dot{t} = E, \quad (3.13)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -e^{2\beta} \sin^2 \theta \dot{\phi} = L, \quad (3.14)$$

onde E e L são constantes de integração, que podem ser interpretados como a energia e o momento angular de uma partícula teste, respectivamente, e substituindo esses resultados de volta em (3.12) (também assumindo que a dinâmica se dá no plano equatorial, $\theta = \pi/2$) obtém-se

$$e^{2\alpha+2\gamma} \dot{u}^2 = E^2 - \mathcal{E} e^{2\gamma} - L^2 e^{2\gamma-2\beta}. \quad (3.15)$$

Agora, passando para o sistema de coordenadas quasi-global, onde a coordenada quasi-global ρ é definida como

$$\rho = \int e^{\alpha+\gamma} du \Rightarrow \dot{\rho} = e^{\alpha+\gamma} \dot{u}. \quad (3.16)$$

Assim, a equação para as geodésicas é reduzida a uma lei de conservação de energia de uma partícula pontual se movendo em um potencial em uma dimensão,

$$\dot{\rho}^2 = E^2 - V_{ef}(\rho) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho} = -\frac{dV_{ef}}{d\rho}, \quad (3.17)$$

$$V_{ef}(\rho) = \mathcal{E}e^{2\gamma(\rho)} + L^2e^{2\gamma(\rho)-2\beta(\rho)}. \quad (3.18)$$

O movimento de uma partícula neste caso só é possível caso $E^2 \geq V_{ef}$, enquanto os pontos onde $E^2 = V_{ef}$ representam os pontos de retorno. Este formalismo para a análise das geodésicas em espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos é bastante útil, uma vez que para a análise é apenas necessário o potencial efetivo.

Expressando a métrica de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico utilizando a coordenada nula $w = t - x$, sendo x a coordenada tartaruga, definida como $dx = e^{\alpha-\gamma}du$, temos que

$$ds^2 = e^{2\gamma}dw^2 + 2e^{\gamma+\alpha}dwdu - e^{2\beta}d\Omega^2.$$

Dessa forma podemos definir o vetor tangente às geodésicas que “saem” como $k_\alpha = \{-e^{2\gamma}, e^{\alpha+\gamma}, 0, 0\}$. No entanto, esse vetor satisfaz a equação $k^\beta k_{\alpha;\beta} = \lambda k_\alpha$, sendo $\lambda = -e^{2\gamma}|\gamma'|$. Para calcular o escalar de expansão θ precisamos introduzir um novo parâmetro afim e outro vetor reescalado de forma que $k_*^\alpha = e^\Gamma k_\alpha$, onde $\frac{d\Gamma}{d\tau} = \lambda(\tau)$. Dessa forma, o escalar de expansão se torna

$$\theta = k_*^\alpha{}_{;\alpha} = e^{-\Gamma}(k^\alpha{}_{;\alpha} - \lambda).$$

Note que o fator de escalar e^Γ não afeta o sinal de θ . Então temos que

$$e^\Gamma \theta = k^\alpha{}_{;\alpha} - \lambda = 2(\gamma' + \beta')e^{-\alpha+\gamma} - \gamma'e^{2\gamma}.$$

Este escalar representa a taxa de expansão, ou congruência, de geodésicas nulas que “saem” em espaços-tempos estáticos e esfericamente simétrico.

3.4 Singularidades, planeza assintótica e horizontes

Para a classificação e estudo de espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos, em relatividade geral, é importante introduzir o conceito de algumas superfícies. Nesse contexto, três tipos de superfícies fundamentais são singularidades, regiões assintoticamente planas e horizontes. Exploraremos brevemente cada um deles. Mais detalhes podem ser encontrados em [8, 34, 38].

Uma singularidade é uma região no espaço-tempo onde as leis conhecidas da física falham em descrever o comportamento da matéria e da gravidade. Geralmente, as singularidades são caracterizadas por uma curvatura extrema do espaço-tempo, onde os invariantes de curvatura divergem ou em regiões de descontinuidades, neste caso dizemos ter uma singularidade de curvatura. Na forma mais geral, uma singularidade é definida como um ponto ou conjunto de pontos onde as geodésicas terminam em um valor finito de seu parâmetro, ou seja, nas divergências ou descontinuidades do potencial efetivo das geodésicas (3.18). As singularidades podem ter caráter atrativo, quando a derivada do potencial efetivo é positiva na região singular, ou repulsivo, quando a derivada é negativa, conforme (3.17).

Em um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, podemos definir uma região central, ou centro do espaço-tempo, como a superfície onde $r = e^\beta = 0$, uma vez que esta função descreve o raio de uma esfera para valores constantes das coordenadas temporal e radial, u e t respectivamente. Um espaço-tempo possui um centro regular se os invariantes de curvatura forem finitos nele, caso contrário teremos uma singularidade central. É importante notar que um espaço-tempo pode ser ausente de uma região central, caso r seja não nulo em todo espaço-tempo.

A planeza assintótica é uma propriedade de espaços-tempos que descreve uma região do espaço-tempo em que sua geometria coincide com a de Minkowski, ou seja, de uma geometria plana. Em um espaço-tempo assintoticamente plano, a curvatura tende a zero à medida que nos aproximamos de uma certa região. Para identificar a presença

dessa região, no contexto estático e esfericamente simétrico, basta encontrar a superfície u_m em que os invariante de curvatura se anulam e

$$\lim_{u \rightarrow u_m} r(u) = \lim_{u \rightarrow u_m} e^{\beta(u)} = \infty.$$

Além de singularidades e regiões assintoticamente planas, outra superfície de interesse é o horizonte. Em geral, horizontes caracterizam espaços-tempos na presença de um buraco negro. Citaremos alguns tipos de horizontes sem entrar em muitos detalhes, uma vez que seria necessária uma introdução de muitos conceitos avançados de topologia diferencial e algébrica e geometria diferencial.

O horizonte de eventos é a fronteira de um buraco negro, e ambas essas noções são rigorosamente definidas em espaços-tempo assintoticamente planos. Esse horizonte é formado por geodésicas nulas e separa causalmente uma região interna da externa.

O horizonte aparente é definido localmente como uma superfície onde as geodésicas nulas que saem ortogonalmente dela têm expansão zero.

O horizonte de Cauchy é uma superfície do espaço-tempo na qual a evolução dos campos físicos e das distribuições de matéria pode ser determinada a partir de suas equações de movimento, com dados iniciais especificados na mesma.

O horizonte de Killing é, por definição, uma superfície em que um determinado vetor de Killing é nulo. Evidentemente, horizontes de Killing só podem ocorrer em espaços-tempos que possuem isometrias, caracterizadas por vetores de Killing.

Em espaços tempos estáticos e esfericamente simétricos, os horizontes de evento, aparente e Killing coincidem. Para esses tipos de espaços-tempos, podemos focar nos horizontes de Killing, onde o vetor de Killing $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é nulo, logo

$$\xi_\mu \xi^\mu = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = g_{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2\gamma} = 0.$$

Por último, é interessante introduzir um escalar conectado à noção de horizonte, como por exemplo a função $r(u) = e^{\beta(u)}$. A partir do comportamento dessa função, pode-

se introduzir o conceito de região do tipo T e do tipo R. Por definição, uma região do espaço-tempo é do tipo R se o gradiente de $r(u)$ é do tipo espaço, ou seja,

$$r^{\cdot\alpha}r_{,\alpha} = -e^{-2\alpha}r'^2 < 0 \Rightarrow e^{-2\alpha} > 0.$$

Por outro lado, em uma região do tipo T devemos ter o gradiente do tipo tempo, $r_{,\alpha}r^{\cdot\alpha} > 0$. Além do mais, esses dois tipos de região nos permite definir uma superfície que as divide, sendo onde $r_{,\alpha}r^{\cdot\alpha} = 0$, chamada de horizonte-r.

3.5 Espaço-tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski (\mathcal{M}, η) é a forma mais simples de espaço-tempo vazio na Teoria da Relatividade Geral. Matematicamente, ele é definido como uma variedade quadri-dimensional com uma métrica de Lorentz plana $\eta_{\mu\nu}$. Em termos das coordenadas esféricas, o elemento de linha dessa variedade pode ser expresso como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2d\Omega^2.$$

Essa métrica aparentemente se torna singular quando $r = 0$ e $\sin\theta = 0$, no entanto, isso ocorre devido às coordenadas utilizadas não serem adequadas nesses pontos. Para obter regiões de coordenadas regulares, é necessário restringir as coordenadas, por exemplo, nos intervalos $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi < 2\pi$. Podemos verificar que os invariantes de curvatura neste espaço-tempo são nulos em todo lugar

Um sistema de coordenadas alternativo é obtido ao escolher as coordenadas nulas avançadas e retardadas v e w , definidas como $v = t + r$ e $w = t - r$, respectivamente. Nesse sistema de coordenadas, a métrica se torna:

$$ds^2 = dvdw - \frac{1}{4}(v - w)^2d\Omega^2,$$

sendo $-\infty < v, \infty$ e $-\infty < w < \infty$ e essas coordenadas formam o cone de luz nesse espaço-tempo.

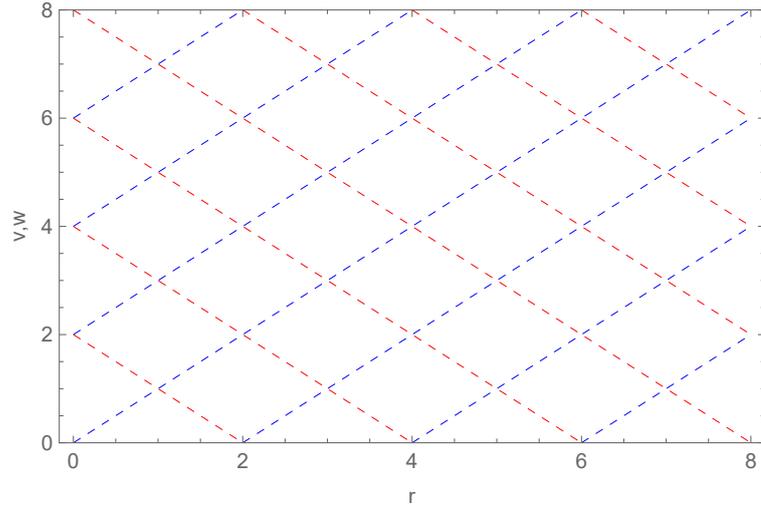


Figura 3.1.: Coordenadas nulas em Minkowski. A interseção de uma superfície $v = \text{constante}$ com uma superfície $w = \text{constante}$ é uma esfera bidimensional. A coordenada $v(w)$ pode ser considerada como ondas esféricas entrantes (saindo) que viajam à velocidade da luz; elas são coordenadas de tempo avançadas (retardadas).

Para estudar os infinitos nesse espaço-tempo podemos utilizar a seguinte transformação $\tan p = v$ e $\tan q = w$, onde $-\pi/2 < p, q < \pi/2$. Com essas coordenadas conseguimos escrever a métrica como

$$ds^2 = \sec^2 p \sec^2 q (dpdq - \frac{1}{4} \sin^2(p - q) d\Omega^2).$$

Introduzindo as coordenadas $t' = p + q$ e $r' = p - q$, ficamos com

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sec^2 p \sec^2 q (dt'^2 - dr'^2 - \sin^2 r d\Omega^2),$$

dessa forma, todo o espaço-tempo de Minkowski é dado pela região

$$-\pi < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < \pi, \quad r' \geq 0.$$

A fronteira dessa região pode ser considerada como representando a estrutura conforme do infinito do espaço-tempo de Minkowski. Essa estrutura consiste nas superfícies nulas:

$$\mathcal{J}^+ : t' - r' = \pi \quad \text{e} \quad t' + r' = \pi, \quad \mathcal{J}^- : t' + r' = -\pi \quad \text{e} \quad t' - r' = -\pi,$$

e nos pontos:

$$\begin{aligned}
 i^+ &: p = q = \frac{\pi}{2} \rightarrow t' = \pi, r' = 0, \\
 i^0 &: p = -q = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow t' = 0, r' = \pm\pi, \\
 i^- &: p = q = -\frac{\pi}{2} \rightarrow t' = -\pi, r' = 0.
 \end{aligned}$$

Geodésicas do tipo tempo começam em i^- e terminam em i^+ , da mesma forma, pode-se considerar que geodésicas nulas originam-se em \mathcal{J}^- e terminando em \mathcal{J}^+ , enquanto as geodésicas espaciais tanto se originam quanto terminam em i^0 . Assim, pode-se considerar i^+ e i^- como representando o infinito temporal futuro e passado, \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^- como representando o infinito nulo futuro e passado, e i^0 como representando o infinito espacial.

-	nome	definição
\mathcal{J}^+	futuro nulo infinito	$v \rightarrow \infty, w = \textit{finito}$
\mathcal{J}^-	passado nulo infinito	$w \rightarrow -\infty, v = \textit{finito}$
i^0	infinito espacial	$r \rightarrow \infty, t = \textit{finito}$
i^+	futuro tipo tempo infinito	$t \rightarrow \infty, r = \textit{finito}$
i^-	passado tipo tempo infinito	$t \rightarrow -\infty, r = \textit{finito}$

A estrutura conforme do infinito de Minkowski pode ser representada por um diagrama do plano (t', r') , como na figura 3.2. Cada ponto neste diagrama representa uma esfera bidimensional e as geodésicas nulas são representadas por linhas retas com um ângulo de $\pm 45^\circ$. A estrutura conforme do infinito em qualquer espaço-tempo esfericamente simétrico pode ser representada por um diagrama desse tipo, que chamaremos de diagrama de Carter-Penrose.

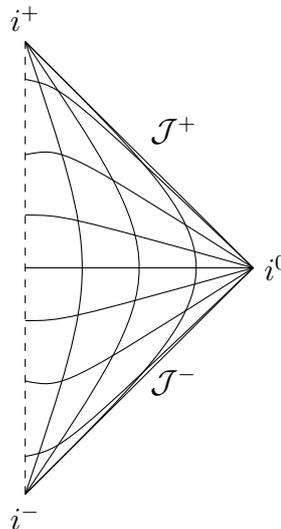


Figura 3.2.: Diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo de Minkowski.

3.6 Buracos Negros e Buracos de Minhoca

3.6.1 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild, descreve a geometria de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico ao redor de um objeto de massa M , no vácuo. Conforme o teorema de Birkhoff, qualquer solução esfericamente simétrica das equações de campo no vácuo na relatividade geral deve ser estática e assintoticamente plana. Logo, a solução de um espaço-tempo exterior a um objeto esférico e sem rotação é dada pela métrica de Schwarzschild.

No vácuo temos que o tensor Energia-Momento e seu escalar são nulos, neste contexto, a equação de Einstein (2.84), é reescrita como

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.19)$$

De modo a simplificar essas equações de campo, é conveniente usar o sistema de coordenada de Schwarzschild (onde $\alpha = -\gamma$ e $\beta = \ln r$), assim, só é necessário resolver uma equação para a função métrica γ . Usando a equação para o termo $(0,0)$ do tensor de Ricci, temos que

$$\gamma'' + 2\gamma'(\gamma' + \frac{1}{r}) = 0, \quad (3.20)$$

que pode ser integrado para obter a solução

$$\gamma(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (3.21)$$

em que $2m$ é uma constante de integração. Podemos obter uma interpretação para essa constante a partir do limite de campo fraco. Nesse limite pode-se verificar que

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Psi}{c^2} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (3.22)$$

sendo $\Psi = -\frac{GM}{r}$ o potencial gravitacional newtoniano. Portanto, podemos identificar a constante de integração como $m = GM/c^2$. Finalmente, podemos escrever a métrica de Schwarzschild como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega. \quad (3.23)$$

Como dito antes, essa solução é assintoticamente plana, isto é, conforme $r \rightarrow \infty$ a métrica se torna Minkowski. Ela também se torna plana para $m \rightarrow 0$. Isto que nos permite interpretar essa solução como o espaço-tempo na região externa de um objeto isolado.

Esta solução possui duas regiões singulares, $r = 0$ e $r = 2m$. Para entender melhor essas regiões, é necessário analisarmos o escalar de Kretschmann, que para a métrica (3.23), é escrito como

$$\mathcal{K} = \frac{48m^2}{r^6}. \quad (3.24)$$

Este escalar nos mostra que temos de fato uma singularidade real em $r = 0$, dado que nessa região seu valor é infinito. Por outro lado, em $r = 2m$ seu valor é finito, logo esta singularidade é devido à escolha do sistema de coordenada e pode ser removida. Como nessa superfície $e^\gamma \rightarrow 0$, ela divide a região interna, $r < 2m$, da região externa $r > 2m$, de forma que, os eventos na região interna se tornam causalmente desconectados da região externa, caracterizando essa superfície como um horizonte de eventos. Utilizando do escalar de expansão para geodésicas nulas que “entram” neste espaço-tempo, obtemos que

$$e^\Gamma \theta = -\frac{2(r - 2m)}{r^2}, \quad (3.25)$$

implicando que o horizonte de eventos em $r = 2m$ também é um horizonte aparente, como já esperado.

Em Schwarzschild temos duas regiões divididas pelo horizonte de eventos, a região externa ao horizonte é do tipo R, enquanto a região interna é do tipo T. A métrica de Schwarzschild (3.23) na região interna ao horizonte é escrita como

$$ds^2 = \left(\frac{2m}{t} - 1\right)^{-1} dt^2 - \left(\frac{2m}{t} - 1\right) dr^2 - t^2 d\Omega^2, \quad (3.26)$$

onde a coordenada temporal foi trocada com a espacial. A métrica acima também é conhecida como métrica de Kantowski–Sachs e descreve um espaço-tempo que está se contraindo ou se expandindo. Para t decrescendo de $2m$ à 0 temos que o espaço-tempo colapsa nas duas direções angulares, enquanto se expande infinitamente ao longo da coordenada radial. O estado final em $t = 0$ é uma singularidade do tipo espaço atingida em um certo instante de tempo finito. No entanto, a região tipo T não está conectada com a região inicial do tipo R, mesmo a curvatura que separa as duas regiões sendo finita.

O comportamento das geodésicas é descrito pela equação com formato lei de conservação de energia, (2.87), onde temos um potencial efetivo, (3.18), que fará o análogo com o potencial na mecânica newtoniana. Para a métrica de Schwarzschild o que teremos é

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{ef}(r), \quad V_{ef} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\mathcal{E} + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (3.27)$$

Tomando a derivada d/dr da equação acima, obtemos a seguinte equação de movimento,

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} V_{ef}(r). \quad (3.28)$$

Esta equação nos fornece as condições para uma órbita circular e estável, que são $V' = 0$ e $V'' > 0$, respectivamente. Usando a expressão para o potencial neste caso, a primeira condição nos fornece

$$m\mathcal{E}r^2 - L^2r + 3mL^2 = 0. \quad (3.29)$$

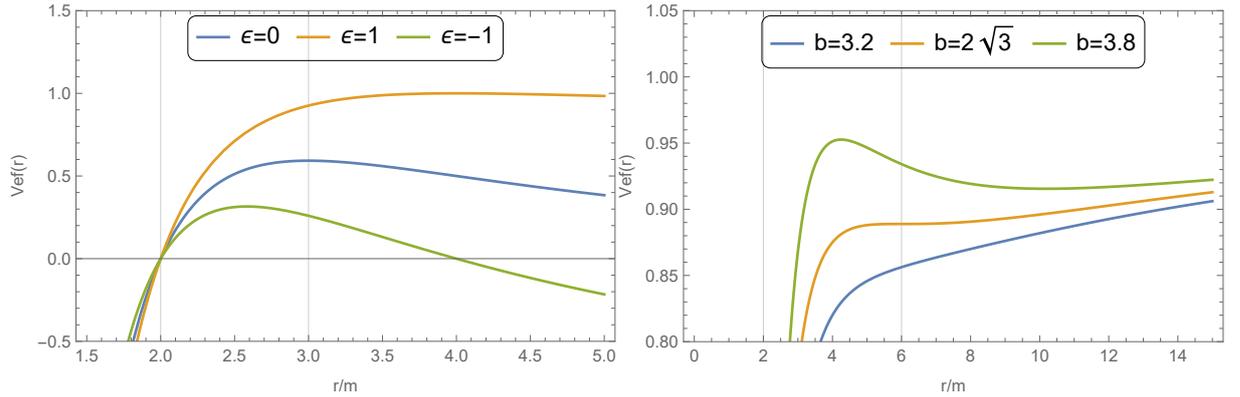


Figura 3.3.: Gráficos do potencial efetivo para as geodésicas na solução de Schwarzschild. No gráfico à esquerda a curva laranja é para $\mathcal{E} = 1$, azul é para $\mathcal{E} = 0$ e verde é para $\mathcal{E} = -1$. As linhas verticais indicam a posição do horizonte de eventos e o raio da esfera de fótons, respectivamente. No gráfico à direita as curvas são para diferentes valores do parâmetro de impacto, sendo $b = 3, 2, 2\sqrt{3}, 3, 8$ e $4, 1$ de baixo para cima. Enquanto as linhas verticais indicam o horizonte e a última órbita estável.

Um caso especial é para $\mathcal{E} = 0$, que corresponde às geodésicas nulas, ou seja, às órbitas dos fótons. Neste caso, o único valor possível para o raio da órbita circular para fótons será $r = 3m$. Porém, a segunda derivada do potencial efetivo nessa região é negativa, o que implica que essa fotosfera seja uma região de órbita instável.

Consideraremos agora as geodésicas do tipo tempo, onde $\mathcal{E} = 1$, cuja solução de (3.29) é escrita como

$$r = \frac{L^2}{2m} \left(1 \pm \sqrt{1 - 12\frac{m^2}{L^2}}\right). \quad (3.30)$$

Introduzindo o parâmetro de impacto $b = \frac{L}{m}$, temos que, o raio acima é real somente para $b \geq 2\sqrt{3}$, portanto, para $b < 2\sqrt{3}$ não haverá órbitas fechadas, como mostra o gráfico à direita da figura 3.3.

Então, a análise das geodésicas na solução de Schwarzschild nos permite identificar as regiões onde podemos encontrar órbitas circulares para fótons, em $r = 3m$, e para partículas massivas. Podemos notar também que na singularidade temos que $\frac{dV_{ef}}{dr} \rightarrow +\infty$, caracterizando ela como uma singularidade atrativa, pelo motivo de que uma partícula teste nesse espaço-tempo sentiria uma força atrativa infinita conforme se aproxima da singularidade.

Para analisar a estrutura causal da solução de Schwarzschild podemos utilizar das geodésicas nulas, uma vez que o cone de luz em um certo ponto do espaço-tempo é definido como o conjunto de pontos conectados ao mesmo por geodésicas nulas. Para realizar essa análise vamos utilizar as coordenadas onde as geodésicas nulas radiais que “saem” e “entram” se tornam linhas retas, ou seja, onde o subespaço (t, r) se torna conformalmente plano. Logo, introduzindo uma nova coordenada radial,

$$r_* = r + 2m \ln |r - 2m|,$$

a métrica de Schwarzschild (3.23) é reescrita como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dt^2 - dr_*^2) - r^2 d\Omega. \quad (3.31)$$

Agora podemos definir as coordenadas nulas, que acompanham as geodésicas nulas radiais que “saem” e “entram” como

$$v = t + r_* \quad \text{e} \quad w = t - r_*. \quad (3.32)$$

As coordenadas v e w formam os cones de luz de cada ponto do espaço-tempo, (3.4). Note que, conforme nos aproximamos do horizonte, em $r = 2m$, os cones de luz vão se fechando, e na região interna ao horizonte, $r < 2m$, os cones de luz apontam para a singularidade. Dessa forma, para um observador em repouso na região externa ao horizonte, nenhuma partícula atravessa o horizonte e todos os eventos internos ao horizonte estão fora do seu cone de luz. Podemos notar que os cones de luz ao passar de uma região do tipo R para do tipo T, mudam de direção, uma vez que a coordenada espacial e temporal trocam de papel.

Para v constante o horizonte corresponde à $w \rightarrow \infty$, ou seja, $t \rightarrow \infty$, por outro lado, para w constante o horizonte corresponde à $v \rightarrow -\infty$, portanto, $t \rightarrow -\infty$. Portanto, nas coordenadas nulas de Schwarzschild o horizonte é dividido em dois, um horizonte futuro e um horizonte passado.

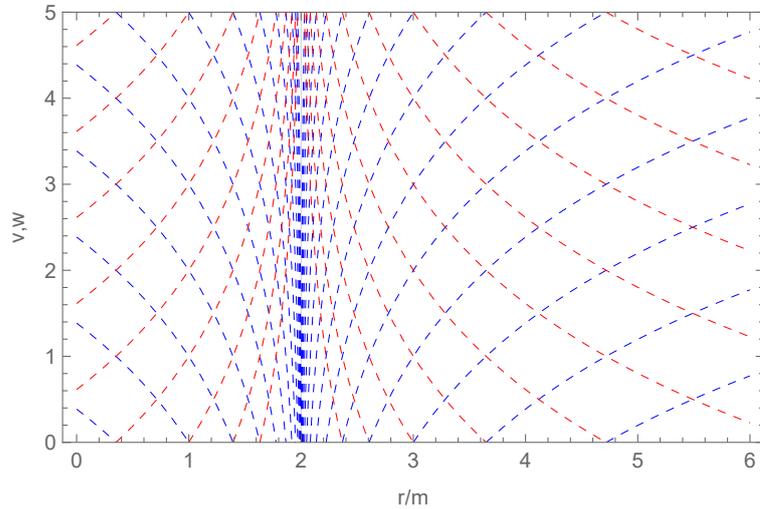


Figura 3.4.: Gráfico das coordenadas nulas de Schwarzschild. As linhas azuis representam a coordenada v , enquanto as vermelhas a w .

A transição da métrica de Schwarzschild nas coordenadas quasi-globais para um sistema de coordenadas que fornece uma descrição mais completa desse espaço-tempo foi formulada independentemente por Kruskal e Szekeres. Para remover a singularidade de coordenada em $r = 2m$ Kruskal e Szekeres utilizaram a transformação

$$V = e^{v/4m} \quad \text{e} \quad W = -e^{-w/4m},$$

Essas coordenadas são chamadas de coordenadas de Kruskal e com elas podemos escrever a métrica (3.31) como

$$ds^2 = \frac{16m^2}{r} e^{-r/2m} dV dW. \quad (3.33)$$

Esse sistema de coordenada podemos notar revela uma variedade maior do que a coberta pelas coordenadas quasi-globais por permitirem uma continuação da métrica através do horizonte. Podemos ainda definir novas coordenadas tipo tempo e espaço,

$$T = \frac{1}{2}(v + w) \quad \text{e} \quad R = \frac{1}{2}(v - w) \quad (3.34)$$

que possuem a seguinte relação:

$$T^2 - R^2 = (2m - r)e^{-r/2m}. \quad (3.35)$$

Assim, uma superfície de r constante é descrita pela equação acima, que corresponderá a hipérbolas no plano (T, R) , como mostra a figura 3.5. A superfície do horizonte, $r = 2m$ se torna $T = \pm R$, dividindo o espaço-tempo em quatro regiões, as regiões assintoticamente plana (I) e interna do horizonte de eventos (II) e duas regiões geradas pelas continuações analíticas da solução (I' e II'). A singularidade central, $r = 0$, agora é representada pelas hipérbolas $T = \pm\sqrt{R^2 - 2m}$, conhecidas como singularidade passada e futura, respectivamente.

