UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

TALITA MORAES MODOLO

O ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM ESTUDO DAS QUESTÕES DA OBMEP SOBRE PERÍMETRO E ÁREA

Vitória, ES – Brasil
2023

TALITA MORAES MODOLO

O ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM ESTUDO DAS QUESTÕES DA OBMEP SOBRE PERÍMETRO E ÁREA

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão acadêmica institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

Vitória, ES – Brasil

2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

M689e

Modolo, Talita Moraes, 1994-
O ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS : UM ESTUDO DAS QUESTÕES DA OBMEP SOBRE PERÍMETRO E ÁREA / Talita Moraes Modolo. - 2023.
47 f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Resolução de Problemas. 2. OBMEP. 3. Banco de Questões. 4. Geometria Plana. 5. Perímetro. 6. Área. I. Rosado Filho, Moacir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"O Ensino da Matemática por Meio da Resolução de Problemas: Um Estudo das Questões da OBMEP sobre Perímetro e Área"

Talita Moraes Modolo

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 18/07/2023 por:

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Orientador – UFES

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Membro Interno – UFES

Prof. Dr. Paulo Roberto Prezotti Filho
Membro Externo - IFES - Guarapari

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

Agradeço a minha família, ao meu companheiro Victor e aos meus filhos, Arthur e Ana, que são minha motivação diária.

Agradeço ao meu orientador professor Moacir, por confiar que seria possível concluir essa etapa da minha formação, mesmo depois de tantos contratempos.

Agradeço a todos que passaram na minha vida durante o PROFMAT, professores, colegiado e colegas de curso, que foram fundamentais para que o meu projeto de conclusão do mestrado se concretizasse.

Agradeço aos meus colegas de trabalho que me incentivaram e deram suporte durante esse processo.

Obrigada a todos por tudo!

“[...], sustento que não há ação humana sem uma emoção que a estabeleça como tal e a torne possível como ato. [...] O amor é a emoção que constitui o domínio de ações em que nossas interações recorrentes com o outro fazem do outro um legítimo outro na convivência. As interações recorrentes no amor ampliam e estabilizam a convivência; as interações recorrentes na agressão interferem e rompem a convivência”.

Humberto Maturana

RESUMO

A geometria desempenha um papel fundamental em nosso cotidiano, manifestando-se em diversas formas e contextos. Por essa razão, o seu ensino se torna de extrema importância. Considerando as dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Geometria Plana na educação básica, a presente pesquisa tem como objetivo formar um banco de questões direcionado aos professores de Matemática, para auxiliá-los no uso das questões da OBMEP sobre perímetro e área em sala de aula, tendo como base as questões da segunda fase do Nível 1 da OBMEP. O levantamento de dados apresentados se deu por meio de pesquisa documental, explorando os problemas dispostos nas edições da prova realizadas entre 2005 e 2022. Ao longo da pesquisa serão apresentadas as questões e suas respectivas solução oficiais e uma proposta de resolução, a fim de exemplificar e orientar a aplicação da prática de resolução de problemas proposta por Polya para o ensino de área e perímetro. Diante do exposto, além de oferecer suporte aos professores, é esperado que as discussões realizadas nessa dissertação também contribuam para uma reflexão sobre o ensino de Matemática nas escolas públicas do país, buscando melhorias no processo de ensino-aprendizagem para aqueles que fazem parte dessas instituições.

Palavras-Chave: Resolução de Problemas. OBMEP. Banco de Questões. Geometria Plana. Área. Perímetro.

ABSTRACT

Geometry plays a fundamental role in our daily lives, manifesting itself in various forms and contexts. For this reason, its teaching becomes extremely important. Considering the issues faced in the teaching and learning of Plane Geometry in basic education, the present research aims to create a bank of questions aimed at Mathematics teachers to assist them in using the OBMEP test perimeter and area questions in the classroom, based on the questions from the second phase of Level 1 of OBMEP. The data collection was carried out through documentary research, exploring the problems presented in the editions of the exam held between 2005 and 2022. Throughout the research, the questions and their respective official solutions will be presented, along with a proposed resolution, to exemplify and guide the application of the problem-solving practice proposed by Polya for the teaching of area and perimeter. In addition to providing support to teachers, it is expected that the discussions carried out in this paper will also contribute to a reflection on the teaching of Mathematics in public schools in the country, seeking improvements in the teaching and learning process for those who are part of these institutions.

Keywords: Problem-solving. OBMEP. Question Bank. Plane Geometry. Area. Perimeter.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A dificuldade em aprender matemática não significa falta de habilidade ou inteligência. Cada pessoa tem suas próprias aptidões e pode superar os desafios com paciência, prática e métodos de ensino adequados. O apoio de professores e uso de metodologias e/ou recursos educacionais podem ser de fundamental importância para superar as dificuldades e desenvolver uma compreensão mais sólida da matemática. Cabe ao professor mediar e proporcionar aos alunos a compreensão da importância da Matemática no dia a dia, não apenas uma aprendizagem mecânica, mas uma reflexão sobre o que está sendo aprendido. Nessa perspectiva, cabe ressaltar que mediar não é responder para o aluno, é conduzir o raciocínio do aluno, de modo que ele possa descobrir as soluções e então concretizar o aprendizado (POLYA, 1985).

Aprender Matemática requer dedicação e concentração. Para que os alunos reconheçam a importância dos conhecimentos matemáticos, de modo que, possam compreender e atuarem no mundo a sua volta, é fundamental o desenvolvimento do letramento matemático, que segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é "definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, [...], utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas" (BRASIL, 2018, p.266).

O desenvolvimento dessas habilidades deve iniciar no Ensino Fundamental e está intimamente relacionado com a maneira como os conteúdos são abordados em sala de aula, se são relacionados a situações do cotidiano ou com outras áreas de conhecimento, por exemplo. Seguindo esse ponto de vista, a BNCC enfatiza que

> [...]. Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p.266).

A abordagem por meio da Resolução de Problemas tem se consolidado como uma tendência importante na Educação Matemática. Essa abordagem tem contribuído significativamente para a discussão de novas perspectivas teóricas e metodológicas direcionadas para o desenvolvimento de habilidades fundamentais dos estudantes, tais como a capacidade de investigação, argumentação, compreensão e formulação de hipóteses. Nesse contexto, diversos estudos têm sido conduzidos por alunos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, como os trabalhos de SOUSA (2023), GUIMARÃES (2023), FERREIRA (2023) e SOUSA (2020), entre outros. Essas pesquisas têm se concentrado em analisar a aplicação da resolução de problemas no ensino de diferentes conteúdos matemáticos e, os resultados obtidos, têm demonstrado que essa prática pedagógica tem proporcionado benefícios significativos aos estudantes durante o processo de ensino-aprendizagem.

Refletindo sobre as metodologias utilizadas durante o processo de ensino-aprendizagem, é evidente que não podemos saber qual é o melhor, uma vez que cada professor, dentro de suas individualidades e das individualidades de seus alunos, após experiências em sala de aula, vai descobrir a melhor maneira de realizar as abordagens. Não devemos rotular como melhor ou pior, um professor que trabalha por meio de uma metodologia de ensino diferente da que nos identificamos. Como dizia Polya, “não existe método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Beethoven. Há tantos bons ensinos quanto bons professores: o ensino é mais uma arte do que uma ciência” (POLYA, 1985, p.11). Como uma arte, o ensino da Matemática não deve ficar apenas no mundo teórico, é importante o uso de exemplos concretos, a fim de motivar o aluno a participar, uma vez que não se aprende matemática sendo apenas um observador. É preciso se envolver, pensar em cada questão, testar diferentes maneiras de resolvê-la, experimentar e vivenciar o que está sendo trabalhado.

Ao longo de leituras, discussões e diante de experiências adquiridas com a prática docente, surgiram algumas reflexões[1] que se tornaram motivação para o desenvolvimento dessa pesquisa. Parte dos alunos chegam na segunda etapa do Ensino Fundamental motivados com relação a disciplina de Matemática, mas em algum momento ao longo do processo, perdem o encanto e começam a ver a disciplina como algo complicado demais, difícil, chato, entre outros, e acabam finalizando o Ensino Fundamental e iniciando o Ensino Médio com dificuldade nesse componente curricular. Um exemplo de uma situação muito comum é quando iniciamos os estudos sobre função, os estudantes compreendem a teoria, mas quando vamos realizar aplicações, onde se faz necessário a resolução de uma equação, seja qual for a equação, eles têm dificuldade, muitos cometem erros relacionados ao famoso “passa pra lá

[1] As considerações apresentadas para compreender a motivação dessa pesquisa, são relacionas a experiências e vivências próprias do autor e estão relacionadas a realidade encontrada nas escolas públicas onde já trabalhou.

trocando o sinal", outros não compreendem o que é a relação de equivalência estabelecida por meio da igualdade e, simplesmente, criam coisas e escrevem, aparentemente com o objetivo de não apresentar a atividade em branco, já que quando questionados não sabem explicar como encontraram determinados valores.

Outra situação recorrente é a dificuldade quando estamos estudando os conteúdos relacionados a Geometria, onde o maior desafio é o descompasso com relação ao que os alunos de fato já estudaram. Como o professor da escola pública precisa fazer adequações na distribuição dos conteúdos que trabalhará ao longo do ano, levando em consideração diversos fatores, como, por exemplo, o nível da turma baseado no período de avaliações diagnósticas, muitos acabam deixando a parte de Geometria como um bloco a ser estudado no final no ano e, infelizmente, por vários fatores esses conteúdos acabam não sendo trabalhados, ou então são apresentados superficialmente. Para exemplificar as dificuldades durante os estudos sobre Geometria no Ensino Médio, quando estamos estudando os Prismas em Geometria Espacial, ao calcular as diagonais da base, da face e do prisma, o aluno não sabe o que é o Teorema de Pitágoras.

Diante dessas reflexões e a fim de melhorar a minha prática e poder contribuir com a formação e a prática de outros professores, busquei pesquisar sobre a metodologia de resolução de problemas e apresentar possíveis aplicações dessa metodologia por meio do uso das questões de Geometria, envolvendo o cálculo de perímetro e área, das provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP.

Com isso, o objetivo geral dessa pesquisa é formar um banco de questões direcionado aos professores de Matemática, para auxiliá-los no utilização das questões da OBMEP sobre perímetro e área em sala de aula, tendo como base as questões da segunda fase do Nível 1 da OBMEP. De forma mais detalhada, os objetivos específicos que serão desenvolvidos dessa pesquisa são:

- Analisar textos, livros e documentos que destaquem a importância da Geometria na educação básica;
- Compreender a importância da resolução de problemas no ensino da Matemática;
- Apresentar a OBMEP e seus programas;
- Estabelecer a relação entre a OBMEP e a resolução de problemas;

- Realizar análise das provas da segunda fase do Nível 1 da OBMEP, a fim de reunir por assunto as questões relacionadas ao estudo de perímetro e área;
- Organizar um banco de questões reunindo pergunta e solução oficial referente a temática perímetro e área;
- Conceituar perímetro e área na perspectiva da abordagem para turmas de 6º e 7º anos do ensino fundamental;
- Exemplificar a metodologia de resolução de problemas na perspectiva de Polya, aplicando para a resolução de uma das questões da OBMEP dispostas no banco de questões.

O levantamento dos dados apresentados se deu por meio de pesquisa documental, explorando os problemas dispostos para a área nas edições da prova realizadas entre 2005 e 2022. Assim, serão apresentadas as questões e suas respectivas solução oficiais e a proposta de resolução de uma questão das listadas, a fim de exemplificar e orientar a aplicação da prática de resolução de problemas para o ensino de área e perímetro.

Ao logos dessa pesquisa iremos discutir no capítulo dois sobre o a importância do ensino de Geometria na educação básica. No capítulo três, abordaremos sobre a prática de resolução de problemas na educação matemática segundo a perspectiva de Polya. No capítulo quatro, faremos uma breve apresentação da OBMEP, destacando sobre alguns de seus programas e sobre sua relação com a resolução de problemas. No capítulo cinco, apresentaremos o banco de questões com suas respectivas soluções oficiais. E por fim, no capítulo seis, trazemos uma breve apresentação teórica dos conteúdos de perímetro e área, sob a perspectiva de ensino para as turmas de 6º e 7º anos do ensino fundamental e a proposta da aplicação da prática de resolução de problemas, a fim de exemplificar o uso da metodologia proposta por Polya utilizando uma questão da OBMEP para o ensino de área e perímetro.

2. O ENSINO DE GEOMETRIA E SUA IMPORTÂNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A geometria desempenha um papel fundamental em nosso cotidiano, manifestando-se em diversas formas e contextos. Por essa razão, o seu ensino se torna de extrema importância. Ao adquirir conhecimentos geométricos, os estudantes são capazes de estabelecer relações entre os conceitos geométricos e as situações do seu dia a dia, proporcionando uma compreensão mais profunda do mundo que os cerca. Para LORENZATO (1995), o estudo da Geometria é essencial, pois desenvolve o pensamento geométrico e o raciocínio visual, permitindo resolver situações da vida cotidiana e compreender questões de outras áreas do conhecimento. Sem o conhecimento geométrico, a leitura do mundo fica incompleta, a comunicação das ideias é limitada e a visão da Matemática se torna distorcida.

No currículo escolar, a geometria assume uma posição de destaque, sendo reconhecida como uma área do conhecimento matemático que desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de habilidades essenciais dos estudantes. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância do ensino de geometria ao longo da escolaridade, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, por meio de diferentes conteúdos e abordagens. Destaca que estudo da geometria estimula o desenvolvimento de um pensamento que permite aos alunos descrever e representar, de forma organizada, as características do ambiente em que vivem (BRASIL, 2018).

O quadro a seguir apresenta as habilidades das turmas de 6º e 7º anos do ensino fundamental apresentadas pela BNCC que abrangem o ensino da Geometria Plana:

Habilidades da BNCC sobre Geometria Plana para as turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

- (EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
- (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

- (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
- (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
- (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
- (EF06MA28) Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.
- (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
- (EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
- (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
- (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
- (EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
- (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de

existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

- (EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
- (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
- (EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
- (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
- (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
- (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
- (EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

Fonte: BRASIL (2018).

Ao analisarmos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é possível destacar algumas considerações relevantes acerca do ensino de geometria na educação básica. O ensino de geometria tem como objetivo central desenvolver a capacidade dos alunos de analisar, compreender e representar o espaço e as formas presentes no mundo ao seu redor. Através da geometria, os estudantes são desafiados a observar e descrever características de figuras, investigar propriedades geométricas, construir e manipular objetos tridimensionais, além de utilizar raciocínio lógico e abstrato. Além disso, a geometria contribui para o desenvolvimento de habilidades transversais, como a capacidade de visualização, a análise crítica, o pensamento espacial e a resolução de problemas. Ao explorar conceitos geométricos, os estudantes são incentivados a pensar de forma criativa, a formular conjecturas e a justificar suas conclusões, promovendo assim o pensamento matemático e a argumentação.

A geometria também desempenha um papel importante na interdisciplinaridade, possibilitando a conexão com outras áreas do conhecimento, como física, arte, biologia e arquitetura. Ela está presente em nossa vida cotidiana, desde o planejamento urbano e arquitetônico até a compreensão de estruturas moleculares e o design de produtos.

Considerando o exposto, é fundamental abordar o ensino de geometria na educação básica de maneira contextualizada, motivadora e significativa. Essa abordagem proporciona aos alunos a oportunidade de desenvolver competências geométricas essenciais para sua formação integral. Além disso, o ensino de geometria, conforme estabelecido pela BNCC, oferece oportunidades para os estudantes desenvolverem habilidades matemáticas e outras competências descritas no documento, tais como Pensamento Científico, Crítico e Criativo, Argumentação e Comunicação. Por meio do estudo da geometria, os alunos exploram e compreendem o espaço e as formas de maneira significativa, ampliando sua compreensão do mundo e fortalecendo sua capacidade de resolver problemas de maneira eficaz.

3. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ensino da matemática por meio da resolução de problemas é fundamental para promover uma compreensão profunda e significativa dos conceitos matemáticos. O processo de resolução de problemas envolve a criação, organização e implementação de estratégias com o objetivo de encontrar soluções para situações problemáticas, tanto em contextos do dia a dia como em situações mais teóricas. Nas orientações do Currículo do Espírito Santo (2018), vemos a importância da Resolução de Problemas, quando destacada como parte integrante da matriz de saberes[2]:

> A tomada de decisão, a resolução de problemas, a liderança, a colaboração, a cooperação e o trabalho em rede são importantes para o empenho mútuo e coordenado de um grupo de participantes a fim de solucionar um problema, tornando-os capazes de identificar vantagens e desvantagens das alternativas

[2] A intencionalidade da matriz de saberes é “contribuir para formar cidadãos para uma sociedade mais democrática, inclusiva e sustentável” (ESPÍRITO SANTO, 2018, p.27).

> encontradas nas resoluções de problemas, assumindo as responsabilidades pelas escolhas feitas. Esses são alguns elementos importantes para **o trabalhar em grupo**. O otimismo, o entusiasmo, a proatividade e *o locus* interno de controle estimulam o alcance e a busca de novas perspectivas de futuro. Está relacionado a envolver-se ativamente com a vida e com outras pessoas com vistas a possíveis mudanças em suas trajetórias. Esses são alguns elementos importantes para **o protagonismo** (ESPÍRITO SANTO, 2018, p. 30).

Uma das principais vantagens da resolução de problemas é que ela permite que os alunos vejam a matemática como uma ferramenta prática e relevante. Ao enfrentar problemas do mundo real, os alunos podem perceber a utilidade da matemática em suas vidas cotidianas e desenvolver uma apreciação mais profunda pelos conceitos matemáticos. Além disso, a resolução de problemas promove o desenvolvimento de habilidades essenciais, como o raciocínio lógico, a análise de dados, a formulação de estratégias e a capacidade de comunicação matemática. Para POLYA (1985), um dos objetivos do ensino da Matemática é ensinar os discentes a pensar. Por meio da resolução de problemas, os alunos são desafiados a pensar de forma independente, a tomar decisões e a experimentar diferentes abordagens para encontrar soluções. Essas habilidades são transferíveis para outras áreas do conhecimento e são valiosas para a vida pessoal e profissional dos alunos.

Para POLYA (1995) a resolução de problemas também ajuda a desenvolver a confiança dos alunos em sua capacidade de enfrentar desafios matemáticos. Ao superar obstáculos e encontrar soluções, os alunos se tornam mais autoconfiantes e engajados com a matemática. A resolução de problemas oferece uma oportunidade para os alunos se tornarem protagonistas de sua própria aprendizagem, construindo seu conhecimento de forma ativa e significativa.

> [...]. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 1995, p.V).

A resolução de problemas contribui para uma abordagem mais abrangente do ensino da matemática. Em vez de se concentrar apenas em procedimentos e algoritmos, a resolução de problemas incentiva os alunos a explorar conceitos matemáticos em diferentes contextos e a fazer conexões entre diferentes áreas da matemática. Isso promove uma compreensão mais profunda dos conceitos e ajuda os alunos a construir uma base sólida para o aprendizado futuro. Em DANTE (1991), vemos que o ensino da matemática por meio da resolução de problemas é essencial para desenvolver habilidades matemáticas, promover o pensamento crítico e criar uma compreensão significativa dos conceitos matemáticos, quando afirma que "um dos principais objetivos do ensino da matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las" (DANTE, 1991, p. 11).

De acordo com POLYA (1995), a resolução de problemas requer habilidades que podem ser adquiridas por meio da prática e que possibilitam ao indivíduo encontrar soluções para qualquer problema ao qual se dedique. Para o autor, o processo de resolução de problemas envolve a aplicação de conhecimentos específicos que permitem uma abordagem sistemática e criativa na busca por soluções.

Nesse sentido, destaca-se a habilidade de descoberta como prioritária, na qual o sujeito inicialmente percebe o problema de maneira incompleta e complexa, permitindo que, ao longo do tempo, ocorram transformações em sua percepção. Essas mudanças evidenciam o processo dinâmico de resolução de problemas, no qual o sujeito vai refinando sua compreensão e abordagem ao longo do caminho. Segundo POLYA (1995), existem dois objetivos que o professor pode ter ao propor uma pergunta ou sugerir uma lista aos seus alunos, "primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio". (POLYA, 1995, p. 2).

Dessa forma, POLYA (1995) destaca que, a fim de alcançar esses objetivos, é possível seguir algumas etapas, sendo elas: a compreensão do problema, a elaboração de um plano, a execução do plano e a revisão da solução.

