



UNIVERSIDADE FEDERAL  
DO ESPÍRITO SANTO

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO**

**MICHELLE ADRIANE DE OLIVEIRA LAUDARES**

**Uma pesquisa documental sobre o raciocínio proporcional em livros  
didáticos nacionais de Matemática do PNLD 2020**

**VITÓRIA – ES  
Junho/2023**



**Centro de Educação**

**Programa de Pós-Graduação em Educação**

**MICHELLE ADRIANE DE OLIVEIRA LAUDARES**

**Uma pesquisa documental sobre o raciocínio proporcional em  
livros didáticos nacionais de Matemática do PNL D 2020**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação, da linha de pesquisa Educação e Linguagens: Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

**VITÓRIA – ES  
Junho/2023**

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

L367p      Laudares, Michelle Adriane de Oliveira, 1977-  
Uma pesquisa documental sobre o raciocínio proporcional em livros didáticos nacionais de Matemática do PNLD 2020 / Michelle Adriane de Oliveira Laudares. - 2023.  
267 f. : il.

Orientadora: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.  
Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Raciocínio proporcional. 2. Razão e proporção. 3. Livros didáticos. 4. Ensino Fundamental. 5. Matemática - Estudo e ensino. 6. Compreensão. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

## MICHELLE ADRIANE DE OLIVEIRA LAUDARES

### UMA PESQUISA DOCUMENTAL SOBRE O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM LIVROS DIDÁTICOS NACIONAIS DE MATEMÁTICA DO PNLD 2020

Tese apresentada ao Curso de  
Doutorado em Educação da  
Universidade Federal do Espírito  
Santo como requisito parcial para  
obtenção do Grau de Doutor em  
Educação.

Aprovada em 26 de junho de 2023.

#### COMISSÃO EXAMINADORA

**Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner**  
Universidade Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Carina Copatti**  
Universidade Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Jaqueline Magalhães Brum**  
Universidade Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Eleni Bisognin**  
Universidade Franciscana

**Professor Doutor Wanderley Moura Rezende**  
Universidade Federal Fluminense

**Professor Doutor Jorge Henrique Gualandi**  
Instituto Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Vera Lucia Merlini**  
Universidade Federal de Santa Cruz

PPGE - Programa de Pós-Graduação em Educação/CE/UFES - Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória-ES  
Telefone: (27) 4009-2547/4009-2549 (fax) / E-mail: ppgeufes@yahoo.com.br



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**

Ata da sessão da defesa de Tese do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE), do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, do discente **Michelle Adriane de Oliveira Laudares**, candidata ao título de Doutora em Educação, com defesa realizada às 09 horas do dia 26 de junho do ano dois mil e vinte e três, presencial e remotamente por meio de videoconferência, conforme recomendado pela Portaria Normativa 03/2020 da PRPPG. A presidente da Banca, Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, apresentou os demais membros da comissão examinadora, constituídos pelos Doutores: Carina Copatti, Jaqueline Magalhães Brum, Eleni Bisognin, Wanderley Moura Rezende, Jorge Henrique Gualandi e Vera Lucia Merlini. Em seguida, cedeu a palavra à candidata, que em trinta minutos apresentou sua Tese intitulada “**UMA PESQUISA DOCUMENTAL SOBRE O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM LIVROS DIDÁTICOS NACIONAIS DE MATEMÁTICA DO PNLD 2020**”. Terminada a apresentação da aluna, a presidente retomou a palavra e a cedeu aos membros da Comissão Examinadora, um a um, para procederem à arguição. A presidente convidou a Comissão Examinadora a se reunir em separado para deliberação. Ao final, a Comissão Examinadora retornou e a presidente informou aos presentes que a Tese foi **APROVADA**. A Presidente alertou que a aprovada somente terá direito ao título de Doutora após o cumprimento de todas as obrigações Curriculares e Regimentais do PPGE e da homologação do resultado da defesa pelo Colegiado Acadêmico. Então, deu por encerrada a sessão da qual se lavra a presente ata, que vai assinada pelos membros da banca examinadora.

Vitória, 26 de junho de 2023.

**Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner**  
Universidade Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Carina Copatti**  
Universidade Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Jaqueline Magalhães Brum**  
Universidade Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Eleni Bisognin**  
Universidade Franciscana

**Professor Doutor Wanderley Moura Rezende**  
Universidade Federal Fluminense

**Professor Doutor Jorge Henrique Gualandi**  
Instituto Federal do Espírito Santo

**Professora Doutora Vera Lucia Merlini**  
Universidade Federal de Santa Cruz

PPGE - Programa de Pós-Graduação em Educação/CE/UFES - Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória-ES  
Telefone: (27) 4009-2547/4009-2549 (fax) / E-mail: ppgeufes@yahoo.com.br



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

### REGISTRO DE JULGAMENTO DA TESE DO CANDIDATO AO GRAU DE DOUTOR PELO PPGE/UFES

A Comissão Examinadora da Tese de Doutorado intitulada “**UMA PESQUISA DOCUMENTAL SOBRE O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM LIVROS DIDÁTICOS NACIONAIS DE MATEMÁTICA DO PNL D 2020**”, elaborada por **Michelle Adriane de Oliveira Laudares**, candidato ao Grau de Doutor em Educação, recomendou, após apresentação da Tese, realizada no dia 26 de junho de 2023, que o mesmo seja (assinale um dos itens abaixo):

(x ) Aprovado

---



---

( ) Reprovado

---



---

Os membros da Comissão deverão indicar a natureza de sua decisão através de sua assinatura na coluna apropriada que segue:

**Aprovada**

**Reprovada**

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

---

Carina Copatti

---

Jaqueline Magalhães Brum

---

Eleni Bisognin

---

Wanderley Moura Rezende

---

Jorge Henrique Gualandi

---

Vera Lucia Merlini

---

PPGE - Programa de Pós-Graduação em Educação/CE/UFES - Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória-ES  
Telefone: (27) 4009-2547/4009-2549 (fax) / E-mail: ppgeufes@yahoo.com.br



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**PROTOCOLO DE ASSINATURA**



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por  
CARINA COPATTI - SIAPE 1211162  
Departamento de Educação, Política e Sociedade - DEPS/CE  
Em 04/07/2023 às 08:31

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:  
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/741453?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**PROTOCOLO DE ASSINATURA**



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por  
JAQUELINE MAGALHAES BRUM - SIAPE 1989230  
Departamento de Teorias de Ensino e Práticas Educacionais - DTEPE/CE  
Em 04/07/2023 às 11:47

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:  
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/741737?tipoArquivo=O>





UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**PROTOCOLO DE ASSINATURA**



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por  
WAGNER DOS SANTOS - SIAPE 2374772  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE/CE  
Em 19/07/2023 às 10:47

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:  
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/752760?tipoArquivo=O>

## DEDICATÓRIA

*Dedico ao **João Paulo**, que me acompanha e torce por mim a cada novo dia, tanto em dias de sol, como também em dias nublados e chuvosos. Sua presença é meu privilégio, e torna minha alegria completa.*

*Dedico à minha estimada **Tia Wanny**, que sempre e desde sempre me ensinou a valorizar os estudos, as leituras e a perseguir o conhecimento, me incentivando a ser uma professora capacitada e cada vez melhor preparada para meus alunos. E por manter o carinho e a amizade comigo desde que eu era pequenininha. A senhora é meu exemplo!*

*Dedico à **Carina**, que, por presente de Deus, se fez minha irmã; e me fortalece diariamente com suas orações, conselhos, carinho e amizade!*

## AGRADECIMENTOS

*Meu coração é profundamente grato ao meu Deus, Aquele que do nada, tudo fez! O Criador dos céus e da terra, que muito me ama e que tem me inspirado a cada dia com seus atributos de sabedoria, conhecimento, criatividade, inteligência. À Ele, minha gratidão por todo aprendizado, por cada página escrita, pelas descobertas e caminhos desvendados nestes anos de doutoramento.*

*Minhas conquistas refletem a dedicação dos meus pais! Eles me ensinaram o caminho pelo qual eu deveria andar. Sempre os tenho comigo e consigo ouvir os conselhos para cada novo desafio. Obrigada por tudo o que fizeram por mim, por todo ensinamento e por terem sido exemplos de cristãos, de coragem, de empenho, de inconformismo. Eu sou grata por terem, mais do que tudo, priorizado a minha formação espiritual, por terem me apresentado a Deus, me ensinado o valor precioso e eterno do Senhor Jesus e me mostrado a importância de buscar a direção do Espírito Santo. Ainda, sobretudo, agradeço por terem me moldado com autenticidade e honestidade. Minha gratidão por eles é maior do que a dor da saudade! Antônio e Carmen Lúcia, eternos dentro de mim! Eu sinto muito orgulho por ter tido vocês como meus pais!*

*Com o coração grato, quero agradecer à Profa. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner por todo ensinamento ao longo dos quatro anos de doutorado. Sempre aberta e disponível para compartilhar sobre os conhecimentos de Matemática e Educação Matemática. Obrigada pela jornada, pelo convívio. Vencemos os desafios, a distância, a pandemia, as doenças, o medo, a ansiedade, as limitações. Conquistamos o carinho, a admiração, o respeito, o aprendizado. Concluímos esta tese. Minha gratidão, minha amizade e meu reconhecimento à sua pessoa.*

*Agradeço aos professores da banca examinadora, tanto de qualificação como de defesa de tese, pelas contribuições significativas dadas ao trabalho desenvolvido: Carina Copatti, Eleni Bisognin, Jaqueline Magalhães Brum, Jorge Henrique Gualandi, Vera Lucia Merlini e Wanderley Moura Rezende. E à professora Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca, professora titular da Faculdade de Educação da UFMG, pelo estágio, orientações e aprendizado a mim concedidos.*

*Agradeço ao IFMG, por ter aberto as portas do doutorado pelo convênio interinstitucional junto à UFES. E pelo mérito da licença à qualificação a mim concedida. Agradeço à UFES e aos que foram meus professores neste programa de doutorado pelos ensinamentos, conversas, orientações e caminhos apontados. Aos meus colegas de linha de pesquisa em Educação Matemática: Evandro e Nádia. A nossa caminhada foi difícil, mas chegamos ao destino! Obrigada por todo compartilhar, de conhecimento e emocional, ao longo destes quatro anos.*

*Agradeço a minha família! Em primeiro lugar, ao meu marido João Paulo, que chegou no meio desta jornada e se colocou como abrigo seguro em todas as situações! Agradeço pela compreensão, pelo apoio e incentivo. Por me ajudar em todas as coisas necessárias para que eu pudesse me debruçar de corpo e alma ao texto, à pesquisa e aos estudos. Sou grata aos meus irmãos, cunhadas e sobrinhos por sempre torcerem por mim, me incentivarem e estarem disponíveis para o que eu precisasse. E por compreenderem algumas ausências quando a imersão na pesquisa foi fundamental para a construção desta tese. Todos vocês são a expressão do meu amor, admiração e alegria!*

*Agradeço aos meus amigos e amigas! Aos meus familiares e a toda parentela! Agradeço a cada um que torceu por mim, contribuindo direta e indiretamente para o alcance satisfatório desta pesquisa. Alguns, mesmo sem saber ao certo o que eu estava fazendo, me apoiaram.*

*Meu muito obrigada!*

## RESUMO

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) é um documento orientador que define um conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver durante a Educação Básica, garantindo a mesma oportunidade a todos os alunos brasileiros. Para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018) estabelece a importância dos alunos saberem lidar com os conjuntos dos números racionais, assunto que permeia outros conhecimentos matemáticos e outras disciplinas, como razão e proporção. Os conceitos de números racionais estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante seus anos de estudo (BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983). Para Kieren (1975), entender as ideias dos números racionais requer uma experiência adequada com suas variadas interpretações. O livro didático é um dos recursos que o professor tem a seu dispor para utilizar no processo de ensino-aprendizagem. Esta é uma tese em Educação Matemática que investigou o raciocínio proporcional em livros didáticos. Tem por metodologia a pesquisa qualitativa e documental baseada em Lüdke e André (2013). O processo metodológico passou pela análise de conteúdo dos mesmos autores. Foi utilizado um método de análise qualitativa documental elaborado por pesquisadores australianos (SHIELD; DOLE, 2013) para analisar três coleções de livros didáticos de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Essa metodologia permitiu responder às perguntas norteadoras da pesquisa "Como o raciocínio proporcional é abordado em livros didáticos de Matemática adotados pelas escolas públicas e aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019) destinados aos anos finais do ensino fundamental? Quais das cinco chaves e objetivos de aprendizagem dos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013) encontramos nestes livros didáticos?" Os resultados apontam que as três coleções de livros didáticos analisados atendem e estão em conformidade aos pressupostos da BNCC (BRASIL, 2018), todavia, são superficiais em suas abordagens e não promovem uma compreensão do raciocínio proporcional. Ainda, as ideias dos pesquisadores australianos sobre a representação do raciocínio proporcional não foram encontradas nestes livros.

**Palavras-chave:** Raciocínio proporcional; Razão e proporção; Livros didáticos; Ensino fundamental; Matemática - Estudo e ensino; Compreensão.

## ABSTRACT

The National Common Curricular Base - BNCC (BRASIL, 2018) is a guiding document that defines a set of essential learning that students must develop during Basic Education, guaranteeing the same opportunity to all Brazilian students. For the final years of Elementary School, the BNCC (BRASIL, 2018) establishes the importance of students knowing how to deal with sets of rational numbers, a subject that permeates other mathematical knowledge and other disciplines, such as ratio and proportion. Rational number concepts are among the most complex and important mathematical ideas that children encounter during their schooling years (BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983). For Kieren (1975), understanding the ideas of rational numbers requires adequate experience with their varied interpretations. The textbook is one of the resources that the teacher has at his disposal to use in the teaching-learning process. This is a thesis in Mathematics Education that investigated proportional reasoning in textbooks. Its methodology is qualitative and documentary research based on Lüdke and André (2013). The methodological process went through the content analysis of the same authors. A qualitative document analysis method developed by Australian researchers (SHIELD; DOLE, 2013) was used to analyze three collections of Mathematics textbooks for the final years of Elementary School. This methodology allowed answering the guiding questions of the research "How is proportional reasoning addressed in Mathematics textbooks adopted by public schools and approved in the PNLD 2020 (BRASIL, 2019) intended for the final years of elementary school? Which of the five keys and objectives of learning by Australian researchers Shield and Dole (2013) found in these textbooks?" The results indicate that the three collections of textbooks analyzed meet and comply with the assumptions of the BNCC (BRASIL, 2018), however, they are superficial in their approaches and do not promote an understanding of proportional reasoning. Also, the Australian researchers' ideas about the representation of proportional reasoning were not found in these books.

**Keywords:** Proportional reasoning; Ratio and proportion; Textbooks; Elementary School; Mathematics Education; Comprehension.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES - QUADROS

<b>Quadro 01</b> – Trabalhos Internacionais .....	58
<b>Quadro 02</b> – Pesquisa Portal CAPES em 15/11/2019 – Etapa 1 .....	60
<b>Quadro 03</b> – Pesquisa Portal CAPES em 15/11/20...19 – Etapa 2 .....	61
<b>Quadro 04</b> – Pesquisa Portal CAPES em 15/11/2019 – Etapa 3 .....	62
<b>Quadro 05</b> – Trabalhos Nacionais – Teses até 2018 .....	69
<b>Quadro 06</b> – Trabalhos Nacionais – Dissertações até 2018 .....	82
<b>Quadro 07</b> – Trabalhos Nacionais – De 2019 a 2022 .....	83
<b>Quadro 08</b> – Trabalhos Nacionais – Dissertações de 2019 a 2022 .....	88
<b>Quadro 09</b> – Conhecimentos e Habilidades que envolvem o raciocínio proporcional na BNCC .....	95
<b>Quadro 10</b> – Exemplares distribuídos por título do 6º ano .....	124
<b>Quadro 11</b> – Exemplares distribuídos por título do 7º ano .....	124
<b>Quadro 12</b> – Exemplares distribuídos por título do 8º ano .....	125
<b>Quadro 13</b> – Exemplares distribuídos por título do 9º ano .....	125
<b>Quadro 14</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 6º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018) .....	139
<b>Quadro 15</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 7º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018) .....	152
<b>Quadro 16</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 8º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018) .....	159
<b>Quadro 17</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 9º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018) .....	164

<b>Quadro 18</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) na Coleção Convergências Matemáticas (Chavante, 2018) .....	165
<b>Quadro 19</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 6º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018) .....	181
<b>Quadro 20</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 7º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018) .....	192
<b>Quadro 21</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 8º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018) .....	197
<b>Quadro 22</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 9º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018) .....	202
<b>Quadro 23</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) na Coleção Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018) .....	203
<b>Quadro 24</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 6º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018) .....	217
<b>Quadro 25</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 7º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018) .....	223
<b>Quadro 26</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 8º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018) .....	229
<b>Quadro 27</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro do 9º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018) .....	233
<b>Quadro 28</b> – Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) na Coleção A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018) .....	234
<b>Quadro 29</b> – Resultados das Evidências Encontradas para as Chaves de Shield e Dole (2013) .....	240



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES - FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Ilustração de atividade desenvolvida em sala de aula .....	28
<b>Figura 2</b> – Capa do volume do 6º ano .....	127
<b>Figura 3</b> – Habilidades .....	131
<b>Figura 4</b> – A utilização das frações .....	133
<b>Figura 5</b> – Fração como parte de um inteiro .....	133
<b>Figura 6</b> – Fração de uma quantidade .....	134
<b>Figura 7</b> – Tipos de fração .....	135
<b>Figura 8</b> – Fração na reta numérica .....	135
<b>Figura 9</b> – Frações equivalentes .....	136
<b>Figura 10</b> – Comparação de frações .....	136
<b>Figura 11</b> – Divisão de frações .....	138
<b>Figura 12</b> – Números racionais .....	144
<b>Figura 13</b> – Números racionais na reta numérica .....	145
<b>Figura 14</b> – Operações com números racionais .....	146
<b>Figura 15</b> – Operações com números racionais .....	147
<b>Figura 16</b> – Operações com números racionais - multiplicação e divisão .....	147
<b>Figura 17</b> – Operações com números racionais .....	148
<b>Figura 18</b> – Operações com números racionais .....	148
<b>Figura 19</b> – Uso autêntico de razão .....	149
<b>Figura 20</b> – Uso autêntico de razão .....	149

<b>Figura 21</b> – Relação multiplicativa de razão .....	149
<b>Figura 22</b> – Grandezas diretamente proporcionais .....	150
<b>Figura 23</b> – Representação gráfica de proporção .....	151
<b>Figura 24</b> – Gráfico de situação proporcional .....	151
<b>Figura 25</b> – Definição de razão .....	155
<b>Figura 26</b> – Propriedade fundamental das proporções .....	156
<b>Figura 27</b> – Grandezas diretamente proporcionais .....	157
<b>Figura 28</b> – Grandezas inversamente proporcionais .....	157
<b>Figura 29</b> – Exercícios com contextualização .....	157
<b>Figura 30</b> – Tabelas em situações proporcionais .....	162
<b>Figura 31</b> – Capa do livro 6º ano .....	169
<b>Figura 32</b> – Introdução aos números racionais .....	173
<b>Figura 33</b> – Atividades envolvendo frações .....	175
<b>Figura 34</b> – Atividades envolvendo frações .....	176
<b>Figura 35</b> – Atividades envolvendo frações equivalentes .....	177
<b>Figura 36</b> – Atividades sobre comparação de frações .....	178
<b>Figura 37</b> – Atividades sobre adição e subtração de frações .....	179
<b>Figura 38</b> – Atividades sobre adição e subtração de frações .....	179
<b>Figura 39</b> – Frações como parte de um inteiro .....	184
<b>Figura 40</b> – Frações como razão .....	185
<b>Figura 41</b> – Frações como razão .....	185

<b>Figura 42</b> – Frações na reta numérica .....	186
<b>Figura 43</b> – Comparação de frações .....	186
<b>Figura 44</b> – Adição e subtração de frações .....	187
<b>Figura 45</b> – Razão: escala .....	188
<b>Figura 46</b> – Porcentagem e razão .....	189
<b>Figura 47</b> – Proporção .....	189
<b>Figura 48</b> – Proporção .....	190
<b>Figura 49</b> – Grandezas diretamente proporcionais .....	191
<b>Figura 50</b> – Frações equivalentes .....	194
<b>Figura 51</b> – Comparação de razões .....	195
<b>Figura 52</b> – Identificação de razões equivalentes .....	195
<b>Figura 53</b> – Representações de situações de proporção .....	196
<b>Figura 54</b> – Razão entre grandezas de naturezas diferentes .....	199
<b>Figura 55</b> – Uso de situações da vida real .....	199
<b>Figura 56</b> – Relação multiplicativa em situações proporcionais .....	200
<b>Figura 57</b> – Grandezas proporcionais .....	201
<b>Figura 58</b> – Capa do livro 6º ano .....	208
<b>Figura 59</b> – Origem da fração .....	212
<b>Figura 60</b> – Ideias de fração .....	213
<b>Figura 61</b> – Frações equivalentes .....	213
<b>Figura 62</b> – Atividade contendo gráfico .....	214

<b>Figura 63</b> – Adição e subtração de frações .....	214
<b>Figura 64</b> – Problemas com frações .....	215
<b>Figura 65</b> – A forma mista de números racionais .....	215
<b>Figura 66</b> – Porcentagem .....	216
<b>Figura 67</b> – Números proporcionais .....	221
<b>Figura 68</b> – Grandezas proporcionais e tabelas .....	221
<b>Figura 69</b> – Grandezas proporcionais e gráficos .....	222
<b>Figura 70</b> – Regra de Três simples .....	222
<b>Figura 71</b> – Razões equivalentes .....	225
<b>Figura 72</b> – Grandezas proporcionais .....	226
<b>Figura 73</b> – Grandezas não proporcionais .....	226
<b>Figura 74</b> – Representação de grandezas proporcionais .....	227
<b>Figura 75</b> – Representação de grandezas não proporcionais .....	227
<b>Figura 76</b> – Razões especiais .....	228
<b>Figura 77</b> – Segmentos proporcionais .....	231
<b>Figura 78</b> – Polígonos semelhantes .....	232
<b>Figura 79</b> – Triângulos semelhantes .....	232
<b>Figura 80</b> – Similaridades .....	244
<b>Figura 81</b> – Similaridades .....	244
<b>Figura 82</b> – Similaridades .....	244
<b>Figura 83</b> – Diferenças .....	246

<b>Figura 84 – Diferenças</b> .....	246
<b>Figura 85 – Diferenças</b> .....	247
<b>Figura 86 – Diferenças</b> .....	247
<b>Figura 87 – Diferenças</b> .....	248
<b>Figura 88 – Tarefas comuns 6º ano</b> .....	249
<b>Figura 89 – Tarefas comuns 6º ano</b> .....	249
<b>Figura 90 – Tarefas comuns 6º ano</b> .....	249
<b>Figura 91 – Tarefas comuns 6º ano</b> .....	250
<b>Figura 92 – Tarefas comuns 6º ano</b> .....	250
<b>Figura 93 – Tarefas comuns 6º ano</b> .....	250
<b>Figura 94 – Tarefas comuns 7º ano</b> .....	251
<b>Figura 95 – Tarefas comuns 7º ano</b> .....	251
<b>Figura 96 – Tarefas comuns 7º ano</b> .....	251
<b>Figura 97 – Tarefas comuns 7º ano</b> .....	252
<b>Figura 98 – Tarefas comuns 7º ano</b> .....	252
<b>Figura 99 – Tarefas comuns 7º ano</b> .....	252

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

ENEM - Exame Nacional de Ensino Médio

IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais

LDB - Leis de Diretrizes e Bases da Educação

PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático

SISU - Sistema de Seleção Unificada

## SUMÁRIO

<b>1. APRESENTAÇÃO DA PESQUISA .....</b>	<b>27</b>
1.1. Problemática e Formulação de Tese .....	37
1.2. Perguntas Norteadoras da Pesquisa .....	43
1.3. Objetivos Gerais .....	43
1.4. Objetivos Específicos .....	44
1.5. Panorama da Tese .....	45
<b>2. MAPEAMENTO DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA .....</b>	<b>46</b>
2.1. Mapeamento das pesquisas sobre raciocínio proporcional: um panorama da produção internacional .....	46
2.2. Mapeamento das pesquisas sobre raciocínio proporcional: um panorama da produção brasileira .....	59
2.2.1. Teses .....	63
2.2.2. Dissertações .....	69
2.2.3. Pesquisa no banco de dados da CAPES 2019 A 2022 .....	83
2.2.4. Considerações sobre as pesquisas do Mapeamento Nacional .....	88
<b>3. ENQUADRAMENTO TEÓRICO .....</b>	<b>89</b>
3.1. Educação Matemática .....	89
3.2. Documentos Oficiais Norteadores dos Currículos .....	93
3.3. Livro Didático .....	99
3.4. Raciocínio Proporcional .....	101
3.5. Frações e Seus Significados .....	104
3.6. Razão e Proporção .....	107
3.7. A ferramenta Regra de Três .....	111
3.8. As Pesquisas de Shield e Dole (2013) sobre Raciocínio Proporcional e o Livro Didático .....	113
<b>4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>119</b>
4.1. Estrutura Teórica para Análise .....	120
4.2. Seleção dos Livros Didáticos para Análise .....	123

<b>5. ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL .....</b>	<b>126</b>
<b>5.1. Análise da Coleção CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA .....</b>	<b>127</b>
<b>5.1.1. 1ª etapa de análise feita para a coleção CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA: do 6º ao 9º ano do ensino fundamental .....</b>	<b>127</b>
<b>5.1.2. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 6º ano .....</b>	<b>128</b>
<b>5.1.3. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 6º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....</b>	<b>132</b>
<b>5.1.4. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 7º ano .....</b>	<b>140</b>
<b>5.1.5. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 7º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....</b>	<b>143</b>
<b>5.1.6. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 8º ano .....</b>	<b>153</b>
<b>5.1.7. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 8º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....</b>	<b>155</b>
<b>5.1.8. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 9º ano .....</b>	<b>160</b>
<b>5.1.9. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 9º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....</b>	<b>161</b>
<b>5.1.10. Evidências encontradas dos indicadores de Shield e Dole (2013) para a Coleção CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICAS .....</b>	<b>165</b>
<b>5.2. Análise da Coleção MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA .....</b>	<b>169</b>
<b>5.2.1. 1ª etapa de análise feita para a coleção MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA: do 6º ao 9º ano do ensino fundamental .....</b>	<b>169</b>
<b>5.2.2. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 6º ano .....</b>	<b>170</b>
<b>5.2.3. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 3ª etapa de análise do livro 6º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) ...</b>	<b>173</b>
<b>5.2.4. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 7º ano .....</b>	<b>182</b>
<b>5.2.5. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 3ª etapa de</b>	



análise do livro 7º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) ...	184
5.2.6. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 8º ano .....	193
5.2.7. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 3ª etapa de análise do livro 8º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) ...	194
5.2.8. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 9º ano .....	198
5.2.9. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 3ª etapa de análise do livro 9º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) ...	199
5.2.10. Evidências encontradas dos indicadores de Shield e Dole (2013) para a Coleção MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA .....	203
5.3. Análise da Coleção A CONQUISTA DA MATEMÁTICA .....	208
5.3.1. 1ª etapa de análise feita para a coleção A CONQUISTA DA MATEMÁTICA: do 6º ao 9º ano do ensino fundamental .....	208
5.3.2. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 6º ano .....	209
5.3.3. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 6º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....	211
5.3.4. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 7º ano .....	218
5.3.5. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 7º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....	220
5.3.6. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 8º ano .....	224
5.3.7. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 8º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....	225
5.3.8. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 9º ano .....	230
5.3.9. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 9º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013) .....	231
5.3.10. Evidências encontradas dos indicadores de Shield e Dole (2013) para a Coleção A CONQUISTA DA MATEMÁTICA .....	234

<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>238</b>
<b>6.1. Descobertas e Reflexões para Os Objetivos de Pesquisa .....</b>	<b>238</b>
<b>6.1.1. Sobre o objetivo geral .....</b>	<b>238</b>
<b>6.1.2. Sobre os objetivos específicos .....</b>	<b>244</b>
<b>6.1.2.1. Primeiro objetivo específico .....</b>	<b>244</b>
<b>6.1.2.1.1. Similaridades .....</b>	<b>244</b>
<b>6.1.2.1.2. Diferenças .....</b>	<b>246</b>
<b>6.1.2.2. Segundo objetivo específico .....</b>	<b>248</b>
<b>6.1.2.2.1. Primeira pergunta associada .....</b>	<b>249</b>
<b>6.1.2.2.2. Segunda pergunta associada .....</b>	<b>252</b>
<b>6.1.2.2.3. Terceira pergunta associada .....</b>	<b>253</b>
<b>6.2. Descobertas e Reflexões Encontradas para A Tese .....</b>	<b>254</b>
<b>6.3. Limites e Possibilidades .....</b>	<b>256</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>259</b>

## 1. APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

A motivação para a realização deste trabalho decorre das minhas<sup>1</sup> práticas profissionais enquanto professora de Contabilidade na Educação Básica, Técnica e Tecnológica do Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG, *Campus* Sabará. Ao longo da minha carreira docente, iniciada em fevereiro de 2011, tenho sido desafiada a contribuir para a compreensão da matéria contábil apesar do cenário de muitas dificuldades por parte dos alunos com o raciocínio matemático e com a interpretação de dados ou fatos. Trabalhar as disciplinas de contabilidade em cursos tecnológicos de administração, afins a área do conhecimento contábil, tem sido tarefa de instigar o raciocínio matemático, proporcional, lógico e interpretativo dos alunos. É um trabalho que requer ir muito além do conteúdo programático das disciplinas contábeis, tornando a proposta curricular desafiadora para mim a cada nova turma de alunos.

É característica de um curso tecnológico ser curso superior de formação especializada em áreas científicas e tecnológicas, que confere ao diplomado competências a fim de atuar em áreas profissionais específicas, caracterizadas por eixos tecnológicos, com o grau de Tecnólogo. O ingresso dos alunos em cursos tecnológicos no IFMG *Campus* Sabará se dá por meio do Sistema de Seleção Unificada - SISU (50% das vagas) e pela nota do Exame Nacional de Ensino Médio - ENEM (50% das vagas). O único requisito é que o aluno não tenha nota zero em nenhuma das provas do ENEM. Historicamente, temos observado que muitos dos candidatos aos cursos tecnológicos não o fazem como sua primeira opção de curso, mas aproveitando a oportunidade para estudar em uma instituição de ensino público federal nas proximidades da capital mineira. Também, para a formação da turma, o IFMG *Campus* Sabará tem realizado várias chamadas de provimento de vagas. Essa condição implica em formação de turmas muito heterogêneas, desniveladas em relação a bagagem de conhecimentos da educação básica.

---

<sup>1</sup> Nesta tese, usaremos o verbo na 1ª pessoa do singular quando relatar as experiências pessoais da autora. E usaremos o verbo na 1ª pessoa do plural quando se referir à autora e sua orientadora.

Ao longo dos anos, tenho percebido que a teoria contábil é bem assimilada pelos alunos da modalidade de ensino tecnológico. Contudo, quando a disciplina alcança o momento da aplicação das teorias, métodos, fórmulas e análises de dados, os obstáculos se estabelecem frente ao desenvolvimento do novo saber. Isto exige, tanto de mim, como dos alunos, estímulos que percorrem toda a formação e raciocínio da escrita Matemática. Por exemplo, ao lecionar a disciplina de contabilidade de custos, em determinado momento da disciplina, o aluno compreende como calcular o custo unitário de determinado produto fabricado por certa indústria. Conhecer esse valor é fundamental para a formação do preço de venda de produtos e serviços, portanto, é uma informação de profunda relevância no gerenciamento de qualquer empresa comercial. Desta forma, o aluno aprende que o custo unitário é formado por custos diretos, diretamente atribuíveis ao produto fabricado. Também, por custos indiretos que, para ser atribuído ao produto, requer descobrir a melhor forma de apropriação do consumo para cada unidade fabricada, sendo essencial proceder a um rateio proporcional do consumo da produção pelas unidades fabricadas. A seguir, apresentamos um exemplo de atividade trabalhada em nossa sala de aula.

**Figura 1** - Ilustração de atividade desenvolvida em sala de aula

3. Em uma empresa industrial, os Custos de Manutenção são rateados para os Centros de Custos de Produção, Almoxarifado e Planejamento e Controle de Produção proporcionalmente às horas trabalhadas para esses centros:

70 horas      Produção

20 horas      Almoxarifado

30 horas      Planejamento e Controle de Produção (PCP)

O total de Gastos de Manutenção é de \$ 6.500.000 no período. Qual o valor rateado para o PCP?

FONTE: Livro Contabilidade Gerencial, Silvio Aparecido Crepaldi, Ed. Atlas, 2011, p. 97.

Solução Possível:

$$(30h / 120h ) \times \$ 6.500.000 = \frac{1}{4} \times \$ 6.500.000 = \$ 1.625.000.$$

Como o exemplo acima, também é muito comum solicitar ao aluno calcular a porcentagem de participação de cada produto no consumo total de energia elétrica,

de forma que esse valor seja aplicado sobre o valor dos custos indiretos e adicionado ao custo total do produto. Então, nessa etapa do ensino, nos deparamos com a dificuldade do aluno em compreender a situação para conseguir elaborar um cálculo, mesmo se sugerirmos o uso da ferramenta regra de três. Pelas observações em sala de aula, foi percebido que os alunos possuem dificuldades em verificar aplicabilidades dos conteúdos de números racionais<sup>2</sup>, razão<sup>3</sup> e proporção<sup>4</sup>, limitando-os a solucionar cálculos e algoritmos relacionados à este conteúdo, como o procedimento da regra de três<sup>5</sup>; e, assim, apresentando indícios de deficiências no raciocínio proporcional<sup>6</sup>. Exemplificando, podemos considerar os gastos com energia elétrica em uma indústria de produção de ração animal. O valor total consumido no mês com energia elétrica precisa ser rateado pelos produtos fabricados. O mais lógico é dividirmos proporcionalmente o valor do consumo total entre cada quilo de ração, considerando o tempo que cada quilo demandou de uso dos maquinários. Todavia, de uma forma bem recorrente e intrigante, uma grande

---

<sup>2</sup> Números racionais é um tema muito pesquisado por Kieren (1980) que indicou cinco ideias básicas para a compreensão dos números racionais, sendo elas, parte/todo, quociente, medida, operador e razão. Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983), os números racionais podem ser interpretados por, pelo menos, estas seis maneiras: uma comparação de parte para todo, um decimal, uma razão, uma divisão indicada (quociente), um operador e uma medida de quantidades contínuas ou discretas. Quaresma e Ponte (2012) concordaram com Kieren (1980) e ressaltaram que números racionais possuem conceito multifacetado, apresentando cinco significados diferentes - parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

<sup>3</sup> Razão é uma relação que transmite a noção de magnitude relativa; portanto, é considerado mais corretamente como um índice comparativo do que como um número (BEHR, LESH, POST e SILVER; 1983, p. 94). Segundo Euclides (1944), quando duas razões são iguais, diz-se que são proporcionais uma a outra. A razão entre dois números é dada pela sua divisão obedecendo a ordem na qual eles foram dados. Tal razão pode ser representada na forma fracionária, decimal e percentual. Assim, considere dois números racionais  $x$  e  $y$ , com  $y$  diferente de zero. A razão de  $x$  por  $y$ , nessa ordem, é dada pelo quociente:  $X/Y$ .

<sup>4</sup> Proporção é simplesmente uma afirmação que equivale a igualdade de duas razões entre números (RIPOLL, RANGEL, GIRALDO e ROQUE, 2015). Geralmente, essa igualdade é representada por razões. Então, dizemos que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são proporcionais se a seguinte afirmação for verdadeira:  $A/B = C/D$ . O uso de proporções é uma ferramenta muito poderosa para resolver problemas em várias situações físicas e configurações de problemas que exigem comparações de magnitudes.

<sup>5</sup> Regra de três é tratada por Silva (2011) como um método de resolução de tipos de problemas que se caracterizam por encontrar um valor de uma grandeza quando conhecidos dois ou mais valores de outras grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Em outras palavras, a regra de três permite descobrir um valor não identificado, por meio de outros três já conhecidos.

<sup>6</sup> Raciocínio proporcional é um conteúdo fundamental para a Matemática desenvolvida desde os últimos anos do ensino fundamental até o ensino médio (BEN-CHAIM, ILANY e KERET, 2008). É fundamental na aprendizagem da aritmética, números e medidas, bem como na aquisição de conceitos algébricos. Este raciocínio é desenvolvido quando o aluno reflete sobre relações globais entre expressões racionais (taxas, razões, quocientes e frações), sintetiza vários aspectos relacionados com estas expressões, consegue inferir igualdade ou desigualdade entre elas, e é capaz de descobrir partes omissas numa expressão. Em princípio, o raciocínio proporcional envolve relações matemáticas multiplicativas (BEN-CHAIM, ILANY e KERET, 2008).

quantidade de alunos fica “travada” no desenvolvimento da disciplina por não conseguir representar a proporcionalidade envolvida na questão, deixando as questões sem proposição de respostas.

Essa dificuldade dos alunos começou a despertar em mim o interesse em descobrir o porquê dos alunos não compreenderem os conceitos dos números racionais dentro da sala de aula, principalmente, quando esses números envolvem a ideia de razão e proporção. Nesta busca, iniciei leituras no campo da Matemática sobre o ensino de frações, números racionais, proporcionalidade, chegando à descoberta de que a área da pesquisa em Educação Matemática pode me trazer respostas, esclarecer dúvidas e sanar minha inquietação frente às deficiências de aprendizado que eu encontro em meus alunos. Então, me esforcei para ingressar no programa de doutorado em educação, em linguagem matemática, almejando a oportunidade de estudar diversos autores e de fazer a leitura de variados estudos a respeito dessa temática. Tudo isto tem me conduzido à suposição de que essas deficiências no raciocínio proporcional, verificadas em meu fazer diário da sala de aula, possam ser decorrentes de um aprendizado inadequado da Matemática nos anos iniciais.

A pesquisa feita pelos autores Behr, Lesh, Post e Silver (1983) sobre os números racionais traz que esses conceitos estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante seus anos de estudo. Eles enfatizam que aprender conceitos de números racionais é um sério obstáculo no desenvolvimento matemático das crianças. Essa pesquisa também direciona nosso entendimento sobre o desempenho geralmente ruim do aluno se dar em razão de um resultado direto de uma ênfase curricular nos procedimentos, em vez do desenvolvimento cuidadoso de importantes entendimentos funcionais do conteúdo. Segundo esses autores,

A razão é uma relação que transmite a noção de magnitude relativa; portanto, é mais corretamente considerado como um índice comparativo do que como um número. Quando duas razões são iguais, dizemos que são proporcionais uma a outra. Uma proporção é simplesmente uma afirmação igualando duas razões. O uso de proporções é uma ferramenta muito poderosa de resolução de problemas em uma variedade de situações

físicas e configurações de problemas que exigem comparações de magnitudes (BEHR, LESH, POST e SILVER, 1983, p.94, tradução nossa<sup>7</sup>).

Exemplificando, é comum os alunos atribuírem o custo indireto de energia elétrica ao produto dividindo o valor mensal do consumo pela quantidade de tipos de produtos produzidos pela indústria. Avançando no exemplo iniciado acima sobre a indústria de ração animal, se temos três tipos de ração, uma para cada fase da vida animal, como ração para filhote, ração para adulto e ração para idoso; o aluno tende a dividir o valor da conta de energia por três, considerando apenas o fato de serem três tipos distintos de produtos. Contudo, se a indústria produziu em um mês 200 quilos de ração para filhote, 300 quilos de ração para adulto e apenas 100 quilos de ração para idoso, é mais adequado atribuir o custo indireto na proporção da quantidade de quilos totais produzidos no mês, ou mesmo, pela quantidade de horas de funcionamento do maquinário de produção para cada tipo de produto, caso haja o apontamento dessas horas.

Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto, e Miller (1998) fizeram um estudo sobre problemas contextuais envolvendo números racionais e raciocínio proporcional com alunos do 7º ano e com diferentes experiências curriculares. As evidências indicaram que os alunos que são incentivados a construir seu próprio conhecimento conceitual e processual da proporcionalidade por meio de atividades colaborativas de resolução de problemas têm melhor desempenho do que os alunos com experiências instrucionais mais tradicionais e orientadas pelo professor. Esses autores ressaltaram que, apesar de uma parcela dos alunos conseguirem estabelecer a relação de proporcionalidade, eles não finalizam com sucesso as atividades que a envolvem. Vamos identificar o problema apontado por esses pesquisadores à luz do nosso exemplo sobre apropriação de custos indiretos de energia elétrica em uma fábrica de ração. De forma recorrente, eu me deparo com alunos que percebem a necessidade de se considerar a quantidade de quilos de cada tipo de ração produzidos como fator do rateio proporcional, porém, eles não conseguem escrever a equação de regra de três proporcional e, conseqüentemente,

---

<sup>7</sup> "Ratio is a relation that conveys the notion of relative magnitude; therefore, it is more correctly considered as a comparative index rather than as a number. When two ratios are equal they are said to be in proportion to one another. A proportion is simply a statement equating two ratios. The use of proportions is a very powerful problem-solving tool in a variety of physical situations and problem settings that require comparisons of magnitudes" (BEHR, LESH, POST e SILVER, 1983, p. 94).

não solucionam a questão-problema. Uma outra forma de ilustrar o problema foi apresentada por Carpes e Bisognin (2019, p. 189):

O significado parte/todo é fundamental para o desenvolvimento de outros significados, no qual os alunos devem conceber a noção de partição (em partes/fatias iguais) e, também a ideia entre partes/fatia e todo: as fatias juntas devem reconstituir o todo; quanto mais fatias tem o todo, menor é cada fatia; independente da forma, tamanho ou orientação das fatias, a relação entre as fatias e o todo é conservada (CARPES; BISOGNIN, 2019, p. 189).

Os exemplos anteriormente utilizados, correlacionados às situações investigadas pelos trabalhos internacionais e nacionais mencionados acima, são situações vivenciadas e extraídas por mim das variadas turmas de cursos de nível técnico e superior que lecionei desde o ano de 2011 até o ano de 2019, quando iniciei este estudo. Tudo isso converge para o que Lawton (1993) constatou em seus estudos sobre fatores contextuais que afetam erros no raciocínio proporcional, ao concluir que a dificuldade com raciocínio proporcional é um problema para muitos alunos de níveis escolares mais elevados. De fato, "aprender a raciocinar proporcionalmente é fundamental no desenvolvimento matemático do aluno", conforme apontado por Misailidou e Williams (2004, p. 1 - tradução nossa<sup>8</sup>) em suas pesquisas. Essas pesquisadoras fizeram avaliação diagnóstica do raciocínio proporcional de um grupo de crianças com análises de suas argumentações enquanto trabalhavam em tarefas de proporção selecionadas. Ao encontrar uma alta frequência de erros nas respostas, essas autoras concluíram que o ensino efetivo do tópico 'razão' é considerado vital, tanto no ensino primário quanto no secundário.

O artigo publicado por Heller, Ahlgren, Post, Behr e Lesh (1989) descreve o início de uma pesquisa cooperativa envolvendo educadores de Matemática e Ciências. O objetivo foi descobrir como a dificuldade de adolescentes e de muitos adultos em resolver problemas que envolvem raciocínio proporcional é afetada por diferentes tipos de proporções e, eventualmente, como os tipos de proporção podem ser ensinados de maneira eficaz. Para eles,

Uma implicação dessa dificuldade é que os professores devem (como muitos fazem) questionar o conhecimento de seus alunos sobre razões antes de mergulhar em tópicos quantitativos. Uma segunda implicação é que os professores de Ciências também devem começar a se preocupar se a instrução nas aulas de Matemática é adequada para ensinar o raciocínio

---

<sup>8</sup> "Learning to reason proportionally is essential for students' mathematical development." (MISAILIDOU; WILLIAMS, 2004, p. 1).



proporcional de uma maneira útil para o aprendizado da Ciência. (...) Por que o raciocínio proporcional é tão difícil? Que fatores afetam o sucesso na resolução de problemas? Vários estudos mostraram que fatores como o formato do problema, os números específicos usados nos problemas, o contexto do problema e até mesmo o problema imediatamente anterior afetam o desempenho do aluno em problemas de raciocínio proporcional (HELLER; AHLGREN; POST; BEHR; LESH; 1989, p. 206, tradução nossa<sup>9</sup>).

Esses autores americanos trazem que “uma das conexões mais antigas e fundamentais entre a Ciência e a Matemática é a proporcionalidade” (HELLER et al, 1989, p. 205). Eles enfatizaram que nem todas as pessoas adultas resolvem problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta<sup>10</sup>, por meio do uso de raciocínio proporcional. Silvestre e Ponte (2012) desenvolveram um trabalho em uma unidade de ensino de Portugal sobre a proporcionalidade direta em duas turmas do 6o ano de escolaridade, compostas por alunos com idades entre os 11 e os 14 anos (a maioria tem 11 anos). Eles consideram que a capacidade de raciocínio proporcional envolve três aspetos: (i) distinguir relações de proporcionalidade direta daquelas que não o são; (ii) compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta; e (iii) resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens, sem ser afetado pelos dados numéricos, contexto e representação. Estes aspectos pretendem operacionalizar a noção de raciocínio proporcional, indicando as diferentes vertentes a ter em consideração no seu desenvolvimento.

Por sua importância, esse tema tem se constituído como foco de intensa investigação nas últimas décadas. Shield e Dole (2002) pesquisaram sobre o currículo de Matemática do ensino médio na Austrália e verificaram que muitos tópicos de estudo exigem habilidades de raciocínio proporcional. A pesquisa evoluiu para a interpretação de situações de proporção e a compreensão de métodos para resolver problemas de proporção fornecendo uma estrutura que pode ser aplicada a outros tópicos relacionados. Segundo os pesquisadores, "a complexidade do

---

<sup>9</sup> “One implication of this difficulty is that teachers should (as many do) question their students’ knowledge of ratios before plunging into quantitative topics. A second implication is that science teachers should also begin to concern themselves with whether instruction in mathematics classes is adequate to teach proportional reasoning in a way useful to the learning of science. (...) Why is proportional reasoning so difficult? What factors affect problem-solving success? Several studies have shown that factors such as problem format, the particular numbers used in the problems, the problem context, and even the immediately preceding problem affect student performance on proportional reasoning problems” (HELLER; AHLGREN; POST; BEHR; LESH; 1989, p. 206).

