



Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Centro de Ciências Exatas - CCE

UFES Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFIS

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
Centro de Ciências Exatas - CCE
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFIS

MÁRIO HORTA TRISTÃO

O ESTUDO DE SIMULAÇÕES DA
MAGNETOHIDRODINÂMICA VIA MÉTODO DE
LATTICE BOLTZMANN

VITÓRIA

2023

MÁRIO HORTA TRISTÃO

O ESTUDO DE SIMULAÇÕES DA
MAGNETOHIDRODINÂMICA VIA MÉTODO DE
LATTICE BOLTZMANN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de Física Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich Junior

Coorientador: Prof. Dr. Wesley Spalenza

VITÓRIA

2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

T838e Tristão, Mário Horta, 1990-
O estudo de simulações da magnetohidrodinâmica via método de Lattice Boltzmann / Mário Horta Tristão. - 2023.
84 f. : il.

Orientador: Humberto Belich Júnior.

Coorientador: Wesley Spalenza.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Magnetohidrodinâmica. 2. Método Lattice Boltzmann. 3. Dinâmica de fluidos computacionais. 4. Vórtices. 5. Escoamento de Hartmann. I. Belich Júnior, Humberto. II. Spalenza, Wesley. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

“O Estudo de Simulações da Magnetohidrodinâmica via Método de Lattice Boltzmann”

MÁRIO HORTA TRISTÃO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. André Bessadas Penna-Firme

(DD/UFES)

Prof. Dr. Humberto Belich Júnior

(Orientador - PPGFis)

Wesley Spalenza

Prof. Dr. Ramon Silva Martins

(DEM/UFES)

Wendel Silva Paz

Prof. Dr. Wesley Spalenza

(Coorientador/UFES)

Vinicius Cândido Mota

Prof. Dr. Wendel Silva Paz

(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Vinicius Cândido Mota

(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 14 de junho de 2023





235ª Defesa Mário Horta Tristão - Ata de Aprovação

Data e Hora de Criação: 14/06/2023 às 17:39:32

Documentos que originaram esse envelope:

- 235ª Defesa Mário Horta Tristão - Ata de Aprovação.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)
- 235ª Defesa Mário Horta Tristão - Ata de Submissão.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 8dbe83927ff5fd58c660f45156259d880270e0fd133123a5ebbe49ddf374cf5

[SHA512]: 92dcaa332fac2121e8c9f711caa4bd1458f97104f279f121e260dabb7f86645a2b3834855249773cfa510ae820f7d013b0f81393be86007bd41d8a1a9529dae

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - André Penna-Firme (abessadas@gmail.com)

Data/Hora: 15/06/2023 - 11:55:15, IP: 189.122.25.159, Geolocalização: [-22.948540, -43.165243]

[SHA256]: a2cbb56f8ee6ff2fd750c9b957c414252931499fc2e6516b7b235a3c9cecf551



ASSINADO - Humberto Belich Jr. (belichjr@gmail.com)

Data/Hora: 14/06/2023 - 17:50:56, IP: 187.36.174.198, Geolocalização: [-20.282140, -40.301098]

[SHA256]: 95ee2ac989857fda513cd2e89b804491e37ddf92a09fa83d24a5e16ec191797e



ASSINADO - Ramon Silva Martins (ramon.martins@ufes.br)

Data/Hora: 14/06/2023 - 17:41:51, IP: 200.137.65.102

[SHA256]: e02c152b05f060424987cfd7ae68782c5e68fa20c05fd57ef790a4568daf427



ASSINADO - Vinicius Mota (vinicius.c.mota@ufes.br)

Data/Hora: 15/06/2023 - 08:21:36, IP: 200.137.65.106, Geolocalização: [-20.272146, -40.298641]

[SHA256]: 2bbe4fd08b0838c852a0873c0562fc101c65731952b871eedf02a49537d71880



ASSINADO - Wendel Paz (wendel.paz@ufes.br)

Data/Hora: 14/06/2023 - 17:47:58, IP: 200.137.65.102, Geolocalização: [-20.287347, -40.298641]

[SHA256]: d64a75f094ea3bea140cb8a2461f4945d07cea00432fa6450e4f7d120cf2203c



ASSINADO - Wesley Spalenza (wspalenza@gmail.com)

Data/Hora: 15/06/2023 - 14:49:04, IP: 200.137.72.67

[SHA256]: d3bd367c7b18900471e7232e9d8dd4e7bf315e85027dca95e35ac2c6daa665a4

Histórico de eventos registrados neste envelope

- 15/06/2023 14:49:07 - Envelope finalizado por wspalenza@gmail.com, IP 200.137.72.67
- 15/06/2023 14:49:04 - Assinatura realizada por wspalenza@gmail.com, IP 200.137.72.67
- 15/06/2023 11:55:15 - Assinatura realizada por abessadas@gmail.com, IP 189.122.25.159
- 15/06/2023 08:21:36 - Assinatura realizada por vinicius.c.mota@ufes.br, IP 200.137.65.106
- 14/06/2023 19:05:24 - Envelope visualizado por abessadas@gmail.com, IP 177.26.91.214
- 14/06/2023 17:50:56 - Assinatura realizada por belichjr@gmail.com, IP 187.36.174.198
- 14/06/2023 17:48:51 - Envelope visualizado por belichjr@gmail.com, IP 187.36.174.198
- 14/06/2023 17:47:58 - Assinatura realizada por wendel.paz@ufes.br, IP 200.137.65.102
- 14/06/2023 17:46:35 - Envelope visualizado por wendel.paz@ufes.br, IP 200.137.65.102
- 14/06/2023 17:41:51 - Assinatura realizada por ramon.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102
- 14/06/2023 17:41:23 - Envelope registrado na Blockchain por ramon.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102
- 14/06/2023 17:41:22 - Envelope encaminhado para assinaturas por ramon.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102
- 14/06/2023 17:39:34 - Envelope criado por ramon.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102

Agradecimentos

Em minha trajetória acadêmica, tive a oportunidade de conhecer pessoas fascinantes e inspiradoras, que participaram diretamente da minha evolução intelectual. Sabedor que meus agradecimentos à essas pessoas são ínfimas comparadas a importância que cada uma delas teve/têm em minha formação.

Aos professores da Licenciatura e Bacharelado do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Cariacica, em especial ao professor Fernando Leal que me orientou e me acompanhou até o acesso ao mestrado.

Ao professor Humberto Belich, pela excelente orientação. Foi um privilégio receber sua confiança para a produção desta dissertação de mestrado, sou grato a você pela oportunidade que me foi dada.

Ao professor Wesley Spalenza que me fez enxergar a beleza do trabalho científico e pela formação inicial desde o início da minha caminhada acadêmica como licenciado em física, pela orientação durante o mestrado, como também, pelas aulas e discussões além da física.

Aos amigos que viram de perto minha evolução desde o estágio embrionário do conhecimento no Pré-Vest em Vila Velha, Alfredo, Gabriel, Geovani, Cleiton e Vinícius.

À minha esposa, Ariane Silva Carvalho que me deu forças nos momentos de maior fraqueza, você sempre acreditou no meu potencial.

Aos meus familiares, principalmente, minha mãe, Carla Mônica, professora e educadora da rede pública do Estado do Espírito Santo, que me inspira. Obrigado pela vida, pelo suporte e por toda a educação investida em mim, sem você jamais conseguiria alcançar meus sonhos até aqui.

A energia disponível é o principal objeto em jogo na luta pela existência e evolução
do mundo.

(L. BOLTZMANN,1886)

Resumo

Os estudos da dinâmica de plasma apresentam diversos desafios em Física teórica devido ao seu conjunto de equações não-lineares, tornando-os complexos para descrições analíticas dos seus comportamentos, sendo apenas possíveis para casos simplificados. Portanto, faz-se necessário o uso de métodos numéricos para maiores compreensões de seus comportamentos em situações próximas da realidade. Esta dissertação de Mestrado apresenta revisões da teoria da dinâmica de fluidos para se construir o modelo da magnetoidrodinâmica em *lattice* Boltzmann (LB) e suas aplicações sendo bidimensionais com nove velocidades discretas (D2Q9) através de códigos computacionais em linguagem Python, utilizando as bibliotecas NumPy e Matplotlib. Os modelos simulados foram os vórtices de von Kármán em um fluido newtoniano incompressível, os vórtices em fluido condutor de Orszang-Tang e o escoamento de Hartmann. O método de LB é uma abordagem numérica que atua na escala mesoscópica e com isso, utiliza-se como solução a estatística da função de distribuição de partículas em vez de resolver diretamente as equações de acoplamentos não lineares das equações de Navier-Stokes e das equações da magnetoidrodinâmica (MHD). O método aplicado para a MHD é altamente paralelizável, capaz de fazer a substituição da dificuldade de solução das derivadas convectivas não-lineares da MHD por uma simples advecção linear na malha (*lattice*). Novos métodos em LB, atualmente, vem sendo criados e aperfeiçoados, demonstrando cada vez mais estabilidades numéricas, significativas para aplicações computacionais, sendo assim um fortes candidatos para simulações próximas do real.

Palavras-chave: magnetoidrodinâmica, método *lattice* Boltzmann, dinâmica de fluidos computacionais, vórtices, escoamento de Hartmann.

Abstract

The studies of plasma dynamics present many challenges in theoretical physics due to their set of non-linear equations, making their behaviors complex for analytical descriptions, being barely possible for simplified cases. Therefore, it is necessary to use numerical methods for better understanding of their behaviors in situations close to reality. This dissertation presents revisions of the theory of fluid dynamics to build the model of magnetoidrodynamics in lattice Boltzmann (LB) and its applications being two-dimensional with nine discrete velocities (D2Q9) through computer codes in the Python language, using the libraries NumPy and Matplotlib. The simulated models form the vortices of an incompressible Newtonian fluid, the vortices in the conducting fluid through the Orszang-Tang model and the Hartmann flow. The LB method is a numerical approach that operates at the mesoscopic scale and is therefore used as a solution to the statistics of the particle distribution function instead of directly solving the non-linear coupling equations of the Navier-Stokes equations and the equations of the magnetohydrodynamics (MHD). The method applied to the MHD is highly parallel, capable of substituting the difficult solution of the non-linear convective derivatives of the MHD by a simple linear advective in the lattice. New methods in LB, currently, are being created and improved, demonstrating more and more numerical stabilities, significant for computational applications, being also strong candidates for simulations close to real.

Keywords: magnetohydrodynamics, lattice Boltzmann method, computational fluid dynamics, vortex, Hartmann's flow.

Lista de Figuras

2.1	Representação do referencial de uma Lagrangeana. O observador segue o elemento de fluido.	22
2.2	Representação do referencial de uma Euleriana. O observador vê o elemento de volume através do ponto fixo no espaço.	23
2.3	Momento de Cauchy em uma das faces do Tetraedro	28
2.4	Representações com sinal positivo dos tensores de tensão	29
3.1	Representação das 6-dimensão do espaço de fase.	37
3.2	diagrama simbólico da colisão direta e inversa. Colisão inversa (ganho - GA) coloca partículas no estado 1 enquanto as colisões diretas (perdas - PE) leva eles embora	39
3.3	Espalhamento Binário. Figura retirada do livro de Succi [9]	40
3.4	Representação de uma malha (<i>lattice</i>) de dimensão 8x8 células sendo as direções na malha em verde na vertical e horizontal e as velocidades nas diagonais de preto. δx é a dimensão da escala requerida.	49
3.5	Uma célula da malha mostrando as distribuições pré-colisão (vermelho) e pós-colisões (amarelo). A distribuição f_4 situasse no nó central da célula indicando que está parado. As espessuras das setas demonstram o peso w_i de cada distribuição	50
3.6	Fluxo em torno de um obstáculo cilíndrico via LBM D2Q9 com valor $Re = 27$. Fluido com característica laminar e sem formações de vórtices.	54

3.7	Escoamento do fluido em torno de um obstáculo cilíndrico via LBM D2Q9 com valor de $Re = 80$. Fluido com características turbulentas formando ilhas de vórtices.	54
3.8	Escoamento do fluido em torno de um obstáculo cilíndrico via LBM D2Q9 com valor de $Re = 300$. Fluido com características turbulentas formando ilhas de vórtices, velocidade do fluido alta demonstrando instabilidade.	55
5.1	Níveis de vorticidade nos vórtices de Orszang-Tang. Os contornos positivos são os níveis vermelhos e os negativos de níveis azuis.	71
5.2	Imagem retirada do livro [51]	72
5.3	velocidade no sentido da corrente e campo magnético no Fluxo de Hartmann. Os pontos representam a simulação numérica e a linha a solução analítica.	74
5.4	velocidade no sentido da corrente e campo magnético no Fluxo de Hartmann. Os pontos representam a simulação numérica e a linha a solução analítica.	74
A.1	Representação esquemática do método MRT LB. Populações são mapeadas para o espaço dos momentos onde são governadas pelas colisões(relaxação). Momentos que foram relaxados são transformados de volta para o espaço das populações antes dos escoamentos. Figura retirada do livro do Timm Krüger [39]	82

Lista de Tabelas

3.1	Tipos de malhas encontradas no método de <i>Lattice</i> Boltzmann. . . .	51
-----	--------------------------------------------------------------------------	----

Símbolos

T	Temperatura
U_i	Energia de ionização
n_i	Densidade de partículas ionizadas
n_n	Densidade de partículas neutras
K	Constante de Boltzmann
τ	Tempo de relaxação
\mathbf{B}	Vetor campo magnético
\mathbf{v}	Vetor velocidade do fluido
\mathbf{n}	Vetor normal à superfície
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor das tensões
\mathbf{g}	Magnitude da gravidade
\mathbf{a}	Vetor aceleração do fluido
ρ	Densidade de partículas
dV	Elemento infinitesimal de volume
dS	Elemento infinitesimal de superfície
\mathbf{F}	Vetor de força viscosa
A	Área
ν	Viscosidade
\mathbb{T}	Tensor das Tensões
\mathcal{F}	Força Externa

Lista de Abreviaturas

MHD	Magnetoidrodinâmica
LBM	Método de <i>Lattice</i> Boltzmann
NSE	Equação de Navier-Stokes
CFD	Dinâmica de Fluidos Computacional
LGA	<i>Lattice</i> Gas Automata
LDE	Lado Direito da Equação
LEE	Lado Esquerdo da Equação
SI	Sistema Internaciobnal
BBGKY	Bogoliubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon
BGK	Bhatnagar–Gross–Krook
HPCs	Modern High Performace Computers
MPI	<i>Message Passing Interface</i>
MRT	<i>Multiple-Relaxation-Time</i>
LB	<i>Lattice</i> Boltzmann
CPU	<i>Central Processing Unit</i>

Sumário

Agradecimentos	5
Resumo	7
Abstract	8
Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	11
Símbolos	12
Lista de Abreviaturas	13
1 Introdução	16
2 Uma revisão da Equação de Navier-Stokes	21
2.1 Equação de Continuidade	24
2.2 Equação dos Momentos de Newton	27
2.3 Equação de Navier-Stokes	32
2.4 Condições de Contorno	34
2.5 Vorticidade	34
3 O Método de Lattice Boltzmann	36
3.1 A Equação de Transporte de Boltzmann	37

3.2	Teorema H	40
3.3	Equilíbrio de Boltzmann	41
3.4	Forma Discreta de Boltzmann	42
3.5	O Método de Chapman-Enskog	45
3.6	Velocidades na Malha D2Q9	49
3.7	Vórtice de von Kármán	53
4	Uma Revisão da Magnetoidrodinâmica	56
4.1	Equação Magnética para o MHD	57
4.2	Equação do Fluido MHD com a Equação de Boltzmann	59
4.3	Equação dos momentos	61
4.4	MHD no Limite Incompressível	63
4.5	Plasma Cinético	65
5	Modelo de Lattice Boltzmann MHD	67
5.1	Velocidades na Malha	69
5.2	Vórtices de Orszang-Tang	70
5.3	Fluxo de Hartmann: Um exemplo	72
	Bibliografia	76
A	Algoritmo MRT	81

Capítulo 1

Introdução

Modelagem e Simulação computacional desempenham um papel fundamental muito importante para soluções de pesquisas científicas atualmente. Nesta dissertação estamos interessados em simulação de processos naturais em dinâmica dos fluidos, especialmente na dinâmica de fluidos condutores, chamados de magnetoidrodinâmica (MHD). Os estudos da MHD tiveram destaque com o cientista Hannes Alfvén ¹ em seu trabalho publicado em 1942 o qual resultou na equação de onda resultante do acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e do eletromagnetismo de Maxwell, chamada de onda de Alfvén [1]. Este trabalho o levou a ganhar o prêmio nobel de física no ano de 1970 [2].