A primeira etapa, compreender o problema, envolve ler cuidadosamente o enunciado, identificar informações importantes e compreender o que está sendo solicitado. Isso requer a habilidade de interpretar o problema, identificar os dados relevantes e formular perguntas claras. A etapa seguinte é elaborar um plano, onde os alunos devem desenvolver uma estratégia para resolver o problema. Isso pode envolver o uso de modelos visuais, criação de diagramas, identificação de padrões ou a aplicação de princípios matemáticos relevantes. A etapa de execução do plano consiste em implementar a estratégia escolhida, aplicar conceitos matemáticos e realizar cálculos necessários para chegar a uma solução. A última etapa é revisar a solução, onde os alunos devem refletir sobre o processo utilizado, verificar se a resposta faz sentido e considerar alternativas e generalizações possíveis. A revisão da solução incentiva os alunos a analisar criticamente seu trabalho, identificar erros e buscar melhorias.

A abordagem feita por POLYA (1995) enfatiza a importância do processo de resolução de problemas, incentivando os alunos a desenvolver habilidades de pensamento crítico, raciocínio lógico, criatividade e perseverança. Ao adotar essa perspectiva, os professores promovem uma postura ativa dos alunos em relação à matemática, permitindo que eles construam seu conhecimento e compreensão de forma significativa.

Dentro desse mesmo contexto, DANTE (2010) discute que as situações-problema são uma forma de desenvolver o poder de comunicação dos alunos, valorizando seus conhecimentos prévios e permitindo a exploração, organização e exposição de seus pensamentos, estabelecendo uma conexão entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da Matemática. Além disso, ele enfatiza a importância de tornar as aulas de Matemática atraentes e desafiadoras, promovendo o prazer de estudar Matemática por meio da satisfação que surge quando os alunos resolvem problemas por conta própria.

Portanto, ensino da matemática por meio da metodologia de resolução de problemas promove o engajamento dos alunos, estimula a curiosidade e a exploração, e desenvolve habilidades de resolução de problemas que são valiosas tanto dentro como fora da sala de aula. Os alunos aprendem a enfrentar desafios matemáticos com confiança, aplicando seus conhecimentos e habilidades em situações autênticas.

4. A OLIMPÍADA BRASILEIRA DAS ESCOLAS PÚBLICAS - OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional que é realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, e promovida pelo Ministério da Educação e Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações.

Foi criada em 2005 e destinava-se aos alunos da educação básica da escola pública, com o intuito de estimular o estudo da Matemática e evidenciar talentos. Em 2017, passou a aceitar inscrições de escolas particulares. Segundo o site da OBMEP, ela objetiva:

> - Estimular e promover o estudo da Matemática;
> - Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
> - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
> - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
> - Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
> - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (OBMEP, s.d.).

Atualmente a OBMEP é destinada a estudantes do 2º ao 9º ano do Ensino Fundamental e do primeiro ao terceiro ano do Ensino Médio. As avaliações são categorizadas por níveis, conforme a série dos estudantes, sendo organizadas da seguinte maneira:

- MIRIM 1: destinada aos alunos do 2º e 3º anos do Ensino Fundamental das escolas públicas e privada;
- MIRIM 2: destinada aos alunos do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental das escolas públicas e privada;
- Nível 1: destinada aos alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental das escolas públicas e privadas;
- Nível 2: destinada aos alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental das escolas públicas e privadas;
- Nível 3: destinada aos alunos de todos os anos do Ensino Médio das escolas públicas e privadas.

A Olimpíada Mirim acontece em sua 2ª edição, neste ano corrente de 2023, com a inclusão das escolas particulares. Essa proposta foi uma extensão da proposta que já existia desde 2018 que era o Nível A da OBMEP, que era uma prova em fase única e composta por questões objetivas. Atualmente, a Olimpíada Mirim é constituída de duas fases, ambas objetivas, já a OBMEP também é realizada em duas fases, sendo a primeira fase composta por questões objetivas e a segunda fase por questões discursivas.

4.1 ALGUNS PROGRAMAS DA OBMEP

Além da competição premiar os alunos com medalhas e certificados de Menção Honrosa, a OBMEP também oferece treinamentos e capacitações para professores, disponibiliza materiais didáticos gratuitos e promove o intercâmbio de conhecimentos e experiências entre alunos, professores e instituições de ensino. A seguir, destacamos algumas das ações que que são desenvolvidas.

4.1.1 Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)

O *Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)* é destinado a alunos medalhistas da OBMEP e objetiva despertar nos alunos o interesse pela Matemática e pelas Ciências Exatas, no programa os alunos são orientados por professores qualificados e treinam o rigor e a escrita de soluções e resultadas, se valendo de técnicas matemáticas.

4.1.2 Portal do Saber

No *Portal do Saber* é possível encontrar diversos materiais como vídeo aulas, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, material teórico e aplicativos interativos, relacionados as disciplinas de Matemática e Física, do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.

4.1.3 Banco de Questões e Provas Antigas

Os *Banco de Questões e Provas Antigas* são uma organização de material que visa o estudo e preparação dos alunos para realização da olimpíada. Na coletânea de Provas Antigas é possível explorar as provas, de todos os níveis e fases, de todas as edições. Nos Bancos de Questões são apresentados uma série de problemas similares aos das provas da OBMEP e estão organizados por níveis e por assuntos.

4.1.4 Portal Clubes de Matemática

O *Portal Clubes de Matemática* é um blog que disponibiliza semanalmente desafios matemáticos. Nele os estudantes podem organizar com amigos seus próprios clubes, participar de gincanas e competições, e discutir a com alunos de todo país sobre os desafios.

4.1.5 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

O *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)* é destinado a alunos do 8º ou 9 anos do Ensino Fundamental e todos os anos do Ensino Médio e objetiva a preparação dos mesmo para as provas da OBMEP e da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

4.1.6 Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)

O *Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)* oferece a oportunidade de realizar estudos em Matemática simultaneamente com a graduação aos alunos que já foram medalhistas nas Olimpíadas de Matemática, seja na OBMEP ou na OBM.

4.1.7 Programa OBMEP na Escola

O *Programa OBMEP na Escola* é destinado a professores de matemática das escolas públicas e objetiva habilitar e preparar os mesmo a desenvolverem atividades extraclasse com uso dos materiais da OBMEP.

4.2 A OBMEP E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os programas mencionados na seção anterior, além de fomentar a educação no país, abrem novas janelas e possibilidades para a vida dos alunos, promovendo aprendizagem e aprimorando o avanço nos estudos da Matemática. Diante disso, destaca-se a importância de discutir de maneira mais constante questões das OBMEP junto ao conteúdo do currículo nas escolas.

Na *homepage* da OBMEP, na área de perguntas frequentes, destaca-se o seu objetivo principal, que é “estimular o estudo da Matemática por meio da resolução de problemas que despertem o interesse e a curiosidade de professores e estudantes” (OBMEP, s.d.). Dessa forma, torna-se evidente que a OBMEP e seus programas visam melhorar o ensino público fazendo uso da Resolução de Problemas para aumentar o interesse e o aprendizado dos alunos. A perspectiva de Resolução de Problemas desempenha um papel fundamental na OBMEP, uma vez que a competição valoriza não apenas o conhecimento matemático dos alunos, mas também sua capacidade de enfrentar desafios e resolver problemas complexos. Ao adotar a perspectiva de resolução de problemas, os participantes são estimulados a pensar de forma criativa e crítica. Eles são desafiados a buscar diferentes abordagens, experimentar estratégias e desenvolver soluções inovadoras. Essas habilidades são valorizadas na competição, pois refletem a capacidade dos alunos de aplicar o conhecimento matemático de forma prática e contextualizada.

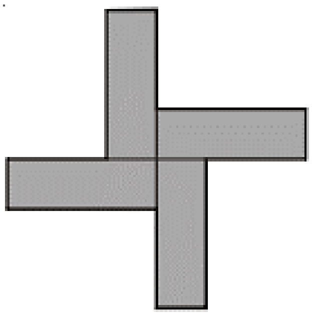
Ao longo de todas as edições da OBMEP, se produziu um extenso banco de questões com problemas curiosos e desafiadores, que estão disponíveis gratuitamente no endereço eletrônico da olimpíada a qualquer pessoa interessada. Com esse banco de questões é possível identificar problemas relacionados a diversos conteúdos trabalhados em sala de aula na educação básica e os explorar das mais variadas formas e níveis de aprofundamento, conforme o ano com o qual se está lecionando.

5. BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP

Com o propósito de elaborar um material de apoio ao professor de Matemática específico sobre o estudo de Perímetro e Área de figuras planas, que se encontra disponível nesta dissertação e no link: https://shre.ink/9tLY, foi realizado uma análise das provas da segunda fase do nível 1 da OBMEP, abrangendo os anos de 2005 a 2022[3]. O material utilizado para esta pesquisa foi encontrado no site da OBMEP, na parte de Material Didática, na aba de Provas e Soluções. Este capítulo apresentará todas essas questões acompanhadas de sua resolução oficial, indicando o número da questão e o ano em que ela apareceu na prova.

[3] Ressaltamos que durante o período de 2005 a 2022 não houve a realização da prova da OBMEP apenas no ano de 2020. A 16ª edição que iria acontecer no ano de 2020 precisou ser adiada devido a pandemia da COVID-19 e foi realizada no ano de 2021.

Questão 1 (nº 1 - 2005): Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de $3\,cm$ de comprimento por $1 cm$ de largura, formando a figura abaixo.



A) Qual é o perímetro da figura?

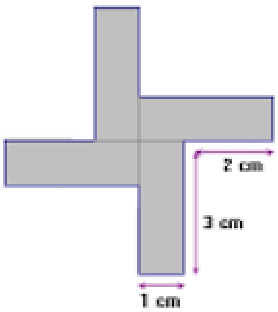
B) Qual é o menor número de retângulos de $3\ cm$ de comprimento por $1\ cm$ de largura que é necessário juntar a essa figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.

C) Qual é a área do quadrado obtido no item anterior?

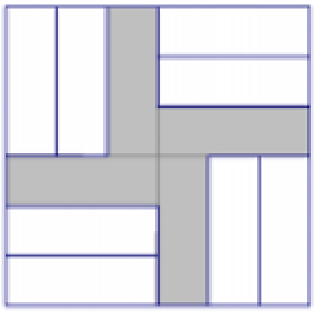
Solução:

A) *Solução 1:* Ao juntar os retângulos, cada um "perdeu" um lado de $1\ cm$ e mais $1\ cm$ em um lado de comprimento $3\ cm$, ou seja, $2\ cm$ no total. Como o perímetro de cada retângulo é $8\ cm$, o perímetro da figura é $4 \times 8 - 4 \times 2 = 24\ cm$.

Solução 2: A figura tem 4 lados de $3\,cm$, 4 lados de $2\,cm$ e 4 lados de $1\,cm$, logo seu perímetro é $4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 24\ cm$.

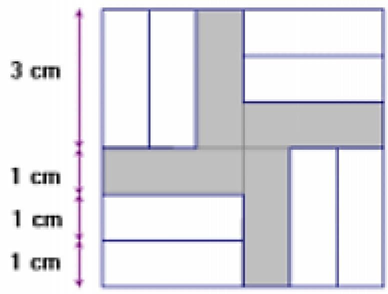


B) A resposta está na figura abaixo, onde vemos que basta juntar 8 retângulos à figura original para formar o quadrado.

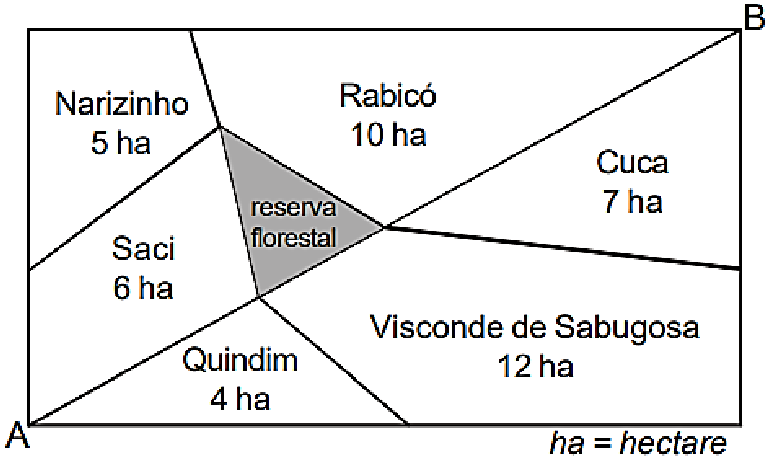


C) *Solução 1:* Cada retângulo tem área igual a $3 \times 1 = 3\ cm^2$. Como o quadrado é composto de 12 retângulos, a sua área é igual a $12 \times 3 = 36\ cm^2$.

Solução 2: Observando a figura, vemos que cada lado do quadrado tem comprimento igual a $3 \times 1 + 3 = 6\ cm$. Portanto, sua área é $6 \times 6 = 36\ cm^2$.



Questão 2 (nº 5 - 2005): Dona Benta dividiu o Sítio do Picapau Amarelo entre seis personagens, mantendo uma parte do Sítio como reserva florestal. A divisão está indicada na figura, onde a área de cada personagem é dada em hectares e a área sombreada é a reserva florestal. O Sítio tem formato retangular e AB é uma diagonal.



A) Qual é a área da reserva florestal?

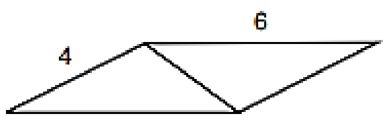
B) Para preparar os terrenos para o plantio, cada um dos seis personagens gastou uma quantia proporcional à área de seu terreno. O Quindim e a Cuca gastaram, juntos, $R\$\ 2420{,}00$. Quanto foi que o Saci gastou?

Solução:

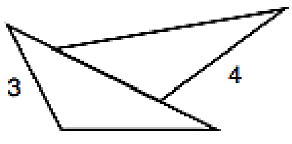
A) Um retângulo fica dividido em duas regiões de mesma área por sua diagonal. Logo os terrenos de Quindim, Visconde de Sabugosa e Cuca, juntos, têm área igual à metade da área do Sítio. Esses terrenos somam $4 + 7 + 12 = 23\ ha$. A outra metade do Sítio tem a mesma área e é igual à soma das áreas dos terrenos de Saci, Narizinho, Rabicó e da reserva florestal. Portanto $6 + 5 + 10 + (área\ da\ reserva) = 23\ ha$, ou seja, a área da reserva é igual a $23 - 21 = 2\ ha$.

B) Quindim e Cuca, juntos, possuem $4 + 7 = 11\ ha$. Assim, gastaram $\frac{2420}{11} = 220\ \ reais\ por\ ha$. Como o terreno de Saci tem $6\ ha$, ele gastou $6 \times 220 = 1320\ reais$.

Questão 3 (nº 1 - 2006): Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem $3\ cm$, $4\ cm$ e $6\ cm$. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.



I



II

A) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas figuras I e II?

B) Calcule os perímetros das figuras I e II.

C) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

Solução:

A) A solução desse item segue diretamente da observação das figuras. Na figura I, vemos que:

- As medidas de dois lados que <u>não</u> foram unidos são 4 cm e 6 cm;
- Os dois lados que foram unidos são do <u>mesmo</u> tamanho, logo eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm.

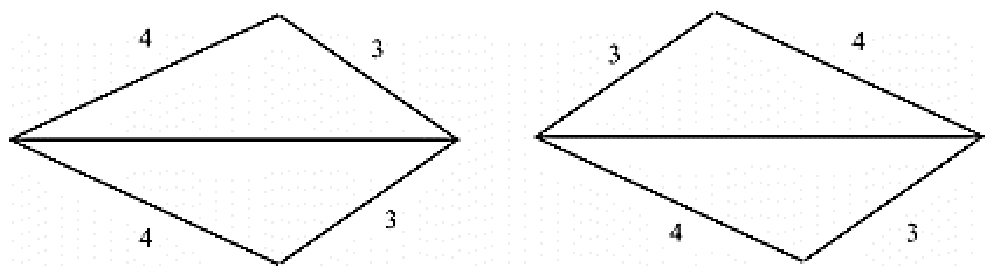
Portanto os lados que foram unidos só podem medir 3 cm.

Na figura II, vemos que o maior lado de um dos triângulos (que mede 6 cm) foi unido ao menor lado de outro triângulo (que mede 3 cm). Portanto, os lados unidos medem 6 cm e 3 cm.

B) A solução segue do item anterior, que fornece as medidas dos lados que não foram unidos. Logo,

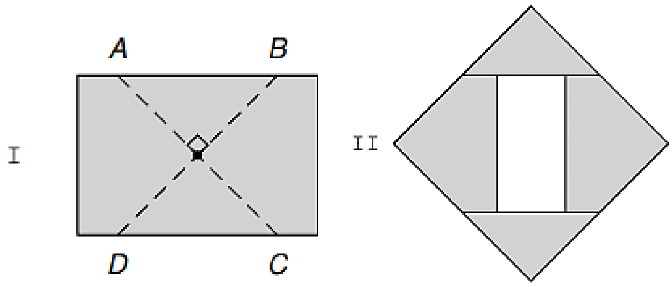
- O perímetro da figura I é $4 + 5 + 4 + 6 = 20\ cm$;
- O perímetro da figura II é $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20\ cm$. Foi subtraído 3 cm correspondente ao lado do triângulo que foi unido e não conta no perímetro da figura II.

C) Da maneira como Miguilim forma as figuras, ele conseguirá a de menor perímetro quando unir os lados maiores, isto é, os de 6 cm (já que eles não contarão no cálculo do perímetro). Veja abaixo as duas figuras que ele pode formar assim.



O perímetro de cada uma é $2 \times 3 + 2 \times 4 = 14\ cm$.

Questão 4 (nº 4 - 2006): Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I. Os segmentos AC e BD tem o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.



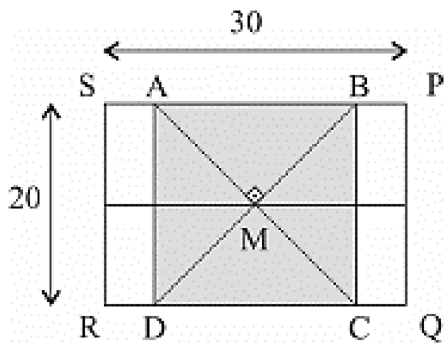
A) Qual é o comprimento do segmento AB?

B) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

C) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?

Solução:

A) Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$, e vamos considerar o quadrilátero $ABCD$ como na figura a seguir.



A ideia é verificar que $ABDC$ é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: $ABCD$ um quadrilátero cujas diagonais:

- São iguais (porque $AC = BD$);
- Se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo); e
- São perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como $ABCD$ é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20\ cm$.

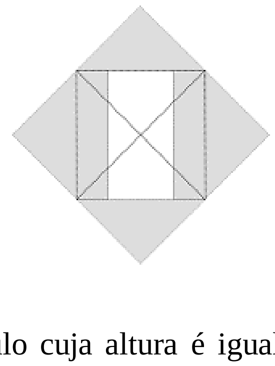
B) *Solução 1:* Sejam M o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos AMB, BMC, CMD e DMA é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado$ABCD$, que é $20 \times 20 = 400\ cm^2$; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100\ cm^2$.

A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600\ cm^2$; se subtrairmos dessa área as áreas de dois pedaços triangulares ABM e DMC, restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a $\frac{(600-2\times100)}{2} = \frac{(600-200)}{2} = \frac{400}{2} = 200\ cm^2$.

Solução 2: Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo.

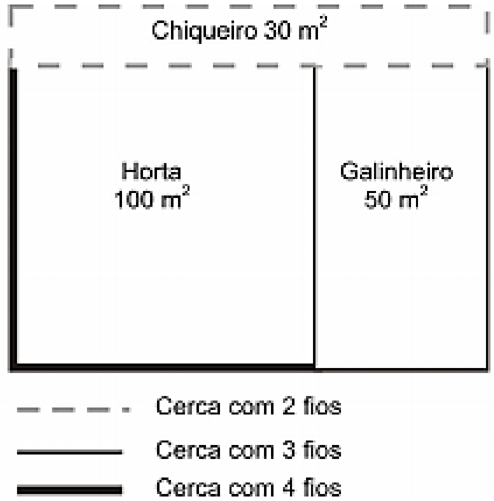
Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura $20\ cm$ e largura igual a $\frac{(30-10)}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$. Como a área de cada triângulo é $100\ cm^2$ e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100\ cm^2$, concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200\ cm^2$.