<sup>10</sup> A relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis - segundo Ponte, Silvestre, Garcia e Costa (2010) - pode ser formalmente representada como uma igualdade entre duas razões  $A/B = C/D$ , (sendo  $A$  e  $C$  valores de uma variável e  $B$  e  $D$  valores de outra variável).

conceito de proporção parece repousar na extensão do conhecimento prévio necessário para seu desenvolvimento significativo” (SHIELD; DOLE, 2002, p. 608, tradução nossa<sup>11</sup>). Também esteve como foco deste estudo um recurso importante para a Matemática secundária, a extensão em que os livros populares<sup>12</sup> vinculam tópicos relacionados à proporção. A análise dos livros revelou pouca conectividade de ideias, definições confusas e cálculos frequentemente ilógicos. A pesquisa de Ben-Chaim, Illany e Keret (2008) chama a nossa atenção de que os tópicos relativos à razão e proporção devem ocupar uma parte central tanto no currículo para as escolas quanto no dos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Quero adicionar à importância destacada ao currículo, a preponderância que os livros didáticos exercem na vida escolar, conforme as palavras do pesquisador Powell:

Tanto para professores quanto para alunos, as fontes autorizadas para o conhecimento da matemática escolar, impressas ou digitais, são livros didáticos. Eles são o principal recurso que os professores usam para planejar e ministrar suas aulas e, ao mesmo tempo, os livros didáticos são frequentemente o único recurso que os alunos acessam para aprender sobre objetos matemáticos e operações com eles (POWELL, 2018, p. 80).

Ahl (2016) fez um estudo sobre a representação do raciocínio proporcional em duas coleções de livros didáticos de Matemática suecos, comumente adotados para as 7<sup>a</sup>, 8<sup>a</sup> e 9<sup>a</sup> séries<sup>13</sup>. A estrutura de análise foi pelas lentes dos pesquisadores Shield e Dole. Assim, Ahl (2016) analisou como o raciocínio proporcional é representado em livros didáticos em relação a cinco objetivos de aprendizagem elaborados por Shield e Dole (2013). Os resultados da pesquisa de Ahl (2016) trouxeram à tona uma lacuna entre as descobertas de pesquisas de questões importantes a serem abordadas e o *design* real dos livros didáticos de Matemática. Ambas as séries de livros didáticos fazem uso de uma gama eficaz de representações. Além disso, a análise mostra baixo impacto das descobertas da pesquisa sobre a importância de oportunidades para comparar e contrastar situações aditivas e multiplicativas, identificar estruturas multiplicativas e raciocínio proporcional, fazer uso de representações simbólicas significativas e conectar e

---

<sup>11</sup> "The complexity of the proportion concept appears to rest in the extent of prior knowledge required for its meaningful development" (SHIELD; DOLE, 2002, p. 608).

<sup>12</sup> Livros populares são livros didáticos de matemática amplamente usados nas escolas australianas.

<sup>13</sup> A autora não informa a idade dos alunos suecos; o que poderia nos permitir a comparação com os alunos brasileiros de mesma faixa etária.

relacionar conhecimentos de frações. A principal conclusão desta pesquisa sueca é que existem possibilidades de melhoria no *design* de livros didáticos em relação à compreensão do raciocínio proporcional.

Aprofundando nossa busca por estudos, encontramos autores internacionais e nacionais que têm investigado sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional dentro de um programa instrucional bem definido e tendo base teórica. O trabalho de Behr, Lesh, Post e Silver (1983) está focado fortemente na análise da estrutura cognitiva que as crianças usam para executar várias tarefas de número racional. Os autores realizaram estudos sobre como as crianças lidam com a noção de frações e números racionais, utilizando diferentes materiais concretos, como blocos, régua de medida, objetos do cotidiano, moedas, entre outros. Eles descobriram que alguns desses materiais são mais eficazes do que outros na promoção da compreensão dos conceitos de frações e números racionais, porque ajudam as crianças a visualizarem e a manipularem as quantidades. Por exemplo, eles observaram que as crianças conseguiram lidar melhor com a noção de fração quando usavam blocos de tamanho uniforme em comparação com blocos de tamanho variável. Da mesma forma, as crianças foram mais bem sucedidas em resolver problemas de frações quando usavam uma régua de medida em vez de uma fita métrica.

Esses estudos ajudaram a destacar a importância dos materiais manipuláveis no ensino de conceitos matemáticos, especialmente na área de números racionais. A pesquisa também mostrou que nem todos os materiais manipuláveis são igualmente eficazes na promoção da aprendizagem, reforçando a necessidade de selecionar materiais cuidadosamente com base nas necessidades de aprendizagem dos alunos. Uma implicação razoável dessa observação é que os professores que tentam atribuir sentido aos conceitos abstratos de número racional podem ser sábios para começar a instrução com os materiais manipuláveis, menos complexos e que se baseiam em entendimentos intuitivos úteis. Adicionalmente, sugestões consistentes geralmente fornecem informações ao aluno que podem ser usadas para ajudar na solução da tarefa.

Acrescentando e alargando a proposta dos autores acima, a pesquisadora Santos (1997) elaborou uma obra chamada “Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos”, que se constitui peça fundamental

no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, trazendo ideias efetivas para serem colocadas em prática dentro da sala de aula, favorecendo o raciocínio e a aprendizagem em Matemática. A autora dedicou um capítulo especial ao tópico de frações, trabalhando uma grande variedade de atividades que permite aos alunos construir com compreensão os conceitos, considerando vários contextos.

É preciso que várias situações sejam exploradas para que o aluno venha a construir e/ou reconstruir com compreensão e significado real o conceito de fração em vários contextos (ideia de parte-todo em conjuntos contínuos e discretos; ideia de razão; ideia de divisão e ideia de operador) (SANTOS, 1997, p. 101).

Os autores Ben-Chaim, Keret e Illany (2012) reconheceram a carência de livros que abordam de maneira abrangente o assunto de razão e proporção, e que também apresente uma extensa variedade de "atividades investigativas autênticas"<sup>14</sup>. Então, eles elaboraram um livro didático sobre o tópico de razão, onde apresentam um modelo de ensino que combina teoria com uma ampla gama de atividades investigativas autênticas de razão e proporção que representam situações reais relevantes para o mundo real de alunos e professores. Essas atividades abrangem vários níveis de dificuldade apropriados para alunos de ensino básico ao médio, e cursos de formação de professores, e podem ser facilmente adaptados para atividades investigativas autênticas, apropriadas para alunos do ensino fundamental e médio. Mais recentemente, o trabalho dos americanos Petit, Laird, Wyneken, Huntoon, Abele-Austin e Sequeira (2020) trouxe a pesquisa para o ensino de Matemática como um produto para a sala de aula. Este produto foi a publicação de um livro com ferramentas, estratégias e conhecimentos de avaliação formativa específicos da Matemática. O objetivo do livro é tornar as práticas de avaliação formativa um aspecto central da instrução Matemática, especialmente para o conteúdo matemático central de instrução eficaz de proporcionalidade. Também, pensaram nas estratégias que os alunos usam para resolver problemas de razão, taxa e proporção; erros e concepções comuns que podem interferir na aprendizagem de novos conceitos ou resolução de problemas de razão e proporção;

---

<sup>14</sup> Atividades investigativas autênticas são tarefas ou projetos que envolvem a exploração de um tópico de forma profunda e significativa, com o objetivo de desenvolver habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas, colaboração e comunicação. Essas atividades podem ser baseadas em situações da vida real e requerem que os alunos usem informações de várias fontes para investigar, analisar e tomar decisões informadas. As atividades investigativas autênticas são projetadas para promover o aprendizado autônomo, a curiosidade e a paixão pela descoberta e pela aprendizagem contínua.

análise das soluções dos alunos; e estratégias instrucionais eficazes para ajudar todos os alunos a terem maior desenvoltura no raciocínio proporcional.

### **1.1. Problemática e Formulação de Tese**

Minha curiosidade tem crescido a cada leitura de estudos e pesquisas. Desde o início das minhas práticas docentes, em 2011, eu reconheço a relevância e a importância da correta utilização do raciocínio proporcional para a formação profissional dos meus alunos. Em contrapartida, eu identifico que os alunos trazem para o ensino superior uma bagagem de dificuldades, como apresentado na seção introdutória, em relação ao aprendizado deste raciocínio proporcional. Tenho questionado o porquê dessas dificuldades existirem para alunos de nível técnico e superior, por serem alunos que já concluíram a educação básica, tendo já se submetido ao Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

Eu indago como se deu o aprendizado da Matemática nos anos iniciais da Educação Básica desses alunos. E me faço perguntas, como: (a) em quais anos escolares os conceitos de número racional, razão e proporção são trabalhados? (b) Esses conteúdos deixaram de ser trabalhados nos anos iniciais ou nos finais do ensino fundamental? (c) Como esses conteúdos aparecem nos livros didáticos? (d) Quão substancial é a abordagem do raciocínio proporcional em livros didáticos? (e) Como são trabalhadas as atividades de aprendizagem do raciocínio proporcional nos livros didáticos? Diante este cenário de inquietação e curiosidade, busco a importância de se investigar esse tema. E crio hipóteses para a ocorrência dessa situação a partir dos estudos realizados:

I. Segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983), os conceitos dos números racionais estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que crianças encontram durante seus anos de estudo. Essa afirmativa me leva a questionar se professores têm conhecimento da importância do raciocínio proporcional para a formação de seus alunos. Também, questiono se eles trabalham os significados desse tema de forma compreensiva para as crianças, de modo que elas possam explicar, dialogar e argumentar sobre os conceitos

envolvidos, mostrando compreensão tanto sobre como calcular e resolver tarefas quanto sobre relacionar os conceitos e explicar o que está sendo feito.

II. Os alunos que são incentivados a construir seu próprio conhecimento conceitual e processual da proporcionalidade por meio de atividades colaborativas de resolução de problemas têm melhor desempenho do que os alunos com experiências instrucionais mais tradicionais e orientadas pelo professor (BEN-CHAIM, FAY, FITZGERALD, BENEDETTO E MILLER, 1998). Assim, questiono se os professores têm lecionado os conceitos de forma a instigar a curiosidade dos alunos, levando-os a pensarem processualmente, e a quererem entender os cálculos e tarefas propostas.

III. “Os professores utilizam os livros didáticos como o principal recurso pedagógico em sala de aula” (DANTE, 1996, p. 83). Eu indago se os professores possuem conhecimentos de outra natureza, por exemplo, com os materiais manipuláveis, para ensinar razão e proporção por meio de outros recursos pedagógicos, não valendo-se apenas dos livros didáticos como instrumento principal, vindo a utilizar os livros como ferramenta de apoio e complementação do ensino ministrado.

IV. Existem possibilidades de melhoria dos livros didáticos em relação à compreensão do raciocínio proporcional (AHL, 2016, p. 180). A partir das pesquisas que tenho estudado, aliado ao que tenho observado em sala de aula, suponho que os livros didáticos não trazem as ideias básicas para o entendimento do raciocínio proporcional e não apresentam uma abordagem apropriada para o ensino deste conteúdo.

Tenho em mim o interesse de compreender e analisar o conteúdo relacionado ao raciocínio proporcional por entender que a proporcionalidade é um conceito-chave no ensino de Matemática e Ciências, do ensino fundamental ao ensino superior. Considero o raciocínio proporcional um pré-requisito para estudos futuros bem-sucedidos em Matemática e Ciências, pois as relações multiplicativas sustentam quase todos os conceitos relacionados a números estudados no ensino fundamental. Ahl (2016) ressaltou que, no ensino médio, os alunos fazem uso de modelos lineares e aproximações em cálculo e estatística e, na universidade, de conceitos de ordem superior, como abstração no sentido de espaço vetorial.

Apesar da natureza difundida do raciocínio proporcional ao longo dos anos escolares, é sabido que crianças em todo o mundo têm uma dificuldade considerável em entender o campo conceitual do raciocínio proporcional, por exemplo, frações, porcentagens, razão, proporção, taxas, similaridade, trigonometria e taxas de mudança, ou seja, não se restringe aos estudos de frações e número racional. Os autores Heller, Ahlgren, Post, Behr e Lesh (1989) ilustram que preços unitários, tamanho da embalagem (por exemplo, número de ovos por caixa), milhagem de gás e velocidade são proporções com as quais todos lidam. A redução proporcional também é importante para o sucesso dos alunos nos cursos de ciências secundárias, especialmente química e física, onde a lista de proporções se estende à densidade, aceleração, concentração, leis de proporções definidas e múltiplas, velocidade, potência, eficiência e assim por diante.

A pesquisadora Merlini (2005, p. 1), em sua dissertação de mestrado, ressaltou que

No cotidiano, a fração tem seu uso consagrado em escalas, razões, porcentagens e probabilidades. Somado a isso, na partição da unidade a utilização da fração pode ser mais adequada, pois é mais natural falar, por exemplo,  $\frac{1}{4}$  de uma barra de chocolate ao invés de 0,25 de uma barra de chocolate. Outros exemplos são encontrados em algumas atividades profissionais; por exemplo, na construção civil os diâmetros são comumente mensurados com base na fração de polegada: o cano hidráulico de nossas residências, em geral, tem  $\frac{3}{4}$  de polegadas, ao passo que os alicerces de grandes construções contêm barras de ferro de  $\frac{1}{2}$  de polegada. Na culinária, não raro encontramos receitas que solicitam  $\frac{1}{2}$  xícara de farinha,  $\frac{2}{3}$  de um tablete de margarina,  $\frac{1}{4}$  de copo de leite, por exemplo.

Ao considerar a relevância do raciocínio proporcional na formação intelectual de uma pessoa, reconheço ainda mais sua importância para a questão social e como esse conhecimento é um dos fatores determinantes para o seu estabelecimento no mercado de trabalho. O uso do raciocínio proporcional abarca a capacidade do ser humano de comparar grandezas por meio de contar, mensurar e ordenar. Então, além da relevância e da pertinência do tema, vislumbro que esta pesquisa perpassa, inclusive, uma dimensão social, visto que afeta as relações de poder e de identidade instituídas nesse contexto acadêmico.

A lei que institui as diretrizes e bases da educação nacional (Lei de Diretrizes e Bases - LDB, no. 9394, de 20 de dezembro de 1996), estabelece a vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais; também, assegura ao

aluno a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (BRASIL, 1996). Corroborando, temos outro documento norteador do ensino brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), que reforça que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica (BRASIL, 2018).

Apesar deste tema ser objeto de contínuas pesquisas desde a década de 1980, adentramos a década de 2020 encontrando autores nacionais e internacionais fazendo perguntas e indagações relevantes para as quais ainda estamos sem respostas. Ademais, eu também tenho feito perguntas! Esse fato só reforça a importância de prosseguirmos com estes estudos. Por exemplo, (1) Qual subconstruto de número racional pode servir melhor como o subconstruto fundamental para o desenvolvimento de conceitos iniciais de fração em crianças? Behr, Lesh e Post (1983, p. 98) trouxeram que há "uma ênfase no subconstruto parte-todo nos currículos de Matemática escolar", que é a ideia de divisão de um inteiro em partes iguais. Segundo Powell (2018), ater-se apenas à interpretação de frações relacionadas à noção de parte-todo e as práticas correspondentes limita a compreensão dos estudantes, uma vez que não é suficiente como fundação para o sistema de números racionais. Então, questionamos sobre os demais subconstrutos que permitem construir/reconstruir com compreensão o real significado de fração, a saber, razão, divisão e operador? (2) Que significado tem a adição de  $\frac{3}{8}$  e  $\frac{4}{8}$  para uma criança sem uma noção internalizada do "tamanho" de cada adendo e da soma? Behr, Lesh e Post (1983) refletiram que, em situações reais de adição que envolvem frações, o problema pode envolver mostrar ao aluno metade de uma pizza e depois perguntar quanto o mesmo teria se lhe desse mais um terço dessa pizza. Em tais problemas, que ocorrem regularmente em situações reais, parte da dificuldade é representar ambos os adendos usando um único sistema de representação equivalente aos dois anteriores. (3) De qual forma os pontos fortes e as limitações dos livros didáticos podem ser suficientes para superar os obstáculos do ensino-aprendizagem do raciocínio proporcional? (4) O livro didático é utilizado como único guia do planejamento do professor(a) ou são usados materiais didáticos que auxiliam na interpretação e representação matemática dos conteúdos? e (5)



Como o livro didático pode levar docentes a tomarem consciência do que sabem ou não sabem para ensinarem o raciocínio proporcional?

As pesquisas mencionadas nesta introdução têm mostrado, por mais de 40 anos, que alunos e professores encontram dificuldades com o ensino e com o aprendizado de números racionais. Minha experiência de professora tem confirmado essa situação. Assim, pesquisadores do mundo inteiro têm apontado que ainda precisamos continuar a investigar razão, proporção e raciocínio proporcional (Behr, Lesh, Post e Silver (1983); Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto, e Miller; Illany e Keret (2012); Shield e Dole (2013); Ahl (2016)). Como eu ainda não encontrei muitos trabalhos que evidenciam como os livros didáticos têm trazido o tema, apesar de já ler autores ressaltando a proeminência do uso dos livros dentre todos os recursos didáticos (BEN-CHAIM, ILLANY E KERET, 2008), tenho para mim que é conclusivo que o ato de refletir criticamente sobre os livros didáticos certamente gerará aprendizado significativo para os professores e os alunos. De fato, os livros didáticos ocupam forte posição na sala de aula de Matemática em geral, juntamente com a escolha dos professores desses livros para explorar os objetivos da Educação Matemática. Isso é corroborado por Bortoloti (2016, p. 87), quando apontou que “no livro didático, material produzido para ser utilizado pelo professor e pelos alunos, comunica-se uma versão da disciplina escolar por via escrita. Investigá-lo permite-nos, por exemplo, aprender diferentes formas de realização de um conceito (...)”.

Considero importante mencionar que o processo de escolha do livro didático pelas escolas públicas no Brasil envolve duas etapas: a análise das obras aprovadas pelo Ministério da Educação disponíveis no Guia Digital de alguma das várias edições do PNLD<sup>15</sup> - Programa Nacional do Livro e do Material Didático (BRASIL, 2017), e o registro das coleções escolhidas pelo corpo docente de cada

---

<sup>15</sup> O Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD (BRASIL, 2017) é uma política pública executada pelo FNDE e pelo Ministério da Educação, destinado a avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma sistemática, regular e gratuita. O PNLD é um dos maiores programas de distribuição de livros do mundo. Os materiais adquiridos vão diretamente para as mãos dos alunos e professores das escolas públicas participantes do Programa, que têm a sua disposição materiais de excelente qualidade! O PNLD também contempla as instituições comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. Trata-se, portanto, de um Programa abrangente, constituindo-se em um dos principais instrumentos de apoio ao processo de ensino-aprendizagem nas escolas beneficiadas. Para participar do PNLD, os dirigentes das redes de ensino municipal, estadual, distrital e das escolas federais devem encaminhar Termo de Adesão manifestando seu interesse em receber os materiais do programa e comprometendo-se a executar as ações do programa conforme a legislação (BRASIL, 2017).

escola. O processo de escolha é estruturado de forma a permitir ser realizado a partir de uma reflexão coletiva, com base nas orientações constantes no Guia Digital do PNLD de cada edição do programa. Desde 2018, o processo de escolha estabelece que as redes de ensino têm três modelos possíveis de escolha e devem decidir qual pretendem adotar. A rede de ensino deve informar se deseja que cada escola receba o material registrado no sistema, se deseja criar grupos de escolas que receberão o mesmo material ou ainda se deseja adotar o mesmo material para todas as escolas da rede de ensino. É importante observar que, mesmo no caso da criação de grupos de escolas ou de adoção de material único para toda rede de ensino, os professores continuarão participando da escolha e o material a ser distribuído será o mais escolhido pelas escolas. Para garantir a integridade do processo de escolha e a autonomia das escolas, foram regulamentadas formas de divulgação pelas editoras dos livros inscritos no PNLD (BRASIL, 2017). Ainda, é importante mencionar que cada edição do PNLD possui ciclo de 4 anos.

Assim, percorrendo o caminho das hipóteses apresentadas, somadas às perguntas e indagações que me faço, chego à formulação da seguinte tese:

- Considero que os livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019) se basearam na BNCC (BRASIL, 2018) como instrumento norteador para a escolha do conteúdo de ensino-aprendizagem a ser trabalhado em cada volume. Também, para ter a definição das competências e habilidades a serem exploradas e desenvolvidas nas coleções didáticas. Outrossim, acredito que cada autor tem acompanhado as descobertas científicas decorrentes de pesquisas atuais sobre temas contemporâneos na área da Matemática e da Educação Matemática. Contudo, tenho para mim que, apesar do atendimento aos requisitos exigidos pelos documentos norteadores de ensino brasileiros, os livros didáticos fornecem suporte limitado para o desenvolvimento de estruturas multiplicativas necessárias para o raciocínio proporcional e, portanto, não contribuem adequadamente para um aprendizado mais amplo e profundo deste tema pelos alunos.

A partir do Guia PNLD 2020 (BRASIL, 2019) para os anos finais do ensino fundamental, nos comprometemos com este estudo a investigar as possibilidades que os livros didáticos oferecem para favorecer o ensino de raciocínio proporcional. A seguir, trazemos as perguntas norteadoras da pesquisa, objetivos gerais e

específicos, e também, as perguntas associadas da pesquisa. O propósito maior é verificar a problemática da tese.

## **1.2. Perguntas Norteadoras da Pesquisa**

Como o raciocínio proporcional é abordado em livros didáticos de Matemática adotados pelas escolas públicas e aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019) destinados aos anos finais do ensino fundamental? Quais das cinco chaves e objetivos de aprendizagem dos pesquisadores australianos Shield e Dole<sup>16</sup> (2013) encontramos nestes livros didáticos?

## **1.3. Objetivos Gerais**

Os objetivos gerais desta pesquisa são investigar, compreender e analisar como o raciocínio proporcional é abordado em livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019), voltados aos anos finais do ensino fundamental. Ainda, avaliar e investigar se os livros didáticos analisados estão alinhados com as cinco chaves e objetivos de aprendizagem encontrados pelos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013).

---

<sup>16</sup> As 5 chaves e objetivos de aprendizagem de Shield e Dole (2013) são detalhadas no Capítulo 3. Neste momento, as apresentamos: Chave 1- Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa; Chave 2- Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção; Chave 3- Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão; Chave 4- Conexão explícita com o conhecimento de fração; e Chave 5- Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.

#### 1.4. Objetivos Específicos

- a) Investigar o que tem de parecido e de diferente nas tarefas<sup>17</sup> propostas sobre raciocínio proporcional entre os livros didáticos de Matemática analisados para o alcance do objetivo geral.

Pergunta associada:

- O que existe de similar e o que existe de diferente entre as tarefas com foco em raciocínio proporcional nesses livros didáticos de Matemática?

- b) Identificar e examinar quais são as tarefas comuns aos livros didáticos de Matemática referidos no item anterior que favorecem o aprendizado pelos alunos dos conceitos de razão e proporção, e como desenvolvem o raciocínio proporcional nos mesmos.

Perguntas associadas:

- Quais tarefas identificamos que são comuns aos livros analisados?
- Como esses autores sugerem a abordagem dessas tarefas para que elas propiciem o entendimento dos alunos a respeito dos conceitos que envolvem raciocínio proporcional?
- Como cada livro didático de Matemática evidenciou que suas tarefas geram aprendizado para alunos e professores no desenvolvimento do raciocínio proporcional?

---

<sup>17</sup> Consideramos a conceituação de “tarefas” dada por Ponte (2014, p. 16): “as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. É pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor.”

### 1.5. Panorama da Tese

Neste capítulo, de caráter introdutório, temos minha experiência como professora e sua relação com esta pesquisa. Trazemos um panorama geral a respeito das pesquisas consagradas sobre raciocínio proporcional e livro didático, chegando à formulação de hipóteses, da tese, das perguntas norteadoras e dos objetivos a serem alcançados.

No capítulo 2, fizemos o mapeamento da produção científica, destacando obras internacionais e nacionais. O levantamento do estado da arte destaca trabalhos relevantes que abordam a temática da nossa pesquisa.

No terceiro capítulo, temos a fundamentação teórica utilizada na análise dos dados, a qual está diretamente relacionada com as opções feitas para a realização desta pesquisa. Descrevo a Educação Matemática, os documentos norteadores dos currículos e falamos sobre os livros didáticos. Prosseguindo, abordamos o raciocínio proporcional, frações e seus significados, razão e proporção, regra de três e a pesquisa de Shield e Dole (2013). Em especial, neste último item, temos a fundamentação da nossa metodologia de pesquisa.

No capítulo 4, priorizamos o desenvolvimento metodológico utilizado na pesquisa, o qual está fundamentado na estrutura desenvolvida pelos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013). Destacamos a seleção e escolha dos livros didáticos para análise.

O capítulo 5 abarca a análise de três coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNL 2020 para os anos finais do ensino fundamental. Foram feitas três etapas de análises: (1) análise geral de cada uma das três coleções; (2) análise geral dos capítulos que envolvem raciocínio proporcional nos volumes do 6º ao 9º ano de cada coleção; e (3) análise de cada volume do 6º ao 9º ano conforme a estrutura de análise elaborada pelos pesquisadores Shield e Dole (2013).

O capítulo 6 destaca as aprendizagens e descobertas desta pesquisa, trazendo as conclusões e reflexões sobre os diversos aspectos presentes na tese, a partir das evidências do raciocínio proporcional encontradas nas coleções de livros didáticos analisados. Também, reconhecemos as limitações deste trabalho e as possibilidades que enxergamos para pesquisas futuras.

## 2. MAPEAMENTO DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA

Em um estudo documental sobre o raciocínio proporcional, mapeamos a produção acadêmica em dois panoramas, internacional e nacional. O objetivo foi levantar o que tem sido pesquisado acerca da temática desde meados da década de 1970, quando foram publicados os trabalhos de maior destaque científico, até agora. Assim, realizamos essa primeira atividade metodológica de pesquisa. Com esse estudo, identificamos aspectos ainda não contemplados e vislumbramos algumas lacunas que nos permitirão avançar na produção de conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem do raciocínio proporcional.

### 2.1. Mapeamento das Pesquisas sobre Raciocínio Proporcional: Um Panorama da Produção Internacional

Em novembro de 2019, centramos o foco em pesquisas internacionais que trabalharam as práticas de professores no ensino do raciocínio proporcional, e partimos inicialmente pela busca de encontrar o trabalho original publicado por alguns pesquisadores israelenses (BEN-CHAIM, ILLANY E KERET, 2008) que trouxeram inspiração e suporte inicial à esta pesquisa. O descobrimento desta pesquisa se deu por meio da leitura em português da tradução publicada pela revista *Bolema*, em 2008, cujo artigo foi traduzido do original por Antonio Vicente Marafioti Garnica, docente do Departamento de Matemática da UNESP de Bauru e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro. Mais adiante, aprofundaremos no estudo do trabalho original, além de outros publicados pelos mesmos autores. Nesta etapa introdutória dos procedimentos, é importante registrar que a corrida por esse trabalho original ressaltou a importância de avançarmos em diversas buscas via site Google Scholar, utilizando descritores como “*rational number*”, “*ratio*”, “*proportion*”, “*proportional reasoning*” e “*mathematics education*”. Como resultado, tivemos acesso a pesquisas internacionais sobre o tema de raciocínio proporcional que vêm sendo desenvolvidas por renomados pesquisadores de vários países pelas últimas quase quatro décadas. Assim, trazemos, por ordem cronológica, os trabalhos que convergem aos objetivos desta

pesquisa.

O trabalho mais antigo a ser considerado nesta tese é do ano de 1975, do pesquisador Thomas E. Kieren. Suas ideias são precursoras das pesquisas que vieram nos anos e décadas seguintes. Kieren (1975) apresentou que para entender as ideias dos números racionais, deve-se ter uma experiência adequada com suas variadas interpretações. Conforme suas pesquisas, crianças e adolescentes perdem muitas das interpretações importantes dos números racionais. Em particular, os aspectos "algébricos" das operações sobre racionais são perdidos. No entanto, os números racionais apresentam um confronto face a face com problemas algébricos porque a criança deve: (a) lidar com a noção de equivalência; (b) lidar com uma operação "+" que em sua forma algébrica "funciona" da maneira que funciona principalmente por razões axiomáticas e não é mais natural; (c) trabalhar em um sistema onde "+" e "x" são duas operações distintas, abstratamente definidas (essas duas operações com racionais são análogas a "adicionar" comprimentos e compor funções); e (d) trabalhar com as propriedades, particularmente uma noção geral de operação inversa.

Para aprender adequadamente os aspectos algébricos inerentes aos conceitos de números racionais, Kieren (1975) argumenta que é necessária uma variedade de experiências com diversas interpretações de números racionais. Mas o que são essas diversas interpretações? Sua lista não é exaustiva, e contém as interpretações que servem de base para todos os trabalhos que sucederam ao de Kieren: (1.) Números racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc. (2.) Números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) para os números inteiros. (3.) Os números racionais são classes de equivalência de frações. (4.) Números racionais são números da forma  $p/q$ , onde  $p$ ,  $q$  são inteiros e  $q \neq 0$ . Nesta forma, os números racionais são números de "razão". (5.) Os números racionais são operadores multiplicativos (por exemplo, ampliadores, redutores, etc.). (6.) Os números racionais são elementos de um corpo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma  $x = p/q$ , onde  $x$  satisfaz a equação  $qx = p$ . (7.) Números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica.

Kieren (1975) defende que cada interpretação permite a consideração dos

racionais de uma perspectiva diferente. Ele argumenta que, ao trabalhar com números racionais, as crianças estão lidando com estruturas matemáticas que não têm uma base óbvia no pensamento natural. Ainda, Kieren ressalta que ao deixar de levar em consideração as características salientes de cada interpretação, professores e pesquisadores encontraram dificuldades que poderiam ter sido logicamente antecipadas (por exemplo, instrução baseada na interpretação de "operador multiplicativo" de números racionais não fornece uma boa base para entender a adição de frações). Por meio de suas ideias, outras pesquisas foram desenvolvidas, levando em consideração as várias interpretações e as sequências de ensino sugeridas por ele.

Em 1983, os autores Merlyn J. Behr, Richard Lesh, Thomas R. Post, and Edward A. Silver publicaram a pesquisa intitulada de *Rational Number Concepts* (Conceitos de números racionais - tradução nossa). Este é o trabalho mais citado dentre o levantamento realizado. Encontramos a sua menção e referência em praticamente todas as pesquisas que a sucederam, tamanha a sua profundidade e relevância. Esses autores evidenciaram que os conceitos de número racional estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante seus anos escolares. Por meio de um projeto de pesquisa chamado "*The Rational-Number Project*" (Projeto do Número Racional - tradução nossa), foi analisada a estrutura cognitiva que as crianças usam para executar várias tarefas de número racional e rastreado o desenvolvimento de ideias com números racionais. Ainda, essa pesquisa se sobressai por levantar questões sobre a natureza de um papel apropriado para os fatores de percepção e outros no processo de aprendizagem dentro do nosso objetivo temático.

Os autores acima continuaram avançando em suas pesquisas e fizeram diversas publicações posteriores, muitas vezes acompanhados de outros professores. Muito oportuno trazer uma delas, feita em 1989, por Patricia Heller, Andrew Ahlgren, Thomas Post, Merlyn Behr e Richard Lesh. Eles investigaram sobre razão e definição de problemas, considerando o desempenho de 254 alunos da sétima série (não houve menção de suas idades) em um teste de raciocínio proporcional qualitativo e numérico. Dois formatos de perguntas direcionais qualitativas sobre proporções foram inventados, de forma a ocasionar mudança



qualitativa no numerador e no denominador da razão. Essa mudança refere-se a diferentes eventos no tempo para as questões de mudança de razão qualitativa, e a diferentes objetos ou pessoas para as questões de comparação qualitativa. Tanto o numerador quanto o denominador de uma razão podem diminuir, aumentar ou permanecer iguais. Portanto, há nove questões de mudança de proporção qualitativa e nove questões de comparação qualitativa que podem ser feitas. Dois desses casos são ambíguos, quando o numerador e o denominador diminuem ou ambos aumentam. O numerador e o denominador podem diminuir (ou aumentar) proporcionalmente ou não proporcionalmente. Baseado nisso, seis formas dos testes qualitativos e numéricos foram projetadas, cada uma usando um único contexto (uma das duas configurações para cada um dos três tipos de taxa/razão escolhidos, a saber: velocidade, compra e consumo). Diferentes tipos de razão parecem ter um impacto mais forte na dificuldade dos problemas de raciocínio proporcional qualitativo e numérico do que pequenas diferenças na definição de problemas. No entanto, a familiaridade da definição de problemas mostrou um efeito cada vez maior no raciocínio qualitativo à medida que a dificuldade do tipo de razão aumentava. Também, investigaram a natureza das relações entre habilidades numéricas racionais, raciocínio qualitativo sobre razões e raciocínio proporcional numérico. O raciocínio qualitativo parece ser suficiente, mas não necessário para o raciocínio proporcional numérico. A evidência para a natureza necessária das habilidades numéricas racionais para o raciocínio proporcional foi inequívoca.

Em 2002, Malcon Shield e Shelley Dole, pesquisadoras australianas, estudaram sobre como muitos tópicos do currículo de Matemática do ensino médio se conectam ao conceito de proporção e exigem habilidades de raciocínio proporcional. Primeiramente, forneceram uma base para o ensino e aprendizagem do raciocínio proporcional a partir da extensa literatura que foi desenvolvida. Em seguida, relataram parte de uma investigação que se encontrava em andamento naquele momento sobre o ensino de razão, taxa e proporção no ensino médio. O estudo foi uma investigação preliminar sobre as maneiras como a razão e a proporção são apresentadas nos livros do ensino médio, na tentativa de explicar um fator que pode contribuir para a dificuldade contínua que os alunos do ensino médio enfrentam com tópicos baseados no raciocínio proporcional. Por exemplo, no estudo da geometria das formas do avião, na trigonometria, nas aplicações de

porcentagem, bem como nas aplicações usuais de taxa, razão e proporção. A interpretação de situações de proporção e a compreensão de métodos para resolver problemas de proporção fornecem uma estrutura que pode ser aplicada a outros tópicos relacionados.

Como um recurso importante para a Matemática secundária, a extensão em que os livros do ensino fundamental vinculam tópicos relacionados à proporção foi o foco do estudo, na tentativa de explicar um fator que pode contribuir para a dificuldade contínua que os alunos do ensino médio experimentam com tópicos baseados em raciocínio proporcional. Embora o objetivo não fosse criticar os autores dos livros escolhidos, é inevitável a crítica implícita. Assim, temos que os livros introduzem definições de razão e taxa semelhantes àsquelas usadas em muitos outros textos. Nenhum dos livros distingue entre comparações absolutas (subtração) e comparações relativas (divisão) em suas definições de proporção e taxa. O uso da divisão torna-se aparente através dos exemplos. Na definição de taxa, o significado de comparar duas quantidades de tipos diferentes não é buscado. Tudo o que está implícito é que a divisão é usada, mas o significado de "comparar" quilômetros com horas não é discutido.

No livro A, não há noção de taxa como medida de mudança, ou seja, a ideia proporcional de que conforme uma variável muda, a outra muda de forma relacionada. O livro B faz uso da ideia de recalculadores prontos, o que demonstra proporcionalidade. No entanto, no texto nenhuma menção explícita a este link é feita e a ideia não é discutida com a definição de taxa. O uso da notação de fração para trabalhar com razões, proporções e taxas é uma característica de ambos os textos. No entanto, nenhum deles faz distinção entre razão, uma comparação parte/parte na maioria das aplicações discutidas, e fração e porcentagem que normalmente são comparações parte/todo. A noção de partes e todos só surge quando problemas de "compartilhamento" são abordados. Além disso, não são fornecidas razões para a escrita de razões em notação de fração, sendo apresentadas como a forma convencional de trabalhar com esses problemas.

O uso do raciocínio proporcional (multiplicativo) é apresentado nesses livros como um aparte, ao invés da principal ideia estrutural que unifica os tópicos. O livro B tem algum uso explícito de pensamento multiplicativo no trabalho sobre cálculos

prontos e em um método de resolver um problema de proporção. No entanto, os principais métodos de solução apresentados para os problemas envolvem a resolução da equação de proporção por multiplicação cruzada e métodos algébricos. O método de solução para problemas de taxa não reconhece a ligação com a proporção, confiando inteiramente no uso de uma fórmula. Nenhum texto explicita a estrutura proporcional subjacente a todos os tipos de problemas investigados, nem capitaliza as possíveis conexões que poderiam ser feitas para ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda das ideias.

A análise de apenas dois capítulos dentro de dois livros didáticos revela as limitações de tais textos em suas definições, exemplos trabalhados e procedimentos de solução sugeridos para os tópicos de razão, taxa e proporção. A representação simbólica de situações de proporção e subsequente manipulação de números dentro de equações de proporção fornece pouco significado, seja para o contexto real dos exemplos apresentados, ou para o conhecimento prévio de outros tópicos matemáticos relacionados (por exemplo, particularmente o tópico de frações e porcentagem). O tratamento dos tópicos de razão, taxa e proporção nesses dois textos parece oferecer pouca conexão e pouco faz para expor a estrutura predominantemente: parte (ou todo) de situações de proporção; uma estrutura que pode contextualizar para outros tópicos relacionados.

As definições e exemplos trabalhados retirados dos textos ilustram a brevidade de informações básicas fornecidas para usuários de livros didáticos, sugerindo que tais informações seriam bastante inúteis para os alunos e possivelmente para os pais. Pode-se argumentar que a natureza confusa das informações fornecidas reforçaria uma visão da Matemática como um assunto sem sentido, dominado por regras e altamente especializado, acessível a poucas pessoas. Como um primeiro passo para explorar a complexidade do tópico da proporção, este estudo indicou que os textos escolares parecem ser limitados em sua capacidade de ajudar os alunos (e professores) a desenvolverem as habilidades de raciocínio proporcional necessárias para o aprendizado escolar significativo e bem-sucedido da matemática.

O trabalho *Improving performance on 'ratio' tasks: can pupils convert their 'additive approach'?* (Melhorar o desempenho nas tarefas de 'razão': os alunos

podem converter sua 'abordagem aditiva?', *tradução nossa*), realizado em 2004 por Christina Misailidou e Julian Williams. Nesse estudo, as autoras desenvolveram uma pesquisa sobre avaliação diagnóstica do raciocínio proporcional de crianças (MISAILIDOU e WILLIAMS, 2004) com análises de sua argumentação enquanto trabalhavam em tarefas de proporção selecionadas. Uma abordagem de "argumentação de pequeno grupo" foi projetada e os dados foram analisados com base na análise do discurso e teorias socioculturais de aprendizagem. O foco foi desenvolver um trabalho sobre os meios de facilitar o desempenho do aluno em tarefas de 'proporção' (MISAILIDOU e WILLIAMS, 2004).

Os resultados referem-se sobre o desenvolvimento de argumentos de cinco alunos trabalhando em grupos diferentes em um item chamado 'Campistas' durante a investigação em uma tarefa de razão que provocou uma alta frequência de erros de 'estratégia aditiva'. Em seguida, os alunos formaram grupos para responderem ao teste de diagnóstico. Cada grupo consistia em três alunos e foi envolvido em uma discussão guiada por um pesquisador. As crianças receberam a tarefa de persuadir umas às outras por meio de um argumento razoável de sua resposta. A pesquisadora, assumindo o papel de professor, estabeleceu regras para os argumentos das crianças a fim de facilitar a participação na discussão. Além disso, ela tentou garantir que os argumentos para os erros fossem claramente expressos e justificados. Uma abordagem de 'argumentação em pequenos grupos' foi projetada e os dados foram analisados com base na análise do discurso e nas teorias socioculturais da aprendizagem. Dentro dessa estrutura, a importância das ferramentas no apoio à aprendizagem foi reconhecida. Uma representação pictórica do item foi usada como ferramenta para facilitar a discussão. No discurso dos alunos, encontraram argumentos como os 'somadores' se desenvolvem em direção ao pensamento multiplicativo (a) trabalhando em uma tarefa de 'contexto de compartilhamento', (b) comunicando e trabalhando em uma ferramenta 'pictórica', e (c) sendo guiados por um professor-pesquisador que chama a atenção para o contexto da tarefa e o potencial da ferramenta.

O artigo intitulado "*Authentic Investigative Activities*" for Teaching Ratio and Proportion in Pre-Service Mathematics Teacher Education ("Atividades Investigativas Autênticas" para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de

Matemática para os Níveis Elementar e Médio), de autoria dos pesquisadores David Ben-Chaim, Bat Sheva Ilany, Yaffa Keret (2008) foi o trabalho traduzido do original por Antonio Vicente Marafioti Garnica. Este artigo trouxe profunda inspiração para a investigação que desejamos iniciar, fundamentalmente, por apresentar elementos relacionados à criação, implementação e avaliação do impacto das chamadas “atividades investigativas autênticas” que focam tanto o conteúdo quanto o conhecimento pedagógico e as atitudes na formação inicial de professores de Matemática para os níveis de ensino elementar e médio.

A pesquisa foi um modelo especial de aprendizagem desenvolvido, implementado e testado como parte de atividades desenvolvidas em instituições israelenses voltadas à formação de professores. O modelo foi desenvolvido segundo estudos-piloto, investigando as alterações nos conhecimentos matemático e pedagógico de professores de Matemática – em formação e em atuação – ocorridas com a aplicação das “atividades investigativas autênticas”. As conclusões do estudo apontam que a aplicação do modelo – por meio do qual os professores ganham experiência e são expostos a atividades de raciocínio proporcional “autêntico”, que incorporam teoria de raciocínio proporcional (pela leitura e análise de relevantes textos de pesquisa) e prática – produz uma alteração significativa quanto à abordagem ao conteúdo matemático e quanto ao conhecimento pedagógico. Além disso, alterações significativamente positivas ocorreram nas atitudes e crenças desses professores em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, em geral e, em particular, em relação aos conceitos de razão e proporção.

Adicionalmente, o trabalho desses pesquisadores israelenses deixaram rastros que nos permitiram vislumbrar uma pesquisa que trate o raciocínio proporcional na perspectiva de quem posteriormente deve ensiná-la de modo diferente daquele aprendido. Além de tudo, que tenha nas discussões matemáticas de classe inteira o cerne da aprendizagem dos conceitos proporcionais. Em 2012, os mesmos pesquisadores israelenses, David Ben-Chaim, Bat-Sheva Ilany, Yaffa Keret (2012), publicaram o livro *Ratio and Proportion - Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education - Pre- and In- Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes* (Razão e Proporção - Pesquisa e Ensino na

Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática - Professores de Matemática das Classes do Ensino Fundamental e Médio).

Este livro é um manual sobre o assunto de razão e proporção, aplicando e adaptando o modelo de ensino exclusivo apresentado. Um modelo de ensino experimental foi desenvolvido e empregado em três projetos de pesquisa realizados em duas faculdades de ensino em Israel ao longo de três anos (2000-2003). Este modelo de ensino combina ensino teórico com atividades práticas de investigação, oferecendo uma compreensão mais profunda resultante da análise de relatórios de pesquisa publicados. Ao proporcionar aos professores em formação (e aos já formados) um profundo entendimento matemático pedagógico combinado com uma experiência prática e concreta, é provocada uma mudança de atitude e confiança, melhorando sua experiência final de ensino e beneficiando professores e alunos.

Também em 2012, foi publicado o trabalho dos portugueses Ana Isabel Silvestre e João Pedro da Ponte chamado *Proporcionalidade Directa no 6º Ano de Escolaridade: uma abordagem exploratória*. Ele teve como objetivo desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos, encarado como a capacidade para distinguir relações de proporcionalidade direta de outras relações, compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e resolver vários tipos de problemas. Ainda, apresentou flexibilidade para usar diferentes abordagens sem ser afetado pelos dados numéricos, contextos e representações.

O trabalho foi desenvolvido por meio de unidade de ensino, cuja conjectura de ensino-aprendizagem presente revelou-se propiciadora de aprendizagem significativa, permitindo mobilizar o conhecimento que os alunos já têm, aprofundando-o do ponto de vista matemático e envolvendo-os na generalização de regularidades e relações. Neste sentido, foi conclusivo que a unidade de ensino desenvolveu o raciocínio proporcional dos alunos, tendo estes melhorado o seu desempenho nos três aspectos com que os autores caracterizam esta capacidade matemática. Os alunos melhoram o seu desempenho na distinção das relações proporcionais daquelas que não são. Na resolução de problemas, em particular, nos de valor omissivo, os alunos passam a usar estratégias multiplicativas em vez da estratégia de composição/decomposição associada com frequência a processos aditivos, o que revela uma melhor compreensão da natureza multiplicativa da

relação de proporcionalidade. Além disso, foi posto que os alunos ampliaram o seu conhecimento sobre representações, utilizando-as de forma flexível.

A pesquisadora sueca Linda Marie Ahl publicou, em 2016, o artigo sobre *Research Findings Impact on the Representation of Proportional Reasoning in Swedish Mathematics Textbooks* (Resultados da Pesquisa Impacto na Representação do Raciocínio Proporcional em Livros Didáticos de Matemática Suecos). Este artigo investiga o impacto dos resultados da pesquisa na representação do raciocínio proporcional em duas coleções de livros didáticos de Matemática suecos, comumente adotados para as 7<sup>a</sup>, 8<sup>a</sup> e 9<sup>a</sup> séries (as idades dos alunos não foram informadas). Uma estrutura que identifica cinco objetivos de aprendizado para a compreensão do raciocínio proporcional foi usada para analisar os livros didáticos.

Os resultados trouxeram à tona uma lacuna entre as descobertas de pesquisas de questões importantes a serem abordadas e o design real dos livros didáticos de Matemática. Todas as séries de livros didáticos fazem uso de uma gama eficaz de representações. Além disso, a análise mostra baixo impacto dos achados da pesquisa sobre a importância de oportunidades para comparar e contrastar situações aditivas e multiplicativas, identificar estruturas multiplicativas e raciocínio proporcional, fazer uso de representações simbólicas significativas e conectar e relacionar conhecimentos de frações. A principal conclusão é que existem possibilidades de melhoria no design de livros didáticos em relação à compreensão do raciocínio proporcional.

Os trabalhos publicados por Arthur Belford Powell também trouxeram significado às buscas por publicações relevantes sobre o tema de raciocínio proporcional. Em 2019, o artigo intitulado *Improving Student Knowledge about fraction magnitude: an initial study with students in early elementary education* (Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: um estudo preliminar com alunos dos anos iniciais, *tradução nossa*) trouxe sua investigação a respeito dos números fracionários, implementados por uma pesquisa de *design research* numa escola nos EUA, com o objetivo de examinar as potencialidades da perspectiva de medição e fração-de-quantidade para ampliar os entendimentos conceituais de magnitude de frações entre estudantes do segundo

ano do Ensino Fundamental. Foram utilizadas ideias da História da Matemática e da Educação Matemática em uma estrutura histórico-cultural para definir o que são frações e construir tarefas. Para Powell, mesmo que estudantes tenham uma capacidade inata para processar razões não-simbólicas, em muitos países, os estudantes não conseguem aproveitar dessa capacidade para construir um conhecimento robusto de frações e, em vez disso, têm dificuldades para compreender e operar com números fracionários. E acrescenta que essa falta os prejudica na aprendizagem da álgebra e conceitos matemáticos posteriores.