As técnicas de modelagem computacional podem ser descritas em diversas escalas e métodos dependendo do problema em questão a ser resolvido, portanto, o nível de realidade do sistema pode ser descritos em diversas formas. O caminho para se chegar a resposta, basicamente inicia-se pelos fenômenos e em seguida pela descrição do modelo em que será utilizado o método computacional que, através dessa descrição, gerará uma solução numérica a ser interpretada. O resultado fará uma interpretação da realidade chamado de modelo virtual da realidade, utilizando

¹Hannes Alfvén(1908-1995), foi um cientista sueco, considerado o pai do campo da física de plasma espacial. Primeiramente, formado como um engenheiro elétricista depois migrou para a física de plasma.

um universo discreto como uma abstração do mundo real. Os métodos de modelagem mais utilizados na comunidade científica são os métodos de sistemas de muitos corpos, dinâmica molecular, equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais, método de monte-carlo (seja ele no equilíbrio, cinético ou dinâmico), método automata celular, método de *lattice* Boltzmann, simulações de eventos discretos e redes complexas. Neste trabalho, iremos utilizar o método de *lattice* Boltzmann como método numérico das soluções das equações diferenciais parciais que aparecem na descrição macroscópica da MHD.

Para uma breve introdução histórica do surgimento do método de *lattice* Boltzmann, não posso deixar de citar três cientistas que contribuíram para toda a base conceitual fundamental para a evolução dos variados métodos de simulação computacional de dinâmica de fluidos(CFD), sendo um deles o cientista Stanislaw Ulam ² e, o outro, John von Neumann³ e Stephen Wolfram ⁴. Ulam, enquanto trabalhava no laboratório nacional de Los Alamos nos anos de 1940, em seus estudos de crescimento de cristais utilizando o modelo matemático de *lattice network* (rede de malha), von Neumann que era seu colega de laboratório, trabalhava em soluções de sistemas com autorreplicação, um sistema robótico que se multiplicava [3]. Ulam então sugeriu a Neumann a utilização de um sistema discreto para criar um modelo reducionista de autorreplicação [4]. Ulam e von Neumann criaram um método para calcular movimento de líquido nos anos de 1950, o método consistia em considerar um líquido como um grupo de unidades discretas e para o cálculo do movimento de cada grupo dessas unidades a utilização da ferramenta baseado em comportamento das vizinhanças [5], assim nasceu o primeiro sistema de automata celular. Wolfram, em meados anos de 1980, num trabalho independente, começou a trabalhar com automata celular onde

²Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984), foi um matemático e físico nuclear polonês que, participou do projeto Manhattan no qual participou no desenvolvimento de armas termonucleares, descobriu os conceitos do automata celular e inventou o método de Monte Carlo.

³John von Neumann (1903 - 1957), foi um matemático, físico, cientista da computação e engenheiro húngaro, produziu diversos trabalhos para a área da computação

⁴Stephen Wolfram (1959 -), é um cientista da computação, físico e empresário. Em 2012 foi nomeado como membro da Sociedade Americana de Matemática.

os considerava como padrões complexos que pareciam formar na natureza devido à violação da segunda lei da termodinâmica (a reversibilidade). Sua investigação de interesse que teve inicialmente foi em modelagem de sistemas de rede neurais. Seu primeiro trabalho publicado na revista *Reviews of Modern Physics* investigava um celular automata elementar construído pelo código *Rule 30* [6].

Em 1986 mediante uma publicação produzida por Uriel Frisch, Brosl Hasslacher e Yves Pomeau, na qual um simples celular automata obedecia às leis de conservação ao nível microscópico reproduzindo a complexidade dos fluidos reais [7]⁵, esta descoberta trouxe grande excitação na comunidade de CFD. O método surgiu como uma alternativa para os estudos de CFD da época devida a sua capacidade inovadora em soluções de modelagem de fenômenos físicos e simulações de sistemas lineares e não-lineares de equações diferenciais. O grupo que criou o método LGA rapidamente percebeu algumas desvantagens computacionais e em paralelo começaram a construir o método da equação de *lattice* Boltzmann (LB), uma versão melhorada do método LGA. O método numérico de LB surgiu para corrigir a principal desvantagem que LGA, em que gerava um ruído estatístico. A primeira publicação do trabalho foi em 1988 [8]. A partir da publicação do livro de divulgação científica de Succi em 2001 [9], o método começa a ganhar mais espaço dentro da comunidade de CFD sendo constantemente aperfeiçoado, surgindo técnicas baseadas no método que conseguem alcançar pesquisadores em diversas áreas que envolvem o estudo de dinâmica de fluidos, como, por exemplo, a comunidade de astrofísica nos estudos da MHD. Atualmente, já existem estudos de simulação e modelagem baseadas no método de LB em física de altas energias, devido à versatilidade da equação de transporte de Boltzmann [10].

Acredita-se atualmente que o universo é feito por matéria e energia. Fritz Zwicky⁶, foi o primeiro a anunciar a quantidade de matéria visível que compõe o universo e o

⁵Criadores do Modelo FHP para *Lattice Gas Automata*

⁶Fritz Zwicky (1898-1974), foi um astrônomo Suíço. O primeiro cientista que aplicou o teorema do virial para inferir sobre a matéria não visível.

primeiro a sugerir que há matéria não visível, chamada de matéria escura. Cálculos modernos sugerem que o universo é composto por 68% de energia escura, 27% de matéria escura e apenas 5% de matéria visível. Tudo o que vemos no céu é parte da matéria visível no estado de plasma, emitindo radiação. Plasma é dito como o quarto estado físico da matéria.

Plasma é encontrado geralmente em meios a vácuo, pois se não o ar irá resfriá-lo de tal maneira que íons e elétrons sejam recombinados em átomos neutros. No universo observável encontramos na composição de estrelas, em seu interior e na superfície externa sob o núcleo, onde são compostas por zona de radiação e de convecção de plasmas. Não apenas as estrelas, outros objetos do universo observável também estão emitindo radiação, como as nebulosas e objetos compactos, portanto, faz com que os estudos de plasma sejam tão importante para a comunidade científica. No planeta terra, a atmosfera limita sua presença, porém, a natureza dribla o limitador atmosférico terrestre e permite a geração de plasma e faz com que seja possível observar certos fenômenos como, por exemplo, os clarões de relâmpagos, o brilho das auroras, o brilho dos tubos fluorescentes e nos reatores, *Tokamaks* e *Stellarators*, onde ocorrem os confinamentos de fusão magnética.

O livro de Francis [11] nos diz que o raro efeito plasmático que ocorre na atmosfera da terra é devido à equação de Saha, que descreve a quantidade de ionização esperada em um gás no equilíbrio térmico, é tal que,

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp\{-U_i/KT\}, \quad (1.1)$$

fazendo uma breve avaliação qualitativa do que diz a equação 1.1. A medida que a temperatura T aumenta e o grau de ionização permanece baixo limitado pela energia de ionização do gás U_i , unidades em elétron-volts, no qual seja de algumas vezes KT , onde K é a constante de Boltzmann, iremos observar o estado de plasma, pois a relação entre a densidade ionizada n_i e a densidade neutra n_n do átomo

será aumentada abruptamente. Caso a relação seja que o número da densidade neutra, seja menor que a ionizada, eventualmente teremos o estado de plasma, mas isso nos diz que é o caso de plasma ser encontrado em corpos astronômicos com temperaturas muito quentes, mas, na Terra não. Uma definição viável para plasma é: “Um plasma é um gás *quasineutro* de partículas carregadas e neutras no qual se percebem comportamentos coletivos”.

Conforme a comunidade científica, em suma, plasma contém densidade certa de 10^{18} pares de íon-elétron por m^3 . Se cada partícula descreve trajetórias complexas sua previsão torna-se uma tarefa árdua, portanto em laboratório cerca de 80% dos plasmas observados compõem características de um fluido. Portanto, iremos descrever um plasma baseado nas teorias cinéticas e, utilizando a teoria da magnetoidrodinâmica, para estudos que se aproximem do que é observado na natureza. Para as análises comportamentais e trajetórias de um amontoado de partículas, nada mais que eficiente a utilização de métodos numéricos.

O método de *lattice* Boltzmann surge como uma opção moderna para descrever fluidos, com uma linguagem moderna em dinâmica de fluidos computacional. Sua linguagem é altamente paralelizável com os processadores atuais, permitindo que os cálculos sejam feitos de forma rápida, economizando tempo e energia computacional.

No capítulo 2 do trabalho é feita a revisão de dinâmica de fluidos, descrevendo a teoria da equação macroscópica de Navier-Stokes. No capítulo 3, é realizada a construção da teoria de transporte de Boltzmann e seu método numérico LBM, sendo apresentado a simulação conhecida como esteira de vórtices de von Kármán. Já no capítulo 4, é feita a revisão da magnetoidrodinâmica ao nível macroscópico, e no capítulo 5 sua descrição pelo transporte de Boltzmann e o modelo para o LBM MHD bidimensional de Dellar, sendo também apresentadas duas simulações conhecidas, o escoamento de Hartmann (*Hartmann Flow*) e os vórtices de Orszang-Tang.

Capítulo 2

Uma revisão da Equação de Navier-Stokes

A mecânica dos fluidos no modo geral obedecem às leis da mecânica do contínuo, sendo assim, às leis da conservação da massa, energia e dos momentos. Elas podem ser escritas como equações matemáticas, uma vez que sua representação de estado do fluido é escolhida [12–14]. Existem duas representações no contexto de fluido, uma chamada de Lagrangeana, ou chamada de material, descrita por Joseph Louis Lagrange¹ em que representa um estado de apenas uma partícula de fluido, dado um instante, é descrito com o referencial da sua posição inicial. Em uma breve ilustração, considere $(X(X_0, Y_0, Z_0, t), Y(X_0, Y_0, Z_0, t), Z(X_0, Y_0, Z_0, t))$ como sendo a posição de uma partícula em um dado instante sendo o ponto desta partícula em (X_0, Y_0, Z_0) , seja sua velocidade descrita,

$$\begin{aligned}v_x(X_0, Y_0, Z_0, t) &= \frac{\partial X(X_0, Y_0, Z_0, t)}{\partial t}, \\v_y(X_0, Y_0, Z_0, t) &= \frac{\partial Y(X_0, Y_0, Z_0, t)}{\partial t}, \\v_z(X_0, Y_0, Z_0, t) &= \frac{\partial Z(X_0, Y_0, Z_0, t)}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

¹Joseph-Louis Lagrange(1736 - 1813) foi um físico, matemático e astrônomo italiano. Fez diversas contribuições científicas importantes nas áreas de análises, teoria dos números, mecânica clássica e celeste.

e a sua aceleração descrita como,

$$\begin{aligned} a_x(X_0, Y_0, Z_0, t) &= \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ a_y(X_0, Y_0, Z_0, t) &= \frac{\partial v_y}{\partial t}, \\ a_z(X_0, Y_0, Z_0, t) &= \frac{\partial v_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Portanto, as derivadas parciais indicam que a partícula irá descrever uma trajetória através do ponto fixo em (X_0) , (Y_0) e (Z_0) , e que o observador irá deslocar simultaneamente com a partícula, mostrado na Figura 2.1. Apenas usando esta descrição da dinâmica de partículas no meio contínuo não é apropriadamente relevante em estudos de fluidos devido ao enorme número de partículas contido no sistema, diferentemente quando aplicamos uma Lagrangeana na mecânica de corpos rígidos. Então, podemos partir de outra descrição de um referencial que possa descrever melhor o transporte das partículas de um fluido, a Euleriana.

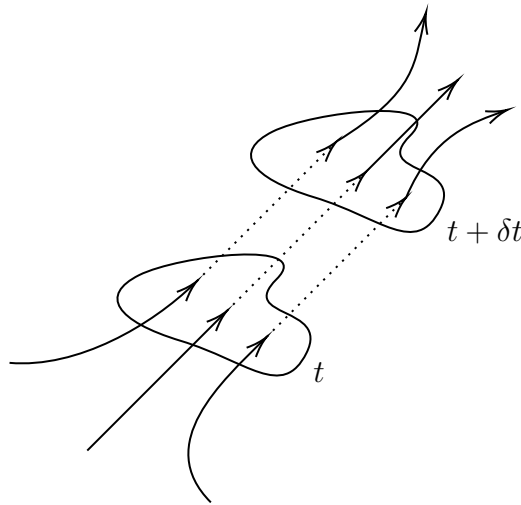


Figura 2.1 – Representação do referencial de uma Lagrangeana. O observador segue o elemento de fluido.

A representação Euleriana ou espacial, descrito por Leonard Euler² descreve a velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ em que a posição \mathbf{x} refere-se a um ponto fixo do espaço,

²Leonard Euler(1707-1783) foi um matemático, físico, geógrafo, astrônomo e engenheiro sueco. Fundou os estudos de teoria de grafos e topologias. Foi o pioneiro na descoberta dos estudos da teoria analítica dos números, análises complexas e cálculos infinitesimais. É também conhecido pelo seu trabalho nas áreas de mecânica, dinâmica dos fluidos, óptica, astronomia e música teórica.

portanto uma função do espaço e do tempo. A aceleração resultante através da taxa média da variação da velocidade de um elemento de fluido é obtido na direção de x , de y e de z

$$\begin{aligned}
 a_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t) - v_x(x, y, z, t)}{\Delta t} \\
 &\quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\
 a_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_y(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t) - v_y(x, y, z, t)}{\Delta t} \\
 &\quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\
 a_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_z(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t) - v_z(x, y, z, t)}{\Delta t} \\
 &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

conforme a (2.3) obtemos um vetor geral da aceleração,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \tag{2.4}$$

o primeiro termo do LDE (2.3) se refere a aceleração temporal e o segundo termo se refere a aceleração advectiva, também, dito como convectivo apenas.

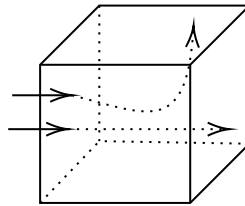


Figura 2.2 – Representação do referencial de uma Euleriana. O observador vê o elemento de volume através do ponto fixo no espaço.

Note que os termos da aceleração convectiva são quadráticos pelos componentes das velocidades e que leva a não linearidade do sistema. Com isso, é introduzido a principal dificuldade de solução nas equações de escoamento de fluidos. A esse ponto podemos pensar que seria mais conveniente o uso do formalismo Lagrangeano por não conter termos não-lineares, porém, este não seria o caso, pois as leis de Newton

ao serem introduzidos nas partículas, os termos se tornariam não-lineares e mais complexos comparados com a aceleração construída pela abordagem da Euleriana [15]. O termo de aceleração convectiva $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ pode ser reescrito como,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (2.5)$$

na dinâmica de fluidos, a equação 2.4 carrega em sua expressão termos do operador diferencial $\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ chamada em mecânica dos fluidos de derivada material ou derivada substancial, também conhecida por fazer a conexão do referencial da Lagrangeana com a Euleriana, portanto, sendo sua representação diferencial como um fluido de partícula,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla), \quad (2.6)$$

a equação (2.6) é conhecida também como derivada temporal euleriano para o elemento de fluido que passa em um volume fixo de um referencial.

2.1 Equação de Continuidade

Em dinâmica dos fluidos se constrói uma ferramenta chamada de volume de controle para analisar fluxo de fluido, por conseguinte, a massa, o momento e o balanço de energia. O volume de controle, geralmente é um elemento de volume de tamanho fixo, anexado a um sistema de coordenada específico. O fluido irá entrar e sair através das superfícies deste dispositivo. A massa de dentro do controle de volume é $\iiint_V \rho dV$. Para um controle de volume fixo no espaço, a variação da taxa da massa de dentro dele é

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (2.7)$$

e a taxa que entra no controle de volume através da superfície é

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.8)$$

onde $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ é a taxa de fluxo da massa de uma área pequena dS . A quantidade $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, é a componente normal da velocidade na superfície. Portanto, o valor positivo desta componente indica que o fluxo do fluido está saindo do volume de controle. A variação líquida da taxa da massa de dentro do volume de controle é encontrado somando os termos da (2.7) e (2.8) sendo zero para haver a conservação da massa, obtemos,

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2.9)$$

Para obter a equação local da continuidade na forma de equação diferencial, utiliza-se o teorema do divergente,

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV, \quad (2.10)$$

substituindo a equação (2.10) em (2.9), obtemos,

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] dV. \quad (2.11)$$

A escolha de um volume de controle é arbitrário, e devido à integral ser zero, não importa de que o controle é feito, pois a única forma da integral ser zero é o integrando ser zero, portanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (2.12)$$

a equação (2.12) representa a forma local da equação da continuidade. Uma expressão alternativa pode ser obtida expandindo o termo do divergente e, portanto, obtemos,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.13)$$

os dois primeiros termos do LEE da equação (2.13) representa a derivada material de ρ que implica na mudança da densidade de massa em uma partícula de fluido para um tempo infinitesimal. Escrevendo (2.6) na equação acima, temos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.14)$$

o primeiro termo do LEE equação (2.14) nos diz que sobre mudança da densidade partícula, já o segundo termo representa a densidade de massa, vezes a mudança do volume por unidade de volume como uma partícula de massa da mesma. Um fluxo incompressível é definido como sendo a densidade de massa da partícula do fluido sendo constante, o que implica que sua derivada seja zero. Pode ser expressa pelo operador da derivada material no qual resulta,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (2.15)$$

Então, a equação da continuidade para o fluido incompressível é

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.16)$$

em diversas situações práticas para a descrição de um fluido, escrevê-los como um fluido incompressível e não viscoso, modelados pela equação de Euler, pode ser considerado muito eficiente, mas, não traz informações sobre o comportamento de um fluido real.