C) *Solução 1:* O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800\ cm^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual a área da folha original, ou seja $600\ cm^2$, concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200\ cm^2$.



Solução 2: O buraco é um retângulo cuja altura é igual a altura da folha original, ou seja, $20\ cm$. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB, ou seja, $30 - 20 = 10\ cm$. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200\ cm^2$.

Questão 5 (nº 1 - 2007): João Grilo tem um terreno retangular onde há um galinheiro e um chiqueiro retangulares e uma horta quadrada, cujas áreas estão indicadas na figura.



A) Qual é a área do terreno do João Grilo?

B) Quais são as medidas dos lados do galinheiro?

C) João Grilo cercou a horta, o galinheiro e o chiqueiro com cercas feitas com diferentes números de fios de arame, como indicado na figura. Quantos metros de arame ele usou?

Solução:

A) A área do terreno do João Grilo é igual à soma das áreas da horta, do galinheiro e do chiqueiro, ou seja, é igual a $30 + 100 + 50 = 180\ m^2$.

B) A área de um quadrado de lado a é a^2 e a área de um retângulo de lados a e b é ab. Como a horta é quadrada e tem $100\ m^2$ de área, concluímos que cada lado da horta mede $10\ m$, pois $100 = 10^2$. Assim, o lado comum do galinheiro e da horta mede $10\ m$. Como a área do galinheiro é igual a $50\ m^2$, a medida de outro lado é $5\ m$, pois $10 \times 5 = 50$. Logo as medidas dos lados do galinheiro são $10\ m$ e $5\ m$.

C) O chiqueiro tem um lado formado por um lado da horta e um dos lados menores do galinheiro. Logo esse lado mede $10 + 5 = 15\ m$; como a área do chiqueiro é $30\ m^2$, a medida de outro lado é $2\,m$, pois $15 \times 2 = 30\,m$. Observando a planta e a legenda indicando o número de fios de cada um dos lados cercados, concluímos que João Grilo usou:

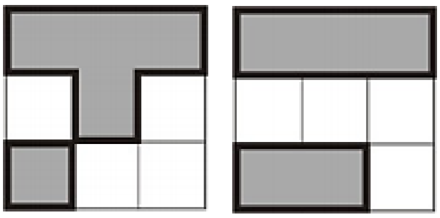
Lados em traço grosso: $2 \times 4 \times 10 = 80\,m$

Lados em traço fino: $2 \times 3 \times 10 + 1 \times 3 \times 5 = 60 + 15 = 75\,m$

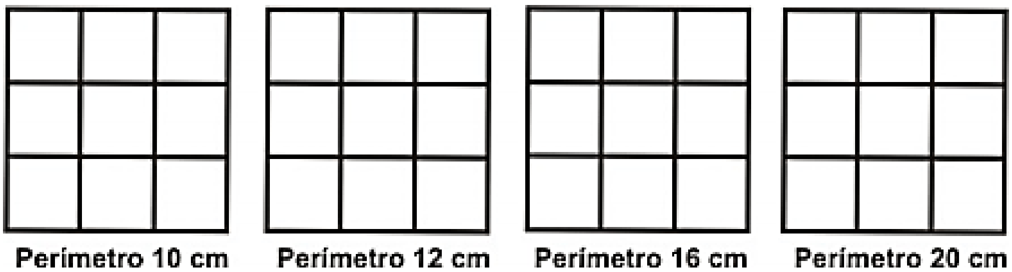
Lados em pontilhado: $2 \times 2 \times (2 + 15) = 68\,m$

Totalizando: $80 + 75 + 68 = 223\,metros\ de\ arame$

Questão 6 (nº 3 - 2007): Em um tabuleiro quadrado, dividido em nove quadradinhos com lados de 1 cm, podemos fazer várias figuras pintando exatamente cinco desses quadradinhos de cinza. Dizemos que o perímetro de uma dessas figuras é o comprimento do seu contorno. Por exemplo, o perímetro das duas figuras abaixo é 14 cm.



A) Desenhe figuras formadas por cinco quadradinhos e com os perímetros indicados.

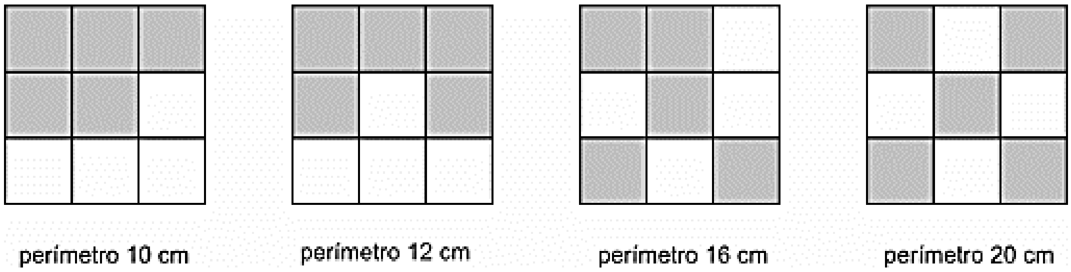


B) Explique por que o maior perímetro possível de uma figura formada por cinco quadradinhos é 20 cm.

C) Explique por que o perímetro de qualquer figura formada por cinco quadradinhos é um número par de centímetros.

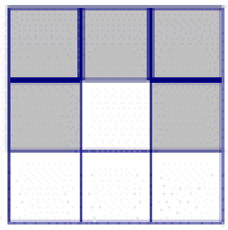
Solução:

A) Mostramos a seguir uma figura para cada perímetro. Há várias possibilidades para os três primeiros casos, mas a de perímetro 20 cm é a única.



B) Cada quadradinho tem perímetro 4 cm. A soma dos perímetros de 5 quadradinhos é igual a $4 \times 5 = 20\ cm$, logo o perímetro de uma figura não pode ser maior que 20 cm. Como o item anterior mostra que há uma figura de perímetro 20 cm, segue que o perímetro máximo de uma figura é 20 cm.

C) *Solução 1:* Cinco quadradinhos sem lados comuns têm um perímetro total de $5 \times 4 = 20\ cm$. Cada lado comum entre dois quadradinhos subtrai 2 cm desse total, pois esses dois lados (um de cada quadradinho) não são mais contados no cálculo do perímetro. Por exemplo, na figura abaixo existem quatro lados comuns a dois quadrados (marcados em traço mais grosso), logo seu perímetro é $20 - 4 \times 2 = 12\ cm$.



Em geral, o perímetro de uma figura formada por 5 quadradinhos é $20 - 2 \times (número\ de\ lados\ comuns\ entre\ os\ quadradinhos)\ cm$. Esse número é a diferença entre dois números pares, logo é par.

Solução 2: Essa solução é parecida com a primeira, só que aqui construímos uma figura quadradinho a quadradinho. O primeiro quadradinho tem perímetro 4 cm. Ao adicionar o segundo quadradinho o perímetro passa a ser:

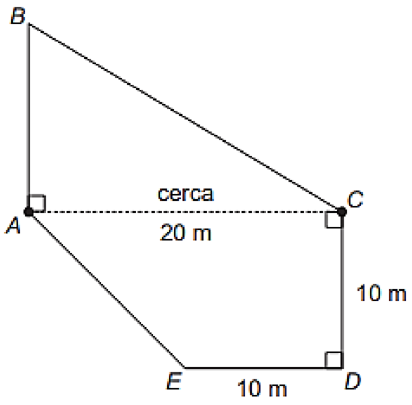
- $8 - 2 \times (número\ de\ lados\ comuns\ entre\ os\ quadradinhos)\ cm$ que é um número par.

Ao adicionar o terceiro quadradinho o perímetro passa a ser:

- $12 - 2 \times (número\ de\ lados\ comuns\ entre\ os\ quadradinhos)\ cm$ que também é um número par, e assim por diante até chegarmos aos cinco quadradinhos.

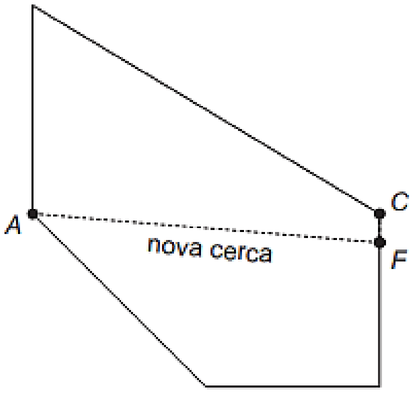
Questão 7 (nº 2 - 2008):

A figura ao lado representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a $120\ m^2$.



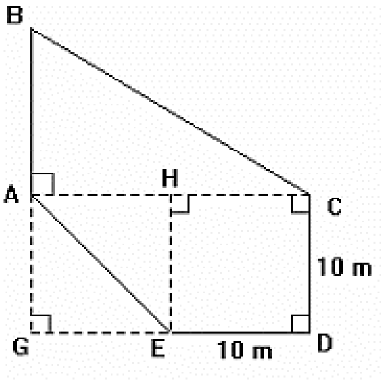
A) Qual é a área total do terreno?

B) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



Solução:

A) *Solução 1:* A figura abaixo mostra como decompor a região $ACDE$ em um quadrado $CDEH$ e um triângulo AGE.



Como $CD = DE = 10$ e $AC = 20$, segue que $AG = 10$. Logo a área do triângulo AGE é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é:

$$\frac{AG \times GE}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50\, m^2$$

Como a área do quadrado $CDEH$ é $10^2 = 100\, m^2$, concluímos que a área da região $ACDE$ é $100 + 50 = 150\, m^2$.

Alternativamente, podemos calcular a área de $ACDE$ como a diferença entre as áreas do retângulo $ACDG$ e do triângulo AHE, ou seja,

$$20 \times 10 - \frac{10 \times 10}{2} = 150\, m^2$$

Solução 2: Podemos calcular a área do trapézio retângulo $ACDE$ pela fórmula usual

$$\frac{(AC + DE) \times CD}{2} = \frac{(20 + 10) \times 10}{2} = 150\, m^2$$

A área total do terreno é então

$$área(ACDE) + área(ABC) = 150 + 120 = 270\, m^2$$

B) *Solução 1:* Como o terreno tem $270\ m^2$, ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de $\frac{270}{2} = 135\ m^2$.

Desse modo, devemos ter

$$135 = área(ABCF) = área(ABC) + área(ACF) = 120 + área(ACF)$$

e vemos que $área(ACF)\ =\ 15\ m^2$. Por outro lado, a área do triângulo ACF é

$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF$$

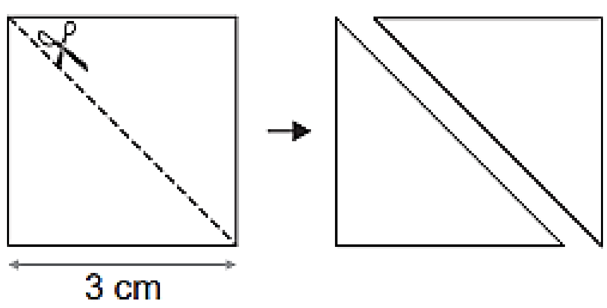
Portanto $10\ x\ CF\ =\ 15$ e logo $CF\ =\ 1{,}5\ m$.

Solução 2: Como o terreno tem $270\ m^2$, ao dividi-lo nas partes de mesma área $ABCF$ e $AFDE$, cada parte terá área de $135\ m^2$. Notamos que $ABCF$ é um trapézio de bases AB e CF e de altura $AC = 20$; logo

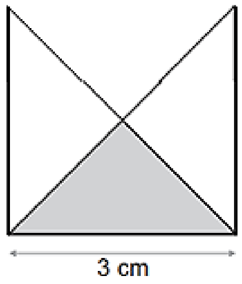
$$135 = área(ABCF) = \frac{(12 + CF) \times 20}{2} = 120 + 10 \times CF$$

e segue que $CF = 1{,}5$.

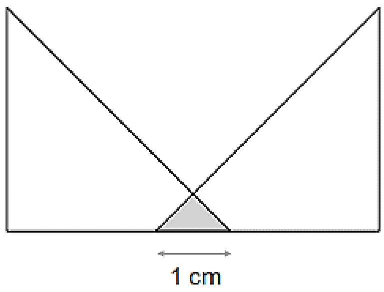
Questão 8 (nº 2 - 2009): Um quadrado de lado 3 cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos, como na figura. Com esses triângulos formamos as figuras dos itens (A), (B) e (C), nas quais destacamos, em cinza, a região em que um triângulo fica sobre o outro. Em cada item, calcule a área da região cinza.



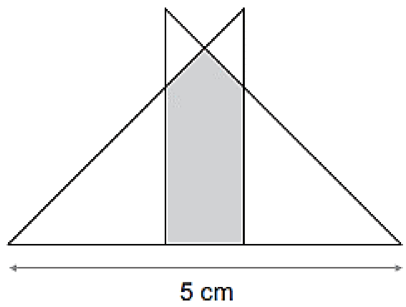
A)



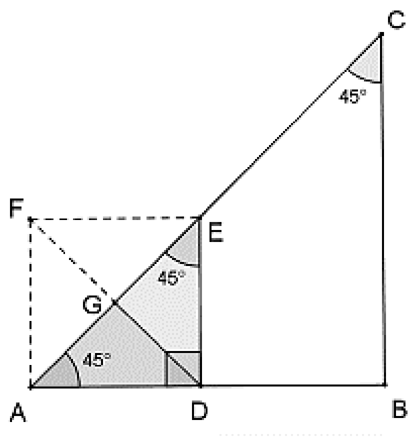
B)



C)

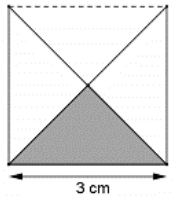


Solução: O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado abaixo.



O triângulo ABC é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado e D é um ponto qualquer no lado AB, com DE perpendicular a AB. O triângulo ADE também é retângulo com dois lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado $ADEF$; a área do triângulo ADG é então igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ADEF$.

A) O argumento acima mostra que a região cinza tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3 cm, ou seja,

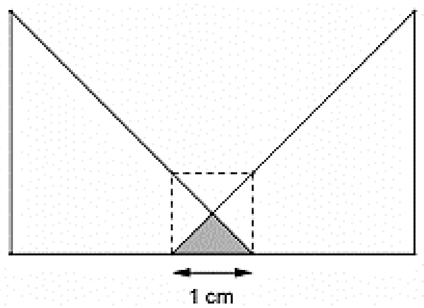


$$\frac{1}{4} \times 3^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25\ cm^2$$

Podemos também usar a fórmula da área de um triângulo. A altura relativa ao lado de 3 cm mede a metade do lado do quadrado, ou seja, $\frac{3}{2}$ cm. A área da região cinza é então

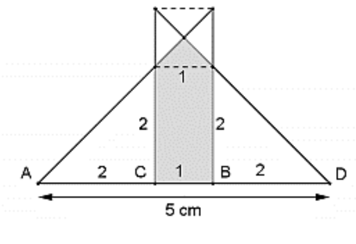
$$área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{3 \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}\ cm^2$$

B) Aqui a área da região cinza é $\frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25\ cm^2$. Alternativamente, podemos usar a fórmula para a área de um triângulo para obter



$$área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}\ cm^2$$

C) *Solução 1:* Como $AB = CD = 3\ cm$ e $AD = 5\ cm$, vemos que $BC = 1\ cm$, e podemos então marcar os comprimentos indicados na figura. A região cinza é a união de um retângulo de base 1 cm e altura 2 cm com um triângulo cuja área já foi calculada no item anterior. Logo a área da região cinza é



$$1 \times 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\ cm^2$$

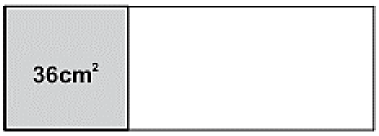
Solução 2: A região cinza é um retângulo de base 1 e altura 3 da qual se retiram três triângulos, cada um com área igual a $\frac{1}{4}$ da área de um quadrado de lado 1. A área procurada é então

$$3 \times 1 - 3 \times \frac{1}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\ cm^2$$

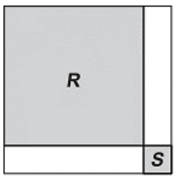
Questão 9 (nº 3 - 2010): A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro-negro, todas com área igual a $108\ cm^2$.

A) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento $12\ cm$. Qual é o perímetro desse triângulo?

B) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinza de área igual a $36\ cm^2$, como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?



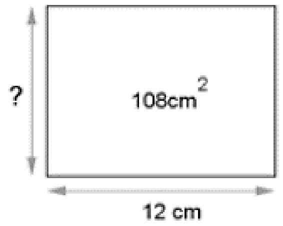
C) A terceira figura é um quadrado, ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinza R e S, como na figura. O perímetro de um dos retângulos é igual a três vezes o perímetro do quadrado S. Qual é a área do quadrado R?



Solução:

Para orientar a solução, lembramos que a área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes; em particular, a área de um quadrado é igual ao quadrado de seu lado.

A) *Solução 1:* Como a área do retângulo é $108\ cm^2$ e um lado mede $12\ cm$, o comprimento do lado adjacente, indicado por ? na figura abaixo, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108, ou seja, é $\frac{108}{12} = 9$.

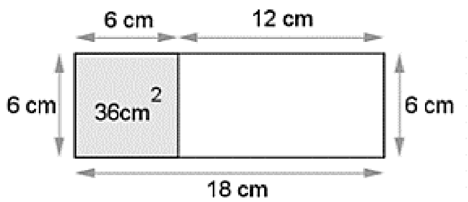


Assim, o perímetro do retângulo é $12 + 12 + 9 + 9 = 42\ cm$.

Solução 2 (algébrica): Seja x o comprimento do lado indicado por ? na figura acima. Então $12x = 108$ e, como antes, temos $x = \frac{108}{12} = 9$; o cálculo do perímetro é idêntico ao feito acima.

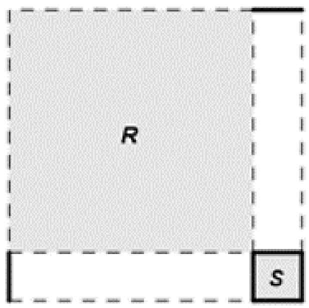
B) *Solução 1:* Como o quadrado cinza tem área igual a $36\ cm^2$, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual $6\ cm$. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento $6\ cm$; como sua área é $108\ cm^2$, segue que seu outro lado mede $\frac{108}{6} = 18\ cm$. Logo um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro mede $18 - 6 = 12\ cm$, e assim seu perímetro $12 + 12 + 6 + 6 = 36\ cm$.

Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é $108 - 36 = 72\ cm^2$; como um de seus lados mede $6\ cm$, o outro mede então $\frac{72}{6} = 12\ cm$; o restante da solução segue como acima.



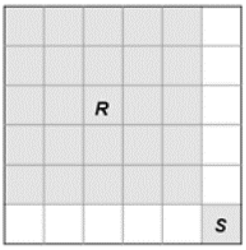
Solução 2 (algébrica): O lado do quadrado, que mede $6\ cm$, é um lado do retângulo branco e do retângulo maior. Seja x o outro lado do retângulo branco; então o outro lado do retângulo maior tem comprimento $x + 6\ cm$. Como sua área é $108\ cm^2$, segue que $6(x + 6) = 108$, ou seja, $6x + 36 = 108$. Logo $6x\ = 108 - 36 = 72$ e segue que $x = \frac{72}{6} = 12$. O cálculo do perímetro do retângulo branco segue como acima.

C) *Solução 1:* Na figura abaixo marcamos os lados do quadrado R em pontilhado e os lados do quadrado S em traço mais grosso.



Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como "grosso", e do mesmo modo para "pontilhado". O perímetro do quadrado S é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um desses retângulos é igual a três vezes o perímetro de S, isto é, igual a doze grossos. Logo os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.

Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ quadradinhos iguais ao quadrado S, como na figura ao lado. Como a área do quadrado maior é igual a $108\ cm^2$, a área de um desses quadradinhos é igual a $\frac{108}{36} = 3\ cm^2$. Finalmente, o quadrado R consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área é igual a $25 \times 3 = 75\ cm^2$.