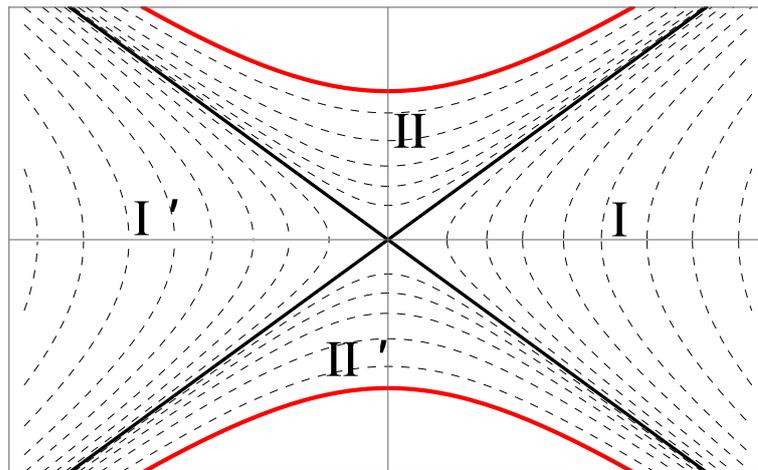


Figura 3.5.: Diagrama de Kruskal para solução de Schwarzschild. As linhas vermelhas representam a singularidade, enquanto as pretas o horizonte de eventos. As linhas tracejadas representam as curvas com $r = \text{constante}$ nas regiões interna e externa ao horizonte.

O diagrama resultante dessas curvas é conhecido como diagrama de Kruskal. Ele representa a extensão máxima da solução de Schwarzschild, regiões I e II do diagrama, pois nos permite estudá-la além do horizonte de eventos, em $r = 2m$, além de permitir uma continuação, regiões I' e II' . No estudo de estrutura causal de um espaço-tempo de uma solução de buraco negro, esse diagrama é muito útil, dado que ele provê uma transição suave entre as regiões divididas por horizontes. Outro diagrama muito útil para o estudo da estrutura causal é diagrama de Carter-Penrose, sendo o diagrama da estrutura conforme do infinito do espaço-tempo.

Para realizar a compactificação das coordenadas de Kruskal, na solução de Schwarzschild, é introduzido um novo sistema de coordenada, v' e w' , definido como

$$v' = \arctan[V/\sqrt{2m}] \quad \text{e} \quad w' = \arctan[W/\sqrt{2m}]. \quad (3.36)$$

E assim, reintroduzimos as coordenadas tipo tempo e tipo espaço da seguinte forma:

$$T' = \frac{v' + w'}{2} \quad \text{e} \quad R' = \frac{v' - w'}{2}. \quad (3.37)$$

Podemos notar que a singularidade agora é representada pelas retas $T' = \pm \frac{\pi}{2}$, o horizonte de eventos corresponderá à $T' = \pm R'$, enquanto a região de raio infinito, $r \rightarrow \infty$, será $T' = R' \pm \frac{\pi}{2}$ e $T' = -R' \pm \frac{\pi}{2}$, como mostra na figura 3.6. Todas geodésicas do tipo tempo tem origem em i^- e terminam em i^+ , que representam o passado e futuro temporal infinito. Similarmente, as geodésicas do tipo espaço se originam e terminam em i^0 , que corresponde aos infinitos espaciais. Das superfícies \mathcal{J}^- se originam as geodésicas nulas que possuem um ângulo de $\pm 45^\circ$ no diagrama e estão entrando na região II, enquanto nas superfícies \mathcal{J}^+ as geodésicas que estão saindo da região II' com um ângulo de $\pm 45^\circ$.

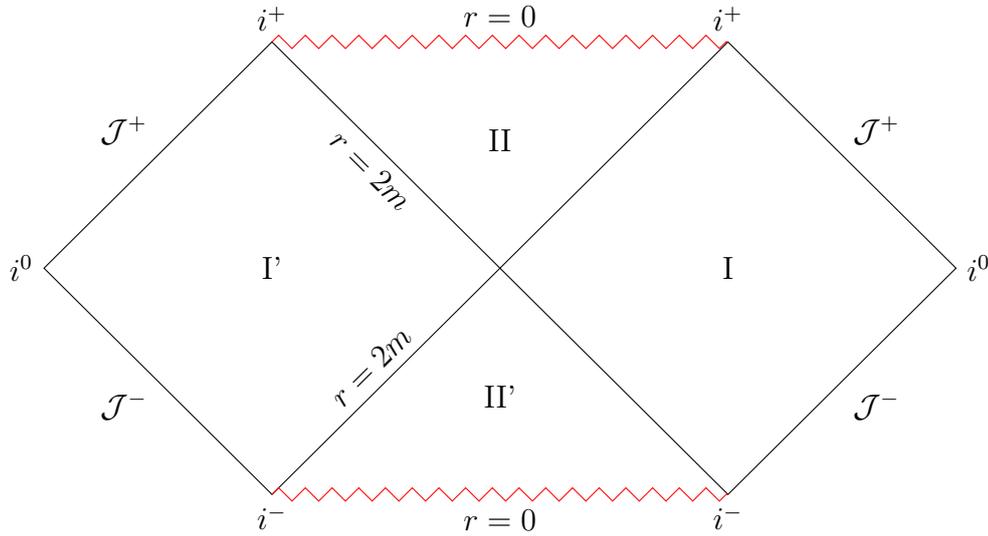


Figura 3.6.: Diagrama de Carter-Penrose para a solução de Schwarzschild. As áreas I e I' correspondem a regiões externas do buraco negro ($r > 2m$), a área II a região interna ($r < 2m$) e a área II' é a inversão temporal do buraco negro, também conhecido como buraco branco.

As regiões I e I' possuem seus próprios infinitos, permitindo interpretar tais regiões como sendo universos diferentes, ou regiões do mesmo universo infinitamente afastadas. A análise do potencial efetivo para as geodésicas radiais nos fornece os possíveis caminhos que uma partícula pode percorrer no diagrama. Logo, as partículas que se originam de \mathcal{J}^- se deslocarão para a superfície \mathcal{J}^+ ou entraram no buraco negro, a região II, e inevitavelmente cairá na singularidade futura. No entanto, devido à simetria temporal da solução, também temos o caso contrário, onde temos partículas surgindo da singularidade passada, na região II', passando pelo horizonte passado, e indo para superfície \mathcal{J}^+ . Este

segundo caso, representa a inversão temporal do buraco negro, também conhecido como buraco branco.

3.6.2 Solução de Reissner-Nordström

A solução que descreve um espaço-tempo estático esfericamente simétrico ao redor de um objeto de massa M e carga Q é a solução de Reissner-Nordström. Quando consideramos uma carga elétrica pontual, teremos um campo elétrico puramente radial que contribui no tensor energia-momento. A contribuição de um campo eletromagnético é dada pelo tensor (2.102). Portanto, as equações de Einstein se escrevem como

$$G_{\mu\nu} = \kappa T^{EM}_{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

Como, neste caso, temos apenas componentes radiais do campo elétrico, pode-se verificar que os termos não nulos do tensor de Maxwell são

$$F_{10} = -F_{01} = E(u), \quad (3.39)$$

e seu comportamento é descrito pela equação de Maxwell

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.40)$$

Assim como no caso sem carga, Schwarzschild, é conveniente usar o sistema de coordenadas de Schwarzschild. Dessa forma, a equação de Maxwell fornece

$$r^2 E' + 2rE = 0 \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{r^2}. \quad (3.41)$$

Substituindo esse resultado na componente (1, 1) das equações de Einstein, resulta em

$$e^{2\gamma}(\gamma'' + 2\gamma'^2 + \frac{2}{r}\gamma') = \frac{\kappa Q^2}{r^4}. \quad (3.42)$$

integrando a equação acima, obtém-se o resultado

$$\gamma(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{A}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right), \quad (3.43)$$

onde $q^2 = \kappa Q^2$ e A é uma constante de integração. No limite em que $Q \rightarrow 0$ devemos recuperar a solução de Schwarzschild, dessa forma, podemos identificar $A = 2m$. A métrica neste caso é escrita como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.44)$$

Diferente de Schwarzschild, temos três possíveis superfícies singulares, que dependendo da relação entre carga e massa, dadas pelo zero da função

$$\Delta(r) = r^2 - 2mr + q^2 = 0 \Rightarrow r = r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - q^2}. \quad (3.45)$$

Dessa forma, essa solução se divide em três casos, cada caso contendo uma estrutura diferente. No primeiro caso, temos que $m > q$, que implica a existência de duas raízes reais para a função $\Delta(r)$, portanto temos três superfícies singularidades, $r = 0$ e r_{\pm} . No segundo caso, para $m = q$, as raízes de $\Delta(r)$ se coincidem, $r = m$, assim ficamos com duas singularidades. No terceiro caso, com $m < q$, a função $\Delta(r)$ não possui raízes reais, dessa forma a solução fica com apenas uma singularidade.

Assim como Schwarzschild, neste caso temos uma singularidade real em $r = 0$, como podemos observar pelo escalar de Kretschmann dessa solução,

$$\mathcal{K} = \frac{8(6m^2r^2 - 12mq^2r + 7q^4)}{r^8}, \quad (3.46)$$

enquanto as outras superfícies singulares fornecem um valor finito para este escalar. Portanto, estas singularidades podem ser removida com uma transformação de coordenada. Como, para $r \rightarrow r_{\pm}$ temos $e^{\gamma} \rightarrow 0$, estas superfícies separam causalmente suas regiões internas e externas, ou seja, dois horizontes. No entanto, os horizontes presentes nessa solução possuem características diferentes, o mais externo é chamado de horizonte de eventos, similar ao horizonte em Schwarzschild, e o mais interno é chamado de horizonte de Cauchy¹. Olhando para o escalar de expansão,

$$e^{\Gamma\theta} = 2 \frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^3},$$

note que neste caso os horizontes também são horizontes aparentes.

¹O horizonte de Cauchy é uma hipersuperfície do espaço-tempo em que a evolução dos campos físicos e as distribuições de matéria pode ser encontrada a partir das equações de movimento com as condições iniciais especificadas na mesma.

Na solução de Reissner-Nordström, a presença do campo elétrico nos fornece uma maior variedade de espaços-tempos, portanto, o comportamento das geodésicas, em comparação à Schwarzschild, será mais complexo. Usando o formalismo apresentado nas seções anteriores, o potencial efetivo das geodésicas neste caso possui o seguinte formato

$$V_{ef} = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) \left(\mathcal{E} + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (3.47)$$

Olhando para os gráficos desse potencial efetivo para os três casos da solução de RN, 3.7, podemos observar que a principal diferença com respeito ao caso de Schwarzschild é que na região singular o potencial temos que $V_{ef}(0) \rightarrow +\infty$, que caracteriza uma singularidade do tipo tempo repulsiva, que implica que a singularidade não é alcançada por nenhuma partícula teste. A condição para órbitas circulares, $V'_{ef} = 0$, nos fornece a equação

$$m\mathcal{E}r^3 - 2(L^2 + \mathcal{E}q^2)r^2 + 6mL^2r - 4L^2q^2 = 0. \quad (3.48)$$

Considerando apenas as geodésicas nulas, $\mathcal{E} = 0$, ficamos com

$$L^2r^2 - 3mL^2r + 2L^2q^2 = 0, \quad (3.49)$$

cujas soluções são $r_{o,\pm} = \frac{3}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{9m^2 - 8q^2}$. No caso em que $m^2 > q^2$, onde temos dois horizontes, teremos duas superfícies para órbitas circulares para fótons, $r_{o,\pm}$, onde uma é estável ($V''_{ef} > 0$) e está localizada entre os horizontes, $r_- < r_{o,-} < r_+$, e a outra é instável ($V''_{ef} < 0$) e está localizada na região externa dos horizontes, $r_+ < r_{o,+}$. No caso extremo, em que $m^2 = q^2$, ainda teremos duas superfícies possíveis para órbitas circulares de fótons, uma estável localizada no horizonte, $r = m$, e uma segunda instável localizada em $r = 2m$. No caso da singularidade nua, $m^2 < q^2$, acontece algo interessante, a solução da equação (3.49) é real para $9m^2 > 8q^2$, que permite órbitas circulares para fótons para valores de massa e carga que satisfazem a relação $q^2 > m^2 > \frac{8}{9}q^2$, como podemos perceber na figura inferior direita de 3.7.

A solução de Reissner-Nordström, no que lhe concerne, descreve três possíveis casos de espaços-tempos com carga, que dependem da relação de carga e massa. De todos os casos, o único que possui uma região do tipo T é o caso onde $m^2 > q^2$. Neste caso a solução apresenta três regiões divididas por dois horizontes de eventos, $r = r_{\pm}$. As regiões mais externa, $r > r_+$, e interna, $r < r_-$, são do tipo R, enquanto a região entre os horizontes é do tipo T. Nos outros casos, onde $m^2 = q^2$ e $m^2 < q^2$, não há regiões do tipo T, apenas do

tipo R. Assim, a singularidade presente na solução de Reissner-Nordström, em todos os casos, é do tipo tempo, ou seja, ela é repulsiva para partículas testes, isto implica em um tempo próprio infinito para ser atingida. Essa característica é presente em várias soluções de espaços-tempos com carga elétrica.

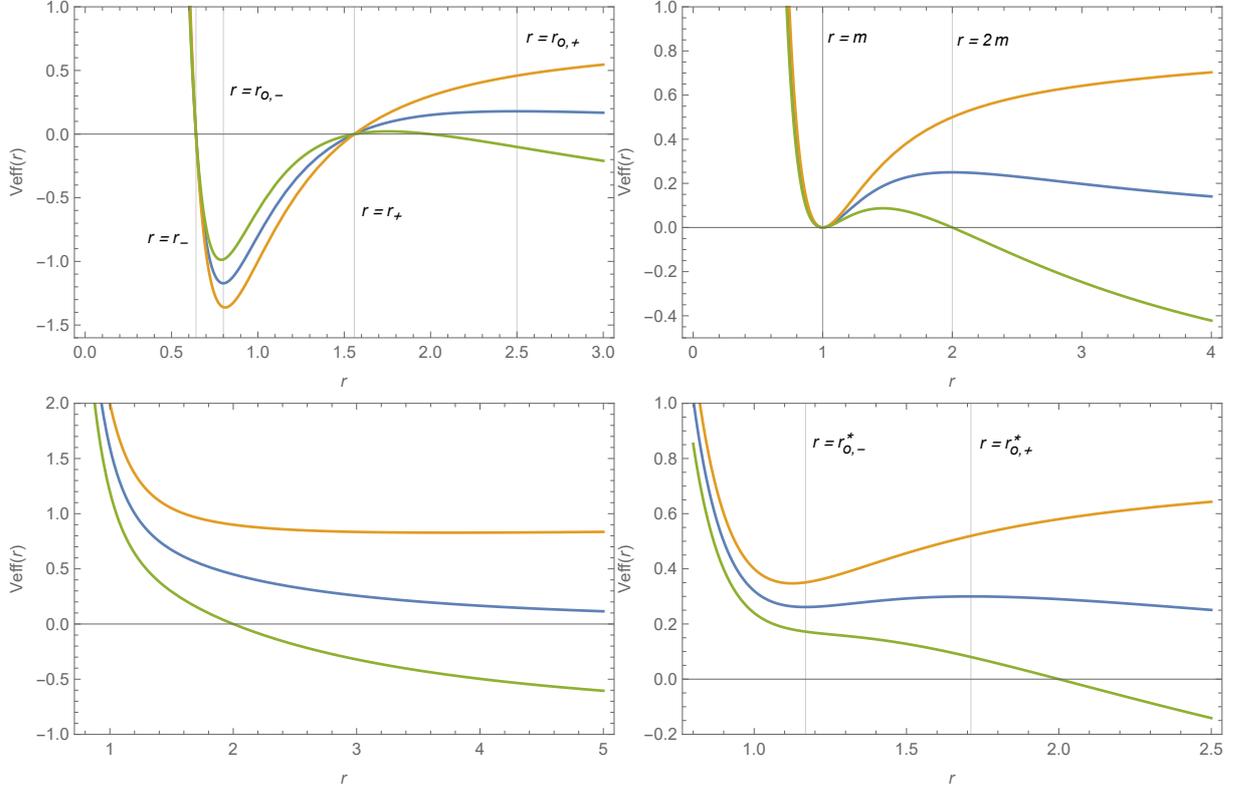


Figura 3.7.: Gráfico do potencial efetivo para as geodésicas em cada caso da solução de Reissner-Nordström. Sendo $m^2 > q^2$ na figura superior esquerda, $m^2 = q^2$ na superior direita e $m^2 < q^2$ nas inferiores. As linhas verticais em cada caso indicam os horizontes. E os possíveis raios para órbitas circulares de fótons. Em todos os casos, a curva laranja é para $\mathcal{E} = 1$, a azul é para $\mathcal{E} = 0$ e a verde para $\mathcal{E} = -1$.

A estrutura causal da solução de Reissner-Nordström é descrita pelas coordenadas nulas, v e w , definidas como (3.32), no entanto, a coordenada tartaruga, nos casos $m^2 > q^2$ e $m^2 < q^2$, agora é dada por

$$r_* = r + \frac{r_+^2}{r_+^2 - r_-^2} \ln |r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+^2 - r_-^2} \ln |r - r_-|.$$

No caso em que $m = q$, utilizamos

$$r_* = r + 2q \ln |r - q| - \frac{q^2}{(r - q)^2}.$$

Para $m > q$ o espaço-tempo possui três regiões divididas pelos dois horizontes, r_{\pm} . Na região externa $r > r_+$, conforme nos aproximamos do horizonte em r_+ os cones de luz vão se fechando, na região entre os horizontes $r_- < r < r_+$, os cones de luz apontam para “dentro”, ou seja, para o horizonte interno $r = r_-$, e na região da singularidade os cones voltam a apontar para “cima”, como podemos ver na figura superior esquerda de 3.8. Para $m^2 = q^2$, a estrutura causal é semelhante à $m^2 > q^2$, porém, na ausência da região interna entre os horizontes, figura superior direita de 3.8. No caso da singularidade nua, $m^2 < q^2$, os cones de luz vão se abrindo conforme nos aproximamos da singularidade, figuras inferiores de 3.8.

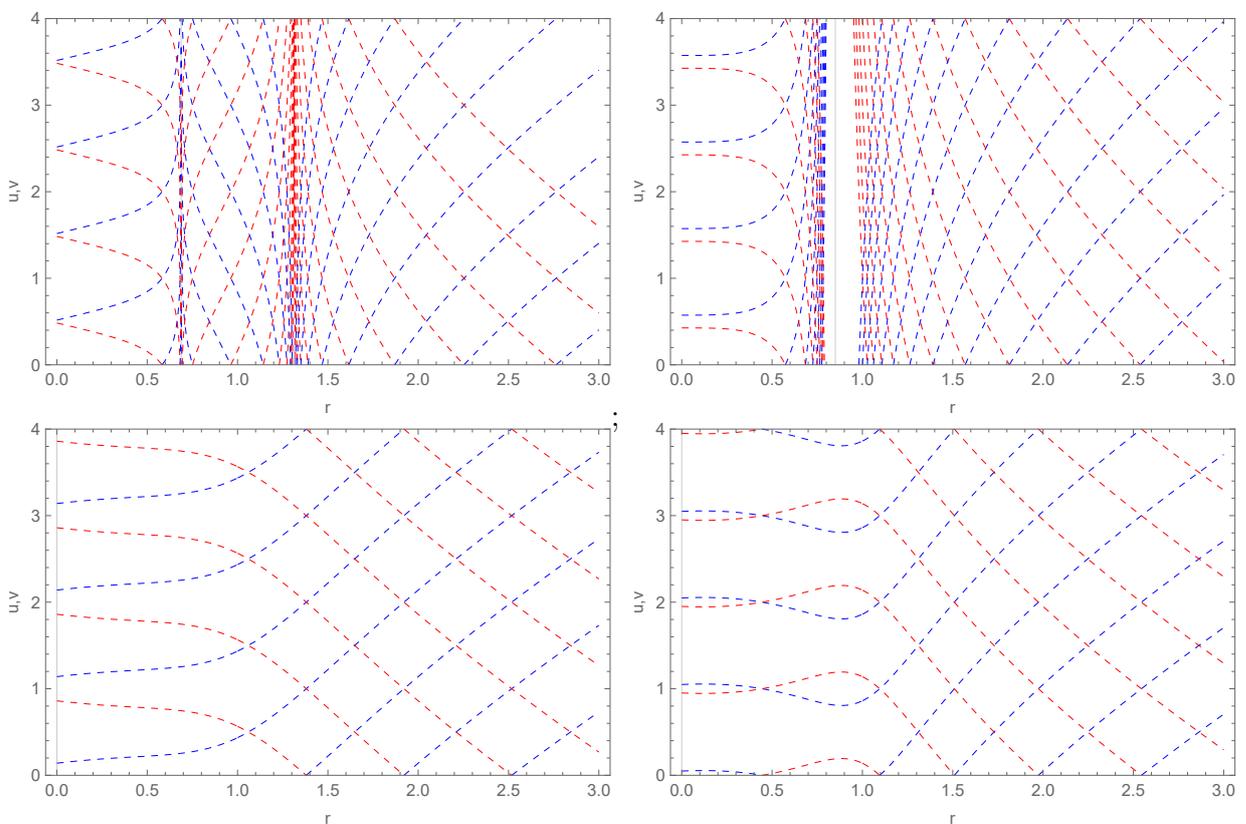


Figura 3.8.: Coordenadas nulas nos espaços-tempos de Reissner-Nordström, sendo a figura superior esquerda o caso $m^2 > q^2$, a figura superior direita o caso $m^2 = q^2$ e as duas inferiores o caso $m^2 < q^2$, onde, a esquerda temos $q = 1.15m$ e a direita $q = 1.05m$.

Podemos construir, de forma semelhante à Schwarzschild, o diagrama Carter-Penrose (CP) para a solução de Reissner-Nordström, seguindo os mesmos passos que no caso de Schwarzschild. Porém, neste caso a solução possui três estruturas diferentes dependendo da relação carga e massa. Os diagramas resultantes para cada caso possível desta solução estão na figura 3.9. Para o caso $m^2 > q^2$, a compactificação da extensão máxima dá origem a infinitos “universos”, isso porque a solução neste caso possui infinitas regiões I e I’, sendo assintoticamente planas, ligadas pelas regiões como II (uma região en-

tre os horizontes onde as coordenadas radial e temporal trocam de papel, caracterizando uma região do tipo T) e III (região da singularidade do tipo tempo), permitindo que o diagrama continue infinitamente para cima e para baixo. Os gráficos do potencial efetivo dessa solução, (3.7), nos mostram ser possível que exista curvas do tipo tempo que passe pelos horizontes e chegando em outras regiões assintoticamente planas, ligando diferentes universos ou diferentes partes do mesmo universo. Da mesma forma, para o caso $m^2 = q^2$, o diagrama continua infinitamente para cima e para baixo, conectando diferentes regiões assintóticas, porém todas as regiões são do tipo R, ou seja, as coordenadas radial e temporal não trocam de papel. No último caso, onde $m^2 > q^2$, a singularidade é dita “nua”, dado que os horizontes se tornam ausentes, e temos apenas uma região.

Para soluções mais gerais de buracos negros, assim como para a solução de Reissner-Nordström, a construção do diagrama de CP, com o método utilizado para Schwarzschild, pode ser uma tarefa difícil. No entanto, o método de construção desse diagrama pode ser simplificado, conforme feito em [8]. Neste método basta conhecer o limite das coordenadas, os zeros da função métrica $e^{2\gamma}$ e o comportamento da coordenada tartaruga ($dx = e^{\alpha-\gamma} du$), e assim associar cada região do espaço-tempo com uma figura utilizada para construção do diagrama completo. Este método é discutido em mais detalhes no apêndice (A.1).

3.6.3 Ponte de Einstein-Rosen

Einstein e Rosen observaram que poderiam fazer uma transformação de coordenadas que poderia remover a singularidade da solução de Schwarzschild e assim a solução teria uma extensão analítica que levaria a outra região assintoticamente plana. Eles consideraram a seguinte mudança de coordenada $u^2 = r - 2m$, descartando a região $r < 2m$, que contém a singularidade, e assim ficamos com $2m \leq r < \infty$. A nova coordenada radial u está definida em toda reta Real, $u \in (-\infty, \infty)$, e com ela a métrica de Schwarzschild (3.23) obtém o seguinte formato

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 + 2m)^2 d\Omega^2. \quad (3.50)$$

Neste caso o termo “ponte” é devido à função radial possuir um mínimo em $u = 0$ onde temos uma superfície bidimensional que conecta os dois assintóticos $u = \pm\infty$. Para

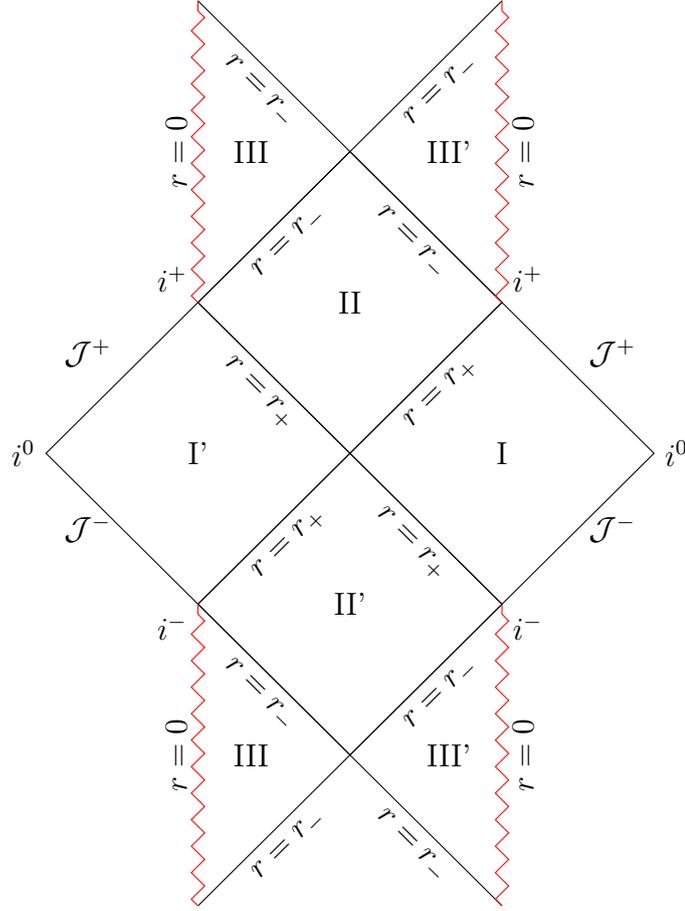


Figura 3.9.: Diagrama CP da solução de Reissner-Nordström caso não extremo, $m^2 > q^2$.

entender melhor, basta imaginar uma superfície esférica, com um certo valor de u , assim, a área superficial dessa esfera é dada por

$$A(u) = 4\pi r(u)^2 = 4\pi(u^2 + 2m)^2. \quad (3.51)$$

Dessa forma, esta área possui um mínimo em $u = 0$, sendo $A(0) = 16\pi m^2$, onde é localizado a “garganta” do buraco de minhoca.