2.2 Equação dos Momentos de Newton

O próximo passo é aplicar a equação de momento para o volume de controle. O momento no interior ao volume de controle é encontrado na equação é $\iiint_V \rho \mathbf{v} dV$. A taxa em que o momento entra no volume de controle através da superfície é $\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot dS$ portanto a taxa de mudança líquida do momento será

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot dS &= \\
 &= \iiint_V \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV \\
 &= \iiint_V \left[\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] dV \\
 &= \iiint_V \left\{ \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] + \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] \right\} dV \\
 &= \iiint_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Abrindo a expressão do tensor das tensões em termo dos tensores normais e de cisalhamento, obtemos, devido à localidade da equação de continuidade, como descrito anteriormente na equação (2.12) no primeiro termo da quarta linha da equação (2.17) irá a zero. Na mesma quarta linha, o segundo termo representa a derivada material da velocidade, o qual é acelerado. Note que na conversão da integral de superfície para o de volume usando o teorema do divergente o vetor $\mathbf{v}\mathbf{v}$, no qual é um produto de dois vetores, porém não representa o produto escalar e nem o vetorial como conhecido em análise vetorial, referimos a ele como um produto indefinido, usado geralmente no teorema do divergente como escrito em forma de componente. Para isso usaremos o teorema do tensor das tensões de Cauchy. Considerando um elemento de volume no formato de um tetraedro conforme a Figura 2.3. As forças aplicadas no controle de volume surgem devido à pressão e das forças viscosas sob a superfície e a força gravitacional distribuídas em volta do controle de volume, sendo a pressão, normal a superfície e aos pontos envolta do volume. Num elemento infinitesimal o valor $-p\mathbf{n}dS$ indica que a força da pressão atua oposto a normal do elemento de

área dS . As forças viscosas no geral tem duas componentes, normal e tangencial sob a superfície, portanto, para a sua representação é simplificado, sendo escrito como $\boldsymbol{\tau}^{(n)}dS$. A força resultante fica,

$$\iint_S (-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}^{(n)}) dS + \iiint_V \rho\mathbf{g}dV, \quad (2.18)$$

equacionando os termos acima (2.18) para a resulta na mudança de momento, portanto, nos da,

$$\iiint_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \iint_S (-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}^{(n)}) dS + \iiint_V \rho\mathbf{g}dV, \quad (2.19)$$

onde $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$ é chamado de vetor de stress aplicada a normal do ponto na direção n e \mathbf{g} a gravidade, sendo 9,80 no sistema internacional SI. A equação (2.19), aplicando o teorema do divergente no termo da pressão, fica,

$$\iiint_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \iiint_V (-\nabla p + \rho\mathbf{g}) dV + \iint_S \boldsymbol{\tau}^{(n)} dS, \quad (2.20)$$

agora, temos uma expressão em termos do vetor de stress e, com isso, podemos fazer simplificações para o termo de viscosidade, necessárias para a construção de um fluido newtoniano.

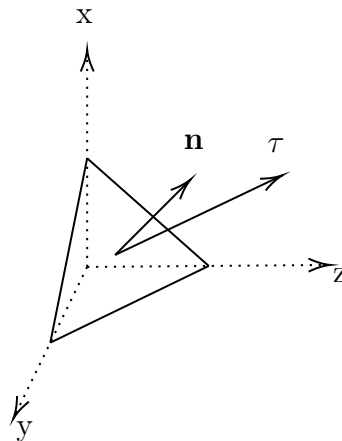


Figura 2.3 – Momento de Cauchy em uma das faces do Tetraedro

considerando as componentes do vetor de stress $\tau^{(x)}, \tau^{(y)}, \tau^{(z)}$, correspondendo as

ações das forças nas superfícies com normais direcionadas nas direções x , y e z , respectivamente, a ação do vetor de stress num pequeno tetraedro Figura para uma força $\Delta \mathbf{F}$ agindo na superfície ΔS_x com normais unitárias apontando na direção x , portanto, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, escrevendo o tensor de stress na face deste tetraedro. As forças aplicadas na superfície do controle de volume são devidos a pressão, a forças viscosas e a força gravitacional distribuídas através do volume. A força de pressão é normal a superfície e pontos na direção ao volume. A força viscosa existe dois componentes, uma normal e outra tangencial que atua numa pequena porção da superfície, portanto, a força resultante líquida é tal que,

$$\boldsymbol{\tau}^{(x)} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A_x} = \tau_{xx} \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} \quad (2.21)$$

analogamente, fazendo os vetores nas direções y e z , podemos construir o tensor em formato de matriz,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}^{(x)} \\ \boldsymbol{\tau}^{(y)} \\ \boldsymbol{\tau}^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

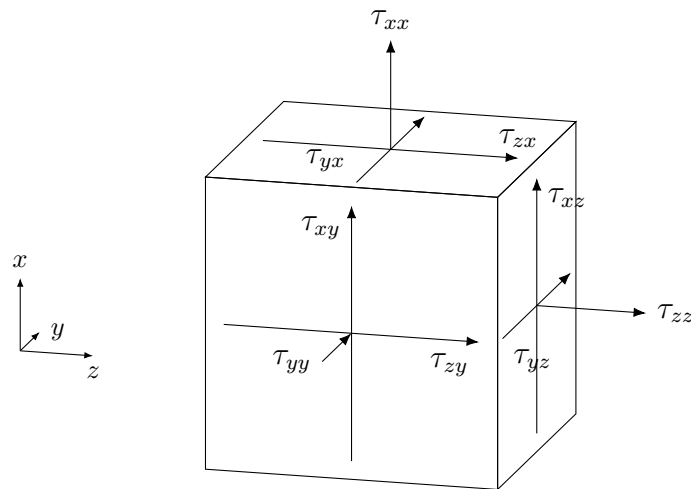


Figura 2.4 – Representações com sinal positivo dos tensores de tensão

as componentes da diagonal da matriz, são ditas como tensão normal e as componentes superior e inferior são as tensões de cisalhamento, fazendo a expansão do tensor das tensões dentro da integral de área

$$\iint_S \boldsymbol{\tau}^{(n)} dS = \iiint_V \left[\mathbf{i} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \right], \quad (2.23)$$

portanto, podemos reescrever a equação (2.20) substituindo o termo do tensor de cisalhamento reescrito na equação (2.23) e omitindo a integral igualando apenas os termos, fica assim

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{i} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \quad (2.24)$$

essa é a equação de momentos de Newton. Até este ponto, através das leis físicas descritas, pouco foi dito sobre o que compete ao comportamento de alguma substância, pois podemos notar que existem mais quantidades desconhecidas do que equações. As relações, não ditas, são aquelas que descrevem a conexão entre como um material é feito, ou constituído e, a relação entre a tensão, a estrutura geométrica e as variáveis termodinâmicas. A lei de Hook e a equação de estado de um gás ideal são exemplos claros de equações constitutivas, enquanto algumas equações constitutivas são obtidas através da mecânica estatística considerando o modelo matemático especial para estrutura molecular, o procedimento usual é decidido, com base em experimentos, no qual quantidades devem entrar na equação constitutiva e então formular a partir delas um conjunto de equações que concordam com ideias fundamentais, como a invariância em relação ao observador e afins. O modelo apresentado por Newton e elaborado por Navier e Stokes resistiu aos diversos testes para fluidos de estrutura

molecular relativamente simples e vale para muitos dos fluidos que normalmente encontramos. Considerando um fluido de estrutura molecular simples, como a água ou ar, o tensor de stress irá depender apenas da pressão e da taxa de deformação e, a temperatura pode entrar apenas através dos coeficientes implícitos, por exemplo, a viscosidade. A taxa de deformação quando for zero, todas as forças de cisalhamento desaparecem e, a tensão de stress normal será igual ao negativo da pressão para cada uma das tensões. Devido às propriedades materiais do fluido ele é isotrópico, pois, dada algum ponto, ele será o mesmo em todas as direções. O tensor de stress tem que depender da taxa de deformação de forma linear, conforme os conceitos das leis de Newton. A forma mais geral das relações constitutivas que satisfazem todos os requisitos a cima, são tais que,

$$\tau_{xx} = -p + \mu' \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu d_{xx}, \quad (2.25)$$

$$\tau_{yy} = -p + \mu' \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu d_{yy}, \quad (2.26)$$

$$\tau_{zz} = -p + \mu' \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu d_{zz}, \quad (2.27)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu d_{xy}, \quad (2.28)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu d_{xy}, \quad (2.29)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = 2\mu d_{yz}, \quad (2.30)$$

para uma forma reduzida, abrevia-se,

$$d_{xx} + d_{yy} + d_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.31)$$

Aqui, μ é a viscosidade e μ' o coeficiente segundo da viscosidade. As duas viscosidades pode depender da temperatura e até mesmo da pressão. O fluido descrito em (2.25) é chamado de fluido newtoniano, como também pode ser chamado de fluido de Navier-Stokes.

2.3 Equação de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes (NS) são umas das equações mais importantes das aplicações em engenharia na atualidade. Diversos métodos computacionais, vem sendo desenvolvidos através dos anos com diferentes tipos de aplicações, algumas mais vantajosas do que outras. Este projeto usa a aproximação da discretização através da diferença finitas temporal e espacial e um método de projeção para a pressão de modo a obter a dinâmica entre as partículas na malha para o método de *lattice* Boltzmann, com isso, conseguimos resolver as equações de Navier-Stokes, veremos como é obtido esta discretização no próximo capítulo. A viscosidade é manipulada implicitamente a fim de remover a restrição sob a iteração temporal.

Para obter as equações de um fluido newtoniano, substituiremos o conjunto de equações das relações constitutivas descritas na seção anterior em \mathbf{F} da equação 2.21, resulta em,

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{\partial(p - \mu' \nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right], \\
 \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\partial(p - \mu' \nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \left(\frac{v_y}{\partial y} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right], \\
 \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{\partial(p - \mu' \nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Quando ρ e μ são constantes, e para fluidos incompressíveis, o sistema de equações acima é simplificada de tal forma que a condição de continuidade $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ajuda a

descrever em forma de vetores.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.33)$$

onde,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.34)$$

que é o operador de laplaciano. A equação (2.33) pode ser escrito em notação de componentes

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 v_x, \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v_y, \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 v_z. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tanto as representações da equação (2.32) e (2.35) são referidos também como equação de Navier-Stokes, note que nas equações a condição $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e a equação (2.33) consistem de quatro equações escalar, sendo que o conjunto de equações consistem de mesmo número de variáveis desconhecidas (v_x, v_y, v_z, p). Assim, podemos escrever a equação de NS, sem explicitar as tensões, em termos do tensor \mathbb{T} ,

$$\mathbb{T}_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu (\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \frac{2}{3}\mu \delta_{ij} \partial_k v_k, \quad (2.36)$$

sendo δ_{ij} a delta de Kronecker para os índices i e j logo, reescrevendo NS (2.35), a equação fica

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \mathbf{f}) + \mathcal{F}, \quad (2.37)$$

\mathbf{f} representa campos em geral e \mathcal{F} representa forças (por unidade de massa) externas quaisquer, aplicadas à partícula de fluido.

2.4 Condições de Contorno

Para obter uma solução das equações de NS que cabem em um problema particular, é necessário adicionar condições que satisfazem o contorno de uma dada região de interesse. As condições mais usuais encontradas em dinâmica de fluido são:

1. As componentes normais da velocidade do fluido em direção a uma borda impenetrável é sempre igual à velocidade normal na borda. Se essa condição não for verdadeira, o fluido deverá atravessar a borda.
2. O tensor das tensões deve ser contínuo em todo o sistema. Se essa condição não for verdadeira, uma camada infinitesimal com uma massa infinitesimal atuará exercendo uma força de aceleração infinita.
3. Velocidade deve ser contínua em todo o sistema.

2.5 Vorticidade

Uma das grandezas geométricas mais importantes que descrevem fluidos são as taxas de deformações [15]. Para definição da taxa de deformação será considerada em um plano xy , bidimensional, no qual, ocorrerá rotações com velocidades angulares $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ tal que,

$$\dot{\theta}_1 \approx \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (2.38a)$$

$$\dot{\theta}_2 \approx \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (2.38b)$$

a soma das duas taxas angulares, $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$ mostra que a taxa angular sofrida pela partícula, tal que,

$$d_{xy} = d_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (2.39)$$

definido como taxa de deformação de cisalhamento no plano xy , analogamente é construindo as outras taxas para os planos yz e xz . O angulo mudado é construído, ou deformado, em uma quantidade de $(d\theta_1 + d\theta_2)$ e um ângulo rotacionado é tal que sua bissetriz, equivale a $1/2(d\theta_1 - d\theta_2)$. Para o angulo rotacionado, temos,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (2.40)$$

escrevendo então, o rotacional de \mathbf{v} em coordenadas cartesianas encontramos,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (2.41)$$

se considerarmos pontos vizinhos similares no plano yz e xz , devemos encontrar argumentos análogos que resultam na metade nos componentes x e y . Portanto, definimos vetor de vorticidade o rotacional

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (2.42)$$

Note que a vorticidade é duas vezes a rotação angular do fluido e que, considerando a vorticidade como um vetor ele será invariante a um referencial inercial de uma coordenada que for escolhida.

Capítulo 3

O Método de Lattice Boltzmann

Nos estudos de teoria cinética, trabalhamos com a distribuição estatística que representa um gás formado por muitas partículas pequenas $N \gg 1$, que deverá ser tomado por uma probabilidade dada por uma função de distribuição de muitos corpos. Este caminho nos levará a hierarquia BBGKY¹ e em certa condição apropriada podemos nos aproximar da equação cinética. Uma função de distribuição estatística pode ser construída pela descrição de probabilidade em que exista uma partícula no espaço de fase localizada num tempo específico $f_N(1, 2, \dots, N, t)$ representados pelas coordenadas $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N$. Esta função permite fazer o rastreo de cada partícula no sistema [16]. Integrando a função de distribuição sobre o espaço de fase figura 3.1 resulta na probabilidade normalizada de todas as partículas no espaço tal que,

$$1 = \iint f_N(1, 2, \dots, N, t) dx^{3N} dp^{3N}. \quad (3.1)$$

A função de distribuição $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, é o número de moléculas em que, num instante t , tem as posições sob um elemento de volume d^3 sobre x e o momento sob um elemento de volume no espaço dos momentos d^3p sobre p .

¹Físicos teóricos que contribuíram para a física estatística descrevendo a dinâmica de um sistema de muitas partículas: Nikolay Bogolyubov, Max Born, Herbert S. Green, John Gamble Kirkwood e Jacques Yvon.

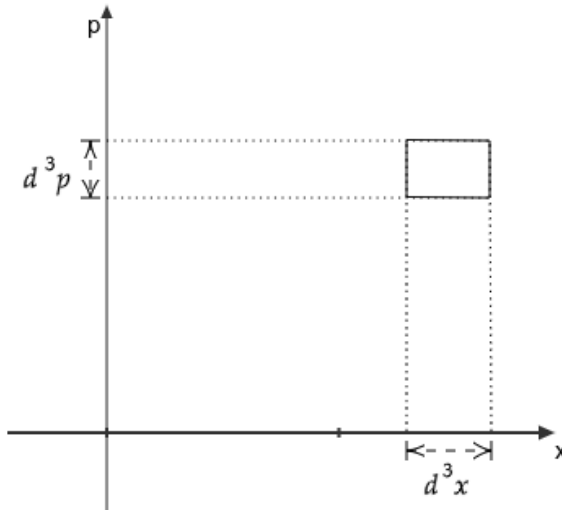


Figura 3.1 – Representação das 6-dimensão do espaço de fase.