Em 2020, um esforço inovador para tornar a pesquisa em Educação Matemática em razões e proporções prontamente acessível e compreensível para os professores de 6<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> séries foi feito pelos pesquisadores Marjorie M. Petit, Robert E. Laird, Matthew F. Wyneken, Frances R. Huntoon, Mary D. Abele-Austin e Jean D. Sequeira. Usando extensas amostras anotadas do trabalho do aluno e com base em pesquisas reunidas no Projeto de Avaliação Contínua (OGAP - Ongoing Assessment Project), um enfoque em razões e proporções ensina aos leitores como os alunos desenvolvem compreensão e fluência envolvendo conceitos de razão e proporção. O livro de título *A Focus on Ratios and Proportions Bringing Mathematics Education Research to the Classroom* (Foco nas razões e proporções que levam a pesquisa do ensino de Matemática para a sala de aula) é resultado de 16 anos de pesquisas junto a milhares de professores que participaram do projeto.

O projeto foi iniciado em 2003 com o propósito de fornecer aos professores ferramentas, estratégias e conhecimentos de avaliação formativa específicos da Matemática, a fim de tornar as práticas de avaliação formativa um aspecto central da instrução matemática. Os materiais desenvolvidos tiveram por base a pesquisa em Educação Matemática. O foco está em como os alunos aprendem conceitos matemáticos específicos relacionados a tópicos matemáticos importantes. Exemplificando: proporcionalidade, frações, raciocínio multiplicativo e raciocínio aditivo. Ainda, os erros e conceitos errôneos comuns que se pode esperar para acompanhar o aprendizado dos alunos, tipos de experiências instrucionais que beneficiam todos os alunos à medida que se tornam mais fluentes nesses tópicos. Assim, o livro é uma tentativa de comunicar essa pesquisa em um formato em que os professores podem acessar para fortalecer o uso da avaliação formativa nas



salas de aula de Matemática do ensino médio e, finalmente, ajudar todos os alunos a adquirirem uma compreensão profunda dos conceitos e habilidades de razão e proporção.

Concluindo este tópico, entendemos que as pesquisas internacionais apresentadas acima nos trazem algumas reflexões sobre as dificuldades dos alunos com tarefas relacionadas ao raciocínio proporcional, como os tipos de tarefas que as crianças podem desenvolver. É comum a todas elas que os alunos têm um longo caminho a percorrer para atingir o domínio das estratégias e habilidades básicas de raciocínio proporcional. Parece que tanto a complexidade dos números racionais quanto os contextos deveriam ser mais manipulados pelos materiais curriculares e pela instrução dada em sala de aula. Também, parece essencial trabalhar no desenvolvimento do raciocínio proporcional com instrução extensiva ao longo de vários anos do ensino básico. É consenso que, se professores e alunos ficarem limitados às abordagens apresentadas nos materiais didáticos, muitas habilidades acerca do raciocínio proporcional não serão desenvolvidas em sua totalidade. É bem possível que os alunos utilizem procedimentos memorizados sem entender o que eles significam, por terem sido apresentados à ferramenta da regra de três antes de já terem entendimento de outras resoluções intuitivas para as situações proporcionais (SHIELD E DOLE, 2013). Em particular, as crianças devem ter experiências com atividades de particionamento antes do 3º ano do Ensino Fundamental, de forma a observar a relação compensatória entre o tamanho e o número de partes em que um todo é dividido.

A seguir, apresentamos o Quadro 01, com a síntese dos trabalhos internacionais ressaltados nesta pesquisa, destacando os pesquisadores por ordem cronológica de suas obras.

**Quadro 01** - Trabalhos Internacionais.

Ano	Autores	País Publicação	Título
1975	Thomas E. Kieren	Estados Unidos	<i>On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers</i>
1983	Merlyn J. Behr, Richard Lesh, Thomas R. Post and Edward A. Silver	Estados Unidos	<i>Rational Number Concepts</i>
1989	Patricia Heller, Andrew Ahlgren, Thomas Post, Merlyn Behr and Richard Lesh	Estados Unidos	<i>Proportional reasoning: the effect of two context variables, rate type and problem setting</i>
2002	Malcon Shield and Shelley Dole	Austrália	<i>Investigating Textbook Presentations of Ratio and Proportion</i>
2004	Christina Misailidou and Julian Williams	Reino Unido	<i>Improving performance on 'ratio' tasks: can pupils convert their 'additive approach'?</i>
2008	David Ben-Chaim, Bat Sheva Ilany and Yaffa Keret	Israel	<i>Authentic Investigative Activities for Teaching Ratio and Proportion in Pre-Service Mathematics Teacher Education</i>
2012	David Ben-Chaim, Bat Sheva Ilany and Yaffa Keret	Israel	<i>Ratio and Proportion - Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education - Pre and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes</i>
2012	Ana Isabel Silvestre e João Pedro da Ponte	Portugal	<i>Proporcionalidade Directa no 6º Ano de Escolaridade: uma abordagem exploratória.</i>
2013	Malcon Shield and Shelley Dole	Austrália	<i>Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning.</i>
2016	Linda Ahl	Suécia	<i>research Findings Impact on the Representation of Proportional Reasoning in Swedish Mathematics Textbooks</i>
2019	Arthur Powell	Estados Unidos	<i>Improving Student Knowledge about Fraction Magnitude: an initial study with students in early elementary education</i>
2020	Marjorie M. Petit, Robert E. Laird, Matthew F. Wyneken, Frances R. Huntoon, Mary D. Abele-Austin and Jean D. Sequeira	Estados Unidos	<i>A Focus on Ratios and Proportions Bringing Mathematics Education Research to the Classroom</i>

Fonte: Elaborado pela autora.

## **2.2. Mapeamento das Pesquisas sobre Raciocínio Proporcional: Um Panorama da Produção Brasileira**

Em um levantamento documental sobre raciocínio proporcional, mapeamos a produção acadêmica de universidades brasileiras com o objetivo de conhecermos o que já havia sido produzido no país e publicado em dissertações e teses acerca da temática. Nós realizamos essa primeira atividade metodológica de pesquisa buscando os trabalhos disponíveis no site do “Google Acadêmico”, na busca preliminar pela temática dentro da academia. O cenário encontrado pode ser bem compreendido por meio da dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora realizada por Tinoco (2016). Esse trabalho apresenta uma revisão de literatura sobre proporcionalidade mediante levantamento das pesquisas produzidas no Brasil, sendo considerados apenas trabalhos publicados no Portal da Capes a partir do ano de 1995, com o último trabalho estando datado de 2013. Foi conclusivo que, apesar da proporcionalidade ser indispensável para a resolução de inúmeros problemas, existem poucos trabalhos vinculados ao assunto. De fato, em nossa busca, identificamos mais trabalhos de dissertação de mestrado do que pesquisas como tese de doutorado no território nacional.

Adiante, passamos a uma segunda abordagem, agora apresentando o resultado das buscas que fizemos no portal de periódicos e banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, o que nos permitiu aprofundar o entendimento sobre os estudos brasileiros da temática de raciocínio proporcional. Para organizar os aspectos pesquisados neste levantamento do estado do conhecimento, apresentamos os resultados preliminares encontrados em 15/11/2019, conforme os descritores utilizados nas buscas, considerando trabalhos dentro das grandes áreas de ciências sociais aplicadas e ciências humanas que tinham sido publicados até o ano de 2018.

**Quadro 02** – Pesquisa Portal CAPES em 15/11/2019 – Etapa 1

<b>DESCRITORES</b>	<b>TOTAL DE TRABALHOS ENCONTRADOS</b>	<b>FILTROS</b> <i>(ciências sociais aplicadas e ciências humanas)</i>		
		TESES	MESTRADO ACADÊMICO	MEST PROF
"Ensino de razão"	<b>6</b>	0	2	4
"Ensino de proporção"	<b>3</b>	0	2	1
"Ensino de proporcionalidade"	<b>8</b>	0	1	7
"Ensino de regra de três"	<b>3</b>	0	0	3
"Grandezas proporcionais"	<b>7</b>	0	0	7
"razão" AND "proporção"	<b>105</b>	18	81	6
"proporcionalidade"	<b>93</b>	22	66	5
"regra de três"	<b>53</b>	7	21	25
("razão" OR "proporção") AND "matemática" – EDUCAÇÃO	<b>34</b>	9	23	2
<b>TOTALIZAÇÃO .....</b>	<b>312</b>	<b>56</b>	<b>196</b>	<b>60</b>

Fonte: Elaborado pela autora

A partir desse resultado, refinamos a busca de forma a eliminar trabalhos duplicados, por terem sido classificados em dois ou mais descritores. Também, foram desconsiderados os trabalhos que integram outra área do conhecimento, por destoarem da nossa temática e objetivo de pesquisa. A seguir, apresento o quadro-resumo das exclusões.

**Quadro 03** – Pesquisa Portal CAPES em 15/11/2019 – Etapa 2

DESCRITORES	TOTAL DE TRABALHOS EXCLUÍDOS	FILTROS (Motivo das Exclusões)				
		Em Duplicidade	Área de conhecimento não pertinente			
			Ciências Natureza Demografia	Direito	Ciências Humanas	Ciências Gerenciais
"Ensino de razão"	1		1			
"Ensino de proporção"	1		1			
"Grandezas	2	2				
"razão" AND "proporção"	98	1	14	28	22	33
"proporcionalidade"	69	7	3	10	46	3
"regra de três"	24	11	12			1
<b>Totalização .....</b>	<b>195</b>	<b>21</b>	<b>31</b>	<b>38</b>	<b>68</b>	<b>37</b>

Fonte: Elaborado pela autora

Após esse refinamento, apresentamos, enfim, o quadro resumo com as pesquisas que estão classificadas dentro da área de saber Educação, Educação Matemática, Ensino Matemático ou Psicologia Cognitiva, sendo todas essas áreas voltadas para o nosso interesse de estudo. Assim, apresentamos o novo cenário:

**Quadro 04** – Pesquisa Portal CAPES em 15/11/2019 – Etapa 3

DESCRITORES	TOTAL DE TRABALHOS ENCONTRADOS	FILTROS (Educação, Educação Matemática, Psicologia Cognitiva)		
		TESES	MESTRADO ACADÊMICO	MEST PROF
"Ensino de razão"	5	0	2	3
"Ensino de proporção"	2	0	2	0
"Ensino de proporcionalidade"	8	0	1	7
"Ensino de regra de três"	3	0	0	3
"Grandezas proporcionais"	5	0	0	5
"razão" AND "proporção"	12	01	10	01
"proporcionalidade"	26	08	18	0
"regra de três"	28	2	11	15
("razão" OR "proporção") AND "matemática" – EDUCAÇÃO	28	9	17	2
<b>TOTALIZAÇÃO .....</b>	<b>117</b>	<b>20</b>	<b>61</b>	<b>36</b>

Fonte: Elaborado pela autora

Até aqui, foram pré-selecionados 117 trabalhos, conforme detalhamento do Quadro 04. Destes, 20 teses de doutorado, 61 dissertações de mestrado acadêmico e 36 dissertações de mestrado profissional. Refinando ainda mais essa busca, procedemos à leitura dos títulos, resumos e sumários, verificando quais pesquisas se encaixavam às especificidades do presente trabalho, observando as referências bibliográficas e os conceitos teóricos. Ainda, após esses procedimentos, fizemos releituras sistemáticas ao longo do ano de 2020 e, após estabelecer esta pesquisa como uma pesquisa documental e voltada para análise de livros didáticos, refinamos ainda mais a nossa busca. Desta forma, os trabalhos foram reduzidos a um número de 25 pesquisas, a saber, sete teses, 09 dissertações de mestrado acadêmico e 09 dissertações de mestrado profissional. Proporcionalmente, temos que 39% dos trabalhos são teses e 61% são dissertações. Assim, daqui adiante, apresentamos os trabalhos que consideramos mais relevantes e que estavam disponíveis na plataforma Sucupira, partindo cronologicamente das teses, em seguida das dissertações.

### 2.2.1. Teses

Maria Gilvanise de Oliveira Pontes defendeu sua tese em 1996 sob o título “Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extraescolar”, junto ao programa de Doutorado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas. A autora elaborou a pesquisa que teve como objetivo central analisar a relação existente entre a matemática escolar e a que permeia as atividades cotidianas dos trabalhadores de diferentes profissões que não dependem de escolarização formal. Para tanto, foram selecionados os conteúdos de medidas e proporcionalidade por se tratarem dos que normalmente mais usamos no nosso dia a dia. A autora gravou todas as aulas de um 5º ano em que foi ministrado o conteúdo de medidas e as do 6º ano em que foram ensinados razão e proporção. Paralelamente, ela observou, por uma jornada de trabalho, uma costureira, uma comerciante, uma cozinheira, um marceneiro, um mestre de obras e um oleiro, nas suas labutas diárias, procurando captar que itens eram abordados e como eram trabalhados por estes profissionais.

Pontes (1996) também realizou entrevistas com os dois professores, vinte por cento de seus alunos e seis outros trabalhadores, procurando captar suas representações sobre a escola e o ensino de Matemática. A seguir, confrontou as duas abordagens, constatando que os itens e as estratégias mais usados pelos trabalhadores não são contempladas nas aulas de Matemática, caracterizando-se um grande divórcio entre "o quê" e "como" se ensina Matemática na escola e "o quê" e "como" se usa essa disciplina na prática cotidiana do trabalhador comum. Concluindo, ela sugeriu que o ensino de Matemática se aproxime das abordagens do cotidiano, devendo para tanto fazer uso de metodologias alternativas que se inserem na etnomatemática como a modelagem, a resolução de problemas e a problematização que possibilitam um envolvimento do aluno, tornando-o sujeito de sua educação.

A tese de abordagem tecnológica, intitulada de “Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais.” Foi defendida em 2010 por Leandra Anversa Fioreza junto ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A área de atuação abrange alunos da educação básica (idade dentre 13 a 15 anos)

que estudam na escola pública, sendo que a metodologia utilizada é a Engenharia Didática. Teve por objetivo investigar a utilização de atividades digitais no processo de construção da estrutura do pensamento multiplicativo envolvendo a proporcionalidade, para estudantes do 8º ano, tendo por base a teoria dos campos conceituais.

Fioreza (2010) utilizou atividades digitais feitas com os *softwares* Régua e Compasso, planilha eletrônica, geoplano, dois objetos de aprendizagem criados pelo grupo de pesquisa RIVED/UNIFRA – Rede Interativa Virtual de Educação do Centro Universitário Franciscano, um vídeo “Matemática na Vida: Razão e Proporção”, do portal Domínio Público e objetos materiais como maquetes, molas, moedas, folhas de papel, sendo todas elas relacionadas com o conceito de proporcionalidade. A pesquisadora considerou que o raciocínio proporcional constitui um conceito pivô para os progressos escolares da Matemática (e das Ciências), por ser o alicerce de tudo o que se segue. Após a análise dos resultados obtidos, constatou-se que as atividades digitais contribuíram, significativamente, para o desenvolvimento das estruturas multiplicativas e da proporcionalidade.

Em 2013, Rita Sidmar Alencar Gil defendeu a tese “Formação de Professores de Matemática: conexões didáticas entre Matemática, História e Arquitetura”. O trabalho foi apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Ele aborda a formação inicial do professor de Matemática e as situações vivenciadas em sala de aula durante a sua formação e, nesta perspectiva, foram selecionados vinte e cinco alunos regularmente matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Pará - IFPA.

Assim a tese de doutorado de Gil (2013) propôs o uso da investigação do patrimônio histórico arquitetônico setecentista de Belém na formação de professores de Matemática com o objetivo de investigar a possibilidade de uso de uma abordagem didática para o ensino de tópicos matemáticos como geometria, medidas, simetria e proporcionalidade. A pesquisa demonstra que, a partir de suas experiências trazidas e vivenciadas, os licenciandos do estudo puderam melhorar a sua formação adicionando o patrimônio histórico arquitetônico de Belém como um elemento de pesquisa e investigação histórica para o ensino e aprendizagem da



Matemática de forma a relacionar e contextualizar o conhecimento a partir de situações vivenciadas na realidade, quando de suas atuações nas Escolas de Belém.

Em 2016, Roberta D'Angela Menduni Bortoloti apresentou uma matemática como um modelo para o ensino do conceito de proporcionalidade. Sua tese "Um estudo sobre a Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade" foi apresentada ao programa de Doutorado em Educação pela Universidade Federal da Bahia. O modelo defendido permite reunir uma variabilidade de formas de comunicar o conceito de proporcionalidade e (re)apresentá-la por meio de uma estrutura teórica que organiza seus modos de ocorrência, utilizando três fontes: artigos científicos, um grupo de professores e livros didáticos de Matemática. A autora utilizou três caminhos para o alcance da sua proposta. O primeiro, consistiu em construir uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de uma revisão sistemática de literatura, identificando e sintetizando estudos. O segundo foi construir uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um grupo com professores da educação básica e, o terceiro foi construir uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de livros didáticos de Matemática da educação básica.

Os resultados de Bortoloti (2016) mostraram uma diversidade de realizações do conceito de proporcionalidade, distribuída em três cenários, formando, assim, um modelo teórico para o ensino do conceito de proporcionalidade. No primeiro cenário, o conceito de proporcionalidade foi relatado como razão e realizou-se como taxa, escala, divisão, probabilidade, razão trigonométrica, porcentagem, divisão e quotização proporcionais, vetor e intervalos musicais. No segundo, ele foi descrito pela igualdade entre razões a partir do uso da regra de três, da divisão proporcional de segmentos e da porcentagem. No último cenário, esse conceito foi apresentado como taxa de variação de uma função, podendo ser identificada como uma constante de proporcionalidade, um fator-escala, um coeficiente angular ou uma declividade.

A tese intitulada "Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica, de Maria Arlita da Silveira Soares, foi defendida em 2016 ao

programa de Educação nas Ciências da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. A pesquisa teve por objetivos identificar e analisar o tratamento dado ao conceito de proporcionalidade e a presença das estruturas multiplicativas centrais do raciocínio proporcional e da proporcionalidade no currículo planejado e em ação da educação básica, considerando as escolhas de um grupo de professores. Bem como, verificar quais transformações cognitivas são consideradas nas situações apresentadas nos materiais curriculares e averiguar se a proporcionalidade é tratada como função. Para tanto, o referencial teórico foi construído sustentado nas teorias que tratam da aprendizagem matemática sob a ótica da psicologia cognitiva, neste caso, a teoria dos Registros de Representação Semiótica e a teoria dos Campos Conceituais; e nas teorias que versam sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional e conceito de proporcionalidade, principalmente, as categorias do campo das estruturas multiplicativas e os “nós”<sup>18</sup> da rede elaborada por Lamon.

A fim de atingir o objetivo, Soares (2016) elaborou a seguinte questão norteadora: De que forma as estruturas multiplicativas centrais do raciocínio proporcional e o conceito de proporcionalidade vêm sendo abordados em materiais que expressam o currículo planejado e o em ação, considerando as escolhas de um grupo de professores? O desenvolvimento seguiu o Modelo de Romberg-Onuchic, por meio de uma abordagem qualitativa e a produção de dados foi realizada, essencialmente, por análise de documentos. Estes documentos representam as diferentes fases do currículo, a saber: currículo planejado (coleções de livros didáticos de Matemática da Educação Básica) e currículo em ação (planejamentos de professores).

O procedimento adotado Soares (2016) para a análise dos documentos seguiu os princípios da Análise de Conteúdo. A análise das fontes de produção de dados permitiu concluir que a maioria das estruturas multiplicativas centrais do raciocínio proporcional foi constatada nos materiais curriculares analisados, no entanto, estes aspectos são pouco explicitados, em outros termos, são abordados com foco no ensino de um conteúdo específico sem estabelecer conexões com

---

<sup>18</sup> As atividades foram analisadas de acordo com os cinco nós da rede de aspectos centrais no desenvolvimento do raciocínio proporcional, elaborada por Lamon (2007, 2008), a saber: interpretações do número racional; medida; quantidade e covariação; unitização; partilha e comparação.

outros, o que limita o entendimento da proporcionalidade como conceito unificador e formador da Matemática. Percebe-se, também, que há um isolamento da proporcionalidade em relação à álgebra, pois as relações verificadas envolvem, principalmente, conceitos aritméticos e geométricos. Quanto às transformações cognitivas, verificou-se que a conversão foi a mais enfatizada nas atividades analisadas. Contudo, os sentidos das conversões na maioria das vezes foram explorados em um único sentido, restringindo a compreensão dos objetos matemáticos. Além disso, a representação auxiliar de transição, essencial à compreensão de enunciados de problemas multiplicativos, foi proposta em poucas atividades, tanto nas coleções de livros didáticos quanto nos planejamentos dos professores. A proporcionalidade é tratada como função apenas nos materiais curriculares do ensino médio, confirmando que a igualdade de razões ainda é o modelo mais utilizado nos materiais curriculares para abordar este conceito.

Denivaldo Pantoja da Silva defendeu a tese “A invariável prática da regra de três na escola” em 2017, junto ao programa de Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará. Esta pesquisa trata do porquê da invariabilidade da ação dos professores frente às situações de Regra de Três. Uma compreensão é construída a partir da noção de práticas sociais com Matemática que denominamos Praxeologia com Matemática, à luz da Teoria Antropológica do Didático em articulação com a noção de *habitus*. Os resultados apontam implicações para o ensino com base na modelagem matemática, no sentido das Organizações Praxeológicas que mobilizam saberes matemáticos e extra matemáticos estruturados segundo uma intenção didática.

A tese de Benedito Fialho Machado foi defendida em 2018 junto ao programa de Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará. Com o título “saberes elementares de aritmética em manuais didáticos do curso primário produzidos no Pará (1850 – 1950)”, ela objetiva descrever e analisar a constituição dos saberes aritméticos presentes nos manuais didáticos destinados ao ensino primário do Pará no período de 1850 a 1950. A questão principal de pesquisa é “quais eram os saberes elementares aritméticos designados para os primeiros anos escolares presentes nos manuais didáticos destinados ao Ensino Primário no Pará?”. Desta forma foi descrita a trajetória de constituição desses saberes

elementares aritméticos no ensino primário do Pará em perspectiva histórica com base em legislações, programas e principalmente na leitura e discussão dos manuais didáticos produzidos para as escolas da época.

Também, Machado (2018) enfatizou a produção intelectual e acadêmica dos manuais didáticos de aritmética no estado do Pará, seus autores e a sua importância para o ensino primário da época. A pesquisa foi realizada na Seção de Obras Raras da Biblioteca Pública Arthur Vianna, Belém/PA, no site da Hemeroteca Digital Brasileira da Fundação Biblioteca Nacional, Center for Research Libraries - Provincial Presidential Reports (1830-1930), no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina e com vários colecionadores de diversos estados do Brasil. Assim, foi possível obter de forma impressa e digitalizada alguns exemplares não somente de aritmética, mas também de geometria e desenho, além de manuais sobre o sistema métrico decimal. A fundamentação teórica está pautada nos conceitos explorados na perspectiva orientadora da investigação fundamentada pela História cultural que expressa uma elaboração mais apurada nas concepções de autores como Roger Chartier (2002), Dominique Julia (2001), Michel de Certeau (1982), André Chervel (1990), Alain Chopin (2004) e (2009), etc, que possibilitaram delinear trajetórias e conceber conceitos orientadores desta pesquisa.

A respeito dos aspectos epistemológicos das pesquisas sobre manuais didáticos, Machado (2018) concluiu que há uma considerável produção de livros, artigos e teses que versam acerca da produção do livro e da produção de pesquisas relacionadas ao tema. Pela análise e descrição das documentações oficiais, foi concluído que o método intuitivo foi o método de maior relevância na educação do Pará em relação à produção de sua documentação educacional e que por sua vez respaldou a elaboração dos manuais didáticos descritos neste estudo. A educação primária no estado do Pará foi pedagogicamente delineada e sistematizada consoante às orientações das escolas primárias elaboradas na França. Há vasta produção de manuais didáticos no Pará elaborados pelos próprios professores do ensino primário e que seus autores eram pessoas influentes na sociedade, assumindo outros cargos sociais de importância. Os saberes elementares foram constituídos pela conceituação de vários termos usados na aritmética; além de algarismos; numeração; base de sistema e de numeração; operações fundamentais:

adição, subtração, multiplicação e divisão; sistema métrico decimal; frações; dízimas periódicas; potenciação: raiz quadrada e cúbica; números complexos; razão e proporção; regra de três e porcentagem, juros; progressões; logaritmos; e números primos.

A seguir, apresentamos o Quadro 05, com a síntese dos teses produzidas no país disponíveis no Portal da CAPES, destacando os autores por ordem cronológica de suas obras.

**Quadro 05** - Trabalhos Nacionais - Teses até 2018.

Ano	Autor(a)	Universidade	Título
1996	Maria Gilvanise de Oliveira Pontes	Universidade Estadual de Campinas	<i>Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extraescolar</i>
2010	Leandra Anversa Fioreza	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	<i>Atividades Digitais e a Construção dos Conceitos de Proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais.</i>
2013	Rita Sidmar Alencar Gil	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	<i>Formação de Professores de Matemática: conexões didáticas entre Matemática, História e Arquitetura</i>
2016	Roberta D'Angela Menduni Bortoloti	Universidade Federal da Bahia	<i>Um Estudo sobre a Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade</i>
2016	Maria Arlita da Silveira Soares	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul	<i>Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica</i>
2017	Denivaldo Pantoja da Silva	Universidade Federal do Pará	<i>A Invariável Prática da Regra de Três na Escola</i>
2018	Benedito Fialho Machado	Universidade Federal do Pará	<i>Saberes Elementares de Aritmética em Manuais Didáticos do Curso Primário Produzidos no Pará (1850 - 1950)</i>

Fonte: Elaborado pela autora.

### 2.2.2. Dissertações

A dissertação intitulada “Educação de Jovens e adultos: Uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas”, de David Luiz Mazzanti, foi defendida em 2008 ao programa de mestrado profissional em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Essa pesquisa traz à tona o interesse dos alunos da 3ª série do ensino médio do segmento de ensino da EJA, na aprendizagem dos cálculos trabalhistas e a influência da regra de três e

porcentagem na solução de problemas vinculados ao tema. Em relação aos conhecimentos prévios, o autor verificou a necessidade de conhecimento da linguagem natural (leitura e escrita), interpretação de situações-problema, cálculo envolvendo as quatro operações no conjunto dos números racionais, regra de três simples, porcentagem, conversões de medida de tempo (base sexagesimal para base centesimal).

Mazzanti (2008) notou também que as maiores dificuldades são relativas aos descontos obrigatórios para empregados com registro na carteira de trabalho (INSS, FGTS e Vale Transporte). Também, alguns erros relacionados ao uso da regra de três, porcentagem, tarefas com as quatro operações envolvendo números decimais e de interpretação para a resolução das situações-problema. Mas, de modo geral, constatou-se um bom desempenho desses alunos na resolução das questões aplicadas. Segundo o autor, o uso de regra de três e porcentagem era necessário e o impacto foi bastante positivo, dado que a aplicação de uma situação-problema voltada ao interesse do aluno pesquisado facilitou o aprendizado mais significativo.

A dissertação “A prática de ensino de Física no Ensino Médio e o conceito de proporcionalidade: conexão fundamental na construção e (re)construção de conhecimentos” foi defendida em 2009 por Luís Carlos da Silva, ao Programa de Pós-Graduação em Educação, Ciências e Matemática (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará. Essa dissertação, construída à luz da Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, teve por objetivo apontar caminhos para a construção de novas praxeologias que considerassem a (re)ligação/articulação dos vários conteúdos de Física, evocando os conceitos de proporcionalidade e a regra de três algebrizada, para auxiliar na compreensão dos fenômenos físicos observáveis no dia a dia.

A pesquisa de Silva (2009) foi realizada por meio de uma entrevista semiestruturada, com cinco professores que lecionam Física no ensino médio. O objetivo foi descobrir qual tipo de conexão os professores estabelecem entre o pensamento de grandezas diretas e inversamente proporcionais; e regra de três simples e fenômenos relacionados, principalmente, com a cinemática, por exemplo, velocidade média, dentre tantas outras, a fim de potencializar a incorporação estruturada de saber. O autor concluiu que a construção de conhecimentos de Física

possui um perfil mecânico, estático e irrefletido e que não era comum articular a Física e a Matemática para compreender os fenômenos físicos.

A dissertação intitulada “Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade: contribuições da História da Matemática” foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN. Este trabalho foi muito útil na abordagem de alguns aspectos históricos. Nesse trabalho de 2010, o autor José Roberto Costa Júnior objetivou conhecer os significados atribuídos ao conceito de proporcionalidade por meio de atividades voltadas à história da matemática e verificou se essa abordagem colabora no processo de ensino e aprendizagem voltada a esse objeto de conhecimento. Os resultados indicaram que as atividades desenvolvidas corroboraram no alcance dos objetivos, revelando que há um longo percurso a ser trilhado no sentido de tornar a história da matemática subsídio na prática desses professores, devido à falta de formação na área, além da carência de livros que abordam adequadamente o tema.

A dissertação cujo título é “Matemática e cidadania: O ensino da regra de três em uma classe do 2º ano do Ensino Médio noturno” foi apresentada por Mauro José dos Santos Flora, no ano de 2011, à Universidade do Grande Rio. O trabalho objetivou analisar a relação entre o ensino da Matemática e o exercício da cidadania, com foco na regra de três como ferramenta de cálculo no cotidiano do aluno de um ensino regular noturno. O autor relaciona o ensino da Matemática com as ações práticas da vida de um indivíduo, que, enquanto cidadão, precisa ter capacidade de entender a sua situação no mundo e seus direitos para, somente assim, poder reivindicá-los. Foram coletadas informações a partir de questionários socioeconômicos, atividades prático-acadêmicas e por meio do contato com a direção e com os alunos do colégio. A partir desses relatos, constatou-se que os estudantes passaram a usar a Matemática de forma a facilitar seu desempenho no emprego, denotando assim relacionar um conteúdo matemático com o exercício da cidadania.

A pesquisa intitulada “Regra de três: prática escolar de modelagem matemática” foi apresentada à Universidade Federal do Pará, em 2011, por Denivaldo Pantoja da Silva. Ela teve por objetivo apontar caminhos que pudessem,

mesmo que parcialmente, levar à compreensão do ensino da regra de três na formação de uma consciência crítica, que revele os modelos matemáticos como algo não restrito apenas à Matemática. No decorrer da dissertação, o autor fez uma análise histórica acerca do conteúdo de regra de três e, a partir disso, verificou o caráter prático da regra de três ao longo do tempo e a possibilidade de permitir um fazer docente de regra de três que poderá promover o ensino da modelagem matemática na escola, tornando-a mais atuante e reflexiva socialmente.

A dissertação de mestrado intitulada “Labirintos da compreensão de regras em Matemática: um estudo a partir da regra de três”, de Janeisi de Lima Meira, foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará no ano de 2012. O objetivo foi analisar os procedimentos adotados por alunos do ensino fundamental na resolução de regra de três simples e composta e o processo de tratamento que é dado à linguagem, particularmente à linguagem matemática, destacando grande dificuldade dos alunos na resolução desses problemas, bem como a maneira mecânica da aplicação da regra de três, sem atribuição de sentido.

Meira (2012) ainda destaca a confusão gerada com regras aprendidas em experiências anteriores que não se adequam à nova situação de aprendizagem e que a maneira como aplicamos uma regra depende de como fomos ensinados, embora sua aplicação faça parte de nossa subjetividade. O cenário da pesquisa foi uma sala de aula com alunos do 7º ano da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará. A coleta do material aconteceu a partir de observações *in lócus* e por meio da aplicação de três baterias de testes envolvendo problemas matemáticos escolares de regra de três. Após o término das atividades, foram realizadas entrevistas semiestruturadas com alguns desses alunos e com o professor da turma. As análises foram organizadas em três seções, as quais revelaram que grande parte desses alunos fracassou ao aplicar e seguir as regras matemáticas. Ainda, as ações desses alunos frente ao uso dos algoritmos também acontecem de maneira mecânica, pois aplicaram as regras e as seguiram sem atribuírem sentido. E há ainda aqueles que se confundiram com as regras aprendidas em experiências anteriores.



Em 2014, como requisito do mestrado profissional em Matemática da Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Janderson Matricardi de Souza defendeu a dissertação intitulada “A Abordagem dos Conceitos de Proporcionalidade sob a Ótica da Resolução de Problemas”. O autor apresenta a técnica de resolução de problemas visando despertar a atenção dos professores de Matemática do ensino básico como sendo um ponto central para o desenvolvimento dos conteúdos curriculares. Já sobre a proporcionalidade, ele pondera que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com as leis de proporcionalidade e o desenvolvimento do raciocínio proporcional se faz muito útil na interpretação de fenômenos do mundo real.

Assim, e com intuito de auxiliar os professores da educação básica, Souza (2014) abordou conceitos de proporcionalidade sob a ótica da resolução de problemas, mediante os seguintes tópicos: grandezas diretamente proporcionais, divisão em partes proporcionais, porcentagem, grandezas inversamente proporcionais e grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras. Cada tópico é trabalhado a partir de uma situação-problema, utilizando uma sequência de etapas essenciais ao ensino de Matemática através da técnica de resolução de problemas. As etapas foram (1) identificar o problema, (2) analisar o problema e coletar informações sobre o mesmo, (3) selecionar uma ou mais hipóteses, (4) testar as hipóteses selecionadas e (5) chegar a uma conclusão a respeito do problema. Em cada etapa, apenas foi indicada uma diretriz do significado da mesma, recaiando ao professor estabelecer a didática necessária para sua utilização.

Alex Brandão de Almeida, em 2014, defendeu sua dissertação junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Seu trabalho foi intitulado “Elaboração de atividades para a introdução do conceito de razão e proporção: com análise dos professores da rede pública de ensino”. Ele trabalhou a produção de atividades, com conotação lúdica e prazerosa, levando-se em consideração a construção de conhecimentos, tanto baseados em experiências já vivenciadas pelo educando como também em novas experiências, introduzindo o conteúdo de razões e proporções. Ele apresenta algumas atividades desenvolvidas por uma equipe de professores de Matemática de Minas Gerais, com o objetivo de criar uma conexão

com o mundo atual e a realidade do discente, trazendo, em sua pesquisa, o ensino de razão como uma forma de comparação, despertando no aluno um maior interesse em aprender o conteúdo ensinado. Além disso, é apresentada uma avaliação das atividades que foram realizadas por professores da rede pública de ensino da cidade de Ituiutaba-MG.

A pesquisa de Edna Rodrigues dos Santos, defendida junto ao programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Pernambuco em 2015, recebeu o título “Raciocínio proporcional: a resolução de problemas por estudantes da EJA”. Compreender o raciocínio dos estudantes ao resolverem problemas matemáticos têm ocupado muitos pesquisadores de áreas como a Psicologia e a Educação Matemática, em especial no que tange identificar as dificuldades e erros conceituais atrelados a um conceito, como também a investigação de suportes que facilitem a articulação entre conhecimentos prévios à educação formal. O presente estudo consistiu em investigar o raciocínio proporcional de estudantes da educação de adultos, cursando a 4ª Fase (que corresponde ao 8º e ao 9º ano do ensino fundamental); bem como de forma específica, (i) as estratégias utilizadas para solucionar problemas envolvendo o conceito de proporção; (ii) se existem diferenças nos desempenhos e nas estratégias em função dos temas que perpassam vida social apresentados nos problemas, neste estudo em particular, as eleições presidenciais e a Copa do Mundo e (iii) se existem diferenças no desempenho e nas estratégias em função do tipo de problema. Para tal, participaram 34 estudantes, de idades variando de 18 a 47 anos, de uma escola pública da cidade de Petrolina-PE.

Todos os participantes da pesquisa de Santos (2015) resolveram 18 problemas, envolvendo seis tipos de situações (valor omissivo; conversão entre razão, taxa e representações; os que envolvem unidade de medidas e números; comparação; transformação; e conversão entre sistemas de representação). Estes foram apresentados, individualmente, em duas sessões, durante as quais foi utilizado o método clínico Piagetiano para melhores esclarecimentos sobre as formas de resolução e ao final foi realizada uma entrevista. Os dados foram analisados em função de dois aspectos: números de acertos e as estratégias adotadas na resolução. Na avaliação do desempenho foram controladas as variáveis

internas: tipos de problemas, tipos de problemas associados ao contexto (Copa do Mundo, Eleições Presidenciais e Prototípicos); como também a variável externa: afinidade com o contexto.

Os resultados obtidos por Santos (2015) foram analisados à luz da teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e mostraram que estudantes da 4ª fase, mesmo não tendo estudado formalmente o conceito de proporcionalidade, conseguem resolver alguns problemas envolvendo relações proporcionais. Foi verificada a influência do contexto quando comparado os problemas da Copa do Mundo e os Prototípicos, e foi observado desempenho semelhante quando comparado o contexto Copa do Mundo e Eleições, e também entre este último e o desempenho nos problemas Prototípicos. No que tange às diferentes situações de proporcionalidade resolvidas, constatou-se que aquelas que envolvem o julgamento qualitativo são mais facilmente resolvidas do que as que envolvem outros sistemas de representação. As respostas dos estudantes demonstraram o uso de vários tipos de estratégias, que foram classificadas como: Tipo 1 (imprecisa ou ausente); Tipo 2 (conhecimento de mundo); Tipo 3 (sentido numérico); Tipo 4 (operações aditivas); Tipo 5 (campo multiplicativo associado a operações aditivas) e Tipo 6 (campo multiplicativo). Concluiu-se com este estudo que nem sempre ao resolver e acertar problemas proporcionais o estudante apresenta o raciocínio proporcional e que este é mais facilmente desenvolvido em algumas situações que em outras, evidenciando que o domínio da proporcionalidade se dá de forma gradativa e requer o desenvolvimento de outros conceitos, representações e procedimentos.

A dissertação “Razão e Proporção para Além da Sala de Aula” foi defendida em 2015 ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, por Ricardo Guimarães de Almeida. Esse trabalho descreveu os conceitos de razão e proporção através de situações que estão presentes no cotidiano popular, buscando estabelecer relações da vida prática do leitor com a Matemática ensinada nas escolas por análise e resolução de problemas. Para o autor, os conceitos de razão e proporção merecem destaque justificado pela tamanha aplicabilidade nas mais diversas situações problemas reais, sendo diariamente utilizados pelas pessoas em suas atividades, além da frequente incidência de questões que envolvem estes conceitos em concursos e provas públicas. Então, foi desenvolvido um estudo detalhado, aplicado e diversificado das

razões, com a finalidade de garantir ao leitor fundamentos sólidos para a compreensão e resolução dos problemas de proporções, conhecidos por regra de três e porcentagem, através de métodos que utilizam análises lógicas de fácil compreensão, inclusive para os não simpatizantes da Matemática.

Davidson Moura Lopes Silva, em 2015, defendeu o trabalho “Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: realidade e perspectivas” junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional pela Universidade Federal de São Carlos. Seu trabalho apresenta uma nova proposta de abordagem do tema proporcionalidade, para alunos do 7º ano do ensino fundamental. Seu trabalho é o registro de uma engenharia didática que gerou uma sequência composta por quatro sessões didáticas. O foco do trabalho foi apresentar meios para que o aluno determine, baseado nas definições matemáticas, se duas grandezas são proporcionais e, em caso positivo, se é uma relação de proporcionalidade direta ou inversa. Para tanto, foi utilizado o software Geogebra como ferramenta de ensino, permitindo a integração com a geometria, gráfico das relações de proporcionalidade direta e inversa e experimento prático para dar maior significado ao conteúdo apresentado.

O trabalho elaborado por Hércules Luiz Junior, intitulado “As diferentes abordagens do ensino de proporcionalidade”, foi defendido em 2016 junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Paraná. Por esta dissertação, é reconhecido que o estudo da proporcionalidade se faz corrente para a vida do educando desde os anos iniciais da educação básica, quando ao observar objetos em seu meio e compará-los com registros gráficos do mesmo, em escala, percebe-se uma regra de representação (escala), a qual refere-se a uma situação de proporcionalidade, até aplicações de Física e o estudo das relações entre as grandezas desta área do conhecimento nas séries finais da educação básica.

Sendo assim, Junior (2016) denota que a proporcionalidade se faz um objeto de estudo de grande importância acadêmica e social para o estudante. Em seu trabalho, ele questiona de quais formas podemos abordar uma situação problema que envolva relação entre grandezas proporcionais. Ele não discute qual o melhor método de ensino, o de mais fácil assimilação do educando ou ainda qual o mais

eficaz nas resoluções, pois estes questionamentos nos remetem a uma educação tradicionalista de repetição. O seu foco se deu no desenvolvimento de diferentes habilidades de resolução para que tenhamos um cidadão competente no que se refere a relação entre grandezas proporcionais. Neste sentido, o autor utiliza o método conhecido como “regra de três”, o método da redução à unidade e a aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Em 2016, Ricardo William Ramirez Vojta, apresentou a dissertação “A Matemática Comercial como Ferramenta Necessária para a Educação e Formação da Cidadania do Ser Humano” ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA. Este trabalho trouxe a matemática comercial com inúmeras aplicações na vida cotidiana. A proporcionalidade é um dos conceitos que mais estão presentes nas atividades tanto doméstica, escolares, quanto profissionais, e é um dos alicerces da matemática comercial. As ferramentas de matemática comercial, principalmente proporções, regras de três e porcentagem, são diariamente vistas e utilizadas nas atividades mais simples de nosso dia a dia. Empiricamente, mesmo sem estudos formais, o ser humano entende a proporção existente nas relações matemáticas, principalmente as que envolvem dinheiro (compra e venda), pois diariamente realizam essas condutas. Em grande parte desta obra, observa-se que vários problemas podem ser resolvidos por meio de regra de três ao invés de fórmulas predeterminadas.

Também, Vojta (2016) apresenta formas alternativas de resolução de problemas, onde as fórmulas são desenvolvidas a partir de situações cotidianas e não somente colocadas prontas, como aparecem na maioria dos livros didáticos. Dessa forma, os assuntos mais comuns observados por todos nós, como os relacionados à inflação, aumento salarial, reajuste dos preços de energia elétrica e combustíveis, variação do preço das moedas estrangeiras, desvalorização da moeda real, e outros tantos assuntos que são bastante conhecidos por todos nós, são elementos que estão apresentados de modo prático neste trabalho de pesquisa.

“Razão Áurea: uma proposta para o ensino” é a dissertação defendida por Paulo Luiz da Silva Ramos, em 2016, ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. A razão áurea representa, segundo estudiosos, a mais

"bela" proporção entre dois segmentos ou duas medidas. Ela aparece muitas vezes na natureza, no corpo humano, em obras de arte e esculturas. Apesar de aparecer em várias construções antigas, a primeira descrição formal da razão áurea foi feita por Euclides em sua obra Os Elementos, livro VI proposição 30, conhecida na época como divisão de um segmento na média extrema razão. A partir daí, muitos matemáticos fizeram grandes contribuições para o estudo dessa proporção, entre eles podemos destacar o matemático Lucca Pacioli, que escreveu três livros sobre esse assunto, um deles ilustrado por Leonardo da Vinci.

Para Ramos (2016), a razão áurea, além de encantar matemáticos, também intrigou pessoas de outras áreas. Este trabalho utiliza esse fascínio que a razão áurea gera nas pessoas para motivar os alunos a compreender conceitos básicos de geometria e desenho geométrico, levando-os a construir figuras nessa proporção e a aplicá-las e enxergá-las em obras de arte, no corpo humano e na natureza. Assim, proporcionam, por meio da contextualização e da prática, uma melhor compreensão de conceitos. Foi constatado um expressivo desenvolvimento dos alunos tanto na parte de construções geométricas, quanto no interesse em aprender e enxergar a Matemática no dia a dia.

A dissertação intitulada "Análise de Erros no Processo de Resoluções de Proporcionalidade", foi defendida em 2017 por Raul Francisco da Silva Nascimento, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA. O trabalho consistiu numa análise sistemática dos erros cometidos pelos alunos da 3ª série do ensino médio, de duas escolas do oeste do estado do Pará, no processo de resoluções de Proporcionalidade. Teve como hipótese que o erro tratado como informação importante para a elaboração de ações didáticas possibilita o aprendizado de forma significativa. De acordo com Imenes (2008), a proporcionalidade, provavelmente, é o conceito matemático mais disseminado no mundo, além disso, apresenta a maior incidência no Exame Nacional de Ensino Médio – ENEM, o que de fato comprova sua importância e justifica a iniciativa do trabalho.

Em termos estruturais o trabalho de Nascimento (2017) apresenta nos capítulos iniciais a abordagem dada à proporcionalidade e a fundamentação teórica

de Educação Matemática, avaliação, análise de conteúdo e análise de erros. Os capítulos seguintes explicitam a metodologia usada, a ação avaliativa e os mecanismos de coleta de dados. A parte final mostra que a análise feita resultou num acervo de informações de erros categorizados por classes. A conclusão deste trabalho revela que a visão do docente em relação ao erro deve ser na intenção de usá-lo como um feedback do aluno em relação a aprendizagem e que o professor encoraje e estimule o aluno a raciocinar, fortalecendo a prática sem medo de errar.

O trabalho realizado por Sandro Faria de Oliveira, foi apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada em 2017, sob o título “Preparando o aluno de ensino fundamental para o aprendizado de razões e proporções”. Esta dissertação identificou e analisou as dificuldades dos alunos do 7º ano da educação básica no que diz respeito ao aprendizado dos conteúdos de razão e proporção. Para evidenciar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes, o autor elaborou uma lista de exercícios, cuja aplicação se deu em cinco turmas de alunos da série escolar mencionada, ao longo de 90 minutos em cada turma. Após a aplicação, as turmas receberam o gabarito comentado para mostrar-lhes como o conteúdo era parte do que fora ensinado em algum momento.

Com a aplicação do trabalho, Oliveira (2017) constatou que as nomenclaturas comuns ao ensino de razões e proporções são completamente dispensáveis em um primeiro momento onde a proporcionalidade é fator mais importante a ser compreendido. A partir do momento em que toda a classe estiver familiarizada com as razões e proporções e, principalmente, com as suas aplicações, o professor tem liberdade para trabalhar da maneira como preferir, inclusive introduzindo as nomenclaturas e definições pertinentes ao conteúdo. Assim, o objetivo do trabalho foi verificar os conteúdos já aprendidos e se foram bem compreendidos para que o ensino de razão e proporção não seja prejudicado por falta de pré-requisitos.

Em 2018, Jakelline de Aquino Batista concluiu sua dissertação sobre “O ensino de razão e proporção por meio de atividades” junto ao programa de Mestrado em Educação pela Universidade do Estado do Pará. Seu objetivo foi avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseado no ensino por atividades de Sá (2009) e Sá e Jucá (2014) para o ensino de razão e proporção, suas

potencialidades em relação à participação e desempenho dos estudantes quanto à aprendizagem deste conteúdo. Os resultados revelaram que a sequência didática interferiu de maneira positiva na aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo de razão e proporção seja quanto à participação nas aulas, tornaram-se mais envolvidos com o processo de aprendizagem, e também que obtiveram melhorias quanto à linguagem e representação das notações referente ao conteúdo de razão e proporção.