O mesmo processo pode ser feito na solução de Reissner-Nordström, porém, somente no caso em que $m = 0$ e com o sinal do tensor Energia-Momento do campo eletromagnético trocado, que implica em uma densidade de energia negativa. A métrica de RN (3.44), neste caso, é escrita como

$$ds^2 = \frac{(r^2 - q^2)}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{(r^2 - q^2)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.52)$$

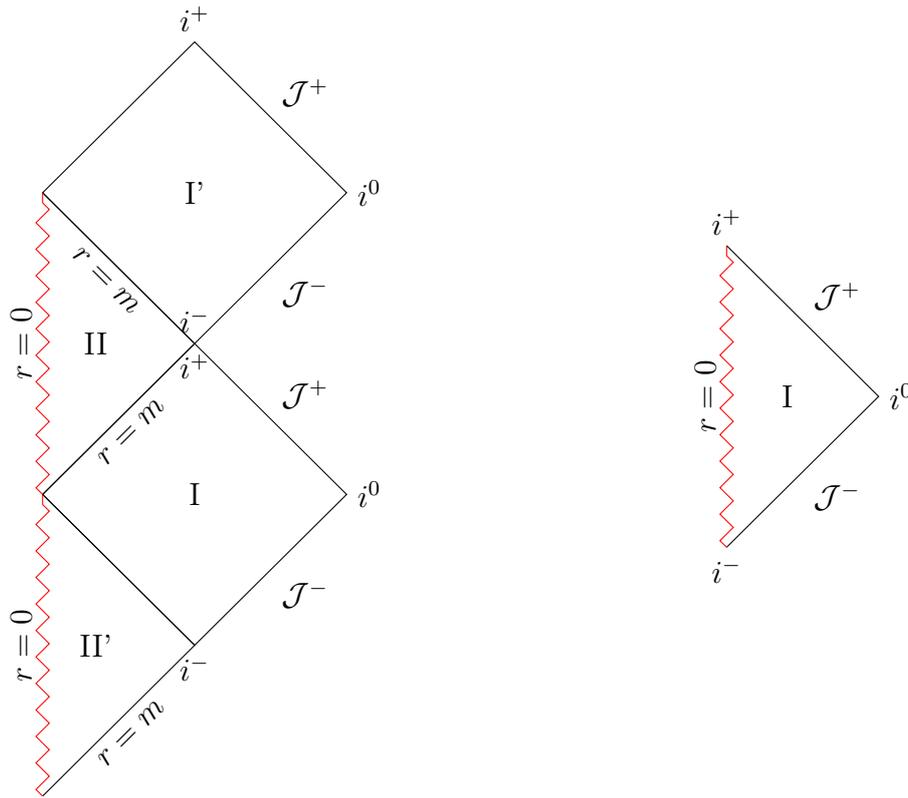


Figura 3.10.: Diagrama CP da solução de Reissner-Nordström caso extremo (esquerda), $m^2 = q^2$ e caso de singularidade nua (direita), $m^2 < q^2$.

E assim podemos usar a mudança de coordenada $u^2 = r^2 - q^2$ para obter

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + q^2} dt^2 - du^2 - (u^2 + q^2)^2 d\Omega^2. \quad (3.53)$$

Apesar de conseguirmos remover a singularidades dessas soluções, não é removido o horizonte de eventos de ambas soluções, localizado em $u = 0$. Então, um objeto que passasse pela gargante de tais buracos de minhoca, acessaria uma nova região, porém não conseguiria voltar por de onde veio, e para um observador em repouso este objeto sofreria um desvio gravitacional para o vermelho infinito².

3.6.4 Buracos de Minhoca

Em relatividade geral, além de buracos negros existem outras configurações de espaços-tempos curvos de interesse, são os chamados Buracos de Minhoca. Este nome se

²O desvio gravitacional para o vermelho é um efeito previsto pela relatividade geral onde a luz emitida por uma partícula que está caindo em um objeto massivo sofre um aumento no seu comprimento de onda devido à curvatura do espaço-tempo, deixando-a avermelhada

refere a principal característica dessas soluções, sendo a de possuir duas regiões assintoticamente planas conectadas por “túneis” (ou “pontes”), chamadas de “garganta” do buraco de minhoca. Tais configurações podem conectar regiões diferentes de um mesmo espaço-tempo ou até diferentes espaços-tempos. O exemplo mais simples de espaço-tempo de um buraco de minhoca é descrito pela métrica

$$ds^2 = dt^2 - du^2 - (u^2 + a^2)d\Omega^2, \quad (3.54)$$

que se difere do espaço-tempo plano (Minkowski) apenas pelo termo a^2 . A coordenada u está definida em toda reta real, onde $u \rightarrow \pm\infty$ corresponde a duas regiões assintoticamente planas. Para $a > 0$, o raio de uma esfera com u e t constantes é

$$r(u) = \sqrt{u^2 + a^2}, \quad (3.55)$$

o mínimo desta função é em $u = 0$, onde temos a garganta do buraco de minhoca, e seu raio é de $r = a$. Na figura 3.11 temos o diagrama para este espaço-tempo. A métrica (3.54) foi obtida, de forma independente, por K. Bronnikov[5] e F. Ellis[21], considerando um campo escalar livre no vácuo, dessa forma a equação de Einstein se torna

$$R_{\mu\nu} = \epsilon \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi, \quad (3.56)$$

com $\epsilon = \pm 1$, indicando se o campo escalar possui uma energia positiva ou negativa. O problema da solução (3.54) é que ela necessita que $\epsilon = -1$, associando uma energia negativa ao campo escalar, neste caso chamamos o campo escalar de fantasma, violando as condições de energia. Isto é devido à necessidade de efeitos repulsivos para que a garganta se mantenha aberta, levando a outro problema, este efeito repulsivo na garganta pode gerar forças de maré capazes de destruir um corpo, tornando o buraco de minhoca não “atravessável”. Outra forma do buraco de minhoca ser não “atravessável” é caso o espaço-tempo possua um horizonte entre as duas regiões.

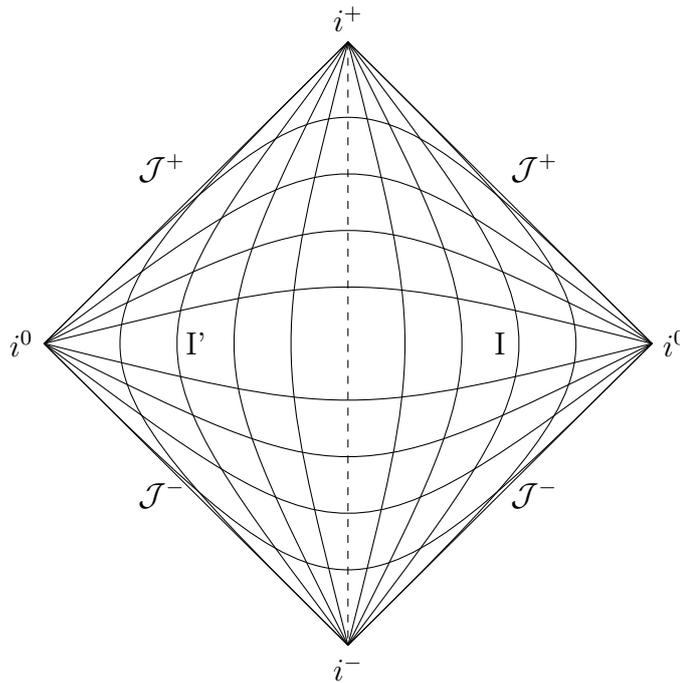


Figura 3.11.: Diagrama CP para soluções de Buraco de Minhoca com duas regiões assintóticas. As regiões I e I' podem ser dois universos diferentes ou partes distantes do mesmo universo. A linha tracejada no meio representa a garganta do Buraco de Minhoca.

3.7 Critérios de Seleção de Buracos Negros e Buracos de Minhoca

As soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström representam buracos negros estáticos e sem rotação, caracterizados por até dois parâmetros, sua massa e sua carga. A partir deles podemos criar uma noção de uma solução de buraco negro, no contexto de soluções estáticas e esfericamente simétricas para espaços-tempos mais gerais.

A principal características dos buracos negros é a presença de uma hipersuperfície que limita uma região interna e externa, chamada de horizonte. Para uma métrica como (3.1), podemos usar os seguintes critérios para selecionar uma solução de buraco negro, para uma superfície $u = u_h$, de acordo com Bronnikov et al [7], temos que:

- A função métrica e^γ deve ser nula, isso dividirá a região interna do horizonte da região externa;
- A área superficial deve ser positiva não nula, que implica em $e^{2\beta} > 0$;

- Para um observador em repouso, o horizonte deve ser invisível, logo o tempo próprio para um fóton escapar dele e atingir um observador no infinito deve ser infinito, ou seja

$$t^* = \lim_{u \rightarrow u_h} \int_u^\infty e^{\alpha-\gamma} du \rightarrow \infty; \quad (3.57)$$

- A temperatura de Hawking, T_H ³, é finita. Pode-se usar a seguinte expressão para a temperatura de Hawking de uma superfície $u = u_h$, em unidades naturais,

$$T_H = \lim_{u \rightarrow u_h} \frac{\kappa(u)}{2\pi}, \quad \kappa(u) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\gamma-\alpha} |\gamma'|; \quad (3.58)$$

- O escalar de Kretschmann é finito, caso contrário estaremos lidando com um horizonte singular;
- A métrica deve admitir uma extensão analítica além do horizonte, o que permitirá que as geodésicas continuem além do horizonte de eventos.

Esses critérios são baseados nas definições de horizontes. No caso estático e esfericamente simétrico, os horizontes de evento, de Killing e o aparente se coincidem, assim é suficiente identificar o horizonte de Killing e verificar se ele é regular.

A noção de um buraco de minhoca, contem uma característica essencial que fornece uma definição rigorosa, sendo a sua “garganta”. Definida como uma superfície bidimensional de área mínima que separa duas regiões. No caso de espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos, com uma métrica como (3.1), podemos escrever os critérios de seleção de soluções de Buraco de Minhoca [36], como:

- A função radial $r(u) = e^{\beta(u)}$ deve ter um mínimo regular, $r = r_{min} > 0$, para algum valor de u . A posição desse mínimo é chamado garganta, $u = u_{th}$;
- A solução deve conter duas regiões assintoticamente planas, ou seja, a função radial $r(u) = e^{\beta} \rightarrow \pm\infty$ nos limites do intervalo da coordenada radial u ⁴.

³A temperatura de Hawking associa ao horizonte de um buraco negro uma temperatura devido a uma radiação de corpo negro. Tal radiação é proveniente de flutuações quânticas próximas ao horizonte. No apêndice A.3, é discutido um pouco sobre esta característica.

⁴Esta condição é para buracos de minhoca assintoticamente planos, porém podemos ter também buracos de minhoca não assintóticos.

- Para ser possível passar de uma região para outra, a solução não pode conter horizontes como descritos no caso de buraco negro, ou seja, $e^{2\gamma} > 0$.⁵

Pode se verificar que os critérios de seleção de buracos de minhoca implicam que na sua garganta devemos ter uma matéria exótica que não satisfaz a condição de energia nula, conforme discutido no apêndice [A.2](#).

⁵Esta condição não é suficiente para garantir que o buraco de minhoca seja atravessável. Além de que o espaço-tempo não deve possuir horizontes de evento, a matéria e as forças de marés na garganta devem ser tais que permitam a passagem de objetos através do mesmo.

Teorias Escalar Tensoriais

Apesar de a relatividade geral ser muito bem sucedida, existem outras teorias de gravitação mais gerais, entre elas estão as teorias $f(R)$, uma extensão da relatividade geral em que o termo linear do escalar de Ricci é substituído por uma função do mesmo, e as teorias escalar-tensoriais, no qual a interação gravitacional é mediada tanto pela métrica quanto pelo campo escalar. Em especial, as teorias escalar-tensoriais foram, inicialmente, formuladas por Ernst Pascual Jordan, inspiradas na ideia de Paul Dirac [17] sobre a variação da constante gravitacional. A primeira teoria escalar-tensorial que se destacou como uma alternativa para relatividade geral foi desenvolvida por Carl. H. Brans e Robert H. Dicke [4].

A teoria de Brans-Dicke modifica a ação de Einstein-Hilbert, adicionando um termo para a componente escalar do campo gravitacional. A lagrangiana desta teoria é escrita como

$$S_{BD} = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\Phi R - \frac{w}{\Phi} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi + \mathcal{L}_m \right], \quad (4.1)$$

onde o parâmetro adimensional w é conhecido como constante de acoplamento gravitacional, e o termo adicional é o termo cinético do campo escalar. Neste caso, quando o campo escalar, ou uma função dele, está multiplicando o escalar de Ricci na lagrangiana, dizemos haver um acoplamento não mínimo entre o campo escalar e a geometria. Temos também que, devido à ausência de um potencial para o campo escalar, o mesmo é dito ter massa nula. A generalização desta teoria, em que é considerado acoplamentos não-mínimos e um potencial para o campo escalar, é chamada de teoria escalar-tensorial geral (ou teoria de Bergmann–Wagoner–Nordtvedt), e sua lagrangiana é escrita como

$$S_{BWN} = \int \sqrt{-g} d^4x [f(\Phi)R - h(\Phi)\nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi - 2V(\Phi) + \mathcal{L}_m]. \quad (4.2)$$

sendo \mathcal{L}_m a lagrangiana dos outros tipos de matéria e $f(\Phi)$, $h(\Phi)$ e $V(\Phi)$ três funções arbitrárias. As equações de campos resultantes da lagrangiana a cima, possuem o seguinte formato

$$f(\Phi)G_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f(\Phi) = h(\Phi) \left[\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi \right] + g_{\mu\nu} V(\Phi), \quad (4.3)$$

$$\square\Phi = \frac{1}{2h} \left(\frac{df}{d\Phi} R - \frac{dh}{d\Phi} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi - \frac{dV}{d\Phi} \right). \quad (4.4)$$

Esta classe de teoria escalar-tensorial geral, descrita pela lagrangiana (4.2), pode ser mapeada para um sistema com um campo escalar minimamente acoplado a gravidade por uma transformação conforme da métrica. Teorias com campo escalar acoplado não minimamente a gravidade, são formuladas no referencial de Jordan (do inglês *Jordan's frame*), enquanto, quando o acoplamento é mínimo, são formuladas no referencial de Einstein (do inglês *Einstein's frame*). Em geral, as equações de campo são mais fáceis de serem estudadas no referencial de Einstein.

4.1 Transformação Conforme

A métrica \tilde{g} é dita conforme à g se $\tilde{g} = \Omega^2 g$, para Ω^2 uma função não nula e diferenciável. Seja A^α , B^α , C^α e D^α vetores quaisquer, temos que

$$\frac{g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{g_{\alpha\beta} C^\alpha D^\beta} = \frac{\tilde{g}_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{\tilde{g}_{\alpha\beta} C^\alpha D^\beta},$$

logo, ângulos e razões de magnitudes são preservados por transformações conformes, em particular a estrutura de cone de luz do espaço-tempo. Introduzindo a transformação conforme onde $\Omega^2 = f(\Phi)$, [37], temos que

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{f(\Phi)} \tilde{g}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\Phi} \right)^2 = \frac{1}{f^2} \left[fh + \frac{3}{2} \left(\frac{df}{d\Phi} \right)^2 \right], \quad (4.5)$$

para o caso onde a função $f(\Phi)$ seja positiva e finita em toda a região de interesse, a lagrangiana (4.2) pode ser reescrita como

$$S_E = \int \sqrt{-\tilde{g}} d^4 \tilde{x} \left[\tilde{R} - \epsilon \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - U(\Phi) + \tilde{\mathcal{L}}_m(\tilde{g}_{\mu\nu}) \right], \quad (4.6)$$

onde \tilde{R} é o tensor de Ricci construído a partir da métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e as outras quantidades são

$$U(\Phi) = \frac{2V(\Phi)}{f(\Phi)^2}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_m(\tilde{g}_{\mu\nu}) = \frac{\mathcal{L}_m(\tilde{g}_{\mu\nu})}{f(\Phi)^2}, \quad \epsilon := \text{ sinal} \left[fh + \frac{3}{2} \left(\frac{df}{d\Phi} \right)^2 \right]. \quad (4.7)$$

O índice E indica que em (4.6) a ação é formulada no referencial de Einstein. Neste caso o campo escalar se desacopla da geometria do espaço-tempo, e as equações de campo se tornam

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \epsilon \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} U + \tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{T}, \quad \tilde{\square} \varphi = \frac{\epsilon}{2} \frac{d}{d\varphi} (\tilde{\mathcal{L}}_m - U), \quad (4.8)$$

com o tensor energia-momento sendo construído a partir da lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}_m$ ¹. Dependendo do sinal de $\epsilon = \pm 1$, as soluções de (4.6) se dividem em duas classes: as canônicas, onde $\epsilon = +1$, isto é, a energia cinética do campo escalar é positiva definida, e as fantasmas, $\epsilon = -1$, com energia negativa.

Para o caso do campo eletromagnético, podemos notar a lagrangiana que o descreve é a mesma em ambos os referenciais. Aplicando a transformação conforme no tensor de Maxwell, temos que

$$F^{\mu\nu} = f(\Phi)^2 \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{F}_{\alpha\beta}.$$

dessa forma, a lagrangiana construída a partir da métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ se relaciona com da métrica $g_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{EM}(\tilde{g}_{\mu\nu}) = f(\Phi)^2 \mathcal{L}_{EM}(g_{\mu\nu}),$$

e assim podemos notar que a lagrangiana definida no referencial de Einstein fica idêntica ao de Jordan,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{EM}(\tilde{g}_{\mu\nu}) = \frac{\mathcal{L}_{EM}(\tilde{g}_{\mu\nu})}{f(\Phi)^2} \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{EM}(\tilde{g}_{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{EM}(g_{\mu\nu}). \quad (4.9)$$

No caso da teoria de Brans-Dicke, (4.1), as funções que descrevem o acoplamento do campo escalar são

$$f(\Phi) = \Phi \quad \text{e} \quad h(\Phi) = \frac{w}{\Phi}, \quad (4.10)$$

portanto, o campo escalar no referencial de Jordan desta teoria será dado por

$$\Phi' = -C\Phi \left| w + \frac{3}{2} \right|^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \Phi(u) = e^{-2\sigma u}, \quad 2\sigma = \frac{C}{\sqrt{\left| w + \frac{3}{2} \right|}}, \quad (4.11)$$

Note que os setores canônico e fantasma neste caso é definido pela constante de acoplamento w , de forma que para $w < -3/2$ o campo escalar possuirá energia cinética negativa,

¹O referencial de Jordan é considerado o físico, por conta do tensor Energia-Momento satisfazer a equação usual de conservação de energia, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$.

enquanto para $w > -3/2$ ela será positiva. As configurações de espaço-tempo no referencial de Einstein não são alteradas quando passamos para o referencial de Jordan, isso porque a transformação conforme de um referencial para outro preserva ângulos e formatos infinitesimais, alterando somente tamanho e curvatura. No referencial de Jordan, apenas teremos uma diferente relação entre constantes de integração e uma nova constantes de acoplamento que descreverá se o campo é canônico ou fantasma.

4.2 Soluções de vácuo na presença de campo escalar sem massa

Considerando o caso de vácuo na presença de um campo escalar sem massa (com um potencial nulo $U = 0$) no referencial de Einstein, as equações se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = \epsilon \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi, \quad \square \varphi = 0. \quad (4.12)$$

A derivação das soluções estáticas e esfericamente simétricas correspondentes, seguimos de perto o cálculo realizado em [6]. Para um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, ou seja, a métrica possui o formato (3.1), o campo escalar fica em função da coordenada radial apenas e os termos não nulos do tensor de Ricci são (3.4). Assim, as equações de campo podem ser escritas como

$$\gamma'' + (\gamma' - \alpha' + 2\beta')\gamma' = 0, \quad (4.13)$$

$$\gamma'' + 2\beta'' - (2\beta' + \gamma')\alpha' + 2\beta'^2 + \gamma'^2 = \epsilon\varphi'^2, \quad (4.14)$$

$$-e^{2\alpha-2\beta} + \beta'' - (\alpha' - \gamma' - 2\beta')\beta' = 0, \quad (4.15)$$

$$\varphi'' + (\alpha' - \gamma' - 2\beta')\varphi' = 0. \quad (4.16)$$

Ainda falta fazer a escolha do sistema de coordenadas, e como vimos, quando temos um problema com campo escalar, as coordenadas harmônicas ($\alpha = \gamma + 2\beta$) são bastante uteis. Então, fazendo essa escolha de sistema de coordenadas, a equação de Klein-Gordon (4.16) pode ser diretamente integrada para obter

$$\varphi'' = 0 \Rightarrow \varphi = Cu + \varphi_0. \quad (4.17)$$

E as equações para as funções métricas se tornam

$$\gamma'' = 0, \quad (4.18)$$

$$\beta'' - \beta'^2 - 2\beta'\gamma' = \frac{\epsilon}{2}C^2 \quad (4.19)$$

$$\gamma'' + \beta'' = e^{2\gamma+2\beta}. \quad (4.20)$$

Para integrar a última equação primeiro fazemos a substituição $y = \gamma + \beta$, em seguida integramos,

$$2y'y'' = 2y'e^{2y} \Rightarrow y'^2 = e^{2y} \pm k^2. \quad (4.21)$$

Agora fazendo a substituição $y = -\ln[s]$ ficamos com

$$s'^2 = 1 \pm k^2 s^2. \quad (4.22)$$

Note que a solução para a função $s(u)$ dependerá do valor da constante de integração k , neste caso, uma forma de escrever solução é

$$e^{-\gamma(u)-\beta(u)} = s(u) \equiv s(k, u) = \begin{cases} k^{-1} \sinh(ku), & k > 0, \\ u, & k = 0, \\ k^{-1} \sin(ku), & k < 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

A escolha do ponto zero para u remove uma possível constante de integração. Com o resultado acima, a métrica é escrita como

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - \frac{e^{-2\gamma}}{s(k, u)^2} \left[\frac{du^2}{s(k, u)^2} + d\Omega^2 \right]. \quad (4.24)$$

Para todos os casos, a região $u = 0$ representa um infinito espacial, uma vez que a função radial $e^\beta \rightarrow \infty$, logo podemos escolher $\gamma(0) = 0$, sob uma escolha adequada de escala da coordenada temporal no intuito de obter uma solução assintoticamente plana (Minkowski). Integrando a equação (4.18) temos $\gamma = -hu$, com h sendo outra constante de integração. Por último, a equação (4.19) nos fornece uma relação para todas essas constantes, dessa forma a solução se torna

$$ds^2 = e^{-2hu} dt^2 - \frac{e^{2hu}}{s(k, u)^2} \left[\frac{du^2}{s(k, u)^2} + d\Omega^2 \right], \quad \pm k^2 = \frac{\epsilon C^2}{2} + h^2. \quad (4.25)$$

A solução (4.25) é conhecida como solução de Fisher, pois foi encontrada, pela primeira vez, para um campo escalar com energia positiva ($\epsilon = +1$), por I. Z. Fisher em 1948, [23]. No caso do campo escalar ser fantasma ($\epsilon = -1$) chamamos de solução de anti-Fisher.

Para uma solução de buraco negro, a massa geométrica da solução (4.25) pode ser obtida comparando com a solução de Schwarzschild, onde

$$\gamma_{sch}(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} \right). \quad (4.26)$$

No caso de Schwarzschild a métrica é escrita usando as coordenadas quasi-globais, enquanto na solução de Fisher/anti-Fisher é usado as coordenadas harmônicas. Comparando o assintótico de Schwarzschild ($r \rightarrow \infty$) com o de Fisher ($u \rightarrow 0$) notamos que as coordenadas se relacionam como $u \propto r^{-1}$, logo

$$\gamma_{sch}(u) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2mu) \Rightarrow \gamma'_{sch}(0) = -m. \quad (4.27)$$

Para Fisher, temos

$$\gamma_f(u) = -hu, \quad (4.28)$$

em que a derivada de γ_f em $u = 0$, ou seja, no assintótico, nos fornece

$$\gamma'_f(0) = -h, \quad (4.29)$$

dessa forma, a massa geométrica para (4.25) é $m = h$ [9]. Como este parâmetro deve ser positivo definido, temos que $h > 0$. O mesmo pode ser feito para uma solução de buraco de minhoca, no entanto, para isso precisamos escrever a métrica no formato da métrica de Morris-Thorne antes de comparar com Schwarzschild.

Na tabela 4.1 temos as possíveis relações entre constantes. O que podemos notar é em certos casos obtemos valores imaginários para as constantes. Para $k = 0$ e $\epsilon = +1$, temos que h é um número complexo, logo a solução não é real. Temos também que, para $k < 0$ e $\epsilon = +1$, a constante k é imaginária, o que mapeia este caso no seu equivalente no setor fantasma. Então, de fato temos apenas 4 soluções independentes.

-	$\epsilon = +1$	$\epsilon = -1$
$k > 0$	$k^2 = \frac{C^2}{2} + h^2$	$k^2 = -\frac{C^2}{2} + h^2$
$k = 0$	$\frac{C^2}{2} = -h^2$	$\frac{C^2}{2} = h^2$
$k < 0$	$-k^2 = \frac{C^2}{2} + h^2$	$k^2 = \frac{C^2}{2} - h^2$

Tabela 4.1.: Possíveis relações de constantes nas soluções de Fisher e Anti-Fisher.

4.3 Classificação das soluções de Fisher e anti-Fisher

As soluções de Fisher e anti-Fisher descrevem uma variedade de configurações, que dependem da escolha do sinal da constante de integração k . Na tabela 4.1 vemos em cada setor (canônico onde $\epsilon = +1$ e fantasma quando $\epsilon = -1$) a solução se divide em três ramos, no entanto, de todas as soluções possíveis em cada setor, apenas 4 são de fato independentes. Analisamos rapidamente estas soluções independentes:

- 1 **Ramo A** ($k > 0$): Neste ramo a solução e a relação entre as constantes são escritas como

$$ds^2 = e^{-2hu} dt^2 - \frac{k^2 e^{2hu}}{\sinh(ku)^2} \left[\frac{k^2 du^2}{\sinh(ku)^2} + d\Omega^2 \right], \quad k^2 = h^2 + \frac{\epsilon C^2}{2}. \quad (4.30)$$

Passando esta solução para as coordenadas quasi-globais, usando a transformação

$$e^{-2ku} = 1 - \frac{2k}{\rho} \equiv P(\rho), \quad (4.31)$$

ficamos com

$$ds^2 = P^a dt^2 - P^{-a} d\rho^2 - P^{1-a} \rho^2 d\Omega^2, \quad \varphi = -\frac{C}{2k} \ln P, \quad (4.32)$$

sendo as constantes

$$a = \frac{h}{k}, \quad a^2 = 1 - \frac{\epsilon C^2}{2}. \quad (4.33)$$

Neste sistema de coordenada, a região assintótica é em $\rho \rightarrow \infty$, enquanto em $\rho = 0$ e $\rho = 2k$ podemos ter uma singularidade ou um horizonte, a depender do valor de a . No que lhe concerne, o valor de a dependerá se estamos lidando com um campo escalar canônico, onde $\epsilon = +1$, ou fantasma onde $\epsilon = -1$.

setor canônico : Neste setor a relação entre as constantes implica que $|a| < 1$, então, se $h > 0$ temos $a < 1$, caso contrário $h < 0$ temos $a > -1$. Em ambos os casos a função radial $r \rightarrow 0$ em $\rho = 2k$ e as geodésicas não possuem uma continuação além dessa região, logo, para $\epsilon = +1$, esta solução representa uma singularidade nua.

setor fantasma : Neste caso a relação (4.33) implica que $|a| > 1$, então para $h < 0$ retornarmos para o caso no setor canônico, onde $a < -1$, enquanto para $h > 0$ temos $a > 1$. Neste último caso, podemos identificar que a função radial, $r(\rho) = P^{(1-a)/2}\rho$, possui um mínimo em $\rho = \rho_{th} = k(a + 1)$, que corresponde a uma garganta com o tamanho

$$r(\rho_{th}) = k(a + 1)^{(a+1)/2}(a - 1)^{(1-a)/2}. \quad (4.34)$$

No limite $\rho \rightarrow 2k$ a função radial tende a infinito. Na superfície $\rho = 2k$ os critérios de seleção de buraco negro são satisfeitos, identificando um horizonte de eventos, porém para a solução possuir uma continuação analítica além deste horizonte devemos ter a seguinte lei de quantização $a = 2, 3, 4, \dots$. A principal característica desse horizonte é sua área superficial infinita que implicaria em uma temperatura Hawking nula, buracos negros com tais características são chamados de Buracos Negros Frios. Para $a = 1$ temos que $h = k \rightarrow C = 0$ que reduz a solução a Schwarzschild.