3.1 A Equação de Transporte de Boltzmann

Uma mudança na função de distribuição pode ocorrer devido a forças externas e colisões entre as partículas. A mudança total de uma distribuição, $D_t f = \frac{df}{dt}$, é dividido em um conjunto de derivadas parciais usando a regra da cadeia em cada componente da função de distribuição. A equação de Liouville define a evolução precisa da função de distribuição definida como sendo s um subconjunto de N partículas

$$\begin{aligned}
 D_t f_N &= \left[\partial_t + \sum_i^N \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} + \sum_i^N \frac{\mathbf{F}_i}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_i} \right] f_N(1, 2, \dots, s, t) \\
 &= \left[\partial_t + \sum_i^N \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} + \sum_i^N \left(\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial \vec{x}_i} + \sum_N^j \frac{\partial \Phi_{ij}^{col}}{\partial \vec{x}_i} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}_i} \right] f_N = 0,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde f_N é a distribuição de N partículas em um sistema completo, \mathbf{x}_i e \mathbf{p}_i são respectivamente a posição e o momento da i -ésima partícula, Φ_i^{ext} é o potencial da i -ésima partícula devido a uma força externa e Φ_{ij}^{col} é o potencial das interações das partículas i e j . A equação de Liouville² rastreia a posição e o momento de todas as partículas

²Joseph Liouville, foi um matemático e engenheiro Francês que viveu no século XIX. Produziu trabalhos importantes em diversas áreas como a astronomia, física matemática, topologia, geometria diferencial e análise complexas.

envolvidas na distribuição do sistema [17–19]. O número de partículas de um ambiente chega a uma ordem de 10^{23} . Com um número enorme de partículas é impossível rastrear suas trajetórias. A abordagem criada para rastrear algumas poucas partículas em cada distribuição vem da hierarquia BBGKY, pois, consegue descrever a evolução de um sistema usando uma distribuição de N partículas, a hierarquia é uma equação precisa equivalente à equação de Liouville. Para um subconjunto s de um total de N partículas de uma distribuição, a equação BBGKY torna-se

$$\begin{aligned} \left[\partial_t + \sum_i^s \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} + \sum_i^s \left(\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial \mathbf{x}_i} + \sum_j^s \frac{\partial \Phi_{ij}^{col}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}_i} \right] f_s(1, 2, \dots, s, t) \\ = (N - s) \sum_i^s \nabla_{\mathbf{p}_i} \int \frac{\partial \Phi_{is+1}^{col}}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot f_{s+1} d\mathbf{x}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde f_s é a função de distribuição para um subconjunto s de partículas tal que $f_s(1, 2, \dots, s, t) = \iint f_N dx_{s+1}^3 dx_{s+2}^3 \dots dx_N^3 dp_{s+1}^3$. A hierarquia BBGKY nos diz que a evolução de apenas uma partícula requer o conhecimento de uma segunda partícula e a evolução desta segunda partícula requer o conhecimento de uma terceira, assim por diante até que o sistema inteiro seja rastreado.

Boltzmann assumiu a condição de fechamento da hierarquia BBGKY assumindo partículas não correlacionadas, exceto em uma colisão binária. Essa condição é apropriada por um gás rarefeito com curto alcance e uma interação potencial muito forte. Assim, nesta condição, um sistema com mais que duas partículas é um sistema raro para que seu estado macroscópico seja afetado significativamente. Para a função de distribuição 2-partículas Figura 3.2, uma das partículas pode ser reduzida em um produto da função de distribuição de 1-partícula com o termo de correlação do par P ,

$$f_2(1, 2, t) = f_1(1, t)f_1(2, t) + P(1, 2, t). \quad (3.4)$$

Assumindo que o gás está sob condição de caos molecular (*Stosszahlansatz*), Boltz-

mann deduziu a evolução da função de distribuição de 1-partícula, a partir da equação,

$$\left[\partial_t + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} + \frac{\partial \Phi_1^{ext}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} \right] f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, t) = (\partial_t f_1)_{col}, \quad (3.5)$$

onde $(\partial_t f_1)_{col}$ é a taxa de mudança da função de distribuição da 1-partícula devido a uma colisão com outra em um gás, na posição x_1 . Uma descrição precisa do termo de colisão é,

$$(\partial_t f_1)_{col} = \sum_j^N \int g_{1j} \sigma_{1j} (f'_1(\mathbf{p}_1) f'_1(\mathbf{p}_j) - f_1(\mathbf{p}_1) f_1(\mathbf{p}_j)) d\Omega d^3 \mathbf{p}'_1 d^3 \mathbf{p}'_j \quad (3.6)$$

onde os valores inicializados representam os estados de pós-colisão, $g_1 = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_j| = |\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_j|$, σ é a diferença de espalhamento da secção transversal e $d\Omega$ o ângulo sólido da colisão, figura 3.3. A colisão está contido num plano bem definido por uma separação entre as partículas $\mathbf{v}_1 - \mathbf{x}_2$ e a velocidade relativa $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. O ângulo Ω é definido por um ângulo de espalhamento χ no plano de colisão e por um ângulo azimutal ϕ envolto do plano de colisão.

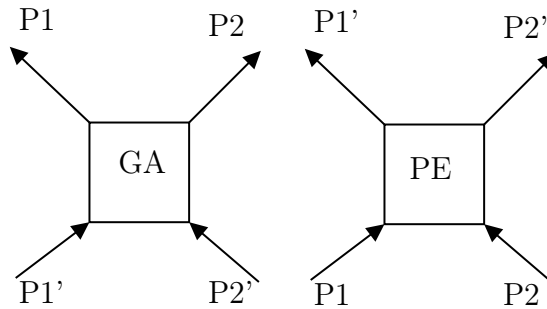


Figura 3.2 – diagrama simbólico da colisão direta e inversa. Colisão inversa (ganho - GA) coloca partículas no estado 1 enquanto as colisões diretas (perdas - PE) leva eles embora

Através da evolução da distribuição, agora, é possível obter simplificações para o termo de pares binários da colisão para comparações entre partículas no sistema de modo a determinar quaisquer colisões que ocorra no sistema, mas, mesmo assim, a colisão pertencente a integral não-linear é difícil aplicação.

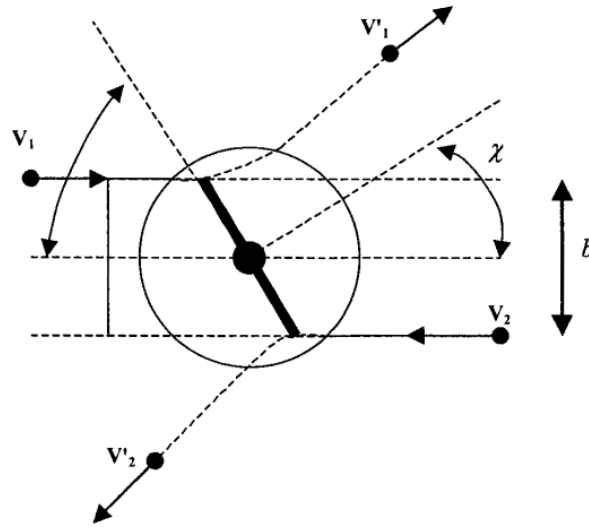


Figura 3.3 – Espalhamento Binário. Figura retirada do livro de Succi [9]

3.2 Teorema H

O teorema \mathcal{H} é obtido como consequência da equação de Boltzmann, no qual irá fornecer uma descrição da rota para o equilíbrio. Uma abordagem simplificada para o termo de colisão vai permitir que o sistema tenha a entropia negativa. Da equação de Boltzmann 3.5, onde $f_1 \rightarrow f_1 \ln f_1$, ao ser integrado no espaço de fase, o termo do LEE fica

$$\iint d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{p}_1 \left[\partial_t + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} + \frac{\partial \Phi_1^{ext}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} \right] f_1 \ln f_1, \quad (3.7)$$

o segundo e o terceiro termo pode ser transformado da integral de volume para um integral de superfície

$$\partial_t \mathcal{H} + \iint d^3\mathbf{p}_1 d\Sigma_x \cdot \frac{\vec{p}_1}{m} f_1 \ln f_1 + \iint d^3\mathbf{x}_1 d\Sigma_p \cdot \frac{\partial \Phi_1^{ext}}{\partial \vec{x}_1} f_1 \ln f_1, \quad (3.8)$$

como $f_1 \rightarrow 0$ e $(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) \rightarrow \infty$ a integral de superfície do segundo e do terceiro termo será 0, nessas condições \mathcal{H} , será tal que

$$\mathcal{H} \equiv \iint f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, t) \ln f_1 f_1(\mathbf{x}_1, \vec{p}_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{p}, \quad (3.9)$$

\mathcal{H} mudará através do tempo de tal forma que,

$$d_t \mathcal{H} = \iint (1 + \ln f_1) \frac{\partial f_1}{\partial t} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{p}_1, \quad (3.10)$$

deste modo o teorema \mathcal{H} contempla como uma solução da equação de Boltzmann que obedece uma desigualdade tal que $\mathcal{H} \leq 0$, ao contrário das grandezas mecânicas que não são capazes da distinção entre passado e o futuro, a função $\mathcal{H}(t)$ tem direção é definida no tempo, abrindo possibilidade da aplicação da segunda lei da termodinâmica onde $-\mathcal{H}$ é proporcional a entropia.

3.3 Equilíbrio de Boltzmann

O conceito de equilíbrio é determinado advindo do termo de colisão da eq. (3.5) quando $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$, isso implica que a função de distribuição $f_1(i)$ para o sistema de partícula binária é igual à derivada das mesmas, $f_1(1)f_1(2) = f_1'(1)f_1'(2)$. Tomando o log encontramos uma expressão que pode ser substituída na função de distribuição de Maxwell-Boltzmann

$$f = f^{eq} = \left(\frac{n}{2\pi RT} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \left(\frac{(\vec{v} - \vec{u})^2}{2RT} \right) \right\}, \quad (3.11)$$

sendo n o número de densidade, \vec{u} a velocidade macroscópica, $R = K/m$ sendo a relação da constante de Boltzmann e a massa, e a temperatura T . A escolha dessas variáveis é tal que seja um número da ordem dos momentos da distribuição, seja pequeno para ser uma aproximação da conservação das quantidades hidrodinâmicas. Isso corresponde dizer que

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v = \rho, \quad (3.12a)$$

$$\int \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v = \rho \mathbf{u}, \quad (3.12b)$$

$$\int \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v = \frac{\rho RT}{2}. \quad (3.12c)$$

para um modelo isotérmico não há influência da T . O termo de colisão pode agora aproximar-se da equação de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann.

Bhatnagar, Gross e Krook (BGK) descobriram um método rápido, simples e linear de solução do termo de colisão para o estado de equilíbrio publicado em [20]. O operador BGK é tal que

$$(\partial_1 f_1)_{col} = -\tau^{-1}(f_1 - f_1^{eq}), \quad (3.13)$$

τ é o tempo de relaxação para fluidos viscosos. Em vez de fazer comparações com cada distribuição para determinar o estado colisional, basta comparar a distribuição de corrente contra seu equilíbrio. O operador de colisão BGK simplifica muito a cinética e mostra-se ao nível do fluido efeito sobre a viscosidade através de τ . Se um está interessado nas propriedades cinéticas do gás, então estas são massacradas pela colisão BGK operador. A equação de Boltzmann torna-se,

$$\left[\partial_t + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \nabla_{\vec{x}_1} + \frac{\partial \Phi_1^{ext}}{\partial \vec{x}_1} \cdot \nabla_{\vec{p}_1} \right] f_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) = -\tau^{-1}(f_1 - f_1^{eq}), \quad (3.14)$$

e na próxima seção veremos sua forma discreta para aplicarmos ao modelo de redes.

3.4 Forma Discreta de Boltzmann

Em muitas aplicações, incluindo esta, não há necessidade de introdução de uma força externa, portanto, $\Phi^{ext} = 0$ em 3.14. Sendo assim, uma integral instrutiva ao longo da trajetória da partícula. Nesta abordagem, o lagrangeano resulta em,

$$D_t f(\vec{x}(t), \vec{p}(t), t) = [\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}] f(\vec{x}, \vec{p}, t) = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}). \quad (3.15)$$

A derivada do lagrangeano, seguindo a trajetória da partícula, simplifica o escoamento livre da trajetória,

$$\frac{d\mathbf{x}(t')}{dt'} = \mathbf{v}(t'), \quad \frac{d\mathbf{v}(t')}{dt'} = 0. \quad (3.16)$$

Com uma descrição Euleriana da trajetória parametrizada em $t = t'$, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{v}(v) = \mathbf{v}$, integra-se a (3.15) ao longo da trajetória lagrangeana então, obtemos,

$$\int_t^{t+\Delta t} ds D_t f[\mathbf{v}(s), \mathbf{p}(s), s] = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\Delta t} dt (f - f^{eq}), \quad (3.17)$$

resultando na função de distribuição discreta na malha (*lattice*) f_i , tal que

$$f_i(\mathbf{v} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\Delta t} ds [f(\mathbf{x}(s), s) - f^{eq}(\mathbf{x}(s), s)] \quad (3.18)$$

a notação simplifica fazendo a velocidade cinética sendo constante ao longo da trajetória pelos parâmetros apresentados em (3.15). Os termos de posição serão acrescidas de um incremento tal que $\mathbf{c}_i \Delta t$, onde c_i representa a velocidade na rede (*lattice*) da função de distribuição representada. Assim como o tempo acrescido de um incremento temporal Δt as mesmas populações. Assumindo que $\Delta t \ll t$ irá fazer com que o integrando varre os intervalos a passos lento outras características obtemos aproximações através do termo de colisão em (3.17),

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f(\mathbf{x}, t) - f^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (3.19)$$

uma simples esquematização de diferenças finita será possível encontrar uma solução. A equação final da malha (*lattice*) pela equação de Boltzmann é adquirida através do termo do tempo de relaxação τ em unidade adimensionais,

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau}(f_i - f^{eq}), \quad (3.20)$$

o procedimento de converter a equação 3.20 em uma simulação possível será discutida na próxima seção.

A partir da equação de LB, podemos criar o básico para simularmos o escoamento e as colisões das partículas. Vamos comportar a distribuição de partículas por uma rede espacial em cada passo Δt . Na modelagem desse comportamento, podemos performar o operador de divisão, separando as equações conforme a mudança dimensional.

$$f_i^t(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u})], \quad (3.21a)$$

$$f_i^t(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^t(\mathbf{x}, t + \Delta t), \quad (3.21b)$$

onde ρ e \mathbf{u} são respectivamente a densidade e a velocidade macroscópica do fluido em uma posição \mathbf{x} . A equação (3.21a) representa a mudança dimensional temporal, e a equação (3.21b) representa a mudança espacial. Numa perspectiva de distribuições de partículas, essas descrições são chamadas de fluxo e de colisões. Esses dois passos devem ser impostas exatamente nessa ordem para cada passo na simulação, assim, o modelo será altamente paralelizável [21], onde a equação de colisão faz necessária dados locais de um sítio da rede e a equação de fluxo é simplesmente um termo advectivo através da malha(lattice). Em HPCs o domínio espacial é decomposto permitindo que cada processo de lidar com subdomínios espaciais da simulação. A utilização de uma MPI é necessária para passar o fluxo de informação aos processos entre as vizinhanças. Como esses processos internos são performados de forma simultânea, isso implica a dizer que a computação em torno do método de LB são locais, restrito aos nós da malha, portanto, o algoritmo é muito bem paralelizável³.

³Paralelização é o ato de projetar um programa ou sistema de computador para processar dados em paralelo, com dois ou mais CPUs.

O método LB em sua essência é o inverso da mecânica estatística. Problemas não-lineares tem sido cada vez mais integradas em espaços cinéticos de dimensões superiores, enquanto é necessária a minimização das velocidades de fase do sistema. O ganho é que as derivadas não-lineares convectivas nas equações de NS e da MHD são substituídas por uma advecção linear no espaço cinético. Os termos não-lineares são introduzidos no LB como uma não linearidade algébrica quadrática no termo da distribuição de equilíbrio f^{eq} .