A pesquisa “Flexibilidade em cálculo mental: perfil de estudantes de 2º e 4º ano do ensino fundamental” foi defendida em 2018 ao programa de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul por Sula Cristina Teixeira Nunes. A reflexão trouxe que a flexibilidade no raciocínio matemático tem sido apontada como um importante objetivo da educação contemporânea para atingir níveis mais elevados de desempenho matemático. No Brasil, não foram encontradas pesquisas sobre essa habilidade de domínio específico da Matemática. A presente dissertação teve como objetivo geral verificar a flexibilidade cognitiva em cálculo mental em estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a compreender como as crianças brasileiras apresentam esta habilidade. Para atender este objetivo foram realizados dois estudos com 84 alunos de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental de quatro escolas públicas de Porto Alegre, sendo 42 alunos do 2º ano e 42 alunos do 4º ano. Os dados foram obtidos a partir de entrevistas que envolviam a classificação, resolução e justificativa do raciocínio utilizado na resolução de 12 cálculos mentais aritméticos; do teste de desempenho aritmético; e do questionário socioeconômico.

O primeiro estudo de Nunes (2018) verificou se os perfis de flexibilidade cognitiva relatados na literatura recente se aplicam à amostra brasileira. Também, associou-os às variáveis desempenho aritmético e nível socioeconômico e, por fim, avaliou a adequação do instrumento avaliativo de flexibilidade à realidade brasileira. O segundo estudo apresentou a diferença de perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental entre crianças de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental. A base está na análise dos elementos cognitivos, a saber características dos problemas e procedimentos de solução, utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos. Os resultados do primeiro estudo evidenciaram os três perfis de raciocínio, flexível,



misto e rígido, ou seja, a flexibilidade trata-se de uma habilidade de caráter evolutivo. As variáveis desempenho aritmético e nível socioeconômico não explicaram os diferentes perfis. Já a tarefa avaliativa demonstrou valor diagnóstico na avaliação dos graus de flexibilidade, mas a dificuldade dos cálculos desta tarefa implicaram uma limitação deste estudo. Os achados do segundo estudo revelaram que as diferenças na proporção de uso de conhecimento numérico diferenciaram os perfis de flexibilidade entre os anos escolares, assim como demonstrou que os estudantes do 4º ano apresentaram maior grau de flexibilidade do que os alunos do 2º ano. Estes resultados sugerem que a flexibilidade cognitiva demonstrada pelos estudantes está relacionada ao senso numérico informal da amostra. Em síntese, os achados destes estudos destacam o potencial da flexibilidade em cálculo mental para a aprendizagem matemática.

A seguir, apresentamos o Quadro 06, com a síntese das dissertações produzidas no país disponíveis no Portal da CAPES, destacando os autores por ordem cronológica de suas obras.

**Quadro 06** - Trabalhos Nacionais - Dissertações até 2018.

Ano	Autor(a)	Universidade	Título
2008	David Luiz Mazzanti	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	<i>Educação de Jovens e Adultos: uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas</i>
2009	Luís Carlos da Silva	Universidade Federal do Pará	<i>A Prática de Ensino de Física no Ensino Médio e O Conceito de Proporcionalidade</i>
2010	José Roberto Costa Júnior	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	<i>Atribuição de Significado ao Conceito de Proporcionalidade: contribuições da História da Matemática</i>
2011	Mauro José dos Santos Flora	Universidade do Grande Rio	<i>Matemática e Cidadania: o ensino da regra de três em uma classe do 2º ano do Ensino Médio noturno</i>
2011	Denivaldo Pantoja da Silva	Universidade Federal do Pará	<i>Regra de Três: prática escolar de modelagem matemática</i>
2012	Janeisi de Lima Meira	Universidade Federal do Pará	<i>Labirintos da Compreensão de Regras em Matemática: um estudo a partir da regra de três</i>
2014	Janderson Matricardi de Souza	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul	<i>A Abordagem dos Conceitos de Proporcionalidade sob a Ótica da Resolução de Problemas</i>
2014	Alex Brandão de Almeida	Universidade Federal do Triângulo Mineiro	<i>Elaboração de Atividades para a Introdução do Conceito de Razão e Proporção</i>
2015	Edna Rodrigues dos Santos	Universidade Federal de Pernambuco	<i>Raciocínio Proporcional: a resolução de problemas por estudantes da EJA</i>
2015	Ricardo Guimarães de Almeida	Universidade Federal de Juiz de Fora	<i>Razão e Proporção para Além da Sala de Aula</i>
2015	Davidson Moura Lopes Silva	Universidade Federal de São Carlos	<i>Uma Análise do Ensino de Proporcionalidade no Ensino Fundamental: realidade e perspectivas</i>
2016	Hércules Luiz Junior	Universidade Federal do Paraná	<i>As Diferentes Abordagens do Ensino de Proporcionalidade</i>
2016	Ricardo William Ramirez Vojta	Universidade Federal do Oeste do Pará	<i>A Matemática Comercial como Ferramenta Necessária para a Educação e Formação da Cidadania do Ser Humano</i>
2016	Paulo Luiz da Silva Ramos	Universidade de Brasília	<i>Razão Áurea: uma proposta para o ensino</i>
2017	Raul Francisco da Silva Nascimento	Universidade Federal do Oeste do Pará	<i>Análise de Erros no Processo de Resoluções de Proporcionalidade</i>
2017	Sandro Faria de Oliveira	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada	<i>Preparando o Aluno de Ensino Fundamental para o Aprendizado de Razões e Proporções</i>
2018	Jakeline de Aquino Batista	Universidade Federal do Para	<i>O Ensino de Razão e Proporção Por Meio de Atividades</i>
2018	Sula Cristina Teixeira Nunes	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	<i>Flexibilidade em Cálculo Mental: perfil de estudantes de 2º e 4º ano do Ensino Fundamental</i>

Fonte: Elaborado pela autora.

### 2.2.3. Pesquisa no banco de dados da CAPES 2019 a 2022

Em fevereiro de 2023, procedemos a novas buscas no portal de periódicos e banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, o que nos permitiu encontrar os trabalhos da temática de raciocínio proporcional realizados nos últimos 4 anos, período em que estivemos desenvolvendo nossa tese. A seguir, pelo Quadro 07, apresentamos os resultados encontrados conforme os descritores utilizados nas buscas, considerando trabalhos dentro das grandes áreas de ciências sociais aplicadas e ciências humanas.

**Quadro 07** - Trabalhos Nacionais - De 2019 a 2022.

<b>DESCRITORES</b>	<b>TOTAL DE TRABALHOS ENCONTRADOS</b>	<b>FILTROS</b> <i>(ciências sociais aplicadas e ciências humanas)</i>		
		TESES	MESTRADO ACADÊMICO	MEST PROF
"Ensino de razão"	1	0	1	0
"Ensino de proporção"	1	0	1	0
"Ensino de proporcionalidade"	1	0	1	0
"Ensino de regra de três"	0	0	0	0
"Grandezas proporcionais"	0	0	0	0
"razão" AND "proporção"	2	0	2	0
"proporcionalidade"	1	0	1	0
"regra de três"	0	0	0	0
("razão" OR "proporção") AND "matemática" – EDUCAÇÃO	0	0	0	0
<b>TOTALIZAÇÃO .....</b>	<b>6</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>0</b>

Fonte: Elaborado pela autora

Adiante, trazemos os trabalhos que consideramos mais relevantes e disponíveis na plataforma Sucupira, que são seis dissertações de mestrado, organizadas cronologicamente em nosso texto.

O trabalho por título “O raciocínio de proporcionalidade sob a luz da resolução de problemas com estudantes do 7o ano do ensino fundamental” tem autoria de Luciano Matulle. Essa dissertação foi apresentada em 2019 ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste. O estudo buscou contribuir com a solução de um dos problemas

identificados durante a Educação Básica, na disciplina de Matemática: o Ensino de Proporcionalidade. Sua questão norteadora é “com base na Teoria dos Campos Conceituais, que potencialidades são percebidas numa metodologia de ensino baseada na Resolução de Problemas para o desenvolvimento do raciocínio de proporcionalidade?” A investigação foi caracterizada como uma Pesquisa-Ação prática, em que se buscou paralelamente com a pesquisa, realizar uma ação visando à solução de um problema de aprendizagem.

O desenvolvimento do trabalho de Matulle (2019) ocorreu por meio de observação participante e intervenção pedagógica, em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental II, de um colégio público do interior do município de Pinhão, Paraná - PR. Considerou-se como metodologia de ensino a Resolução de Problemas, conforme a concepção de ensinar via resolução de problemas. Nesta concepção, os problemas são propostos aos estudantes antes que lhes seja mostrado formalmente o conteúdo matemático. Em consonância com a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, foi possível identificar as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução dos problemas e apontar os caminhos e procedimentos a serem seguidos pelo professor para que os estudantes aprendam sobre proporcionalidade. Destacam-se contribuições da RP em relação à mudança de atitudes dos estudantes, no envolvimento em sala de aula, na criação e diversificação de estratégias de solução, nas reflexões sobre as resoluções dos problemas e na elaboração do raciocínio de proporcionalidade.

A dissertação sobre “O raciocínio proporcional e o uso do excel: um olhar para a gênese instrumental” foi defendida em 2019, por Ricardo Araujo da Silva, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. O objetivo foi investigar a gênese instrumental de uma dupla de alunos do 9º ano considerando o Excel em situações que envolvem o raciocínio proporcional. O suporte teórico veio da Teoria da Instrumentação, especialmente nos escritos de Pierre Rabardel (1995) para investigar sujeitos em atividades mediadas por instrumentos. Ainda, a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud (1996, 2009) forneceu os subsídios necessários para sua compreensão.

Silva (2019) dividiu a pesquisa em quatro etapas: a Avaliação Diagnóstica, na obtenção dos conhecimentos prévios dos alunos por meio de questionários; a Atividade Introdutória, sendo uma etapa introdutória dos alunos com as ferramentas da planilha eletrônica Excel; as Atividades de Intervenção envolveram quatro objetos matemáticos (Partilha, Variável, Covariância e Invariância) referindo-se ao raciocínio proporcional e escolhido a partir de uma análise de documentos educacionais (BNCC; BRASIL, 2017; NCTM, 2000; ME; BRASIL, 2007); e uma Avaliação Final com uma entrevista semiestruturada com os alunos. As etapas foram vivenciadas por 02 alunos do 9º Ano de uma escola pública estadual situada no Agreste do estado da Paraíba. A discussão da gênese ocorreu durante quatro atividades de intervenção. As conclusões revelam a certeza nas potencialidades do Excel para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos a partir das expectativas da adaptação e mobilização dos esquemas de utilização. Ocorreu a evolução dos alunos no uso do Excel quanto ao esquema de Organização e Disposição dos Dados. Alunos conseguem obter as razões, taxas e proporções das situações problemas, com uso de fórmulas e comparativos no Excel; analisam a variação conjunta das variáveis e grandezas; respondem as atividades tanto de forma quantitativa, com os resultados apresentando a formatação condicional que realizaram entre as tabelas, quanto qualitativamente dando sentido aos objetos de conhecimento.

O trabalho “Proposta de uma sequência didática interdisciplinar no ensino de proporção”, foi defendida por Antonio Alan Cardec Alves Oliveira, em 2020, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat pela Universidade Federal do Tocantins. O objeto dessa dissertação é a elaboração de uma sequência didática contextualizando alimentos e esportes para que os alunos do oitavo ano do ensino fundamental II aprendam o conteúdo de Proporção. A exploração dos referenciais teóricos fazendo revisão bibliográfica foi a metodologia aplicada usando o método dedutivo. No decorrer da escrita, o autor observou que as teorias de aprendizagem somadas com a metodologia por repetição e memorização podem contribuir significativamente com o trabalho docente em sala de aula. O resultado principal do trabalho é uma sequência didática, com abordagem interdisciplinar e aprendizagem significativa, destinado a professores de ensino fundamental II que pretendam inovar em sala de aula.

A dissertação intitulada de “A família dos números metálicos no ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática na educação básica” foi elaborada por Jessica Augustin Schifler, e defendida em 2020, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Esse trabalho apresenta a família dos números metálicos, suas características e propriedades. Os números de ouro e de prata são os integrantes mais conhecidos dessa família, com aplicações nas artes, na arquitetura, na engenharia, na música e na literatura. Foram desenvolvidas oficinas com os estudantes das turmas do 6o ano ao 9o ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da zona rural do município de Mafra, Santa Catarina, introduzindo os números metálicos no estudo de frações, razões, proporções, polígonos regulares, números irracionais e equações quadráticas. Nas atividades, o estudo desses conteúdos foi conciliado ao uso de tecnologias, como tablets, o GeoGebra e Planilhas Google, além de vídeos sobre o tema. A conclusão foi que os números metálicos e as ferramentas tecnológicas possibilitam a contextualização dos conteúdos abordados, incentivando os estudantes a discutirem e aprofundarem os conhecimentos matemáticos.

A dissertação “Proporcionalidade e regra de três: um olhar sobre o teorema fundamental da proporcionalidade” foi apresentado em 2021, por Fabiano Calacio Silva, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão. Os principais objetivos desse trabalho são mostrar o conceito de razão, de proporção e do Teorema Fundamental de Proporcionalidade por meio de métodos mais simples e didáticos de fazer divisão proporcional direta, inversa e mista, bem como, uma estratégia de utilizar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade para a resolução de problemas de regra de três simples e composta. O autor apresentou uma abordagem desse conhecimento com diversas possibilidades para o trabalho em sala de aula, auxiliando o discente na construção de seu aprendizado.

A dissertação de mestrado, intitulada "Razão e Proporção: uma proposta de ensino explorando problemas do cotidiano", foi defendida em 2021 ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e tem autoria de Priscilla Delatorre. Esse trabalho procurou demonstrar a importância de um ensino contextualizado para a melhoria da

educação e tem como propósito dar sentido ao ensino de razão e proporção a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Utilizou, como ferramenta pedagógica, a aprendizagem significativa associada a recursos tecnológicos que estão cada vez mais presentes no cotidiano dos estudantes. Para a autora, diante das transformações que nossa sociedade vem enfrentando ao longo do tempo, deve-se admitir tais mudanças também no cenário educacional. Ela acrescenta que o professor, assim como a escola, devem acompanhar essas transições. Também, deve considerar métodos e estratégias para que o processo ensino-aprendizagem seja significativo ao aluno. Dessa forma, propõem-se algumas atividades utilizando recursos tecnológicos articulados com o cotidiano dos estudantes, por acreditarem que o processo de memorização e aprendizagem ocorram de maneira bem mais eficiente.

A seguir, apresentamos o Quadro 08, com a síntese das dissertações produzidas no país disponíveis no Portal da CAPES, destacando os autores por ordem cronológica de suas obras.

**Quadro 08** - Trabalhos Nacionais - Dissertações de 2019 a 2022.

Ano	Autor(a)	Universidade	Título
2019	Luciano Matulle	Universidade Estadual do Centro-Oeste	<i>O Raciocínio de Proporcionalidade sob a Luz da Resolução de Problemas com Estudantes do 7º Ano do Ensino Fundamental</i>
2019	Ricardo Araújo da Silva	Universidade Estadual da Paraíba	<i>O Raciocínio Proporcional e o Uso do Excel: um olhar para a gênese instrumental</i>
2020	Alan Cardec Alves Oliveira	Universidade Federal do Tocantins	<i>Proposta de Uma Sequência Didática Interdisciplinar no Ensino de Proporção</i>
2020	Jessica Augustin Schifler	Universidade Tecnológica Federal do Paraná	<i>A Família dos Números Metálicos no Ensino e Aprendizagem de Conteúdos de Matemática na Educação Básica</i>
2021	Fabiano Calacio Silva	Universidade Federal do Maranhão	<i>Proporcionalidade e Regra de Três: um olhar sobre o teorema fundamental da proporcionalidade</i>
2021	Priscilla Delatorre	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	<i>Razão e Proporção: uma proposta de ensino explorando problemas do cotidiano</i>

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 2.2.4. Considerações sobre as pesquisas do Mapeamento Nacional

Neste capítulo, trouxemos as pesquisas mais relevantes que tivemos acesso a respeito de questões relacionadas ao ensino, à aprendizagem ou à utilização de razão, proporção e raciocínio proporcional. Consideramos as pesquisas teóricas, bem como os estudos sobre o tema aplicados ao cotidiano da vida. Os trabalhos vem desde o ano de 1996, chegando até o ano de 2022.

Em síntese, pensamos que as pesquisas ressaltam a importância do conteúdo do raciocínio proporcional em variados aspectos. Trazem de forma prática as funcionalidades de razão e proporção. Também inserem problemas e especificidades dos tópicos diante da experiência do professor de Matemática, considerando as dificuldades dos alunos em determinados conteúdos e as estratégias adotadas pelos professores para contornar diversas situações, dentre outras questões.



### 3. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Apresentamos, neste capítulo, os conceitos centrais e as teorias que auxiliam o desenvolvimento desta pesquisa, analisando o raciocínio proporcional em livros didáticos nacionais e se os livros didáticos incorporam as ideias principais das pesquisas internacionais estudadas.

#### 3.1. Educação Matemática

Entendemos a Matemática como uma ciência fundamental para a formação dos indivíduos, principalmente por sua capacidade de desenvolver o raciocínio, o que nos leva a compreender a perspectiva educativa da Educação Matemática. Sabemos que preocupações com o ensino da Matemática vêm desde a antiguidade, contudo, identificar a Educação Matemática como área prioritária na educação é um fato mais recente. O que vai ao encontro das ideias discutidas por Miguel, Garnica, Iglioni e D'Ambrósio (2004, p. 71), ao registrarem que os empenhos com a Educação Matemática tomaram forma "somente a partir das três grandes revoluções da modernidade - a Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789)". Alguns passos para essa nova área de pesquisa em Matemática foram dados nos finais do século XIX, início do século XX; embora, conforme D'Ambrósio e outros (2004, p.71):

o passo mais importante no estabelecimento da educação matemática como uma disciplina é devido à contribuição do eminente matemático alemão Felix Klein (1849-1925), que publicou, em 1908, um livro seminal, *Matemática elementar de um ponto de vista avançado*. Klein defende uma apresentação nas escolas que se atenha mais as bases psicológicas que sistemáticas. Diz que o professor deve, por assim dizer, ser um diplomata, levando em conta o processo psíquico do aluno, para poder agarrar seu interesse. Afirma que o professor só terá sucesso se apresentar as coisas de uma forma intuitivamente compreensível (D'AMBRÓSIO e outros, 2004, p. 71).

Concretamente, a Educação Matemática não defende o aprendizado de Matemática por meio da memorização de fatos, fórmulas, regras ou princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição exaustiva de exercícios, pensamentos e procedimentos. Nem que os livros sejam elaborados a partir de elementos primitivos e definições para prosseguir com a teoria, e somente após esta apresentação completa apresentar os exercícios de aplicação. A Educação

Matemática defende uma ruptura entre forma e conteúdo matemático, com prática diferenciada, construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático. O professor vai transitar de elemento fundamental do ensino para ser orientador ou mediador da aprendizagem. O aluno passa a ser considerado um ser ativo da aprendizagem, obtendo as ideias matemáticas pela descoberta, pela construção ou reconstrução de ideias.

Assim, entendemos que a Educação Matemática se preocupa com a Matemática, a educação e a psicologia. No livro "Na Vida Dez, Na Escola Zero", os autores Nunes, Carraher e Schliemann (2011) discorrem que a Matemática é ciência, mas também é uma atividade humana, e ilustram o que é a Educação Matemática:

Quando uma criança resolve um problema com números na rua, usando seus próprios métodos, mas que são métodos compartilhados por outras crianças e adultos, estamos diante de um fenômeno que envolve Matemática, devido ao conteúdo do problema, Psicologia porque a criança certamente raciocinou, e Educação, porque queremos saber como ela aprendeu a resolver problemas desse jeito. Podemos separar a Matemática da Psicologia do pensamento enquanto Ciências, mas não podemos separá-las enquanto fenômenos acontecendo na prática (NUNES, CARRAHER E SCHLIEMANN, 2011, p. 27).

Wielewski (2008) pesquisou sobre os estudos de Richard Skemp, por ele ter sido um dos pioneiros em trazer a Psicologia para atuar de maneira significativa em conjunto com a Matemática. Skemp refletia sobre como ocorre o pensamento humano, principalmente em relação às disciplinas de Matemática, Educação e Psicologia. Também considerava que o eixo do processo educacional não é o conteúdo simplesmente, mas a forma como ele se relaciona com o indivíduo e o contexto. Wielewski (2008) ressalta inúmeras dificuldades com a Matemática vivenciadas por alunos de qualquer idade que estão relatadas no trabalho de Skemp (1989), e mostra como Skemp (1989) defende que a Matemática seja ensinada de modo a possibilitar ou a induzir a inteligência de quem a estuda, dando continuidade entre a escola e o mundo externo, pois ele considera que a Matemática usada lá fora, relacionada aos problemas do cotidiano, não é a mesma ensinada na escola. Em resumo, Skemp (1989) nos indica que podemos aprender de duas formas: (a) por hábito, ao se memorizar fórmulas e regras; e (b) pelo uso da inteligência, que ele chama de pensamento relacional. Wielewski (2008, p. 62) realça o seguinte sobre

## Skemp e o aprendizado inteligente:

Skemp (1989; p. 37-39) indica que essa é uma forma muito mais 'econômica' de aprender, pois o número de planos que podem ser derivados da mesma estrutura de conhecimento é enormemente maior que o número de regras que podem ser memorizadas separadamente. Da mesma forma, o entendimento relacional ou aprendizagem inteligente é mais adaptável, visto que planos podem ser construídos para adequar circunstâncias para as quais uma regra não tenha sido inventada e também apresenta-se de maneira mais sólida e poderosa, visto que planos são feitos individualmente para ajustar a uma determinada situação, e é assim provável que será mais efetivo. Skemp afirma que a aprendizagem da maioria dos assuntos requer uma combinação de aprendizagem inteligente e aprendizagem por meio de hábito (WIELEWSKI, 2008, p. 62-63).

Pela ótica da Educação Matemática, concordamos com a importância do ensino acontecer de modo mais significativo para o aluno. A pesquisadora Ball (2003) nos apresenta quais são os conhecimentos matemáticos necessários para ensinar esta disciplina baseado em princípios que ela considera fundamental:

Primeiro, os professores precisam saber as mesmas coisas que gostaríamos que qualquer membro educado de nossa sociedade soubesse, mas muito mais. Esse "mais" não é o mais da Matemática mais convencional. É o "mais" de mais compreensão do interior das ideias, suas raízes e conexões, suas razões e formas de serem apresentadas. Em segundo lugar, o conhecimento para ensinar Matemática é diferente do conhecimento matemático necessário para outras ocupações e profissões intensivas em Matemática. Os problemas e desafios matemáticos do ensino não são os mesmos enfrentados por engenheiros, enfermeiros, físicos ou astronautas. Interpretar o erro de outra pessoa, representar ideias de várias formas, desenvolver explicações alternativas, escolher uma definição utilizável - todos esses são exemplos de problemas que os professores devem resolver. Este são problemas matemáticos genuínos centrais para o trabalho de ensino. E terceiro, o conhecimento matemático necessário para o ensino deve ser utilizável para esses problemas matemáticos. O conhecimento matemático para o ensino deve ser útil para o trabalho matemático que o ensino envolve, desde oferecer explicações claras, propor bons problemas aos alunos, mapear modelos alternativos, examinar materiais instrucionais com um olhar matemático aguçado e crítico, modificar ou corrigir erros imprecisos ou exposições incorretas. O conhecimento matemático necessário para o ensino, mesmo no nível elementar, não é uma versão diluída da Matemática "real". Ensinar Matemática é uma área séria e exigente de trabalho matemático. A melhoria do ensino de Matemática neste país depende, entre outras coisas, da melhoria de nossa compreensão de sua natureza e demandas matemáticas, e da oferta de oportunidades para que os profissionais adquiram o

conhecimento matemático apropriado e as habilidades necessárias para fazer bem esse trabalho (BALL, 2003, p. 7-8, tradução nossa<sup>19</sup>).

A bem da verdade, dentro da escola, a Matemática é ciência, ensinada de um certo modo por alguém que detém o conhecimento; no cotidiano, a Matemática faz parte do viver, é parte da execução das tarefas de compra, venda, construção, por exemplo. Na sala de aula, o aluno faz conta para acertar, obter boas notas e passar de ano. No dia a dia, as mesmas contas são realizadas para pagar, dar troco, ganhar desconto. Trata-se da mesma Matemática? Há quem consiga resolver uma questão em uma situação e não em outra? "Tradicionalmente, o ensino da Matemática se faz sem referência ao que os alunos já sabem (NUNES, CARRAHER, SCHLIEHMANN, 2011, p. 38)". De fato, uma parcela de estudantes não compreendem o conteúdo matemático, pois não visualizam a utilidade, nem mesmo o significado do que estudam, e isso pode estar relacionado à forma como a Matemática é apresentada na escola.

Assim, entendemos que a Educação Matemática é a área que se dedica aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, desde os conceitos mais básicos até os mais avançados. O objetivo da Educação Matemática é permitir ao estudante compreender a lógica e o raciocínio matemático, bem como aplicá-los a situações cotidianas e profissionais. Através da Educação Matemática, os alunos podem desenvolver habilidades como a resolução de problemas, a capacidade de pensar de forma abstrata, a capacidade de analisar dados e a obtenção de

---

<sup>19</sup> "First, teachers need to know the same things that we would want any educated member of our society to know, but much more. That "more" is not the more of more conventional mathematics coursework. It is the "more" of more understanding of the insides of ideas, their roots and connections, their reasons and ways of being represented. Second, knowledge for teaching mathematics is different from the mathematical knowledge needed for other mathematically-intensive occupations and professions. The mathematical problems and challenges of teaching are not the same as those faced by engineers, nurses, physicists, or astronauts. Interpreting someone else's error, representing ideas in multiple forms, developing alternative explanations, choosing a usable definition — these are all examples of the problems that teachers must solve. These are genuine mathematical problems central to the work of teaching. And, third, the mathematical knowledge needed for teaching must be usable for those mathematical problems. Mathematical knowledge for teaching must be serviceable for the mathematical work that teaching entails, from offering clear explanations, to posing good problems to students, to mapping across alternative models, to examining instructional materials with a keen and critical mathematical eye, to modifying or correcting inaccurate or incorrect expositions. The mathematical knowledge needed for teaching, even at the elementary level, is not a watered-down version of "real" mathematics. Teaching mathematics is a serious and demanding arena of mathematical work. The improvement of mathematics teaching in this country depends on, among other things, the improvement of our understanding of its mathematical nature and demands, and the provision of opportunities for professionals to acquire the appropriate mathematical knowledge and skill to do that work well" (BALL, 2003, p. 7-8).

estimativas precisas. Ressaltamos a importância de que a Educação Matemática seja aplicada desde cedo, para auxiliar no desenvolvimento das habilidades matemáticas essenciais.

Por fim, concluímos que a tarefa de ensinar Matemática é muito instigante e cada vez mais complexa! Silvestre e Ponte (2012, p. 71) evidenciam que este é um trabalho que “exige ao professor um conhecimento aprofundado do currículo e a capacidade de se adaptar à constante mudança que caracteriza a sociedade do conhecimento”. Assim, entendemos que a maneira como se organizam as atividades em sala de aula é um fator que pode promover um aprendizado aos alunos. E entendemos que a organização do currículo, dos livros didáticos, bem como a regulação dos documentos que direcionam o ensino, tudo isso influencia as práticas adotadas pelas escolas brasileiras, interferindo diretamente na proposta pedagógica e na organização didática sugerida por cada professor. Adiante, conversamos de forma ampliada sobre os documentos norteadores dos currículos no Brasil.

### **3.2. Documentos Oficiais Norteadores dos Currículos**

A primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 4.024/61) refletiu uma ampla discussão teórica sobre as mudanças necessárias para que a educação brasileira se modernizasse. Todavia, as recomendações referentes ao currículo escolar apareceram de forma pouco elaborada no texto legal, impedindo a oportunidade de se estabelecer uma ampla renovação educacional. A estrutura de ensino implantada pela Lei de 1961 perdurou até o ano de 1996, quando foi aprovada uma nova LDB, reorganizando o sistema em termos da educação básica constituída pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio, que se faz seguir depois pela educação superior.

Importante ressaltar que a lei atual que institui as diretrizes e bases da educação nacional (LDB - Lei no. 9394, de 20 de dezembro de 1996) estabelece, no campo do currículo, que o ensino fundamental e médio “devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela” (BRASIL,

1996, Art. 26). Neste documento, é realçada a vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais; também, assegura ao aluno a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (BRASIL, 1996).

As diretrizes entendem o currículo em termos de duas partes fundamentais e interdependentes, a primeira voltada para a formação básica comum dos alunos e a outra para a formação geral diversificada. Conforme Marchelli (2014):

desde o período da concepção e aprovação da primeira LDB até hoje, passando pela sua substituição em 1996 pela nova Lei de Diretrizes e Bases, a produção de ideias sobre o currículo no Brasil avançou substancialmente e nesse sentido o poder público assumiu seu papel com a publicação em 1998 dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que foram reformulados em 2010 pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). Em relação à idéia de base comum, cabe aqui analisar determinados conteúdos das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013), que se apresentam com força de despacho legal e estão a sofrer no momento um grande volume de apreciações avaliativas e críticas (MARCHELLI, 2014, p. 1505).

Os PCN foram publicados em 1997, para complementação da LDB. Eles foram editados como uma lista de conteúdos a serem contemplados no Brasil inteiro. Nestes documentos, conseguimos identificar a necessidade de focar o ensino-aprendizagem em uma relação de conteúdos, competências e habilidades. Convém ressaltar que a educação, conforme Marchelli (2014, p. 1508), “não depende somente da prescrição de atividades de ensino ou do estabelecimento de parâmetros e diretrizes curriculares, mas principalmente da ação convicta de todos para vê-la como um direito decorrente de dinâmicas sociais próprias”. Neste sentido, nos PCN foi possível verificar os primeiros passos do compromisso brasileiro com um ensino por competências, sejam elas comunicativas, cognitivas ou sociais.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) foi aprovada e homologada pelo Ministério da Educação, em dezembro de 2017. Ela evidencia as competências que norteiam as ações previstas para a educação básica no Brasil, assim como o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos específicos. Fazendo um recorte neste documento para a área de Matemática e para os anos finais do ensino fundamental, temos que “as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada” (BRASIL, 2018).

Similarmente a uma padronização do currículo, a BNCC (BRASIL, 2018) vai apresentar os tópicos de ensino para cada ano. A seguir, introduzimos os conhecimentos e habilidades almejados que envolvem raciocínio proporcional, o qual ela aborda como pensamento proporcional, a serem ensinados por ano escolar considerando os anos finais do ensino fundamental.

**Quadro 09** – Conhecimentos e habilidades que envolvem o raciocínio proporcional na BNCC

Objeto de Conhecimento	Habilidades
6º Ano	
Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.	<p>Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.</p> <p>Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.</p>
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	<p>Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.</p> <p>Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.</p> <p>Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.</p> <p>Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.</p>
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.	Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”.	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.	Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Plantas baixas e vistas aéreas.	Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.
Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.	Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º Ano	
Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples.	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	<p>Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.</p> <p>Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.</p> <p>Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.</p> <p>Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração <math>\frac{2}{3}</math> para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.</p>
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	<p>Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.</p> <p>Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.</p> <p>Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.</p>
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.



Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.  Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
8º Ano	
Porcentagens.	Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
Varição de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.  Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
9º Ano	
Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos.	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
Razão entre grandezas de espécies diferentes.	Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018) – Elaborado pela autora

O quadro 09 demonstra a relevância e o significado do raciocínio proporcional na formação e construção do conhecimento matemático de um aluno. Analisando essas orientações curriculares, temos a previsão dos alunos desenvolverem e aprimorarem essas habilidades durante os anos finais do ensino fundamental, que vai do 6º ao 9º ano. A aptidão do raciocínio proporcional é o que vai fornecer suporte posterior para conceitos algébricos e científicos no nível do ensino médio - funções matemáticas, geometria, movimento uniforme, dentre outros -, bem como, dos estudos superiores - engenharia, medicina, computação, economia e diversas outras áreas. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 470) traz que as aprendizagens previstas para o ensino médio "irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa."

Em continuidade a essas aprendizagens, a BNCC (BRASIL, 2018) coloca a área de Matemática diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído pelos estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 528-529) ainda, acrescenta:

os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado.

Temos o mesmo entendimento do trecho da BNCC (BRASIL, 2018) acima, pois consideramos que o ensino e a aprendizagem da Matemática envolve desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a capacidade de resolver problemas. Ainda, proporcionar ao aluno conhecimentos fundamentais de Matemática, fornecendo ao aluno uma base sólida para sua futura formação acadêmica ou profissional. O ensino não deveria estar voltado apenas para os conteúdos elencados, assim, conforme Guimarães (2022, p. 42), “a escolha de materiais didáticos apropriados e a delimitação das metodologias de ensino eram pontos colocados de modo que a articulação entre conteúdos e competências fosse desenvolvida”. Neste sentido, a importância do livro didático como referência nas aulas precisa estar alicerçada em orientações curriculares, delimitadas por políticas em relação ao livro didático, como o PNLD (BRASIL, 2017). Neste sentido, quando a BNCC (BRASIL, 2018) é homologada, transforma o PNLD (BRASIL, 2017), e coloca os professores mais voltados a cumprirem habilidades e competências por meio do livro didático.

### 3.3. Livro Didático

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD (BRASIL, 2017) é uma política pública executada pelo FNDE e pelo Ministério da Educação, destinado a avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma sistemática, regular e gratuita. O PNLD (BRASIL, 2017) foi criado em 1985 pelo Ministério da Educação - MEC com o objetivo de distribuir livros didáticos para todas as escolas públicas do ensino fundamental II e médio do Brasil. Desde então, o PNLD (BRASIL, 2017) passou por diversas mudanças e atualizações, tornando-se um dos maiores programas de distribuição de livros do mundo. Os materiais adquiridos vão diretamente para as mãos dos alunos e professores das escolas públicas participantes do Programa, que têm a sua disposição os materiais. O PNLD (BRASIL, 2017), por meio de suas últimas atualizações, passou a contemplar também as instituições comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. Trata-se, portanto, de um Programa abrangente, constituindo-se em um dos principais instrumentos de apoio ao processo de ensino-aprendizagem nas escolas beneficiadas.

Para participar do PNLD (BRASIL, 2017), os dirigentes das redes de ensino municipal, estadual, distrital e das escolas federais devem encaminhar Termo de Adesão manifestando seu interesse em receber os materiais do programa e comprometendo-se a executar as ações do programa conforme a legislação. Sobre as editoras participantes, temos poucos grupos editoriais atuando no programa e encontramos várias coleções sob a produção de uma mesma editora. Cabe ressaltar que essas editoras estão localizadas nas regiões sudeste e sul do Brasil, principalmente nos estados de São Paulo e Paraná.

É importante mencionar que o processo de distribuição e acesso a livros didáticos pelo PNLD confere aos professores de todo o Brasil, de acordo com Masetti (2016): um auxílio na elaboração de suas aulas, favorece sua formação didático-pedagógica, auxilia na avaliação da aprendizagem do aluno e na assimilação de saberes profissionais pertinentes. Dito isso, para o professor, o livro didático é mais do que um suporte pedagógico; ele tem sido a sua diretriz de ensino.

E podemos ir além, o livro didático tem sido um formador do professor. Sobre sua função, poeticamente encontramos a fala de Comenius (1954):

O papel são os discípulos cujas inteligências não de ser impressas com os caracteres das ciências. Os tipos ou caracteres são os livros didáticos e demais instrumentos preparados para este trabalho, graças aos quais se imprime, na inteligência, com facilidade tudo quanto se há de aprender. A tinta é a voz viva do professor que traduz o sentido das coisas e dos livros para os alunos. A prensa é a disciplina escolar que dispõe e sujeita a todos para receber o ensinamento (COMENIUS, 1954, p. 339).

De fato, entendemos que os livros didáticos são os materiais impressos, estruturados, destinados a serem utilizados num processo de formação e aprendizagem. De forma bem pontual, Guimarães (2022, p.17) discorre dizendo que eles “são considerados materiais importantes no que tange o ensino e a aprendizagem de alguma área do conhecimento”. E mais, de forma geral, os livros didáticos “acabam sendo os únicos materiais utilizados por professores e alunos para o planejamento e desenvolvimento das aulas” (GUIMARÃES, 2022, p.17). De fato, sabemos que, apesar de ter sido idealizado com vistas ao aluno, o professor o utiliza no preparo de aulas e na elaboração de tarefas. Então, o livro didático cumpre ainda a função de auxiliar, orientar e instrumentalizar o docente em seu fazer diário.

Powell (2018, p. 79) contribui ao trazer que “na Educação Matemática, mesmo que hajam materiais manipulativos atrativos, os livros didáticos apresentam ilustrações atraentes que representam materiais cotidianos”. Segundo este autor, os livros didáticos são o principal recurso para o conhecimento da Matemática escolar. Para Ribeiro (2015, p. 19), “o livro didático se constitui em elemento relevante no processo de construção do conhecimento empreendido pelo professor. Além da função de orientar a prática em sala de aula (...), é utilizado no preparo das aulas e na elaboração de atividades”. Bittencourt (2008) corrobora com esse entendimento do uso do livro didático pelos docentes e propõe pensarmos seu uso de forma ampla, observando sua utilização em sala de aula. De fato, os livros didáticos são os materiais que mais influenciam e impactam as práticas docentes.

A abordagem do raciocínio proporcional em livros didáticos tem sua importância por permitir aos estudantes aprenderem a identificar e a resolver situações que envolvem relações de proporção, ou seja, compreenderem como uma grandeza varia em relação a outra. Essa habilidade é essencial em diversas áreas

do conhecimento, como Matemática, Física, Química, Economia, dentre outras. Além disso, o raciocínio proporcional favorece o desenvolvimento do senso crítico e da capacidade de resolver problemas, pois requer que sejam estabelecidos raciocínios lógicos e coerentes para que as proporções sejam respeitadas. A inclusão desse tema nos livros didáticos permite aos alunos explorarem situações reais do cotidiano e aplicações práticas da matemática, tornando o ensino mais interessante e motivador.

### **3.4. Raciocínio Proporcional**

Lesh, Post e Behr (1988) apresentam o conceito de raciocínio proporcional descrevendo-o como um conceito que, por um lado, é a pedra angular da Matemática superior e, por outro lado, é o pico dos princípios básicos da Matemática. Para Ben-Chaim, Ilany e Keret (2012), o raciocínio proporcional é a capacidade humana de fazer uso de uma forma eficaz do esquema proporcional. Essa habilidade tem um papel central no desenvolvimento do pensamento matemático. Ainda, estes autores apontam que o raciocínio proporcional tem uma importante função prática: é um método para resolver problemas com relações proporcionais entre quantidades em muitos e variados domínios do conhecimento.

De fato, a proporcionalidade é usada em Matemática (geometria, trigonometria, estatística, probabilidade, etc), Física (mecânica, eletricidade, etc), Química (cálculos de concentração, equilíbrio de equações químicas, etc), Economia, Contabilidade e muito mais. Ahl (2016, p. 180) acrescenta que “a proporcionalidade é um conceito-chave no ensino de matemática e ciências desde o ensino fundamental até a universidade”. Esta pesquisadora acrescenta que:

O raciocínio proporcional é um pré-requisito para estudos posteriores bem-sucedidos em matemática e ciências, pois as relações multiplicativas sustentam quase todos os conceitos relacionados a números estudados no ensino fundamental. No ensino médio os alunos fazem uso de modelos lineares e aproximações em cálculo e estatística e na universidade de conceitos de ordem superior, como abstração no sentido de espaço vetorial. Apesar da natureza difundida do raciocínio proporcional ao longo dos anos escolares, é bem conhecido que as crianças ao redor do mundo têm dificuldade considerável em entender o campo conceitual do raciocínio proporcional, por exemplo, frações, porcentagens, razão, proporção, taxas, similaridade, trigonometria e taxas de variação (AHL, 2016, p.180).

Para Shield e Dole (2013, p. 187), a maior importância do raciocínio proporcional está na sua “capacidade de fazer comparações entre as situações de razão e proporção em termos multiplicativos”. O mesmo entendimento fundamental encontramos para os pesquisadores Petit, Laird, Wyneken, Huntoon, Abele-Austin e Sequeira (2020), que consideram ser uma característica do raciocínio proporcional a capacidade de diferenciar situações multiplicativas e aditivas e de entender e usar com flexibilidade as relações multiplicativas nas razões e proporções que os alunos precisam para resolver problemas.

Para Spinillo (1993, p. 42), o raciocínio proporcional “refere-se basicamente à habilidade de estabelecer relações” em que destaca, na resolução de tarefas de proporção, serem envolvidas relações de dois tipos: relações de primeira ordem, expressas entre dois instrumentos de medida de tamanhos diferentes para medir um objeto; e relações de segunda ordem, estabelecidas na comparação das duas relações para verificar se são equivalentes. Spinillo (1993) enfatiza que as relações de primeira e de segunda ordem são cruciais para o entendimento do raciocínio proporcional. Neste sentido, consideramos importante ilustrar a definição dessa pesquisadora, e, para tanto, apresentamos o exemplo a seguir. Tomemos dois conjuntos de pães. O primeiro é formado por 8 pães de queijo e 4 pães de batata. O segundo por 4 pães de queijo e 4 pães de batata. Para ser estabelecido em qual dos dois conjuntos temos a maior proporção de pães de queijo, é necessário comparar em cada conjunto a quantidade de pães de queijo em relação aos pães de batata. Assim, no primeiro exemplo, temos 8 pães de queijo para 4 pães de batata; no segundo exemplo, temos 4 pães de queijo para 4 pães de batata. Tal comparação demonstra as relações de primeira ordem em termos de parte-parte (chamada razão). Outra possibilidade é comparar a quantidade de pães de queijo com a quantidade total de pães em cada conjunto, ou seja, para o primeiro exemplo, temos 8 pães de queijo para o total de doze pães,  $8/12$ ; já no segundo exemplo,  $4/8$  de pães são de pães de queijo. Essa segunda comparação reflete a relação em termos de parte-todo (chamada fração). Essa relação de segunda ordem será a comparação entre as relações de primeira ordem, ou seja, vamos comparar os conjuntos entre si para verificar em qual deles há maior proporção de pães de queijo.

De fato, a abordagem do raciocínio proporcional é fundamental para o entendimento e resolução de problemas que envolvem proporções, relações entre grandezas e comparações. Essa abordagem pode ser descrita como uma forma sistemática e matemática de interpretar e resolver situações que envolvem magnitudes diversas, identificando qual a proporção que rege a relação entre elas e utilizando essa proporcionalidade para encontrar soluções. Em outras palavras, o raciocínio proporcional permite que se estabeleçam relações comparativas entre quantidades diferentes de maneira clara e objetiva, facilitando assim a tomada de decisões e resolução de problemas práticos no dia a dia. Silvestre e Ponte (2012, p. 70) trazem que o raciocínio proporcional é “encarado como a capacidade para distinguir relações de proporcionalidade direta de outras relações, compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e resolver vários tipos de problemas”.

Muitas tarefas da vida cotidiana exigem raciocínio proporcional, ou seja, a capacidade de entender e interpretar situações de comparação em termos relativos são necessárias no dia-a-dia, por exemplo, escalar receitas, converter moedas, calcular descontos. Na verdade, o raciocínio proporcional é um dos conceitos matemáticos mais comumente aplicados no mundo real. No entanto, as dificuldades persistentes e contínuas dos alunos com proporções e tarefas relacionadas a proporcionalidade estão bem documentadas (por exemplo, LAMON, 2005).

O desenvolvimento do raciocínio proporcional é um processo gradual, sustentado por um pensamento multiplicativo cada vez mais sofisticado e pela capacidade de comparar duas quantidades em termos relativos (multiplicativos) em vez de absolutos (aditivos) (LAMON, 2005). Dole, Hilton e Hilton (2015) exemplificaram essa conceituação afirmando que, pelo raciocínio proporcional, podemos ver a relação entre os números 2 e 10 aditivamente, como uma diferença de 8; mas também multiplicativamente, como 10 sendo o resultado quando 2 é multiplicado por 5. Como afirmado anteriormente, a essência do raciocínio proporcional é o pensamento multiplicativo, é entender as estruturas multiplicativas inerentes em situações de proporção, portanto, uma consciência de como duas quantidades estão relacionadas em um sentido multiplicativo e não aditivo.

### 3.5. Frações e Seus Significados

Os números racionais admitem três representações diferentes, as porcentagens, os decimais e as frações. Notadamente, o estudo dos números fracionários é um dos conteúdos mais importantes no segmento do ensino básico. Conforme Powell (2018), este é o conhecimento chave para estudantes serem bem sucedidos na álgebra e disciplinas matemáticas posteriores; também, influenciam seu futuro no mercado de trabalho e, no geral, na justiça social. Conforme este autor, os lutadores por direitos civis dos afrodescendentes nos EUA na década de 60 argumentavam que o acesso à álgebra para estudantes afrodescendentes e outros grupos marginalizados faz parte da luta para justiça social e o alcance da equidade social. Apesar de sua importância, os estudantes têm dificuldades para compreender e operar com frações, principalmente, porque “aprender frações exige não apenas proficiência processual, mas também entendimento conceitual” (POWELL, 2018, p. 79).

Historicamente, mais de quatro milênios atrás, nas culturas mesopotâmica e egípcia, ao longo dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, com o nascimento da agricultura, as condições materiais introduziram a necessidade de inventar maneiras cognitivas de medir quantidades de terra, plantações, sementes, entre outros e, de registrar tais medidas (Clawson, 1994/2003; Struik, 1948/1967). Por exemplo, para medir as distâncias da terra, agrimensores antigos esticaram cordas, nas quais o comprimento entre dois nós representava uma unidade de medida. Com essa prática social de medir comprimentos, surgiram simultaneamente a geometria e os números fracionários (Aleksandrov, 1963; Caraça, 1951; Roque, 2012), isto é, as frações surgiram, por exemplo, para determinar a extensão de uma distância ou comprimento  $AB$ , em comparação com uma unidade de medida  $u$ . (...) Como consequência ontológica, entendemos que a fração é fruto de uma medição e optamos por defini-la como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que são comensuráveis (POWELL, 2019, p. 55).

Os números fracionários têm sido objeto de estudo de Kieren (1980) que indicou cinco ideias básicas para a sua compreensão, os quais ele denomina de “subconstructos”, a saber, parte/todo, quociente, medida, operador e razão. Após a abordagem de Kieren (1980), Quaresma e Ponte (2012) também ressaltaram que números fracionários possuem esses cinco diferentes significados ou subconstructos. Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983), as frações podem ser interpretadas também por estas maneiras: uma comparação de parte para todo, uma razão, uma divisão indicada (quociente), um operador e uma medida de quantidades contínuas ou discretas. Esses significados são todos com base na ideia de que uma fração representa partes de um todo dividido em partes iguais, incluindo a



interpretação de fração como medida. Esta também é a abordagem predominante nos livros didáticos atuais, considerando a perspectiva de partição (Scheffer e Powell, 2019). Em Powell (2019), encontramos a importância deste subconstructo:

Na perspectiva de medição, um número fracionário representa não uma parte de um objeto partido em seções iguais, mas de uma outra relação matemática. A relação é da proporção ou comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que têm uma unidade de comensurabilidade (POWELL, 2019, p. 59).