2 Ramo B ($k = 0$) : Neste caso a métrica e a relação de constantes se escrevem

$$ds^2 = e^{-2hu} dt^2 - \frac{e^{2hu}}{u^2} \left[\frac{du^2}{u^2} - d\Omega^2 \right], \quad h^2 = -\frac{\epsilon C^2}{2}. \quad (4.35)$$

Passando para coordenada quasi-global, que para a métrica acima corresponde a $\rho = 1/u$, temos

$$ds^2 = e^{-2h/\rho} dt^2 - e^{2h/\rho} [d\rho^2 - \rho^2 d\Omega^2]. \quad (4.36)$$

Esta solução também é assintoticamente plana para $\rho \rightarrow \infty$, enquanto no outro extremo, dependendo do valor de h a solução admite estruturas diferentes.

setor canônico: Para $\epsilon = +1$ a relação entre as constantes nos fornece um valor imaginário para h , dessa forma.

setor fantasma: Agora para $\epsilon = -1$ a constante h é real e conforme $\rho \rightarrow 0$ temos um horizonte, uma vez que $e^\gamma \rightarrow 0$, possuindo uma área superficial infinita. Contudo, como a continuação desta solução além do horizonte não é possível, o

horizonte é dito singular, devido as geodésicas terminarem nele, logo esta solução representa uma singularidade nua.

3 **Ramo C** ($k < 0$) : No último caso temos que

$$ds^2 = e^{-2hu} dt^2 - \frac{k^2 e^{2hu}}{\sin(ku)^2} \left[\frac{k^2 du^2}{\sin(ku)^2} - d\Omega^2 \right], \quad k^2 = -\frac{\epsilon C^2}{2} - h^2. \quad (4.37)$$

Devido à função trigonométrica no denominador da função radial, podemos diretamente identificar as regiões assintóticas ($r \rightarrow \infty$) como sendo a solução de $\sin(ku) = 0$, logo, $u = n\pi/k$ com $n = 0, 1, 2, \dots$, logo, esta solução deve ter a configuração de um buraco de minhoca. Quando passamos esta solução para as coordenadas quasi-globais temos

$$ds^2 = e^{-2hu} dt^2 - e^{2hu} [d\rho^2 - (k^2 + \rho^2)d\Omega^2], \quad (4.38)$$

sendo $\rho = |k| \cot(|k|u)$, definida em todo eixo real. As regiões assintóticas nesta coordenada agora estão em $\rho \rightarrow \pm\infty$, a garganta está localizada em $\rho = -h$, e possui o seguinte tamanho:

$$r(\rho_{th}) = e^{-\frac{h}{|k|} \arctan(h/|k|)} (h^2 + k^2)^{1/2}. \quad (4.39)$$

Podemos ainda verificar que o escalar de Kretschmann é finito em toda região, dessa forma, neste caso temos um buraco de minhoca.

setor canônico: Assim como no ramo anterior, para $\epsilon = +1$ teremos pelo menos uma constante de integração com valor imaginário.

setor fantasma: Agora, para $\epsilon = -1$ teremos apenas constantes reais, e assim a solução de fato descreve um buraco de minhoca.

Então, podemos identificar na solução de Fisher que somente em um caso, quando $k > 0$, temos uma solução real que representa uma singularidade nua, devido à presença de uma singularidade em $\rho = 2k$ que não está limitada por nenhuma superfície. A situação é completamente diferente na solução de anti-Fisher, que contém tanto buraco negro, singularidade nua e buraco de minhoca. O buraco negro presente na solução de anti-Fisher, para $k > 0$, apresenta uma garganta (valo mínimo para função radial) e a área superficial do horizonte de evento é infinita, levando sua temperatura Hawking a ser

nula. No caso em que $k = 0$, a solução apresenta uma singularidade em $\rho = 0$ e nenhum horizonte de evento, logo uma singularidade nua. O último caso, onde $k < 0$, a solução representa um buraco de minhoca assimétrico² com a garganta localizada em $\rho = -h$.

4.4 Análise das soluções de anti-Fisher

Soluções de buraco negro são configurações de espaço-tempo que requerem uma ou mais superfícies que limitam uma singularidade do resto do espaço-tempo, chamadas de horizontes, podendo ou não ser assintoticamente plano. Conforme a termodinâmica de buracos negros, podemos associar ao horizonte de eventos do buraco negro uma temperatura que é inversamente proporcional à sua área, assim, quando temos uma solução de buraco negro cuja área superficial é infinita, sua temperatura é nula. A classificação de soluções desse tipo é buracos negros frios, devido a sua temperatura Hawking nula. Soluções de buracos negros frios são normalmente encontradas em teorias escalares tensoriais. A presença de um campo escalar no espaço-tempo, mesmo que na forma mais simples (minimamente acoplado à geometria), favorece o aparecimento de singularidades nuas, a não ser por alguns casos específicos onde tal campo gera soluções de buracos negros frios (com área superficial infinita) e até mesmo buracos de minhoca (quando consideramos que o campo escalar possui uma energia cinética negativa, que chamamos de campo fantasma).

Dentre os ramos possíveis da solução de Fisher, apenas um é uma solução real, descrevendo uma singularidade nua, enquanto na solução de anti-Fisher temos tanto um buraco negro frio quanto um buraco de minhoca. Nesta seção analisaremos estas soluções de buraco negro frio.

4.4.1 Buraco Negro Frio

De todos as possíveis soluções de vácuo-escalar, com o campo escalar sem massa e minimamente acoplado, apenas quatro são independentes. Dessas soluções independen-

²O Buraco de Minhoca neste caso é dito assimétrico devido as duas regiões assintóticas apresentarem comportamentos diferentes para partículas testes. Uma análise do potencial efetivo desta solução mostra que de um lado da garganta as partículas são atraídas enquanto do outro elas são repelidas.

tes, apenas uma possui configuração de buraco negro. A primeira se encontra no setor fantasma ($\epsilon = -1$) com $k > 0$, onde a métrica é escrita como

$$ds^2 = P^a dt^2 - P^{-a} d\rho^2 - P^{1-a} \rho^2 d\Omega^2, \quad P \equiv P(\rho) = \left(1 - \frac{2k}{\rho}\right), \quad (4.40)$$

com

$$a = \frac{h}{k}, \quad a^2 = 1 + \frac{C^2}{2k} \quad \text{e} \quad \varphi = -\frac{C}{2k} \ln |P|. \quad (4.41)$$

Na solução acima, temos duas regiões singulares, uma em $\rho = 0$ e outra em $\rho = 2k$, e uma região assintoticamente plana (Minkowski) conforme $\rho \rightarrow \infty$. É possível verificar que a superfície $\rho = 2k$ corresponde a um horizonte de eventos, caracterizando a solução como um buraco negro. No entanto, a configuração do espaço-tempo na região $0 < \rho < 2k$ dependerá do valor da constante a . O comportamento do campo escalar está exposto na figura 4.1.

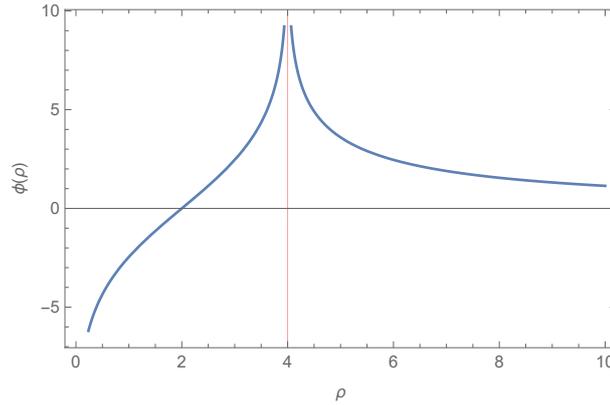


Figura 4.1.: Gráfico do campo escalar para métrica (4.41). A linha vertical vermelha indica o horizonte de eventos.

A relação entre as constantes de integração, em (4.41), nos fornece que $|a| > 1$. Verificando os critérios de seleção de buraco negro, para que a superfície $\rho = 2k$ seja um horizonte de eventos temos que $a > 1$, além disso, a deve ser um número inteiro para ser possível uma continuação analítica através do horizonte, logo

$$a = 2, 3, 4, \dots \quad (4.42)$$

O caso em que $a = 1$, recuperamos a solução de vácuo (Schwarzschild), uma vez que $a = 1 \rightarrow C = 0$.

Reescrevendo a função radial da métrica (4.40) como

$$r(\rho)^2 = \rho^2 \left(1 - \frac{2k}{\rho}\right)^{1-a} = \frac{\rho^{a+1}}{(\rho - 2k)^{a-1}}, \quad (4.43)$$

e a derivando com respeito a coordenada radial, ficamos com

$$\partial_\rho r(\rho)^2 = \partial_\rho \left(\frac{\rho^{a+1}}{(\rho - 2k)^{a-1}} \right) = \frac{2\rho^a}{(\rho - 2k)^a} [\rho - k(a + 1)]. \quad (4.44)$$

Assim, podemos identificar um mínimo da função radial, ou seja, uma “garganta”, na região $\rho > 2k$ em $\rho = \rho_{th} = k(a + 1)$. E conforme nos aproximamos do horizonte em $\rho = 2k$, $r(\rho)^2$ diverge, caracterizando um horizonte com área infinita. Apesar dessa divergência da função radial, a regularidade do espaço-tempo não é afetada, podemos ver isso usando o escalar de Kretschmann, que para a solução em questão possui o seguinte formato

$$\mathcal{K} = 4 \frac{(\rho - 2k)^{2a-4}}{\rho^{4+2a}} [12h^2\rho^2 - 8h(3hk + k^2 + 2h^2)\rho + 7h^2(2k^2 + h^2) + 8hk(k^2 + 2h^2) + 3k^4]. \quad (4.45)$$

Para o caso de Schwarzschild, $a \rightarrow 1$, temos $h = a$ e o escalar de Kretschmann reduz para

$$\mathcal{K} = \frac{48k^2(\rho^2 - 4k\rho + 4k^2)}{\rho^6(\rho - 2k)^2} = \frac{48k^2}{\rho^6}, \quad (4.46)$$

onde podemos identificar k como sendo massa geométrica m , (3.24). Analisando este escalar vemos que ele é regular em toda a região externa ao horizonte, $\rho > 2k$, e no infinito tende a zero. Próximo ao horizonte ele pode ser aproximado como

$$\lim_{\rho \rightarrow 2k} \mathcal{K} \approx (\rho - 2k)^{2a-4}, \quad (4.47)$$

e sendo $a \geq 2$, temos que o escalar de Kretschmann é nulo no horizonte. Porém, na região interna, conforme $\rho \rightarrow 0$, o escalar diverge, indicando uma singularidade. Agora, para caracterizar a singularidade e o horizonte, assim como o movimento de partículas, é necessário analisar o potencial efetivo para uma partícula teste neste espaço-tempo. Neste caso ele é escrito como

$$V_{ef}(\rho) = P^a \left(\mathcal{E} + \frac{L^2}{\rho^2} P^{a-1} \right). \quad (4.48)$$

Note que tanto a função radial quanto o potencial efetivo, possuem diferentes comportamentos, na região interna ao horizonte, dependendo se a é um número ímpar ou par. Isso se deve à troca de sinal da função $P(\rho)$ quando passamos pelo horizonte.

Caso par

Para valores de a pares, ou seja, $a = 2n$ (sendo n um número inteiro positivo não nulo), a métrica na região interna ao BNF muda completamente sua assinatura, passando de $(+, -, -, -)$ para $(-, +, +, +)$ e podemos escrever a métrica, para $\rho < 2k$, como

$$ds^2 = -|P|^{-2n}d\rho^2 + |P|^{2n}dt^2 + |P|^{1-2n}\rho^2d\Omega^2. \quad (4.49)$$

Na métrica acima a coordenada temporal é ρ e a radial é t . Tanto a região interna quanto a externa são do tipo R, logo a singularidade é do tipo tempo. As curvas geodésicas são contínuas e suaves através de $\rho = 2k$, isto devido ao fato das equações geodésicas dependerem somente do símbolo de Christoffel, que é invariante pela transformação $g_{\mu\nu} \rightarrow -g_{\mu\nu}$. Porém, tal transformação faz com que geodésicas do tipo tempo se transformem em do tipo espaço. A estrutura causal, assim como o diagrama de Carter-Penrose, são similares à solução de Reissner-Nordström extremo (diagrama à esquerda em 3.10).

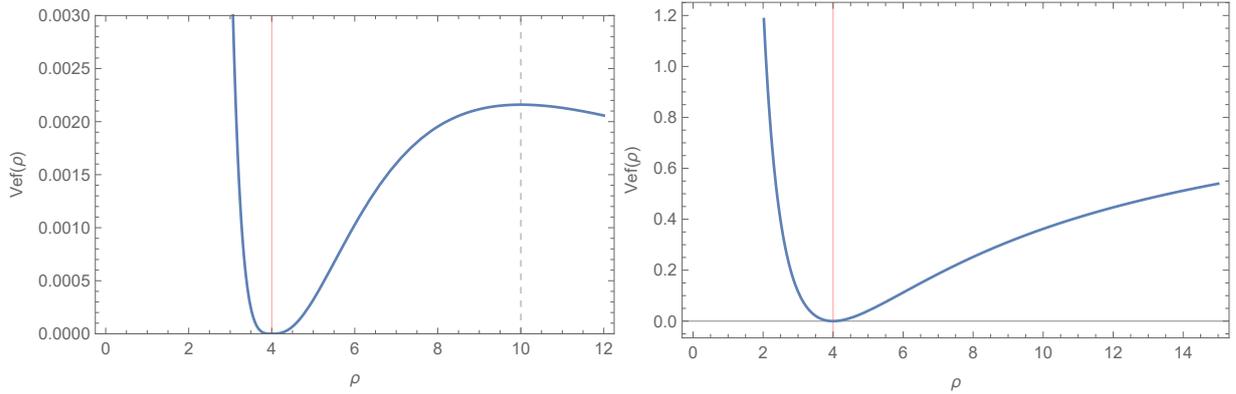


Figura 4.2.: Gráficos do potencial efetivo para geodésicas nulas (esquerda) e do tipo tempo (direita), no caso em que a é par. A linha vertical vermelha separa as regiões interna e externa ao horizonte de eventos, enquanto a linha vertical tracejada indica um mínimo da função. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 2$, $h = 4$ e $L = 1$.

Caso ímpar

Caso a seja ímpar, a região externa do BNF é do tipo R enquanto a interna é do tipo T com uma singularidade do tipo espaço, atingida em um tempo finito por qualquer partícula que percorra uma geodésica do tipo tempo nesta solução. Dessa forma, a estrutura causal, incluindo o diagrama de Carter-Penrose, se torna similar à Schwarzschild (diagrama 3.6).

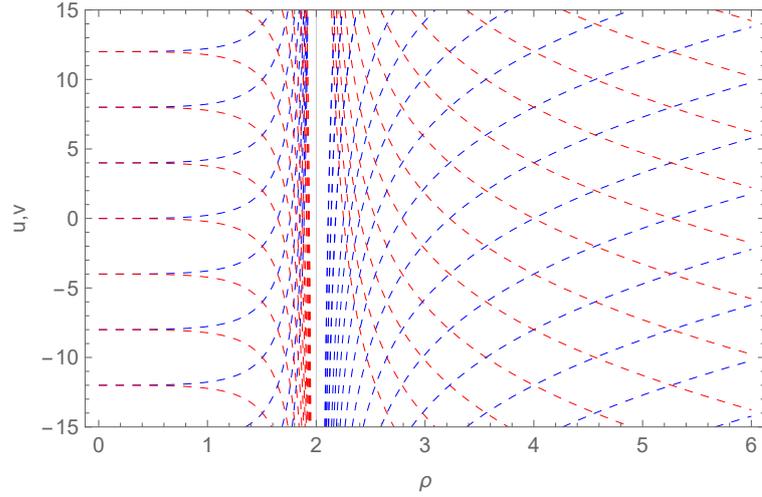


Figura 4.3.: Cones de Luz na solução de anti-Fisher para $a = 2$. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $h = 2$

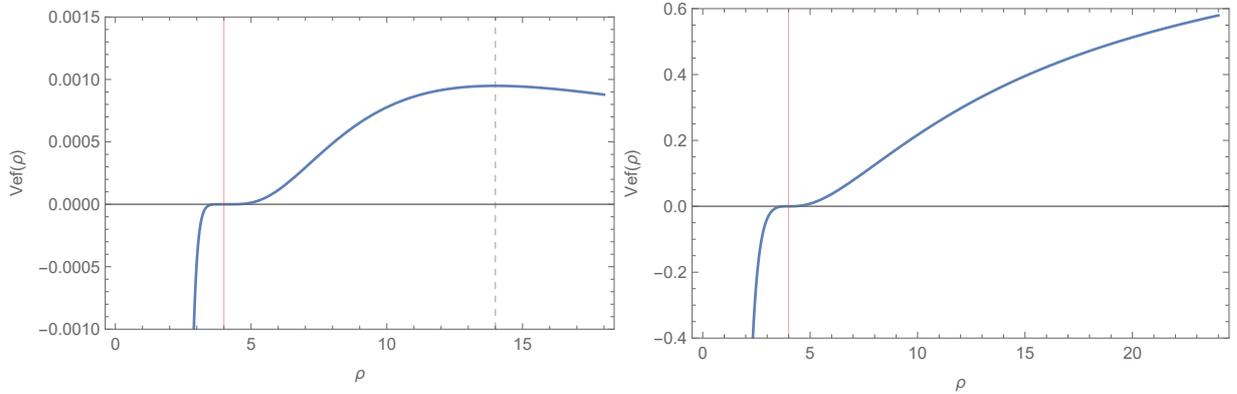


Figura 4.4.: Gráficos do potencial efetivo para geodésicas nulas (esquerda) e do tipo tempo (direita), no caso em que a é ímpar. A linha vertical vermelha separa as regiões interna e externa ao horizonte de eventos, enquanto a linha vertical tracejada indica um mínimo da função. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 2$, $h = 6$ e $L = 1$.

4.4.2 Buraco de Minhoca

Outro caso independente das soluções de anti-Fisher é para $k < 0$, descrito pela métrica (4.37). Após passar para coordenada quasi-global, a métrica é reescrita como

$$ds^2 = e^{-2hu} dt^2 - e^{2hu} [d\rho^2 + (\rho^2 + k^2)d\Omega^2], \quad (4.50)$$

onde temos

$$u = \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{\rho}{k}\right), \quad \frac{C^2}{2} = k^2 + h^2 \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{C}{k} \arctan\left(\frac{\rho}{k}\right). \quad (4.51)$$

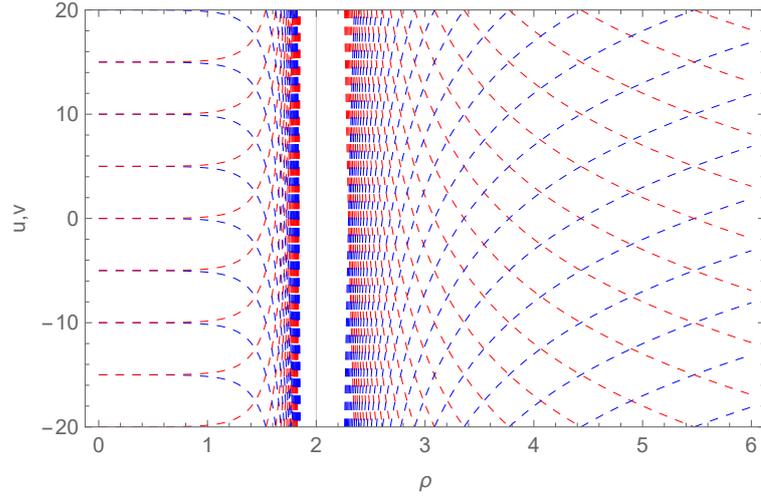


Figura 4.5.: Cones de Luz na solução de anti-Fisher para $a = 3$. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $h = 3$

Esta solução descreve um buraco de minhoca e a coordenada radial está definida no limite $-\infty < \rho < \infty$. O escalar de Kretschmann desta solução é escrito como

$$\mathcal{K} = 4 e^{-4\frac{h}{k} \arctan(\frac{\rho}{k})} \frac{[7h^4 + 3k^4 + 16h^3\rho - 8hk^2\rho - 2h^2(k^2 - 6\rho^2)]}{(k^2 + \rho^2)^4}. \quad (4.52)$$

Este escalar é regular em todo o limite da coordenada ρ , logo a solução é regular e não possui nenhuma singularidade. A garganta desse buraco de minhoca se encontra em $\rho = -h$ e possui o tamanho

$$r(h) = e^{\frac{h}{k} \arctan(\frac{h}{k})} \sqrt{k^2 + h^2}. \quad (4.53)$$

Note que esta solução não é simétrica, uma vez que a garganta se encontra deslocada do centro da coordenada. Além disso, a solução é atrativa para partículas testes de um lado ($\rho > -h$) e repulsiva de outro ($\rho < -h$). Na figura 4.6 temos os gráficos de algumas funções importantes para a interpretação dessa solução. Desses gráficos temos que esta solução permite órbitas circulares instáveis tanto de fótons quanto de matéria na região próxima à garganta, e a densidade de energia e pressão são negativos em toda a solução, sendo mais negativos próximo à garganta.

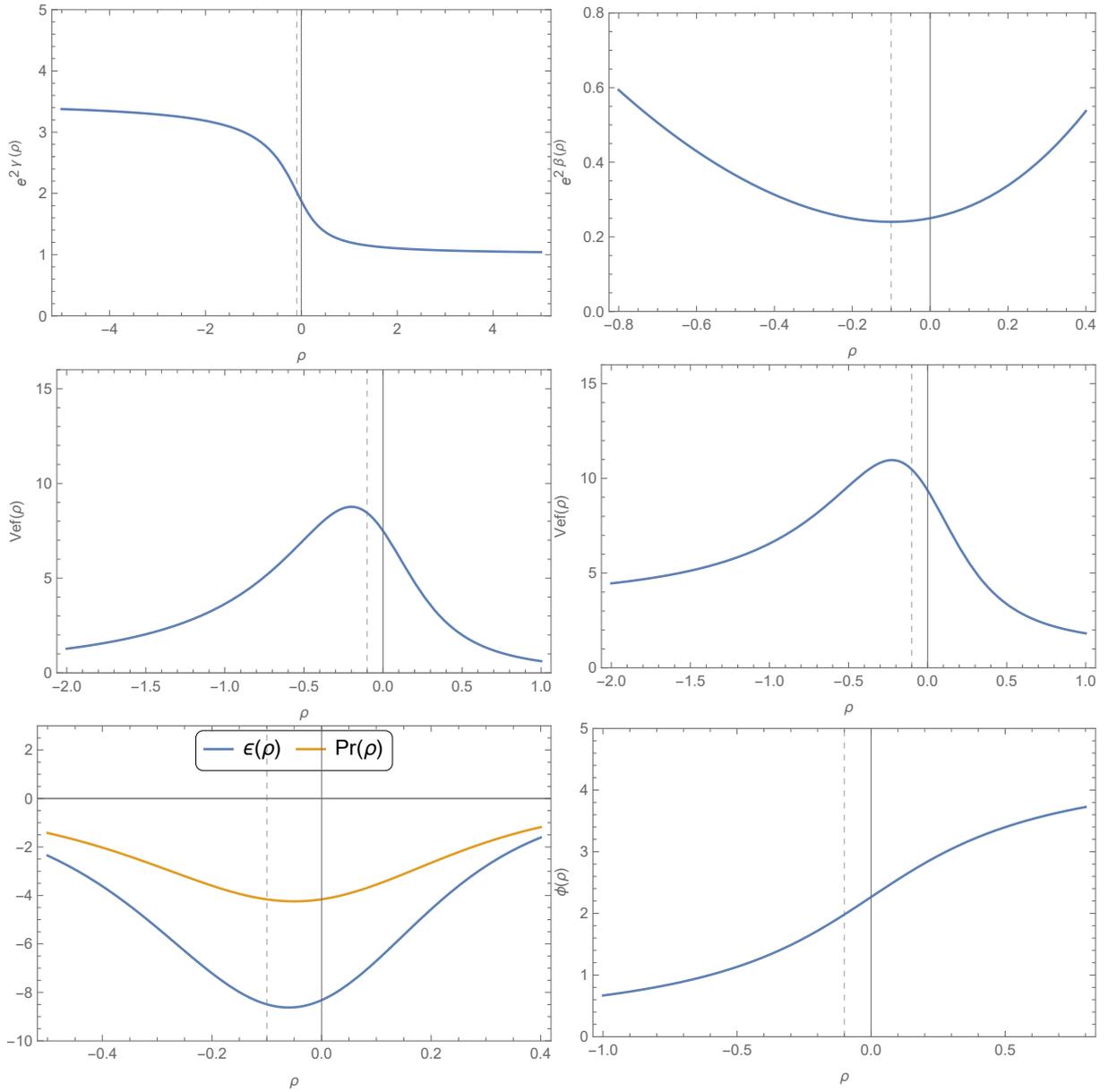


Figura 4.6.: Gráficos de algumas funções métricas de (4.50). Os dois gráficos mais acima são das funções métricas $e^{2\gamma}$ (esquerda) e $e^{2\beta}$ (direita). Os dois gráficos ao centro são do potencial efetivo para geodésicas nulas (esquerdo) e do tipo espaço (direito). A baixo temos as densidades de energia e pressão próximo a garganta (esquerda) e o comportamento do campo escalar (direita). A linha pontilhada, em todos os casos, indica a posição da garganta do buraco de minhoca.

Soluções estáticas e esfericamente simétricas na teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar

Neste capítulo vamos identificar e analisar as soluções de buraco negro e buraco de minhoca da teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar, que descreve a geometria de um espaço-tempo na presença de um campo escalar sem massa e um campo elétrico. As soluções apresentadas aqui são obtidas no referencial de Einstein, onde o campo escalar, assim como o campo elétrico, se encontram minimamente acoplados à geometria. Tais soluções podem ser mapeadas na teoria escalar tensorial geral de Bergmann-Wagoner-Nordtvedt, definida no referencial de Jordan, utilizando da transformação conforme. O resultado do estudo das soluções desta teoria foram publicados em [22].