Os momentos conservados $(\rho, \rho \mathbf{u})$ da distribuição de LB (f) são necessários para a evolução da função de equilíbrio (f^{eq}) em cada passo. Os momentos conservados em cada malha são definidos similarmente em (3.12a)

$$\rho = M_0 = \sum_i f_i, \quad \rho \mathbf{u} = M_1 = \sum_i \mathbf{c}_i f_i. \quad (3.22)$$

O procedimento para pegar a i -ésima (i^{th}) do momento M_i é

$$M_i = \sum_{j=0}^8 T_{ij} f_j, \quad (3.23)$$

para algumas transformações da matriz T cujo tamanho é determinado pelas distribuições das velocidades discretas, a malha torna-se um sistema com uma geometria hiperbólica com termos não lineares, isotrópico [22, 23].

3.5 O Método de Chapman-Enskog

A teoria cinética dos gases ganha uma forma moderna quando Chapman e Enskog⁴ ao fazerem uma nova abordagem para soluções da equação de transporte de Boltzmann, resultando nas propriedades macroscópicas encontradas nas equações de

⁴O método de Chapman-Enskog em gases elásticos no diz que o desvio da distribuição de Maxwell-Boltzmann no equilíbrio é pequeno e pode ser tratado como uma perturbação. Este método teve como objetivo a obtenção de equações de transporte mais gerais do que as equações de Euler [24].

NS. Agora que encontramos a equação de LB (3.20), precisamos mostrar que realmente será possível simular comportamentos de fluidos. Enquanto, na equação de NS olhamos apenas para o sistema macroscópico, A ideia básica do método é dividir a função de distribuição em dois termos aditivos em que o primeiro termo consiste em uma função de distribuição de Maxwell que nos dá os valores locais da densidade, velocidade e temperatura. Este termo corresponde à primeira aproximação para a função de distribuição, já o segundo termo consiste em um desvio da função de distribuição de Maxwell em que corresponde à segunda aproximação para a função de distribuição. Deles resultam nas grandezas de transporte que estão relacionadas com o comportamento do tensor das tensões τ_{ij} e ao calor q_i , [25]. Portanto,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) [1 + \phi(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)], \quad (3.24)$$

onde $f^{(0)}$ é a função de distribuição das velocidades de Maxwell,

$$f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = f_M(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\mathbf{c}^2}{2kT}} = \frac{\rho}{m} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta C^2}, \quad (3.25)$$

ϕ é o seu desvio.

A expansão de Chapman-Enskog recupera a equação de Navier-Stokes com um incremento Δt como um pequeno parâmetro de perturbação ϵ . O parâmetro é identificado fisicamente como o caminho livre médio, sendo um termo adimensional, chamado de número de Knudsen (Kn). Através da expansão de Taylor na eq. eq3.19, resulta

$$\begin{aligned} f_i(\vec{x}, t) + \Delta t \left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{c}_i \cdot \nabla_{f_i} \right] + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + (\vec{c}_i \cdot \nabla)^2 f_i + 2(\vec{c}_i \cdot \nabla) \frac{\partial f_i}{\partial t} \right] \\ = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i - f_i^{eq}] + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (3.26)$$

outra expansão na função de distribuição

$$f_i = f_i^{eq} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} + O(\epsilon^3), \quad (3.27)$$

introdução no tempo de uma expansão em multiescala

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad \text{e} \quad \Delta t \cdot \nabla \rightarrow \epsilon \Delta_1 \quad (3.28)$$

onde a escala *fast time* t_1 corresponde ao tempo de escoamento, termo advectivo. Enquanto a escala temporal *slow time* t_2 é a de transporte, difusivo. Em física de plasma, estas escalas temporais serão representados num MHD ideal e resistivo. Equações das potências de ϵ :

$$\begin{aligned} O(\epsilon) : \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t_1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla_1 f_i^{eq} &= -\frac{1}{\tau} f_i^{(1)}, \\ O(\epsilon^2) : \frac{\partial f_i}{\partial t_2} + \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla_1 \right) f_i^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_i^{eq}}{\partial t_1^2} + [\mathbf{c}_i \cdot \nabla_1]^2 f_i^{eq} + 2[\mathbf{c}_i \cdot \nabla_1] \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t_1} \right) \\ &= -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

o termo quadrado, pode ser simplificado, tal que

$$O(\epsilon^2) : \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t_2} + \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla_1 \right) f_i^{(1)} = -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)}, \quad (3.30)$$

Utilizando as variáveis macroscópicas da equação discretizada, como as equações de momentos com as equações de (3.29) e (3.30) nos momentos 3.22 obtemos a equação macroscópica de fluidos

$$\sum_{i=1}^Q f_i^n = 0, \quad \sum_{i=1}^Q \mathbf{c}_i f_i^n = 0, \quad (3.31)$$

por isso, os momentos *zeroth* (“de inicialização”) das equações 3.29 e 3.30 resulta

$$O(\epsilon) : \frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \nabla_1 \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad O(\epsilon^2) : \frac{\partial \rho}{\partial t_2} = 0, \quad (3.32)$$

combinando a equação (3.32) obtemos a equação de continuidade

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial \rho}{\partial t_2} + \epsilon \nabla_1 \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0. \quad (3.33)$$

Ao usarmos a equação (3.28) da mesma forma que descrevemos acima a equação de continuidade, para os primeiros momentos da equação (3.29) e (3.30), obtemos.

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left[\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} + \Pi_{\alpha\beta}^{(1)} \right] = 0, \quad (3.34)$$

onde o tensor de fluxos dos momentos são definidos como

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \sum_{i=1}^Q c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(eq)}, \quad \Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \sum_{\alpha=1}^Q c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(1)}, \quad (3.35)$$

introduzindo uma malha(lattice) geométrica e a distribuição da função de equilíbrio f_a^{eq} , recupera-se a equação e NS, tal que

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} &= \sum_{i=1}^Q c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(eq)} = p \delta_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta, \\ \Pi_{\alpha\beta}^{(1)} &= \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \sum_{\alpha=1}^Q c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(1)} = \nu \left(\frac{\partial \rho u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\beta} \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

com a viscosidade ν sendo,

$$\nu = \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) c_s^2 \Delta t. \quad (3.37)$$

Nas equações (3.36) vemos uma propriedade importante para o método LB, os momentos perturbados da função de distribuição modelam o gradiente referente às variáveis do fluido. Essa característica do método é explorado em ambos os sistemas,

seja ele um escoamento laminar formando como também na lei de Gauss para o campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ no fluido da magnetohidrodinâmica. Como esperado, a taxa de relaxação da colisão cinética τ determina o coeficiente de transporte ν (3.37).

3.6 Velocidades na Malha D2Q9

A tendência é incluir geometrias que sejam mais simples possíveis, permanecendo isotrópicas e preencher os espaços da malha, prevenindo a interpolação no qual pode ocorrer error numéricos. Em duas dimensões, resultou-se em malhas geométricas quadradas e hexagonais, que são mais aceitas e usadas em pesquisas.

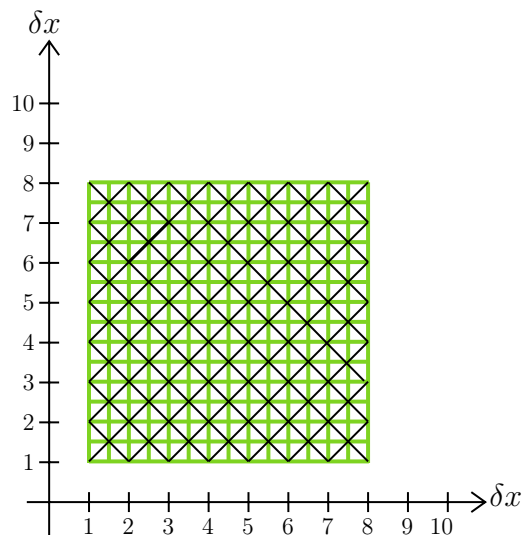


Figura 3.4 – Representação de uma malha (*lattice*) de dimensão 8x8 células sendo as direções na malha em verde na vertical e horizontal e as velocidades nas diagonais de preto. δx é a dimensão da escala requerida.

Neste trabalho, foi usado uma malha quadrática, pode-se, portanto, fazer a discretização da função de distribuição das velocidades \mathbf{v} em quatro coordenadas cardiais para manter a isotropia, com isso, termos quatro distribuições das velocidades que equivalem a apenas uma velocidade, no qual, previnem o fluido de chegar ao estado de distribuição de equilíbrio Maxwelliana. Adicionando uma velocidade de repouso na malha quadrática, permite que haja melhores aproximações para o equilíbrio e com isso ser possível fazermos uma abordagem à distribuição de equilíbrio Maxwelliana

e resultar em uma simulação mais estável. Somando as velocidades construídas até agora, serão apenas cinco momentos independentes numa transformação dos momentos, são eles as velocidades, o cisalhamento na direção x e y e a densidade. Conforme o método de Chapman-Enskog, necessitamos de pelo menos seis momentos, são eles, uma densidade, duas dimensões de velocidades, três elementos simétricos do tensor das tensões para uma modelagem 2D. Sem todos os seis momentos armazenados, a expansão de Chapman-Enskog para as malhas não corresponderá adequadamente a uma evolução macroscópica do fluido. No intuito de manter a isotropia para a malha, mais quatro distribuições discretas da velocidade são adicionados vindo das diagonais de uma célula da malha quadrática. Essas velocidades discretizadas na malha quadrática agora tem todos os requisitos para uma modelagem precisa se assemelha como mostrado na figura 3.5 Em uma malha do tipo D2Q9 (2 dimensões e 9 veloci-

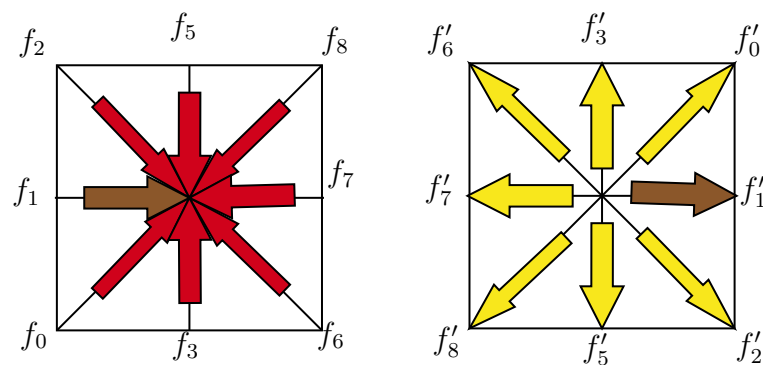


Figura 3.5 – Uma célula da malha mostrando as distribuições pré-colisão (vermelho) e pós-colisões (amarelo). A distribuição f_4 situasse no nó central da célula indicando que está parado. As espessuras das setas demonstram o peso w_i de cada distribuição

dades distribuídas), tem-se um total de três distribuições de velocidades. Com uma malha hexagonal bidimensional, instantaneamente encontramos um número mínimo de velocidades na malha e com isso foi mantido a isotropia. Para se obter uma malha mais complexa, tridimensional, o custo computacional será muito maior e podendo se fazer um tipo de malha D3Q27. Conforme a tabela 3.1 mostrando o tipo da malha e a quantidade de velocidades que irá ter em célula.

O cerne da descrição computacional do método de LB deste trabalho é usar um

Tipo de Malha	Velocidades da Malha	Velocidades(Quantidades)
D1Q3	$(0), (\pm 1)$	$0(1), 1(2)$
D2Q9	$(0, 0), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1)$	$0(1), 1(4), \sqrt{2}(4)$
D3Q15	$(0, 0, 0), (\pm 1, 0, 0), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$	$0(1), 1(6), \sqrt{3}(8)$

Tabela 3.1 – Tipos de malhas encontradas no método de *Lattice* Boltzmann.

tipo de malha bidimensional D2Q9, com 9-bit de velocidades \mathbf{c}_i no espaço de fase para a distribuição das densidades. O tipo da malha D2Q9 naturalmente usa uma dada função de equilíbrio com conjunto de pesos correspondentes w_i e na malha uma velocidade do som c_s , que é calculado utilizando os polinômios de Hermite. A escolha da f^{eq} é feito por vias de um truncamento da expansão de pequenas velocidades (um pequeno número Mach) da função de distribuição de Maxwell-Boltzmann cujos fatores de cada termo são determinados pelos pesos da malha e da velocidade do som [26]. A distribuição do equilíbrio f^{eq} na malha D2Q9 é

$$f^{eq} = w_i \rho \left[1 + 3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right], i = 0, \dots, 8 \quad (3.38)$$

com velocidades do som nas malhas $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e pesos $w_0 = 4/9, w_{1..4} = 1/9$ e $w_{5..8} = 1/36$.

Para construir o espaço dos momentos, naturalmente primeiro se faz a escolha da conservação dos momentos(o momento de inicialização e primeiros momentos de f_i) [27]. Em seguida é escolhido os momentos superiores restantes para se forma uma base independente. O mapeamento de um a um (1-1) entre o espaço das distribuições (f_i) e o espaço dos momentos (M_i) como iniciado (3.23), dado uma matriz T constante. Para uma escolha dos momentos simplista da representação 9x9 dessa

matriz, fica

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ c_x \\ c_y \\ c_x c_y \\ c_x^2 \\ c_y^2 \\ c_x^2 c_y \\ c_x c_y^2 \\ c_x^2 c_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

onde x e y são componentes dos vetores correspondentes da malha 9-dimensional que são

$$c_x = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, -1, -1, -1\}, \quad c_y = \{0, 0, 1, 0, -1, 1, 1, -1, -1\}. \quad (3.40)$$

Os primeiros três momentos do fluido são simples invariantes da colisão sendo nada mais que a conservação da densidade (a primeira linha da matriz T) e o momento (segundo e terceira linha de T). Em particular, o momento pode ser escrito em termos dos momentos conservados,

$$\begin{aligned} M_0^{eq} &= \rho, & M_1^{eq} &= \rho u_x, & M_2^{eq} &= \rho u_y, \\ M_3^{eq} &= \rho u_x u_y, & M_4^{eq} &= \frac{1}{3} (3\rho u_x^2 + \rho), & M_5^{eq} &= \frac{1}{3} (3\rho u_y^2 + \rho), \\ M_6^{eq} &= \frac{1}{3} \rho u_y, & M_7^{eq} &= \frac{1}{3} \rho u_x, & M_8^{eq} &= \frac{1}{9} \rho (1 + 3u_x^2 + 3u_y^2). \end{aligned}$$

o modelo BGK é uma forma elegante para simplificação do operador de colisão da equação. Entretanto, a simplificação e eficiência do operador de colisão tem custo devido à redução em precisão para situações em alta viscosidade ou redução da

estabilidade em baixas viscosidades. A configuração aplicada acima é a técnica MRT do operador de colisão que constrói a matriz T possibilitando diversos parâmetros livres que corrige problemas diversos de instabilidade e melhora a precisão do sistema.

3.7 Vórtice de von Kármán

Na dinâmica de fluidos, um vórtice de von Kármán é um padrão repetitivo de vórtices rodopiantes, causados por um processo conhecido como esteira de vórtice, responsável pela separação instável do fluxo de um fluido em torno de corpos contínuos. É nomeado em homenagem ao engenheiro Theodore von Kármán ⁵ [3]. A simulação resolve as equações de NS incompressível utilizando LB em um cenário de um escoamento envolto de um cilindro bidimensional numa placa retangular de malha com dimensão 300x50 nós, resultando nos vórtices de von Kármán. Para a formação dos vórtices, o fluido parte de uma característica laminar para adquirir um estado turbulento, o parâmetro do sistema que faz a modificação é o número de Reynolds definido como,

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.41)$$

onde U é a velocidade do fluido macroscópico, L é amplitude característica da dimensão da malha. O número de Reynolds é uma constante adimensional obtido através da lei de similaridade. O código construído para fim de estudo da teoria do método de LB não é robusto suficiente para $Re \geq 300$ pois o sistema fica instável.