De forma muito proeminente, a pesquisadora Santos (1997, p. 106) endossa Powell ao dizer que “quando temos uma divisão de um todo em frações, obteremos de novo este todo se reunirmos todas as frações”. Então, uma fração é um número que pode nos dizer sobre a relação entre duas quantidades. Essas duas quantidades fornecem informações sobre as partes, as unidades que estamos considerando e o todo. Determinar o todo é importante quando se trabalha com frações. Retomando o raciocínio de Powell (2019), temos que:

Nessa perspectiva, ontologicamente as frações surgem da partição ou divisão de áreas geométricas em partes iguais, no destaque de algumas partes e sua nomeação, com uma linguagem oral e escrita, de modo que, na linguagem, utiliza-se de palavras e símbolos matemáticos. Epistemologicamente, as frações são aprendidas pelo método de discretizar uma grandeza contínua em um conjunto de objetos discretos de partes iguais, decidir quantas partes sobre qual focar a atenção e contar duas vezes: uma conta para o denominador e a outra para o numerador (POWELL, 2019, p. 59).

Lamon (2005) apresenta que as ideias de fração são complexas e interconectadas, dando concordância ao trabalho de Kieren (1980) que traz a ideia de fração como uma teia de relações. Por tudo isso, muitos alunos têm uma compreensão limitada dos vários significados das representações de frações, que são introduzidos muito cedo no currículo escolar, e proporcionam entendimentos primitivos dos conceitos de partição e medida pelos alunos. Então, atualmente, temos encontrado importância em enfatizar o desenvolvimento de uma base formalizada dos conceitos de fração antes de introduzir os alunos às operações com números racionais. Adiante, discutimos sobre os conceitos de cada um dos cinco significados de fração.

O subconstructo de fração como parte-todo reflete a abordagem em que uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos se divide em partes iguais. Segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983), essa ideia é fundamental para todas as interpretações posteriores de fração e a recomendam como o mais natural para

crianças pequenas, por considerarem ser útil para adição de frações equivalentes. Para Santos (1997), a fração como parte-todo indica uma repartição do todo inicial em frações, que sejam partes iguais de mesmo tamanho. Essa pesquisadora ressalta que encontramos o subconstructo parte-todo em conjuntos discretos (repartir em partes de mesma quantidade numérica elementos que não podem ser subdivididos) e contínuos (partição em pedaços iguais, tamanhos iguais, mesma região plana, mesmo volume).

O subconstructo de fração como razão remete à uma relação que representa a noção de magnitude relativa, pois estabelece relações parte-parte ou compara uma parte de um todo com o todo. Assim, é mais corretamente considerado como um índice comparativo do que como um número (BEHR, LESH, POST E SILVER, 1983). Um conceito importante deste subconstructo é quando duas razões são iguais, dizemos que são proporcionais. Ou seja, uma proporção é uma afirmação igualando duas razões. Encontramos seu uso tanto em modelos discretos quanto em quantidades contínuas. Santos (1997, p. 106) enfatiza que "as ideias de fração como razão são muito utilizadas em situações do dia a dia e que a ideia de fração como razão comparando parte-todo coincide com a ideia de fração no contexto geral de parte-todo."

A fração  $A/B$  também pode ser usada para se referir a uma operação, ou seja, é outra forma de se escrever  $a:b$ ; o que nos traz outro significado de fração, que é a ideia de quociente. Canova, Silva e Campos (2018) sugerem que a introdução do ensino de frações pelo quociente oportuniza situações nas quais o aluno apresenta maior compreensão do uso das frações. Este subconstructo traz "a fração representando o quociente de dois números e permite perceber a ordem de grandeza das divisões" (SANTOS, 1997, p. 106).

O subconstructo de fração como operador impõe a um número fracionário  $A/B$  uma interpretação algébrica. Assim,  $A/B$  é pensado como uma função que transforma figuras geométricas em figuras geométricas semelhantes  $A/B$  vezes maiores, ou como uma função que transforma um conjunto em outro conjunto com  $A/B$  vezes mais elementos. Behr, Lesh, Post e Silver (1983) exemplificam trazendo que:

ao operar em objetos contínuos (comprimento), pensamos em  $p/q$  como uma combinação de esticador-encolhido. Qualquer segmento de linha de comprimento  $L$  operado por  $p/q$  é esticado para  $p$  vezes seu comprimento e então encolhido por um fator  $q$ . Uma interpretação multiplicador-divisor é dada a  $p/q$  quando ele opera em um conjunto discreto. O número racional  $p/q$  transforma um conjunto com  $n$  elementos em um conjunto com  $np$  elementos e então esse número é reduzido para  $np/q$  (BEHR, LESH, POST e SILVER, 1983, p. 96, tradução nossa<sup>20</sup>).

Neste caso, os alunos devem perceber que está sendo trabalhado o conceito de frações como um modificador de situações. Fração como operador é "a ideia de fração em situações concretas de medições e de representação de objetos reais em escala" (SANTOS, 1997, p. 106).

Uma interpretação linear, também conhecida como medida, é o outro significado de fração que adiciona um atributo aos conceitos que está baseado na distância da fração representada na reta numérica. As frações são representadas na reta numerada, trazendo a ideia de repartição de um todo em partes de mesmo comprimento, de mesma distância. Por este subconstructo, são desenvolvidos os atributos de comprimento e a compreensão de representações equivalentes de um número associado a um ponto da reta numérica construída a partir de unidades diferentes.

### 3.6. Razão e Proporção

Para Shield e Dole (2013, p. 187), "promover a compreensão de razão e proporção é fomentar o raciocínio proporcional dos alunos". Nesta seção, trazemos o que alguns autores comentam sobre estes dois termos. Apresentamos também o que encontramos em dicionários sobre razão e proporção. Para o pesquisador Fossa (2011), os conceitos de razão e proporção tiveram um importância para o desenvolvimento da Matemática:

Quando voltamos a nossa atenção para o mundo antigo, então vemos que os conceitos de razão e proporção tiveram dois papéis distintos. Em primeiro lugar, os referidos conceitos foram instrumentais no desenvolvimento da própria Matemática, seja esta considerada nos seus aspectos mais teóricos, seja nos seus aspectos mais práticos (FOSSA, 2011, p. 2).

---

<sup>20</sup> When operating on continuous object (length), we think of  $p/q$  as a stretcher-shrinker combination. Any line segment of length  $L$  operated on by  $p/q$  is stretched to  $p$  times its length and then shrunk by a factor of  $q$ . A multiplier-divider interpretation is given to  $p/q$  when it operates on a discrete set. The rational number  $p/q$  transforms a set with  $n$  elements to a set with  $np$  elements and then this number is reduced to  $np/q$  (BEHR, LESH, POST e SILVER, 1983, p. 96).

A palavra razão, conforme o dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, significa “quociente de dois números”. Essa palavra vem do latim *ratio*, que significa razão, divisão ou quociente. Pelo conceito de razão, conseguimos fazer comparações de grandeza entre dois números. Podemos ilustrar a ideia de razão e de quociente simultaneamente. Assim, para saber quantas vezes o número 500 é maior do que o número 25 (ou em outras palavras, qual a razão entre 500 e 25), procedemos da seguinte forma: “ $500:25 = 20$ ”. A razão 500:25 é lida como “500 para 25”; aqui também temos a ideia de quociente, que será lida como “500 dividido por 25” e tem um valor de 20. Portanto, o número 500 é 20 vezes maior do que o número 25. O trabalho de Almeida (2015) traz que:

Os conceitos de razão e proporção são encontrados nos livros V e VI dos Elementos de Euclides que datam aproximadamente 300 anos antes de Cristo, embora essa teoria tenha sido atribuída a Eudoxo de Cnido que nasceu no ano 408 antes de Cristo e foi discípulo de Platão, e ainda, muito antes disso, uma intrigante razão conhecida como áurea foi aplicada em grandes construções como as pirâmides do Egito e o Partenon na Grécia. Posteriormente, a razão áurea esteve presente em trabalhos de Fibonacci, Da Vinci, e tantos outros matemáticos, pintores e arquitetos. A descoberta de que essa razão era expressa por formas encontradas na natureza deram a ela a fama de razão divina. Hoje a razão áurea é amplamente utilizada também em áreas como marketing e propaganda (ALMEIDA, 2015, p. 12).

Proporção, conforme o mesmo dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, é uma igualdade de duas (ou mais) razões. Uma proporção envolve quatro números:  $a, b, c, d$ . Nessa ordem, temos a proporção:  $a:b=c:d$  ( $b$  e  $d$  são diferentes de zero). Lê-se: “ $a$  está para  $b$ , assim como  $c$  está para  $d$ ”. Para Oliveira, Alvarenga e Silveira (2013), a palavra proporção vem do latim *proportio* e significa relação entre as partes. Segundo Martins (2007), o matemático que escreveu o texto mais importante sobre proporção foi Euclides de Alexandria (360 a.c – 295 a.c). Cerca de 1800 anos depois, os artistas do renascimento trabalharam esse conceito para fazer arte. No século XV iniciou-se o redescobrimto das proporções matemáticas do corpo humano, feito por Leonardo da Vinci (1452 – 1519) e outros artistas.

Schliemann e Carraher (1993, p. 16) enriquecem nosso entendimento ao trazerem que “o ponto de partida para a compreensão de razões e proporções são os diversos contextos ou situações da vida em que várias quantidades físicas estão em proporção direta com outras quantidades”. Concordamos com estes autores, pois podemos extrair muitas situações que envolvem ideias de razões e proporções da vida cotidiana. Em um primeiro grupo de tarefas podemos pensar, por exemplo

em (a) quando vivenciamos a experiência de lidar com conceitos expressos como taxa de mudança de uma unidade, como taxa, potência, densidade, dentre outras, (b) quando temos que encontrar o preço por unidade de algum item (livro, miçangas, quilograma de batata, preço por metro de tecido, etc.), e (c) quando temos que encontrar o carro mais econômico com base na quilometragem (quilômetros percorridos por litro de gasolina) ou decidir qual é a forma mais rápida de transporte (quilômetros por hora). Também podemos obter a informação do número de residentes em um quilômetro quadrado na cidade em que vivemos (densidade populacional).

Do ponto de vista matemático, as situações mencionadas no primeiro grupo de tarefas fornecem experiência em fazer comparações quantitativas e encontrar valores ausentes de uma determinada proporção, usando as regras, propriedades e métodos de proporção, e a proporção. Um segundo grupo de tarefas que precisamos analisar envolve situações nas quais seja necessário comparar tamanhos ou quantidades (como numerador e denominador) com propriedades semelhantes. Por exemplo, fazendo uma comparação entre o número de meninas e meninos em uma classe, ou uma comparação entre as quantidades de suco e água em uma jarra, e assim por diante. Os resultados dessas comparações (que são comparações de razão) permitem a partição de um todo de acordo com uma dada proporção, como, por exemplo, a distribuição de lucros entre sócios proporcionalmente ao investimento realizado por cada um, ou na divisão de uma pizza em fatias entre crianças. Matematicamente, essas tarefas também fornecem experiência na aplicação de comparações quantitativas e na busca do valor ausente em uma determinada proporção, usando regras e métodos de razão e proporção. Em um terceiro grupo de tarefas, pensamos também, em situações que exigem a necessidade de ampliar ou reduzir uma determinada forma, área ou modelo 3D, sem distorção da forma básica.

Podemos exemplificar com situações relacionadas a taxa de ampliação necessária junto com a escala usada; encontrar e usar a proporção de redimensionamento após a mudança de medidas de uma imagem; redimensionar nos níveis primeiro (linear - formas), segundo (área quadrática) e terceiro (volume cúbico); encontrar a medida real (em tamanho real) de acordo com a escala de um

modelo; usando escala para comparar tamanhos e muito mais. Por fim, em um quarto grupo de tarefas, nós temos situações ou problemas que envolvem proporções indiretas. Por exemplo, quando queremos levantar um peso pesado usando uma grua, o centro de gravidade do objeto deve ser encontrado. Ou, para dar uma situação mais próxima do mundo das crianças, para entender como usar o equilíbrio para encontrar o peso de um objeto, e assim por diante. Essas atividades tendem a gerar um entendimento mais profundo e amplo do assunto.

Como exposto acima, a proporcionalidade é um tópico matemático abrangente. Para Petit, Laird, Wyneken, Huntoon, Abele-Austin e Sequeira (2020), a familiaridade do aluno com proporcionalidade se desenvolve ao longo dos anos e é composta por vários conceitos, estratégias e habilidades interconectadas. A proporcionalidade requer muito mais do que uma compreensão de tópicos matemáticos elementares, como multiplicação. Por causa do papel central que desempenha em conceitos matemáticos mais complexos, é um tópico transcendente na Matemática do ensino médio. Em determinadas situações do cotidiano, consideradas simples, somos levados a escolher a melhor opção entre duas ou mais ofertas, ou seja, escolher dentre elas a que apresenta a melhor relação custo-benefício.

Por concordarmos com os argumentos dos pesquisadores citados acima, podemos ilustrar situações cotidianas que podem ser vivenciadas por qualquer pessoa, em qualquer lugar do mundo. Por exemplo, é mais vantajoso comprar um pacote de 3 kg de açúcar por R\$ 7,50 ou comprar três pacotes de 1 kg de açúcar por R\$ 2,90 cada? Um médico ou enfermeiro precisam, hipoteticamente, ministrar alguns medicamentos cuja dosagem varia de acordo com a massa corporal do paciente. Isso ocorre, pois, via de regra, a dosagem específica e eficaz do medicamento já vem pré-determinada pelos laboratórios e, por isso, deve-se tomar muito cuidado para evitar uma dosagem em excesso, já que pode causar danos à saúde do paciente, ou seja, é vital que a proporção entre massa corporal e quantidade de medicamento seja respeitada.

Quando nos deparamos com situações como essas e tantas outras, na qual a proporcionalidade está inserida, é necessária atenção a cálculos simples para uma tomada de decisão acertada. Comparar as grandezas que nos cercam é crucial no

cotidiano de um comerciante, de um engenheiro, de um estudante, de uma cozinheira, de um atleta, enfim, é fundamental para que qualquer cidadão possa avaliar uma dada situação quando as relações entre as grandezas envolvidas são comparáveis. Diante desse panorama, entendemos que o processo de ensino e de aprendizagem relacionado ao objeto de conhecimento proporcionalidade merece destaque, já que sua ocorrência é na educação básica e sua aplicabilidade é, dentre muitas, de relevância social.

### **3.7. A ferramenta Regra de Três**

Conforme posto por Oliveira, Alvarenga e Silveira (2013), a regra de três é baseada na equivalência de razões, sendo uma maneira de resolver uma proporção, quando o valor de uma das variáveis é desconhecido, ou seja, é um processo objetivo para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos. Daí o nome regra de três.

Ao descrever os tópicos de proporção no currículo de Matemática, Ben-Chaim *et al.* (1998) delinearam os tipos gerais de problemas de raciocínio proporcional como comparações de duas partes de um todo (por exemplo, a proporção de meninos para meninas em uma classe), problemas de taxa ou densidade (por exemplo, centavos por litro, quilogramas por metro cúbico) e escala problemas (por exemplo, triângulos semelhantes). Na análise de Ben-Chaim *et al.*, os métodos de solução para tais problemas exigiam uma comparação de duas razões completas (por exemplo, qual é mais rápida), ou o cálculo de um "valor ausente" quando em equivalentes par de razões temos três grandezas conhecidas e uma não. O último método de solução surge da representação das razões dadas como uma declaração de proporção. O procedimento de solução padrão para resolver equações de proporção é via meios algébricos: "multiplique cruzado e resolva para x" (POST, BEHR E LESH, 1988, p. 81). O ensino do algoritmo padrão ou da regra, entretanto, parece ser uma questão controversa. Na verdade, apesar de eficiente, ainda tem pouco significado. Como um interlúdio histórico, a aplicação da regra para situações de proporção delineadas acima (multiplicação cruzada) é geralmente conhecida

como a regra de três. O significado da regra de três é delineado por Swetz (1992):

A 'Regra de Três', comumente conhecida em sua época como 'Regra de Ouro' ou 'Regra do Mercador', foi muito apreciada nos séculos XV e XVI como uma poderosa técnica matemática aplicável para resolver muitas situações problemáticas. Hoje, essa regra seria reconhecida como uma declaração de proporção simples envolvendo três quantidades das quais uma quarta deve ser encontrada (SWETZ, 1992, p. 373).

Para Swetz, a regra de três é vista como uma regra antiga, eficiente e muito "útil" para resolver equações de proporção. No entanto, desenvolver um significado para a regra é um problema no desenvolvimento da compreensão conceitual da proporção. Uma estratégia para dar significado ao método de multiplicação cruzada para resolver equações de proporção (regra de três) foi delineada por Robinson (1981), onde a construção de "caixas" de proporção para corresponder à informação dada em uma situação de proporção é defendida. Na regra de três simples e direta, duas grandezas são diretamente proporcionais, ou seja, aumentam ou diminuem juntas. Shield e Dole (2013) acrescentam que estruturalmente a equação da regra de três é semelhante às situações de razão, comparando duas grandezas que estão relacionadas multiplicativamente e podem ser representadas usando uma tabela. Normalmente, o problema fornece três elementos e a tarefa é encontrar o quarto elemento. Estes são referidos como problemas de proporção de "valor perdido".

Para resolver uma regra de três simples, você deve seguir os seguintes passos: (1) Identifique as grandezas envolvidas no problema e suas unidades de medida. (2) Escolha duas dessas grandezas e coloque-as em proporção. Por exemplo, se o problema envolver tempo e velocidade, é possível colocar as grandezas em proporção: tempo/velocidade = tempo/velocidade. (3) Coloque os valores das grandezas conhecidas na proporção e, em seguida, determine a incógnita (valor desconhecido) utilizando uma simples multiplicação cruzada. (4) Por fim, faça a unidade de medida das grandezas serem as mesmas para que a resposta final faça sentido.

A abordagem de multiplicação cruzada tem sido fortemente criticada. A principal crítica às situações de proporção "equacionada" é que o foco se move para a resolução de equações em vez de pensar em termos de proporcionalidade, ou na natureza da situação-problema. "A representação do problema também usa a notação de fração embora estas não sejam frações no sentido de uma comparação



multiplicativa de parte para todo” (SHIELD E DOLE, 2013, p. 187).

De fato, embora seja uma estratégia fácil para os alunos abordarem problemas de valor ausente, a regra de três impede a compreensão do raciocínio proporcional. "Ensinar como resolver problemas de valores omissos não é sinônimo de ensinar raciocínio proporcional" (AHL, 2016, p. 184). Neste sentido, Ahl (2016) argumenta que para promover entendimento do conceito de proporção e evitar o uso excessivo do procedimento de multiplicação cruzada, ele deve ser adiado até que os alunos tenham alcançado uma compreensão do raciocínio proporcional. De maneira mais ampla, as noções e estratégias intuitivas das crianças poderiam fazer parte das situações de ensino, visto serem elas importantes para a compreensão plena de conceitos matemáticos diversos. A instrução escolar não deveria eliminar as representações intuitivas das crianças, ao contrário, deveria, a partir delas, construir novas representações consistentes com o conhecimento formal. "A instrução, iniciando-se a partir da perspectiva cognitiva da criança poderia ir além, na direção de formas mais efetivas e abrangentes de raciocínio proporcional" (SPINILLO, 2002, p. 486).

### **3.8. As pesquisas de Shield e Dole sobre Raciocínio Proporcional e o Livro Didático**

Nosso estudo investiga a representação do raciocínio proporcional em livros didáticos aprovados pelo PNLD 2020 para os anos finais do ensino fundamental por meio das lentes de uma estrutura com cinco objetivos de aprendizagem baseados em pesquisa. O estudo dos pesquisadores australianos faz parte de um estudo maior, em que tanto os livros didáticos da Austrália quanto os manuais de professores foram investigados. A análise feita foi delimitada às seções referentes ao raciocínio proporcional.

As análises de livros didáticos podem se concentrar em vários aspectos. Escolhemos a estrutura de Shield e Dole (2013) para analisar a representação do raciocínio proporcional nas coleções selecionadas na seção 4.2 desta pesquisa. A razão da minha escolha se deu por Shield e Dole reconhecerem a Teoria de Vergnaud (1983) de campos conceituais para estruturas multiplicativas, que enfatiza

a importância de desenvolver a compreensão dos alunos sobre ligações estruturadas e conexões dentro e entre tópicos.

A teoria de Vergnaud (1983) propõe que os conceitos matemáticos sejam organizados em "campos conceituais", ou seja, um conjunto de conceitos que estão relacionados entre si e são influenciados pela mesma estrutura cognitiva subjacente. No caso das estruturas multiplicativas, Vergnaud (1983) propõe que os conceitos de multiplicação e divisão estão relacionados e são apreendidos por meio de três estruturas cognitivas fundamentais: (1). A estrutura de adição iterada: que se refere à representação da multiplicação como uma adição sucessiva de um mesmo número. (2). A estrutura de razão: que se refere à relação entre duas quantidades expressa como a divisão de uma pela outra. (3). A estrutura de medida: que se refere à ideia de que a multiplicação pode ser utilizada para encontrar a medida de um conjunto de objetos com determinada unidade de medida. Vergnaud (1983) propõe que essas estruturas cognitivas sejam construídas de forma gradual, à medida que as crianças são expostas a situações que envolvem a multiplicação e a divisão, e que o desenvolvimento dessas estruturas está relacionado à idade e à experiência prévia da criança com a Matemática.

Desta forma, a estrutura de Shield e Dole (2013) aborda o potencial de apoio que os livros didáticos oferecem às crianças no desenvolvimento de uma compreensão profunda e conectada do raciocínio proporcional. Ele é desenvolvido a partir dos cinco pontos-chave descritos para uma compreensão profundamente conectada do raciocínio proporcional. Os cinco pontos-chave são representados como cinco objetivos de aprendizagem na estrutura. Cada objetivo de aprendizagem possui três indicadores para apoiar a identificação da representação. Os indicadores, bem como os objetivos de aprendizagem, derivam de décadas de resultados de pesquisas sobre o tema raciocínio proporcional.

Em 2016, a pesquisadora sueca Linda Ahl publicou um estudo que ela realizou sobre os livros didáticos da Suécia baseando-se na estrutura de Shield e Dole (2013). As forças motrizes para a realização do seu estudo foram a forte posição de livros didáticos na sala de aula de matemática em geral, juntamente com as crenças que os professores têm no que se refere ao livro didático para compartilhar as intenções e objetivos da Educação Matemática. A questão que

orientou sua pesquisa foi: *Como os livros didáticos de matemática sueca para as séries* <sup>21</sup> *representam o raciocínio proporcional em relação a cinco objetivos-chave de aprendizagem (de Shield e Dole) baseados em pesquisa para o desenvolvimento de uma compreensão profundamente conectada?* Devido à importância do raciocínio proporcional, sua pesquisa foi relevante para todos os envolvidos na Educação Matemática, mas particularmente interessante para professores e autores de materiais curriculares da Suécia. Os resultados trazem que os livros didáticos suecos têm poucos problemas que exigem raciocínio proporcional e compreensão relacional de conceitos. A maioria dos exercícios nos livros analisados não exigia mais do que imitar o procedimento apresentado nos exemplos trabalhados.

Os resultados de Ahl (2016) foram semelhantes aos mostrados por Shield e Dole (2013) quando eles desenvolveram essa estrutura de análise para os livros didáticos da Austrália. Eles descobriram que cinco séries de livros didáticos comumente usados mostraram baixo potencial para promover uma compreensão profunda do raciocínio proporcional. Ahl (2016) chegou às mesmas conclusões com sua pesquisa. A seguir, vamos ampliar o entendimento do uso dos indicadores de cada Chave e seus objetivos de aprendizagem.

- ➔ Chave 1: Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.

O entendimento das leituras dos trabalhos de Shield e Dole (2013) e Ahl (2016) nos permite dizer que o uso desta chave requer apresentação de exercícios, tarefas e problemas em um contexto cotidiano, presumivelmente familiar para a maioria dos alunos, que ofereçam oportunidades para comparar e contrastar situações aditivas e multiplicativas. É imprescindível explicitar a relação multiplicativa em situações proporcionais ou comparar com situações não proporcionais, que possuem natureza aditiva, através do uso de situações autênticas relacionadas à vida.

As situações proporcionais são aquelas em que duas ou mais grandezas variam de forma (a) diretamente proporcional, quando uma delas aumenta, a outra

---

<sup>21</sup> A autora não informa a idade dos alunos suecos, impedindo a correspondência das séries com o ensino brasileiro.

também aumenta na mesma proporção; e se uma diminui, a outra também diminui; ou (b) inversamente proporcional, quando um aumento na medida de uma delas faz com que a medida da outra seja reduzida na mesma proporção. Essa relação entre duas grandezas é descrita por uma proporção. Alguns exemplos de situações proporcionais são: (1) Um tanque de combustível de um carro: a quantidade de combustível consumida no tanque é diretamente proporcional à distância percorrida pelo carro. Ou seja, quanto mais o carro percorre, mais combustível é consumido. A razão entre a quantidade de combustível e a distância percorrida deve se manter constante. (2) Construção de um muro: se uma equipe de 6 pedreiros consegue construir um muro de 30 metros de comprimento em 15 dias, então 8 pedreiros devem ser capazes de construir um muro com as mesmas medidas em menos tempo. Nesse caso, a razão entre o número de pedreiros e o tempo de construção deve se manter constante. (3) Compra de frutas: se 1 kg de bananas custa R\$3,00, então 3 kg de bananas devem custar R\$9,00. Nesse exemplo, a razão entre a quantidade de bananas e o preço deve se manter constante.

Em comparação, as situações não proporcionais são aquelas em que duas grandezas variam de forma não diretamente proporcional, ou seja, em situações não proporcionais a relação entre elas não é constante. Por exemplo, o tempo que uma pessoa leva para percorrer uma certa distância pode não ser proporcional à velocidade, pois ela pode começar devagar e depois acelerar.

Já as situações aditivas são aquelas em que duas grandezas são somadas independentemente uma da outra para formar um total. Neste caso, as grandezas não precisam estar relacionadas entre si. Por exemplo, a soma de dois números inteiros é uma situação aditiva.

- ➔ Chave 2: Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.

O uso desta Chave requer que o livro didático explore de várias formas situações que cheguem à ideia de razão, e defina quando uma razão for equivalente à uma proporção. Os autores devem ilustrar com exemplos diversificados o conceito de razão. E, aos poucos, mostrarem uma definição explícita do conceito de razão, ou de proporção, como trazer comparação de como as quantidades se relacionam

umas com as outras. Assim, é fundamental que os alunos percebam que a relação multiplicativa está presente em todas as situações de razão, e saibam explicar o que entenderam de variadas formas. Também é interessante que os livros didáticos proponham tarefas em que os alunos precisem se fundamentar nas definições formais de razão e proporção para resolvê-las. Razão e proporção são os pontos fortes do raciocínio proporcional, são as pedras fundamentais para a construção desse conhecimento. Ainda, relendo os trabalhos de Shield e Dole (2013) e de Ahl (2016) vimos que estratégias de trabalho dentro do raciocínio proporcional, ou seja, sobre razões equivalentes; ou entre proporções, aquelas que evidenciam a relação multiplicativa identificada, são importantes para resolvermos problemas que exigem proporcionalidade, como problemas de comparação de valores omissos e razões. Para tanto, é necessário destacar as operações inversas para apoiar a identificação de uma estrutura multiplicativa.

➔ Chave 3: Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.

Quando a Chave 2 não é bem atendida, ou seja, quando há falta de entendimento das estratégias de trabalho dentro (razões equivalentes) ou entre proporções (evidencia do uso da relação multiplicativa), por consequência, não haverá suporte para a identificação de estratégias de raciocínio proporcional. Para o êxito no atendimento da Chave 3, é necessário destacar ligações explícitas entre procedimentos de solução baseados em representação simbólica consistente para problemas que compartilham a mesma estrutura. Por exemplo, problemas de valor ausente com velocidade, similaridade, preço por unidade etc., que podem ser abordados com o mesmo raciocínio.

As abordagens para a introdução dos procedimentos de cálculo juntamente com a introdução de novos conteúdos matemáticos não são recomendados para os alunos trabalharem pela primeira vez com problemas de valor ausente. As pesquisas já mencionadas nesta tese mostram que a introdução precoce de procedimentos dificulta o entendimento de raciocínio proporcional, uma vez que os alunos tendem a aplicar, ou replicar, os mesmos procedimentos a todos os tipos de problemas. Desta forma, é retirada a oportunidade dos alunos abordarem os problemas com intuição e de trabalharem o raciocínio proporcional. Ainda, os alunos não são desafiados a extrapolar a resolução de problemas do tipo “calcule” e “resolva”, não sabendo

explicar de outras formas as situações ou o motivo de terem efetuado determinado cálculo.

➔ Chave 4: Conexão explícita com o conhecimento de fração.

Nesta Chave, é importante destacar ligações claras com ideias de frações e equivalência. Também precisam ser explicitamente distinguidas as relações parte/fração inteira e relação parte/parte. É fundamental mostrar o que significa cada proporção, cada significado da notação de fração em uso, ou seja, com definições explícitas do significado de  $a/b$  em uso. Esta Chave é a base de sustentação para que os alunos aprendam, entendam e saibam explicar como usar razão e proporção. Então, a Chave 4 é o pilar das outras quatro Chaves, sendo a primeira que os livros didáticos devem sugerir para os professores trabalharem com os alunos.

➔ Chave 5: Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.

Para atendimento da Chave 5, precisa-se de uma gama de representações para ilustrar que gráficos de situações proporcionais são linhas retas que passam pela origem. A situação multiplicativa em situações de proporção deve ser explicitada por uma variedade de gráficos proporcionais que são contrastados com outros gráficos não lineares. Tabelas também podem ser usadas para destacar relações, pois ilustram funções lineares não proporcionais e proporcionalidades. Ainda, é importante o uso de gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.

#### 4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O foco desta pesquisa é investigar, compreender e analisar como o raciocínio proporcional é abordado em livros didáticos de Matemática adotados pelas escolas públicas e aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019), destinados aos finais do ensino fundamental. Adicionalmente, investigamos quais indícios das cinco chaves e objetivos de aprendizagem dos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013) encontramos nestes livros didáticos. Em termos metodológicos, desenvolvemos um estudo de natureza qualitativa e documental. Neste sentido, investimos várias horas de estudos e leituras, registros escritos e diálogos entre a autora e orientadora sobre as pistas e evidências que fomos encontrando como respostas aos questionamentos norteadores desta pesquisa.

Podemos classificá-la como uma pesquisa qualitativa, pois, conforme Lüdke e André (2013), as pesquisas qualitativas proporcionam ao pesquisador uma melhor visão sobre determinado contexto e/ou problema. Também, a classificamos como pesquisa documental, uma vez que analisamos livros didáticos de Matemática dos anos finais do ensino fundamental. Segundo Lüdke e André (2013), a pesquisa documental representa um método utilizado para levantamento fatorial de documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse, e tem como finalidade identificar informações pontuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse.

A abordagem e análise dos dados envolveu investigação sobre como o conteúdo de uma determinada temática central do currículo de Matemática, nomeadamente razão, proporção e o raciocínio proporcional, é abordado em livros didáticos do ensino fundamental. O processo metodológico destaca-se pela análise propriamente dita dos dados, que foi pela análise de conteúdos, que é um método de investigação do conteúdo simbólico das mensagens encontradas nos documentos. Lüdke e André (2013) enfatizam que o uso deste método requer o envolvimento integral do pesquisador, pois o esforço exigido para se detectar padrões, temas e categorias de análise é um processo criativo que requer

juízos cuidadosos sobre o que é realmente relevante e significativo nos dados, centrando no pesquisador toda a responsabilidade do uso e eficiência deste método.

#### **4.1. Estrutura Teórica para Análise**

Em nossa análise aqui relatada, focamos o livro didático como uma importante ferramenta de ensino, levantando questões sobre o tipo de Educação Matemática que os alunos experimentarão se o ensino for baseado predominantemente no livro didático. A abordagem envolve um conjunto específico de objetivos de aprendizagem, que são usados como critérios para avaliar os materiais. Para aumentar o foco no próprio conhecimento matemático, analisamos uma temática-chave do currículo de Matemática dos anos finais do ensino fundamental, ou seja, o tópico de razão, proporção e raciocínio proporcional.

Esse tópico foi escolhido devido a sua importância no currículo e por seu potencial de demonstrar uma profunda conexão entre outros conceitos matemáticos e de outras disciplinas, e portanto, interferir muito com uma aprendizagem matemática com compreensão dos alunos e alunas. A pesquisa feita pelos educadores matemáticos Behr, Lesh, Post e Silver (1983) sobre os conceitos dos números racionais traz que esses conceitos estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante seus anos de estudo. Eles enfatizam que não aprender conceitos de números racionais é um sério obstáculo no desenvolvimento matemático das crianças. Este estudo dos pesquisadores americanos realizado nos anos 80 influenciou e segue influenciando pesquisas no mundo todo que focalizam em números racionais, raciocínio proporcional e outros temas relacionados.

Prosseguindo, para estruturar nossa análise, trazemos o trabalho de Shield e Dole (2013), que extraíram da literatura australiana e internacional em Educação Matemática sobre números racionais e raciocínio proporcional cinco pontos-chave para instrução, considerados importantes para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e a construção de estruturas multiplicativas para operar com sucesso neste domínio entre os alunos, como segue:

\* Chave 1: objetivo de aprendizagem 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa. Indicadores de que o



objetivo de aprendizagem da Chave 1 foi atendido é se o material didático: (1.1) oferece oportunidades para aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas; (1.2) explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais (conforme a natureza aditiva das comparações não proporcionais); e (1.3) usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.

\* Chave 2: objetivo de aprendizagem 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção. Indicadores de que este objetivo de aprendizagem foi atendido na Chave 2 é se o material didático: (2.1) define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão; (2.2) destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas; e (2.3) evidencia o uso tanto do pensamento dentro como entre o pensamento (ou seja, evidencia o uso explícito dos indicadores 2.1 e 2.2).

\* Chave 3: objetivo de aprendizagem 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão. Indicadores de que este objetivo de aprendizagem foi atingido na Chave 3 é se o material didático: (3.1) traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles (dentro da situação e entre ideia da situação de proporção); (3.2) mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas (ou seja, os procedimentos de solução são baseados em representação simbólica consistente para problemas que compartilham a mesma estrutura); e (3.3) adia a introdução da “equação de proporção” formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes em suas mentes.

\* Chave 4: objetivo de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Indicadores de que este objetivo de aprendizagem atendeu a Chave 4 é se o material didático: (4.1) exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (4.2) explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (4.3) sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente).

\* Chave 5: objetivo de aprendizagem 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção. Indicadores de que este objetivo de

aprendizagem foi alcançada com a Chave 5 é se o material didático: (5.1) utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas; (5.2) mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem; e (5.3) utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e / ou fazer previsões.

Todos esses objetivos de aprendizagem, ou chaves, com seus indicadores sugeridos por Shield e Dole (2013) foram usados nesta pesquisa de doutorado em Educação Matemática, buscando responder às nossas questões norteadoras de pesquisa: *Como o raciocínio proporcional é abordado em livros didáticos de Matemática adotados pelas escolas públicas e aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019) destinados aos anos finais do ensino fundamental? Quais das cinco chaves e objetivos de aprendizagem dos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013) encontramos nestes livros didáticos?* Para tanto, analisamos as seções selecionadas de cada livro da amostra, em busca de evidências relacionadas ao raciocínio proporcional e para estabelecer o grau de ligação entre os tópicos relacionados. Uma classificação de alta (A), média (M), baixa (B) ou nenhuma (N) evidência foi decidida para cada indicador, dependendo da evidência desse indicador sendo promulgada no material.

Utilizamos também uma análise qualitativa do que observamos nos livros didáticos investigados a partir dos 15 indicadores distribuídos entre as 5 chaves ou objetivos de aprendizagem. Portanto, a análise focou em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental adotados em escolas públicas, com o objetivo de avaliar o uso dos indicadores citados, por meio das 5 Chaves, que verificam exatamente o elo entre os conhecimentos do raciocínio proporcional. Isto porque os conhecimentos de razão e proporção, que se relacionam com fração, fornecem as bases para o desenvolvimento do raciocínio proporcional ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental.

Ainda, por meio das 5 Chaves desenvolvidas por Shield e Dole (2013) e mediante análise dos dados, pretendemos alcançar os objetivos específicos desta pesquisa, que são:

- a) Investigar o que tem de parecido e de diferente nas atividades propostas sobre raciocínio proporcional entre os livros didáticos de Matemática analisados para o alcance do objetivo geral.

Pergunta associada:

- O que existe de similar e o que existe de diferente entre as tarefas com foco em raciocínio proporcional nesses livros didáticos de Matemática?
- b) Identificar quais são as tarefas comuns aos livros didáticos de Matemática referidos no item anterior que favorecem o aprendizado pelos alunos dos conceitos de razão e proporção, e como desenvolvem o raciocínio proporcional nos mesmos.

Perguntas associadas:

- Quais tarefas identificamos que são comuns?
- Como esses autores sugerem a abordagem dessas tarefas para que elas propiciem o entendimento dos alunos a respeito dos conceitos que envolvem raciocínio proporcional?
- Como cada livro didático de Matemática evidenciou que suas tarefas geram aprendizado para alunos e professores no desenvolvimento do raciocínio proporcional?

#### **4.2. Seleção dos Livros Didáticos para Análise**

A análise se concentrou nos manuais digitais dos professores dos livros didáticos adotados pelo PNLD 2020 (BRASIL, 2019) - para os anos finais do ensino fundamental. Pelo programa, 11 coleções de livros foram adotadas pelas escolas públicas em todo o território nacional. Nossa análise se concentrou em três coleções completas, então, com seus volumes do 6º ao 9º ano, que perfazem doze livros didáticos ao todo. A definição da quantidade de coleções se deu considerando a quantidade mínima de três coleções para análise em prol de podermos triangular os dados produzidos e termos alguma confiabilidade em nossas interpretações (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

No primeiro ano da autora como estudante no programa de doutorado, a saber, ano de 2019, chegava às escolas públicas os livros disponibilizados pelo Guia Digital do PNLD 2020 (BRASIL, 2019) - para os anos finais do ensino fundamental. Isso permitiu aos professores fazerem suas escolhas de adoção a partir do ano de 2020. Desta forma, a partir do PNLD 2020 (BRASIL, 2019) para os anos finais do Ensino Fundamental, temos os livros didáticos de Matemática selecionados para uso nas escolas do território brasileiro. Os próximos 4 quadros apresentam a relação das coleções, listadas em ordem crescente da quantidade de exemplares distribuída pelo PNLD 2020 (BRASIL, 2019) - para os anos finais do ensino fundamental - por ano escolar.

**Quadro 10 - Exemplares distribuídos por título do 6º ano.**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO - FNDE									
Valores de Aquisição por Título - Anos Finais - PNLD 2020									
Código do Livro	Título	Editora	Tipo	Código	Etapa de Ensino	Ano/Série	Quantidade de Exemplares	Valore Unitário (R\$)	Valor Total (R\$)
0312P20022006IL	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	53.698	R\$ 14,02	R\$ 752.899,66
0022P20022006IL	TRILHAS DA MATEMÁTICA	SARAIVA EDUCACAO S.A.	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	62.615	R\$ 13,61	R\$ 852.277,81
0018P20022006IL	GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	63.338	R\$ 13,50	R\$ 855.151,67
0373P20022006IL	APOEMA	EDITORA DO BRASIL SA	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	95.315	R\$ 11,86	R\$ 1.130.740,91
0386P20022006IL	MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	141.558	R\$ 10,85	R\$ 1.535.904,30
0017P20022006IL	MATEMÁTICA ESSENCIAL	EDITORA SCIPIONE S.A.	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	142.746	R\$ 12,15	R\$ 1.734.677,94
0303P20022006IL	MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	144.501	R\$ 10,72	R\$ 1.549.628,72
0302P20022006IL	ARARIBÁ MAIS - MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	175.403	R\$ 10,61	R\$ 1.861.727,44
0028P20022006IL	MATEMÁTICA - BIANCHINI	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	248.491	R\$ 11,21	R\$ 2.786.578,07
0300P20022006IL	TELÁRIS MATEMÁTICA	EDITORA ATICA S.A.	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	291.008	R\$ 12,36	R\$ 3.595.694,85
0377P20022006IL	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	006	Ensino Fundamental	6º Ano	1.402.824	R\$ 8,93	R\$ 12.530.023,97

Fonte: Site FNDE/MEC.

**Quadro 11 - Exemplares distribuídos por título do 7º ano.**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO - FNDE									
Valores de Aquisição por Título - Anos Finais - PNLD 2020									
Código do Livro	Título	Editora	Tipo	Código	Etapa de Ensino	Ano/Série	Quantidade de Exemplares	Valore Unitário (R\$)	Valor Total (R\$)
0312P20022007IL	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	49.437	R\$ 12,43	R\$ 614.689,77
0022P20022007IL	TRILHAS DA MATEMÁTICA	SARAIVA EDUCACAO S.A.	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	56.493	R\$ 13,75	R\$ 776.857,84
0018P20022007IL	GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	58.072	R\$ 13,05	R\$ 757.978,97
0373P20022007IL	APOEMA	EDITORA DO BRASIL SA	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	89.097	R\$ 10,77	R\$ 959.129,21
0017P20022007IL	MATEMÁTICA ESSENCIAL	EDITORA SCIPIONE S.A.	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	131.900	R\$ 11,57	R\$ 1.526.531,46
0386P20022007IL	MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	133.560	R\$ 11,10	R\$ 1.483.050,24
0303P20022007IL	MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	134.310	R\$ 10,50	R\$ 1.409.986,38
0302P20022007IL	ARARIBÁ MAIS - MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	161.113	R\$ 11,17	R\$ 1.798.987,76
0028P20022007IL	MATEMÁTICA - BIANCHINI	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	235.099	R\$ 10,00	R\$ 2.350.519,80
0300P20022007IL	TELÁRIS MATEMÁTICA	EDITORA ATICA S.A.	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	263.535	R\$ 12,12	R\$ 3.194.518,56
0377P20022007IL	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	007	Ensino Fundamental	7º Ano	1.312.410	R\$ 8,95	R\$ 11.748.694,32

Fonte: Site FNDE/MEC.

### Quadro 12 - Exemplares distribuídos por título do 8º ano.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO										
FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO - FNDE										
Valores de Aquisição por Título - Anos Finais - PNLD 2020										
Código do Livro	Título	Editora	Tipo	Código	Etapa de Ensino	Ano/Série	Quantidade de Exemplares	Valor Unitário (R\$)	Valor Total (R\$)	
0312P20022008IL	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	45.961	R\$	12,56	R\$ 577.444,81
0022P20022008IL	TRILHAS DA MATEMÁTICA	SARAIVA EDUCACAO S.A.	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	51.281	R\$	12,55	R\$ 643.750,91
0018P20022008IL	GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	52.728	R\$	11,19	R\$ 589.794,32
0373P20022008IL	APOEMA	EDITORA DO BRASIL SA	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	83.002	R\$	10,83	R\$ 898.513,25
0017P20022008IL	MATEMÁTICA ESSENCIAL	EDITORA SCIPIONE S.A.	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	120.775	R\$	12,90	R\$ 1.558.142,43
0303P20022008IL	MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	121.588	R\$	8,80	R\$ 1.069.731,22
0386P20022008IL	MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	125.194	R\$	10,55	R\$ 1.320.170,73
0302P20022008IL	ARARIBÁ MAIS - MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	145.919	R\$	9,95	R\$ 1.452.185,89
0028P20022008IL	MATEMÁTICA - BIANCHINI	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	214.108	R\$	9,28	R\$ 1.987.778,67
0300P20022008IL	TELARIS MATEMÁTICA	EDITORA ATICA S.A.	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	242.418	R\$	10,52	R\$ 2.551.304,00
0377P20022008IL	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	008	Ensino Fundamental	8º Ano	1.201.628	R\$	8,97	R\$ 10.778.603,16

Fonte: Site FNDE/MEC.

### Quadro 13 - Exemplares distribuídos por título do 9º ano.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO										
FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO - FNDE										
Valores de Aquisição por Título - Anos Finais - PNLD 2020										
Código do Livro	Título	Editora	Tipo	Código	Etapa de Ensino	Ano/Série	Quantidade de Exemplares	Valor Unitário (R\$)	Valor Total (R\$)	
0312P20022009IL	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	43.642	R\$	13,22	R\$ 577.078,17
0022P20022009IL	TRILHAS DA MATEMÁTICA	SARAIVA EDUCACAO S.A.	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	48.329	R\$	12,95	R\$ 625.715,56
0018P20022009IL	GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	EDICOES SM LTDA.	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	49.012	R\$	13,31	R\$ 652.467,35
0373P20022009IL	APOEMA	EDITORA DO BRASIL SA	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	78.490	R\$	10,89	R\$ 854.363,65
0017P20022009IL	MATEMÁTICA ESSENCIAL	EDITORA SCIPIONE S.A.	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	112.548	R\$	12,30	R\$ 1.384.588,01
0303P20022009IL	MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	114.554	R\$	11,39	R\$ 1.304.311,84
0386P20022009IL	MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	120.660	R\$	10,57	R\$ 1.275.955,37
0302P20022009IL	ARARIBÁ MAIS - MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	138.389	R\$	9,48	R\$ 1.311.650,94
0028P20022009IL	MATEMÁTICA - BIANCHINI	EDITORA MODERNA LTDA	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	202.225	R\$	10,56	R\$ 2.135.900,45
0300P20022009IL	TELARIS MATEMÁTICA	EDITORA ATICA S.A.	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	228.535	R\$	12,17	R\$ 2.781.682,31
0377P20022009IL	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	EDITORA FTD S A	Livro do aluno	009	Ensino Fundamental	9º Ano	1.116.669	R\$	8,99	R\$ 10.036.620,97

Fonte: Site FNDE/MEC.

Baseado nesses quadros, selecionamos três coleções para serem nossa amostra inicial de pesquisa. A primeira escolha foi a coleção com menor volume de distribuição em território nacional em todos os anos, intitulada Convergências Matemática, da Edições SM. Sua distribuição em número de exemplares foi: 6º ano - 53.698; 7º ano - 49.437; 8º ano - 45.961; e 9º ano - 43.642 unidades. A segunda escolha foi o título Matemática Realidade & Tecnologia, Editora FTD, que teve volume médio de distribuição da ordem de: 6º ano - 141.558; 7º ano - 133.560; 8º ano - 125.194; e 9º ano - 120.660 de exemplares para uso no ano de 2020 em todo o Brasil. A terceira escolha foi a obra de maior volume de distribuição entre as escolas públicas do Brasil, intitulada A Conquista da Matemática, Editora FTD. Sua distribuição foi: 6º ano - 1.402.824; 7º ano - 1.312.410; 8º ano - 1.201.628; e 9º ano - 1.116.669 de exemplares para uso em 2020.