5.1 Equações de Campo e Solução Geral

A ação da teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar é escrita como o escalar de Ricci mais as lagrangianas de um campo escalar sem massa e um campo eletromagnético,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - \epsilon \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi + F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (5.1)$$

A ação acima é construída no referencial de Einstein, sendo ambos os campos minimamente acoplados à gravidade. A constante $\epsilon = \pm 1$ é introduzida para indicar a possibilidade do campo escalar possuir tanto energia cinética positiva quanto negativa. Esta ação

está descrevendo a interação entre gravidade e campo escalar sem massa na presença de um campo eletromagnético em quatro dimensões. As equações de campo geradas pela variação desta ação são:

$$R_{\mu\nu} = \epsilon \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \left(2F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (5.2)$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0, \quad (5.3)$$

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \Phi = 0. \quad (5.4)$$

No caso estático e esfericamente simétrico as funções métricas são todas dependentes apenas da coordenada radial e a métrica assume a forma (3.1). Os termos não nulos do tensor de Ricci para esta métrica se escrevem

$$R_{00} = e^{-2\alpha+2\gamma} [\gamma'' + (\gamma' - \alpha' + 2\beta')\gamma'], \quad (5.5)$$

$$R_{11} = -\gamma'' - 2\beta'' + (2\beta' + \gamma')\alpha' - 2(\beta')^2 - (\gamma')^2, \quad (5.6)$$

$$R_{22} = 1 + e^{-2\alpha+2\beta} [(\alpha' - \gamma' - 2\beta')\beta' - \beta'']. \quad (5.7)$$

O campo elétrico gerado por uma carga pontual em um espaço-tempo descrito pela métrica (3.1) possui apenas uma componente na direção radial, logo, os termos não nulos do tensor de Maxwell são os termos que representam esta componente, sendo

$$F_{10} = -F_{01} = E \equiv E(u). \quad (5.8)$$

E a equação de Maxwell nos fornecerá

$$E' + (\alpha' + \gamma' - 2\beta')E = 0 \quad \Rightarrow \quad E(u) = Q e^{\alpha+\gamma-2\beta}, \quad (5.9)$$

onde Q é uma constante de integração que pode ser interpretada como a carga elétrica. Da mesma forma, podemos assumir que o campo escalar é uma função apenas da coordenada radial u ($\Phi \equiv \Phi(u)$), portanto

$$\Phi'' + (\alpha' - \gamma' - 2\beta')\Phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi' = C e^{\alpha-\gamma-2\beta}, \quad (5.10)$$

com C sendo uma constante de integração, que representa uma carga escalar. Combinando os resultados acima para os campos com os termos não nulos do tensor de Ricci obtemos as seguintes equações

$$\gamma'' + (\gamma' - \alpha' + 2\beta')\gamma' = Q^2 e^{2\alpha-4\beta}, \quad (5.11)$$

$$\gamma'' + 2\beta'' - (2\beta' + \gamma')\alpha' + 2\beta'^2 + \gamma'^2 = -\epsilon C^2 e^{2\alpha-2\gamma-4\beta} + Q^2 e^{2\alpha-4\beta}, \quad (5.12)$$

$$\beta'' - (\alpha' - \gamma' - 2\beta')\beta' = e^{2\alpha-2\beta} - Q^2 e^{2\alpha-4\beta}. \quad (5.13)$$

Como vimos, o sistema de coordenadas harmônicas geralmente é o mais conveniente para resolver os sistemas de equações quando temos a presença de um campo escalar. Portanto, trabalhando nesta coordenada, onde $\alpha(u) = \gamma(u) + 2\beta(u)$, ficamos com as seguintes equações:

$$\gamma'' = Q^2 e^{2\gamma}, \quad (5.14)$$

$$\beta'' - \beta'^2 - 2\beta'\gamma' = -\frac{1}{2}\epsilon C^2, \quad (5.15)$$

$$\gamma'' + \beta'' = e^{2\gamma+2\beta}. \quad (5.16)$$

Note como este sistema de equação é bastante similar ao caso sem carga, (4.18-4.20), a não ser pela equação para γ , que apresenta agora um termo devido à carga elétrica. Portanto, a métrica aqui terá o mesmo formato que (4.24), dessa forma, podemos identificar já que em $u = 0$ temos um infinito espacial. A solução para γ é obtida a partir da integração da equação (5.14), que fornece

$$\gamma'^2 = Q^2 e^{2\gamma} \pm \lambda^2, \quad (5.17)$$

aqui λ é mais uma constante de integração. Reescrevendo esta equação usando $\gamma(u) = -\ln[h(u)]$, ficamos com

$$h'^2 = Q^2 \pm \lambda^2 h^2. \quad (5.18)$$

Comparando esta equação com (4.22) obtemos a relação $h(u) = Qs(\lambda, u + u_0)$, onde é introduzido uma constante u_0 devido à escolha do zero da coordenada quando obtemos a solução $s(k, u)$. Finalmente, a solução geral da métrica será

$$ds^2 = \frac{Q^{-2} dt^2}{s^2(\lambda, u + u_0)} - Q^2 \frac{s^2(\lambda, u + u_0)}{s^2(k, u)} \left(\frac{du^2}{s^2(k, u)} + d\Omega^2 \right). \quad (5.19)$$

A função $s(\lambda, u + u_0)$ é definida similarmente a $s(k, u)$, (4.23). Com a solução acima podemos escrever os campos como

$$\Phi(u) = Cu, \quad e \quad E(u) = \frac{1}{Qs^2(\lambda, u + u_0)}. \quad (5.20)$$

E usando a equação (5.15) obtemos a seguinte relação entre as constantes de integração:

$$\pm k^2 \mp \lambda^2 = \frac{\epsilon C^2}{2}. \quad (5.21)$$

Os sinais na relação acima são escolhidos conforme o possível valor para a constante, sendo + para $k > 0$ e - para $k < 0$. Sem perda de generalidade podemos normalizar a função métrica $g_{00} = 1$ no assintótico $u = 0$ impondo que

$$s(\lambda, u_0) = \frac{1}{Q}. \quad (5.22)$$

Dessa forma podemos reescrevendo a solução geral apenas em função de $s(.,.)$, como sendo:

$$ds^2 = \frac{s^2(\lambda, u_0)dt^2}{s^2(\lambda, u + u_0)} - \frac{s^2(\lambda, u + u_0)}{s^2(\lambda, u_0)s^2(k, u)} \left(\frac{du^2}{s^2(k, u)} + d\Omega^2 \right). \quad (5.23)$$

Ficamos então com quatro constantes de integração: λ , k , Q and C . outra importante constante é a massa geométrica m da configuração, que podemos obter ao comparar (5.23) com a métrica de Schwarzschild, (4.27), logo

$$\gamma'(u) = -\frac{s'(\lambda, u + u_0)}{s(\lambda, u + u_0)} \Rightarrow m = \frac{s'(\lambda, u_0)}{s(\lambda, u_0)}. \quad (5.24)$$

Agora usando a equação (5.18) no assintótico $u \rightarrow 0$, as relações (5.21,5.24) e a condição (5.22), podemos escrever a seguinte relação entre todos os parâmetros que temos nessa teoria,

$$m^2 - Q^2 = \pm \lambda^2 = \pm k^2 - \frac{\epsilon C^2}{2}. \quad (5.25)$$

A solução (5.23) apresenta diversas configurações de espaço-tempo, a depender do valor das constantes λ e k , e da natureza do campo escalar, $\epsilon = \pm 1$. Note que para $u \rightarrow 0$ temos que $s(k, 0) \rightarrow 0$ para todos os valores de k , assim podemos identificar duas superfícies de interesse para a métrica (5.23). A primeira superfície é em $u = -u_0$, os termos da métrica se comportam como

$$e^{2\gamma} \rightarrow \infty, \quad e^{2\alpha} \rightarrow 0, \quad e \quad e^{2\beta} \rightarrow 0,$$

caracterizando uma singularidade central. A segunda superfície é em $u = 0$, onde

$$e^{2\gamma} \rightarrow 1, \quad e^{2\alpha} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad e^{2\beta} \rightarrow \infty,$$

identificado uma superfície assintoticamente plana nas coordenadas harmônicas. Nas coordenadas quasi-globais ($\alpha = -\gamma$) a região assintoticamente plana é identificada por $e^{2\gamma} \rightarrow 1$, $e^{2\alpha} \rightarrow 1$ e $e^{2\beta} \rightarrow \infty$, no entanto, quando trabalhamos nas coordenadas harmônicas temos que $e^{2\alpha} \rightarrow \infty$, uma vez que $\alpha = \gamma + 2\beta$. Portanto, a solução geral (5.23) irá conter pelo menos uma região assintótica e uma singularidade central. A estrutura do espaço-tempo também pode conter um ou mais horizontes de evento, ou até nenhum horizonte. De todos os casos possíveis, queremos analisar as soluções de buraco negro e buraco de minhoca.

5.1.1 Limites para soluções conhecidas

A partir da métrica (5.23), podemos reduzi-la para outras soluções que conhecemos. O primeiro caso é no limite em que $C \rightarrow 0$, onde recuperamos a solução de Reissner-Nordström da relatividade geral. Neste limite ficamos com $\lambda = k$, tendo três possíveis casos: $\lambda = k > 0$, $\lambda = k = 0$ and $\lambda = k < 0$, e com a relação

$$m^2 - Q^2 = \pm\lambda^2 = \pm k^2. \quad (5.26)$$

Estes casos correspondem a solução RN não extremo ($m > Q$), extremo ($m = Q$) e a singularidade nua ($m < Q$), respectivamente. Em cada caso, a forma familiar da métrica de RN é obtida usando a transformação

$$r = \frac{s(k, u + u_0)}{s(k, u_0)s(k, u)}. \quad (5.27)$$

Segundo a definição da função $s(k, u)$, podemos escrever

$$s(k, u + u_0) = s(k, u)s'(k, u_0) \pm s'(k, u)s(k, u_0), \quad (5.28)$$

sendo que o sinal depende do valor de k , sendo $+$ para $k \geq 0$ e $-$ para $k < 0$. Usando as definições da massa geométrica e da carga elétrica, (5.24 e 5.22), e a equação (4.22), na relação entre as coordenadas (5.27) ficamos com

$$r = m \pm \frac{s'(k, u)}{s(k, u)} \Rightarrow dr^2 = \frac{du^2}{s(k, u)^4}, \quad (5.29)$$

e também temos que

$$\frac{s'(k, u)^2}{s(k, u)^2} = \frac{1}{s(k, u)^2} + m^2 - Q^2. \quad (5.30)$$

Logo, podemos escrever

$$s(k, u)^2 = \frac{1}{r^2 - 2m + Q^2}, \quad (5.31)$$

e assim usando os resultados acima na métrica geral (5.23) é recuperado a métrica de RN, (3.44). A partir daqui, para obter a solução de Schwarzschild basta fazer $Q \rightarrow 0$.

Outro limite interessante é $Q \rightarrow 0$, que reduz as configurações do espaço-tempo para vácuo escalar sem carga, descritas pelas soluções de Fisher e anti-Fisher, (4.25). Este limite deve ser tomado preservando a condição de contorno (5.22). Isto implica que

$$\lambda \geq 0 \quad \text{e} \quad u_0 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad s(\lambda, u + u_0) \rightarrow e^{2\lambda u}, \quad (5.32)$$

recuperando a solução de vácuo escalar. Portanto, a solução geral de vácuo escalar carregado, nos limites corretos, recupera as soluções vácuo, sem carga e carregado, descritos pelas soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström, e as soluções de vácuo escalar, descritos pelas soluções de Fisher e anti-Fisher.

5.2 Classificando as Soluções

A métrica (5.23) possui diferentes formatos dependendo do valor das constantes de integração λ e k . Cada combinação de valores para estas constantes fornece uma relação, de acordo com (5.25). Todas as possíveis relações estão listadas nas tabelas em 5.1. As características de cada caso depende, crucialmente, se o campo escalar é canônico ($\epsilon = +1$) ou fantasma ($\epsilon = -1$).

Assumindo que todas as constantes devem assumir valores reais, dessa forma, as relações entre constantes que fornecem valores complexos para estas constantes são ex-

$\epsilon = +$	$k = 0$	$k > 0$	$k < 0$
$\lambda = 0$	$C = 0$	$k^2 = \frac{C^2}{2}$	$*k^2 = -\frac{C^2}{2}$
$\lambda > 0$	$*\lambda^2 = -\frac{C^2}{2}$	$k^2 - \lambda^2 = \frac{C^2}{2}$	$*k^2 + \lambda^2 = -\frac{C^2}{2}$
$\lambda < 0$	$\lambda^2 = \frac{C^2}{2}$	$k^2 + \lambda^2 = \frac{C^2}{2}$	$\lambda^2 - k^2 = \frac{C^2}{2}$

$\epsilon = -$	$k = 0$	$k > 0$	$k < 0$
$\lambda = 0$	$C = 0$	$*k^2 = -\frac{C^2}{2}$	$k^2 = \frac{C^2}{2}$
$\lambda > 0$	$\lambda^2 = \frac{C^2}{2}$	$\lambda^2 - k^2 = \frac{C^2}{2}$	$k^2 + \lambda^2 = \frac{C^2}{2}$
$\lambda < 0$	$*\lambda^2 = -\frac{C^2}{2}$	$*k^2 + \lambda^2 = -\frac{C^2}{2}$	$k^2 - \lambda^2 = \frac{C^2}{2}$

Tabela 5.1.: Possíveis relações entre constantes no setor canônico, $\epsilon = +1$, e fantasma, $\epsilon = -1$. O * indica os casos em que temos constantes com valores complexos.

-	$\epsilon = +1$	-	$\epsilon = -1$
[1+]	$\lambda > 0$ e $k > 0$	[1-]	$\lambda > 0$ e $k > 0$
[2+]	$\lambda < 0$ e $k > 0$	[2-]	$\lambda > 0$ e $k = 0$
[3+]	$\lambda < 0$ e $k = 0$	[3-]	$\lambda > 0$ e $k < 0$
[4+]	$\lambda < 0$ e $k < 0$	[4-]	$\lambda < 0$ e $k < 0$
[5+]	$\lambda = 0$ e $k > 0$	[5-]	$\lambda = 0$ e $k < 0$

Tabela 5.2.: Possíveis casos que representam soluções independentes.

cluídas. Logo, ficamos com as soluções independentes listadas em 5.2. Analisando cada solução independente em cada referencial:

- [1+]: usando as funções adequadas, a métrica neste caso assume a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{\lambda^2 \sinh^2(\lambda u_0) dt^2}{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{k^2 \sinh^2[\lambda(u + u_0)]}{\lambda^2 \sinh^2(\lambda u_0) \sinh^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sinh^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.33)$$

onde a coordenada u pode assumir valores em toda reta real, e as constantes são relacionadas por

$$m^2 - Q^2 = \lambda^2 = k^2 - \frac{C^2}{2}. \quad (5.34)$$

Analisando as funções métricas deste caso podemos notar que para $u \rightarrow \pm\infty$ temos $e^\gamma \rightarrow 0$, que pode caracterizar um horizonte de eventos nessas regiões. No entanto, a função radial nestes limites é aproximada por

$$e^{2\beta} \approx e^{2(\lambda-k)|u|},$$

e conforme a relação entre constantes, temos que $k > \lambda$, logo

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} e^{2\beta(u)} = 0, \quad (5.35)$$

caracterizando tais superfícies como sendo singulares. Portanto, a métrica (5.33) descreve apenas singularidades nuas.

- **[2+]**: neste ramo a métrica é escrita como

$$ds^2 = \frac{\sin^2(\lambda u_0) dt^2}{\sin^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{k^2 \sin^2[\lambda(u + u_0)]}{\sin^2(\lambda u_0) \sinh^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sinh^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.36)$$

sendo

$$m^2 - Q^2 = -\lambda^2 = k^2 - \frac{C^2}{2}. \quad (5.37)$$

Como a função seno é definida em um intervalo finito, e é uma função periódica, não existe nenhuma superfície em que $e^\gamma \rightarrow 0$, para a métrica acima, logo não há horizonte. No entanto, o primeiro termo da métrica é singular nos pontos

$$u_{\lambda,n} = \pm \frac{\pi n}{\lambda} - u_0, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (5.38)$$

nestas superfícies a função radial é nula, caracterizando uma singularidade central. Outra superfície de interesse é em $u \rightarrow \pm\infty$, onde temos

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} e^{2\beta(u)} = 0, \quad (5.39)$$

descrevendo mais uma região singular. Portanto, teremos apenas singularidades nuas neste ramo.

- **[3+]**: o formato da métrica neste caso é

$$ds^2 = \frac{\sin^2(\lambda u_0) dt^2}{\sin^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{\sin^2[\lambda(u + u_0)]}{\sin^2(\lambda u_0) u^2} \left(\frac{du^2}{u^2} + d\Omega^2 \right). \quad (5.40)$$

e as constantes se relacionam por

$$Q^2 - m^2 = \lambda^2 = \frac{C^2}{2}. \quad (5.41)$$

Este caso é similar ao **[2+]**, tendo as mesmas superfícies singulares e nenhum horizonte de eventos, portanto descreve apenas singularidades nuas.

- **[4+]**: neste caso a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = \frac{\sin^2(\lambda u_0) dt^2}{\sin^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{k^2 \sin^2[\lambda(u + u_0)]}{\sin^2(\lambda u_0) \sin^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sin^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.42)$$

com a seguinte relação entre constantes

$$Q^2 - m^2 = \lambda^2 = k^2 + \frac{C^2}{2}. \quad (5.43)$$

Novamente o primeiro termo da métrica $e^{2\gamma}$ é o mesmo que o do **[2+]**, logo possui as mesmas superfícies singulares $u_{\lambda,n}$, porém agora a função radial possui duas funções seno, o que nos permite definir as superfícies

$$u_{k,n} = \pm \frac{\pi n}{k}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (5.44)$$

onde

$$\lim_{u \rightarrow u_{k,n}} e^{2\beta} \rightarrow \infty, \quad (5.45)$$

indicando um infinito espacial, região assintótica. Da relação entre constantes, temos que $|k| < |\lambda|$, então o intervalo entre as regiões assintóticas $u_{k,n}$ e $u_{k,n+1}$ é maior que o intervalo entre as superfícies singulares $u_{\lambda,n}$ e $u_{\lambda,n+1}$, ou seja,

$$|u_{\lambda,n+1} - u_{\lambda,n}| < |u_{k,n+1} - u_{k,n}|. \quad (5.46)$$

Dessa forma sempre teremos uma singularidade entre regiões assintóticas. Logo, esta solução também descreve apenas singularidades nuas.

- **[5+]**: a métrica neste caso é escrita como

$$ds^2 = \frac{u_0^2 dt^2}{(u + u_0)^2} - \frac{k^2 (u + u_0)^2}{u_0^2 \sinh^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sinh^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.47)$$

com as constantes relacionadas por

$$m^2 - Q^2 = k^2 - \frac{C^2}{2} = 0. \quad (5.48)$$

Aqui podemos identificar que o primeiro termo da métrica se comporta como $e^\gamma \rightarrow 0$ na superfície $u = \pm\infty$, no entanto, neste mesmo ponto temos $e^{2\beta} \rightarrow 0$. Conforme os critérios de seleção de buraco negro, o horizonte de evento deve ter uma área

superficial positiva e maior que zero, logo, a superfície $u \rightarrow \infty$ não satisfaz esse critério, caracterizando-a como um horizonte singular. Neste caso temos apenas configurações de singularidade nua.

- **[1-]**: escrevendo a métrica neste caso temos

$$ds^2 = \frac{\sinh^2(\lambda u_0) dt^2}{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{k^2 \sinh^2[\lambda(u + u_0)]}{\sinh^2(\lambda u_0) \sinh^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sinh^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.49)$$

com a seguinte relação

$$m^2 - Q^2 = \lambda^2 = k^2 + \frac{C^2}{2}. \quad (5.50)$$

Observe que a métrica possui o mesmo formato do caso **[1+]**, então para $u \rightarrow \pm\infty$ teremos $e^\gamma \rightarrow 0$, enquanto a função radial se comporta como

$$e^{2\beta} \approx e^{2(\lambda-k)u}.$$

A principal diferença para este caso e seu correspondente no setor canônico é a relação entre constantes, que no caso anterior não permite a existência de horizontes, porém neste caso temos $\lambda > k$, e assim no limite $u \rightarrow \infty$ ficamos com $e^{2\beta} \rightarrow \infty$, caracterizando um horizonte com área superficial infinita. Então, trabalhando no intervalo $-u_0 < u < \infty$, esta solução de fato representa uma solução de buraco negro.

- **[2-]**: a métrica neste ramo tem o seguinte formato

$$ds^2 = \frac{\sinh^2(\lambda u_0) dt^2}{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]}{\sinh^2(\lambda u_0) u^2} \left(\frac{du^2}{u^2} + d\Omega^2 \right), \quad (5.51)$$

onde

$$m^2 - Q^2 = \lambda^2 = \frac{C^2}{2}. \quad (5.52)$$

No limite $u \rightarrow \pm\infty$, temos que $e^{2\gamma} \rightarrow 0$ e $e^{2\beta} \rightarrow \infty$. Portanto, usando o mesmo intervalo que o caso anterior para a coordenada u , esta solução irá representar um buraco negro frio.

- **[3-]**: a métrica aqui se escreve

$$ds^2 = \frac{\sinh^2(\lambda u_0) dt^2}{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{k^2 \sinh^2[\lambda(u + u_0)]}{\sinh^2(\lambda u_0) \sin^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sin^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.53)$$

com

$$m^2 - Q^2 = \lambda^2 = -k^2 + \frac{C^2}{2}. \quad (5.54)$$

A presença da função seno no denominador da função radial e^β , nos permite identificar diversas regiões assintóticas para $u = \frac{n\pi}{k}$, sendo $n = 0, 1, 2, \dots$, enquanto a função temporal e^γ se anula somente em $u \rightarrow \infty$. Tal configuração de espaço-tempo pode representar um buraco de minhoca, a depender da escolha do intervalo da coordenada u .

- **[4-]**: neste caso temos

$$ds^2 = \frac{\sin^2(\lambda u_0) dt^2}{\sin^2[\lambda(u + u_0)]} - \frac{k^2 \sin^2[\lambda(u + u_0)]}{\sin^2(\lambda u_0) \sin^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sin^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.55)$$

sendo

$$Q^2 - m^2 = \lambda^2 = k^2 - \frac{C^2}{2}. \quad (5.56)$$

Esta solução possui as mesmas regiões assintóticas que no caso anterior, **[3-]**, no entanto, a função temporal, e^γ , é singular em $u = \frac{n\pi}{\lambda} - u_0$. Segundo a relação entre constantes deste caso, temos $|k| > |\lambda|$, logo a função $e^{2\beta}$ oscila mais rápido que $e^{2\gamma}$, o que implica que sempre podemos escolher um intervalo com duas regiões assintóticas sem a presença da região singular em $u = \frac{n\pi}{\lambda} - u_0$. Tal configuração satisfaz os critérios de um buraco de minhoca.

- **[5-]**: a última solução independente que temos é escrita como

$$ds^2 = \frac{u_0^2 dt^2}{(u + u_0)^2} - \frac{k^2 (u + u_0)^2}{u_0^2 \sin^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sin^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (5.57)$$

sendo a relação de constantes

$$Q^2 - m^2 = k^2 - \frac{C^2}{2} = 0. \quad (5.58)$$

Novamente a função seno nos permite identificar as mesmas regiões assintóticas presentes em **[3-]** e **[4-]**. E assim como nesses casos, a escolha apropriada do intervalo da coordenada u identifica esta solução com um buraco de minhoca.

5.3 Buracos Negros frios carregados

5.3.1 Primeira Solução de Buraco Negro

Na seção anterior verificamos que o caso de vácuo escalar carregado, no setor fantasma, possui duas possíveis soluções de buraco negro, descritas como [1-] (5.49) e [2-] (5.51). Vamos chamar a solução [1-] de primeira solução de buraco negro. Nesta solução, verificamos a existência de pelo menos um horizonte de eventos em $u \rightarrow \infty$, no entanto, para saber se é possível uma extensão analítica para além dele, precisamos usar o sistema de coordenadas quasi-global. A transformação que leva a métrica (5.49) para este sistema de coordenada é

$$e^{-2ku} = 1 - \frac{2k}{\rho} = P(\rho). \quad (5.59)$$

Esta transformação nos permite escrever a métrica em um formato mais familiar,

$$ds^2 = f(\rho)dt^2 - \frac{d\rho^2}{f(\rho)} - \frac{P(\rho)}{f(\rho)}\rho^2 d\Omega^2, \quad (5.60)$$

sendo

$$f(\rho) = \frac{4\lambda^2 P(\rho)^a}{[(m + \lambda) - (m - \lambda)P(\rho)^a]^2}, \quad a = \frac{\lambda}{k} \quad \text{e} \quad m^2 - Q^2 = \lambda^2 = k^2 + \frac{C^2}{2}. \quad (5.61)$$

A massa geométrica neste caso é $m = \lambda \coth(\lambda u_0)$, e a condição de que ela seja positiva implica que $u_0 > 0$. A métrica é assintoticamente plana para $\rho \rightarrow \infty$.

A transformação de coordenadas (5.59) muda o caráter exponencial da métrica para a forma de lei de potência. Esta transformação nos permite descrever a região interior do buraco negro. Porém, ela também permite potências fracionárias de números negativos, violando a analiticidade da solução ao atravessar o horizonte. De modo a evitar esta perda de analiticidade, a constante a deve assumir valores inteiros positivos,

$$a = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.62)$$

Sendo o caso $a = 1$ correspondente a solução não extrema de RN, uma vez que ela implica em $\lambda = k$ logo $C = 0$. Esta “condição quantizada” nos conduz a uma parametrização discreta de soluções de buraco negro, e também está presente no caso sem carga (buraco

negro frio de anti-Fisher) e no referencial de Jordan [7]. As soluções para os campos escalar e elétrico neste sistema de coordenadas são

$$\Phi(\rho) = -\frac{C}{2k} \ln |P(\rho)| \quad \text{and} \quad E(\rho) = Qf(\rho). \quad (5.63)$$

Agora com a métrica e os campos escritos em coordenadas quasi-globais, podemos verificar a existência de horizontes em $f(\rho_{h,i}) = 0$. O primeiro horizonte de eventos é facilmente identificado em $\rho_{h,1} = 2k$, onde sua área superficial é infinita. Outra superfície de interesse é $\rho \rightarrow \rho_{h,2} = 0$, onde $P(\rho_{h,2}) \rightarrow -\infty$, neste limite temos que

$$f(\rho_{h,2}) \approx P^{-a} \Rightarrow f(\rho_{h,2}) \rightarrow 0. \quad (5.64)$$

Portanto esta superfície pode ser identificada como outro horizonte de eventos. Analisando a função radial próximo do horizonte temos que ele se comporta como

$$r(\rho) = \rho \left(\frac{P}{f} \right)^{1/2} \approx \rho P^{(a+1)/2}. \quad (5.65)$$

Note que esta função é real apenas para a ímpar, pois quando a é par teremos uma raiz de um número negativo. As singularidades desta solução apresentam um comportamento similar. Podemos identificar as singularidades como sendo onde $f(\rho_s) \rightarrow \pm\infty$, logo podemos identificá-las usando a equação

$$P(\rho_s)^a = \left(1 - \frac{2k}{\rho_s} \right)^a = \left(\frac{m + \lambda}{m - \lambda} \right). \quad (5.66)$$

O lado direito da equação acima é positivo definido, uma vez que por definição $m > \lambda$. Entretanto, a função $P(\rho)$ admite valores positivos e negativos, e dependendo do valor de a , se for par ou ímpar, temos uma ou duas singularidades dividindo esta solução em dois casos, assim como na solução sem carga. Em ambos casos as singularidades são do tipo tempo, ou seja, $f(\rho_s) \rightarrow +\infty$, esta é uma característica de buracos negros carregados.