Na figura 3.6 é feita uma simulação do escoamento de um fluido para $Re = 27$. A intensidade das partículas que colidem com o obstáculo cilíndrico não é intenso o suficiente para haver formação da esteira de vórtices. O número de Reynolds igual à 27 resulta no número crítico já que para um número de Reynolds igual a 28 conseguimos visualizar pequenas perturbações em torno da esteira dos vórtices. Com

⁵Theodore von-Kármán (1881 - 1963) foi um matemático, engenheiro espacial e físico húngaro-americano que produziu diversos trabalhos em aeronáutica e astronáutica. Foi responsável por avanços nos estudos de aerodinâmica supersônica e hipersônica

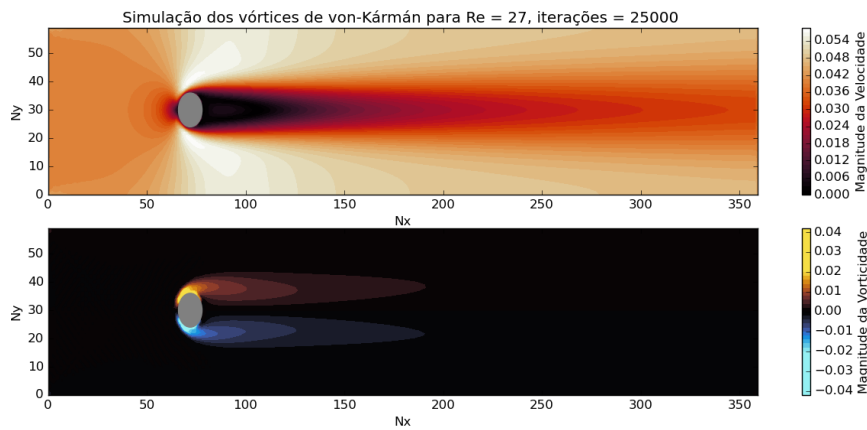


Figura 3.6 – Fluxo em torno de um obstáculo cilíndrico via LBM D2Q9 com valor $Re = 27$. Fluido com característica laminar e sem formações de vórtices.

isso, é obtido um escoamento com característica laminar quando for $Re = 27$. A figura mostra a magnitude da velocidade para um número de Reynolds igual a 27 variando entre 0.00 e 0.054. Para a intensidade da magnitude dos vórtices de von Kármán gerado nesta configuração variando entre 0.00 e 0.04. A diferença entra as tonalidades de cores para o amarelo e para o azul na magnitude dos vórtices é apenas para indicação do sentido que ele está sendo gerado. O que faz com que o resultado da simulação seja coerente com resultados na literatura.

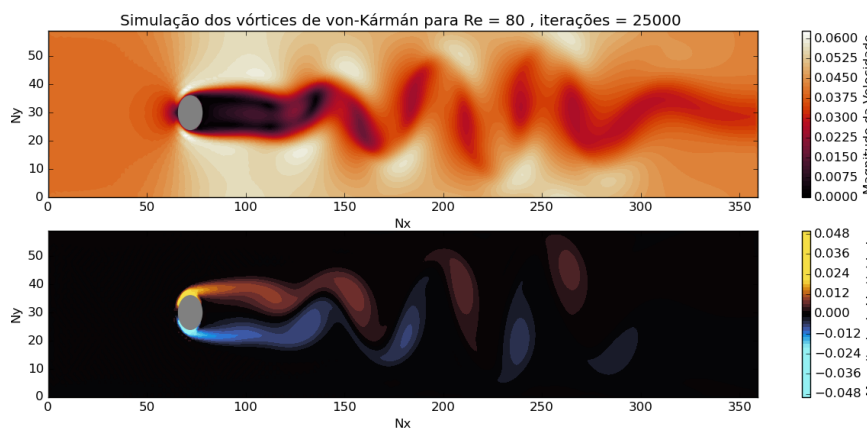


Figura 3.7 – Escoamento do fluido em torno de um obstáculo cilíndrico via LBM D2Q9 com valor de $Re = 80$. Fluido com características turbulentas formando ilhas de vórtices.

Já a figura 3.7 podemos perceber que a intensidade das partículas que colidi com

o obstáculo cilíndrico é intenso o suficiente para que a formação dos vórtices de von Kármán sejam perturbados de tal forma que consigam gerar a esteira de ilhas de vórtices. O número de Reynolds igual a 80 trás uma característica turbulenta do escoamento do fluido. Os resultados obtidos para um número de Reynolds igual a 80 para a magnitude da velocidade das partículas é uma variação da intensidade entre 0.00 e 0.067. Os resultados para a magnitude dos vórtices é uma variação entre 0.00 e 0.048.

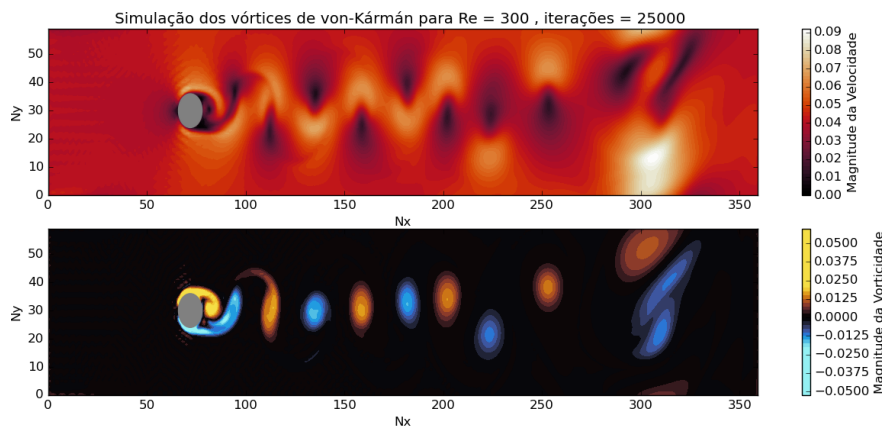


Figura 3.8 – Escoamento do fluido em torno de um obstáculo cilíndrico via LBM D2Q9 com valor de $Re = 300$. Fluido com características turbulentas formando ilhas de vórtices, velocidade do fluido alta demonstrando instabilidade.

Para fim de teste, a figura 3.8 mostra resultados muito mais intenso da magnitude da velocidade e da vorticidade. Mostrando que a simulação fica instável a número de Reynolds superiores a 300.

As condições de contorno da simulação, é utilizado na parte superior e inferior condições de periodicidade. Para o obstáculo é utilizado a técnica de *Bounce-Back* chamado de método de Zou-He [28]. Já para a condição de inicialização das populações na lateral esquerda do contorno (*inflow*) é feita uma média das populações conhecidas de uma célula e para finalizar a condição de contorno na lateral direita (*outflow*) é construído um *loop* das populações que chegam na célula.

Capítulo 4

Uma Revisão da Magnetoidrodinâmica

A Magnetoidrodinâmica é uma teoria para fluidos condutores de eletricidade na presença de campos magnéticos e são usados para descrever uma ampla variedade de fenômenos em metais líquidos, sendo uma descrição cinética plasmática de interações de baixa frequência. O estudo de MHD mistura conhecimentos de áreas de dinâmica de fluidos, eletromagnetismo e um pouco de física de plasma.

Em um meio isotrópico, não há direções preferenciais no espaço, portanto, tudo parece igual em quaisquer direções que é visualizado. Em hidrodinâmica, lidamos com fluidos que é um material isotrópico, um elemento complexo. A descrição de um fluido condutor como o MHD, fica mais complexo devido ao campo magnético, pois, o campo lida com direções bem definidas. Um fluido magnetizado é dito ser um meio anisotrópico, e desde que há interações entre fluido e campo magnético, de alguma forma as equações de maxwell devem ser resolvidas simultaneamente com as equações da dinâmica de fluidos. O conjunto de equações da MHD conecta a densidade de massa ρ , a velocidade do plasma \mathbf{V} , a termodinâmica (também chamado de gás ou cinética), pressão P e o campo magnético B .

A partícula se move sobre a influência de um campo magnético e por isso seu

movimento é descrito pela força de Lorentz [29]

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.1)$$

O comportamento do campo eletromagnético é determinado pelas equações de Maxwell, vejamos em [30],

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

Uma grama de hidrogênio ionizado contém cerca de 6×10^{23} prótons e o mesmo número de elétrons. Para considerar a equação de movimento para cada partícula, e calcular o resultado do campo eletromagnético é claramente inviável e então métodos estatísticos devem ser aplicados. Introduzimos a função de distribuição das partículas, $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$. A força de Lorentz descrita representa o efeito de primeira ordem relativística que significa que as velocidades intrínsecas do fluido são muito menores que a velocidade da luz. O rotacional do campo magnético pode ser descrito com o termo da densidade de corrente \mathbf{j} e a condutividade σ , temos a lei de Ohm,

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\sigma \mu} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.5)$$

4.1 Equação Magnética para o MHD

Para obter a equação que governa o campo magnético, começamos com a lei de Ohm, assumiremos aqui o estado de que a força de Lorentz é equivalente ao produto

da resistividade e da densidade de corrente

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \nabla \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \quad (4.6)$$

onde \mathbf{J} é a densidade de corrente e η a resistividade. Substituindo a lei de Ohm (4.6) dentro da lei de Ampère representado em 4.3, resulta em uma nova relação da densidade de corrente,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\mu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - c\eta \mathbf{J})}{\partial t}, \quad (4.7)$$

em simulações não relativísticas, $c \gg |u|$, ou considerando apenas baixas frequências, o segundo termo da direita é irrelevante. Podemos absorver os coeficientes restantes na corrente, definindo os termos em unidade natural

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (4.8)$$

A partir disso, a lei de Ohm (4.3) pode ser combinada com a lei de Faraday 4.3

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.9)$$

assim, recuperamos a indução magnética no MHD,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \eta \mathbf{J}, \quad (4.10)$$

para uma simplificação da equação da indução magnética, substituindo na equação 4.8 no termo da densidade de corrente da equação 4.10, resulta,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (4.11)$$

η é considerada constante. O termo do rotacional elétrico nos dá a equação do campo magnético temporal,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{\sigma \mu} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.12)$$

A equação de indução 4.12 provê a evolução do campo magnético através do tempo na magnetoidrodinâmica. Vale ressaltar que $\nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0$, resultando em $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ satisfazendo automaticamente em todos os instantes em que η é presente. O termo de Reynolds magnético tem importância na difusão magnética e no efeito de inércia, definido como,

$$R_M = VL\sigma\mu, \quad (4.13)$$

onde V e L são características da velocidade e do comprimento de escala do fluido em questão. Caso o número R_M seja muito grande, efeitos magnéticos deverão se tornar inerciais. Rescrevendo a eq. (4.8) em sua forma adimensional por parametrização, temos,

$$B^* = \frac{B}{B_0}, \quad v^* = \frac{v}{V}, \quad r^* = \frac{r}{L}, \quad t^* = \frac{V}{L}t, \quad (4.14)$$

o termo R_M aparece naturalmente, portanto a equação fica,

$$\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t^*} = \frac{\nabla^{*2} \mathbf{B}^*}{R_M} + \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}^*). \quad (4.15)$$

4.2 Equação do Fluido MHD com a Equação de Boltzmann

O fluido MHD é recuperado através dos procedimentos de inserção da força de Lorentz e através da representação dos momentos. No capítulo 3 obtivemos a equação de Boltzmann 3.5, fazendo a alteração incluindo a força de longo alcance, servirá

como base para obtermos as equações em MHD,

$$\frac{d}{dt}f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\vec{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} \right) f_i = (\partial_t f_i)_{col}. \quad (4.16)$$

Na magnetoidrodinâmica, a força de longo alcance são governadas pela força de Lorentz, logo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\vec{x}} + \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\vec{v}} \right) f = (\partial_t f_i)_{col} \quad (4.17)$$

onde \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{u} é a velocidade macroscópica do plasma e \mathbf{B} é o campo magnético. Os termos nas condições iniciais da equação 4.17, obtemos as representações na base dos momentos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \partial_t f = \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} d^3v = \partial_t \rho \quad (4.18)$$

sendo, ρ é a densidade macroscópica do fluido. O segundo termo fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = \nabla_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d^3v (\mathbf{v} f) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (4.19)$$

e \mathbf{u} é a velocidade do fluido macroscópico. Essa relação existe devido a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. O terceiro termos, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d^2v \left[\frac{\mathbf{F}_{\alpha}}{m} f \right]_{v_{\alpha}=-\infty}^{v_{\alpha}=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{f}{m} \nabla_v \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (4.20)$$

em que converge para 0 devido a $f \rightarrow 0$ assim como $v \rightarrow \pm\infty$ e $\nabla_v \cdot \mathbf{F} = 0$ para a força de Lorentz.

Finalmente, o termo de colisão define a relação entre partículas de diferentes espécies. Duas taxas que definem são: ionização e mudança dos momentos. A taxa de ionização/recombinação descreve a criação ou aniquilação no número/massa da partícula. Já a taxa de ionização modelada para todas as espécies tem que ser zero,

assim, como a taxa da mudança de momento que é ocorrida devido a colisões entre outras partículas de outras espécies, então, serão definidas como zero se todas as espécies modeladas tiverem as mesmas massas. Uma vez que o modelo atual do MHD consiste em apenas uma espécie (*one fluid mhd model*), os valores são definidos como zero e o termo de colisão pode ser substituído por um simples operador BGK usado no LB assim como anteriormente 3.13. Todas as contribuições no termo de colisão em Champman-Enskog para os momentos iniciais serão zeros conforme o procedimento no capítulo anterior. O resultado da equação de continuidade do MHD pode ser escrito como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (4.21)$$

Com isso, podemos agora nos atentar a equação dos momentos.

4.3 Equação dos momentos

A equação de momento existe como primeiro momento da equação 4.17. Similarmente como a equação de continuidade, termo por termo, o primeiro termo será

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \partial_t \mathbf{v} f = \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} f = \partial_t \rho \mathbf{u}. \quad (4.22)$$

O segundo termo é o divergente do segundo momento de f_i (equilíbrio térmico de Boltzmann) 3.12c

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} \cdot \nabla_x \mathbf{v} f = \nabla_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d^3v (\mathbf{v} \mathbf{v} f) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla P \quad (4.23)$$

onde P é a pressão macroscópica do fluido $P = 2\rho RT$ (caso ideal). O terceiro termo representando a força de Lorentz é,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f &= \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d^2v \left[\mathbf{v} \frac{\mathbf{F}_{\alpha}}{m} f \right]_{v_{\alpha}=-\infty}^{v_{\alpha}=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{f}{m} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F} \mathbf{v}) \\
 &= 0 - \left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{f}{m} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F} + \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{f}{m} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \right) \\
 &= 0 - \left(0 + \frac{\rho}{m} \mathbf{F} \right) = -n\mathbf{F},
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde n é a densidade numérica ou densidade escalar. Nesse sentido, o primeiro termo da direita referente a equação 4.24 será zero desde que f seja um escalar próximo do equilíbrio como $\exp\{-v^2\}$ de acordo com 3.11. O segundo termo da equação 4.24 é zero devido que $\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} = 0$, fazendo com que a solução seja $-n\mathbf{F}$.

MHD está propenso a uma *quasi* neutralidade, significa dizer que localmente o número da densidade de íons é aproximadamente igual ao número da densidade de elétrons, $n_{ion} \approx n_{elec}$, desde que a carga do elétron e do íon são opostas, isso implica que o campo elétrico \mathbf{E} é balanceada e pode ser igualada a zero ($\mathbf{E} \rightarrow 0$), deixando $n\mathbf{F} = nq\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ onde \mathbf{J} é a densidade de corrente. A força de Lorentz pode ser simplificada usando 4.8. Em unidades naturais, o terceiro termo fica

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2. \tag{4.25}$$

Como dito anteriormente, o termo de colisão é substituído com o operador BGK de acordo com 3.13. O primeiro momento este é um operador da escala temporal hidrodinâmica e será igual a zero, entretanto, seguindo o procedimento na seção 2, a viscosidade mostra nela mesma uma escala viscosa temporal na expansão de Chapman-Enskog de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Seguindo o procedimento de Chapman-Enskog anterior, a viscosidade pode ser inserida com o mesmo resultado para Navier-Stokes dentro das equações de momento como $2\nabla \cdot \nu\rho\mathbf{S}$ onde ν é a taxa de dissipação e \mathbf{S} tensor de deformação com $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} u_{\beta} + \nabla_{\beta} u_{\alpha})$. O resultado da equação de

momento MHD é,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla P + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 + 2 \nabla \cdot \nu \rho \mathbf{S}. \quad (4.26)$$

Resumindo, as equações que descrevem o MHD são,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.27a)$$

$$\frac{\rho \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (4.27b)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 + 2 \nabla \cdot \nu \rho \mathbf{S}, \quad (4.27c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (4.27d)$$

$$d_t \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (4.27e)$$

A equação (4.27a) representa a inclusão da lei de gauss para o magnetismo. O termo $\frac{1}{2} \nabla B^2$ é combinado com o termo da pressão P que se torna uma nova pressão p , e a evolução da pressão afirmou no caso adiabático com uma taxa de calor específico γ sendo 5/3. A afirmação da equação de energia é apenas aplicado em casos isento de choques ou condução de calor.