Solução 2 (algébrica): Primeiro argumentamos, como acima, que os retângulos brancos são iguais. Seja agora x o lado do quadrado S (grosso) e y o lado do quadrado R (pontilhado). O perímetro de S é então $4x$ e o de um retângulo branco é $2x + 2y$; o enunciado nos diz que $2x + 2y = 3 \times 4x = 12x$, donde $2y = 10x$ e então $y = 5x$. Logo o lado do quadrado grande mede $x + 5x = 6x$; como sua área é $108\ cm^2$ temos $108 = 6x \times 6x = 36x^2$, donde $x^2 = 3$. A área de R é então $y^2 = (5x)^2 = 25x^2 = 25 \times 3 = 75\ cm^2$.

Questão 10 (nº 5 - 2010): Marcelo cortou um quadrado de $6\,cm$ de lado em duas partes, como na Figura 1. O corte foi feito em formato de escada, com segmentos de $1\ cm$ paralelos aos lados do quadrado.

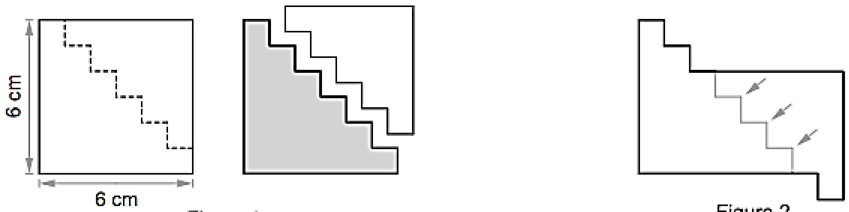


Figura 1 Figura 2

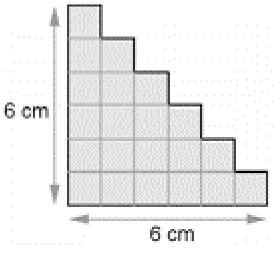
A) Calcule o perímetro e a área da parte cinza na Figura 1.

B) A Figura 2 foi montada por Marcelo encaixando completamente três degraus (indicados com flechas) de uma das partes na outra parte. Calcule o perímetro e a área dessa figura.

C) Marcelo cortou da mesma maneira um quadrado de $87\ cm$ de lado e montou uma figura encaixando 39 degraus de uma das partes na outra. Calcule o perímetro dessa nova figura.

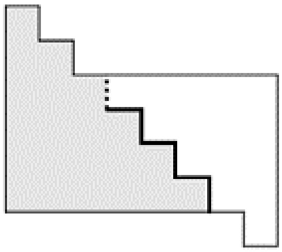
Solução:

A) Abaixo vemos que a figura cinzenta tem como contorno um segmento horizontal de $6\ cm$, um segmento vertical de $6\ cm$, seis segmentos horizontais de $1\ cm$ e seis segmentos verticais de $1\ cm$; logo seu perímetro é $6 + 6 + 6 \times 1 + 6 \times 1 = 4 \times 6 = 24\ cm$. Vemos também que ela pode ser decomposta em $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ quadradinhos de área 1; logo sua área é $21\ cm^2$.

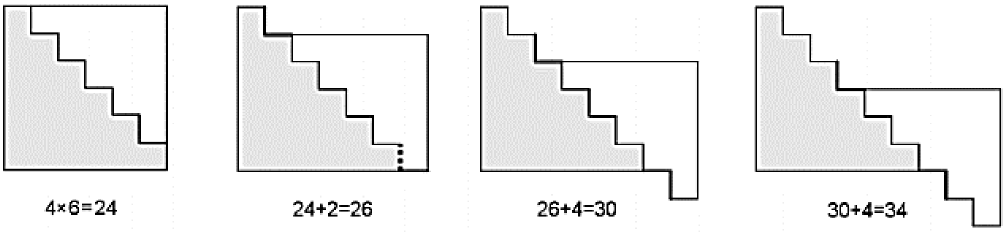


B) A área da figura é a soma das áreas das partes branca e cinzenta. Como essas duas partes formam o quadrado original, sua área total é $6 \times 6 = 36\ cm^2$. Para o perímetro, vamos oferecer duas soluções distintas, observando que ele também pode ser calculado diretamente por observação da figura.

Solução 1: O perímetro da parte cinza é $4 \times 6 = 24\ cm$ e o da parte branca é $4 \times 5 = 20\ cm$; separadamente, essas peças teriam um perímetro total de $20 + 24 = 44\ cm$. Ao encaixar as peças como no enunciado, elas passam a ter em comum dois segmentos em cada degrau encaixado, que indicamos com traço mais grosso, e um segmento indicado em pontilhado; o número de segmentos comuns é então $2 \times 3 + 1 = 7$. Para cada segmento comum "perdemos" $2\ cm$ do perímetro total, num total de $2 \times 7 = 14\ cm$. Logo o perímetro da figura é $44 - 14 = 30\ cm$.



Solução 2: Vamos considerar a sequência de figuras abaixo.



O perímetro do quadrado original é $4 \times 6 = 24\ cm$. Na segunda figura, descemos um degrau, "ganhamos" os segmentos em traço mais grosso e "perdemos" o segmento pontilhado. Assim, o perímetro aumentou de $3 - 1 = 2\ cm$ e passou a ser $24 + 2 = 26\ cm$. Após isso, ao descer um degrau sempre "ganhamos" os quatro segmentos em traço mais grosso, ou seja, o perímetro aumenta $4\ cm$ a cada degrau descido depois do primeiro; em particular, a terceira figura tem perímetro $30\ cm$, que é a resposta correta a esse item. Observamos também que ao descer o primeiro degrau o número de degraus encaixados continua o mesmo e, após isso, diminui de um a cada degrau descido. Nossas observações podem ser resumidas na tabela abaixo:

degraus "descidos"	degraus encaixados	perímetro	aumento no perímetro
0	4	24	
1	4	26	2
2	3	30	4
3	2	34	4

A observação dessa tabela nos mostra que, se o número de degraus descidos for maior que 0, temos

$$degraus\ encaixados\ +\ degraus\ descidos\ =\ 5$$

$$perímetro\ =\ 22\ +\ 4\ \times\ (número\ de\ degraus\ descidos)$$

C) *Solução 1:* Quando o comprimento do lado é $87\ cm$, a parte cinza tem perímetro igual a $4 \times 87 = 348\ cm$ e a parte branca tem perímetro $4 \times 86 = 344\ cm$, num total de $348 + 344 = 692\ cm$. O mesmo raciocínio da 1ª solução do item anterior mostra que o perímetro da figura obtida encaixando 39 degraus é então $692 - 2 \times (2 \times 39 + 1) = 534\ cm$.

Solução 2: De acordo com a 2ª solução do item anterior, temos

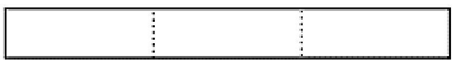
$$degraus\ encaixados\ +\ degraus\ descidos\ =\ 86$$

$$perímetro\ =\ 346\ +\ 4\ \times\ (número\ de\ degraus\ descidos)$$

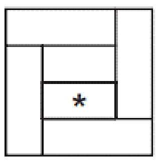
Como o número de degraus encaixados é 39, o número de degraus "descidos" é $86 - 39 = 47$ e o perímetro da figura é $346 + 4 \times 47 = 534\ cm$.

Questão 11 (nº 3 - 2011): Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

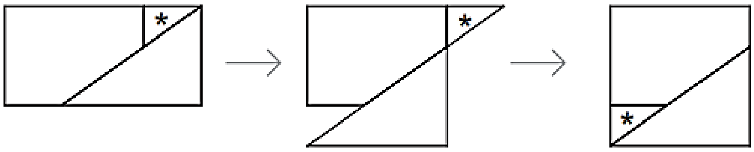
A) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de $36\ cm^2$ de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.



B) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de $36\ cm^2$ de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com $*$.

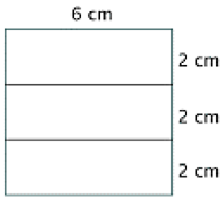


C) As medidas da terceira tira eram $4{,}5\ cm$ e $2\ cm$. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com $*$?

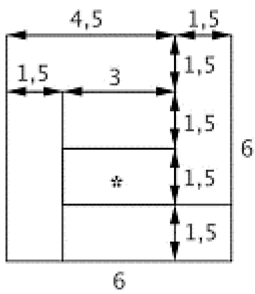


Solução:

A) Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área $36\ cm^2$, seu lado mede $6\ cm$. Logo o comprimento dos retângulos é $6\ cm$ e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, $2\ cm$.

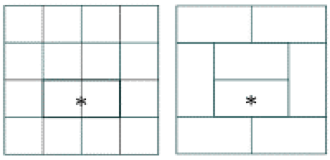


B) *Solução 1:* Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados da segunda tira mede $6\ cm$. Como todos os retângulos têm a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, $1{,}5\ cm$. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são $3\ cm$ e $1{,}5\ cm$; logo seu perímetro é $1{,}5 + 1{,}5 + 3 + 3 + 9 = 9\ cm$ e sua área é $1{,}5 \times 3\ =\ 4{,}5\ cm^2$.

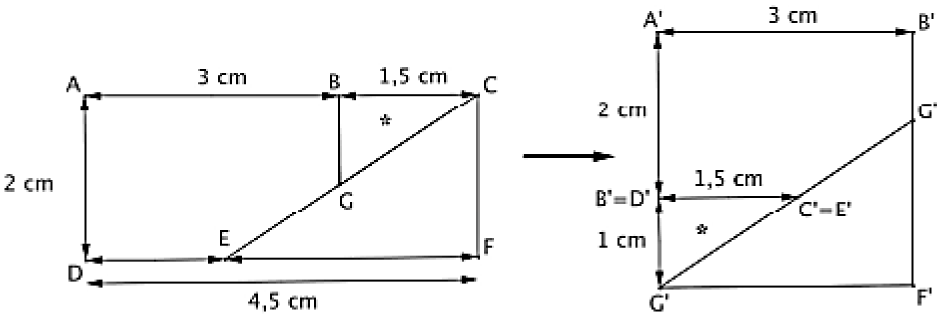


Solução 2: O quadrado pode ser decomposto em 16 quadradinhos de lado igual à largura da fita, como na figura à direita. Como o lado do quadrado mede $6\ cm$, o lado de cada quadradinho mede $1{,}5\ cm$. Logo os lados do retângulo destacado medem $1{,}5\ cm$ e $3\ cm$ e, como acima, seu perímetro é $9\ cm$ e sua área é $4{,}5\ cm^2$. Alternativamente, o quadrado pode

ser decomposto em 8 retângulos congruentes ao retângulo destacado, conforme figura à esquerda. Como a área do quadrado é $36\ cm^2$, a área do retângulo destacado é $\frac{36}{8} = 4{,}5\ cm^2$.

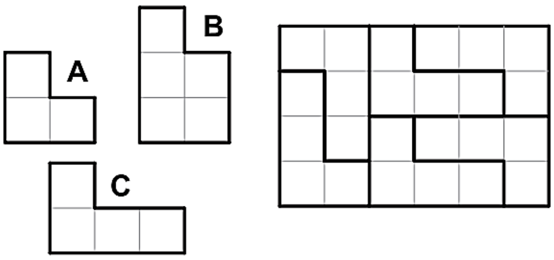


C) Na figura abaixo mostramos o retângulo e o quadrado, com pontos correspondentes indicados com a mesma letra; por exemplo, o segmento AB à esquerda corresponde ao segmento $A'B'$ à direita. A área do retângulo é $2 \times 4{,}5 = 9\ cm^2$, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm.

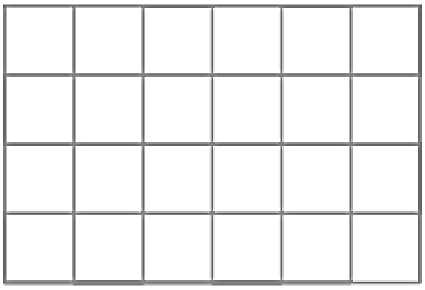


Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $B'F'$ medem 3 cm e assim AB mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede 4,5 cm, segue que BC mede $4{,}5 - 3 = 1{,}5\ cm$, que é então a medida de $B'C'$. Finalmente, a medida de $A'B'$ é a mesma que a de AD, que é 2 cm; logo a medida de $B'C'$ é $3 - 2 = 1\ cm$. Assim, obtemos as medidas $BG = 1\ cm$ e $BC = 1{,}5\ cm$ dos catetos do triângulo retângulo BCG, cuja área é então $\frac{1}{2} \times 1 \times 1{,}5 = 0{,}75\ cm^2$.

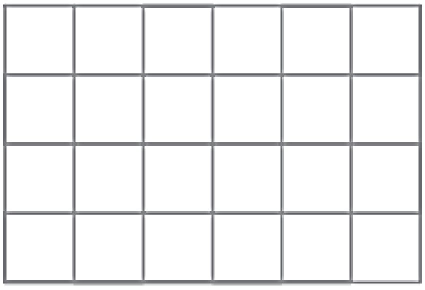
Questão 12 (nº 1 - 2012): Pedro brinca com um tabuleiro quadriculado 4×6 e com peças dos tipos A, B e C. Ele tenta cobrir inteiramente o tabuleiro com as peças, encaixando-as sem que nenhuma fique sobre outra. Por exemplo, usando somente peças do tipo C, ele consegue cobrir o tabuleiro, como indicado na figura.



A) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A.

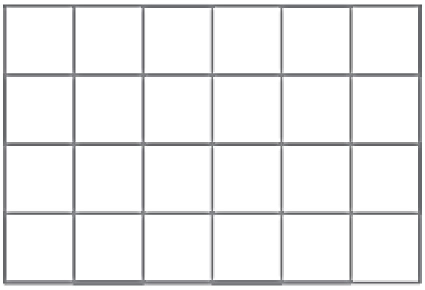


Faça seu rascunho aqui

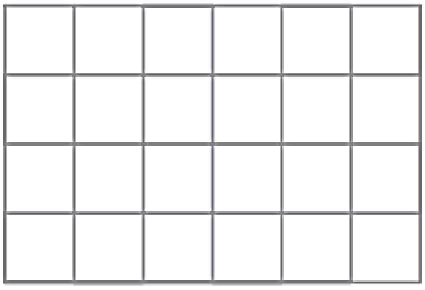


Coloque sua resposta aqui

B) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, usando uma ou mais peças do tipo B.



Faça seu rascunho aqui

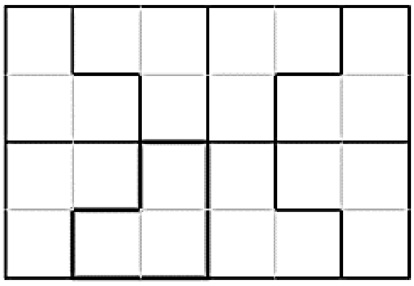


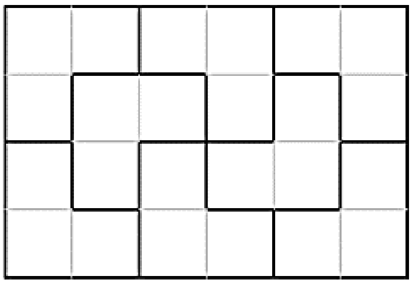
Coloque sua resposta aqui

C) Explique por que não é possível cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo B.

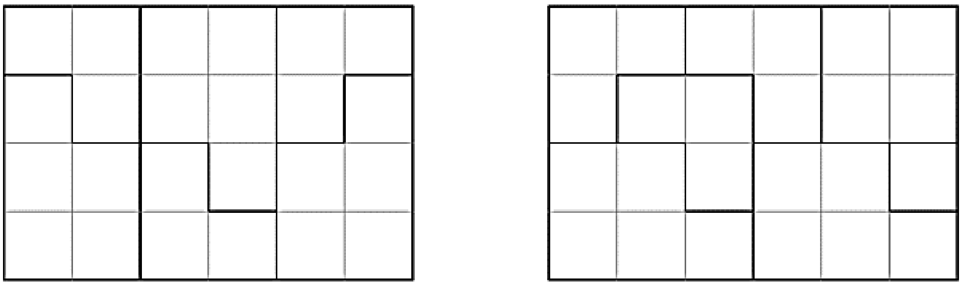
Solução:

A) Há várias formas de se cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A; a figura mostra duas delas.





B) Há várias formas de se cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, com pelo menos uma do tipo B, a figura a seguir mostra duas delas.



C) Há $4 \times 6 = 24$ casas no tabuleiro. Cada peça do tipo B cobre 5 casas; como as peças devem ser colocadas sem sobreposição, o número de casas cobertas por uma peça do tipo B é 5, por duas peças é 10, por três peças é 15, por 4 peças é 20, menos que 24, e por cinco peças é 25, que já passa de 24. Logo não é possível cobrir o tabuleiro com peças do tipo B. Esse argumento pode ser resumido dizendo que, como as peças são colocadas sem sobreposição, o número de casas cobertas por peças do tipo B é um múltiplo de 5; como 24 não é múltiplo de 5 (por verificação direta ou escrevendo $24 = 4 \times 5 + 4$), a conclusão segue.

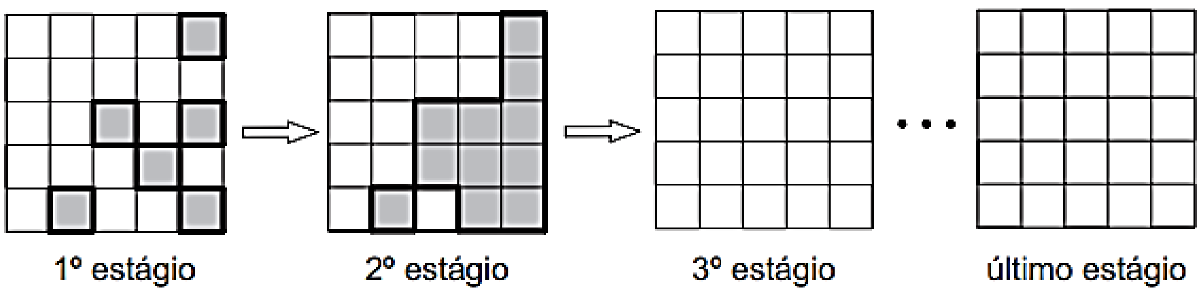
Questão 13 (nº 6 - 2012): Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

• quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;

• um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;

• a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

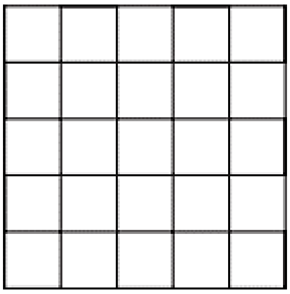
A) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são $24\,cm$ e $20\,cm$, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item **a**.

B) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item **a**.

C) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



D) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

E) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Solução:

A) A figura I indica, com o número 3, os quadrados contaminados no terceiro estágio e apresenta o resultado da contaminação ao final deste estágio.

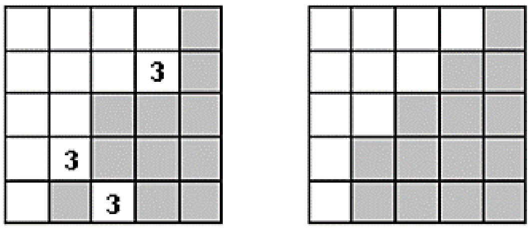


Figura I

B) A figura II indica os quadrados contaminados em cada estágio subsequente e mostra o último estágio da contaminação.

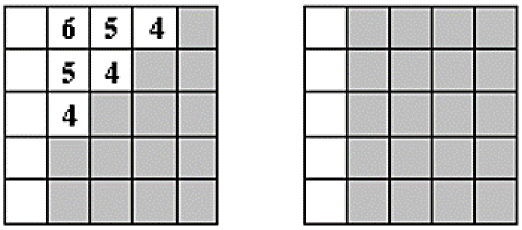


Figura II

C) Os perímetros de contaminação no terceiro e no último estágios, destacados na figura III, são ambos iguais a 18 (correspondentes a 8 lados horizontais e 10 lados verticais de quadrados).

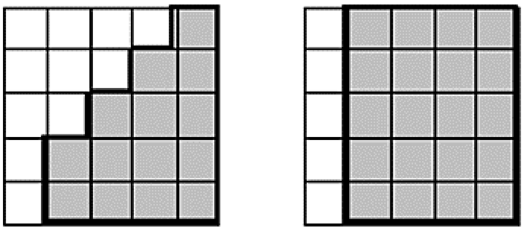


Figura III

D) Há várias configurações com 5 quadradinhos que levam à completa contaminação; a mais simples é a formada por 5 quadradinhos em uma diagonal.