## **5. ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

A análise consistiu em três etapas. Preliminarmente, a análise começou resumindo as características da coleção de livros didáticos como um todo, para dar uma visão geral de sua apresentação, formato e estilo. Assim, esta foi a primeira etapa de análise feita para cada uma das três coleções. Importante ressaltar que, ao longo da primeira etapa de análise, houve um esforço para fazermos a leitura minuciosa de cada livro que se deram em três momentos distintos para leitura e análise. Primeiro, procuramos ler os textos e resolver todas as tarefas de cada livro didático. Depois, refletimos sobre o conteúdo do material didático. E, em um terceiro momento, refletimos em nossa pesquisa em Educação Matemática. Combinamos estes três momentos de leituras, fazendo análises e registros com a orientadora de doutorado.

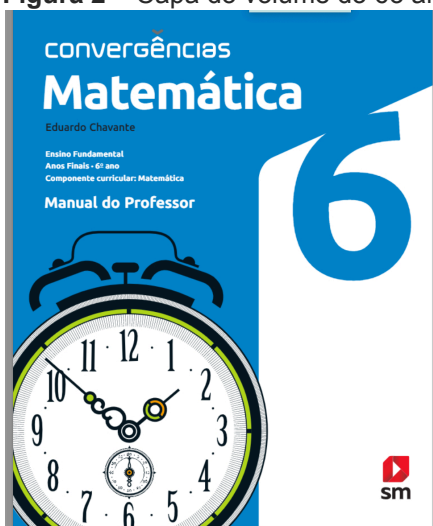
Em seguida, como segunda etapa de análise, foram identificados os capítulos de cada volume das três coleções em análise que abordam especificamente o tópico de razão, proporção e que envolvam o raciocínio proporcional, incluindo ideias como frações equivalentes, porcentagens, escala. Finalmente, numa terceira etapa de análise, os indicadores sugeridos pela metodologia de Shield e Dole (2013) foram usados para analisar as seções selecionadas de cada livro, em busca de evidências relacionadas aos mesmos e para estabelecer o grau de ligação entre os tópicos relacionados. Uma classificação de alta, média, baixa ou nenhuma evidência foi decidida para cada indicador, dependendo da evidência indicada no material. Ao estabelecer as classificações, foram necessárias releituras frequentes dos livros.

## 5.1. Análise da Coleção CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA

### 5.1.1. 1ª etapa de análise feita para a coleção CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA: do 6º ao 9º ano do ensino fundamental

O livro de Matemática com menor distribuição entre as escolas públicas do Brasil pelo PNLD 2020 (BRASIL, 2019) - para os anos finais do ensino fundamental - foi a coleção Convergências Matemáticas (CHAVANTE, 2018). A coleção Convergências Matemática foi publicada pela Editora SM Educação no ano de 2018, e é composta por 4 volumes; sendo cada um destinado a um dos anos finais do ensino fundamental. Assim, os 4 volumes vão do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. O autor, Eduardo Rodrigues Chavante, é licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). É especialista em Mídias

Figura 2 – Capa do volume do 6º ano



Fonte: CHAVANTE, 2018.  
Convergências Matemática. 6º ano.

na Educação pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (Unicentro-PR). Atua como professor de Matemática da rede pública de ensino fundamental e médio e é autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental.

Em cada volume da coleção estão presentes orientações comuns aos quatro livros da coleção. Com o intuito de servir de apoio ao professor e contribuir com a formação dos alunos, são apresentados textos de apoio, atividades complementares, sugestões de avaliação, propostas de integração com outros componentes curriculares e alguns subsídios teórico-metodológicos. O autor traz que a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) é um dos documentos que nortearam as reflexões e a elaboração da obra.

O manual do professor, utilizado em nossa análise, é dividido em duas partes. A primeira apresenta orientações gerais sobre os aspectos teórico-metodológicos que fundamentam a coleção, além da estrutura e organização do livro do aluno e do manual do professor. A segunda parte, chamada de orientações ao professor,

apresenta a reprodução reduzida do livro do aluno, com respostas de algumas seções. Orientações específicas para enriquecer e complementar o trabalho com as páginas são apresentadas nas laterais e rodapés do manual, em formato U.

Os volumes da coleção estão organizados em unidades e capítulos, e os conteúdos em tópicos, considerando as competências e as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) estabelecidas para cada ano. Os conteúdos relacionados à razão, proporção e raciocínio proporcional estão distribuídos nesta coleção, entre os quatro anos finais do ensino fundamental, que vai do 6º ao 9º ano.

### **5.1.2. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 6º ano**

Começamos nossa análise pelo livro do 6º ano. Sua segunda edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 404 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de fração, números decimais e proporcionalidade:

- (1) Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.
- (2) Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.
- (3) Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”.
- (4) Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (5) Números decimais - Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.



- (6) Números decimais - Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.
- (7) Números decimais - Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”.
- (8) Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.
- (9) Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se o plano de fundo para as seguintes habilidades, a saber:

**(EF06MA01<sup>22</sup>)** Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais em sua representação decimal, fazendo uso da reta numérica. **(EF06MA02)** Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária. **(EF06MA11)** Resolver e elaborar

---

<sup>22</sup> Os códigos alfanuméricos servem para identificar os objetivos de aprendizagem da BNCC (BRASIL, 2018). Eles ajudam a contextualizar qual é a etapa de ensino, a faixa etária e o campo de experiência relacionado ao objetivo. No caso, o código EF06MA01 identifica que é a habilidade 01 para o Ensino Fundamental, 6º ano, Matemática.

problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA12)** Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima. **(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. **(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. **(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo. **(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. **(EF06MA29)** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

O capítulo do volume do 6º ano que aborda especificamente fração, razão e proporção é o capítulo 7 - Frações. Neste capítulo são trabalhados os tópicos (a) fração como parte de um inteiro; fração como quociente de uma divisão; fração como razão; leitura de frações; (b) fração de uma quantidade; (c) tipos de fração; (d) frações equivalentes; (e) comparação de frações; (f) adição e subtração de frações; (g) multiplicação de frações; (h) divisão de frações; (i) potências com base fracionária; e (j) porcentagem. Verificamos que o capítulo 7 apresenta 92 atividades que abordam e exploram os tópicos de (a) até (j) citados. Tem-se uma seção que integra o conteúdo matemático com saúde - relaciona os malefícios do tabagismo, evidenciando o uso de porcentagens; e uma seção chamada Verificando Rota, para

averiguar se os conhecimentos apresentados pelos alunos são parecidos com aqueles demonstrados no início da unidade.

Já o capítulo 8 aborda números decimais e operações. Neste capítulo são trabalhados os tópicos (k) relações entre frações decimais e números decimais; (l) relações entre números decimais e frações decimais; (m) números decimais na reta numérica. Verificamos que o capítulo 8 apresenta 20 atividades que abordam e exploram os tópicos de (k), (l) e (m) citados. Tem-se uma seção que integra o conteúdo matemático com educação para o consumo, explorando algumas ações que podem ser tomadas no momento da compra para economizar.

Como ponto de partida, estudamos os capítulos 7 e 8 de forma atenciosa, observando e assimilando o conhecimento ali apresentado. As primeiras análises foram amplas. Foi possível perceber o cuidado do autor em provocar o professor a pensar além da Matemática, ou seja, apontando como conduzir a classe não somente com conteúdo de Matemática, inserindo a interdisciplinaridade. Chavante (2018) relata nas páginas introdutórias que teve a intenção do material contribuir na formação dos alunos, tornando-os aptos a exercerem cidadania de forma crítica e ética, com respeito ao outro e à diversidade. Assim, conforme a **Figura 3**, o livro perpassa o estudo de Matemática e vai além, integrando a Matemática com outras disciplinas do conhecimento, estimula o compartilhamento de ideias, desenvolve a argumentação e o respeito à opinião dos colegas e, também, propicia aos alunos expressarem seus conhecimentos prévios com base nas próprias vivências. Tudo isso contribui para a formação de sujeitos críticos.

No início de cada capítulo, são apresentados os objetivos de cada um. Para o capítulo 7, temos os seguintes objetivos: (a') associar frações às ideias de parte de um inteiro, quociente e razão; (b') ler frações; (c') reconhecer frações próprias, impróprias e aparentes; (d') compreender o conceito de número na forma mista; (e')

**Figura 3 – Habilidades**

- Na atividade **42**, avalie a possibilidade de organizar os alunos em duplas e oriente-os a trocar o problema elaborado para resolver o do colega. Essa ação contempla a **competência específica 8**, ao proporcionar momentos de interação cooperativa, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
- Ainda na atividade **42**, contemplam-se aspectos da habilidade **EF06MA15** ao proporcionar o trabalho com divisões de uma quantidade em partes desiguais. Verifique se, ao elaborar os problemas, os alunos perceberam que, na situação apresentada os amigos comeram partes desiguais da pizza.
- Na atividade **43**, oriente os alunos a construir uma reta graduada dividida em 24 partes iguais, começando no 0 e terminando no 1, contemplando, assim, a habilidade **EF06MA08** ao relacionar as frações envolvidas a pontos na reta numérica.

Fonte: CHAVANTE, 2018. Convergências Matemática. 6º ano.

reconhecer e obter frações equivalentes; (f') simplificar frações e compreender o conceito de fração irredutível; (g') comparar frações com denominadores iguais e diferentes; (h') adicionar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes; (i') multiplicar números naturais por frações e frações por frações; (j') dividir frações por números naturais, e vice-versa, e dividir frações por frações; (k') reconhecer que a porcentagem corresponde a uma fração cujo denominador é 100; (l') calcular a porcentagem de uma quantidade. Para o capítulo 8, tem-se os seguintes objetivos: (m') reconhecer a presença de números decimais em diferentes situações cotidianas; compreender décimos, centésimos e milésimos por meio de frações decimais envolvendo a ideia de parte(s) de um inteiro; (n') relacionar as frações decimais aos números decimais; (o') escrever números decimais a partir de frações; (p) representar números decimais na reta numérica.

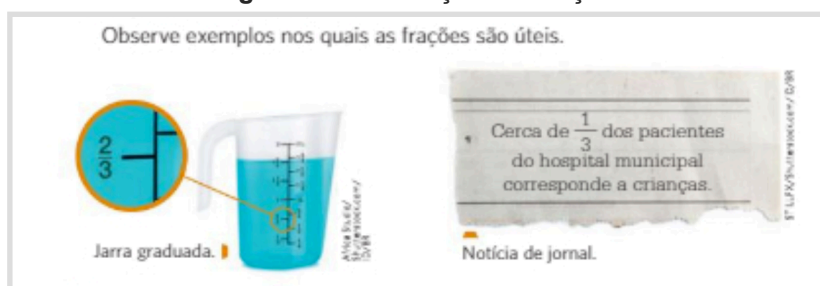
### **5.1.3. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 6º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)**

Considerando as análises da seção anterior, 5.1.2 Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 6º ano, entendemos que este volume do 6º ano irá atender à Chave 4: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Indicadores de que esta meta de aprendizagem atende à Chave 4 é se o material didático: (4.1) exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (4.2) explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo e destaca explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (4.3) sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente). A partir daqui, iniciamos nossas buscas por tais indicativos.

Ao iniciar o capítulo 7, Chavante (2018) traz exemplos nos quais as frações são úteis e sua primeira ilustração é mostrar a origem das frações, quando utilizadas no Egito antigo para auxiliar na demarcação de terras inundadas uma vez por ano pelas cheias do rio Nilo. Em seguida, o autor introduz os conceitos de fração como

parte de um inteiro, fração como quociente de uma divisão, fração como razão e leitura de frações. Estes conceitos representam três significados associados ao número fracionário, que precisam ser aprendidos pelos alunos, conforme apontado pelos pesquisadores nacionais e internacionais durante as últimas 5 décadas. Após introduzir os conceitos, atividades similares ao texto são propostas, indicando média evidência do uso dos indicadores 4.2 da Chave 4 de Shield e Dole (2013).

**Figura 4 – A utilização das frações**



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 122. Convergências Matemática. 6º ano.

**Figura 5 – Fração como parte de um inteiro**

Uma barra de chocolate foi dividida em 24 partes iguais. Depois de serem consumidas 7 partes, a barra ficou como mostra a imagem abaixo. Considerando a barra de chocolate como um inteiro, para representar as partes de chocolate que foram consumidas, utilizamos a seguinte fração:

numerador → 7 quantidade de partes consumidas  
 denominador → 24 quantidade de partes iguais em que a barra de chocolate foi dividida

Nesse caso, a fração  $\frac{7}{24}$  representa a ideia de **parte de um inteiro**.

▶ Que fração da barra de chocolate representa a parte que não foi consumida?

$\frac{17}{24}$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 122. Convergências Matemática. 6º ano.

A seguir, é apresentado e trabalhado por meio de atividades, o conceito de fração de uma quantidade. Também são trabalhadas situações com medidas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo e volume, cujos conceitos já devem ter sido abordados em anos anteriores. Neste ponto, é trabalhado um quarto significado de número fracionário, que é fração como medida (Kieren, 1980; Behr, Lesh, Post e Silver, 1983; Santos, 1993).

Desta forma, nas primeiras páginas do capítulo 7, Chavante (2018) está resgatando conhecimentos prévios de frações, atendendo à Chave 4: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração, e seus indicadores 4.1, 4.2 e 4.3. Este apontamento é baseado por termos encontrado tarefas com ideias de frações e equivalência, por apresentar explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo e, ainda, por destacar distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração, sinalizando claramente o significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente).

Figura 6 – Fração de uma quantidade


**Fração de uma quantidade**

Felícia tem 32 carrinhos em sua coleção. Deles,  $\frac{5}{8}$  ganhou de presente e os demais ela comprou. Para determinar quantos carrinhos Felícia ganhou de presente, calculamos  $\frac{5}{8}$  de 32. Para isso, fazemos o seguinte:

- Organizamos os 32 carrinhos em 8 grupos com a mesma quantidade de carrinhos, pois o denominador da fração  $\frac{5}{8}$  é 8.

$32 : 8 = 4$

Como cada grupo tem 4 carrinhos, então  $\frac{1}{8}$  de 32 é igual a 4.



Para determinar quantos carrinhos correspondem a  $\frac{5}{8}$ , vamos separar 5 grupos de 4 carrinhos cada um.

$5 \cdot 4 = 20$

Portanto,  $\frac{5}{8}$  de 32 é igual a 20, ou seja, do total de sua coleção, Felícia ganhou 20 carrinhos de presente.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 125. Convergências Matemática. 6º ano.

Avançando, Chavante (2018) propõe a(o) professor(a) abordar os diversos tipos de fração para construir seu significado. Segundo o autor, isso contribui para estabelecer, futuramente, as relações entre frações próprias e números decimais entre 0 e 1; frações impróprias e números decimais maiores do que 1; frações aparentes e números naturais.

Figura 7 – Tipos de fração

**Atividades**

14. Classifique cada um dos itens abaixo em fração própria ou fração imprópria.

a)  $\frac{2}{5}$  Fração própria.      d)  $\frac{5}{9}$  Fração própria.

b)  $\frac{7}{4}$  Fração imprópria.      e)  $\frac{8}{6}$  Fração imprópria.

c)  $\frac{10}{2}$  Fração imprópria.      f)  $\frac{20}{4}$  Fração imprópria.

15. Entre as frações abaixo, copie aquelas que representam quantidades menores do que 1.

$\frac{5}{6}$     $\frac{6}{6}$     $\frac{8}{8}$     $\frac{8}{7}$     $\frac{1}{2}$

a) Quais das frações acima são iguais a 1?  $\frac{6}{6}$ ;  $\frac{8}{8}$

b) Quais das frações acima são frações impróprias?  $\frac{8}{7}$ ;  $\frac{10}{6}$

16. Sabendo que as figuras foram divididas em partes iguais, represente, na forma de fração, a parte pintada de azul em cada item a seguir.

A  $\frac{11}{4}$

B  $\frac{10}{4}$

C  $\frac{9}{4}$

D  $\frac{12}{4}$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 129. Convergências Matemática. 6º ano.

A Figura no. 8 traz uma atividade pela qual o autor pretende que os alunos percebam que o ponto B corresponde à fração  $\frac{7}{7} = 1$ ; o ponto C, à fração  $\frac{14}{7} = 2$ ; e o ponto D, à fração  $\frac{21}{7} = 3$ . Esta atividade trabalha a representação de frações na reta numérica, atendendo à Chave 4: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. A representação da fração na reta numerada é de fundamental importância para a compreensão de fração como número.

Figura 8 – Fração na reta numérica

21. No segmento de reta abaixo,  $\frac{2}{7}$  indica uma fração do segmento de reta AB, que representa 1 unidade.

Escreva a fração e o número na forma mista que representam os segmentos de reta indicados a seguir.

a) AF  $\frac{12}{7}$ ;  $1\frac{5}{7}$     b) EF  $\frac{10}{7}$ ;  $1\frac{3}{7}$     c) AG  $\frac{20}{7}$ ;  $2\frac{6}{7}$     d) EG  $\frac{18}{7}$ ;  $2\frac{4}{7}$     e) ED  $\frac{19}{7}$ ;  $2\frac{5}{7}$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 130. Convergências Matemática. 6º ano.

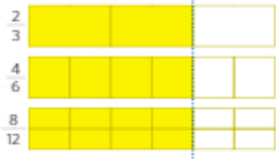
Chavante (2018) prossegue abordando o conceito de equivalência, muito importante no trabalho com frações, complementando com o conceito de simplificação de frações e fração irredutível. Para tanto, o autor estimula os alunos a identificarem a equivalência por meio de representações geométricas e, também, na reta numérica. Neste ponto, as atividades apontam novamente para o uso da Chave

4 neste livro didático, ao exibir conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.

**Figura 9 – Frações equivalentes**


Frações que possuem o mesmo valor em relação a uma mesma unidade são chamadas **frações equivalentes**.

Observe a representação das frações a seguir por meio de figuras divididas em partes iguais.



Observe que a parte que corresponde a  $\frac{2}{3}$  é a mesma que corresponde a  $\frac{4}{6}$  e também a mesma que corresponde a  $\frac{8}{12}$ . Dizemos que  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{6}$  e  $\frac{8}{12}$  são frações equivalentes, isto é,  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ .

Podemos obter diferentes frações equivalentes a partir de uma única fração. Veja como obter frações equivalentes a  $\frac{2}{4}$ , por exemplo.



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 131. Convergências Matemática. 6º ano.


O próximo tópico apresentado no livro do 6º ano de Chavante (2018) é sobre comparação de frações, associando-o às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão. Este tópico também contempla a Chave 4: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Indicadores de que esta meta de aprendizagem atendeu a Chave 4 é pelo material didático explorar explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo e destacar explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração, sinalizando claramente o significado da notação de fração em uso como parte-todo, razão e quociente.

**Figura 10 – Comparação de frações**

**34.** Transforme os pares de frações em frações equivalentes com o mesmo denominador e compare-os, utilizando  $>$  ou  $<$ . *Existem várias respostas para esta atividade. Algumas delas são:*

a)  $\frac{5}{10}$  e  $\frac{9}{10}$       b)  $\frac{5}{49}$  e  $\frac{3}{7}$       c)  $\frac{8}{9}$  e  $\frac{4}{3}$       d)  $\frac{6}{8}$  e  $\frac{7}{8}$

**35.** Observe os segmentos de reta divididos em partes iguais e substitua cada  $\blacksquare$  pelo número adequado.



$BC = \frac{\blacksquare}{3}$        $CD = \frac{4}{\blacksquare}$

Agora, compare as frações que você obteve, utilizando  $>$  ou  $<$ .

**36.** Escreva no caderno as frações abaixo em ordem crescente.

$\frac{5}{12} < \frac{13}{24} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$

$\frac{7}{12}$        $\frac{2}{3}$        $\frac{5}{12}$        $\frac{13}{24}$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 136. Convergências Matemática. 6º ano



Adição e subtração de frações são operações matemáticas que realizamos, assim como resolvemos cálculos usando números naturais. Todavia, elas são possíveis de ser realizadas apenas no caso de as frações serem do mesmo “tipo”, ou seja, com o mesmo denominador. Quando temos frações com denominadores diferentes, a orientação é escrever frações equivalentes às frações dadas, reduzindo-as ao mesmo denominador. Em seguida, realizamos a adição ou a subtração das frações equivalentes. Para trabalhar com os alunos o conteúdo de adição e subtração de frações, o autor incentiva explorar a representação fracionária por meio de figuras geométricas.

Ele também estimula o professor à provocar os alunos a observarem os conhecimentos anteriores já estudados sobre adição, subtração e equivalência. Nesta seção, 12 atividades são propostas para solidificar tais conceitos. Chavante (2018) sempre retorna ao professor com um lembrete de orientar os alunos a escreverem frações equivalentes às dadas, reduzindo-as ao mesmo denominador.

Avançando, Chavante (2018) trabalha a multiplicação e a divisão de frações. Ele apresenta que a operação de multiplicação pode ser entendida como uma soma de parcelas iguais ou utilizando algumas ideias associadas à multiplicação com números naturais. O autor também tem a preocupação de reforçar aos alunos que a simplificação das frações antes da multiplicação ajuda a reduzir a quantidade de cálculos com números maiores, tornando a operação mais ágil. No trabalho com a divisão de frações, a sugestão do autor é destacar a ideia de “quanto cabe” relacionada a essa operação, considerando divisão como medida. Ainda, estimula que o (a) professor(a) instigue o aluno a perceber que dividir um número por 2 equivale a multiplicá-lo por  $\frac{1}{2}$ ; o mesmo acontece quando se fala a terça parte, a quarta parte, etc.

Neste tópico, ao trazer que multiplicação e divisão são operações inversas, identificamos o uso do indicador 2.2 da Chave 2 de Shield e Dole (2013). O autor também incentiva a representação da situação de multiplicação e de divisão por meio de figuras geométricas, a fim de determinar a fração solicitada. Ele também incentiva o(a) professor(a) a auxiliar os alunos a compreenderem o significado dessas operações, estimulando-os(as) a estabelecerem relações entre a representação das frações envolvidas e os procedimentos dos cálculos.

**Figura 11** – Divisão de frações

- No trabalho com a divisão de frações, procure destacar a ideia de "quanto cabe" relacionada a essa operação. Assim, por exemplo, o fato de que em um inteiro cabe quatro vezes a fração  $\frac{1}{4}$  pode ser explorado considerando esse inteiro, como o metro, o real, ou ainda o litro, e associando a cada uma dessas situações o valor correspondente à fração indicada.
- Na questão 1, incentive os alunos a representar geometricamente a divisão entre fração e número natural, a fim de que consigam determinar a fração solicitada.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 145. *Convergências Matemática. 6º ano*

Conforme detalhamos anteriormente, Chavante (2018) trabalha as operações com frações, como adição, subtração, multiplicação e divisão, resgatando os significados de cálculos já estudados em anos anteriores, ou seja, ele introduz esses conceitos considerando os conhecimentos prévios dos alunos sobre as operações matemáticas básicas. Isso novamente reforça o uso da Chave 4 e de seus indicadores.

Prosseguindo, encontramos a seção sobre potências com base fracionária. Em capítulo anterior desse mesmo volume do 6º ano, foi estudado sobre como calcular potência cuja base é um número natural. Ele ressalta o significado de potenciação como multiplicação de fatores iguais. Agora, o autor vai retomar tais ideias e introduzir que os cálculos de potências cujas bases são números na forma de fração são validados pelas mesmas regras dos números naturais. Nesse caso, para as potências com base fracionária, tanto o numerador quanto o denominador são elevados ao mesmo expoente.

O último tópico do capítulo 7 é sobre porcentagem e vai trabalhar a resolução e a elaboração de problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade em relação a uma fração decimal cujo denominador é igual a 100. A sugestão de Chavante (2018) é que o(a) professor(a) estimule os alunos a associarem a porcentagem com sua forma fracionária, ou seja, representar 50% com a ideia de metade ( $\frac{1}{2}$ ); 75% com a ideia de  $\frac{3}{4}$ ; a fração  $\frac{1}{4}$  com a ideia de uma de quatro partes, logo, 25%. O autor também incentiva explorar a construção de estratégias apoiadas na ideia de proporcionalidade para o cálculo de porcentagens e fazer uso da calculadora como ferramenta para cálculo de porcentagens.

Adiante, apresentamos o Quadro 14, com os resultados da análise desse livro do 6º ano. Os resultados estão organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013). Nesta coleção de livro didático, a proporção somente será introduzida no próximo volume, do 7º ano; e a proporcionalidade no 8º ano.

**Quadro 14** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 6º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018)

<b>Livro: CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 6º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Média	Figura 11
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Alta	Figura 9
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Média	Figuras 4, 5 e 8
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Média	Figuras 8, 10
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	-
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	-
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

#### **5.1.4. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 7º ano**

As primeiras análises do livro do 7º ano de Chavante (2018) foram de um material com muito conteúdo sobre o nosso tema de pesquisa. Sua segunda edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 356 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de números racionais, razão e proporção:

- (1) Números racionais: frações e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (2) Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.
- (3) Operações com números racionais: fração e seus significados como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (4) Operações com números racionais: números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.
- (5) Expressões algébricas, equações e inequações: fração e seus significados como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (6) Razão e proporção: cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples.
- (7) Razão e proporção: fração e seus significados como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (8) Razão e proporção: problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante

as aulas de Matemática, tem-se o plano de fundo para as seguintes habilidades, a saber:

**(EF07MA02)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

**(EF07MA05)** Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão (porcentagem, razão entre as partes de um todo e probabilidade) e operador.

**(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

**(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

**(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

**(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração  $\frac{2}{3}$  para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

**(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

**(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo para expressar a relação entre duas grandezas.

**(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas artes e na literatura.

**(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

**(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma  $ax + b = c$ , fazendo uso das propriedades da igualdade.

Os capítulos do volume do 7º ano que abordam especificamente número racional são os capítulos 4, 5 e 7. Nos capítulos 4 e 5 são trabalhados os tópicos (a) frações e seus significados; (b) forma fracionária, forma decimal e porcentagem; (c) números racionais na reta numérica; (d) dízima periódica; (e) adição e subtração com números racionais; (f) multiplicação com números racionais; (g) divisão com números racionais; (h) potenciação com números racionais na base; (i) raiz quadrada de números racionais.

Assim, verificamos que os capítulos 4 e 5 apresentam 34 e 63 atividades respectivamente, que abordam e exploram os tópicos de (a) até (i) citados. Ao final desses capítulos, têm-se seções para integrar o conteúdo matemático com outras áreas, a saber: educação financeira - por que usamos dinheiro? E campanha do agasalho relacionando aos direitos humanos. Também, há uma seção chamada Verificando Rota concluindo cada capítulo, que averigua se os conhecimentos apresentados pelos alunos são parecidos com aqueles demonstrados no início da unidade, fazendo revisão do que foi estudado no capítulo. Essa estratégia permite trabalhar o conteúdo de forma não fragmentada, oportunizando meios de resolução de tarefas com associação dos conteúdos já estudados. Já o capítulo 7 aborda razão e proporção. Neste capítulo são trabalhados os tópicos (j) razão; (k) proporção; (l) grandezas diretamente proporcionais; (m) grandezas inversamente proporcionais; e (n) grandezas não proporcionais. Verificamos que o capítulo 7 apresenta 31 atividades que abordam e exploram os tópicos de (j) até (n) citados.

Como ponto de partida, estudamos os capítulos 4, 5 e 7 com uma lente de aumento para analisar o raciocínio proporcional construído ao longo das seções apresentadas por meio das diversas representações e usos dos números racionais. As primeiras análises demonstraram preocupação em trazer uma gama de ideias e exemplos ilustrativos para ampliar a compreensão dos alunos.

No início de cada capítulo, são introduzidos os objetivos de cada um. Para o capítulo 4, temos os seguintes objetivos: (a') reconhecer as diversas representações de números racionais; (b') compreender significados das frações: parte de um inteiro, quociente de uma divisão, razão e operador; (c') representar números racionais na reta numérica; (d') determinar o módulo e o simétrico de números racionais; (e') identificar números que são dízimas periódicas e o seu período; (f')

determinar a fração geratriz de uma dízima periódica. Para o capítulo 5, temos os objetivos: (g') efetuar adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais; (h') determinar potências com números racionais na base; (i') calcular raiz quadrada de números racionais; (j') identificar números racionais quadrados perfeitos; (k') resolver expressões numéricas com números racionais; (l') resolver problemas contextualizados que envolvam operações com números racionais. Para o capítulo 7, tem-se os seguintes objetivos: (m') compreender a ideia de razão como o quociente entre os números que expressam as medidas de duas grandezas de mesma natureza, em uma mesma unidade de medida; (n') resolver e elaborar problemas que envolvam a ideia de razão em diferentes contextos; (o') compreender a ideia de proporção como uma igualdade entre duas ou mais razões; (p') compreender o conceito de grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais e distingui-las; (q') compreender o conceito de grandezas não proporcionais; (r') resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas.

#### **5.1.5. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 7º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)**

Mediante o que encontramos ao iniciar as etapas de análises dos capítulos do volume do 7º ano no tópico anterior, Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 1ª e 2ª etapas de análise do livro do 7º ano, é esperado encontrar tarefas que venham atender, ao menos, às: (a) Chave 1: objetivo de aprendizagem 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa; e (b) Chave 2: objetivo de aprendizagem 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção. Nesta busca, iniciamos a 3ª etapa das análises deste volume e a seguir apresentamos o que encontramos.

Inicialmente, Chavante (2018) introduz o capítulo 4 trazendo quatro dos significados de frações. Essa abordagem vai de encontro ao que os diversos autores nacionais e internacionais apontam para o estudo de números racionais. Kieren (1980) indicou cinco ideias básicas para a compreensão dos números racionais, sendo elas, parte/todo, quociente, medida, operador e razão. Também foi estudado

por Quaresma e Ponte (2012); e, em conformidade com Kieren (1980), ressaltaram que números racionais possuem um conceito multifacetado, apresentando cinco significados diferentes - parte/todo, quociente, medida, operador e razão. Neste livro, Chavante (2018) ressaltou quatro dos conceitos de números racionais dado por tais autores, relacionando à parte-todo, quociente de uma divisão, razão e operador; ou seja, o autor não trouxe neste momento a ideia de fração como medida. Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983), os números racionais podem ser interpretados por, pelo menos, estas seis maneiras: uma comparação de parte para todo, um decimal, uma razão, uma divisão indicada (quociente), um operador e uma medida de quantidades contínuas ou discretas. Para esses pesquisadores americanos, houve um destaque para os números decimais. Contudo, entendemos que os números decimais vão se distinguir dos outros números fracionários somente pela base 10, configurando as mesmas propriedades dos outros cinco significados. Assim, os autores que não fazem a distinção de representação decimal não o fazem por considerá-los sendo fração como outra qualquer; e quem o faz escolhe denotar a base 10, e o consideram dentro dos cinco significados de números racionais.

As primeiras atividades são com o objetivo de trabalhar com frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Também são utilizados problemas que associam razão e fração. Ainda, apresentam uma dica orientadora para trabalhar o assunto com os alunos, como mostra a **Figura 12**. Nesta introdução, temos a utilização da Chave 4, caracterizada por ser feita conexão explícita com o conhecimento da fração, exibindo conexões explícitas com ideias de fração e equivalência, além de trazer explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração. Em seguida, o autor introduz números racionais na reta numerada, e vai envolver comparação e ordenação de números racionais, além de associá-los na reta numérica. Diante da complexidade de se indicar na reta numérica os números racionais que não são inteiros, o autor leva o aluno a pensar entre quais números

**Figura 12** – Números racionais

**Dica**

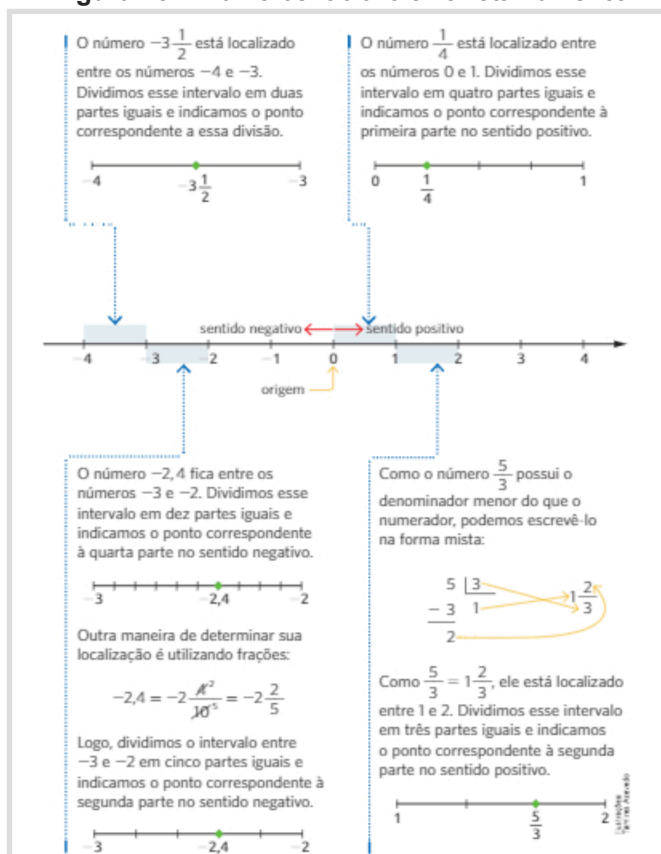
- Antes de iniciar este tópico, converse com os alunos a respeito dos números nas formas decimal, fracionária e de porcentagem. Se achar conveniente, escreva na lousa os números  $\frac{1}{2}$ , 0,5 e 50% e, em seguida, pergunte se eles identificam alguma relação entre esses números, com a intenção de perceberem que são equivalentes. Depois, pergunte em quais situações eles já viram esses números, explorando o conhecimento prévio dos alunos a respeito desse assunto.

Fonte: CHAVANTE, 2018. *Convergências Matemática*. 7º ano



inteiros esses números racionais estão, ajudando-o na resolução das atividades propostas que requerem associar os números apresentados a pontos da reta. Neste tópico, também são apresentados números racionais que não são inteiros e números decimais. Para concluir o capítulo 4, Chavante (2018) apresenta o tópico dízima periódica e fração geratriz.

**Figura 13 – Números racionais na reta numérica**



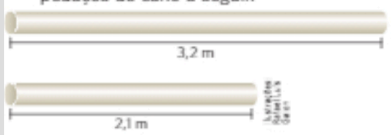
Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 60. Convergências Matemática. 7º ano

Já o capítulo seguinte, aborda operações com números racionais na representação fracionária e na decimal, por meio de situações em diversos contextos. Para introduzir, o autor apresenta situações que propiciam retomar algumas ideias fundamentais da adição e da subtração envolvendo números inteiros, números na forma decimal e números na forma fracionária, que são utilizadas no decorrer do capítulo. De fato, nas operações com números racionais, utilizamos o que aprendemos com as operações envolvendo números na forma fracionária, números na forma decimal e números inteiros. Chavante (2018) também incentiva os professores a discutirem com os alunos possibilidades de resolver um mesmo problema de diferentes maneiras. Diversas atividades são propostas, com variadas abordagens sobre o assunto. Inicialmente, o autor vai trabalhar adição e

subtração. O autor sugere que o professor inicie o trabalho deste tópico explorando, de maneira intuitiva, algumas operações envolvendo números racionais expressos na forma decimal. Também, é recomendado ao professor refazer os cálculos passo a passo com os alunos, resgatando algumas ideias fundamentais de adição e subtração. Ainda, Chavante (2018) vai trabalhar a comparação e ordenação de números racionais expressos na forma fracionária, podendo associá-los a pontos da reta numérica, como também vai trabalhar a ideia de frações associadas a partes de inteiros. A seguir, apresentamos uma atividade que permite que os alunos resolvam o problema por meio de diferentes algoritmos e que reconheçam que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

**Figura 14** – Operações com números racionais

2. Ângelo vai instalar duas torneiras. Para realizar esse serviço, ele vai precisar dos pedaços de cano a seguir.



a) Quantos metros de cano ele vai utilizar para instalar essas torneiras? **5,3 m**

b) Se ele comprar um cano com 6 metros de medida de comprimento, qual será a medida do comprimento do cano que vai sobrar, considerando que não haja desperdício? **0,7 m**

c) Supondo que as medidas de comprimento dos canos fossem dadas na forma de fração, ou seja,  $\frac{32}{10}$  m e  $\frac{21}{10}$  m, resolva os itens **a** e **b** e verifique se os resultados são equivalentes.  
**Os resultados são equivalentes.**

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 67. Convergências Matemática. 7º ano

Prosseguindo, é introduzida a multiplicação com números racionais, cuja abordagem dada à adição e à subtração se repete aqui, que é de explorar diferentes maneiras de se resolver o mesmo problema; na situação em questão, a mesma multiplicação. Assim, por todo o capítulo, serão exploradas diferentes maneiras de resolver a mesma multiplicação. Para ampliar a compreensão, o autor propõe retomar os significados da operação de multiplicação e suas propriedades operatórias já estudadas anteriormente, discutindo a validade dessas propriedades para o caso dos números racionais.

**Figura 15** – Operações com números racionais

**24.** Para cada item, pense em um número racional e escreva no caderno o cálculo correspondente. *Respostas pessoais.*

a) Adicione 15 ao triplo do número em que você pensou e multiplique por 7 o resultado obtido.

b) Multiplique o número em que você pensou por  $-2,4$  e adicione 10. Multiplique o resultado obtido por 2.

c) Multiplique o número em que você pensou por  $\frac{2}{3}$ . Subtraia 20 do resultado obtido.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 67. Convergências Matemática. 7º ano

Para as operações de divisão com números racionais, Chavante (2018) propõe que o professor amplie a discussão com os alunos no sentido de retomar os significados da operação de divisão e suas propriedades operatórias, bem como as relações entre as operações de multiplicação e divisão já estudadas anteriormente. O autor também sugere retomar os procedimentos da divisão de duas frações, também já conhecidas. Neste ponto, é destacado que as operações de multiplicação e divisão são operações inversas, o que traz alta evidência do indicador 2.2 da Chave 2, o qual estabelece ressaltar que as operações de multiplicação e divisão são operações inversas, corroborando para a identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção. Assim, apesar de ainda não ser conceituado e trabalhado proporção propriamente dita, já vimos a base do conhecimento como alicerce para a construção do raciocínio proporcional.

**Figura 16** – Operações com números racionais - multiplicação e divisão

**39.** Determine o valor desconhecido nos esquemas a seguir.

a)  $\begin{array}{ccc} & : (-2) & \\ 16 & \boxed{\phantom{00}} & -8 \\ & \cdot (-2) & \end{array}$

b)  $\begin{array}{ccc} & : (-9,4) & \\ -47 & \boxed{\phantom{00}} & 5 \\ & \cdot (-9,4) & \end{array}$

**DICA!**  
Para resolver esta atividade, lembre-se de que a multiplicação e a divisão são operações inversas.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 75. Convergências Matemática. 7º ano


Finalizando o capítulo 5, o autor também trabalha os conteúdos de potenciação e raiz quadrada de números racionais, mantendo a mesma abordagem dada às operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão de

números racionais, retomando as propriedades de cada operação e permitindo explorar de diversas formas as possíveis resoluções de problemas semelhantes.

Figura 18 - Operações com números racionais

Figura 17 – Operações com números racionais

7. O desenho abaixo representa um terreno de forma retangular que Mário comprou. Nesse desenho a medida de 1 cm de comprimento corresponde a 500 cm na realidade.



Quais são, em metros, as medidas das dimensões reais desse terreno? **15 m x 30 m**

8. Para regar um jardim, um jardineiro adiciona 5 mL de um produto contra pragas em 10 litros de água. Calcule quantos litros de água são necessários para misturar as seguintes quantidades desse produto:

a) 10 mL **20 L**   b) 25 mL **50 L**   c) 100 mL **200 L**

Se em um recipiente há 150 L de água, quantos mililitros do produto contra pragas o jardineiro deve usar para misturar corretamente todo o conteúdo do recipiente? **75 mL**

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 74.  
Convergências Matemática. 7º ano

37. Quantos copos de 0,25 L é possível encher com o suco da caixa? **6 copos.**



38. Um óleo é envasado em recipientes de  $\frac{1}{600}$  da medida da capacidade total do reservatório da máquina distribuidora. Se em determinado dia a máquina distribuidora estiver com apenas  $\frac{1}{4}$  da medida de sua capacidade total, quantos recipientes serão envasados com óleo? **150 recipientes.**

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 74.  
Convergências Matemática. 7º ano

Pelo avaliado, o capítulo 5 trabalha bem os conhecimentos prévios dos alunos, com alta evidência de uso da Chave 4 proposta por Shield e Dole (2013), e preparando a base de conhecimento dos alunos para adentrar aos conteúdos de razão e proporção a serem desenvolvidos no capítulo 7 deste livro do 7º ano, o qual passamos a analisar a seguir.

De maneira bem direta, o autor inicia o tópico de razão e proporção afirmando que “Neste capítulo, você vai estudar as ideias de razão e de proporção que estão envolvidas em diferentes situações do nosso dia a dia” (CHAVANTE, 2018, p. 116). Lemos isso como um anúncio de que será feita uma abordagem de situações autênticas da vida real. De fato, foi possível encontrar, nas primeiras páginas do capítulo, contextos de problemas que parecem representar um uso autêntico de razão ou taxa, sob o olhar de uma pessoa jovem, cujos interesses vão ao encontro dos exemplos a seguir.

Figura 19 – Uso autêntico de razão

7. Alfredo comprou três jogos de videogame em uma promoção na qual cada jogo estava com R\$ 35,00 de desconto. O preço de cada jogo antes da promoção era R\$ 140,00.



**Porcentagem** é uma razão que compara grandezas de mesma natureza e representa a parte considerada em um total de 100 partes iguais.

Nesse caso, temos:

- valor do desconto: R\$ 35,00;
- preço antigo: R\$ 140,00.

Veja abaixo como Alfredo calculou o desconto de cada jogo em porcentagem.




A razão entre o valor do desconto e o preço antigo é:

$$\frac{35}{140} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 118. *Convergências Matemática. 7º ano*

Figura 20 – Uso autêntico de razão

11. Laura estava brincando em uma piscina de bolinhas e separou 10 bolinhas nas seguintes cores:



a) Qual é a razão que representa a quantidade de bolinhas azuis em relação ao total de bolinhas separadas por Laura?  $\frac{4}{10}$

b) A razão que você escreveu no item anterior representa qual porcentagem? 40%

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 119. *Convergências Matemática. 7º ano*

Ao trazer a conceituação de razão, Chavante (2018) exemplifica a relação comparativa multiplicativa de situações de razão. Isto vai nos trazer uma média evidência do uso da Chave 2, pelo uso do indicador 2.1 - define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão. Veja a ilustração a seguir.

Figura 21 – Relação multiplicativa de razão

**Razão**

Mateus realizou uma viagem de automóvel até Natal, capital do estado do Rio Grande do Norte. Para isso, ele completou o tanque de gasolina de seu automóvel, cuja medida da distância percorrida com 1 L de gasolina é cerca de 12 km. Com essas informações, podemos construir o quadro ao lado.

Quantidade de gasolina (L)	Medida da distância percorrida (km)
1	12
2	24
3	36
4	48
...	...

A grandeza “quantidade de gasolina” varia de acordo com a grandeza “distância percorrida”. Representando as informações por meio de razões, temos:

1 L para 12 km	2 L para 24 km	3 L para 36 km	4 L para 48 km
$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{4}{48} = \frac{1}{12}$

Chamamos **grandeza** tudo o que pode ser medido ou contado.

Qual é a medida da distância que esse automóvel percorre com 10 L de gasolina? **Cerca de 120 km.**

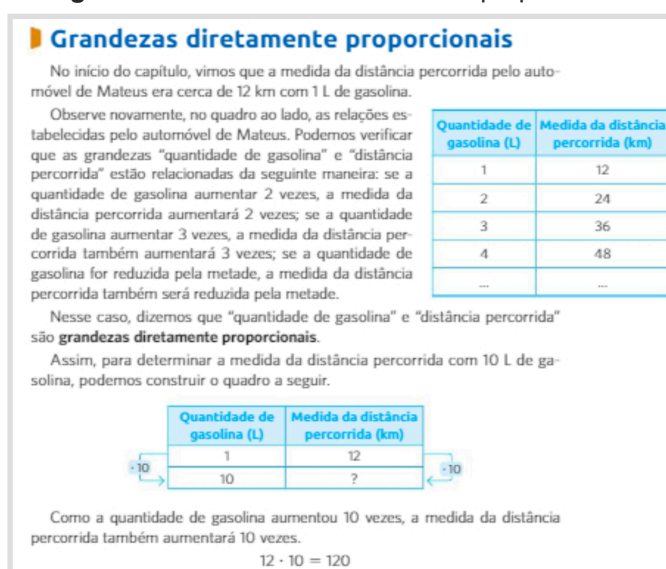
Nessa situação, a quantidade de gasolina e a medida da distância percorrida mudam, mas a razão entre essas grandezas é sempre  $\frac{1}{12}$ , ou 1 : 12. Lemos: 1 L de gasolina está para cada 12 km, ou, simplesmente, 1 está para 12.

A **razão** entre os números x e y, com y ≠ 0, é dada por  $\frac{x}{y}$  ou por x : y.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 116. *Convergências Matemática. 7º ano*

Já a ideia de proporcionalidade é apresentada nas páginas deste capítulo por meio de diversas situações cotidianas, exercitando a curiosidade e a aplicação do conteúdo no dia a dia. Contudo, são contextos ocasionais, e não podemos afirmar que as situações sejam autênticas. Para este tópico, novamente será retomado o conceito de frações equivalentes, estudado em anos anteriores, reforçando o uso da Chave 4. Avançando, o autor vai explorar a relação de proporção existente entre esses tipos de frações e introduzir grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, como o uso de sentença algébrica para expressar a relação entre elas. Para tanto, Chavante (2018) vai explicitar a relação multiplicativa em situações proporcionais, conforme o identificador 1.2 da Chave 1 de Shield e Dole (2013).