Caso par

Se assumirmos que a seja um número par, $a = 2, 4, 6, \dots$, ao tomarmos a a ésima raiz da equação (5.66) ficamos com

$$1 - \frac{2k}{\rho_s} = \pm \left(\frac{m + \lambda}{m - \lambda} \right)^{1/a} \rightarrow \rho_{s,\pm} = \frac{2k}{1 \pm \left(\frac{m + \lambda}{m - \lambda} \right)^{1/a}}, \quad (5.67)$$

onde o sinal \pm é devido $P(\rho)$ poder assumir tanto valores negativos quanto positivos. Neste sentido, a solução possui duas singularidades centrais, uma em $\rho = \rho_{s,-} < 0$ e outra em $\rho = \rho_{s,+}$, sendo $0 < \rho_{s,+} < 2k$. Analisando o comportamento dos invariantes de curvatura, descrito pelo escalar de Kretschmann cujo gráfico está na esquerda da figura 5.2, em todo o intervalo possível, notamos que ele diverge para $\rho \rightarrow \rho_{s,\pm}$, ou seja, nas singularidades. O mesmo acontece para o potencial efetivo, cujo gráfico é apresentado na direita da figura 5.2. Portanto, a extensão entre os dois intervalos, deste caso, não é possível, e assim, cada intervalo possuirá uma estrutura diferente.

O primeiro intervalo, $\rho \in (\rho_{s,-}, 0] \cup [0, \rho_{s,+})$, temos duas singularidades conectadas por um horizonte, o que não nos interessa. No segundo intervalo, onde $\rho \in (\rho_{s,+}, 2k] \cup [2k, \infty)$, temos uma singularidade central $\rho_{s,+}$ limitada por um horizonte $2k$, com uma área superficial infinita, e uma região assintoticamente plana, descrevendo um buraco negro frio, que de fato nos interessa. Neste intervalo a solução possui uma estrutura causal semelhante a RN extremo, logo o diagrama CP dessas soluções são semelhantes, 3.10.

Como a função temporal é positiva em todo o intervalo, ambas regiões, são do tipo R e a estrutura de toda solução se torna similar à RN extremo. O comportamento do potencial permite, dependendo da energia, uma partícula pode ter uma órbita instável na região externa, $\rho > 2k$, ou pode transitar entre as diferentes regiões do buraco negro.

Em 5.1 temos o gráfico dos campos escalar e elétrico. O campo escalar é finito na origem e diverge no horizonte, enquanto o campo elétrico diverge na origem e se anula no horizonte.

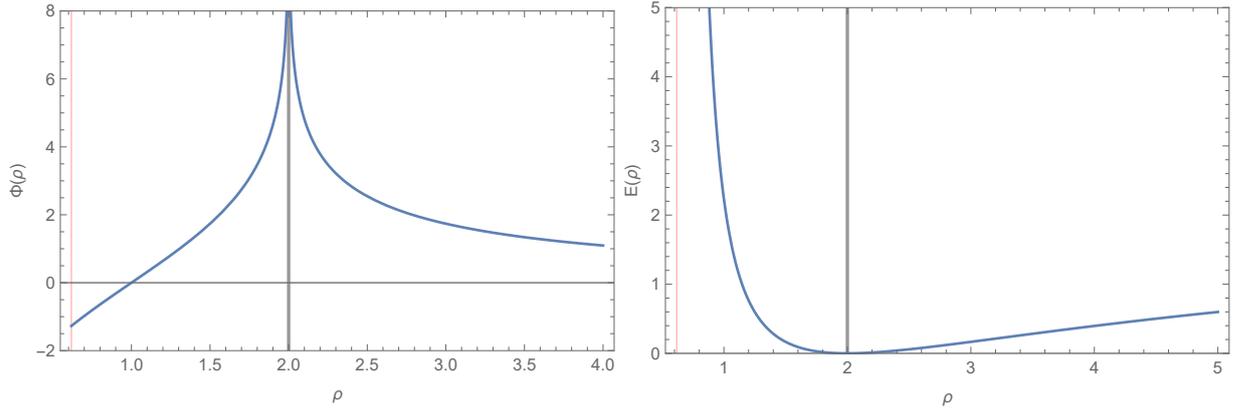


Figura 5.1.: Gráfico dos campos escalar e elétrico para $a = 2$. As linhas verticais vermelhas indicam a singularidade enquanto as escuras os horizontes. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $\lambda = 2$, $k = 1$ e $m = 3$.

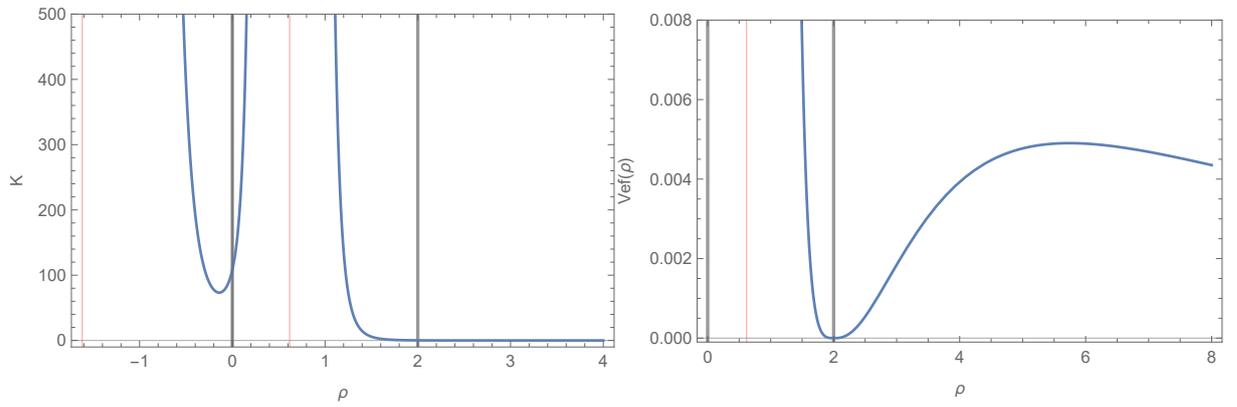


Figura 5.2.: Gráfico do escalar de Kretschmann (esquerda) e do potencial efetivo (direita) para a primeira solução de buraco negro (5.60) com $a = 2$. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades enquanto as linhas mais escura os horizontes. Os valores usados para os parâmetros foram: $\lambda = 2$, $k = 1$, $m = 3$, $\mathcal{E} = 0$ e $L = 1$.

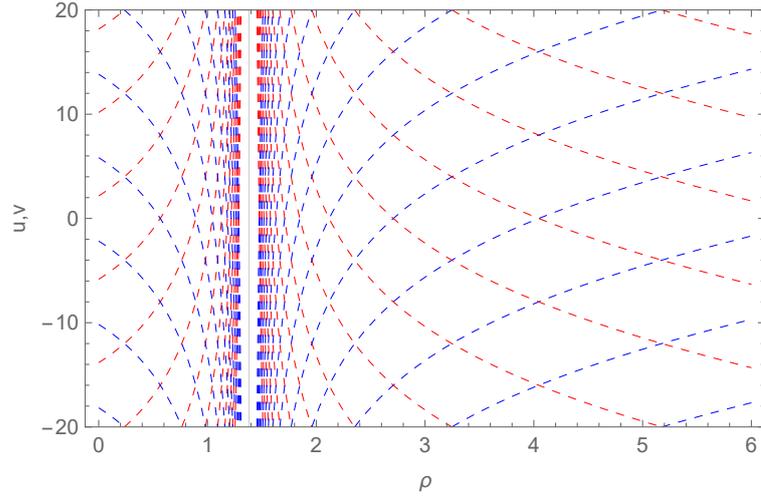


Figura 5.3.: Cones de Luz na primeira solução de buraco negro da teoria de Einstein-Maxwell na presença de um campo escalar para $a = 2$ (caso par). Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $\lambda = 2$

Caso ímpar

Agora, para a ímpar ao tomarmos a a ésima raiz de (5.66) ficamos com

$$1 - \frac{2k}{\rho_s} = \left(\frac{m + \lambda}{m - \lambda} \right)^{1/a} \Rightarrow \rho_s = \frac{2k}{1 - \left(\frac{m + \lambda}{m - \lambda} \right)^{1/a}}. \quad (5.68)$$

Neste caso temos apenas uma singularidade, localizada em $\rho = \rho_s < 0$. O único intervalo permitido para a coordenada radial é $\rho : (\rho_s, 0] \cup [0, 2k] \cup [2k, \infty)$, descrevendo três regiões, a mais interna onde temos uma singularidade central, a região entre os dois horizontes, em $\rho = 0$ e $\rho = 2k$, e a região externa que é assintoticamente plana. Ambos os horizontes possuem área superficial é infinita, logo neste caso também temos um buraco negro frio.

Chamando de I a região externa ($2k < \rho < \infty$), II a região entre os horizontes ($0 < \rho < 2k$) e III a região da singularidade central ($\rho_s < \rho < 0$) temos que I e III são do tipo R enquanto II é do tipo T, devido à função $f(\rho)$ trocar de sinal nesta região. Analisando os gráficos em (5.5), temos que, o escalar de Kretschmann é regular em todo espaço-tempo exceto na singularidade e o potencial efetivo diverge para $+\infty$ na singularidade, o que concorda com o fato que singularidades do tipo tempo são repulsivas para partículas testes. Na região II temos um poço de potencial que permite orbitas estáveis de fótons. Toda a estrutura causal é similar à solução de RN não extremo, 3.9.

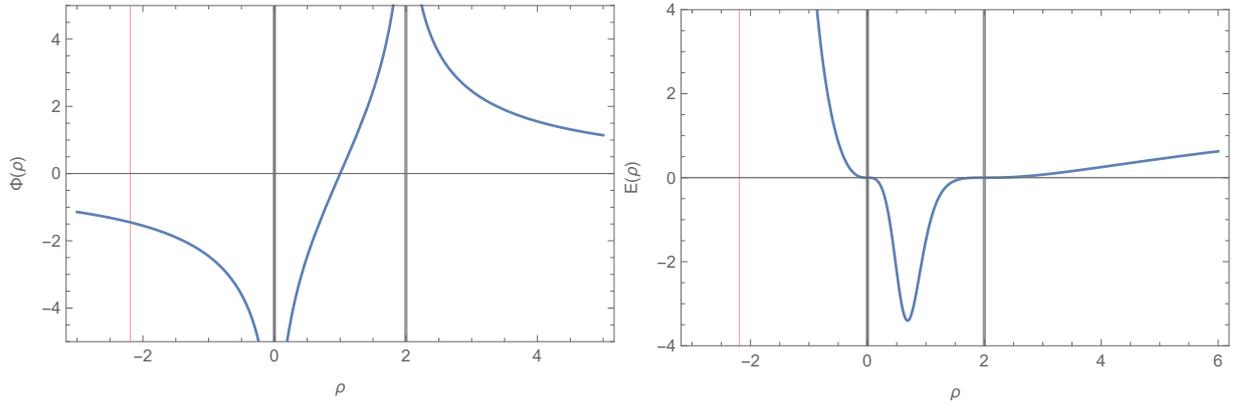


Figura 5.4.: Gráfico dos campos escalar e elétrico para $a = 3$. A linha vertical vermelha indica a posição da singularidade, enquanto a escura indica o horizonte de eventos. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $\lambda = 3$, $k = 1$ e $m = 4$.

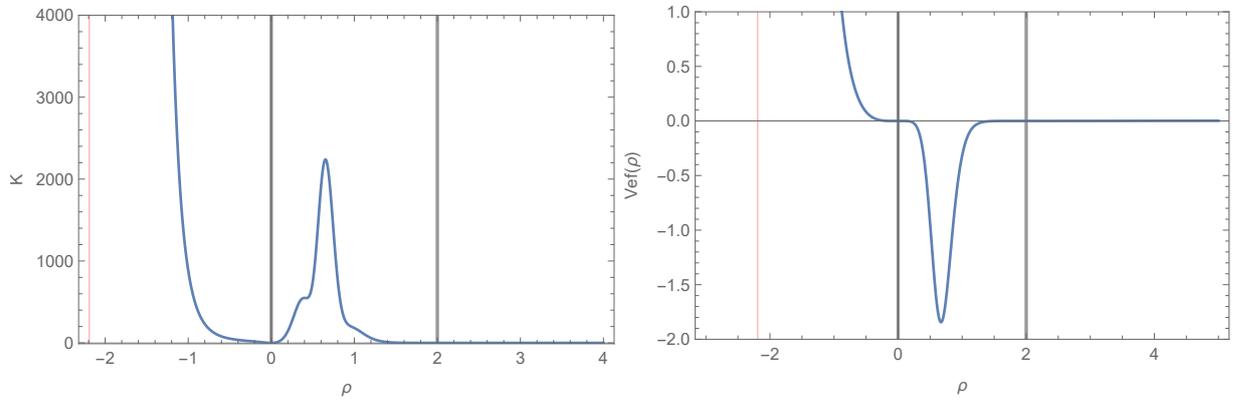


Figura 5.5.: Gráfico do escalar de Kretschmann (esquerda) e do potencial efetivo (direita) para a primeira solução de buraco negro (5.60) com $a = 3$. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades enquanto as linhas mais escura os horizontes. Os valores usados para os parâmetros foram: $\lambda = 3$, $k = 1$, $m = 4$, $\mathcal{E} = 0$ e $L = 1$.

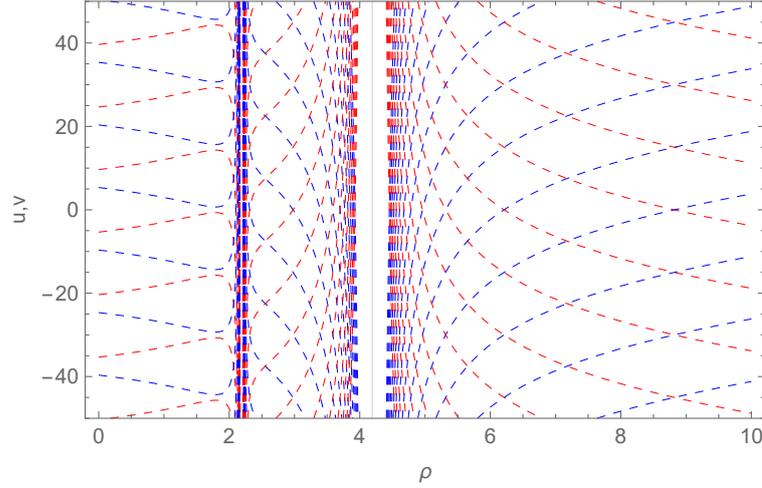


Figura 5.6.: Cones de Luz na primeira solução de buraco negro da teoria de Einstein-Maxwell na presença de um campo escalar para $a = 3$ (caso par). Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $k = 1$ e $\lambda = 3$

5.3.2 Segunda Solução de Buraco Negro

A segunda solução de buraco negro no setor fantasma é descrita pela métrica (5.51), e a transformação adequada que leva esta solução para as coordenadas quasi-globais é $x = \frac{1}{u}$, dessa forma, a métrica obtém o seguinte formato

$$ds^2 = h(x)dt^2 - \frac{dx^2}{h(x)} - \frac{x^2}{h(x)}d\Omega^2, \quad (5.69)$$

em que

$$h(x) = \frac{4\lambda^2 e^{-2\frac{\lambda}{x}}}{[(m + \lambda) - (m - \lambda)e^{-2\frac{\lambda}{x}}]^2}, \quad m^2 - Q^2 = \lambda^2 = \frac{C^2}{2}. \quad (5.70)$$

Sendo a massa geométrica, $m = \lambda \cosh(\lambda u_0)$, definida da mesma forma que a primeira solução de buraco negro, caso [1-]. O comportamento dos campos para este espaço-tempo são

$$\Phi(x) = \frac{C}{x} \quad \text{e} \quad E(x) = Qh(x). \quad (5.71)$$

A solução neste caso possui um parâmetro a menos, isto porque é fixado $k = 0$. A transformação usada para obter a métrica acima nos permite estender a solução para além do horizonte, mantendo a natureza exponencial das funções métricas, dessa forma, uma “condição de quantização” não é mais necessária para garantir a extensão da solução.

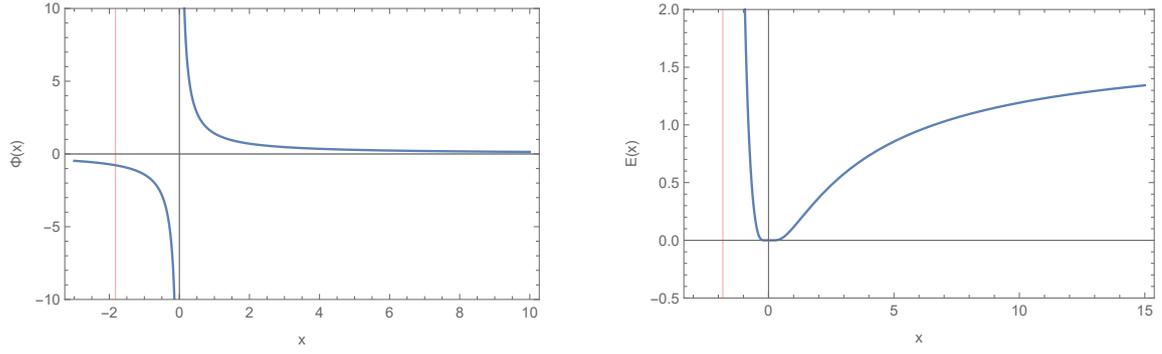


Figura 5.7.: Gráfico dos campos escalar e elétrico para a solução (5.69). A linha vertical vermelha indica a posição da singularidade, enquanto a escura indica o horizonte de eventos. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $\lambda = 3$, $k = 1$ e $m = 4$.

Neste sistema de coordenadas podemos notar que a solução é assintoticamente plana conforme $x \rightarrow \infty$, enquanto temos um horizonte em $x = 0$. A singularidade está localizada em $x = x_s$, sendo x_s a solução da equação

$$e^{-2\frac{\lambda}{x_s}} = \frac{m + \lambda}{m - \lambda} \Rightarrow x_s = \frac{-2\lambda}{\ln\left(\frac{m+\lambda}{m-\lambda}\right)}. \quad (5.72)$$

Usando a definição da massa geométrica, $m = \lambda \coth(\lambda u_0)$, podemos reescrever o resultado acima como

$$x_s = -\frac{1}{u_0}, \quad (5.73)$$

e como $u_0 > 0$, temos que $x_s < 0$. Então o intervalo permitido para a coordenada quasi-global neste caso é $x : (x_s, 0] \cup [0, \infty)$. Esta solução possui uma estrutura similar à primeira solução de buraco negro ([1-]), no caso onde a é par, tendo duas regiões do tipo R conectadas por um horizonte. A estrutura causal e as possíveis geodésicas neste espaço-tempo são similares à da primeira solução de buraco negro frio, ou seja, semelhante à RN extremo.

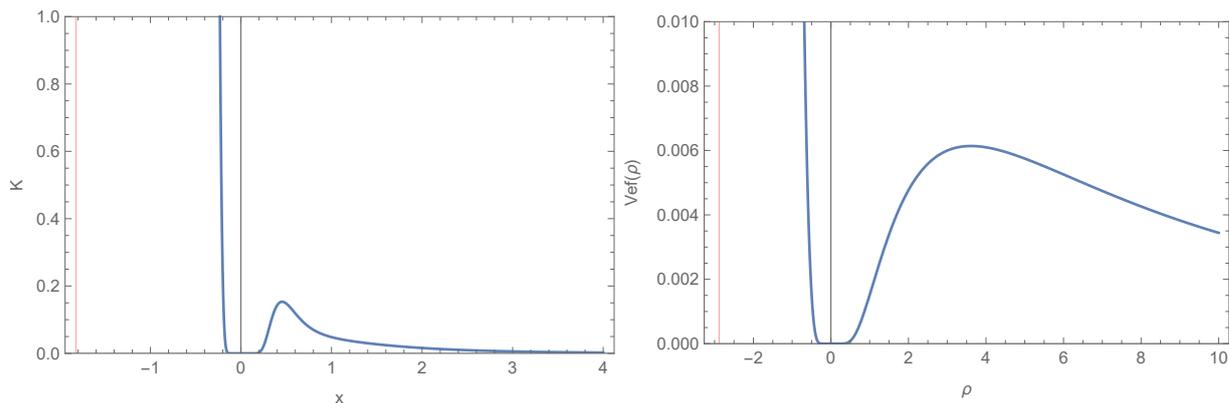


Figura 5.8.: Gráfico do escalar de Kretschmann (esquerda) e do potencial efetivo (direita) para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.

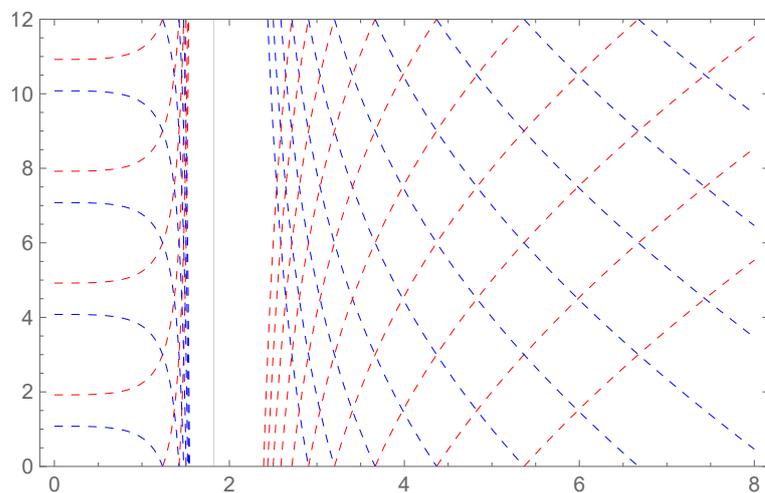


Figura 5.9.: Cones de Luz na segunda solução de buraco negro da teoria de Einstein-Maxwell na presença de um campo escalar. Os valores dos parâmetros utilizados nestes gráficos foram: $\lambda = 1$ e $m = 2$

5.4 Buracos de Minhoca

No setor fantasma, além de duas soluções de buraco negro, temos três possíveis soluções que apresentam uma estrutura de buraco de minhoca que são os casos [3-], [4-] e [5-]. As métricas dessas soluções podem ser escritas de uma forma unificada usando a transformação

$$u = \frac{1}{k} \operatorname{arccot} |ky|. \quad (5.74)$$

As métricas são escritas como

$$ds^2 = A_n(y)dt^2 - \frac{dy^2}{A_n(y)} - r_n(y)^2 d\Omega^2 \quad \text{com} \quad r_n(y)^2 = \frac{y^2 + 1}{A_n(y)}, \quad (5.75)$$

onde o índice n correspondendo a cada solução de buraco de minhoca. Os campos, escalar e eletromagnético, neste caso são escritos como

$$\Phi(y) = \frac{C}{k} \operatorname{arccot} ky, \quad \text{and} \quad E(y) = QA_n(y). \quad (5.76)$$

O comportamento do campo elétrico depende da função $A_n(y)$ de cada solução, enquanto o campo escalar possui o mesmo comportamento em todos os casos, conforme exposto em 5.10. O campo $\Phi(y)$ é finito em todo o intervalo para a coordenada y , máximo em $y = 0$ e nulo nas regiões assintóticas.

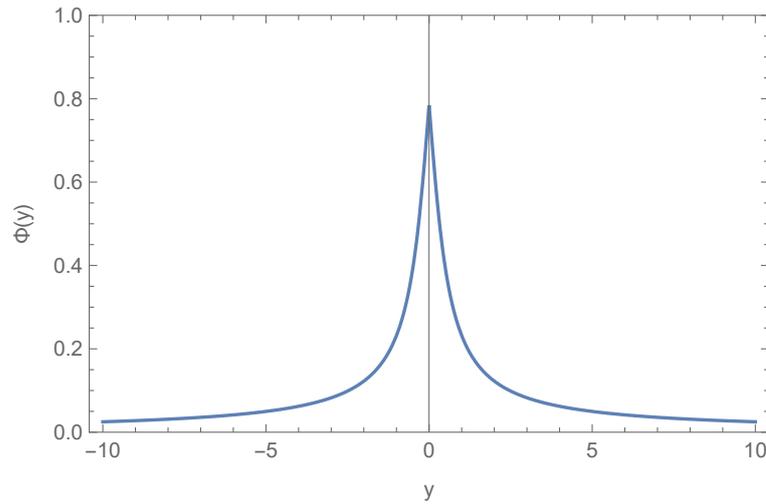


Figura 5.10.: Gráfico do campo escalar para as soluções de buraco de minhoca. Os valores dos parâmetros utilizados foram: $C = 1$ e $k = 2$.

A métrica (5.75) admite uma extensão analítica de forma que a coordenada radial é definida no limite $y \in (-\infty, +\infty)$, correspondendo a duas regiões assintoticamente planas conectadas por uma garganta, um mínimo da função radial. Para cada solução de buraco de minhoca a função $A_n(y)$ assume uma forma diferente, analisaremos cada uma dessas soluções:

- **BM1(5.53)**: A primeira solução de buraco de minhoca é descrito pela métrica (5.75) com $n = 1$, onde a função métrica $A_1(y)$ é definida da seguinte forma

$$A_1(y) = \frac{4\lambda^2 e^{-2\frac{\lambda}{k} \operatorname{arccot} ky}}{[(\lambda + m) + (\lambda - m) e^{-2\frac{\lambda}{k} \operatorname{arccot} ky}]^2}, \quad (5.77)$$

e as constantes são relacionadas por

$$m^2 - Q^2 = \lambda^2 = \frac{C^2}{2} - k^2. \quad (5.78)$$

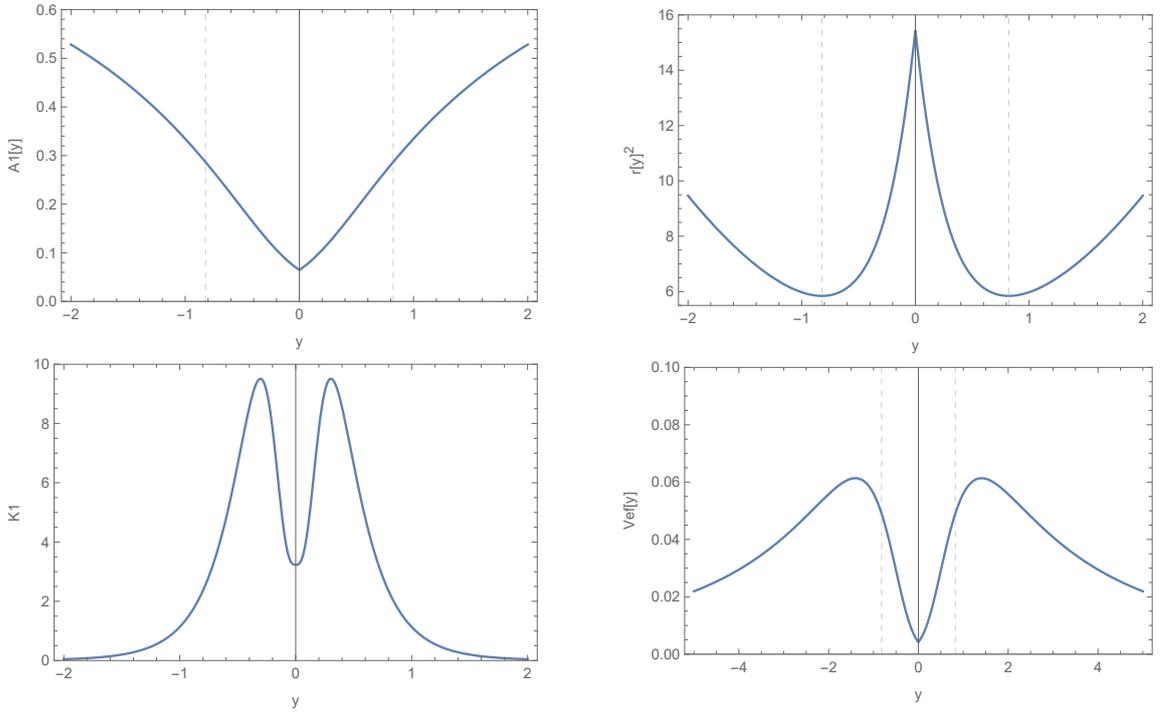


Figura 5.11.: Gráfico das funções temporal, radial, campo escalar, campo elétrico para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.