4.4 MHD no Limite Incompressível

Devemos construir uma representação não-linear em que construa as equações incompressíveis da MHD em seu limite, isto é, campos e movimentos que são subsônicos, sendo os dois, velocidade de fase e fluxo, serão pequenos comparados a velocidade do som.

$$\frac{\omega/\kappa}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \ll 1, \quad Ma \equiv \frac{u}{\sqrt{c_s^2 v_A^2}} \ll 1 \quad (4.28)$$

onde v_A é a velocidade de Alfvén, sendo $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ e, c_s a velocidade do som, sendo $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$. Nesse limite, esperamos todas as ondas rápidas de perturbações nulas e na dinâmica MHD contenha apenas ondas perturbadas a baixas velocidades.

Examinado as equações do MHD ideal (4.27) em ordem do limite subsônico, temos, $\omega \sim \kappa u$, a derivação do termo convectivo (2.6) permanece intacta em todas as equações permitindo a não linearidade do termo advectivo entrar. Fazendo uma análise na equação de continuidade (4.15) há a confirmação em que os campos de velocidade serão nada divergentes em baixas ordens de perturbação

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \sim \omega \frac{\delta\rho}{\delta\rho_0} \sim Ma^3 \kappa c_s \rightarrow 0 \quad (4.29)$$

a equação de momento (4.27c) torna-se

$$\left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) = -\nabla \left(\frac{c_s^2}{\gamma} \frac{\delta p}{p_0} + \frac{B^2}{8\pi\rho_0}\right) + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi\rho_0}, \quad (4.30)$$

sendo, o termo de pressão p perturbada

$$p' \equiv \left(\frac{c_s^2}{\gamma} \frac{\delta p}{p_0} + \frac{B^2}{8\pi\rho_0}\right) \quad (4.31)$$

o termo de perturbação da densidade do LEE (4.30) é da ordem $\sim Ma^2$ portanto desconsiderada. Os termos restantes na equação serão todos de mesma ordem $\sim Ma^2 \kappa c_s^2$ e permanecerão na equação, resultando

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p' + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}, \quad (4.32)$$

onde o campo magnético desempenha o papel de unidade das velocidades, $\mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho_0} \rightarrow \mathbf{B}$ na ordem $\sim \kappa u B \sim Ma \kappa c_s B$. Reescrevendo a equação de indução magnética, resulta que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (4.33)$$

Por fim, as equações do mhd incompressível, resultará em um, sistemas de equações

$$\partial_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.34a)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (p + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot (2\nu \rho \mathbf{S}) \quad (4.34b)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4.34c)$$

4.5 Plasma Cinético

Um Plasma é essencialmente uma coleção de partículas em um número significativo no qual são carregados eletricamente. Neste estudo, iremos categorizar as partículas em duas espécies, a primeira como sendo um íon carregada positivamente (núcleo de hidrogênio ou prótons) e a outra carregada negativamente, elétrons. O que se segue pode ser generalizado como partículas neutras, pósitrons, múltiplos íons carregados. O que torna, portanto, uma dificuldade de descrever o plasma, sendo ele formado por uma variedade de possíveis escalas e tempo. Como exemplo, para um simples plasma de hidrogênio com densidade em torno do volume da ordem de $10^{19} m^{-3}$, temperatura de $1keV$, campo magnético de $3T$ e comprimento de plasma de $0,5m$ é encontrado as escalas variam em torno de $0,5m$ abaixo do comprimento de Debye de $7 \times 10^{-5}m$ enquanto a escala temporal varia num intervalo de elétron $3,5 \times 10^{-11}s$ vezes ao tempo do íon e Alfvén de $2 \times 10^{-8}s$, para uma escala temporal resistiva de $2ms$ e o tempo de decaimento ôhmico de 3 segundos [31].

Isto impossibilita de criar um modelo computacional viável que cubra todos os intervalos dos parâmetros, com isso, somos forçados à simplificação restringindo a subconjuntos de modelos com alguns sobrepostos a outros. A hierarquia BBGKY é incontrolável, porém é esperado para ser candidato a solução de um modelo fechado. Uma das formas simples da hierarquia BBGKY é ignorar todas as interações de partículas binárias, enquanto é retido os efeitos coletivos do sistema. Isso leva a equação de Vlasov, acoplada com as equações de Maxwell. Uma das dificuldades do modelo de Vlasov a permanência da reversão temporal, assim como as equações sub-

jacentes de movimento de todas as partículas subjacentes ao plasma e a inexistência do teorema H assim como a dificuldade para que o plasma tenda a algum equilíbrio térmico. Nas escalas temporais mais longas em comparação aos da colisão de partículas, deve-se agora considerar os efeitos de equilíbrio, considerando a difusão cinética no espaço das velocidades e a necessidade de se ter colisões binárias. Em ordem da construção de um sistema fechado, a hierarquia BBGKY leva a equação de Fokker-Planck e sua extensão renormalizada em termos dos potenciais das interações devido à coleção própria da natureza do plasma. Essas equações possuem o teorema H e pode a princípio levar ao equilíbrio térmico, porém, de modo geral as equações são muito complicadas e demanda alto esforço computacional, levando a buscar um modelo alternativo em que se aproxima do equilíbrio. Os modelos mais simples são as representações fluidas do plasma. Colisões binárias e instabilidades de plasma (não destrutivas) normalmente levarão o plasma ao relaxamento no espaço das velocidades cinéticas enquanto mantém os gradientes espaciais que se resolvem em escalas de tempo mais longas.

Dentro dessas escalas de tempo, o plasma é bem aproximado pela distribuição das velocidades locais Maxwelliana, sendo assim, visualizando colisões binárias como locais, também. Essas distribuições quasi-maxwellianas têm a boa característica de serem descritos pelos primeiros momentos: densidade média, velocidade e temperatura térmica (cinética). É feita uma tentativa de tirar os momentos das equações cinéticas e formar a hierarquia de equações de momento que precisam de mais aproximações para que se ocorra o fechamento. Esta descrição está agora no domínio das equações de fluidos [32]. Nesta dissertação o modelo MHD 1-fluido é escolhido devido a sua simplicidade e robustez, gerando resultados suficientes para aplicações diversas para simulações em MHD, sendo uma solução uniforme onde as diferentes espécies das partículas do plasma são uma média.

Capítulo 5

Modelo de Lattice Boltzmann MHD

O método de descrito a seguir foi formulado por Dellar [33]. Neste trabalho, Dellar faz a extensão do método de LB numa configuração do tipo D2Q9, numa dimensão bidimensional com 9 velocidades discretas. Devido ao MHD incluir uma terceira equação onde o campo magnético é governante, seu conceito foi criar uma distribuição magnética no qual evolui ao lado do fluido magnético, e governa o campo magnético. Esta nova distribuição deverá ter apenas o campo magnético como a conservação dos momentos e devera evoluir da mesma maneira como o fluido, idealmente a conservação do momento faz crescer a distribuição do momento menor. Para acomodar o vetor do campo magnético no momento inicial(zeroth moment), medida da conservação de massa, Dellar fez da distribuição um vetor de distribuição. Significa dizer que em 3 dimensões, teria 3 componentes vetoriais para o campo magnético, o que resultaria num custo computacional enorme para simulações, portanto inviável.

A equação de Dellar para o campo magnético em Lattice Boltzmann fica,

$$\partial_t \mathbf{g}_i + \partial_\alpha e_{\alpha i} \mathbf{g}_i = \frac{1}{\tau_g} (\mathbf{g}_i - \mathbf{g}_i^{eq}) \quad (5.1)$$

onde \mathbf{g}_i é um vetor de distribuição com i sendo os componentes discretas da velocidade da rede magnética e (similar a \mathbf{c}), \mathbf{g}_i^{eq} é o valor do \mathbf{g}_i no equilíbrio e τ_g é a

taxa de relaxação da resistividade dado por $\eta = c_s^2 (\tau_g - \frac{1}{2})$ e c_s sendo a velocidade do som da rede (devido a isoterma da distribuição de maxwell da física estatística).

A importância de construir uma distribuição do vetor magnético é forçar o limite crítico $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ automaticamente sem precisar de um divergente puro conforme feito em simulações de dinâmica de fluido padrão. Fisicamente, o modelo do campo magnético é isento de direções, especialmente quando os efeitos de colisões representados pelo campo magnético são representados pela resistividade. Uma abordagem simplista para pensar sobre o conceito é imaginar que as partículas individuais criam seus próprios campo magnético em que irá seguir se movendo através do espaço. A distribuição do fluido irá descrever uma coleção de partículas que possibilitará a imitação para a coleção de partículas do campo magnético numa dada região. A contribuição total do campo magnético gerado numa região local se soma com os representantes macroscópicos do campo magnético da mesma região local. *Lattice Boltzmann* não se atenta para o modelo real cinético do sistema, em vez disso, tenta modelar as equações do MHD em sua forma macroscópica utilizando a cinética na forma mesoscópica. Alguns ruídos da cinética é justificável a partir da recuperação das equações MHD na expansão de Chapman-Enskog.

O fluido no equilíbrio deve ser modificado desde que um balanço de força ocorre entre o gradiente da pressão e a força *quasi*-neutra de Lorentz ($\nabla P - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$) com \mathbf{J} definido em (4.8). Portanto, o equilíbrio é expandido pelo polinômio de Hermite encontrado em [26]. Em 2D, o novo fluido no equilíbrio aparece como,

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left(1 + \frac{1}{c_s^2} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2c_s^4} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{2c_s^2} \mathbf{u}^2 \right) + \frac{w_i}{2c_s^4} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{c}_i|^2 - (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{B})^2 \right), \quad (5.2)$$

onde c_s é a velocidade do som na malha e geralmente tem o valor de $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

O equilíbrio magnético pode ser configurado como uma simples distribuição onde

o momento de inicialização é igual ao campo magnético

$$\sum_i g_{\alpha i} = B_{\alpha}, \quad (5.3)$$

e o primeiro momento é igual à força de Lorentz

$$\sum_i c_{\alpha i} g_{\beta i}^{eq} = u_{\alpha} B_{\beta} - B_{\alpha} u_{\beta}, \quad (5.4)$$

esta distribuição em 2D é,

$$g_{\beta i}^{eq} = w_i \left(B_{\beta} + \frac{c_{\alpha i}}{c_s^2} [u_{\alpha} B_{\beta} - B_{\alpha} u_{\beta}] \right). \quad (5.5)$$

Com a (5.5) pode obter-se a solução para o campo magnético induzido da equação do MHD em uma descrição mesoscópica a partir da equação de LB.

5.1 Velocidades na Malha

O novo vetor de distribuição magnética tem apenas um dos momentos conservados por cada componente em qualquer espaço dimensional. Seguindo a regra vindo da descrição do lattice Boltzmann (Montar um esquema para o LB clássico em 2D), apenas 3 momentos são requeridos de cada componente do vetor para reprodução da equação de indução (1 campo magnético e 2 elementos vindo do tensor de Lorentz quasi-neutro). Em 3D, torna-se 4 momentos (1 magnético 3 3 vindo do tensor de Lorentz). Como pode ser observado, a distribuição do vetor magnético requer poucos momentos e pode obter vantagens de números pequenos do vetor da malha do que um fluido de distribuição escalar [34–38].

A simulação na malha bidimensional e com nove direções D2Q9. Seu método será descrito de tal forma que seja viável a integração das equações acopladas do MHD. Assim como a equação de transporte de fluido de Boltzmann na rede LB pode ser

obtido as informações macroscópicas de NS através do procedimento de Chapman-Enskog, similarmente conseguimos obter uma forma discreta das equações acopladas dos campos magnéticos em MHD e também extrair informações que conectam a escala meso com a macro. A referência para a construção do código é obtida através dos livros [39, 40]. O modelo para criar o código em *lattice* Boltzmann MHD é utilizando o de Paul Dellar em [41].

5.2 Vórtices de Orszang-Tang

A equação da MHD construída na seção 4.1 contém sete variáveis dinâmicas independentes, três componentes da velocidade, dois componentes do campo magnético devido a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, densidade e pressão. No caso de um fluido incompressível e com densidade homogênea, as variáveis são reduzidas a quatro, duas componentes da velocidade devido a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e duas componentes do campo magnético, desde que a pressão agora é uma função de \mathbf{u} e \mathbf{B} , sendo a densidade uma constante. Para um plasma com uma magnetização forte utiliza-se mais uma aproximação muito utilizada chamada de MHD reduzida [42–44]. Uma formulação hamiltoniana das equações reduzidas foi desenvolvida [45].

As duas equações bidimensionais do MHD reduzidos são escritos por via de campos escalares $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla\varphi = (-\partial_y\varphi, \partial_x\varphi, 0)$ e, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} \times \nabla\psi = (-\partial_y\psi, \partial_x\psi, 0)$, onde φ e ψ são a função de fluxo de escoamento e magnético, respectivamente. Estas representações automaticamente satisfazem $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. A vorticidade e a corrente elétrica estão sob a direção $\hat{\mathbf{z}}$ então, $\nabla \times \mathbf{u} = \omega\hat{\mathbf{z}}$ e $\nabla \times \mathbf{B} = j\hat{\mathbf{z}}$ com $\omega = \nabla^2\varphi$ e $j = \nabla^2\psi$. Com essas definições, as equações da MHD incompressível (4.34a) e (4.34b), fica

$$\partial_t\omega + [\varphi, \omega] = [\psi, j] + \nu\nabla^2\omega \quad (5.6a)$$

$$\partial_t\psi + [\varphi, \psi] = \eta\nabla^2\psi \quad (5.6b)$$

onde a identidade Jacobiana é descrita tal que $[\varphi, \omega] = (\partial_x \varphi)(\partial_y \omega) - (\partial_y \varphi)(\partial_x \omega)$. A vorticidade que aparece em (5.6a) difere da vorticidade que aparece em NS seção 3.7 se deve a presença dos campos devido à força de Lorentz.

Os vórtices de Orszang-Tang [46] é um fluxo bidimensional com condições iniciais tais que

$$\varphi = 2(\cos(x) - \sin(y)), \quad \psi = 2\cos(x) - \cos(2y), \quad (5.7)$$

e resultados em um domínio periódico. Este fluxo, no entanto, contém a maioria dos recursos de turbulência MHD, notavelmente decaimento seletivo, reconexão magnética, formação de jatos e alinhamento dinâmico. As condições iniciais determinísticas permitem uma comparação direta com cálculos publicados anteriormente [47–50].

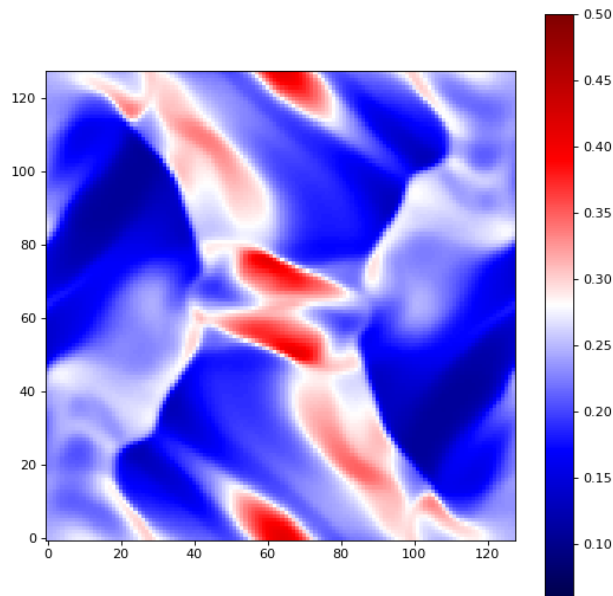


Figura 5.1 – Níveis de vorticidade nos vórtices de Orszang-Tang. Os contornos positivos são os níveis vermelhos e os negativos de níveis azuis.

A simulação representada pela figura 5.1 foi construída com condições de contorno periódicas na borda. A intensidade da magnitude da vorticidade varia entre 0.00 a 0.5. Foi utilizado uma malha de 128 x 128 nós.