E) Ao se acrescentar um quadrado à contaminação, cada lado exposto (ou seja, não em contato com outros quadrados) faz o perímetro de contaminação aumentar de uma unidade, enquanto cada lado em contato faz o perímetro diminuir de uma unidade. Portanto, a variação do perímetro de contaminação é igual à diferença entre o número de lados expostos e o número de lados em contato. Como um quadrado deve ter pelo menos dois lados em contato com outros quadrados para ser contaminado, esta diferença é sempre menor ou igual a zero. A tabela abaixo mostra os três casos possíveis:

lados em contato	lados expostos	variação do perímetro
2	2	$2 - 2 = 0$
3	1	$1 - 3 = -2$
4	0	$0 - 4 = -4$

Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a $4 \times 5 = 20$. Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com n quadrados é no máximo igual a $4n$, que ocorre quando os n quadrados não têm lados em comum. Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que $4n$ seja no mínimo igual a 20; ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.

Questão 14 (nº 4 - 2013): Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado $3\ cm$, quadrados azuis de lado $4\ cm$ e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem $3\ cm$ e $4\ cm$, como mostrado a figura I. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono na figura II.

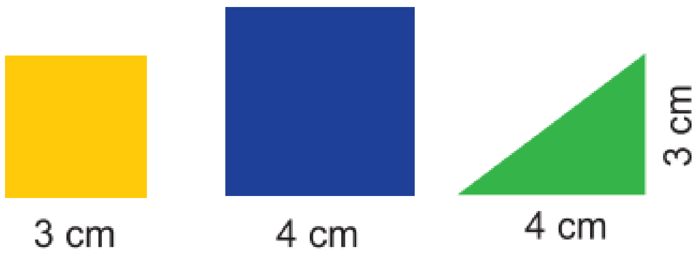
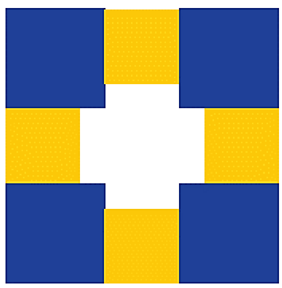


Figura I

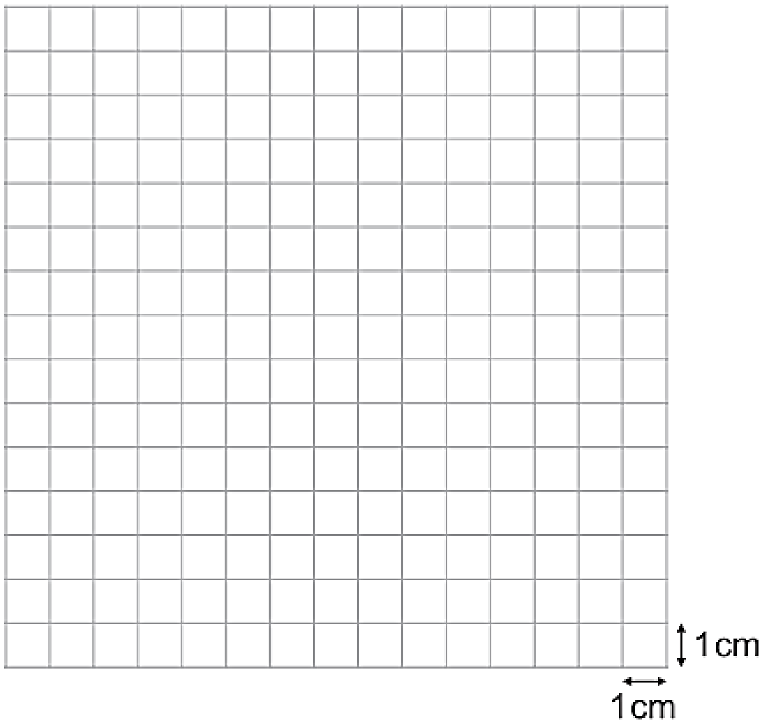
Figura II

A) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

B) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?



C) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.



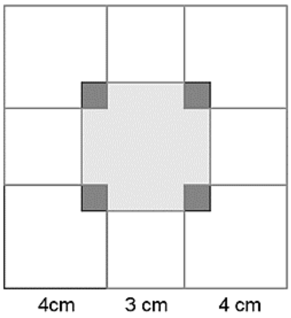
D) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

Solução:

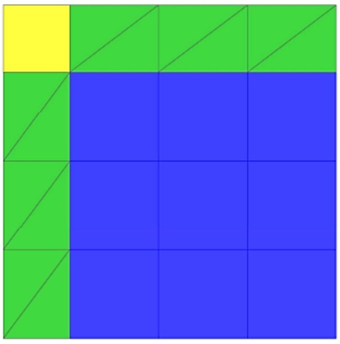
Cada uma das peças amarelas tem área $3 \times 3 = 9\ cm^2$, as azuis têm $4 \times 4 = 16\ cm^2$ e as verdes têm $\frac{3\times4}{2} = 6\ cm^2$.

A) O hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2 \times 6 + 9 + 16 = 37\ cm^2$.

B) A figura construída forma um quadrado de lado $4 + 3 + 4 = 11\ cm$, cuja área é $11 \times 11 = 121\ cm^2$. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4 \times 9 + 4 \times 16 = 100\ cm^2$. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121 - 100 = 21\ cm^2$. Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de $5\ cm$ de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado $1\ cm$ (em cinza escuro); sua área é então $5 \times 5 - 4 \times 1 \times 1 = 21\ cm^2$.

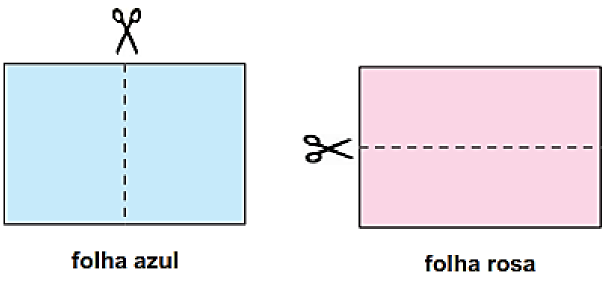


C) Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15, como pedido, é mostrado na figura abaixo.

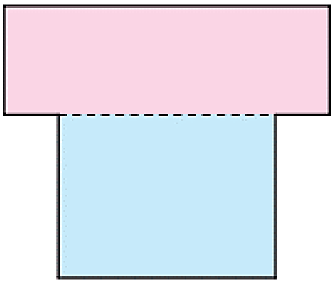


D) Um quadrado de lado $15\ cm$ tem $15 \times 15 = 225\ cm^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área $16\ cm^2$ e a verde tem área $6\ cm^2$, ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado $15\ cm$ apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado $15\ cm$ com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

Questão 15 (nº 2 - 2014): Lucinha tem duas folhas retangulares, uma azul e outra rosa, ambas com $8\ cm$ de largura e $12\ cm$ de comprimento. Ela cortou as duas folhas ao meio, conforme indicado na figura.

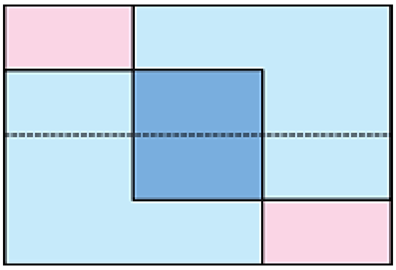


A) Lucinha pegou uma metade de cada folha e fez coincidir os lados maiores desses pedaços, formando a figura abaixo, parecida com a letra T. Qual é o perímetro dessa figura?



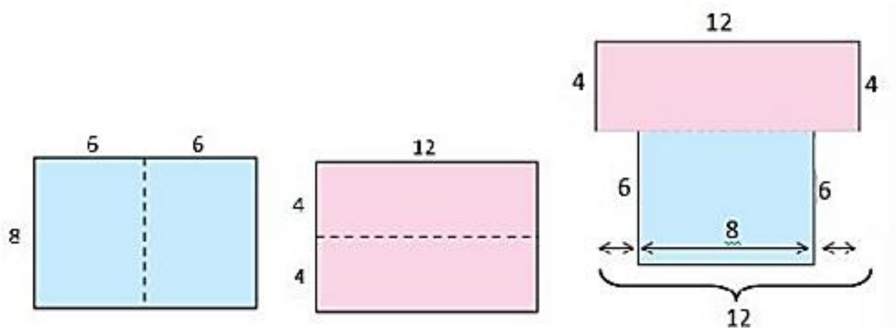
B) Em seguida, ela deslizou um pedaço sobre o outro, sem girar, formando a figura abaixo. Qual é a área do retângulo formado pela sobreposição das duas folhas?

C) Depois, Lucinha juntou as duas metades da folha rosa, formando um retângulo idêntico ao original antes de ser cortado, e colocou os dois pedaços da folha azul sobre eles, conforme indicado na figura. Qual é a área da folha rosa que não foi coberta pelos pedaços da folha azul?

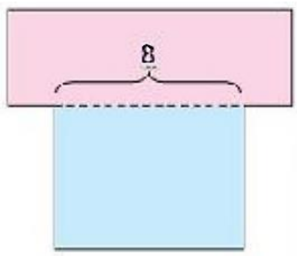


Solução:

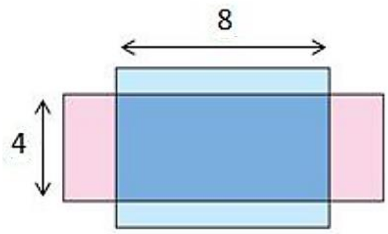
A) *Solução 1:* As dimensões das metades das folhas são, respectivamente, $6\,cm \times 8\,cm$ e $12cm \times 4\,cm$. Para calcular o perímetro a figura "T", observamos que a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais do contorno é $12 + 12 = 24\,cm$, independente do pedaço azul estar centralizado, e que a soma dos comprimentos verticais do contorno é $4 + 6 + 4 + 6 = 20\ cm$. Portanto, o perímetro da figura será $20 + 24 = 44\ cm$.



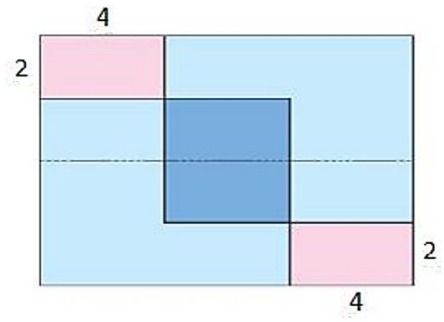
Solução 2: A figura montada por Lucinha tem perímetro igual à soma dos perímetros dos dois pedaços de folha menos $8\ cm$ de cada um desses pedaços, que desaparecem quando as duas folhas são encostadas, conforme indicado pela linha pontilhada na figura abaixo. Portanto, o perímetro da figura em forma de "T" é igual ao perímetro do pedaço azul $8 + 6 + 8 + 6 = 28$, mais o perímetro do pedaço rosa $4 + 12 + 4 + 12 = 32$ e menos $8 + 8 = 16$, ou seja, $28 + 32 - 16 = 44\ cm$.



B) O retângulo formado pela sobreposição dos dois pedaços terá dimensões $8\ cm \times 4\ cm$, logo, sua área será $32\ cm^2$.



C) Como a folha rosa tem dimensões $8\,cm \times 12\,cm$ e cada metade da folha azul $8\,cm \times 6\,cm$, temos que cada um dos retângulos não cobertos tem dimensões $4\,cm \times 2\,cm$ e área $8\,cm^2$. A área não coberta será, portanto, $16\,cm^2$.



Questão 16 (nº 5 - 2014): Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.

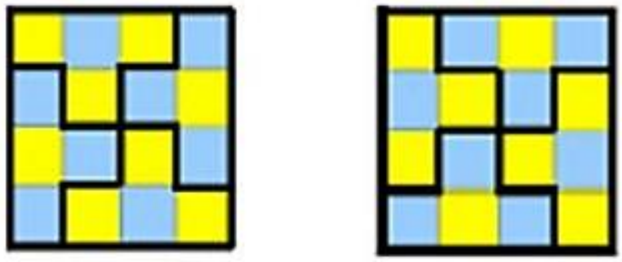
A) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro $4x4$ com essas peças.

B) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

C) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro $10x10$ com suas peças.

Solução:

A) As figuras abaixo apresentam as duas únicas maneiras possíveis, a menos de rotação, de cobrir o tabuleiro $4x4$.



B) Cada peça cobre exatamente 4 quadradinhos, e, portanto, 20 peças cobrem uma área formada por 80 quadradinhos. Como 80 não é um número quadrado perfeito, não existe um tabuleiro quadrado com exatamente 80 quadradinhos.

C) Para cobrir um tabuleiro 10×10, são necessárias 25 peças, uma vez que $100 = 4 \times 25$. Cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim podemos dividir as peças que cobrem o tabuleiro em dois grupos:

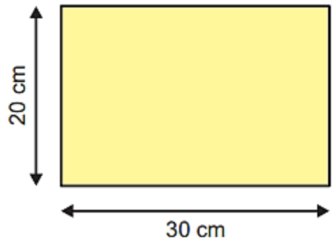
Grupo 1: As que cobrem exatamente uma casa amarela (e, portanto, três azuis).
Grupo 2: As que cobrem exatamente três casas amarelas (e, portanto, uma azul).

Suponha que fosse possível distribuir as 25 peças sobre o tabuleiro cobrindo todas as suas casas.

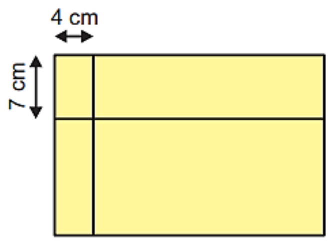
Se o número de peças do Grupo1 for par, o número de peças do Grupo 2 deve ser ímpar, pois a soma desses números deve ser igual à quantidade de peças usadas (25). Neste caso, o número de casas azuis cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que há 50 casas azuis num tabuleiro 10×10.

Se o número de peças do Grupo1 for ímpar, o número de peças do Grupo 2 deve ser par, pois, pelo mesmo motivo, a soma do número de peças destes dois grupos deve ser 25. Neste caso, o número de casas amarelas cobertos deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que também há 50 casas amarelas num tabuleiro 10×10.

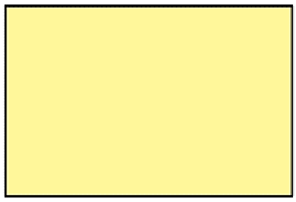
Questão 17 (nº 3 - 2015): Lucinha tem três folhas retangulares iguais, cujos lados medem $20\ cm$ e $30\ cm$.



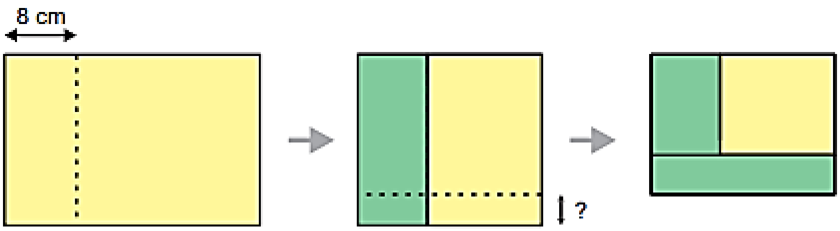
A) Lucinha fez dois traços retos na primeira folha, um a $4\ cm$ da margem esquerda e outro a $7\ cm$ da margem superior, dividindo-a em quatro retângulos. Um desses retângulos tem a maior área. Qual é o valor dessa área?



B) Ajude Lucinha a dividir a segunda folha em quadrados iguais, desenhando traços paralelos às margens, de modo que esses quadrados tenham a maior área possível.



C) Lucinha pegou a terceira folha, amarela na frente e verde no verso, e fez duas dobras: a primeira a $8\ cm$ da margem esquerda e, a segunda, a uma certa distância da margem inferior, de forma que o perímetro da região não coberta da folha (contorno da região amarela da última figura) fosse de $54\ cm$. Qual é a distância da segunda dobra à margem inferior?



Solução:

A) O maior dos quatro retângulos tem lados de medida $30 - 4 = 26$ cm e $20 - 7 = 13\ cm$. Logo, sua área é $26 \times 13 = 338\ cm^2$.

B) Com um traço horizontal e dois verticais geramos os quadrados de maior área possível. Para formar apenas quadrados, o valor dos lados desses quadrados deve dividir 20 e 30. A maior área ocorre, então, quando o lado desses quadrados for o máximo divisor comum de 20 e 30, ou seja, $10\ cm$.

C) *Solução 1:* Vamos chamar a distância da segunda dobra até a margem inferior da folha de altura da dobra.

Como a folha tem $30\ cm$ de largura e a primeira dobra foi feita a $8\ cm$ da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a $30\ cm$ menos duas vezes $8\ cm$, ou seja, $30 - 16 = 14\ cm$.

Após a segunda dobra, o dobro da altura do retângulo amarelo será a diferença entre seu perímetro e o dobro de sua largura, ou seja, $54 - 28 = 26\ cm$. Portanto, a altura do retângulo amarelo na terceira figura é $13\ cm$. Assim, da altura da folha original sobraram $20 - 13 = 7\ cm$ para a realização da segunda dobra e, portanto, a altura da dobra é a metade, ou seja, $\frac{7}{2} = 3{,}5\ cm^2$.

Solução 2: Como a folha tem $30\ cm$ de largura e a primeira dobra foi feita a $8\ cm$ da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a $30\ cm$ menos duas vezes $8\ cm$, ou seja, $30 - 16 = 14\ cm$.

De forma análoga, como a folha tem $20\ cm$ de altura, a altura da região em amarelo da última figura é igual $20\ cm$ menos duas vezes a altura da dobra.

O perímetro da região em amarelo da última figura é igual a $54\ cm$, e seu semiperímetro (metade do perímetro) é $27\ cm$.

O semiperímetro de uma região retangular é a soma da largura e da altura dessa região. Assim, $14\ cm$ mais $20\ cm$ menos duas vezes a altura da dobra tem que ser igual a $27\ cm$.

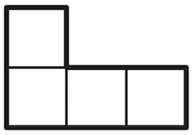
• $14 + 20 - 2 \times (altura\ da\ dobra) = 27\ cm$

Logo 27 cm mais duas vezes a altura da dobra é igual a 34 cm,

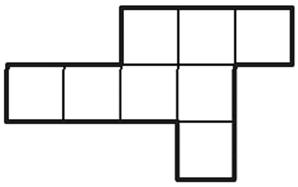
• $27 + 2 \times (altura\ da\ dobra) = 34\ cm$

e a altura da dobra é igual à metade da diferença $34 - 27 = 7\ cm$, ou seja, metade de $7\ cm$. Logo, $altura\ da\ dobra = \frac{(34-27)}{2} = 3{,}5\ cm$.

Questão 18 (nº 2 - 2016): A peça ilustrada abaixo é formada por quatro quadradinhos de 1 cm de lado. Observe que o perímetro desta peça, ou seja, a medida de seu contorno, é 10 cm. Roberto forma figuras juntando duas dessas peças, sem sobreposição, e fazendo coincidir lados de quadradinhos.




A) Roberto formou a figura abaixo. Qual é o perímetro desta figura?



B) Ajude Roberto desenhando uma figura com perímetro igual a 12 cm no quadriculado da esquerda e outra com perímetro igual a 18 cm no quadriculado da direita.

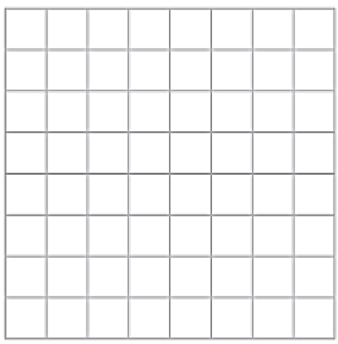


Figura com perímetro igual a 12 cm

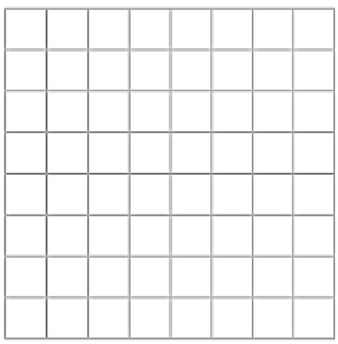


Figura com perímetro igual a 18 cm

C) Explique por que Roberto nunca conseguirá formar uma figura com perímetro igual a 15 cm. (Lembre-se de que Roberto sempre faz coincidir lados de quadradinhos).

Solução:

A) A figura em questão é formada pela junção de duas peças. Ela é formada por oito quadradinhos de 1 cm de lado, e seu contorno contém exatamente 16 lados desses quadradinhos. Logo, o perímetro dessa peça é 16 vezes 1 cm, ou seja, é igual a 16 cm.