Analisando a função radial, em 5.11, podemos observar um ponto de mínimo local em cada lado do buraco de minhoca, e um máximo local no centro da solução, $y = 0$, onde a função radial assume o seguinte valor

$$r_1(0) = \frac{(\lambda + m) + (\lambda - m) e^{-2\frac{\lambda\pi}{2k}}}{2\lambda e^{-\frac{\lambda\pi}{2k}}}. \quad (5.79)$$

Devido à complexidade da solução não é possível identificar as gargantas do buraco de minhoca analiticamente, apenas numericamente. O potencial efetivo possui um

poço entre as gargantas, em $y = 0$, que pode aprisionar fótons que não tenham energia suficiente para atravessar o buraco de minhoca. Nas regiões externas à garganta o potencial possui máximos que permitem orbitas instáveis de fótons.

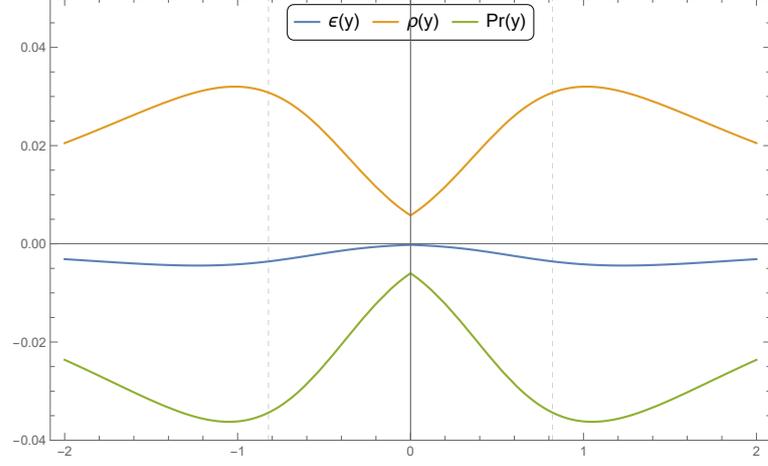


Figura 5.12.: Gráfico da densidade de energia $\epsilon(y)$, da densidade de matéria, $\rho(y)$, e da pressão radial $P_r(y)$ para a primeira solução de buraco de minhoca. A linha tracejada indica a posição das gargantas.

No limite em que $Q \rightarrow 0$, que corresponde a $\lambda \rightarrow m$, a função (5.77) assume a seguinte forma

$$A_1(y) \rightarrow \exp\left(-2\frac{m}{k} \operatorname{arccot} |ky|\right), \quad (5.80)$$

e a métrica se escreve como

$$ds^2 = e^{-2mu} dt^2 - e^{2mu} dy^2 - e^{2mu} (y^2 + 1) d\Omega^2. \quad (5.81)$$

Está métrica já foi identificada como a solução de buraco de minhoca de anti-Fisher, [5]. Aplicando o limite $m \rightarrow 0$ na métrica acima ficamos com o buraco de minhoca de Ellis [21].

- **BM2** (5.55): A segunda solução de buraco de minhoca é identificada pelo índice $n = 2$, e a função métrica neste caso é definida como

$$A_2(y) = \frac{\lambda^2 \sin(a \operatorname{arccot} ky)^{-2}}{[m + \lambda \cot(a \operatorname{arccot} ky)]^2}, \quad (5.82)$$

onde as constantes são relacionadas por

$$Q^2 - m^2 = \lambda^2 = k^2 - \frac{C^2}{2} \quad \text{and} \quad a = \frac{\lambda}{k}. \quad (5.83)$$

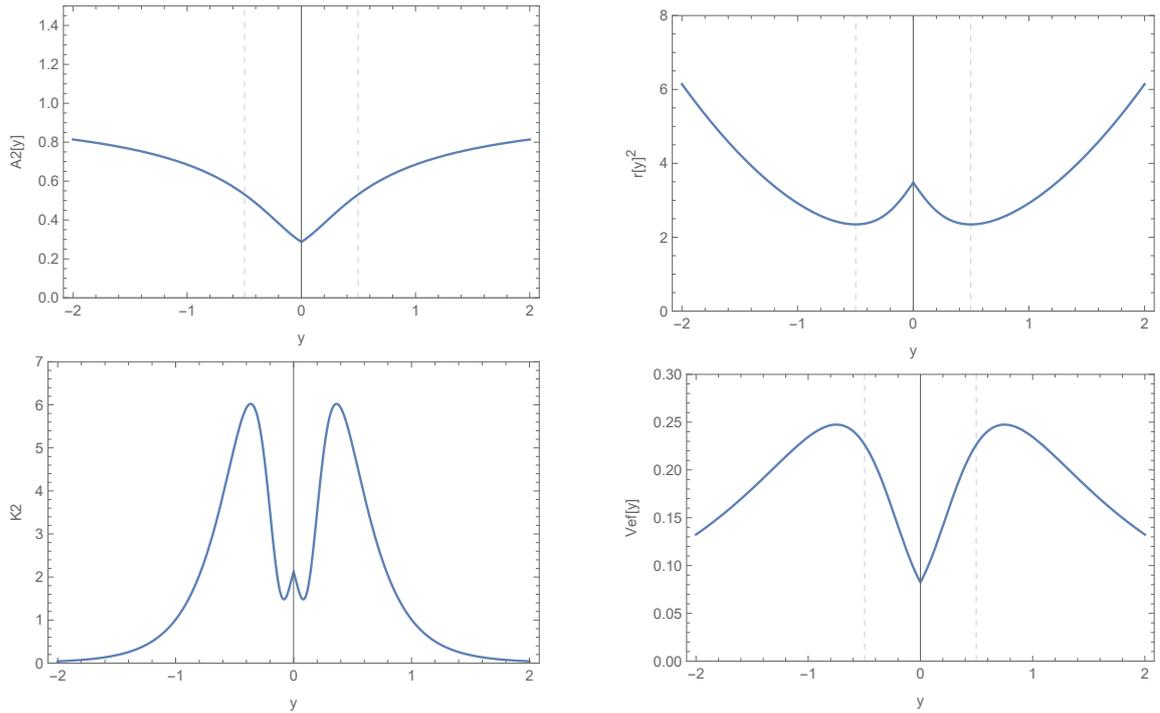


Figura 5.13.: Gráfico das funções temporal, radial, campo escalar, campo elétrico para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.

Analisando as funções em 5.13, podemos observar que esta solução também possui duas gargantas, que só são identificadas numericamente. Em $y = 0$, a função radial possui um máximo local, onde temos

$$r_2(0) = \frac{m \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) + \lambda \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{\lambda}. \quad (5.84)$$

O potencial efetivo é similar ao caso anterior. Com ele obtemos as partículas podem ficar aprisionada entre as gargantas, e que na região externa possível termos uma órbita instável de fótons.

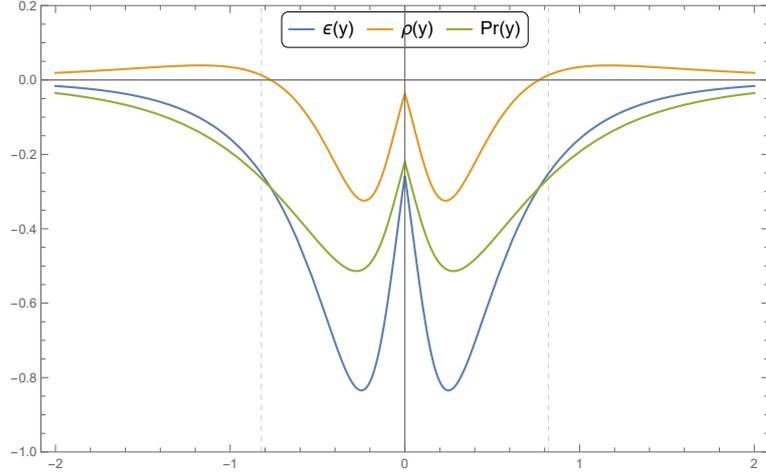


Figura 5.14.: Gráfico da densidade de energia $\epsilon(y)$, da densidade de matéria, $\rho(y)$, e da pressão radial $P_r(y)$ para a segunda solução de buraco de minhoca. A linha tracejada indica a posição das gargantas.

- **BM3** (5.57): A terceira solução de buraco de minhoca, para $n = 3$, e descrita pela função

$$A_3(y) = \frac{k^2}{[k + m \operatorname{arccot} ky]^2}, \quad (5.85)$$

com a seguinte relação entre constantes

$$Q^2 - m^2 = k^2 - \frac{C^2}{2} = 0. \quad (5.86)$$

A região central, $y = 0$, é cercada por duas gargantas e possui um raio de

$$r_3(0) = 1 + \frac{m\pi}{2k}. \quad (5.87)$$

O potencial efetivo neste caso também permite orbitas instáveis de fótons próximo as gargantas e possui um poço em $y = 0$, como podemos ver em 5.15. A estrutura causal dessa solução é similar aos casos anteriores, a diferença está no gráfico das densidades de energia, 5.16. A métrica neste caso também recupera o buraco de minhoca de Bronnikov e Ellis, no limite em que $m \rightarrow 0$.

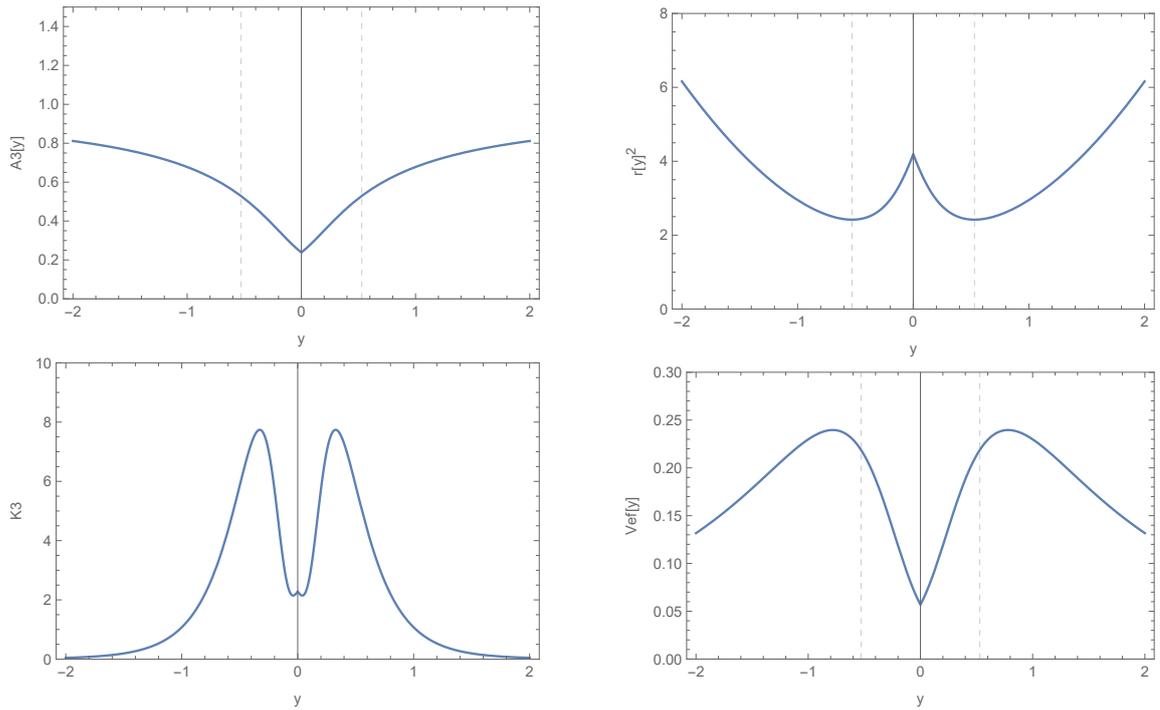


Figura 5.15.: Gráfico das funções temporal, radial, campo escalar, campo elétrico para a segunda solução de buraco negro. As linhas verticais vermelhas indicam as singularidades.

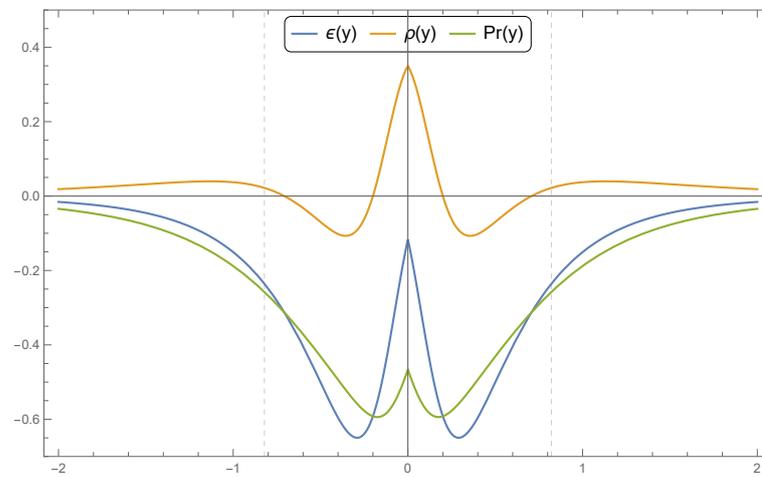


Figura 5.16.: Gráfico da densidade de energia, matéria e a pressão radial para a terceira solução de buraco de minhoca.

Conclusões

Este trabalho tinha como objetivo estudar soluções estáticas e esfericamente simétricas em teorias escalares tensoriais. Em tais teorias temos duas formas de escrever suas equações, sendo o campo escalar acoplado à geometria e/ou à matéria, e assim é dito que, quando estamos trabalhando com o campo acoplado a geometria, estamos no referencial de Jordan, enquanto no caso onde o acoplamento é com a matéria dizemos estar no referencial de Einstein. Os dois referenciais não são independentes, no sentido que podemos mapear um referencial no outro, e este mapa é chamado de transformação conforme. Quando buscamos por alguma solução de uma teoria escalar tensorial com acoplamento não mínimo (referencial de Jordan) é mais simples buscar as soluções no referencial de Einstein e mapeá-las no referencial de Jordan. O campo escalar pode possuir uma energia cinética positiva ou negativa, dessa forma dizemos que o campo escalar é canônico quando possui energia positiva e fantasma caso negativa. Neste sentido, foram estudadas soluções estáticas e esfericamente simétricas da teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar, em que temos uma configuração de espaço-tempo com um campo eletromagnético e um campo escalar sem massa e minimamente acoplado, visando comparar as soluções obtidas com as soluções já estudadas no referencial de Jordan, [7], em especial realizar uma análise mais completa das soluções de interesse, como buracos negros e buracos de minhoca.

Dois casos interessantes são ignorados, sendo o caso de campo escalar massivo, ou seja, com um termo de alto interação do campo representado por um potencial $V(\Phi)$ na ação, e o caso de acoplamento não mínimo entre o campo escalar e o campo eletromagnético. Descartamos a possibilidade de um potencial para o campo escalar por dois motivos, o primeiro é para manter contato com o estudo feito em [7], em que é feito uma análise similar no contexto da teoria de Brans-Dicke, o qual tradicionalmente não possui termo potencial, e o segundo motivo é a presença de um potencial, mesmo em sua forma mais simples, prejudica a possibilidade de se ter soluções analíticas, sendo necessário um tratamento numérico bastante sofisticado, uma abordagem que foge do objetivo do presente trabalho. No entanto, ressaltamos as importantes conexões possíveis que o caso com um potencial $V(\Phi)$ tem, por exemplo, com as teorias $f(R)$, que podem ser reformuladas em uma teoria do tipo Brans-Dicke com um potencial adequado, [16]. Outro caso interessante, não adotado neste trabalho, é o acoplamento não mínimo entre campo escalar e

campo eletromagnético, já extensivamente estudado em [11, 12, 26, 27]. Esses estudos exploraram todas as soluções possíveis (sempre em a ausência de um termo potencial), assintoticamente planas e não planas, no referencial de Einstein.

Na teoria escalar de Einstein-Maxwell temos um sistema de vácuo escalar carregado, ou seja, além do campo escalar sem massa, também é considerado um campo eletromagnético, isto no referencial de Einstein. Comparado com o caso sem carga (soluções de Fisher e anti-Fisher), este caso é mais rico, no sentido de ter um número maior de soluções independentes, cinco no setor canônico e mais cinco no setor fantasma, listadas nas tabelas 5.1 e 5.2. Assim como vácuo escalar, no setor canônico é encontrado apenas soluções de singularidades nuas, enquanto no fantasma temos buracos negros e de minhoca. Usando a transformação conforme adequada, estas dez soluções independentes são mapeadas nas oito soluções da teoria de Brans-Dicke com campo eletromagnético no referencial de Jordan [7]. O número de soluções independentes diminui de um referencial para outro, isto é devido a uma constante de integração, introduzida quando passamos de um referencial para outro, que faz com que mais de uma solução do referencial Einstein seja classificada em um mesmo caso no referencial de Jordan.

As soluções da teoria escalar de Einstein-Maxwell foram classificadas em dez ramos independentes, no entanto, cinco desses ramos apresentam uma estrutura de singularidade nua, ou seja, uma singularidade sem a presença de um horizonte. Os outros cinco ramos, em que se encontram duas soluções de buraco negro frio e três de buraco de minhoca, são do setor fantasma. A primeira solução de buraco negro frio é a [1-] e apresenta uma condição de quantização para as constantes de integração, que se faz necessária para a extensão analítica da solução por além do horizonte, além disso, a solução se divide em dois casos, similares às soluções de Reissner-Nordström não extremo e extremo. A segunda solução de buraco negro frio é a [2-], e sua estrutura causal é similar à Reissner-Nordström extremo. Em ambos buracos negros a singularidade é do tipo tempo (característica normalmente presente em soluções com carga), com o campo escalar fantasma divergente nos horizontes, o que pode ser considerado o motivo da área superficial do horizonte ser infinito, e o campo elétrico divergente na singularidade. As soluções [3-], [4-] e [5-] descrevem soluções de buracos de minhocas que possuem duas gargantas, ou seja, duas regiões de mínimo da função g_{22} , que conectam uma região central com dois assintóticos. Fazendo um tratamento de fluido dessas soluções, foi possível construir um gráfico da densidade de energia, matéria e pressão para tais soluções, sendo encontrado que em todos os casos a densidade de energia e pressão são negativas em toda a solução, porém em [3-] a

densidade de matéria é positiva em toda solução enquanto em [4-] e [5-] a densidade de matéria só é negativa próximo às gargantas das soluções.

As soluções de buraco negro no sistema de vácuo-escalar carregado no referencial de Einstein são classificados como frios devido sua área superficial infinita que acaba implicando em uma temperatura Hawking nula, entretanto a termodinâmica de buracos negros usada é um tratamento semi-clássico de campos quânticos em tal espaço-tempo, o que não é bem definido quando o campo escalar é acoplado à geometria, mesmo que minimamente, dessa forma não é explícito se é possível definir as quantidades termodinâmicas neste caso assim como nos outros casos.

Os estudos do problema de estabilidade para as soluções encontradas neste trabalho são um novo passo necessário. Para uma análise adequada do problema, é necessária a utilização das grandezas invariantes de calibre, bem como a determinação da estabilidade do modelo. A partir dos resultados anteriores obtidos na literatura para configurações semelhantes [9, 10, 28], podemos esperar que as soluções são instáveis. Observamos que os BNs encontrados aqui têm algumas semelhanças com os buracos negros de Reissner-Nordström para os quais estudos anteriores revelaram a presença de instabilidades [18, 19] principalmente no horizonte de Cauchy (horizonte mais interna nas soluções com dois horizontes). No entanto, a estabilidade de objetos como buracos negros e buracos de minhoca devem ser estudados caso a caso. A análise de estabilidade implica escrever uma equação do tipo Schrödinger com um potencial efetivo. Este potencial efetivo é geralmente singular no mínimo da função de área $e^{2\beta}$. Isso implica que uma análise numérica é necessária para completar o estudo de estabilidade.

Bibliografia

- [1] Abbott, B. P., Jawahar, S., Lockerbie, N. A. e Tokmakov, K. V. **Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger.** *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016), p. 061102 (citado na página 1).
- [2] Bekenstein, J. D. **Black Holes and Entropy.** *Phys. Rev. D* 7 (1973), pp. 2333–2346 (citado nas páginas 1, 111).
- [3] Bergmann, O. e Leipnik, R. **Space-Time Structure of a Static Spherically Symmetric Scalar Field.** *Phys. Rev.* 107 (1957), pp. 1157–1161 (citado na página 3).
- [4] Brans, C. e Dicke, R. H. **Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation.** *Phys. Rev.* 124 (3 1961), pp. 925–935 (citado na página 59).
- [5] Bronnikov, K. A. **Scalar-tensor theory and scalar charge.** *Acta Phys. Polon. B* 4 (1973), pp. 251–266 (citado nas páginas 2, 3, 55, 97).
- [6] Bronnikov, K. A., Clement, G., Constantinidis, C. P. e Fabris, J. C. **Cold scalar tensor black holes: Causal structure, geodesics, stability.** *Grav. Cosmol.* 4 (1998), pp. 128–138 (citado na página 62).
- [7] Bronnikov, K. A., Constantinidis, C. P., Evangelista, R. L. e Fabris, J. C. **Electrically Charged Cold Black Holes in Scalar-Tensor Theories.** *International Journal of Modern Physics D* 8 (1999), pp. 481–505 (citado nas páginas 4, 56, 87, 101, 102, 118).
- [8] Bronnikov, K. e Rubin, S. **Black Holes, Cosmology And Extra Dimensions (Second Edition).** World Scientific Publishing Company, 2021 (citado nas páginas 35, 52, 108, 110, 118).
- [9] Bronnikov, K., Fabris, J. e Zhidenko, A. **On the stability of scalar-vacuum space-times.** *The European Physical Journal C* 71 (2011), pp. 1–12 (citado nas páginas 64, 103).
- [10] Bronnikov, K. A., Barcellos, V. A., Carvalho, L. P. de e Fabris, J. C. **The simplest wormhole in Rastall and k-essence theories.** *The European Physical Journal C* 81.5 (2021), p. 395 (citado na página 103).

- [11] Clement, G., Fabris, J. C. e Rodrigues, M. E. **Phantom Black Holes in Einstein-Maxwell-Dilaton Theory**. *Phys. Rev. D* 79 (2009), p. 064021 (citado nas páginas 3, 102).
- [12] Clement, G., Fabris, J. C. e Rodrigues, M. E. **Phantom Black Holes in Einstein-Maxwell-Dilaton Theory**. *Phys. Rev. D* 79 (2009), p. 064021 (citado nas páginas 3, 102).
- [13] Collaboration, E. H. T. **First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole**. *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019), p. L1 (citado na página 2).
- [14] Collaboration, E. H. T. **First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way**. *Astrophys. J. Lett.* 930 (2022), p. L12 (citado na página 2).
- [15] D’Inverno, R. **Introducing Einstein’s Relativity**. Clarendon Press, 1992 (citado na página 6).
- [16] De Felice A.; Tsujikawa, S. **f(R) Theories**. *Living Reviews in Relativity* 13.1 (2010) (citado na página 101).
- [17] Dirac, P. **The Cosmological Constants**. *Nature* 139 (1937), p. 323 (citado na página 59).
- [18] Dotti, G. **Linear Stability of Black Holes and Naked Singularities**. *Universe* 8.1 (2022), p. 38 (citado na página 103).
- [19] Dotti, G. e Gleiser, R. J. **Gravitational instability of the inner static region of a Reissner–Nordström black hole**. *Classical and Quantum Gravity* 27.18 (2010), p. 185007 (citado na página 103).
- [20] Einstein, A. e Rosen, N. **The Particle Problem in the General Theory of Relativity**. *Phys. Rev.* 48 (1935), pp. 73–77 (citado na página 2).
- [21] Ellis, H. G. **Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity**. *Journal of Mathematical Physics* 14 (1973), pp. 104–118 (citado nas páginas 2, 55, 97).
- [22] Fabris, J. C., Gomes, T. A. O. e Rodrigues, D. C. **Black Hole and Wormhole Solutions in Einstein–Maxwell Scalar Theory**. *Universe* 8.3 (2022), p. 151 (citado nas páginas 4, 5, 75).

- [23] Fisher, I. Z. **Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects** (1999) (citado nas páginas 3, 64).
- [24] Flamm, L. **Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie**. *Physikalische Zeitschrift* XVII (1916), pp. 448–454 (citado na página 2).
- [25] Fuller, R. W. e Wheeler, J. A. **Causality and Multiply Connected Space-Time**. *Phys. Rev.* 128 (2 1962), pp. 919–929 (citado na página 2).
- [26] Garfinkle, D., Horowitz, G. T. e Strominger, A. **Charged black holes in string theory**. *Phys. Rev. D* 43 (1991). [Erratum: *Phys.Rev.D* 45, 3888 (1992)], p. 3140 (citado nas páginas 3, 102).
- [27] Gibbons, G. W. e Maeda, K.-i. **Black Holes and Membranes in Higher Dimensional Theories with Dilaton Fields**. *Nucl. Phys. B* 298 (1988), pp. 741–775 (citado nas páginas 3, 102).
- [28] Gonzalez, J., Guzman, F. e Sarbach, O. **Instability of wormholes supported by a ghost scalar field: I. Linear stability analysis**. *Classical and quantum gravity* 26.1 (2008), p. 015010 (citado na página 103).
- [29] Hawking, S. W. **Black holes and thermodynamics**. *Phys. Rev. D* 13 (1976), pp. 191–197 (citado nas páginas 1, 111).
- [30] Hawking, S. W. e Ellis, G. F. R. **The Large Scale Structure of Space-Time**. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973 (citado na página 6).
- [31] Hawking, S. **Particle creation by black holes**. *Commun. Math. Phys.* 43 (1975), pp. 199–220 (citado nas páginas 2, 111).
- [32] Misner, C. W. e A., W. J. **Classical physics as geometry**. *Annals of Physics* 2.6 (1957), pp. 525–603 (citado na página 2).
- [33] Morris, M. S. e Thorne, K. S. **Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity**. *American Journal of Physics* 56 (1988), p. 395 (citado na página 2).
- [34] Poisson, E. **A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics**. Cambridge University Press, 2004 (citado nas páginas 6, 35).
- [35] Schwarzschild, K. **On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory**. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)* 1916 (1916), pp. 189–196 (citado na página 1).