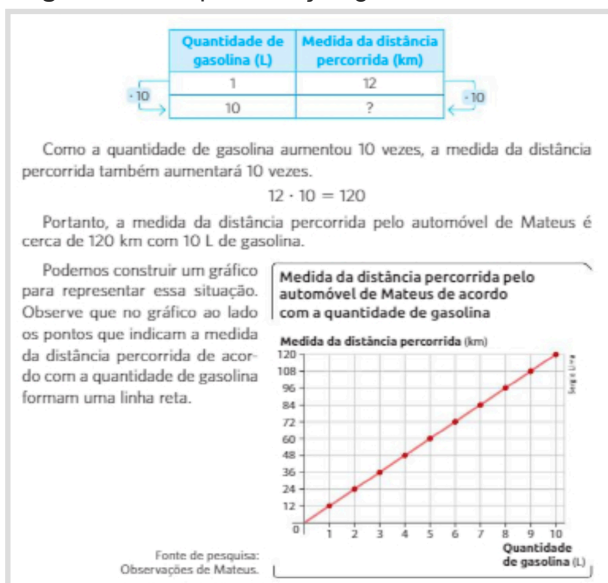
**Figura 22 – Grandezas diretamente proporcionais**



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 121. Convergências Matemática. 7º ano

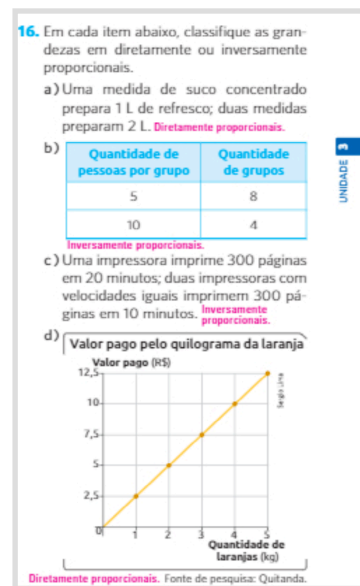
Pela Figura 23, temos uma tabela e uma representação gráfica do uso de proporção. Por meio do gráfico, temos a ilustração de que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem. Assim, essa figura vai atender simultaneamente, com baixa evidência, a dois indicadores da Chave 5, que são: (5.1) utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas; e (5.2) mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem. A Figura 24 é o recorte de uma tarefa onde temos a imagem de um gráfico com uma reta passando pela origem, reforçando se tratar de uma situação proporcional.

Figura 23 – Representação gráfica de



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 121. Convergências Matemática. 7º ano

Figura 24 – Gráfico de situação proporcional



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 123. Convergências

A seguir, apresentamos o Quadro 15, com os resultados da análise deste livro do 7º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 15** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 7º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018)

<b>Livro: CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 7º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Baixa	Figura 22
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Média	Figura 21
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Alta	Figura 16
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Alta	Capítulo 5 do livro
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Alta	Capítulo 5 do livro
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Alta	Capítulo 5 do livro
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Baixa	Figura 23
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Baixa	Figura 23, 24
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.



### **5.1.6. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 8º ano**

O livro do 8º ano de Chavante (2018) aborda uma variedade de conteúdos que fazem parte do nosso objeto matemático de estudo. A segunda edição do Manual do Professor, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 356 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de razão e proporção:

- (1) Porcentagens: cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples; problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos.
- (2) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais - problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
- (3) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais - razão entre grandezas de espécies diferentes.
- (4) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais - grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
- (5) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais - relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo.
- (6) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais - relações métricas no triângulo retângulo.
- (7) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais - retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante

as aulas de Matemática, tem-se o plano de fundo para as seguintes habilidades, a saber:

**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais. **(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

O capítulo do volume do 8º ano que aborda especificamente razão e proporção é o capítulo 12. Nesse capítulo, são trabalhados os tópicos (a) razão; (b) proporção; (c) grandezas proporcionais; (d) grandezas não proporcionais; (e) regra de três simples. Também, verificamos que o capítulo 12 apresenta 52 atividades, que abordam e exploram os tópicos de (a) até (e) citados. Ao final desse capítulo, tem-se uma seção chamada Vamos Relembrar, que além de averiguar se os conhecimentos apresentados pelos alunos são parecidos com aqueles demonstrados no início da unidade, também pode ser usada como estratégia de avaliação sobre o conteúdo estudado neste capítulo.

Como ponto de partida, estudamos o capítulo 12 com o intuito de analisar o conteúdo de razão e proporção construído ao longo das seções apresentadas. As primeiras determinações feitas pelo autor é de que, neste volume, serão lembrados tópicos estudados no volume anterior sobre razão e proporção, além de ampliar os conhecimentos sobre esses conceitos. Também, será estudado um método para resolver problemas que envolvem grandezas proporcionais.

No início do capítulo, são apresentados os seus objetivos. A saber: (a') compreender a ideia de razão como o quociente entre dois números que expressam as medidas de duas grandezas; (b') compreender a ideia de proporção como uma igualdade entre duas ou mais razões; (c') conhecer a propriedade fundamental das proporções; (d') compreender e distinguir os conceitos de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais; (e') compreender o conceito de grandezas não proporcionais; (f') identificar se a variação de duas grandezas é

diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional; (g') expressar por meio de sentença algébrica a relação existente entre duas grandezas e representá-la no plano cartesiano; (h') resolver e elaborar problemas envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais, utilizando estratégias variadas; (i') compreender conceito de regra de três simples envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais; (j') resolver problemas, por meio de regra de três simples, envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais; e (k') resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagem.

### 5.1.7. Análise do livro **CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 8º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)**

O capítulo 12 inicia com a conceituação de razão e de proporção, que é um resgate de conhecimentos anteriores. Pela Figura 25, temos a ilustração do autor mostrando quando uma razão é equivalente a uma proporção.

**Figura 25 – Definição de razão**

Quando duas razões são iguais, elas formam uma proporção. Portanto, se a razão entre os números não nulos  $a$  e  $b$  é igual à razão entre os números não nulos  $c$  e  $d$ , dizemos que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  é uma **proporção**.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 220. Convergências Matemática. 8º ano

A Chave 2 de Shield e Dole (2013) requer que o livro didático explore de várias formas situações que cheguem à ideia de razão. Ao trazer como as quantidades se relacionam umas com as outras, temos evidência do uso dessa chave. Todavia, por não explicitar que a relação multiplicativa está presente em todas as situações de razão, entendemos como uma baixa evidência do uso do indicador (2.1) - define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão. Em seguida, é feita apresentação e demonstração da propriedade fundamental das proporções, conforme Figura 26.

**Figura 26** – Propriedade fundamental das proporções

Calculando os produtos entre o numerador de uma fração e o denominador de outra na proporção  $\frac{10}{15} = \frac{12}{18}$ , temos:

$$\frac{10}{15} = \frac{12}{18}$$

$$12 \cdot 15 = 10 \cdot 18$$

$$180 = 180$$

Nesse caso, ambas as multiplicações apresentam os mesmos produtos, e isso ocorre sempre que as razões formarem uma proporção.

Em toda proporção  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , com os números não nulos  $a, b, c, d$ , temos  $a \cdot d = b \cdot c$ . Temos também que, se  $a, b, c, d$  são números não nulos, tais que  $a \cdot d = b \cdot c$ , então  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  é uma proporção. Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental das proporções**.

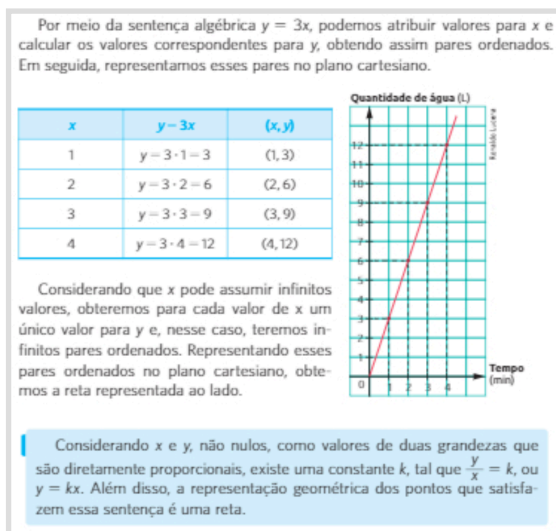
Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 220. Convergências Matemática. 8º ano

Avançando, Chavante (2018) vai trazer as situações de grandezas proporcionais. No volume anterior, foi apresentado que duas grandezas podem ser diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais. Neste volume, além de resgatar a natureza da variação de duas grandezas estudadas anteriormente, está sendo introduzida a relação existente entre elas por meio de uma sentença algébrica. Neste sentido, aos alunos é ensinado que existe uma constante  $k$ , tal que  $y/x = k$ , quando duas grandezas são diretamente proporcionais; como também existe uma constante  $k$ , tal que  $y \cdot x = k$ , ou  $y = k/x$ , quando duas grandezas são inversamente proporcionais. Então, de forma implícita, é trazida a relação multiplicativa em situações proporcionais, sem apresentar oportunidades para o aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas. Assim, conforme as Figuras 27 e 28, temos uma baixa evidência do indicador 1.2 da Chave 1 de Shield e Dole (2013), que se refere a explicitar a relação multiplicativa em situações proporcionais. Ainda, pelo exemplo da Figura 27, encontramos alta evidência de dois indicadores da Chave 5, a saber: (5.1) utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas; e (5.2) mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.

Chavante (2018) também apresenta exemplos e exercícios em comparações autênticas, que propiciam a contextualização, ao trabalhar situações proporcionais. Contudo, as situações apresentadas não trazem oportunidades para o aluno diferenciar entre comparações aditivas e relações multiplicativas. Desta forma, apontamos para uma baixa evidência de uso do indicador (1.3) da Chave 1 -

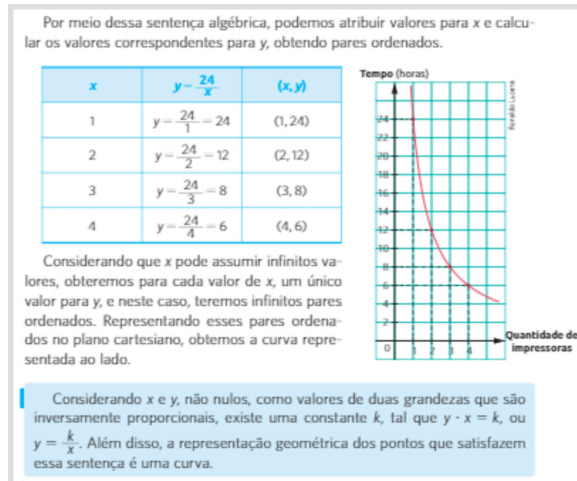
usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.

Figura 27 – Grandezas diretamente proporcionais



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 222.  
Convergências Matemática. 8º ano

Figura 28 – Grandezas inversamente proporcionais



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 223.  
Convergências Matemática. 8º ano

Figura 29 – Exercícios com contextualização

43. Talita quer fazer biscoitos para servir para seus familiares. A receita que ela vai seguir, pede 4 ovos, 3 colheres de sopa de farinha de trigo, 2 colheres de sopa de manteiga, entre outros ingredientes.  
Se Talita utilizar:
- 12 ovos, quantas colheres de sopa de farinha de trigo ela precisará? **9 colheres de sopa de farinha de trigo.**
  - 1 colher de sopa de manteiga, de quantos ovos ela precisará? **2 ovos.**
  - 4,5 colheres de sopa de farinha de trigo, de quantas colheres de sopa de manteiga ela precisará? **3 colheres de sopa de manteiga.**
44. Para lavar sua garagem, Hélio usa 4 baldes com 15 L de água cada. Nesse processo, ele dilui na água 40 mL de um produto de limpeza, medida de uma tampinha da embalagem, para cada 5 L.
- Quantas tampinhas do produto de limpeza Hélio deve utilizar, de acordo com as recomendações, para lavar sua garagem? **12 tampinhas.**
  - Quantos mililitros de produto foram utilizados para essa limpeza? **480 mL.**
45. Adriano está economizando dinheiro para comprar um celular. Ele verificou que se poupasse R\$ 7,00 por dia, durante 12 semanas, teria a quantia necessária para comprar o celular do modelo que pretende. Quantos reais ele deve poupar diariamente para comprar o mesmo celular em 10 semanas? **R\$ 8,40**

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 234. Convergências Matemática. 8º ano

O tópico que vai concluir o capítulo é regra de três simples, apresentado por Chavante (2018) como uma método utilizado para resolver problemas que envolvem grandezas proporcionais. Todavia, a Chave 3 da estrutura de Shield e Dole (2013) orienta que seja adiada a introdução da equação de proporção, a regra de três, até

que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes. Esta recomendação permite que sejam desenvolvidos o raciocínio proporcional, a intuição e o entendimento sobre as estruturas comparativas aditivas e as relações multiplicativas.

Finalizando, temos o Quadro 16, onde trazemos os resultados da análise deste livro do 8º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 16** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 8º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018)

<b>Livro: CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 8º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Baixa	Figuras 27, 28
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Baixa	Figura 29
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Baixa	Figura 25
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Nenhuma	-
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Nenhuma	-
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Alta	Figura 27
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Alta	Figura 27
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.1.8. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 9º ano

Finalizando a coleção Convergências Matemática, temos o livro do 9º ano de Chavante (2018). A segunda edição do Manual do Professor, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 372 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Razão entre grandezas de espécies diferentes: associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.
- (2) Razão entre grandezas de espécies diferentes: variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.
- (3) Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais: variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se o plano de fundo para as seguintes habilidades, a saber:

**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. **(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

O capítulo do volume do 9º ano que aborda especificamente razão e proporção é o capítulo 5. Nesse capítulo, são trabalhados os tópicos (a) razão; (b) proporção; e (c) regra de três composta. Também, verificamos que o capítulo 5 apresenta 51 atividades, que abordam e exploram os tópicos de (a) até (c) citados. Ao final desse capítulo, tem-se uma seção chamada Vamos Relembrar, que além de



averiguar se os conhecimentos apresentados pelos alunos são parecidos com aqueles demonstrados no início da unidade, também pode ser usada como estratégia de avaliação sobre o conteúdo estudado neste capítulo.

Como ponto de partida, estudamos o capítulo 5 buscando analisar o conteúdo de razão e proporção construído ao longo das seções apresentadas sob a ótica da estrutura de Shield e Dole (2013). As primeiras determinações feitas pelo autor é de que, neste volume, serão ampliados os tópicos estudados no livro anterior sobre razão e proporção, trazendo aqui compreensão sobre a ideia de razão envolvendo grandezas de diferentes naturezas, como a velocidade média, que envolve grandezas de distância e tempo, além de conhecer as propriedades das proporções.

No início do capítulo 5, são apresentados os seus objetivos. A saber: (a') relembrar o conceito de razão; (b') compreender a ideia de razão envolvendo grandezas de naturezas diferentes; (c') reconhecer algumas razões como: velocidade média, densidade demográfica, densidade de um objeto e escala; (d') resolver problemas que envolvem a razão de duas grandezas de espécies diferentes; (e') compreender a ideia de proporção; (f') conhecer as propriedades das proporções, em especial a propriedade fundamental das proporções; (g') conhecer o conceito de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais; (h') resolver problemas que envolvem números proporcionais e divisões proporcionais; e (i') relacionar mais de duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais utilizando a regra de três composta.

#### **5.1.9. Análise do livro CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 9º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)**

Shield e Dole (2013), por meio da Chave 2 de sua estrutura de análise, estabelecem que o conceito de razão deve ser ilustrado com exemplos diversificados, ressaltando como as quantidades se relacionam umas com as outras. Neste volume do 9º ano, Chavante (2018) vai trazer a ideia de razão envolvendo grandezas de naturezas diferentes, e reconhece algumas razões como velocidade

média, densidade demográfica, densidade de objeto e escala. Contudo, o autor não abordou uma estratégia para os alunos perceberem que a relação multiplicativa está presente em todas as situações de razão, e assim, o livro didático não propicia que eles saibam explicar o que entenderam de variadas formas. Ainda, não encontramos atividades que exijam dos alunos se fundamentarem nas definições formais de razão para resolvê-las. Desta forma, entendemos que não houve evidência do uso da Chave 2.

O próximo tópico é sobre números proporcionais. Chavante (2018) ressalta que os números diretamente proporcionais podem ser aplicados em situações envolvendo divisões em partes proporcionais. Ao trazer os números inversamente proporcionais, o autor também apresenta que podemos fazer a divisão em partes inversamente proporcionais, efetuando a divisão de maneira inversa à quantidade de partes. Contudo, não há destaque do uso das operações de multiplicação e divisão, como não é explicitado que essas são operações inversas. Portanto, novamente não encontramos evidência de identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção - Chave 2.

**Figura 30** – Tabelas em situações proporcionais

**Números diretamente proporcionais**

Em páginas anteriores, vimos o exemplo do deslocamento de um automóvel, no qual ele percorre, em média, 70 km a cada 1 h. Podemos representar essa relação no quadro a seguir.

Medida de distância (km)	Medida de tempo (h)
70	1
140	2
210	3
280	4
...	...

A sequência formada pelas medidas de distância é **diretamente proporcional** à sequência formada pelas medidas de tempo. Observe como é possível representar essa relação.

$$\frac{70}{1} = \frac{140}{2} = \frac{210}{3} = \frac{280}{4} = \dots = 70$$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 84. Convergências Matemática. 9º ano

A Figura 30 destaca alta evidência de uso da Chave 5 pelo indicador (5.1) - utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas, quando Chavante (2018) representa a relação proporcional por meio de tabelas.

Finalizando o capítulo, o autor traz o tópico sobre a regra de três composta

para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas que, tomadas duas a duas, são proporcionais. A abordagem foi uma tarefa aplicando a regra de três para em seguida virem os exercícios similares ao apresentado no corpo do texto. Foi um tópico que não propiciou intuição, descobertas, nem apresentação de procedimentos de solução baseados em representação simbólica consistente para problemas que compartilham a mesma estrutura. Assim, entendemos que houve introdução precoce da equação de proporção, dificultando o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Portanto, nenhuma evidência de uso da Chave 3 foi encontrada.

Por fim, apresentamos o Quadro 17, com os resultados da análise deste livro do 9º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 17** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 9º Ano - Convergências Matemáticas (Chavante, 2018)

<b>Livro: CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA - 9º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Nenhuma	-
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Nenhuma	-
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Alta	Figura 30
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	-
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.1.10. Evidências encontradas dos indicadores de Shield e Dole (2013) para a coleção CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA

**Quadro 18** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) na Coleção Convergências Matemáticas (Chavante, 2018)

Classificação de uso das Chaves de Shield e Dole (2013)	Convergências Matemática			
	6º Ano	7º Ano	8º Ano	9º Ano
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>				
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	<b>Baixa</b>	<b>Baixa</b>	Nenhuma
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	Nenhuma	<b>Baixa</b>	Nenhuma
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>				
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	<b>Média</b>	<b>Baixa</b>	Nenhuma
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	<b>Média</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>				
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>				
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	<b>Média</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	<b>Média</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>				
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	<b>Baixa</b>	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	<b>Baixa</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

Adiante, passamos aos resultados apresentados no Quadro 18 para a coleção *Convergências Matemáticas* (Chavante, 2018), que estão organizados sob as cinco chaves da estrutura definida por Shield e Dole (2013) e por ano do livro didático. Para as análises, é importante ter em mente que nesta coleção a proporção é introduzida no 7º ano e a proporcionalidade no 8º ano.

- ➔ Chave 1: Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.
  - Indicador 1.1) Não são fornecidos exemplos de comparações aditivas e não são fornecidas oportunidades para que os alunos consigam diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas nas tarefas apresentadas em nenhum dos volumes dos livros didáticos da coleção.
  - Indicador 1.2) A relação multiplicativa em situações proporcionais é explicitada com baixa evidência e de modo superficial. Exemplo: no volume do 7º ano, p. 121, o autor explora a relação de proporção existente entre esses tipos de frações e introduz grandezas diretamente e inversamente proporcionais, como o uso de sentença algébrica para expressar a relação entre elas. Chavante (2018, p. 121) explica que “se a quantidade de gasolina aumentar 2 vezes, a medida da distância percorrida aumentará 2 vezes”. No livro no 8º ano, de forma implícita, é trazida a relação multiplicativa em situações proporcionais, sem apresentar oportunidades para o aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.
  - Indicador 1.3) Encontramos baixa evidência de exemplos e exercícios que envolveram comparações autênticas, pois não explicitaram a relação multiplicativa em situações proporcionais, sem definir claramente as relações aditivas e multiplicativas.
- ➔ Chave 2: Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.
  - Indicador 2.1) Foi definida com uma média evidência a relação comparativa multiplicativa de situações de razão. Exemplo: Ao trazer a

conceituação de razão no volume do 7º ano, Chavante (2018, p. 116) tem a atenção de trazê-la ressaltando, de modo exemplificativo, a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.

- Indicador 2.2) Trouxe que multiplicação e divisão são operações inversas. Exemplo: No livro do 6º ano, encontramos média evidência do uso deste indicador quando, no trabalho com a divisão de frações, a sugestão do autor é destacar a ideia de “quanto cabe” relacionada a essa operação, considerando divisão como medida. Ainda, estimula que o (a) professor(a) instigue o aluno a perceber que dividir um número por 2 equivale a multiplicá-lo por  $\frac{1}{2}$ ; o mesmo acontece quando se fala a terça parte, a quarta parte, etc. No volume do 7º ano é destacado no texto que as operações de multiplicação e divisão são operações inversas, ressaltando com alta evidência o uso do indicador 2.2.
  - Indicador 2.3) Não evidenciou o uso desta estrutura multiplicativa tanto do raciocínio proporcional dentro de situações proporcionais (razões equivalentes) como entre o pensamento (não evidenciou a relação multiplicativa).
- ➔ Chave 3: Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.
- Indicador 3.1) Não houve representação na situação de proporção que apoiasse a identificação de relacionamentos dentro e entre eles (dentro da situação e entre ideia da situação de proporção).
  - Indicador 3.2) Não explicitou ligações entre a representação simbólica dentre os tipos de problemas.
  - Indicador 3.3) A introdução da “equação de proporção” formal não foi adiada até que uma vasta experiência com outras representações tivessem sido alcançada.
- ➔ Chave 4: Conexão explícita com o conhecimento de fração.
- Indicador 4.1) Exibiu conexões explícitas com ideias de frações e equivalências com alta evidência. Exemplo: No livro do 6º ano,

encontramos o autor estimulando os alunos a identificarem a equivalência por meio de representações geométricas e, também, na reta numérica.

- Indicador 4.2) Explorou explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração com alta evidência de uso deste indicador. Exemplo: Chavante (2018) introduz o capítulo 4, no livro do 7º ano, trazendo quatro dos cinco significados de frações, relacionando-as à parte-todo, quociente de uma divisão, razão e operador; ou seja, o autor somente não trouxe a ideia de fração como medida, contudo, o indicador está focado na relação parte/todo.
  - Indicador 4.3) Sinalizou claramente o significado da notação de fração em uso. Exemplo: A identificação explícita do significado de  $a/b$  em uso é fornecida.
- ➔ Chave 5: Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.
- Indicador 5.1) Utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas. Exemplo: Nos livros de 7º, 8º e 9º anos encontramos tabelas e representações gráficas do uso de proporção com alta evidência.
  - Indicador 5.2) Mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem. Exemplo: Nos livros de 7º e 8º anos temos com alta evidência a ilustração de que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.
  - Indicador 5.3) Não utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.

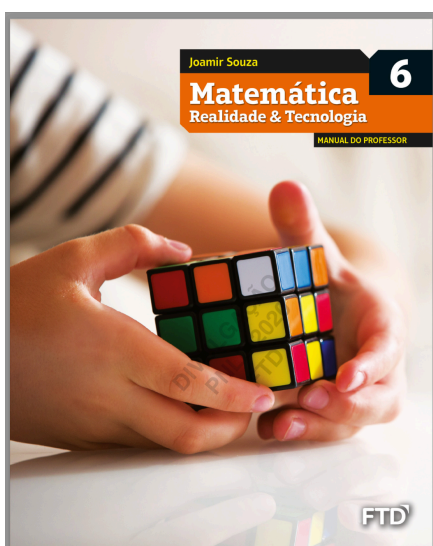


## 5.2. Análise da Coleção MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA

### 5.2.1. 1ª etapa de análise feita para a coleção MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA: do 6º ao 9º ano do ensino fundamental

A partir do Guia Digital PNLD 2020 (BRASIL, 2019) - para os anos finais do Ensino Fundamental, selecionamos a coleção de média distribuição entre as escolas públicas dado Brasil, a saber, a coleção Matemática, Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018). A coleção Matemática, Realidade & Tecnologia foi publicada pela Editora FTD no ano de 2018, e é composta por 4 volumes; sendo cada um destinado a um dos anos finais do Ensino Fundamental. Assim, os 4 volumes vão do 6º ao 9º

Figura 31 – Capa do livro 6º ano



Fonte: SOUZA, 2018. Matemática, Realidade & Tecnologia. 6º ano

ano do ensino fundamental. O autor, Joamir Roberto de Souza, é licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR). É especialista em estatística pela UEL-PR e mestre em Matemática pela UEL-PR. Atua como professor de Matemática da rede pública de ensino e é autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

Em cada volume da coleção estão presentes as orientações gerais, comuns aos quatro livros da coleção, e as orientações gerais apresentam os pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a coleção, bem como reflexões acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática, além de discussões sobre tendências em Educação Matemática. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) é um dos documentos que nortearam as reflexões e a elaboração da obra. Nas orientações específicas, o manual do professor é organizado em formato de U. Por esse formato, o livro do aluno, com as respostas das atividades, é apresentado em tamanho reduzido, enquanto nas laterais - à direita e à esquerda - e na parte inferior das páginas há comentários e orientações didáticas correspondentes às atividades propostas e aos conteúdos disponíveis nas páginas do livro do aluno. Nesta coleção, os fundamentos teóricos e metodológicos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem

buscam favorecer o trabalho coletivo e colaborativo como uma maneira de estimular a participação, a reflexão e a comunicação entre os alunos.

O autor esclarece, nas páginas iniciais do manual do professor, que sempre procurou propor os conceitos matemáticos a partir dos conhecimentos prévios dos alunos, alicerces para a construção de novos conhecimentos. Também apresenta que o encadeamento dos conteúdos matemáticos foi pensado com a finalidade de convidar os alunos a exporem e a escutarem ideias, a formularem, confrontarem e comunicarem procedimentos de resolução de problemas, a argumentarem e validarem pontos de vista. Ainda, o autor anuncia que os volumes desta coleção foram organizados procurando, quando possível, fazer uso de diferentes tendências metodológicas. As propostas interdisciplinares e as temáticas de caráter social permitem o desenvolvimento das competências como as da leitura, da escrita e da oralidade, e ainda oferecem elementos para a composição de situações contextualizadas para as atividades.

Os conteúdos relacionados à razão, proporção e raciocínio proporcional estão distribuídos nesta coleção, entre os 4 anos finais do ensino fundamental, que vai do 6º ao 9º ano.

### **5.2.2. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 6º ano**

Começamos nossa análise pelo manual do professor do 6º ano. Então, a partir daqui, iniciamos a análise sob a ótica da nossa pesquisa para o livro didático do 6º ano da coleção Matemática, Realidade e Tecnologia (SOUZA, 2018). Sua primeira edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 372 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.

- (2) Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.
- (3) Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”.
- (4) Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (5) Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se cinco blocos de habilidades a saber:

- (1) **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
- (2) **(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
- (3) **(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

- (4)(**EF06MA15**) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (5) (**EF06MA29**) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

O capítulo do volume do 6º ano que aborda especificamente fração, razão e proporção é o capítulo 5 - Números racionais na forma de fração. Neste capítulo são trabalhados os tópicos (a) números racionais na forma de fração - fração de uma quantidade; frações equivalentes e simplificação de fração; (b) comparação de frações - Comparando frações com denominadores iguais ou frações com numeradores iguais; comparando frações com denominadores e numeradores diferentes; e (c) adição e subtração de frações - Adição e subtração com denominadores iguais; adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Verificamos que o capítulo 5 apresenta 35 atividades que abordam e exploram os tópicos (a), (b) e (c) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático com a História - relaciona fração com os tributos no Brasil, uma seção para o aluno se conectar - no caso, estimulando que ele escreva e organize frações, e um resumo no final, trazendo tudo o que foi estudado.

Como ponto de partida, estudamos o capítulo 5 com um olhar de quem estuda um livro tendo a atenção de quem procura aprender todo o conhecimento ali apresentado. Nossas primeiras análises foram bem abrangentes. As idas e vindas neste livro de 6º ano nos leva a refletir que o autor tenta provocar o professor a pensar além da Matemática, conduzindo sua classe não somente com conteúdo de Matemática. Souza (2018) nos instiga em seu livro que devemos ir além do estudo de Matemática, e que devemos integrar seu conteúdo com outras disciplinas do conhecimento, tais como Geografia, História e, até mesmo, Língua Portuguesa.

### 5.2.3. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 3ª etapa de análise do livro do 6º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)

Ao iniciar o capítulo 5, Souza (2018) utiliza a imagem do planeta Terra visto do espaço para introduzir a matéria de números racionais na forma de fração. Ele usa a representação da Terra por meio de uma figura dividida igualmente em quatro partes para demonstrar que três dessas partes correspondem à parte coberta por água. Ou seja, ele mostra ao aluno que a Terra é composta por  $\frac{3}{4}$  de água.


Figura 32 – Introdução aos números racionais

### Os números racionais na forma de fração

Nesta Unidade, ampliaremos o estudo sobre números realizado até aqui. Serão apresentadas e discutidas situações envolvendo os números racionais e estudada sua representação na forma de fração.

Nas páginas de abertura desta Unidade, vimos que o astronauta Yuri Gagarin, ao observar a Terra do espaço, disse que ela era azul. De fato, se representarmos a superfície da Terra por meio de uma figura dividida igualmente em quatro partes, veremos que três dessas partes correspondem à parte coberta de água. Observe.

A parte azul da figura corresponde à parte da superfície da Terra coberta de água, ou seja, 3 partes de 4.



Planeta Terra fotografado do espaço. Fotografia de 2015.

Além da figura anterior, também podemos representar a parte da superfície da Terra coberta de água por meio de uma fração.

$$\frac{3}{4}$$

← Numerador: indica quantas partes foram consideradas.

← Denominador: indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 148. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Essa abordagem traz uma associação simbólica do planeta terra com uma figura retangular, demonstrando que a área do planeta pode ser representada por quatro partes iguais, lembrando a ideia de números fracionários. Essa foi uma conexão explícita da geografia com o conhecimento de fração, ressaltando e distinguindo as relações parte-todo, que ocorre quando se divide em partes iguais um objeto ou uma figura. Ainda neste ponto inicial do capítulo, o autor, além de apresentar partes de uma unidade dividida igualmente, ele introduz que uma fração também pode representar uma razão ou o quociente de uma divisão e exemplifica.

Assim, na introdução do capítulo, encontramos o autor trabalhando os conhecimentos prévios de fração, estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Agora são explorados quando o professor dialoga com alunos de 6º

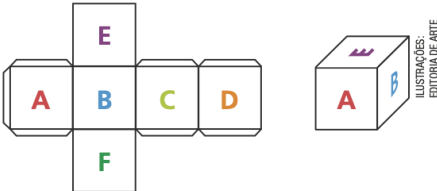
ano ideias sobre esse texto inicial em que o autor questiona o que ocorre quando se divide em partes iguais o planeta Terra, e isto atende à Chave 4, já que fica explícito que o livro didático trabalha a relação parte-todo do conceito de fração.

Uma característica desta coleção é que o autor valoriza a diversidade de saberes de diferentes áreas do conhecimento, como aqueles associados à astronáutica, campo importante para o desenvolvimento das tecnologias, e estabelece relação com as disciplinas de ciências, geografia e história. Inicialmente, ele apresenta atividades com ideias de frações e equivalência, problematizando diversas situações de relação parte-todo, mas sempre com diversidade de exemplos e várias situações contextualizadas, propiciando o resgate do conhecimento de frações trabalhados em anos anteriores. Assim, durante as primeiras páginas do capítulo, ele trabalha as ideias básicas introdutórias sobre fração. O autor parte do pressuposto que se trata de conteúdos já explorados com os alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Seu objetivo é propor que o professor investigue o conhecimento prévio deles a respeito do conteúdo, e dialogue com seus alunos e alunas, questionando como pensam para responder a esse exemplo. Assim, verificamos que Souza (2018) procura em seu material didático atender ao que citamos na Chave 4 da estrutura de Shield e Dole (2013).

Prosseguindo, além de representar partes de uma unidade dividida igualmente, o autor traz que uma fração também pode representar uma razão ou o quociente de uma divisão. Além disso, são apresentadas as frações decimais, cujos denominadores são potências de base 10. Em seguida, ele propõe atividades que trabalham a leitura e a escrita de uma fração, a compreensão da fração com a ideia de partes de inteiro de formas variadas, seja representado por figuras ou mesmo por pedaços de corda. Serão trabalhadas atividades de fração com a ideia de razão e também com a ideia de quociente de uma divisão, bem como a relação de fração com pontos na reta numérica. Isso é evidenciado nas atividades da Figura 33.

Figura 33 – Atividades envolvendo frações

4. Joaquim recortou o molde de um dado, que representa um cubo, indicou nas faces as seis primeiras letras do nosso alfabeto e montou o dado.



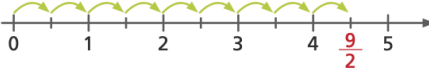
5. Leia cada frase a seguir e escreva no caderno uma fração para representar a parte destacada.

a) **80 em cada 100** resíduos lançados aos mares são plásticos.  $\frac{80}{100}$

b) **1 em cada 4** brasileiros é hipertenso.  $\frac{1}{4}$

c) No Brasil, **39 em cada 100** consumidores preferiram realizar pagamentos à vista em compras pela internet em 2015.  $\frac{39}{100}$

6. Para localizar a fração  $\frac{9}{2}$  na reta numérica, Hélio dividiu cada unidade em 2 partes iguais. Depois, contou 9 partes e localizou a fração  $\frac{9}{2}$ .



Escreva entre quais números naturais consecutivos na reta numérica localizamos as frações a seguir.

a)  $\frac{18}{5}$  3 e 4. b)  $\frac{7}{3}$  2 e 3. c)  $\frac{25}{4}$  6 e 7.

a) Em relação ao total de faces, escreva a fração correspondente à quantidade de faces que contêm:

- vogais.  $\frac{2}{6}$
- consoantes.  $\frac{4}{6}$

b) Se Joaquim lançar esse dado, é mais provável que a letra obtida na face de cima seja vogal ou consoante? Justifique sua resposta. **Resposta esperada: Consoante, pois há mais faces com consoante do que com vogal.**

Fonte: SOUZA, 2018, p. 151. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Assim, constatamos que, ao longo das seis primeiras páginas, o autor trabalhou muito bem a Chave 4, que se refere a: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Os indicadores de que esta meta de aprendizagem atendeu a Chave 4 foi pelo material didático: (i) exibir conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (ii) explorar explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte-todo e destaca explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (iii) sinalizar claramente o significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente).

A esta altura, o autor inicia o trabalho com a fração de uma quantidade explicando, por meio de situações contextualizadas e que apresentam tal ideia, que o todo está relacionado a um grupo de objetos ou elementos. Como padrão, ele apresenta o conteúdo de forma exemplificada para, em seguida, propor atividades diversificadas e contextualizadas. Assim, são desenvolvidas atividades variadas sobre o cálculo da fração de uma quantidade e trabalha a ideia de divisão em partes desiguais. Ele também tem a preocupação de trabalhar com o raciocínio e a produção de argumentos matemáticos para compreender e atuar em situações

cotidianas que envolvem relações éticas e cidadãs. Novamente, neste tópico, percebemos que os conhecimentos prévios de fração são explorados por atividades que enfatizam que o denominador da fração é o que indica em quantas partes iguais o todo deve ser dividido, ao passo que a quantidade de partes a ser considerada é indicada pelo numerador. Observamos essas ideias do autor na Figura 34.

Figura 34 – Atividades envolvendo frações

4. Leia a tirinha e resolva as questões.

VOCÊS ESTÃO CONVIDADOS PRA ASSISTIR A UM FILME AMANHÃ NA MINHA CASA!  
 QUE ÓTIMO, ARTURZINHO! A QUE HORAS PODEMOS CHEGAR?  
 A PRIMEIRA SESSÃO COMEÇA ÀS 13:00. E NÃO SE ESQUEÇAM...  
 ...ESTUDANTE COM CARTEIRA PAGA MEIA!

CEDRAZ, A. **As 1000 tiras em quadrinhos**. São Paulo: Martin Claret, 2012. p. 22.

a) Converse com o professor e os colegas sobre o que você entendeu dessa tirinha. **Resposta pessoal.**  
 b) Que fração do valor da entrada as crianças com a carteira de estudante vão pagar para assistir ao filme na casa de Arturzinho?  $\frac{1}{2}$ .  
 c) Quantos reais cada criança vai pagar com a carteira de estudante para assistir ao filme, se Arturzinho cobrar R\$ 12,00 pela entrada? E se ele cobrar R\$ 8,00? **R\$ 6,00. R\$ 4,00.**  
 d) Pesquise o valor da entrada de um evento que conceda o direito à meia-entrada, como espetáculos culturais ou eventos esportivos. Depois, com base nessa pesquisa, elabore uma questão que envolva o cálculo de fração de uma quantidade. Troque a questão com um colega para que ele a resolva, enquanto você resolve aquela que ele elaborou. Ao final, confirmem juntos as resoluções. **Resposta pessoal.**

Fonte: SOUZA, 2018, p. 153. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

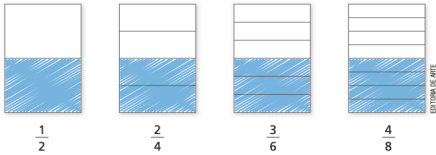
Para iniciar o conteúdo de frações equivalentes, Figura 35, o autor propõe uma atividade para trabalhar a associação de fração a partes de inteiros, representados por figuras, para em seguida trazer a identificação de frações equivalentes e fração irredutível. Neste tópico, Souza (2018) traz atividades que trabalham a obtenção de frações equivalentes para apresentar a compreensão de noções iniciais de proporção, e informa que tal assunto será estudado em volumes posteriores a este. Neste ponto, depreendemos que no livro do 6º ano são abordados apenas tópicos de frações e razão. Podemos novamente responder à questão de pesquisa comentando que as tarefas trabalhadas nesta seção requerem que os alunos visualizem representações diferentes da mesma parte em relação ao todo e percebam as partes correspondentes, o que envolve conhecimentos anteriores.



**Figura 35 – Atividades envolvendo frações equivalentes**

**Frações equivalentes e simplificação de fração**

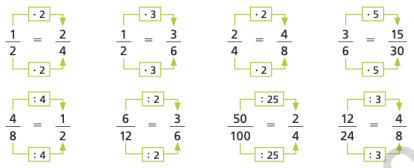
O professor de Matemática da turma do 6º ano pediu aos alunos que dividissem igualmente uma folha de sulfite, pintassem parte dessa folha de azul e escrevessem a fração correspondente à parte pintada. Observe como ficaram as folhas de alguns alunos.



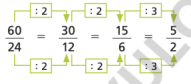
Note que essas frações representam a mesma parte das folhas. Nesse caso, dizemos que  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{3}{6}$  e  $\frac{4}{8}$  são **frações equivalentes**. Podemos indicar a equivalência entre essas frações da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

Podemos obter frações equivalentes multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero. Observe:



Ao dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero, estamos fazendo a **simplificação da fração**, ou seja, obtendo uma fração equivalente mais simples. Observe:



Note que a fração  $\frac{5}{2}$  não pode mais ser simplificada. Nesse caso, dizemos que essa é uma **fração irredutível**.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 155. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Adiante, vamos encontrar o conteúdo sobre comparação de frações, tanto frações com denominadores iguais ou frações com numeradores iguais, quanto frações com denominadores e numeradores diferentes. Para introduzir esse conhecimento, o autor sugere trabalhar com interdisciplinaridade, juntamente com professores de outras disciplinas, como arte, geografia e história. O livro se vale do artesanato para exemplificar a comparação de frações conforme apresentamos na Figura 36. Ainda, atividades contextualizadas são propostas, além de outras que relacionam frações a reta numerada e ordenação de frações, que são conhecimentos adquiridos previamente, nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

**Figura 36 – Atividades sobre comparação de frações**

Clarissa é artesã e em suas peças utiliza composições de mosaicos com pastilhas coloridas de cerâmica. Observe o que ela está dizendo.

Nessa bandeja, vou compor um mosaico com pastilhas coloridas:  $\frac{3}{5}$  do total de pastilhas serão vermelhas e  $\frac{2}{5}$  serão azuis.



No mosaico em que Clarissa está trabalhando, ela utilizará mais pastilhas de qual cor: vermelha ou azul?

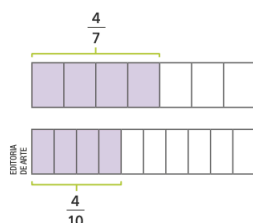
Para responder a essa questão, temos de comparar as frações  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{2}{5}$ , que têm denominadores iguais. Observe a figura dividida em 5 partes iguais.



Note que  $\frac{3}{5}$  é maior do que  $\frac{2}{5}$ , ou seja,  $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$ .

Assim, no mosaico haverá mais pastilhas vermelhas.

Agora, vamos comparar as frações  $\frac{4}{7}$  e  $\frac{4}{10}$ , que têm numeradores iguais. Observe as figuras, que representam a unidade, divididas de maneiras distintas em partes iguais.



Note que  $\frac{4}{7}$  é maior do

que  $\frac{4}{10}$ , ou seja,  $\frac{4}{7} > \frac{4}{10}$ .

Ao comparar frações com denominadores iguais, a maior delas é aquela de maior numerador. Já ao comparar frações com numeradores iguais, a maior delas é aquela cujo denominador é menor.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 157. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

O último conteúdo a ser apresentado no capítulo é sobre adição e subtração de frações, com denominadores iguais e também com denominadores diferentes. Para tanto, a sugestão do autor é trabalhar em conjunto com o professor de ciência, trazendo um debate sobre o porquê de água e óleo não se misturarem, e a razão de outros líquidos se misturarem. Neste tópico, conhecimentos prévios são explorados quando são propostas atividades sobre cálculo de uma expressão numérica com frações. Para tanto, é necessário lembrar aos alunos que, em uma expressão numérica apenas com adição e subtração, os cálculos podem ser realizados na ordem em que essas operações aparecem, ou quando é explorado que metade corresponde a um meio ou  $\frac{1}{2}$ .

Figura 37 – Atividades sobre adição e subtração de frações

### Adição e subtração de frações

#### Adição e subtração de frações com denominadores iguais


Você já tentou misturar água e óleo? Provavelmente, você deve ter conseguido identificar esses líquidos no recipiente utilizado, pois o óleo e a água não se misturam.

Na aula de Ciências, a professora de Karen fez este experimento com os alunos. Observe as etapas.

**1ª**


Reservou os materiais:

- Recipiente.
- Óleo de soja.
- Água com corante vermelho.




**2ª**

Despejou água, ocupando  $\frac{5}{12}$  do recipiente.




**3ª**

Despejou óleo, ocupando  $\frac{3}{12}$  do recipiente.




Para determinar a fração do recipiente ocupada com líquido ao final desse experimento, podemos calcular o resultado de  $\frac{5}{12} + \frac{3}{12}$ . Observe.



$$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$$

Assim, ao final do experimento,  $\frac{8}{12}$  do recipiente ficaram com líquido.

Agora, vamos determinar a fração do recipiente que ficou sem líquido. Para isso, podemos calcular o resultado de  $\frac{12}{12} - \frac{8}{12}$ . Observe.



$$\frac{12}{12} - \frac{8}{12} = \frac{4}{12}$$

**!** Note que o recipiente todo corresponde a  $1 = \frac{12}{12}$ .

Em uma adição (ou subtração) de frações com denominadores iguais, adicionamos (ou subtraímos) os numeradores e mantemos os denominadores.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 160. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Figura 38 – Atividades sobre adição e subtração de frações


### Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

A professora Karen fez outro experimento na aula de Ciências para mostrar aos alunos que também há líquidos que se misturam. Para isso, ela utilizou três recipientes idênticos, dois deles com marcações que dividem suas capacidades igualmente e outro sem marcações. Observe.

**1ª**

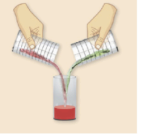
Reservou os materiais:

- Recipiente com  $\frac{5}{12}$  de sua capacidade contendo água com corante vermelho.
- Recipiente com  $\frac{2}{9}$  de sua capacidade com suco de limão.
- Recipiente vazio.




**2ª**

Despejou toda a água com corante vermelho e todo o suco de limão no recipiente que estava vazio.



**3ª**

A água e o suco de limão se misturaram.



Para obter a fração da capacidade do recipiente ocupada pela mistura de água e suco do limão no fim do experimento, podemos calcular o resultado de  $\frac{5}{12} + \frac{2}{9}$ . Note que essas frações têm denominadores diferentes. Uma estratégia que podemos utilizar é obter frações equivalentes a  $\frac{5}{12}$  e a  $\frac{2}{9}$  que possuam denominadores iguais e adicionar essas frações.

$$\frac{5}{12} = \frac{10}{24} = \frac{15}{36}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{4}{18} = \frac{8}{36}$$

Como  $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$  e  $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$ , realizamos a seguinte adição:

$$\frac{15}{36} + \frac{8}{36} = \frac{23}{36}$$

Assim, a mistura de água e suco de limão ocupa  $\frac{23}{36}$  da capacidade do recipiente.

No fim do experimento, que fração da capacidade do recipiente não foi ocupada pela mistura?

$\frac{13}{36}$

Fonte: SOUZA, 2018, p. 161. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Assim, pelas análises apresentadas temos que o capítulo 5 do livro Matemática, Realidade e Tecnologia (Souza, 2018) apresenta ALTA evidência para cada um dos três indicadores da Chave 4, que se refere a: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Os Indicadores de ALTA EVIDÊNCIA de que esta meta de aprendizagem atendeu a Chave 4 deu-se pelo fato, de, ao analisarmos o material didático, termos encontrado: (1) conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (2) as relações parte/fração inteira e relação parte/parte-todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (3) sinalização clara do significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente). O Quadro 19 apresenta os resultados encontrados.

**Quadro 19** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 6º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018)

<b>Livro: MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 6º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Alta	Figura 35
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Alta	Figuras 32, 33
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Alta	Figura 33
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	-
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	-
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

#### 5.2.4. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 7º ano

A análise do livro didático Matemática Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018) para o 7º ano inicia-se a partir daqui. Sua primeira edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 372 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples.
- (2) Frações e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (3) Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.
- (4) Grandezas e medidas: problemas envolvendo medições.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se quatro blocos de habilidades a saber:

- (1) **(EF07MA02)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
- (2) **(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, com a fração  $\frac{2}{3}$  para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

- (3) **(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
- (4)**(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

O capítulo do volume do 7º ano que aborda especificamente fração, razão e proporção é o capítulo 4 - Os números racionais e o capítulo 6 - Proporcionalidade e Simetria. Nestes capítulos são trabalhados os tópicos (a) números racionais na forma de fração: frações equivalentes, simplificação e comparação de frações; adição e subtração de frações; multiplicação de frações; divisão de frações; (b) números racionais na forma decimal: transformação de um número racional na forma decimal para a forma de fração; transformação de um número racional na forma de fração para a forma decimal; comparação de números decimais; adição e subtração de números decimais; multiplicação de números decimais; divisão de números naturais com quociente decimal; divisão com números decimais; e (c) Proporcionalidade: razão; proporção; relação entre grandezas. Verificamos que o capítulo 4 apresenta 70 atividades que abordam e exploram os tópicos (a) e (b) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático estudado com outros conhecimentos, para o aluno se conectar: Construindo e medindo o comprimento de uma circunferência; e um resumo no final, trazendo tudo o que foi estudado. Já o capítulo 6 apresenta 40 atividades que abordam e exploram os tópicos (c) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático com arte e língua portuguesa; e um resumo no final, trazendo tudo o que foi estudado.