B) Há muitas soluções, as quais podem diferir no formato ou na posição. Aqui estão dois exemplos:

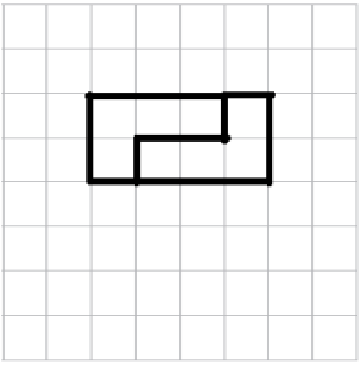


Figura com perímetro igual a 12 cm

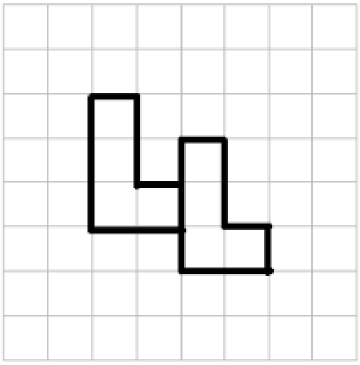
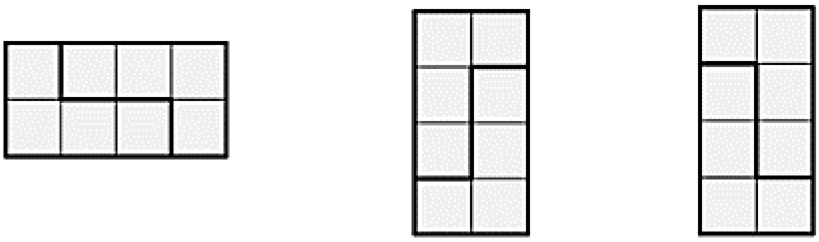
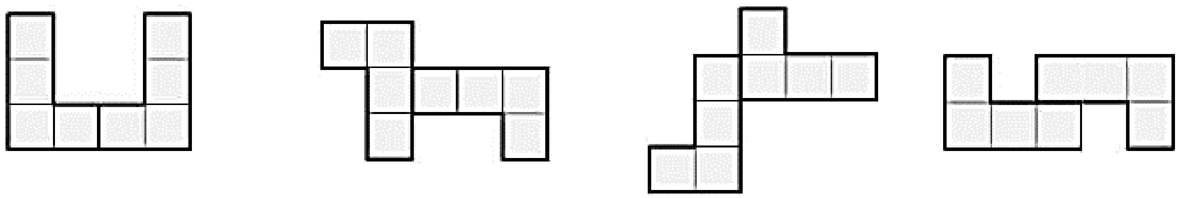


Figura com perímetro igual a 18 cm

Para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm, Roberto deve juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha somente 12 lados de quadradinhos. Como cada peça contém 10 lados de quadradinhos em seu contorno e como ele junta as peças coincidindo lados de quadradinhos, Roberto terá de fazer coincidir quatro pares de lados de quadradinhos para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm. Isso apenas é possível se ele juntar as peças formando um retângulo. Veja algumas outras possibilidades:

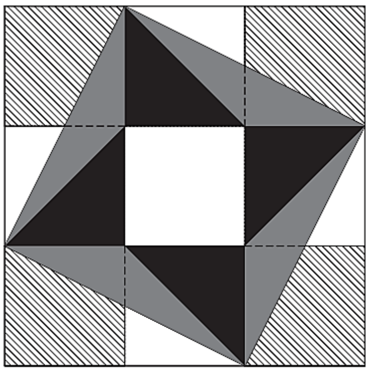


Agora, para formar uma figura com perímetro igual a 18 cm, Roberto tem de juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha 18 $l$ados de quadradinhos, ou seja, ele terá de fazer coincidir apenas um par de lados de quadradinhos. Como foi dito, existem várias maneiras de formar essas figuras; veja mais alguns exemplos:



C) Quando as duas peças não estão em contato, o perímetro total é $20\ cm$. Depois de juntar duas peças, o perímetro da figura formada pelas duas peças é diminuído de um número par, já que os lados em contato de quadradinhos não contribuem para o perímetro da figura formada, pois ficam internos a ela. Como duas peças soltas têm perímetro $20\ cm$, é impossível obter, juntando duas peças de acordo com as condições descritas no enunciado, uma figura com um perímetro ímpar. Mas 15 é ímpar e, assim, não há figuras (como as descritas no enunciado) que têm esse perímetro.

Questão 19 (nº 4 - 2016): A figura ao lado foi desenhada sobre um quadriculado formado por nove quadradinhos, cada um com área igual a $4\ cm^2$.



A) Qual é a área total pintada de preto?

B) Qual é a área total listrada?

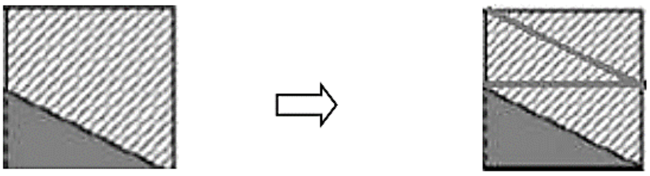
C) Qual é a área total pintada de cinza?

Solução:

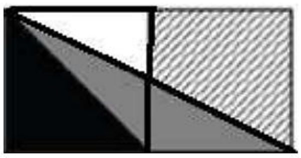
A) A parte em preto é formada por quatro triângulos pretos menores, os quais são retângulos isósceles. Um desses triângulos aparece na figura abaixo:

A área de cada um dos triângulos pretos é a metade da área do quadrado do quadriculado, ou seja, é igual à metade de $2 \times 2 = 4\ cm^2$, ou seja, é igual a $2\ cm^2$. Portanto, a área da parte em preto é igual a $4 \times 2 = 8\ cm^2$.

B) A parte listrada de um quadradinho do quadriculado é um trapézio. Assim, a parte listrada de um quadradinho tem área igual a $\frac{3}{4}$ da área dele. De fato, se considerarmos, por exemplo, na divisão na figura ilustrada abaixo vemos que a área de cada trapézio é $\frac{3}{4} \times 4 = 3\ cm^2$ e, portanto, a área total da parte listrada é igual a $4 \times 3 = 12\ cm^2$.



C) Para calcular a área de um pequeno triângulo cinza, podemos destacar da figura o retângulo abaixo, formado por dois quadradinhos do quadriculado.



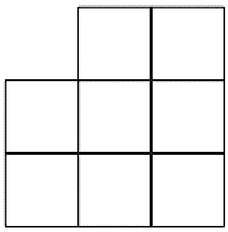
A área desse retângulo é $8\ cm^2$. A diagonal o divide em dois triângulos retângulos de mesma área e um deles é formado por um triângulo preto e um triângulo cinza. A área do triângulo cinza será, portanto, igual à diferença entre a metade da área do retângulo e a área do triângulo preto, isto é, $4 - 2 = 2\ cm^2$. A área total da parte em cinza é $4 \times 2\ =\ 8\ \ cm^2$.

Outra forma de chegar a esse resultado é observar que a metade do quadrado do reticulado (o triângulo preto) é equivalente ao triângulo cinza, ou seja, eles têm a mesma área, pois têm mesmas medidas de base e de altura.

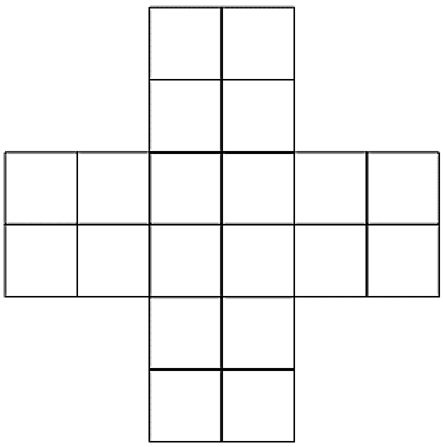
Questão 20 (nº 5 - 2017): Marcela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares e cada uma dessas peças cobre exatamente duas casas do tabuleiro.

A) A figura abaixo mostra uma maneira de cobrir um tabuleiro 2×3 utilizando três peças. Desenhe as outras duas maneiras de cobrir com três peças o mesmo tabuleiro.

B) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com quatro peças o tabuleiro abaixo?

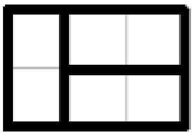


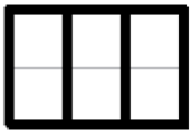
C) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com dez peças o tabuleiro abaixo?



Solução:

A) As possibilidades restantes são dadas a seguir:

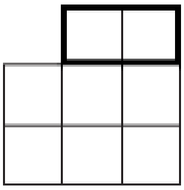




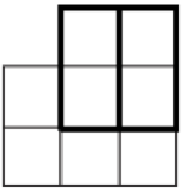
Note que não é possível ter as três peças retangulares na horizontal. Assim, ou temos duas na horizontal e uma na vertical (que pode estar à direita ou à esquerda) ou as três na vertical.

B) Comecemos por cobrir os quadradinhos superiores. Temos duas possibilidades:

• Cobri-los com uma peça horizontal



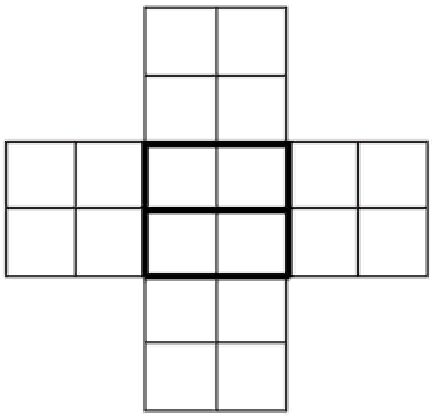
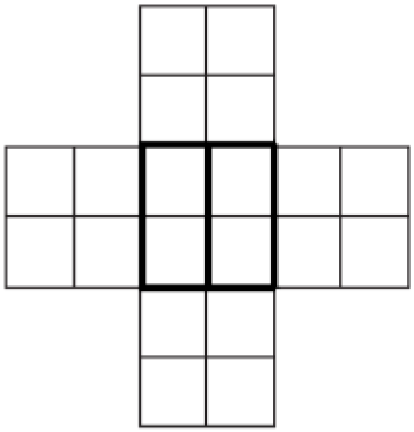
• Cobri-los com duas peças verticais



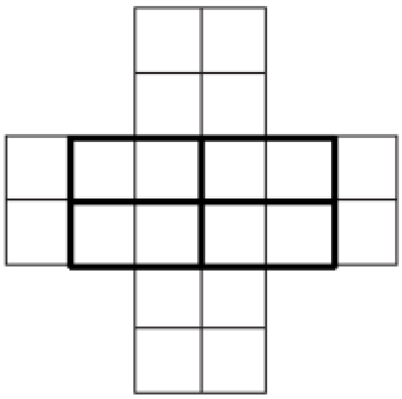
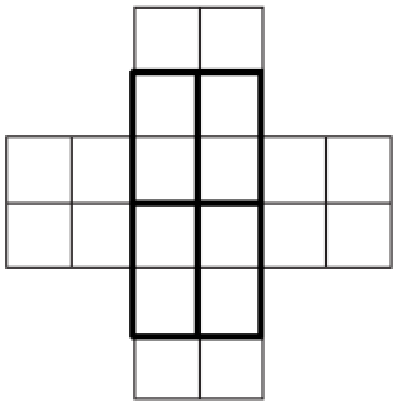
No primeiro caso, resta um quadriculado igual ao do item (A) para ser coberto; como vimos, ele pode ser coberto de 3 modos. No segundo caso, só há uma forma possível de terminar a cobertura. Logo, o número de possibilidades é $3 + 1 = 4$.

C) *Solução 1:* Comecemos cobrindo o quadrado 2×2 central. Há 3 possibilidades:

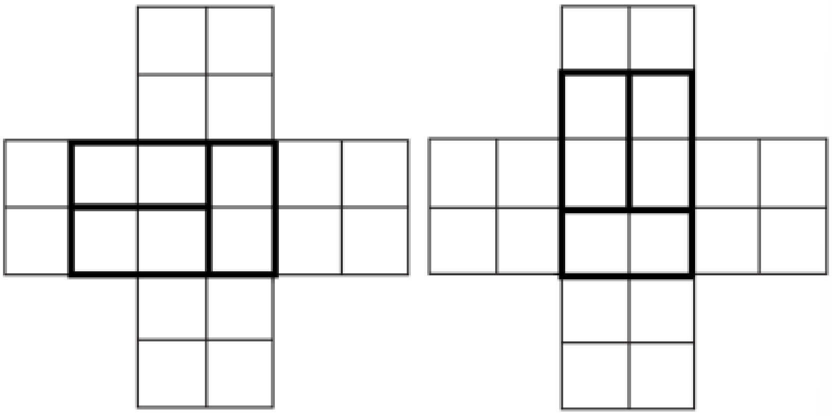
• O quadrado central é coberto de modo que as peças retangulares usadas não invadam as regiões vizinhas. Isto ocorre quando são usadas duas peças horizontais ou duas verticais para cobrir o quadrado central (como ilustrado nas figuras abaixo). Em ambos os casos, cada um dos outros quadrados pode ser coberto de dois modos (com peças horizontais ou verticais). Logo, o número de coberturas deste tipo é: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

• O quadrado central é coberto de modo a invadir dois quadrados opostos. Isto acontece quando são usadas quatro peças horizontais ou quatro verticais para cobrir suas casas (como ilustrado nas figuras abaixo). Neste caso, os quadrados invadidos só podem ter sua cobertura completada de 1 modo, enquanto os outros dois podem ser cobertos de 2 modos. Logo, o número de coberturas deste tipo é: $2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 8$.

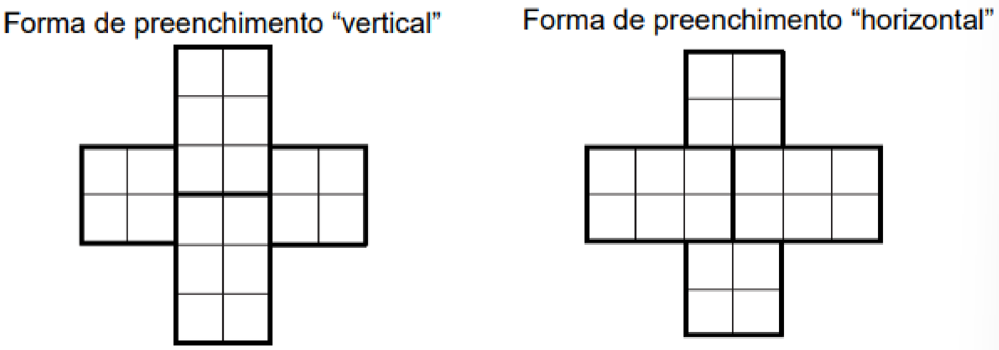
• O quadrado central é coberto de modo a invadir somente um dos outros dois quadrados. Isto ocorre quando são usadas 2 peças horizontais e 1 vertical ou duas verticais e uma horizontal (como ilustrado nas figuras abaixo). Há quatro possibilidades para o quadrado a ser invadido. O quadrado invadido só pode ser coberto de 1 modo, e cada um dos demais, de 2 modos. Logo, o número de coberturas deste tipo é: $4 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.



O número total de possibilidades de cobertura é, portanto, igual a $32 + 8 + 32 = 72$.

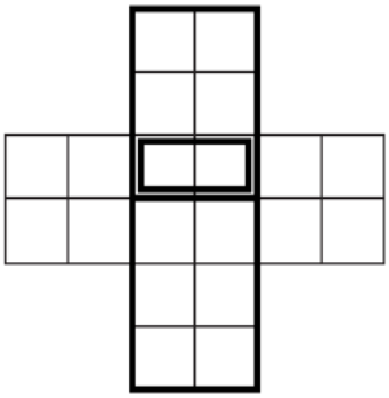
Solução 2:

Olhe para o tabuleiro vazio e enxergue nele as seguintes possibilidades de dividi-lo em regiões retangulares disjuntas:



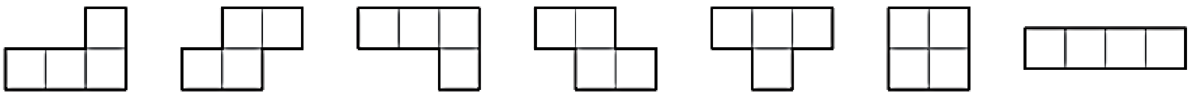
É notável que qualquer preenchimento do tabuleiro com peças retangulares siga o padrão de cobertura descrito por uma dessas duas possibilidades e, como veremos, não é possível que um mesmo recobrimento pertença simultaneamente aos dois padrões por regiões descritos acima. Assim, podemos Forma de preenchimento “vertical” Forma de preenchimento “horizontal” contar separadamente cada caso e, no final, somar o número de possibilidades. Observe também que o número de preenchimentos na forma “vertical” é igual ao número de preenchimentos na forma “horizontal”.

Em outras palavras, em todas as possibilidades de preenchimento, haverá sempre exatamente uma direção (vertical ou horizontal) em que o braço da cruz nesta direção é preenchido como se fosse composto de dois retângulos 2×3 (modo horizontal) ou 3×2 (modo vertical). De fato, se isto não fosse verdade, por exemplo, para a direção horizontal, haveria uma peça horizontal cobrindo duas casas do quadrado central (representada no exemplo da figura abaixo pelo retângulo menor dentro do quadrado central da cruz). Mas, neste caso, na direção vertical o preenchimento poderia ser feito independentemente para os dois retângulos maiores 2×3 destacados na figura.

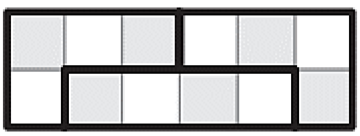


Portanto, podemos contar separadamente os preenchimentos que seguem o padrão vertical (como acima) ou horizontal. Em cada um destes casos, cada retângulo 2×3 (ou 3×2) pode ser preenchido, como visto no item (A), de 3 modos, e cada quadrado, de 2 modos. Logo, há para cada forma de preenchimento (horizontal ou vertical), $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ possibilidades. Assim, o número total de preenchimentos do tabuleiro em forma de cruz é $2 \times 36 = 72$.

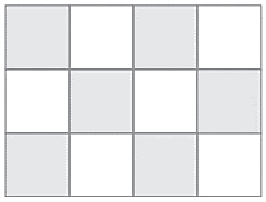
Questão 21 (nº 4 - 2018): Marília tem sete peças de madeira, como ilustrado abaixo.



Ela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros retangulares com essas peças, sem colocar uma peça sobre outra. Cada peça deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro. Veja como Marília cobriu um tabuleiro 2×6:

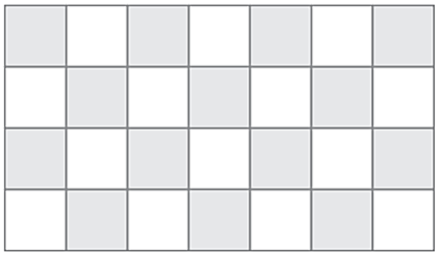


A) Cubra o tabuleiro abaixo usando três peças de Marília.



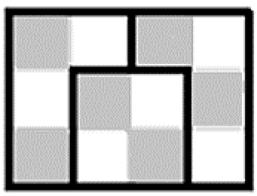
B) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?

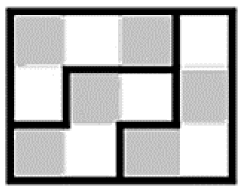
C) Explique por que Marília nunca irá conseguir cobrir o tabuleiro abaixo.



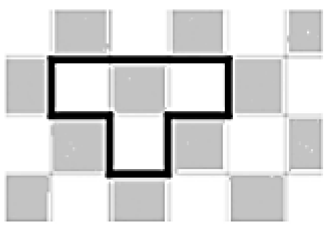
Solução:

A) Há diversas maneiras de cobrir o tabuleiro usando três das sete peças. Aqui estão duas delas:

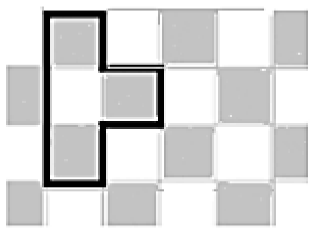




B) A única peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas é a peça com o formato da letra T. As demais peças sempre cobrem duas casas brancas e duas casas cinzas.