5.3 Fluxo de Hartmann: Um exemplo

A influência $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ sob as camadas de contorno de um fluido condutor em um duto. Chamado de camadas de Hartmann, onde que o ponto principal é que o campo magnético estático é orientado com um determinado ângulo que transforma as características do fluído, como, por exemplo, a sua espessura. Suponha que temos um fluxo de cisalhamento $u(y)\hat{e}_x$ adjacente ao plano, estacionário, superficial [51]. Longe da parede o fluxo é uniforme e igual a u_∞ porém, perto da parede a condição de não deslizamento adquire algum tipo de camada de contorno 5.2. Existe uma uniformidade imposta pelo campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{e}_y$. Agora $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ e então $\nabla^2 V = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ implica que o campo elétrico será 0. Assumimos que $V = 0$, partimos

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\sigma B^2 u \hat{e}_x, \quad (5.8)$$

e então temos uma força de amortecimento. A equação de NS agora é

$$\rho\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.9)$$

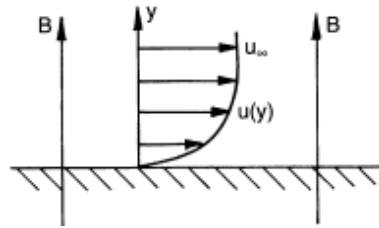


Figura 5.2 – Imagem retirada do livro [51]

que pode ser transformado em

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u - u_\infty) - \frac{u - u_\infty}{\delta^2} = 0, \quad \delta = (\rho\nu/\sigma B^2)^{1/2} \quad (5.10)$$

onde u_∞ é a velocidade que dista do contorno. A solução é

$$u = u_\infty [1 - e^{-y/\delta}] \quad (5.11)$$

vemos que a velocidade aumenta rapidamente sob uma distância curta da parede FIG2. Essa camada de contorno, com uma espessura $\sim \delta$, é chamada de camada de Hartmann. Note que essa espessura de uma camada de contorno de Hartmann é um pouco diferente das camadas de contorno convencionais.

As camadas de contorno entre dois planos paralelos finos e estáticos, localizados em $y = \pm w$. Será permitido a possibilidade de impôr um campo elétrico uniforme, E_0 , na direção z . A equação de movimento agora fica,

$$\rho\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma B E_0, \quad (5.12)$$

no qual tem uma solução

$$u = u_0 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{w}{\delta}\right)} \right], \quad (5.13)$$

onde

$$\sigma B^2 u_0 = -\frac{dp}{dx} - \sigma E_0 B \quad (5.14)$$

neste ponto é definido o número de Hartmann

$$Ha = \frac{w}{\sigma} = Bw\sqrt{\sigma/\rho\nu} \quad (5.15)$$

Ha^2 representa uma taxa da força de Lorentz para uma força viscosa. Nossa solução é tal que,

$$u = u_0 \left[1 - \frac{\cosh(Hay/w)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (5.16)$$

olhando para a equação (5.16) fica instrutivo a análise para dois números de Hart-

mann extremos, primeiro $Ha \rightarrow 0$ e $Ha \rightarrow \infty$. Quando Ha for pequeno, o fluxo recupera uma velocidade parabólica característica de um fluido de Poiseuille, $u = u_m ax(1 - (y/w)^2)$. Quando Ha for muito grande, por outro lado, encontramos uma exponencial forma da camada de Hartmann entre as duas paredes, separadamente por um núcleo de fluxo uniforme. Fluxo de Hartmann ¹, o sistema tem solução exata [52–54].

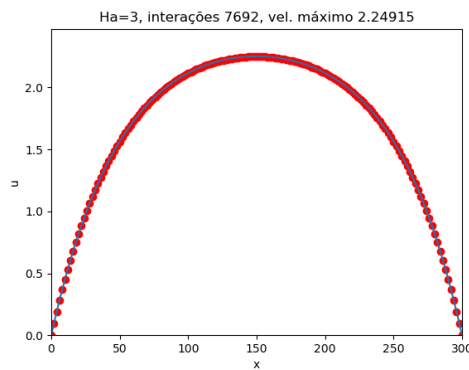


Figura 5.3 – velocidade no sentido da corrente e campo magnético no Fluxo de Hartmann. Os pontos representam a simulação numérica e a linha a solução analítica.

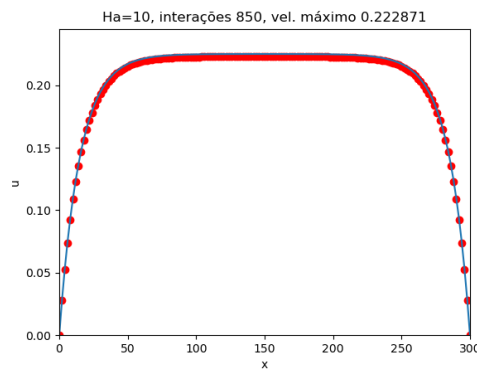


Figura 5.4 – velocidade no sentido da corrente e campo magnético no Fluxo de Hartmann. Os pontos representam a simulação numérica e a linha a solução analítica.

¹O número de Hartmann(Ha) é a taxa da força viscosa do eletromagnetismo, primeiramente introduzido pelo dinamarquês Julius Hartmann (1881 – 1951)

Conclusão

Com base nos trabalhos de Paul J. Dellar [33, 41] foi feito um estudo e aplicação do método de LB do tipo D2Q9 para a magnetoidrodinâmica. Os códigos aplicados foram construídos utilizando a linguagem computacional em Python com as bibliotecas NumPy para os cálculos e, Matplotlib para as visualizações gráficas. O código foi compilado por um computador caseiro de baixo processamento constituído por componentes de hardwares de baixo nível de processamentos como o Ryzen5 5600x com 6 núcleos e 12 *threads*, placa de vídeo RX 550, 16Gb de ram e com um SSD de 450Gb de armazenamento.

Algoritmos em LB são tipicamente esquemas explícitos de segunda ordem, idealmente paralelizados em computadores. Isso ocorre porque o algoritmo envolve relaxação de colisões locais em cada nó da malha (e, portanto, totalmente ideal para paralelização), seguido por escoamento das distribuições pós-colisões em sítios da malha vizinha (anexo A). Os códigos estão disponíveis através do *link* <https://github.com/mhtristao>

Para os trabalhos futuros, como o método LB demonstra ser uma ferramenta cada vez mais robusta devida a sua versatilidade de aplicações em escalas mesoscópicas, existe a possibilidade de aplicação em astrofísica em um cenário de altas energias, especialmente em aplicações para objetos compactos, como as estrelas de nêutrons, possibilitando estudar a magnetoidrodinâmica nas regiões desses objetos. Aplicações também em engenharia com a possibilidade de simular fluidos de componentes multifásicos desde o escoamento de minério ou em indústrias de petróleo.

Referências Bibliográficas

- [1] Alfvén, H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Nature* **1942**, *150*, 405–406.
- [2] Prize, N. The Nobel Prize in Physics 1970. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1970/summary/>, 2023; [Online; acessado 08-Maio-2023].
- [3] Von Kármán, T. *Aerodynamics*; McGraw-Hill paperbacks : Science, mathematics and engineering; McGraw-Hill, 1963.
- [4] Schiff, J. L. *Cellular automata: a discrete view of the world*; John Wiley & Sons, 2011.
- [5] Bialynicki-Birula, I.; Bialynicka-Birula, I. *Modeling Reality: How computers mirror life*; OUP Oxford, 2004.
- [6] Wolfram, S. Statistical mechanics of cellular automata. *Rev. Mod. Phys.* **1983**, *55*, 601–644.
- [7] Frisch, U.; Hasslacher, B.; Pomeau, Y. Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation. *Phys. Rev. Lett.* **1986**, *56*, 1505–1508.
- [8] McNamara, G. R.; Zanetti, G. Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata. *Phys. Rev. Lett.* **1988**, *61*, 2332–2335.
- [9] Succi, S. *The Lattice Boltzmann Equation: For Fluid Dynamics and Beyond*; Numerical Mathematics and Scientific Computation; Clarendon Press, 2001.

- [10] Succi, S.; Succi, S. *The lattice Boltzmann equation: for complex states of flowing matter*; Oxford University Press, 2018.
- [11] Chen, F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion: Volume 1: Plasma Physics*; Springer US, 2013.
- [12] Foias, C.; Manley, O.; Rosa, R.; Temam, R. *Navier-Stokes Equations and Turbulence*; Encyclopedia of Mathematics and its Applications; Cambridge University Press, 2001.
- [13] Landau, L.; Lifshitz, E. *Fluid Mechanics: Volume 6*; Elsevier Science, 2013.
- [14] Falkovich, G. *Fluid Mechanics*; Cambridge University Press, 2018.
- [15] Graebel, W. *Advanced Fluid Mechanics*; Elsevier Science, 2007.
- [16] Salinas, S. *Introdução a Física Estatística Vol. 09*; EDUSP, 1997.
- [17] Huang, K. *Statistical Mechanics*; John Wiley and Sons, 2000.
- [18] Reif, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*; Waveland Press, 2009.
- [19] Liboff, R. *Introduction to the Theory of Kinetic Equations*; Wiley, 1969.
- [20] Bhatnagar, P. L.; Gross, E. P.; Krook, M. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys. Rev.* **1954**, *94*, 511–525.
- [21] Macnab, A. I.; Vahala, G.; Vahala, L.; Carter, J.; Soe, M.; Dorland, W. Non-local closure and parallel performance of lattice Boltzmann models for some plasma physics problems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **2006**, *362*, 48–56, Discrete Simulation of Fluid Dynamics.
- [22] Pavlo, P.; Vahala, G.; Vahala, L. Higher Order Isotropic Velocity Grids in Lattice Methods. *Phys. Rev. Lett.* **1998**, *80*, 3960–3963.

- [23] Frapolli, N.; Chikatamarla, S. S.; Karlin, I. V. Lattice Kinetic Theory in a Comoving Galilean Reference Frame. *Phys. Rev. Lett.* **2016**, *117*, 010604.
- [24] Chapman, S.; Cowling, T. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*; Cambridge Mathematical Library; Cambridge University Press, 1990.
- [25] Kremer, G. M. Fundamentos da Teoria Cinética dos Gases. 1996; <http://portal.if.usp.br/bib/sites/portal.if.usp.br.bib/files/PDFs/pd1205.pdf>, Notas de aula da disciplina - Fundamentos da Teoria Cinética dos Gases, do Curso de pós graduação em Física.
- [26] He, X.; Luo, L.-S. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E* **1997**, *56*, 6811–6817.
- [27] Bouzidi, M.; d’Humières, D.; Lallemand, P.; Luo, L.-S. Lattice Boltzmann Equation on a Two-Dimensional Rectangular Grid. *Journal of Computational Physics* **2001**, *172*, 704–717.
- [28] Zou, Q.; He, X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids* **1997**, *9*, 1591–1598.
- [29] Bittencourt, J. *Fundamentals of Plasma Physics*; Springer New York, 2004.
- [30] Zangwill, A. *Modern Electrodynamics*; Modern Electrodynamics; Cambridge University Press, 2013.
- [31] Dendy, R. *Plasma Physics: An Introductory Course*; Cambridge University Press, 1993.
- [32] Flint, C. R. Computational Methods of Lattice Boltzmann Mhd. Ph.D. thesis, Willian & Mary, 2017.

- [33] Dellar, P. J. Lattice Kinetic Schemes for Magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics* **2002**, *179*, 95–126.
- [34] Chen, S.; *et.al*, Magnetohydrodynamics Computation with Lattice Gas Automata. *Journal of Statistical Physics* **1992**, *68*, 533–556.
- [35] Biskamp, D.; Welter, H. Coalescence of Magnetic Islands. *Phys. Rev. Lett.* **1980**, *44*, 1069–1072.
- [36] Chen, S.; Chen, H.; Martinez, D.; Matthaeus, W. Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.* **1991**, *67*, 3776–3779.
- [37] Martínez, D. O.; Chen, S.; Matthaeus, W. H. Lattice Boltzmann magnetohydrodynamics. *Physics of Plasmas* **1994**, *1*, 1850–1867.
- [38] Braginskii, S. I. Transport Processes in a Plasma. *Reviews of Plasma Physics* **1965**, *1*, 205.
- [39] Krüger, T.; Kusumaatmaja, H.; Kuzmin, A.; Shardt, O.; Silva, G.; Viggien, E. *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*; Graduate Texts in Physics; Springer International Publishing, 2016.
- [40] Mohamad, A. *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*; SpringerLink : Bücher; Springer London, 2011.
- [41] Dellar, P. J. Moment equations for magnetohydrodynamics. *J. Statist. Mech.: Theory & Expt.* **2009**, *2009*, P06003–22.
- [42] Biskamp, D. *Nonlinear Magnetohydrodynamics*; Cambridge Monographs on Plasma Physics; Cambridge University Press, 1993.
- [43] Kadomtsev, B.; Pogutse, O. Plasma convection in the tokamak. *Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* **1974**, *66*, 2056–2064.

- [44] Strauss, H. R. Nonlinear, three-dimensional magnetohydrodynamics of noncircular tokamaks. *The Physics of Fluids* **1976**, *19*, 134–140.
- [45] Hazeltine, R. D.; Hsu, C. T.; Morrison, P. J. Hamiltonian four-field model for nonlinear tokamak dynamics. *The Physics of Fluids* **1987**, *30*, 3204–3211.
- [46] Orszag, S. A.; Tang, C.-M. Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **1979**, *90*, 129–143.
- [47] Córdoba, D.; Marliani, C. Evolution of current sheets and regularity of ideal incompressible magnetic fluids in 2D. *Communications on Pure and Applied Mathematics - COMMUN PURE APPL MATH* **2000**, *53*, 512–524.
- [48] Dahlburg, R. B.; Picone, J. M. Evolution of the Orszag–Tang vortex system in a compressible medium. I. Initial average subsonic flow. *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **1989**, *1*, 2153–2171.
- [49] Tóth, G. The $\text{divB}=0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *Journal of Computational Physics* **2000**, *161*, 605–652.
- [50] Pouquet, A.; Sulem, P. L.; Meneguzzi, M. Influence of velocity-magnetic field correlations on decaying magnetohydrodynamic turbulence with neutral X points. *The Physics of Fluids* **1988**, *31*, 2635–2643.
- [51] Davidson, P. A. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*; Cambridge Texts in Applied Mathematics; Cambridge University Press, 2001.
- [52] Parker, E. N. The Solar-Flare Phenomenon and the Theory of Reconnection and Annihilation of Magnetic Fields. *apjs* **1963**, *8*, 177.
- [53] Moreau, R.; Molokov, S. *Magnetohydrodynamics: Historical Evolution and Trends*; Springer Netherlands: Dordrecht, 2007; pp 155–170.
- [54] Montgomery, D.; Doolen, G. D. Magnetohydrodynamic cellular automata. *Physics Letters A* **1987**, *120*, 229–231.

Apêndice A

Algoritmo MRT

Quando se sabe sobre a matriz de transformação M e a matriz de relaxação S no qual inclui todas as taxas de relaxações ω_i , então é performado o algoritmo MRT como esquematizado na figura A.1. Explicitamente, o algoritmo pode ser descrito como,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + c_i \Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -M^{-1} S M [(\mathbf{x}, t) - f^{eq}(\mathbf{x}, t)] \Delta t, \quad (\text{A.1})$$

e separado dentro os seguintes passos,

1. Cálculo dos momentos conservados: A densidade ρ e o momento $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$ pode ser obtido de uma população no instante da pré-colisão como de praxe,

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i. \quad (\text{A.2})$$

2. Transformar o momento dos espaços,

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \mathbf{f}, \quad m_k = \sum M_{ki} f_i. \quad (\text{A.3})$$

3. Computar o momento de equilíbrio $\mathbf{m}^{eq} = \mathbf{M} \mathbf{f}^{eq}$:

$$m_k^{eq} = \rho \sum_{l,m} a_{klm} u_x^l u_y^m \quad (\text{A.4})$$

4. Colidir: Uma vez que os momentos \mathbf{m} e \mathbf{m}^{eq} são computados, colisões são performadas no espaço dos momentos numa relaxação BGK, de modo que,

$$m_k^* = m_k - \omega_k(m_k - m_k^{eq})\Delta t. \quad (\text{A.5})$$

5. Transformar para o espaço das populações: Depois da relaxação, as populações pós-colisões são obtidas usando transformações inversas,

$$f_i^* = \sum_k M_{ij}^{-1} m_k^*. \quad (\text{A.6})$$

6. Transmissão (escoamento): Finalmente performar o escoamento das populações no espaço,

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.7})$$

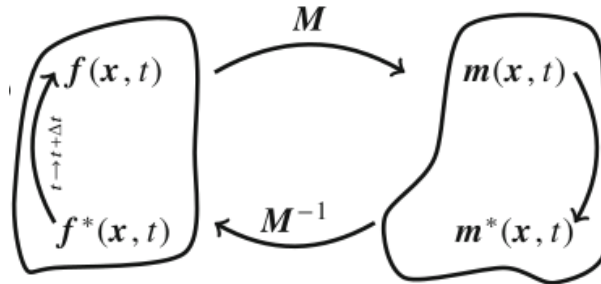


Figura A.1 – Representação esquemática do método MRT LB. Populações são mapeadas para o espaço dos momentos onde são governadas pelas colisões (relaxação). Momentos que foram relaxados são transformados de volta para o espaço das populações antes dos escoamentos. Figura retirada do livro do Timm Krüger [39]