- [36] Visser, M. **Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking**. Computational and Mathematical Physics. American Inst. of Physics, 1995 (citado nas páginas [6](#), [57](#)).
- [37] Wagoner, R. V. **Scalar-Tensor Theory and Gravitational Waves**. *Phys. Rev. D* 1 (12 1970), pp. 3209–3216 (citado na página [60](#)).
- [38] Wald, R. M. **General Relativity**. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984 (citado nas páginas [6](#), [35](#)).

Apêndices

A.1 Método de Construção do Diagrama de Carter-Penrose

A construção do diagrama de Carter-Penrose para espaços-tempos mais gerais pode ser usado no intuito de compreender melhor a estrutura causal e obter correspondências entre o comportamento das funções métricas. Neste apêndice é apresentado um método mais simples de construir este diagrama. O que segue pode se encontrar no livro [8].

Tome a métrica de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico,

$$ds^2 = e^{2\gamma(u)} dt^2 - e^{2\alpha(u)} du^2, \tag{A.1}$$

restringindo a apenas o subespaço (t, u) . Seja $u = u_h$ a superfície que satisfaça todos os critérios de um horizonte, ou seja $e^{2\gamma(u_h)} = 0$, introduzindo as coordenadas tartaruga e quasi-global,

$$x = \pm \int e^{\alpha(u)-\gamma(u)} du \quad \text{e} \quad \rho = \pm \int e^{\alpha(u)+\gamma(u)} du, \tag{A.2}$$

respectivamente. Sendo $a < \rho < b$ o limite da coordenada na reta real (sendo finito ou infinito) e escrevendo a seção bidimensional da métrica como

$$ds^2 = f(\rho) dt^2 - \frac{d\rho^2}{f(\rho)}. \tag{A.3}$$

Dessa forma, podemos justapor os pontos a, b e ρ_i (os zeros de $f(\rho)$) com as seguintes imagens:

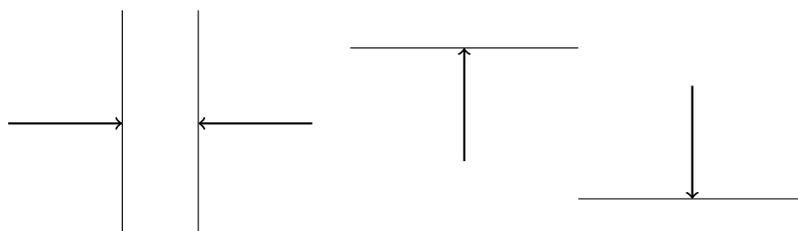


Figura A.1.: Imagens formadas no limite $\rho \rightarrow a, b$ e para $|x| < \infty$, sendo às duas da esquerda para $f > 0$ e as da direita para $f < 0$.

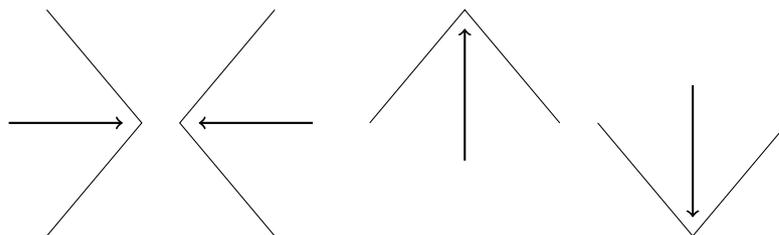


Figura A.2.: Imagens formadas no limite $\rho \rightarrow a, b, \rho_i$ e para $|x| \rightarrow \infty$, sendo às duas da esquerda para $f > 0$ e as da direita para $f < 0$.

O processo de construção do diagrama usando as imagens A.1 e A.2 começa a partir de um dos limites da coordenada (a ou b), e segue até o outro limite. Em cada intervalo onde a função $f(\rho)$ possui o mesmo sinal, corresponde a região interna entre as linhas. Os horizontes $\rho = \rho_i$ correspondem ao encontro de duas linhas. A forma de adicionar uma linha depende do sinal da função $f(\rho)$ no intervalo.

Os conceitos de região tipo R e tipo T se fazem bastante útil aqui. Esse conceito é usado para formular as regras de como ir adicionando as linhas. Quando temos a transição entre regiões de diferentes tipos, como de tipo T para R (TR) ou de R para T (RT), as linhas são desenhadas formam uma figura em X. Quando temos transições entre regiões de mesmo tipo, RR ou TT, é formado uma figura em “zigzag”. Exemplos desses tipos de transições é mostrado na figura A.3.

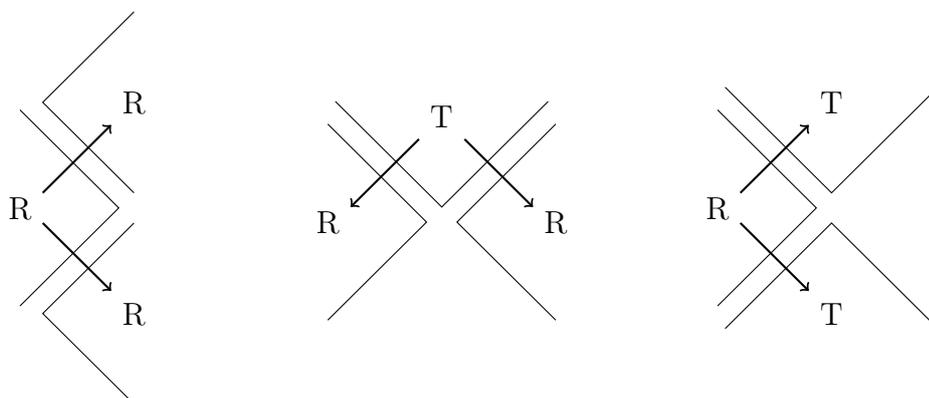


Figura A.3.: Exemplos de formas de adicionar as linhas, que representara as transições entre horizontes. As linhas que encostam em outras representaram os horizontes e as setas indicam as direções das transições. A letra R indica as regiões onde $f(\rho) > 0$ (do tipo R) e a letra T as regiões com $f(\rho) < 0$ (do tipo T).

A.2 Condição de Energia

Considere o tensor de energia momento de um fluido perfeito, a forma mais geral para este tensor no caso estático e esfericamente simétrico é

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho, -p_r, -p_\perp, -p_\perp), \quad (\text{A.4})$$

onde ρ , p_r e p_\perp são a densidade e as componentes radial e perpendicular da pressão, respectivamente. Usando as coordenadas quasi-globais a métrica (3.1) pode ser escrita como

$$ds^2 = A(u)dt^2 - \frac{du^2}{A(u)} - r(u)^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.5})$$

e assim os critérios de seleção de solução de buraco de minhoca impõe que, na garganta ($u = u_{th}$), [8], temos que: $A > 0$, $r > 0$, $r' = 0$ e $r'' > 0$. Agora, das equações de campo de Einstein obtemos as seguintes relações

$$R^0{}_0 - R^1{}_1 = \kappa (T^0{}_0 - T^1{}_1) \Rightarrow -2A \frac{r''}{r} = \kappa(\rho + p_r), \quad (\text{A.6})$$

$$G^1{}_1 = \kappa T^1{}_1 \Rightarrow \frac{1}{r^2}(-1 + A'rr' + Ar'^2) = \kappa p_r. \quad (\text{A.7})$$

Analisando as equações acima no limite em que $u \rightarrow u_{th}$, ou seja, na região próxima a garganta, para a métrica (A.5) ser um buraco de minhoca temos as seguintes condições

$$\rho + p_r < 0 \quad \text{e} \quad p_r < 0. \quad (\text{A.8})$$

Note não haver restrição no sinal da densidade ρ e as condições acima são de natureza local, e não depende de nenhuma suposição para o espaço-tempo ou para as propriedades da matéria longe da garganta. Podemos ainda verificar que a primeira desigualdade acima viola uma das mais importantes condições satisfeita por maior parte da matéria que conhecemos, a condição de energia nula. No caso geral, esta condição pode ser expressa pela desigualdade

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0, \quad \forall \xi : \xi^\mu\xi_\mu = 0, \quad (\text{A.9})$$

onde ξ^μ é um vetor de Killing nulo. Para a métrica (A.5) este vetor tem o seguinte formato $\xi^\mu = (A(u)^{-1/2}, A(u)^{1/2}, 0, 0)$ que fornece

$$T_{00}\xi^0\xi^0 + T_{11}\xi^1\xi^1 \geq 0 \Rightarrow \rho + p_r \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

Repare que a condição de energia nula é violada na garganta de um buraco de minhoca, ou seja, tais tipos de soluções requerem uma matéria exótica para existirem. Este requerimento é uma característica geral de buracos de minhoca.

A.3 Termodinâmica de Buracos Negros

Pela sua definição, buracos negros são regiões do espaço-tempo, delimitadas pelos horizontes de eventos, da onde nenhuma partícula seria capaz escapar. Portanto, um buraco negro não conseguiria emitir nada (pelo menos conforme a física clássica). No entanto, tais objetos de fato satisfazem relações idênticas a algumas relações bem conhecidas da termodinâmica, conforme mostrado em [2]. Dessa forma, podemos atribuir algumas características termodinâmicas a esses objetos, como temperatura e entropia.

Considerando os efeitos de flutuações quânticas próximo de horizontes de eventos, Hawking [31] sugeriu que BN poderiam absorver anti-partículas criadas próximo ao horizonte, assim emitindo radiação de corpos negros com uma certa temperatura e evaporando (diminuindo a área superficial de seu horizonte). Ele também derivou uma relação exata entre entropia e a área do horizonte de eventos do buraco negro. Após identificar tais pontes entre buracos negros e relações termodinâmicas, foi formulada as quatro leis da termodinâmica de buracos negros [29]. Elas são:

- **Lei Zero:** A gravidade superficial de um BN é a mesma em toda superfície do horizonte de eventos.

A gravidade superficial é definida como a aceleração de queda livre medida no horizonte de eventos. Podemos escrever uma equação para ela como sendo

$$\kappa = \sqrt{-\frac{1}{2}\nabla_a\xi_b\nabla^a\xi^b}, \quad (\text{A.11})$$

onde ξ^a é um vetor de Killing do espaço-tempo. Para uma métrica estática e esfericamente simétrica como (3.1) a gravidade superficial se torna

$$\kappa(u) = e^{\gamma-\alpha} |\gamma'|. \quad (\text{A.12})$$

Para as soluções de Schwazschild e Reissner-Nordström (não extremo) a gravidade superficial em seus respectivos horizontes é

$$\kappa_{sc}^* = \frac{1}{4m} \quad \text{e} \quad \kappa_{RN}^* = \frac{m^2 - Q^2 + m\sqrt{m^2 - Q^2}}{(m + \sqrt{m^2 - Q^2})^3}. \quad (\text{A.13})$$

Note que nas equações acima temos apenas parâmetros dos buracos negros, confirmando a lei zero.

- **Primeira Lei:** Considere a área superficial do horizonte de eventos do buraco negro de RN (não extremo),

$$A_h = 4\pi r_+^2, \quad r_+ = m + \sqrt{m^2 - Q^2}. \quad (\text{A.14})$$

Diferenciando a área do horizonte ficamos obtemos que

$$dm = \frac{\kappa_{RN}^*}{8\pi} dA - E^* dQ. \quad (\text{A.15})$$

onde E^* é o campo elétrico avaliado no horizonte. Note que a equação acima é similar à primeira lei da termodinâmica, $dU = TdS + dW$. Comparando as duas equações podemos identificar:

$$T_H = \frac{\kappa_{RN}^*}{8\pi} \quad \text{e} \quad S_{BH} = \frac{A_h}{4}, \quad (\text{A.16})$$

sendo T_H a temperatura Hawking e S_{BH} a entropia do buraco negro. Temos também que o último termo de (A.15) representa o trabalho necessário para remover uma certa quantidade de carga elétrica do buraco negro. A equação (A.15) é chamada de primeira lei da termodinâmica de buracos negros.

- **Segunda Lei:** Não existem processos físicos que podem diminuir a área do BN, que implica que a entropia do BN não pode diminuir.

No entanto, após Hawking propor que BN poderiam evaporar a partir do processo de radiação Hawking, esta lei teve que ser generalizada.

- **Segunda Lei generalizada:** A soma da entropia do BN mais a entropia dos campos na região externa do BN nunca diminuem.
- **Terceira Lei:** Não é possível reduzir a temperatura de um BN a zero por uma sequência finita de operações.

De forma geral, para uma solução de buraco negro com área superficial finita, a temperatura Hawking é definida como

$$T_H = \lim_{u \rightarrow u_h} \frac{\kappa(u)}{2\pi}, \quad \kappa(u) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\gamma-\alpha} |\gamma'|, \quad (\text{A.17})$$

sendo u_h a superfície do horizonte. Teremos também que a entropia desse BN será diretamente proporcional a área superficial do horizonte de eventos. Tais definições só são possíveis para buracos negros com área superficial finita, caso contrário toda construção da primeira lei da termodinâmica para BN (A.15) não faz sentido. Logo, nestes casos é necessária outra construção para uma equação equivalente à primeira lei da termodinâmica.

A.4 Classificação das soluções carregadas da teoria de Brans-Dicke

Neste trabalho é estudado as soluções da teoria de Einstein-Maxwell na presença de campo escalar, em que temos um sistema de vácuo com um campo escalar sem massa e um campo eletromagnético, ambos minimamente acoplados à geometria, ou seja, no referencial de Einstein. Vimos que as soluções definidas no referencial de Einstein podem ser mapeados para o referencial de Jordan, onde os campos podem estar não minimamente acoplados à geometria, por uma transformação conforme, que não altera a estrutura das soluções. Neste contexto, é feita uma classificação das soluções escritas no referencial de Jordan da teoria de Brans-Dicke, com o intuito de mostrar como tais soluções são mapeadas.

A teoria de Brans-Dicke é uma teoria escalar tensorial definida no referencial de Jordan, com sua ação escrita da seguinte forma:

$$S_{BD} = \int_J \sqrt{-g} d^4x \left[\Phi R - \frac{w}{\Phi} \nabla_\alpha \varphi \nabla^\alpha \Phi + F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right], \quad (\text{A.18})$$

com w sendo uma constante de acoplamento adimensional. A transformação conforme que mapeia esta teoria no referencial de Einstein é definida como, (4.11),

$$ds_J = \frac{1}{\Phi} ds_E \quad \text{e} \quad \Phi = e^{-2\sigma u}, \quad 2\sigma = C/\sqrt{|w + 3/2|}. \quad (\text{A.19})$$

Portanto, usando a solução geral no referencial de Einstein, escrita como (5.23), a solução geral da teoria de Brans-Dicke é escrita como

$$ds_J^2 = \frac{1}{\Phi} ds_E^2 = e^{2\sigma u} \left[\frac{s^2(\lambda, u_0) dt^2}{s^2(\lambda, u + u_0)} - \frac{s^2(\lambda, u + u_0)}{s^2(\lambda, u_0) s^2(k, u)} \left(\frac{du^2}{s^2(k, u)} + d\Omega^2 \right) \right], \quad (\text{A.20})$$

com as seguintes relações entre as constantes

$$2\sigma = \frac{C}{\sqrt{|w + 3/2|}} \quad \text{e} \quad \pm \lambda^2 = \pm k^2 - (w + 3/2)\sigma^2. \quad (\text{A.21})$$

Outra constante de interesse é a massa geométrica, definida como

$$\gamma'(0) = -m \Rightarrow m = \frac{s'(\lambda, u + u_0)}{s(\lambda, u + u_0)} - \sigma, \quad (\text{A.22})$$

portanto, podemos escrever uma equação que relacione todas as constantes como

$$(m + \sigma)^2 - Q^2 = \pm \lambda^2 = \pm k^2 - (w + 3/2)\sigma^2. \quad (\text{A.23})$$

Note que o fator conforme não remove as regiões assintótica e singular, em $u = 0$ e $u = -u_0$ respectivamente, presentes no referencial de Einstein. O fator ϵ , que definia se o campo escalar era canônico ou fantasma, é substituído pela constante de acoplamento w , que pode valer $w > -3/2$, descrevendo um campo canônico, ou $w < -3/2$, descrevendo um campo fantasma. Para $w = -3/2$ a transformação conforme perde sua analiticidade, tendo nenhum significado físico. Todos possíveis casos da solução carregada de Brans-Dicke estão listados na tabela A.1.

-	$k = 0$	$k > 0$	$k < 0$
$\lambda = 0$	$(w + 3/2)\sigma^2 = 0$	$k^2 = (w + 3/2)\sigma^2$	$k^2 = -(w + 3/2)\sigma^2$
$\lambda > 0$	$\lambda^2 = -(w + 3/2)\sigma^2$	$k^2 - \lambda^2 = (w + 3/2)\sigma^2$	$k^2 + \lambda^2 = -(w + 3/2)\sigma^2$
$\lambda < 0$	$\lambda^2 = (w + 3/2)\sigma^2$	$k^2 + \lambda^2 = (w + 3/2)\sigma^2$	$k^2 - \lambda^2 = -(w + 3/2)\sigma^2$

Tabela A.1.: Possíveis relações entre constantes no referencial de Jordan.

A1	$\lambda > 0$ e $k = 0$	$w < -3/2$
A2	$\lambda < 0$ e $k = 0$	$w > -3/2$
B1	$\lambda = 0$ e $k > 0$	$w > -3/2$
B2	$\lambda > 0$ e $k > 0$	$w > -3/2$ e $k > \lambda$ ou $w < -3/2$ e $\lambda > k$
B3	$\lambda < 0$ e $k > 0$	$w > -3/2$
C1	$\lambda = 0$ e $k < 0$	$w < -3/2$
C2	$\lambda > 0$ e $k < 0$	$w < -3/2$
C3	$\lambda < 0$ e $k < 0$	$w > -3/2$ e $ \lambda > k $ ou $w < -3/2$ e $ k > \lambda $

Tabela A.2.: Soluções independentes no referencial de Jordan.

Como a solução (A.20) ainda possui a singularidade ($u = -u_0$) e a região assintótica ($u = 0$) assim como no referencial de Einstein, nos resta apenas identificar quais casos possuem candidatos a horizontes de eventos (caracterizando um possível buraco negro) e quais casos possuem mais de uma região assintótica na ausência de horizontes e singularidades entre elas (caracterizando um buraco de minhoca). No que segue é realizada uma breve análise das soluções carregadas independentes da teoria de Brans-Dicke:

- **A1:** neste caso as funções métricas são escritas como

$$e^{2\gamma} = \frac{e^{2\sigma u} \sinh^2(\lambda u_0)}{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{2\sigma u} \sinh^2[\lambda(u + u_0)]}{\sinh^2(\lambda u_0) u^2}, \quad (\text{A.24})$$

com

$$\lambda^2 = -(w + \frac{3}{2})\sigma^2. \quad (\text{A.25})$$

A solução é real somente para $w < -3/2$ e para $u_0 > 0$ o domínio da coordenada radial é definido como $-u_0 < u < \infty$, sendo $u = -u_0$ uma singularidade central. No limite do domínio da coordenada radial u , em que $u \rightarrow \infty$, as funções possuem o seguinte comportamento:

$$e^\gamma \sim e^{(\sigma-\lambda)u}, \quad e^\beta \sim \frac{e^{(\sigma+\lambda)u}}{u}. \quad (\text{A.26})$$

Portanto, para $-\lambda < \sigma \leq \lambda$ a superfície $u \rightarrow \infty$ descreve um horizonte com área superficial infinita, ou seja, esta solução é um possível buraco negro frio.

- **A2:** as funções métricas deste caso são escritas como

$$e^{2\gamma} = \frac{e^{2\sigma u} \sin^2(\lambda u_0)}{\sin^2[\lambda(u + u_0)]}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{2\sigma u} \sin^2[\lambda(u + u_0)]}{\sin^2(\lambda u_0) u^2}. \quad (\text{A.27})$$

sendo

$$\lambda^2 = (w + 3/2)\sigma^2. \quad (\text{A.28})$$

Para solução ser real devemos ter $w > -3/2$. A função seno define o domínio da coordenada radial como sendo $\frac{n\pi}{\lambda} - u_0 < u < \frac{(n+1)\pi}{\lambda} - u_0$. No limite do domínio, o comportamento das funções métricas descrevem regiões singulares. Esta solução possui horizontes somente para $u \rightarrow \infty$.

- **B1:** neste caso temos

$$e^{2\gamma} = \frac{e^{2\sigma u} u_0^2}{(u + u_0)^2}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{2\sigma u} (u + u_0)^2 k^2}{u_0^2 \sinh^2(ku)}, \quad (\text{A.29})$$

com a relação

$$k^2 = (w + 3/2)\sigma^2. \quad (\text{A.30})$$

Para uma solução real devemos ter $w > -3/2$, com o domínio da coordenada radial, considerando $u_0 > 0$, sendo $-u_0 < u < \infty$. No limite $u \rightarrow \infty$, as funções métricas se comportam como

$$e^\gamma \sim e^{\sigma u} / (u + u_0), \quad e^\beta \sim e^{(\sigma-k)u} (u + u_0). \quad (\text{A.31})$$

Logo, se $\sigma < 0$, temos um horizonte singular com área superficial infinita. Por outro lado, para $\sigma > 0$, a superfície $u \rightarrow \infty$ é uma singularidade com área zero, para $\sigma < k$, ou área infinita, para $\sigma \geq k$. Como não temos candidato para horizonte regular neste caso, ele pode apenas representar uma singularidade nua.

- **B2:** aqui as funções são escritas como

$$e^{2\gamma} = \frac{e^{2\sigma u} \sinh^2(\lambda u_0)}{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{2\sigma u} \sinh^2[\lambda(u + u_0)]}{\sinh^2(\lambda u_0) \sinh^2(ku)}, \quad (\text{A.32})$$

sendo

$$k^2 - \lambda^2 = (w + 3/2)\sigma^2. \quad (\text{A.33})$$

Neste caso podemos ter $w < -3/2$, sendo $\lambda > k$, ou $w > -3/2$, para $k > \lambda$. O domínio da coordenada radial é $-u_0 < u < \infty$. No limite da coordenada, $u \rightarrow \infty$, temos que

$$e^\gamma \sim e^{(\sigma-\lambda)u}, \quad e^\beta \sim e^{(\sigma+\lambda-k)u}. \quad (\text{A.34})$$

Para $u \rightarrow \infty$ ser um candidato a horizonte devemos ter $\sigma < \lambda$, por outro lado, para este horizonte possuir uma área positiva não nula temos que $\sigma \geq k - \lambda$, essas condições impõem que $\lambda > \sigma > k - \lambda$. No entanto, essas condições não garantem a regularidade da solução em todo seu domínio. Analisando os escalares de Kretschmann, em especial o termo K_1 , temos que no limite $u \rightarrow \infty$,

$$K_1 \sim e^{2(2k-\lambda-\sigma)u}. \quad (\text{A.35})$$

Logo, para a solução ser regular temos que $\lambda > \sigma \geq 2k - \lambda$, que implica em $\lambda > k$, ou seja, só temos candidato a horizonte regular quando o campo apresentar comportamento fantasma, $w < -3/2$.

- **B3** ($\lambda < 0$ and $k > 0$): a forma das funções métricas agora são

$$e^{2\gamma} = \frac{e^{\sigma u} \sin^2(\lambda u_0)}{\sin^2[\lambda(u + u_0)]}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{\sigma u} \sin^2[\lambda(u + u_0)]}{\sin^2(\lambda u_0) \sinh^2(ku)}, \quad (\text{A.36})$$

com

$$k^2 + \lambda^2 = (w + 3/2)\sigma^2. \quad (\text{A.37})$$

Nesta solução o campo escalar apresenta um comportamento normal, com energia positiva $w > -3/2$. Assim como na solução **A2** a função seno introduz infinitas singularidades, para $u = \frac{n\pi}{\lambda} - u_0$, sendo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Portanto, este caso poderá descrever apenas singularidades nuas.

- **C1, C2 and C3** ($k < 0$): Estas três soluções possuem uma estrutura semelhante, em que as funções métricas podem ser escritas como

$$e^{2\gamma} = A_n(u), \quad e^{2\beta} = \frac{A_n(u)}{\sin^2(ku)}, \quad (\text{A.38})$$

send $n = 1, 2, 3$, correspondente à cada solução. Em cada caso temos

$$A_1(u) = \frac{e^{-\sigma u} u_0^2}{(u + u_0)^2}, \quad A_2(u) = \frac{e^{-\sigma u} \sinh^2(\lambda u_0)}{\sinh^2[\lambda(u + u_0)]}, \quad A_3(u) = \frac{e^{-\sigma u} \sin^2(\lambda u_0)}{\sin^2[\lambda(u + u_0)]}. \quad (\text{A.39})$$

com

$$k^2 = -(w + 3/2)\sigma^2, \quad k^2 + \lambda^2 = -(w + 3/2)\sigma^2, \quad k^2 - \lambda^2 = -(w + 3/2)\sigma^2, \quad (\text{A.40})$$

respectivamente. Note que as soluções **C1** e **C2** só são reais para $w < -3/2$, ou seja, para o campo escalar canônico, enquanto a solução **C3** o campo pode ser tanto canônico quanto fantasma. O domínio da coordenada radial em todos os casos é $\frac{n\pi}{k} < u < \frac{(n+1)\pi}{k}$. Neste domínio, os casos **C1** e **C2**, descrevem duas ou mais regiões assintóticas conectadas por gargantas. No caso **C3** para $w > -3/2$ temos $|\lambda| > |k|$, dessa forma, o período do seno na função $A_3(u)$ será maior que o seno na função e^β , indicando uma singularidade entre as regiões assintóticas. Por outro lado, para $w < -3/2$ temos $|k| > |\lambda|$, o que permite escolher um domínio (valor de n) contendo apenas assintóticos. As três soluções são candidatas a buracos de minhoca.

Podemos observar que, as soluções com campo escalar canônico, energia positiva, descrevem singularidades nuas (nos casos **A2**, **B1**, **B2**, **B3** e **C3**), enquanto, na presença de campo escalar fantasmas as soluções possuem estruturas mais ricas, como buracos negros frios e buracos de minhoca (nas soluções **A1**, **B2**, **C1**, **C2** e **C3**). As soluções **A1** e **B2**, descrevem uma família de soluções de buracos negros frios, podendo conter um ou dois horizontes com área superficial infinita. As soluções **C1**, **C2** e **C3** possuem estruturas de buracos de minhoca, contendo assintóticos conectados por uma região de mínimo de e^β , chamado de garganta. Podemos mapear estas soluções, definidas no referencial de Jordan, nas soluções analisadas na seção 5.2, definidas no referencial de Einstein, ou seja, as soluções de buraco negro e buraco de minhoca, encontradas no referencial de Einstein, também estão presentes no referencial de Jordan, porém com um fator conforme. O mapa de caso a caso dos dois referenciais é mostrado na tabela A.3. Uma análise mais completa das soluções expostas aqui pode ser encontrado em [7, 8].

A1	[2-]	B3	[2+]
A2	[3+]	C1	[5-]
B1	[5+]	C2	[3-]
B2	[1+],[1-]	C3	[4+],[4-]

Tabela A.3.: Mapa das soluções no referencial de Jordan para as soluções no referencial de Einstein