Exemplo em que a peça em formato de "T" cobre 3 casas brancas e 1 casa cinza



Exemplo em que a peça em formato de "T" cobre 1 casa branca e 3 casas cinzas

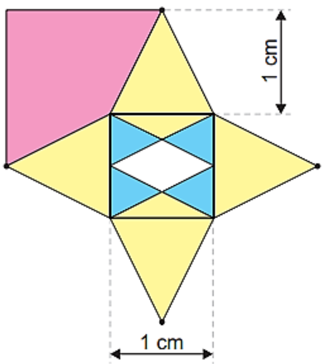
C) *Solução 1:* O tabuleiro tem 28 casas, 14 brancas e 14 cinzas; assim, todas as sete peças devem ser usadas para cobri-lo. Há somente uma peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas (a peça T) e esta peça deve ser obrigatoriamente usada. Depois de colocada a peça em formato de T, independentemente de onde ela for colocada, restarão no tabuleiro 24 casas. Ocorre, então, duas possibilidades para as casas ainda não cobertas:

- haverá 11 casas brancas e 13 cinzas ou
- haverá 13 casas brancas e 11 cinzas.

Com as demais seis peças fica, portanto, impossível cobrir as 24 casas pois cada uma dessas peças cobre o mesmo número de casas brancas e cinzas.

Solução 2: Colocam-se primeiramente todas as seis peças à disposição, com exceção da peça em formato de "T". Desta forma são cobertas 24 casas do tabuleiro, 12 casas brancas e 12 casas cinzas. Restam ainda 2 casas brancas e 2 casas cinzas para serem cobertas com a peça "T". Como vimos no item (B), isto é impossível.

Questão 22 (nº 4 - 2019): Na figura, o quadrado tem lado 1 cm. Os quatro triângulos azuis são iguais, assim como os dois triângulos amarelos menores. Os quatro triângulos amarelos maiores têm, cada um deles, base igual ao lado do quadrado, altura com relação a essa base igual a 1 cm, e seus outros dois lados com mesma medida. Dois lados do quadrilátero rosa são paralelos aos lados do quadrado.



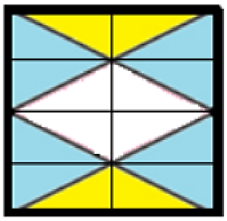
A) Qual é a área da região formada pelos triângulos azuis?

B) Qual é a área da região formada pelos triângulos amarelos?

C) Qual é a área do quadrilátero rosa?

Solução:

A) O quadrado central tem área igual a 1 cm^2 e ele pode ser decomposto em 16 triângulos pequenos, todos congruentes entre si, como mostra a figura:



Oito desses pequenos triângulos são azuis. Logo, a área da região azul é igual a

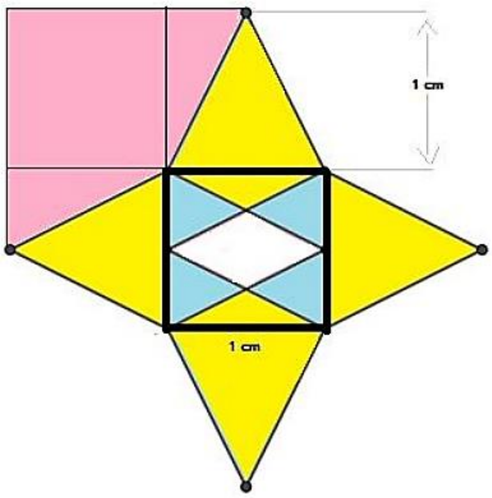
$$8 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ cm^2$$

B) Observemos, na figura do item (A), que quatro dos triângulos pequenos são amarelos, logo, a região amarela interna ao quadrado tem área igual a $\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$. A região amarela total é formada por 4 triângulos grandes amarelos (cada um deles com área igual à metade de um quadrado de lado 1), juntamente com esses quatro triângulos amarelos contidos dentro do quadrado, logo, sua área da região amarela é igual a

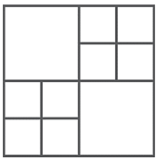
$$4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2{,}25\ cm^2$$

C) A região rosa pode ser decomposta em dois triângulos retângulos congruentes, cada um deles de área $\frac{1}{4}\ cm^2$, e um quadrado de lado 1 cm, como mostra a figura ao lado. Assim, a área da região rosa é igual a

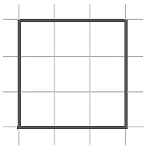
$$1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ cm^2$$



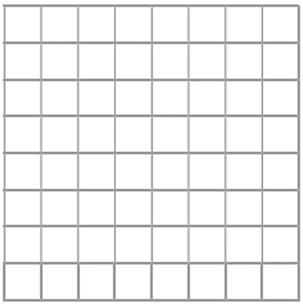
Questão 23 (nº 3 - 2021): Janaína desenha quadrados formados por quadrados menores, cujos lados têm medidas inteiras. Por exemplo, a figura mostra como Janaína desenhou um quadrado de lado 4 formado por dez quadrados, sendo dois de lado 2 e oito de lado 1.



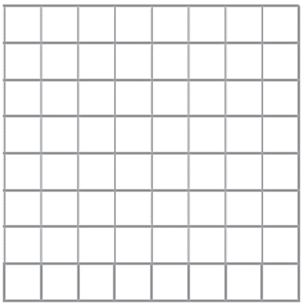
A) Mostre como Janaína pode desenhar um quadrado de lado 3 formado com a menor quantidade possível de quadrados menores com lados de medidas inteiras.



B) Janaína quer desenhar um quadrado grande formado por um quadrado de lado 3, alguns quadrados de lado 2 e a menor quantidade possível de quadrados de lado 1. Mostre, no quadriculado abaixo, como Janaína pode fazer esse desenho.

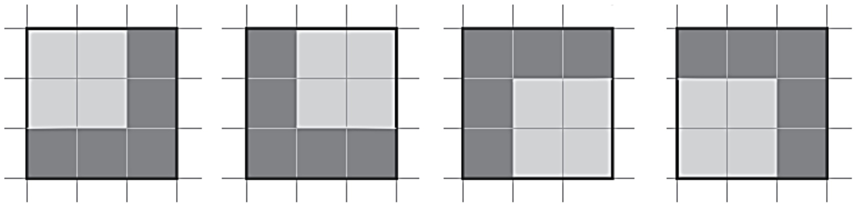


C) Janaína quer desenhar um quadrado de menor lado possível formado por 13 quadrados de lado 1 e por outros quadrados maiores com lados de medidas inteiras. Mostre, no quadriculado abaixo, como Janaína pode fazer esse desenho.

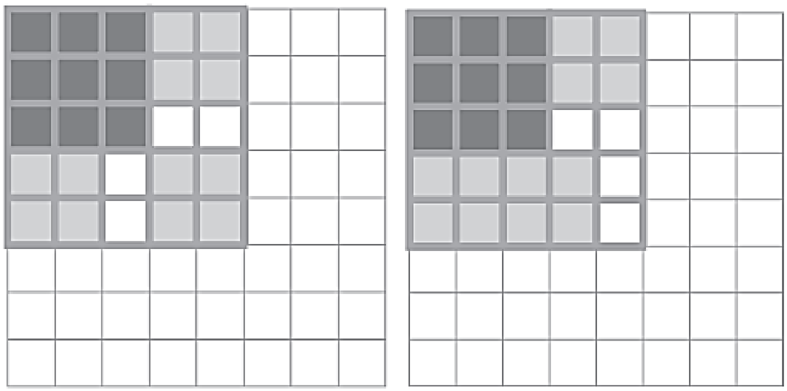


Solução:

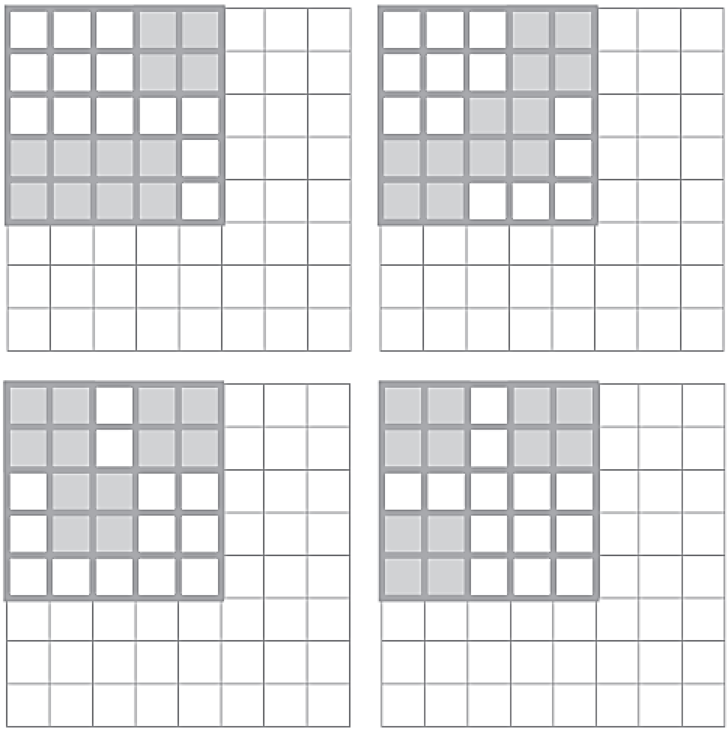
A) Para que a quantidade de quadrados usados para formar o quadrado de lado 3 seja a menor possível, Janaína deve usar os maiores quadrados possíveis. No caso, ela pode usar somente um quadrado de lado 2, porque, se usar mais um, o quadrado terá que ter lado 4, pelo menos. Ao usar um quadrado de lado 2, o restante deverá ser completado por $9 - 4 = 5$ quadrados unitários, conforme a primeira figura abaixo. Há mais outras três posições possíveis para essa figura, basta girar a primeira figura abaixo ou, equivalentemente, deslocar o quadrado de lado 2 para os outros cantos do quadrado de lado 3.



B) Se Janaína quer usar um quadrado de lado 3 e quadrados de lado 2 para formar o quadrado grande, então, este deverá ter lado de medida 5, pelo menos. Um quadrado de lado 5 corresponde a 25 quadrados unitários. Se, na sua composição, há um quadrado de lado 3, restam $25 - 9 = 16$ quadrados unitários. Cada quadrado de lado 2 corresponde a 4 quadrados unitários. Em princípio, ela poderia usar quatro quadrados de lado 2, mas essa configuração não é possível, como pode ser visto com o teste de todas as possibilidades de encaixe. Entretanto, é possível usar três quadrados de lado 2, restando completar com quatro quadrados unitários, que é o número mínimo procurado. Vemos abaixo dois tipos diferentes de figuras que Janaína pode desenhar. Ela pode, como no item anterior, girar essas figuras, fazendo outros desenhos.

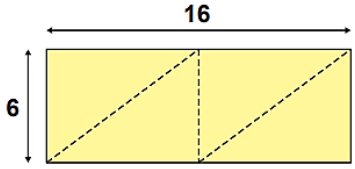


C) O menor quadrado contendo 13 quadrados unitários é o quadrado de lado 4. Mas, como $16 - 13 = 3$, esse quadrado não serve ao propósito de Janaína, porque, para preencher o espaço de 3 quadrados unitários, ela só pode usar 3 quadrados unitários, e, daí, o total deles seria 16, contrariando o enunciado. No quadrado de lado 5, temos $25 - 13 = 12$, o que corresponde a três quadrados de lado 2. De fato, Janaína pode desenhar o quadrado de lado 5, o menor possível, com três quadrados de lado 2 e 13 quadrados unitários de várias maneiras diferentes, quatro das quais exemplificadas abaixo.



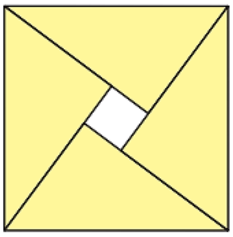
Note que não é possível usar um quadrado de lado 3 para ocupar o espaço de 12 quadrados unitários, pois o espaço restante $(12 - 9 = 3)$ só poderia ser ocupado com quadrados unitários, aumentando seu número de 13 para 16.

Questão 24 (nº 4 - 2022): Janaína cortou uma cartolina retangular de 16 cm de comprimento e 6 cm de largura em quatro triângulos retângulos iguais, conforme mostra a figura.

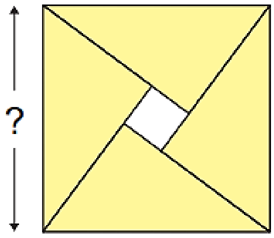


A) Qual é a área de cada um desses triângulos?

B) Em seguida, Janaína usou os quatro triângulos para montar um quadrado com um buraco no seu interior, conforme mostrado na figura. Qual é a área do buraco?

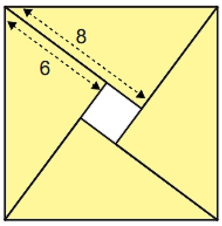


C) Quanto mede o lado do quadrado que Janaina montou?



Solução:

A) Como os 4 triângulos são iguais, basta calcular a área da folha de cartolina e dividir por 4. Portanto, qualquer um desses triângulos tem área igual a $\frac{6\times16}{4} = 24\ cm^2$. Alternativamente, vemos que os quatro triângulos são triângulos retângulos iguais e seus lados menores (catetos) têm medidas 6 e 8. Portanto, a área de cada um deles é igual a $\frac{6\times8}{2} = 24\ cm^2$.



B) O buraco no centro do quadrado tem lado cuja medida é igual à diferença entre as medidas dos dois catetos dos triângulos, ou seja, $8 - 6 = 2\ cm$. Logo, a área do buraco é $2^2 = 4\ cm^2$.

C) A área do quadrado que Janaína montou é igual à soma das áreas dos 4 triângulos, mais a área do buraco. Logo, a área desse quadrado é igual a $4 \times 24 + 4 = 96 + 4 = 100\ cm^2$ e o lado do quadrado é $\sqrt{100} = 10\ cm$.

6. UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO

Neste capítulo serão abordados os conceitos de perímetro e área de polígonos, considerando o nível de conhecimento necessário para alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental. Em seguida, será apresentada uma proposta da aplicação do passo a passo proposto por Polya (1995) na resolução de problemas para resolver a Questão 5 apresentada no capítulo anterior.

6.1. CONCEITOS DE PERÍMETRO E ÁREA ESTUDADOS NO 6º E 7º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Os estudos sobre perímetro e área de figuras planas têm uma grande importância no ensino fundamental, uma vez que são essenciais para a compreensão de conceitos básicos de geometria e para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos estudantes. O conhecimento dessas medidas permite aos alunos entenderem a noção de contorno e espaço ocupado por diferentes formas geométricas, além de possibilitar a resolução de problemas práticos do cotidiano, como a determinação de quantidades de materiais necessários para cercar um terreno ou a área de superfícies a serem pintadas. A compreensão do perímetro e área também prepara os alunos para estudos mais avançados em matemática e ciências, além de serem habilidades úteis em diversas áreas profissionais.

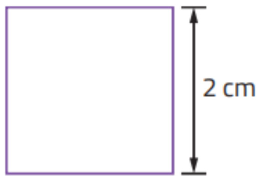
6.1.1. Perímetro

O perímetro é uma medida que descreve a distância total ao redor de uma figura plana. Segundo Dante, "**perímetro é o comprimento do contorno** de uma região plana" (DANTE, 2018, p. 251). Quando nos referimos ao perímetro de um polígono podemos definir o perímetro como "[...] o comprimento da linha poligonal simples e fechada que forma o polígono. Para calcular a medida de perímetro de um polígono, basta somarmos as medidas de comprimento de todos os lados dele" (DANTE, 2018, p. 251).

O perímetro é expresso em unidades de comprimento, como, por exemplo, centímetros (cm) ou metros (m). Antes de fazermos o cálculo do perímetro é necessário observar que "ao somar as medidas de comprimento dos lados, todas devem estar na mesma unidade de medida" (DANTE, 2018, p. 251).

Vamos considerar alguns exemplos para compreender os conceitos mencionados.

Exemplo 1: Considere o quadrado a seguir de lado 2 cm e determine seu perímetro.

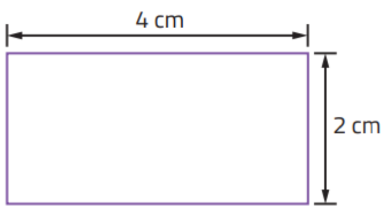


Fonte: DANTE, 2018, p. 252

Solução: Como a medida do perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados, temos que a medida P que indica o perímetro do quadrado de $2\ cm$ de lado em questão é dada por

$$P = 2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 = 8\ cm$$

Exemplo 2: Considere o retângulo a seguir de lados medindo $2\ cm$ e $4\ cm$. Determine seu perímetro.



Fonte: DANTE, 2018, p. 252

Solução: Como a medida do perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados, temos que a medida P que indica o perímetro do retângulo de lados $2\ cm$ e $4\ cm$, é dada por

$$P = 2 + 2 + 4 + 4 = 2 \times 2 + 2 \times 4 = 12\ cm$$

Lembre-se de que o perímetro é uma medida do contorno, ou seja, percorre a borda da figura. Os lados devem ser medidos e somados, na mesma unidade, para obter o valor correto do perímetro.

6.1.2. Área

A área é uma medida que descreve a quantidade do plano ocupada por uma figura, como um quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo ou outras. Ela é expressa em unidades quadradas, por exemplo, metros quadrados (m^2). Trataremos nas seções a seguir sobre a determinação das áreas do quadrado, retângulo, paralelogramo e triângulo, comparando a área de cada uma com a unidade de área, que resultará em um número que irá expressar quantas vezes a figura em questão contém a unidade de área. Para outros polígonos, o método de calcular sua área envolve subdividi-lo em triângulos, paralelogramos ou qualquer outra figura cujas áreas nós conhecemos. A área do polígono desejada será a soma das áreas das figuras em que o dividirmos.

Discutiremos sobre figuras com lados expressos por números inteiros e racionais, levando em consideração a abordagem para alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental. Para o caso das figuras com lados incomensuráveis, sugerimos a leitura de LIMA (2009), que também é a referência para as discussões que se darão a seguir.

6.1.2.1. Área do Quadrado

Um quadrado é um quadrilátero (polígono com quatro lados) que apresenta todos os lados congruentes e os quatro ângulos internos são retos. Vamos adotar como unidade de área um quadrado com medida de comprimento de lado igual a uma unidade. Esse quadrado será chamado de *quadrado unitário*. Assim, qualquer quadrado com medida de lado 1 terá, pela definição, área igual a 1.

Um quadrado Q com lado medindo o número inteiro n pode ser subdividido, por meio de retas paralelas aos seus lados, em n quadradinhos justapostos. Cada um desses quadrados tem lado de comprimento unitário e, consequentemente, área de 1 unidade quadrada. Isso implica que a $\acute{a}rea\ de\ Q = n^2$.

De modo similar, se o lado do quadrado Q tem uma medida de $\frac{1}{n}$, onde n é um número inteiro, então o quadrado unitário pode ser decomposto por meio de linhas paralelas aos seus lados em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q. Esses n^2 quadrados congruentes a Q

compõem um quadrado com área de 1. Dessa forma, podemos concluir que a área de Q deve satisfazer a condição $n^2 \times (área\ de\ Q) = 1$. Logo, a $área\ de\ Q = \frac{1}{n^2}$.

Para o caso de um quadrado Q ter como medida de lado o número racional $\frac{m}{n}$, podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um com medida de comprimento $\frac{1}{n}$. Ao traçar paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos m^2 quadradinhos com medida de lado igual a $\frac{1}{n}$. Assim, cada um desses quadradinhos terá área igual a $\frac{1}{n^2}$. Portanto, segue que

$$área\ de\ Q = m^2 \times \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

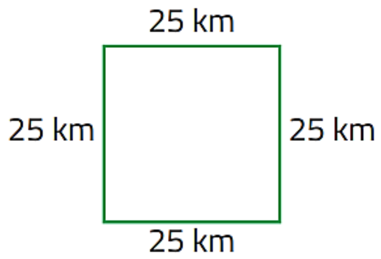
$$área\ de\ Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Assim, podemos concluir que a área A_Q de um quadrado Q que tem medida de lado igual a l, sendo l inteiro ou racional, é dada pela expressão

$$A_Q = l^2$$

A fim de mostrar a aplicação da fórmula, observe o exemplo a seguir.

Exemplo: Determine a área do quadrado a seguir:



Fonte: DANTE, 2018, p. 253.

Solução: Como o lado do quadrado mede $25\ km$, temos que sua área será

$$A_Q = 25^2 = 625\ km^2$$

Portanto, a área do quadrado será $625\ km^2$.

6.1.2.2. Área do Retângulo

Um retângulo é um quadrilátero que possui quatro ângulos internos são retos.

Considere o retângulo R com lados de medidas m e n, sendo m e n números inteiros. Podemos decompor R, por meio de paralelas aos lados, em $m \times n$ quadrados unitários. Desse modo, temos que a $área\ de\ R = m \times n$.

Se os lados de R tem como mediadas os números racionais a e b, podemos igualar os denominadores e escrever esses números como as frações $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$. Iremos dividir cada lado de R em segmentos de comprimento $\frac{1}{q}$. O lado que mede a ficará divido em p segmentos e o lado que mede b ficará dividido em r segmentos. Ao traçarmos paralelas aos lados nos pontos de divisão, temos que o retângulo R será composto por $p \times r$ quadradinhos, cada um deles com medida de lado $\frac{1}{q}$. Como mostrado na seção anterior, cada um desses quadradinhos terá área $\frac{1}{q^2}$. Assim,

$$área\ de\ R = (p \times r)\frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{q}$$

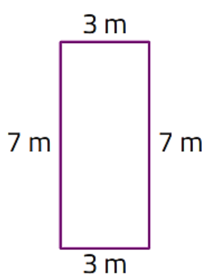
$$área\ de\ R = a \times b$$

Assim, podemos concluir que a área A_R de um retângulo R que tem medidas dos lados iguais a e b, sendo a e b números inteiros ou racionais, poderá ser calculada por

$$A_R = a \times b$$

A fim de mostrar a aplicação da fórmula, observe o exemplo a seguir.

Exemplo: Determine a área do retângulo a seguir:



Fonte: DANTE, 2018, p. 253

Solução: Como a base do retângulo mede 3 m e a altura mede 7 m, temos que sua área será

$$A_R = 3 \times 7 = 21\ m^2$$

Portanto, a área do retângulo será 21 m^2.

6.1.2.3. Área do Paralelogramo

Um paralelogramo é um quadrilátero que apresenta dois pares de lados opostos paralelos.

Quando um lado do paralelogramo é escolhido como base, a altura do paralelogramo é definida como um segmento perpendicular que conecta a base ao lado oposto ou seu prolongamento.

Seja $ABCD$ um paralelogramo P, cuja área iremos calcular tomando como base AB com comprimento b e altura DE com comprimento a. O paralelogramo P está contido em um retângulo com base $b + c$ e altura a. Como visto na seção anterior, a área desse retângulo é $(b + c) \times a = a.b + a.c$. Além disso, temos que o retângulo é composto pelo paralelogramo P mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo com área $a.c$. Portanto,

$$a.b + a.c = área\ de\ P + a.c$$

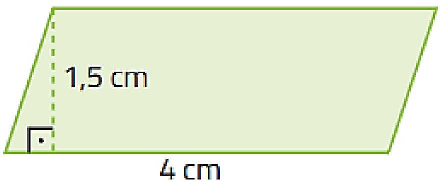
$$área\ de\ P = a.b$$

Assim, podemos concluir que, sendo b a base de um paralelogramo e a a altura relativa à base b, então a área A_P do paralelogramos é calculada por

$$A_P = a \times b$$

A fim de mostrar a aplicação da fórmula, observe o exemplo a seguir.

Exemplo: Determine a área do paralelogramo a seguir:



Fonte: DANTE, 2018, p. 264

Solução: Como a base do paralelogramo mede 4 cm e sua altura mede 1,5 cm, temos que sua altura será

$$A_P = 4 \times 1{,}5 = 6\ cm^2$$

Portanto, a área do paralelogramo será 6 cm^2.

6.1.2.4. Área do Triângulo

Um triângulo é uma figura geométrica plana composta por três lados.

A área do triângulo é obtida da área do paralelogramo, uma vez que ao traçarmos a diagonal de um paralelogramo obtemos dois triângulos congruentes.

Seja ABC um triângulo T, cuja área iremos calcular. Considere as retas paralelas aos lados AB e AC, traçadas pelos vértices C e B, respectivamente, observamos que essas retas se encontram no ponto D, formando assim o paralelogramo $ABDC$. Vamos agora considerar a altura CE deste paralelogramo relativa à base AB. Se AB possui comprimento b e CE possui comprimento a, vimos na seção anterior que a área do paralelogramo $ABDC$ é igual a $b \times a$. Além disso, os triângulos ABC e BCD são congruentes, pois possuem um lado em comum e dois ângulos correspondentes iguais. Portanto, eles possuem a mesma área. Assim, concluímos que a área de $ABDC$ é igual a duas vezes a área de ABC, e por consequência

$$área\ de\ T = \frac{1}{2} \times (a.b)$$

Assim, podemos concluir que sendo b a base do triângulo e a a altura relativa a essa base, então a área A_T desse triângulo é calculada por

$$A_T = \frac{a\ \times b}{2}$$

A fim de mostrar a aplicação da fórmula, observe o exemplo a seguir.

Exemplo: Determine a área da região triangula a seguir:

Fonte: DANTE, 2018, p. 264

Solução: Observe que a base é a soma dos segmentos de medidas $8\ km$ e $12\ km$, ou seja, $b = 8 + 12 = 20\ km$. A altura relativa a essa base mede $28\ km$. Desse modo, a área do triângulo será

$$A_T = \frac{28\ \times 20}{2} = \frac{560}{2} = 280\ km^2$$

Portanto, a área do triângulo será $280\ km^2$.

6.2. PROPOSTA DE ABORDAGEM METODOLÓGICA BASEADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Considerando o estudo realizado nesta dissertação e objetivando a exemplificação da teoria aplicada aos tipos de problemas apresentados, apresentamos uma síntese da abordagem proposta por Polya (1995) e como aplicá-la em sala de aula:

Introdução:

• Apresente o objetivo da prática, destacando a importância da resolução de problemas no processo de aprendizagem.

Compreensão do problema:

• Apresente um problema desafiador aos alunos, relacionado ao conteúdo que será abordado.
• Incentive os alunos a lerem o problema cuidadosamente, identificando todas as informações relevantes.
• Ajude-os a identificar o que é solicitado e quais são as restrições do problema.

Planejamento:

• Estimule os alunos a pensarem em diferentes estratégias que podem ser utilizadas para resolver o problema.
• Incentive-os a fazerem perguntas, desenharem diagramas, criarem tabelas ou usarem outras ferramentas que possam auxiliar na organização das informações.

Execução do plano:

• Encoraje os alunos a colocarem em prática o plano que elaboraram na etapa anterior.
• Supervisione e oriente-os durante a resolução do problema, esclarecendo dúvidas e fornecendo suporte quando necessário.

Verificação:

• Peça aos alunos que verifiquem se a solução encontrada atende ao que foi solicitado no problema.
• Estimule-os a refletirem sobre sua estratégia de resolução, questionando se existe uma maneira mais eficiente ou alternativa de resolver o problema.

Retrospectiva:

• Incentive os alunos a relacionarem o problema resolvido com situações do cotidiano ou outros contextos de aprendizagem, associar a problemas correlatos.
• Explore a transferência de conhecimentos e habilidades adquiridos para resolver problemas semelhantes.
• Proponha generalizações, quando couber, do conteúdo que está sendo explorado na atividade.

Conclusão:

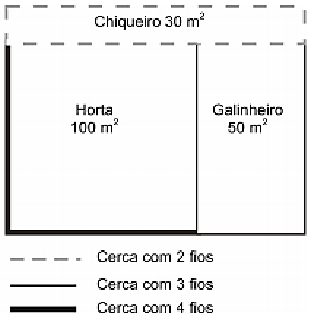
• Faça uma reflexão conjunta sobre o processo de resolução de problemas, destacando as estratégias utilizadas e os desafios enfrentados.
• Reforce a importância da perseverança, criatividade e pensamento crítico na resolução de problemas.

A seguir será proposta a resolução da Questão 5, apresentada no capítulo anterior, aplicando o passo a passo baseado em Polya (1995).

Introdução: O objetivo é resolver uma questão da OBMEP que envolve os conceitos de área e perímetro de quadriláteros por meio da resolução de problemas. A resolução de problemas é uma habilidade essencial que todos devemos desenvolver. Ela é importante porque nos ajuda a enfrentar desafios e encontrar soluções criativas e, através dela, aprendemos a analisar situações, identificar o que precisa ser feito e encontrar maneiras eficazes de resolver os problemas. Essa habilidade não se limita apenas a matemática, mas se aplica a diversas áreas, como ciências, história e até mesmo em situações do cotidiano.

Compreensão do problema: A atividade a ser resolvida segue:

Questão 5 (nº 1 - 2007): João Grilo tem um terreno retangular onde há um galinheiro e um chiqueiro retangulares e uma horta quadrada, cujas áreas estão indicadas na figura.



A) Qual é a área do terreno do João Grilo?

B) Quais são as medidas dos lados do galinheiro?

C) João Grilo cercou a horta, o galinheiro e o chiqueiro com cercas feitas com diferentes números de fios de arame, como indicado na figura. Quantos metros de arame ele usou?

Lendo e compreendendo: João Grilo tem um terreno retangular composto por três figuras planas. A primeira é um galinheiro retangula que tem área $50\ m^2$. A segunda é um chiqueiro retangular que tem área $30\ m^2$. E a terceira é uma horta quadrada que tem área $100\ m^2$. No desenho podemos observar que cada segmento que delimita as divisões do terreno apresenta uma forma, podendo ela ser: um traço pontilhado, que indica uma cerca com 2 fios; um traço fino, que indica uma cerca com 3 fios; ou um traço grosso, que indica uma cerca com 4 fios.

Temos três questionamentos referentes ao problema. Primeiramente desejamos determinar a área do terreno. Em seguida, determinar as medidas dos lados do galinheiro. E por último, determinar o total de metros de arame utilizada para cercar o galinheiro, o chiqueiro e horta, considerando as diferentes quantidades de fios de arame utilizado.

Planejamento: Vamos planejar a solução de cada item.

Para a pergunta do item (A), como temos a medida da área do galinheiro, do chiqueiro e da horta, podemos simplesmente somar esses valores.

Para a pergunta do item (B), podemos observar incialmente que o galinheiro e a horta possuem um lado em comum. Como a horta é um quadrado, é simples determinarmos a medida de saus lados, uma vez que estamos procurando um número que multiplicado por ele mesmo resulta no valor da área da horta. Ao descobrirmos esse valor, basta procuramos qual o número que mutiplicado pelo valor do lado da horta resulta no valor da área do galinheiro.

Para a pergunta do item (C), utilizaremos parte dos dados determinados no item anterior. Vamos somar a medida do lado do quadrado que delimita a horta com a menor medida do lado do galinheiro (medida não comum a horta). Com esse valor, basta procuramos qual o número que multiplicado por ele resulta na área do chiqueiro. De posse de todas as medidas, basta observar a quantidade de traços pontilhados, finos e grossos existem e, em seguida, multiplicar essa quantidade pelo número de fios de arame utilizados para cada tipo de representação.

Execução do plano: Vamos executar o plano traçado anteriormente para cada item.

Para o item (A), propomos somar os valores das áreas de cada espaço. Sabendo que a horta tem 100 m^2 de área, que o galinheiro tem 50 m^2 de área e que o chiqueiro tem 30 m^2 de área, a área total do terreno será

$$A = 100 + 50 + 30 = 180\ m^2$$

Portanto, a área total do terreno será de 180 m^2.

Para o item (B), propomos determinar o valor do lado comum (altura) entre a horta e o galinheiro. Como a horta é um quadrado, temos que sua área é determinada pelo produto de dois números iguais. Se a horta possui 100 m^2, temos que o lado desse quadrado mede 10 m.

O galinheiro é um retângulo e já sabemos que sua altura mede $10\ m$, para determinarmos o valor da base basta considerarmos que como sua área é $50\ m^2$, o número que multiplicado por $10\ m$ e resulta nesse valor é $5\ m$. Portanto, as medidas dos lados do galinheiro são $5\ m$ e $10\ m$.

Para o item (C), propomos inicialmente determinar as medidas dos lados do chiqueiro. Para determinarmos a base, basta somarmos as medidas das bases da horta e do galinheiro, ou seja, $10\ m + 5\ m = 15\ m$. Como sabemos que a área do chiqueiro é de $30\ m^2$, temos que a altura desse retângulo será o número que multiplicado por $15\ m$ resulta nesse valor, ou seja, $2\ m$. Sendo assim, temos que as dimensões do chiqueiro são $15\ m$ e $2\ m$. Agora que sabemos os valores de cada segmento apresentado na figura inicial, basta associarmos as medidas dos contornos de cada região do terreno com o tipo de traço apresentado, considerando que o traço pontilhado indica uma cerca com 2 fios, o traço fino uma cerca com 3 fios e o traço grosso uma cerca com 4 fios. Ao redor do chiqueiro temos apenas traços pontilhados, como o perímetro dessa região é $P = 15 + 15 + 2 + 2 = 34\ m$, temos que o total de fios de arame utilizados foram $34 \times 2 = 68\ m$ de arame. Ao considerarmos o galinheiro vemos que um dos lados dessa região já foi considerada no cálculo do perímetro do chiqueiro, restando a medida dos contornos $10 + 10 + 5 = 25\ m$ de contorno utilizando 3 fios de arame, gastando, portanto, $25 \times 3 = 75\ m$ de arame. Ao consideramos a horta, temos que apenas dois lados da região não foram considerados nas duas análises já feitas, sendo $10 + 10 = 20\ m$ de contorno utilizando 4 fios de arame, gastando, portanto, $20 \times 4 = 80\ m$ de arame. Sendo assim, temos que o total de arame gasto foi $68 + 75 + 80 = 223\ m$ de arame.

Verificação: Para determinar a medida do lado da horta no item (B), poderíamos ter utilizado os conhecimentos de raiz quadrada para determinar a medida do lado do quadrado. Sobre o quadrado sabemos que $A = l^2 = 100\ m^2$, logo $l = \sqrt{100} = 10\ m$. E assim seguir com a resolução da atividade.

Retrospectiva: Considere que João Grilo deseja colocar 3 galinhas em cada m^2 do galinheiro. Desse modo, quantas galinhas ele terá em seu galinheiro?

Sabemos que o galinheiro possui $50\ m^2$, e que para cada m^2 João Grilo pretende colocar 3 galinhas. Observe o quadro a seguir:

m²	Número de galinhas
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

Note que para cada valor do m^2 basta multiplicarmos por 3 para obtermos o número de galinhas no galinheiro. Desse modo, temos

$$50 \times 3 = 150$$

Portanto, no galinheiro de João Grilo terão 150 galinhas.

Conclusão: A perseverança, criatividade e pensamento crítico desempenham um papel fundamental na resolução de problemas. Ao combinarmos essas habilidades, somos capazes de enfrentar desafios de maneira eficaz, superando obstáculos e encontrando soluções mais eficientes. Na atividade em questão, correlacionar os conhecimentos sobre as características do quadrado e do retângulo, com determinação de seu perímetro e área, permitiu resolver as questões propostas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após os estudos realizados nesta dissertação, percebeu-se que o ensino de perímetro e área estão diretamente relacionados com o cotidiano dos estudantes. Como base no que foi estudado, de acordo com a BNCC vemos que esses conceitos matemáticos fundamentais são essenciais para desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes, além de promover habilidades de resolução de problemas e tomada de decisões. Compreender o perímetro permite aos alunos calcular a medida total dos contornos de figuras, enquanto a compreensão da área permite que eles determinem a medida da superfície dessas figuras. Essas habilidades matemáticas têm aplicações práticas em diversos campos, como arquitetura, engenharia e ciências naturais, e são fundamentais para a compreensão do mundo ao nosso redor.

Notamos que a prática da resolução de problemas desempenha um papel importante no ensino de matemática na educação básica, uma vez que aparece como parte da matriz de saberes do Currículo do Espírito Santo. Ao envolver os estudantes em situações desafiadoras que exigem a aplicação de conceitos matemáticos, a resolução de problemas estimula o pensamento crítico, a criatividade e a habilidade de encontrar soluções. Essa abordagem promove a autonomia dos alunos, permitindo que eles desenvolvam estratégias próprias para lidar com obstáculos e desenvolvam confiança em suas habilidades matemáticas. A resolução de problemas também ajuda a estabelecer conexões entre a matemática e o mundo real, mostrando aos alunos como os conceitos matemáticos são aplicados em situações práticas.

Ao propor desafios matemáticos mais complexos do que os habitualmente trabalhos em listas simples ou nos livros didáticos, a OBMEP estimula o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de raciocínio dos estudantes. A resolução de problemas torna-se uma importante ferramenta para o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos, permitindo que os alunos apliquem conceitos e estratégias aprendidos em situações reais. A resolução de questões como as propostas pelas provas da OBMEP promove o engajamento dos estudantes, uma vez que eles têm a oportunidade de se desafiarem e testarem suas habilidades. Dessa forma, relacionar a OBMEP com a resolução de problemas durante o processo de ensino-aprendizagem amplia o horizonte dos alunos, fortalece sua confiança em matemática e os prepara para enfrentar desafios.

Para ilustrar a incidência das questões explorando os conceitos de perímetro e área nas provas da segunda fase do Nível 1 da OBMEP, considerando o levantamento de dados apresentados após análise documental, organizamos a seguinte tabela:

Número de questões por ano de Aplicação da OBMEP.

Ano	**Número de questões**
2005	2
2006	2
2007	2
2008	1
2009	1
2010	2
2011	1
2012	2
2013	1
2014	2
2015	1
2016	2
2017	1
2018	1
2019	1
2021	1
2022	1

Fonte: Do autor.

É possível notar que em todas as edições da avaliação houve a presença de pelo menos uma questão abordando os conhecimentos de perímetro e/ ou área. Mostrando a relevância do conteúdo na educação básica.

Com este trabalhou buscou-se oferecer subsídios para que professores de matemática da educação básica possam recorrer aos conteúdos de perímetro e área para aproximar os estudantes da prática de resolução de problemas, fazendo uso do banco de questões da OBMEP estruturado ao longo dessa pesquisa. Dessa forma, esperamos que este estudo possa contribuir academicamente, estabelecendo uma base para pesquisas futuras e oferecendo suporte aos professores e estudantes interessados no assunto abordado.

Por fim, destacamos que além de sua importância como uma ciência em si, a Matemática ocupa um lugar de destaque na formação dos cidadãos, sendo parte integrante dos currículos das instituições educacionais. Por esse motivo, este estudo serve como uma fonte de reflexão para os profissionais do ensino, incentivando-os a buscar capacitação e aprimoramento em seu trabalho, visando alcançar um processo de ensino-aprendizagem mais eficaz. Essa pesquisa buscou contribuir para a transformação do cenário educacional em todos os níveis, além de servir como referência para futuras produções acadêmicas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. Didática da resolução de problemas de matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, Luiz Roberto. Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Teláris matemática, 6º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. Teláris matemática, 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Educação do Espírito Santo. Currículo do Estado do Espírito Santo. Área de Conhecimento: Matemática. Vitória: Secretaria de Educação do Espírito Santo, 2018.

FERREIRA, Lenilson do Carmo. O uso de resolução de problemas no auxílio do ensino da geometria plana. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 100 f. 2023.

GUIMARÃES, Elder da Silva Ferreira. Técnicas de resolução de problemas matemáticos a partir de questões do ENEM: orientações frente às dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Piauí. Teresina, 72 f. 2023.

LIMA, Elon Lajes. Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança. Rio De Janeiro (RJ): Sociedade Brasileira De Matemática, 2009.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria?. In: A educação matemática em revista. N. 4. Campinas. 1995.

OBMEP. Material Didático: Provas e Soluções [edições 2005 até 2022]. Disponível em: < https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 04 de mar. de 2023.

OBMEP. Perguntas frequentes. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/faq.htm>. Acesso em: 27 de mar. de 2021.

OBMEP. Quem somos: Apresentação. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 27 de mar. de 2021.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático. [Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo]. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POLYA, George. O ensino por meio de problemas. In: Revista do Professor de Matemática. N. 7. São Paulo. 1985.

SANTOS, Josiel A.; FRANÇA, Kleber V.; SANTOS, Lúcia, S. B. Dificuldades na Aprendizagem de Matemática. 2007. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2017.

SOUZA, Levi Rodrigo Pinto de. Sequência didática e OBMEP: uma proposta para o ensino de áreas e perímetros de polígonos por meio da resolução de problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Semi-árido. Mossoró, 132 f. 2020.

SOUZA, Railson Pereira de. A importância da argumentação matemática na resolução de problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 78 f. 2023.