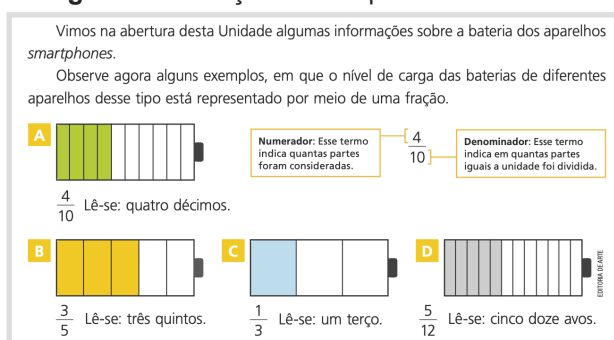
O estudo dos capítulos 4 e 6 se deu com um olhar minucioso, identificando os capítulos do volume em análise que abordam especificamente o tópico de razão, proporção e que envolvam o raciocínio proporcional. Concomitantemente, tivemos as nossas primeiras análises sobre este livro de 7º ano. Percebemos que o autor manteve a mesma condução dada ao professor no volume no 6º ano, que é de levá-

lo a pensar além da Matemática, conduzindo os alunos a extrapolar o conteúdo de Matemática.

### 5.2.5. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 3ª etapa de análise do livro do 7º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)

Souza (2018) inicia o capítulo sobre o conteúdo de frações com as ideias de partes de um inteiro, explicando aos alunos que isso ocorre quando se divide em partes iguais um objeto ou uma figura. Para exemplificar, ele traz imagens de bateria de aparelho *smartphone*, com diversificados níveis de carga, representados por meio de figuras divididas em partes iguais de maneiras distintas, que é a ideia de fração como medida. Essa introdução revela uma conexão explícita com o conhecimento da fração, pois ao explorar as relações parte de um todo, há o destaque explícito de distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e por sinalizar o significado da notação de fração em uso (parte-todo), destacando alta evidência da Chave 4. Neste ponto, também temos o uso de comparações autênticas, propiciando a contextualização sobre fração parte-todo.

**Figura 39 – Frações como parte de um inteiro**

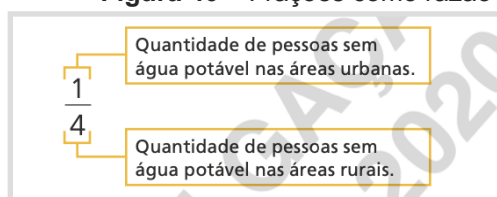


Fonte: SOUZA, 2018, p. 102. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

O autor aproveita para trazer a ideia de razão contextualizando com outros conhecimentos de ciências, ao discutir sobre água potável e saneamento básico. Souza (2018, p.102) traz que "para cada pessoa sem água potável que vive nas áreas urbanas, há 4 pessoas sem água potável nas áreas rurais. Essa razão pode ser representada pela seguinte fração":



**Figura 40 – Frações como razão**



Fonte: SOUZA, 2018, p. 102. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Outra ilustração da ideia de razão através de uma situação autêntica é a atividade a seguir. Ela trabalha a associação entre razão e fração para resolver problemas. A escrita da razão deve levar em consideração a ordem do que é solicitado: razão entre a quantidade de copos de suco concentrado e a de copos de água. No caso, o numerador deve conter a quantidade de copos de suco concentrado (3); e o denominador, a quantidade de copos de água (5). Este exemplo sinaliza o significado da notação de fração em uso (razão). Observe:

**Figura 41 – Frações como razão**

6. Melina comprou uma garrafa de suco natural concentrado de uva. Observe na embalagem as informações sobre o preparo desse suco.

Para preparar esse suco, misture:

Suco concentrado      Água

a) Escreva uma fração para representar a razão entre a quantidade de copos de suco concentrado e a quantidade de copos de água necessários para o preparo do suco.  $\frac{3}{5}$

b) Caso sejam utilizados 15 copos de água no preparo do suco, quantos copos de suco concentrado devem ser misturados? **9 copos de suco concentrado.**

Fonte: SOUZA, 2018, p. 106. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Prosseguindo, Souza (2018) vai introduzir as ideia de divisão e de fração de uma quantidade. Neste caso, ele ressalta a importância dos alunos entenderem que, nessas situações, o todo está relacionado a um grupo de objetos ou elementos. O denominador da fração é que indica em quantas partes iguais o todo deve ser dividido, e o numerador indica quantas partes serão consideradas. Ainda,

encontramos atividade para trabalhar a localização de número racional na forma de fração na reta numérica, utilizando diferentes algoritmos, que faz referência à ideia de fração como medida.

**Figura 42 – Frações na reta numérica**



Fonte: SOUZA, 2018, p. 104. Recorte do livro Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

A abordagem dos conteúdos sobre frações equivalentes vai focalizar em os alunos compreenderem que o numerador e o denominador de uma fração deve necessariamente ser multiplicado ou dividido pelo mesmo número natural diferente de zero. E que ao se dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural, maior do que 1, estamos fazendo a simplificação da fração. Finalizando esta seção, encontramos atividades que vão trabalhar a comparação, a ordenação de frações e a associação de números racionais na forma de fração a pontos da reta numérica. Neste tópico, temos altas evidências de uso da Chave 4, por meio do indicador 4.1 que faz exibição de conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.

**Figura 43 – Comparação de frações**

Os aplicativos e sites de vídeos, de maneira geral, apresentam uma barra na qual é possível acompanhar qual parte do vídeo está sendo reproduzida. Observe.

a) Faça estimativas e identifique qual das frações a seguir corresponde à parte desse vídeo que já foi reproduzida? II

I.  $\frac{9}{20}$       II.  $\frac{1}{4}$       III.  $\frac{7}{8}$

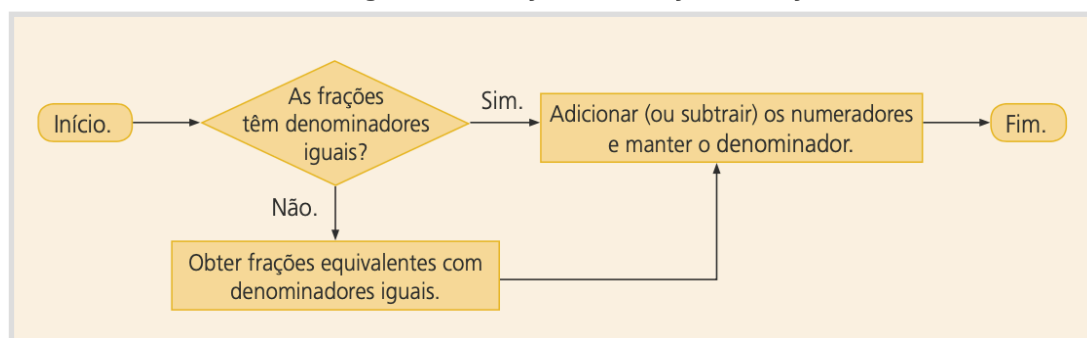
b) Esse vídeo tem 260 s de duração. Com base em sua estimativa anterior, quantos segundos dele já foram reproduzidos? E quantos ainda faltam ser exibidos?

65 s. 195 s.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 109. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Avançando no capítulo 4, Souza (2018) vai trabalhar as operações com frações: adição, subtração, multiplicação e divisão. O autor propõe alguns problemas para desenvolver o raciocínio dos alunos diante das operações básicas. Em suma, ele traz:

**Figura 44** – Adição e subtração de frações



Fonte: SOUZA, 2018, p. 111. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Para a abordagem da multiplicação de frações, ele utiliza algumas estratégias, como a utilização de figuras. O importante, para o autor, é os alunos compreenderem que são multiplicados os numeradores e são multiplicados os denominadores para se obter o resultado. Souza (2018) também considera o trabalho com números inversos, que é quando o produto de dois números diferentes de zero é igual a 1, e exemplifica, trazendo que  $2/7$  e  $7/2$  são números inversos. Já para o conteúdo de divisão de frações, o autor utiliza figuras divididas representando parte de um inteiro; e também traz exemplos sem auxílio de figuras, como uma estratégia válida para casos de divisão de um número natural por uma fração, ou divisão de fração por um número natural. Para finalizar o capítulo 4, temos os tópicos a seguir, quando Souza (2018) trabalha números racionais na forma decimal. São abordados: transformação de um número racional da forma decimal para a forma de fração; transformação de um número racional na forma de fração para a forma decimal; comparação de números decimais; adição e subtração de números decimais; multiplicação e divisão de números decimais. Entendemos que estes tópicos vêm resgatar conhecimentos anteriores dos alunos para introduzir, posteriormente, o raciocínio proporcional.

O capítulo 6 aborda a proporcionalidade e é iniciado com razão, apresentando uma de suas aplicações, a escala, que é a razão entre a medida de um comprimento em um desenho e a medida correspondente ao comprimento real,


expressas em uma mesma unidade de medida. Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983), os números racionais podem ser interpretados por, pelo menos, estas seis maneiras: uma comparação de parte para todo, um decimal, uma razão, uma divisão indicada (quociente), um operador e uma medida de quantidades contínuas ou discretas. Ao trazer a ideia de operador neste capítulo, Souza (2018) complementa todas essas interpretações de números racionais defendidas pelos pesquisadores americanos. No capítulo 4 deste volume, o autor já havia introduzido cinco das seis formas: parte de um todo, razão, divisão, decimal e medida. Agora, ele introduz operador, ao trazer a escala, uma vez que esta trabalha o conceito de frações como um modificador de situações. Novamente, verificamos o uso da Chave 4, que se refere a uma conexão explícita com o conhecimento da fração. Os indicadores encontrados e que apontam para esta meta de aprendizagem ter sido atendida são: (4.1) exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (4.2) explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (4.3) sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente).

**Figura 45 – Razão: escala**


**3.** Você tem ou já viu alguma miniatura? São diversos os tipos de miniaturas: automóveis, trens, navios, aviões e personagens. Nas miniaturas costuma estar indicada a escala em que foi construída, ou seja, a razão entre a medida na representação e a medida no objeto real.

Observe a escala de cada miniatura a seguir e, com base na medida indicada, calcule a medida real do objeto correspondente.

a) Escala 1 : 24. **84 cm.**



b) Escala 1 : 36. **180 cm ou 1,8 m.**



Fonte: SOUZA, 2018, p. 167. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Neste tópic, Souza (2018) também destaca número decimal como um dos significados de fração, ao trazer atividades destinadas aos alunos perceberem que a porcentagem está relacionada com a ideia de razão. Veja a Figura 46 a seguir.

**Figura 46 – Porcentagem e razão**

**Porcentagem e razão**

O conceito de porcentagem também pode ser compreendido com base na ideia de razão.

**Exemplos**

a) Leia a informação.

Em uma escola com 320 alunos, 60% são meninas.

Nesse caso, temos que 60 em cada 100 alunos dessa escola são meninas. Essa razão pode ser indicada de diferentes maneiras:

$$60\% = 60 : 100 = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

Observe duas maneiras de calcular a quantidade de meninas dessa escola:

- $\frac{60}{100} \cdot 320 = \frac{60 \cdot 320}{100} = \frac{19200}{100} = 192$
- $0,6 \cdot 320 = 192$

Assim, dos 320 alunos dessa escola, 192 são meninas.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 165. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Ao introduzir o conteúdo sobre “Proporção”, já encontramos o que Souza (2018, p. 170) traz como propriedade fundamental das proporções, a saber:

**Figura 47 – Proporção**

É importante que eles compreendam a relação entre razão e proporção, isto é, temos uma proporção quando duas razões são iguais. Na formalização do conceito de proporção, explicar a eles que, como  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são razões, consideramos **b** e **d** números diferentes de zero.

**PARA PENSAR**

Para complementar, com base na resposta apresentada pelos alunos, escrever na lousa as proporções a seguir e propor a eles que determinem o número que está faltando em cada item.

- $\frac{3}{5} = \frac{12}{\quad}$ . Resposta: 20.
- $\frac{8}{7} = \frac{\quad}{21}$ . Resposta: 24.
- $\frac{\quad}{2} = \frac{4}{8}$ . Resposta: 1.
- $\frac{4}{\quad} = \frac{1}{8}$ . Resposta: 32.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 169. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

“Em uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.” Dito isso, de forma muito direta, temos uma introdução do algoritmo de proporção padrão, que é o contrário do que estabelece a Chave 3, pela qual espera-se um adiamento da introdução da “equação de proporção” formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes. Do mesmo modo, quando Souza (2018, p. 170) diz que “podemos verificar a propriedade fundamental das proporções, multiplicando ambos os termos da proporção pelos denominadores das frações e realizando simplificações”, ele também está fazendo a introdução da “equação de proporção”, ao mostrar pela verificação que a igualdade corresponde a uma proporção. E de uma outra forma, ele reforça o uso dessa equação quando propõe atividades que trabalham a identificação do termo faltante em uma proporção, de forma que os alunos resolvam por tentativa, utilizando equações ou com outras estratégias. A sugestão do autor para a resolução do exercício da Figura

48 é explorar a calculadora como instrumento de investigação. Veja:

**Figura 48 – Proporção**

4. O professor de Matemática escreveu uma proporção na lousa, porém um dos termos foi apagado.

$$\frac{8}{12} = \frac{14}{?}$$

Fonte: SOUZA, 2018, p. 170. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

A equação de proporção, também conhecida como o instrumento da regra de três simples e direta, é um meio de levar ao aluno o entendimento instrumental, que se assemelha a decorar uma fórmula e saber como e quando aplicá-la. Quando Shield e Dole (2013) recomendam adiar a introdução da equação, eles estimulam desenvolverem nos alunos o entendimento relacional defendido por Skemp (1989), que seria desenvolver a compreensão dos alunos a respeito da base do raciocínio proporcional. Ou seja, a recomendação é adiar a aplicação de fórmulas até que os alunos saibam explicar de diversas formas a questão da proporcionalidade. Wielewski (2008, p. 59) trouxe que “para Skemp (1989), se um aluno sabe resolver um problema ou alguém sabe jogar um jogo qualquer ou um mecânico sabe consertar um motor, não significa necessariamente que ele entende totalmente seu funcionamento.” Caminhando na análise feita por Wielewski (2008), temos que o entendimento relacional:

consiste não em memorizar uma coleção de regras, mas no edifício erigido por meio de estruturas de conhecimento, das quais uma grande variedade de planos de ação pode ser derivado, como e quando exigido. Construir esses planos de conhecimentos existentes é uma função da inteligência (WIELEWSKI, 2008, p. 62).

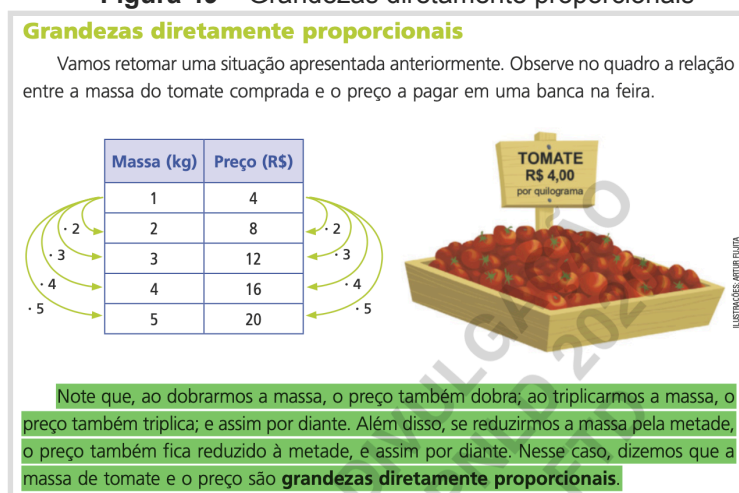
Este é exatamente o ponto de deficiência de conhecimento sobre o raciocínio proporcional que percebi em meus alunos, o qual relatei no Capítulo 1 desta tese e que foi a mola propulsora para eu desenvolver esta pesquisa.

No capítulo 4, o autor desenvolveu o conteúdo de frações equivalentes. Agora, no capítulo 6, não houve retomada deste tema. Percebemos que faltou elaborar o elo de ligação entre frações equivalentes e proporção. O link dos dois assuntos seria uma forma de ampliar a base de conhecimento dos alunos para ajudá-los a construir um entendimento relacional do conteúdo. Todavia, Souza

(2018) partiu direto para a apresentação da equação de proporção, o que foi contrário ao indicado pela Chave 3 de Shiel e Dole (2013) e o que nós percebemos como uma abordagem não muito acertada.

Logo em seguida, Souza (2018) vai introduzir os conceitos de relação entre grandezas, as diretamente proporcionais e as inversamente proporcionais. Neste tópico, o autor traz atividades que vão trabalhar a identificação de situações em que grandezas estão diretamente proporcionais e a identificação de situações de grandezas inversamente proporcionais. Além de atividades de identificar as situações, Souza (2018) também traz proposições de resoluções de situações-problema. Contudo, não houve destaque de nenhuma tarefa. Ainda, identificamos uma média evidência do indicador 5.1, quando no texto houve o destaque da relação multiplicativa por meio de tabelas, mas sem desenvolvimento do conteúdo nas atividades propostas.

**Figura 49 – Grandezas diretamente proporcionais**



Fonte: SOUZA, 2018, p. 171. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Pelo Quadro 20, apresentamos os resultados da análise deste livro do 7º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 20** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 7º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018)

<b>Livro: MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 7º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Alta	Figura 42
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Alta	Figura 39
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Alta	Figuras 40, 45
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Média	Figura 49
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	-
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.



### 5.2.6. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 8º ano

A análise do livro didático Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018) para o 8º ano inicia-se a partir daqui. Sua primeira edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 356 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Porcentagens.
- (2) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se dois blocos de habilidades a saber:

- (1) **(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
- (2) **(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.  
**(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

O capítulo do volume do 8º ano que aborda especificamente fração, razão e proporção é o capítulo 4 - Proporcionalidade e Porcentagem. Neste capítulo são trabalhados os tópicos (a) proporção; (b) grandezas proporcionais; (c) grandezas diretamente proporcionais; (d) grandezas inversamente proporcionais; e (e) porcentagem. Verificamos que o capítulo 4 apresenta 47 atividades que abordam e exploram os tópicos de (a) a (e) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático estudado com Ciências, que aborda O Cálculo nos Alimentos; há outra seção para o aluno se conectar: Calculando porcentagens; e um resumo no final, trazendo tudo o que foi estudado.

O estudo do capítulo 4 se concentrou em identificar evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) sobre o raciocínio proporcional. Concomitantemente, percebemos que o autor se debruçou na mesma estratégia usada nos volumes anteriores, conduzindo os alunos a extrapolar o conteúdo de Matemática e pelo resgate de conhecimentos estudados anteriormente.

### 5.2.7. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 3ª etapa de análise do livro do 8º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)

Souza (2018) introduz o capítulo abordando o conteúdo de proporção, lembrando conhecimentos já estudados nos volumes anteriores. Logo no início, o autor já chama a atenção para o indicador (4.1) de Shield e Dole (2013), ao trazer ideias de frações e equivalências, por meio de alta evidência, conforme a Figura 50.

**Figura 50 – Frações equivalentes**

<p>Note que as razões <math>\frac{40}{500}</math> e <math>\frac{60}{750}</math> são iguais, pois:</p> $\frac{40}{500} = \frac{2}{25} \qquad \frac{60}{750} = \frac{2}{25}$	<p>Relembrar aos alunos que, quando simplificamos duas frações obtendo frações irredutíveis iguais, então essas frações são equivalentes, como é o caso de <math>\frac{40}{500}</math> e <math>\frac{60}{750}</math>.</p>
--	---

Fonte: SOUZA, 2018, p. 103. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

A seguir, pela Figura 51, temos uma atividade sobre a determinação de razão entre duas grandezas e a comparação entre razões, em uma situação contextualizada. Souza (2018) sugere que o professor pergunte aos alunos se já passaram por uma situação parecida com a apresentada, na qual um mesmo produto é disponibilizado em diferentes modelos de embalagens. Ainda, recomenda conversarem sobre quais estratégias eles utilizam para determinar qual é o mais vantajoso para a compra, sugerindo a escolha da menor razão, calculada pelo preço e a quantidade de produto. Este exemplo remete ao indicador (2.1) - define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão, porém, consideramos como baixa a evidência deste indicador por não terem apresentado claramente esta definição, apesar de a terem ilustrado.

**Figura 51 – Comparação de razões**


7. João foi ao supermercado comprar sabão líquido. Observe ao lado duas embalagens da marca de que ele mais gosta.

a) Para cada produto, escreva a razão entre o preço (R\$) e a quantidade de sabão (L).

b) As razões que você escreveu no item a formam uma proporção? Justifique.

c) João quer comprar o produto mais vantajoso em relação à razão preço por litro. Qual produto ele deve comprar? Explique.

**Resposta esperada: Em ambos os produtos, o preço por litro é o mesmo. Assim, em relação à razão preço por litro, nenhum produto é mais vantajoso que o outro.**



Fonte: SOUZA, 2018, p. 105. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

A Chave 2 de Shield e Dole (2013) sugere que o livro didático explore de várias formas situações que cheguem à ideia de razão, e defina quando uma razão for equivalente à uma proporção. Neste capítulo, encontramos exemplos diversificados de razão. Contudo, não encontramos evidência de definição clara sobre a relação multiplicativa de situações de razão. Assim, apesar de termos as definições formais de razão, com estratégias de trabalho dentro do raciocínio proporcional, ou seja, destacando as razões equivalentes, não foi ressaltada a relação multiplicativa envolvida na proporção. Portanto, classificamos por ser uma baixa evidência de uso da Chave 2, por meio do indicador (2.3) - evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa). Veja a Figura 52:

**Figura 52 – Identificação de razões equivalentes**

4. Em cada item, indique a razão por meio de uma fração. Depois, se possível, simplifique essa fração até torná-la irredutível.

a) A razão entre 2 e 9.  $\frac{2}{9}$

b) A razão entre 8 e 4.  $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$

c) A razão entre 42 e 180.  $\frac{42}{180} = \frac{7}{30}$

d) A razão entre 14 e 60.  $\frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

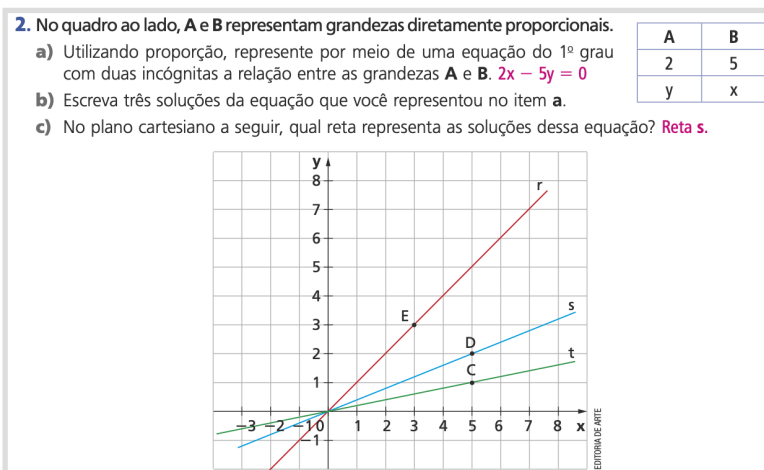
e) A razão entre 16 e 72.  $\frac{16}{72} = \frac{2}{9}$

Agora, identifique os pares de razões que formam uma proporção. **A-E; C-D.**

Fonte: SOUZA, 2018, p. 104. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

Finalizando o capítulo, temos o conteúdo de grandezas proporcionais. Segundo a Chave 5 da estrutura de Shield e Dole (2013), precisa-se de variadas representações para ilustrar que gráficos de situações proporcionais são linhas retas que passam pela origem. Tabelas também podem ser usadas para destacar relações. Assim, encontramos alta evidência dos indicadores (5.1) e (5.2), conforme demonstrado pela Figura 53.

**Figura 53** – Representações de situações de proporção



Fonte: SOUZA, 2018, p. 112. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

O Quadro 21 traz a representação dos resultados que encontramos da análise feita para este livro do 8º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 21** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 8º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018)

<b>Livro: MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 8º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Baixa	Figura 51
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Baixa	Figura 52
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Alta	Figura 50
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Nenhuma	-
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Alta	Figura 53
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Alta	Figura 53
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.2.8. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 2ª etapa de análise do livro do 9º ano

A análise do livro didático Matemática Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018) para o 9º ano inicia-se a partir daqui. Sua primeira edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 356 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Razão entre grandezas de espécies diferentes.
- (2) Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se dois blocos de habilidades a saber:

- (1) **(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
- (2) **(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

O capítulo do volume do 9º ano que aborda especificamente fração, razão e proporção é o capítulo 4 - Proporcionalidade e Funções. Neste capítulo são trabalhados os tópicos (a) razão; (b) proporção; (c) grandezas diretamente proporcionais; e (d) grandezas inversamente proporcionais. Verificamos que o capítulo 4 apresenta 21 atividades que abordam e exploram os tópicos de (a) a (d) citados. Temos uma seção chamada Você Cidadão, que aborda Os Riscos da Velocidade no Trânsito. Ainda, temos uma seção para o aluno se conectar: Construindo e Analisando Gráfico de Função. Além de um resumo no final, trazendo tudo o que foi estudado.

### 5.2.9. Análise do livro MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA - 3ª etapa de análise do livro do 9º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)

O livro do 9º ano aborda a proporcionalidade com foco em razão, proporção e grandezas proporcionais. O que Souza (2018) apresenta de novidade em relação aos volumes anteriores do 7º e 8º ano é uma ênfase com exemplos de razões entre grandezas de diferentes naturezas. Neste sentido, o autor traz o conteúdo de razão com exemplos sobre velocidade média, consumo médio de combustível, densidade demográfica. O conteúdo de proporção é apresentado com situações de igualdade de razões. Já as grandezas proporcionais apresentam estratégias para economia de energia elétrica, exemplos com escala e respeito às leis de trânsito. Essas abordagens permitem-nos dizer que temos evidência de uso da Chave 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa, pois encontramos tarefas e problemas em um contexto cotidiano, familiar para a maioria dos alunos, que oferecem oportunidades para comparar e contrastar situações aditivas e multiplicativas. A seguir, detalhamos as análises com ilustrações.

**Figura 54 – Razão entre grandezas de naturezas diferentes**

#### Velocidade média e consumo médio de combustível

Quando realizamos uma viagem de automóvel, duas medidas que podemos determinar são a **velocidade média** no percurso e o **consumo médio de combustível**.

A velocidade média ( $V$ ) é dada pela razão entre a distância percorrida ( $d$ ) e o tempo gasto no percurso ( $t$ ).

$$V = \frac{d}{t}$$

O consumo médio de combustível ( $C$ ) é dado pela razão entre a distância percorrida ( $d$ ) e a quantidade de combustível consumido ( $q$ ).

$$C = \frac{d}{q}$$

Fonte: SOUZA, 2018, p. 110. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

**Figura 55 – Uso de situações da vida real**

4. Para fazer uma jarra de refresco de fruta, João vai utilizar certo volume de suco concentrado e preparar de acordo com as indicações na embalagem. 4. a)  $\frac{200}{800}$ .



- a) Escreva uma razão entre a quantidade de suco concentrado e a de água, em mililitros, utilizada no preparo desse refresco.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 115. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

Sabemos que as situações proporcionais são aquelas em que duas ou mais grandezas variam de forma diretamente ou inversamente proporcionais. Então, se uma delas aumenta, a outra também aumenta (ou diminui) na mesma proporção. Os exemplos trazidos por Souza (2018) representam situações proporcionais, visto que são ilustradas situações onde a razão entre as grandezas se mantém constante. Veja a Figura 56. Esta ilustração remete à relação multiplicativa da proporcionalidade. Todavia, o autor não deixa ressaltada a relação multiplicativa. É uma informação implícita para o aluno, que precisa deduzir pela observação essa relação. Desta forma, apesar do exemplo ser adequado para o contexto, ele remete a uma baixa evidência do indicador (1.2), unicamente por não explicitar, por não deixar claro que as situações ilustradas se referem a uma relação multiplicativa entre as grandezas.

**Figura 56** – Relação multiplicativa em situações proporcionais

2. Observe no quadro as medidas em que as fotografias podem ser impressas em formato retangular por certa loja na internet.

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)
I	15	10
II	30	24
III	25	20
IV	40	30
V	60	40

a) Escreva, para cada modelo, a razão entre o comprimento e a largura da fotografia impressa. I:  $\frac{15}{10}$ ; II:  $\frac{30}{24}$ ; III:  $\frac{25}{20}$ ; IV:  $\frac{40}{30}$ ; V:  $\frac{60}{40}$ .

b) Agora, determine todas as proporções que podem ser formadas com as razões que você escreveu no item a.  $\frac{15}{10} = \frac{60}{40}$ ,  $\frac{30}{24} = \frac{25}{20}$ .

3. Copie no caderno apenas as fichas cuja razão forma uma proporção com a razão  $\frac{4}{3}$ .

$\frac{44}{33}$	$\frac{70}{175}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{120}{300}$	$\frac{100}{75}$	$\frac{18}{36}$
-----------------	------------------	-----------------	-------------------	------------------	-----------------

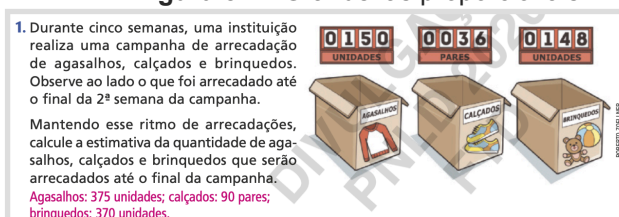
$\frac{44}{33} = \frac{20}{15}$ ,  $\frac{100}{75} = \frac{4}{3}$ ,  $\frac{18}{36} = \frac{4}{3}$ .

Fonte: SOUZA, 2018, p. 115. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

A Figura 57 trabalha a resolução de uma situação envolvendo grandezas diretamente proporcionais, dentro de uma situação cotidiana, autêntica da vida real, que envolve a relação multiplicativa. Porém, essa relação não é explicitada, ela encontra-se implícita no exercício. Novamente, entendemos que, apesar do grande potencial do exemplo, há uma baixa evidência da Chave 1 pelo fato do autor não aprofundar nos conceitos e explicações sobre a proporcionalidade.



**Figura 57 – Grandezas proporcionais**



Fonte: SOUZA, 2018, p. 119. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

Outra crítica que podemos tecer é que ao trabalhar com grandezas proporcionais, Souza (2018) não trouxe o tópico de grandezas não proporcionais. Desta forma, não ofereceu oportunidades de se fazer comparação entre situações proporcionais e as não proporcionais. Assim, não foi apresentado ao aluno exemplos para diferenciar entre comparações aditivas (que não precisam estar relacionadas entre si) e multiplicativas (relacionadas entre si).

Finalizando, o Quadro 22 vem demonstrar os resultados que encontramos da análise feita para este livro do 9º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 22** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 9º Ano - Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018)

<b>Livro: MATEMÁTICA REALIDADE &amp; TECNOLOGIA - 9º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Baixa	Figura 56
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Alta	Figura 55, 57
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Nenhuma	-
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Nenhuma	-
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	-
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	-
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.2.10. Evidências encontradas dos indicadores de Shield e Dole (2013) para a coleção MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA

**Quadro 23** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) na Coleção Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018)

Classificação de uso das Chaves de Shield e Dole (2013)	Matemática Realidade & Tecnologia			
	6º Ano	7º Ano	8º Ano	9º Ano
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>				
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	<b>Baixa</b>
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	<b>Alta</b>
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>				
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	Nenhuma	<b>Baixa</b>	Nenhuma
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	Nenhuma	<b>Baixa</b>	Nenhuma
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>				
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>				
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>				
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	<b>Média</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	Nenhuma	<b>Alta</b>	Nenhuma
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

Adiante, passamos aos resultados apresentados no Quadro 23 para a Coleção Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018), que estão organizados sob as cinco chaves da estrutura definida por Shield e Dole (2013). Cabe ressaltar que nesta coleção a proporção é introduzida no 7º ano e a proporcionalidade no 8º ano.

- ➔ Chave 1: Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.
  - Indicador 1.1) Não são fornecidos exemplos de comparações aditivas e não são fornecidas oportunidades para diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.
  - Indicador 1.2) A relação multiplicativa em situações proporcionais é apresentada, mas não é explicitada, com baixa evidência de uso no livro do 9º ano. Os exemplos trazidos por Souza (2018) representam situações onde a razão entre as grandezas se mantém constante, e remetem à relação multiplicativa da proporcionalidade. Todavia, o autor não deixa evidenciada a relação multiplicativa. É uma informação implícita para o aluno, que precisa deduzir essa relação pela observação.
  - Indicador 1.3) Exemplos e exercícios envolveram comparações autênticas, e explicitaram a relação multiplicativa em situações proporcionais com alta evidência no livro do 9º ano, oferecendo oportunidades para o aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas. Esse livro usou tarefas que possuem alto potencial para o professor desenvolver melhor os conteúdos e apresentar aos alunos uma ampliação do entendimento da relação multiplicativa antes de estimular o uso da ferramenta da regra de três. Contudo, adiante veremos que a Chave 3 não foi atendida.
- ➔ Chave 2: Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.
  - Indicador 2.1) Com baixa evidência, foi definida a relação comparativa

multiplicativa de situações de razão. Exemplo: No livro do 8º ano, o autor apresenta uma atividade sobre a determinação de razão entre duas grandezas e a comparação entre razões, em uma situação contextualizada, na qual um mesmo produto é disponibilizado em diferentes modelos de embalagens, e pede para os alunos determinarem qual é o mais vantajoso para a compra. O livro indica que calcular a razão entre o preço e a quantidade de produto de cada embalagem apontará para qual opção terá um custo/benefício melhor, proporcionando maior vantagem na compra. Este exemplo remete a uma baixa evidência deste indicador por não terem apresentado claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão, apesar de a terem ilustrado.

- Indicador 2.2) Não trouxe que multiplicação e divisão são operações inversas.
  - Indicador 2.3) Encontramos baixa evidência do uso de razões equivalentes (dentro) e relações multiplicativas (entre o pensamento), por meio de exemplos diversificados de razão. Consideramos como baixa por não explorar claramente a definição sobre a relação multiplicativa de situações de razão. Então, apesar de termos as definições formais de razão, com estratégias de trabalho dentro do raciocínio proporcional, ou seja, destacando as razões equivalentes, não foi ressaltada a relação multiplicativa envolvida na proporção.
- ➔ Chave 3: Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.
- Indicador 3.1) Não houve representação na situação de proporção que apoiasse a identificação de relacionamentos dentro e entre eles (dentro da situação e entre ideia da situação de proporção).
  - Indicador 3.2) Não explicitou ligações entre a representação simbólica dentre os tipos de problemas.
  - Indicador 3.3) A introdução da “equação de proporção” formal não foi adiada até que uma vasta experiência com outras representações

tivesse sido alcançada.

➔ Chave 4: Conexão explícita com o conhecimento de fração.

- Indicador 4.1) Exibiu alta evidência de conexões explícitas com ideias de frações e equivalências. Exemplo: Souza (2018) traz atividades que trabalham a obtenção de frações equivalentes para trazer a compreensão de noções iniciais de proporção, e informa que tal assunto será estudado em volumes posteriores a este livro do 6º ano. No livro do 7º ano, a abordagem dos conteúdos sobre frações equivalentes vai focalizar em os alunos compreenderem que o numerador e o denominador de uma fração deve necessariamente ser multiplicado ou dividido pelo mesmo número natural diferente de zero. E que ao se dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural, maior do que 1, estamos fazendo a simplificação da fração.
- Indicador 4.2) Com alta evidência, explorou explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração. Exemplo: os conhecimentos prévios de fração, estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, são explorados no livro quando o professor dialoga com alunos de 6º ano ideias de um texto inicial em que o autor questiona o que ocorre quando se divide em partes iguais o planeta Terra, deixando explícito que o livro didático trabalha a relação parte-todo do conceito de fração. Ainda, no volume 7, o autor traz que uma fração também pode representar uma razão ou o quociente de uma divisão, sendo estes outros dois significados de fração. Ainda, para exemplificar, o autor traz imagens com diversificados níveis de carga de aparelho smartphone por meio de figuras divididas em partes iguais de maneiras distintas, que é a ideia de fração como medida. Essa introdução revela uma conexão explícita com o conhecimento da fração, ao explorar as relações parte de um todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.

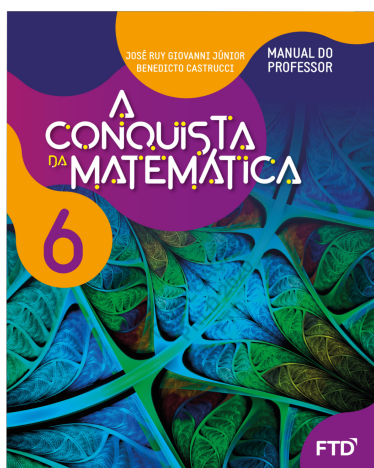
- Indicador 4.3) Sinalizou claramente o significado da notação de fração em uso com alta evidência. Exemplo: atividade - escrita da razão deve levar em consideração a ordem do que é solicitado: razão entre a quantidade de copos de suco concentrado e a de copos de água. No caso, o numerador deve conter a quantidade de copos de suco concentrado (3); e o denominador, a quantidade de copos de água (5). Este exemplo sinaliza o significado da notação de fração em uso (razão).
- ➔ Chave 5: Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.
- Indicador 5.1) Alta evidência de uso de tabelas para destacar as relações multiplicativas no livro do 8º ano.
  - Indicador 5.2) Mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem com alta evidência deste indicador no livro didático do 8º ano.
  - Indicador 5.3) Não utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e / ou fazer previsões.

### 5.3. Análise da Coleção A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

#### 5.3.1. 1ª etapa de análise feita para a coleção A CONQUISTA DA MATEMÁTICA: do 6º ao 9º ano do ensino fundamental

A coleção A Conquista da Matemática, dos autores José Rui Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, 4a edição da Editora FTD, ano 2018, é a que alcançou maior distribuição de exemplares dentre todos da lista de coleções adotadas pelo PNLD 2020 (BRASIL, 2019) - para os anos finais do ensino fundamental. Esta coleção também foi a escolhida por todas as escolas públicas municipais do Município de Sabará/MG, cidade de lotação profissional da autora desta tese.

Figura 58 – Capa do livro  
6º ano



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci, 2018. A Conquista da Matemática. 6º ano

Nessa etapa preliminar, percebi que a coleção apresenta o conteúdo por meio de uma linguagem clara e objetiva, permitindo uma fácil visualização das articulações e contextualização com situações da vida rotineira. Muitas dessas abordagens estão norteadas pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018). O conteúdo é apresentado com detalhamento das situações e atividades propostas ao aluno, juntamente com sugestões que tornam o processo de ensino e aprendizagem mais rico e proveitoso. Além dessas indicações, foi possível visualizar as habilidades e competências a serem desenvolvidas pelo estudo do material. Também, de forma geral, identificamos o crescimento do nível de dificuldade nas tarefas, ou seja, começa com atividades mais simples e, na medida que prosseguimos, o grau de dificuldade ou de requisitos para o desenvolvimento da questão também cresce.

No início de cada Unidade são explicitadas as competências (gerais e específicas) e as habilidades a serem exploradas e desenvolvidas. Disposto em formato de U, o professor encontra o detalhamento das situações e atividades propostas no livro do aluno, juntamente com sugestões para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais rico e proveitoso. Os conteúdos relacionados à razão,



proporção e raciocínio proporcional estão distribuídos nesta coleção, entre os 4 anos finais do ensino fundamental, do 6º ao 9º ano.

### 5.3.2. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 6º ano

Iniciamos a 2ª etapa de análise sob a ótica da nossa pesquisa para o livro didático do 6º ano da coleção A Conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018). Sua quarta edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 372 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.
- (2) Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.
- (3) Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”.
- (4) Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (5) Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se cinco blocos de habilidades a saber:

- (1) **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a

pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

- (2) **(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
- (3) **(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
- (4) **(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (5) **(EF06MA29)** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

As unidades do volume do 6º ano que abordam especificamente fração, razão e proporção são as unidades 5 - A forma fracionária dos números racionais e 6 - A forma decimal dos números racionais. Na unidade 5 são trabalhados os tópicos (a) a ideia de fração - a ideia de fração como parte de um todo; a ideia de fração como resultado da divisão de dois números naturais; (b) problemas envolvendo frações; (c) comparando frações; (d) obtendo frações equivalentes - uma propriedade importante; simplificação de frações: frações irredutíveis; reduzindo duas frações ao mesmo denominador; (e) adição e subtração de frações; (f) a forma mista; (g) as frações e a porcentagem; e (h) probabilidade. Verificamos que o capítulo 5

apresenta 97 tarefas que abordam e exploram os tópicos de (a) a (h) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático com o tratamento da informação - tabela de dupla entrada e gráfico de barras duplas, e a seção “Retomando o que aprendeu”, trazendo tudo o que foi estudado. Na unidade 6, temos os tópicos (i) representação decimal - unidade decimal; números racionais na forma decimal; da forma decimal para a fracionária; a reta numérica; (j) adição e subtração com números na forma decimal; (k) multiplicação com números na forma decimal - multiplicando um número natural por um número na forma decimal; multiplicando com números na forma decimal; potenciação de números na forma decimal; (l) divisão com números na forma decimal - dividindo por um número natural, diferente de zero; dividindo por um número na forma decimal; a divisão não exata: um quociente aproximado; e (m) os números na forma decimal e o cálculo de porcentagens. Verificamos que o capítulo 5 apresenta 81 tarefas que abordam e exploram os tópicos de (i) a (m) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático com tecnologias - tipos de calculadoras, e um resumo no final, trazendo tudo o que foi estudado.

### **5.3.3. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 6º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)**

Nesta terceira etapa, fizemos uma leitura na busca de identificar qual foi a abordagem dada ao conteúdo de razão e proporção neste volume. Assim, buscamos identificar quais conceitos foram trazidos, quais exemplos e contra-exemplos foram apresentados, que tipo de tarefas foram elaboradas. A abordagem dada leva o aluno a desenvolver o raciocínio proporcional? O primeiro critério desta etapa foi estudar o livro, fazendo a leitura do conteúdo, estudando os exemplos com o interesse de aprender o ensino e, então, resolvendo todas as atividades propostas. Neste sentido, estudamos os capítulos do livro do 6º ano durante três tardes, acumulando aproximadamente 12 horas de estudos com foco na aprendizagem.

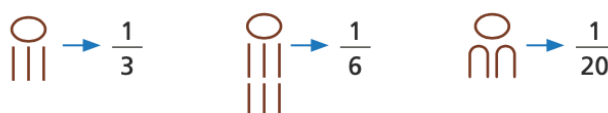
A partir disso, extraímos que a unidade 5 é introduzida com a história da matemática para destacar a origem das frações, a qual veio da necessidade que os

antigos sentiam de resolver problemas práticos de medição, especificamente, medições das terras que margeavam o Rio Nilo, no Egito. Essas terras eram divididas entre os grupos familiares em troca de pagamento de tributos ao Estado. Os tributos eram calculados proporcionalmente à área a ser cultivada. Como o rio sofria inundações, as terras tinham de ser sempre medidas e remarcadas.

**Figura 59** – Origem da fração

Os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de se repartir a unidade de medida.

Os egípcios conheciam as frações de numerador 1, e esta era a forma que eles usavam para representá-las:



EDITORIA DE ARTE

Essas medidas fracionárias não são números naturais, são exemplos de números chamados de números racionais.

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 132. A Conquista da Matemática. 6º ano.


O primeiro conteúdo trabalhado é a ideia de fração como parte de um todo. Os autores sugerem facilitar a compreensão mais significativa dos conceitos com o uso das régua de Cuisenaire, possibilitando a investigação experimental e, por ela, a construção dos conceitos matemáticos necessários para a compreensão do conteúdo, que se dará por meio de material concreto. No livro, Giovanni Júnior e Castrucci (2018) trabalham fração como parte de um todo por meio de figuras de pizza e barras, ou seja, ressaltando o significado de fração como medida. Em seguida, é trabalhada a ideia de fração como resultado da divisão de dois números naturais. Neste tópico, os alunos aprendem a relacionar a representação da fração com a ideia de divisão. Assim, temos o realce de dois daqueles seis significados de fração defendidos por Behr, Lesh, Post e Silver (1983) e o uso da Chave 4 de Shield e Dole (2013). Prosseguindo, os autores trazem os tópicos de problemas envolvendo frações e comparações de frações com variadas proposições didáticas de atividades a serem desenvolvidas com os alunos.


Atendendo a Chave 4 de Shield e Dole (2013), os autores trazem a conceituação de frações equivalentes, sugerindo ao professor iniciar por uma atividade em que os alunos possam manipular algum material para comparar


frações, como as dobraduras feitas de papel sulfite. Eles também ressaltam que as frações são equivalentes porque suas áreas correspondentes são equivalentes, relacionando o conceito de frações equivalentes com a geometria.


Figura 60 – Ideias de fração

4. Cada figura representa um segmento de reta. Escreva as frações que correspondem aos trechos assinalados em azul e aos trechos assinalados em vermelho em cada segmento:

a)   $\frac{7}{8}, \frac{1}{8}$


b)   $\frac{3}{10}, \frac{7}{10}$

c)   $\frac{7}{12}, \frac{5}{12}$

d)   $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$

5. Que fração do ano 7 meses representam?  $\frac{7}{12}$

6. Veja quantos ovos Helena tem para fazer um doce.




Se ela usar 5 desses ovos, que fração da quantidade de ovos Helena vai usar?  $\frac{5}{12}$

7. Ontem foi dia 17 em um mês de 30 dias. Que fração desse mês já se passou?  $\frac{17}{30}$

8. Para encher uma xícara, são necessárias 8 colheres de farinha. Cada colher de farinha representa que fração da quantidade de farinha que se pode colocar na xícara?  $\frac{1}{8}$

9. As figuras mostram o marcador de combustível de um carro.



Se a figura 1 mostra o tanque cheio, escreva qual das outras figuras representa:

a)  $\frac{1}{2}$  tanque? 3      c)  $\frac{3}{4}$  de tanque? 4

b)  $\frac{1}{4}$  de tanque? 2

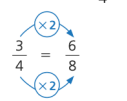
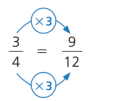
Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 143. A Conquista da Matemática. 6º ano.

Figura 61 – Frações equivalentes

**Uma propriedade importante**

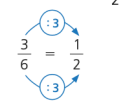
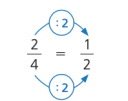
Vimos que  $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}$  e  $\frac{9}{12}$  são exemplos de frações equivalentes.

Partindo de  $\frac{3}{4}$ , temos:

As frações  $\frac{3}{6}, \frac{2}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  também são exemplos de frações equivalentes.

Para chegar a  $\frac{1}{2}$ , temos:

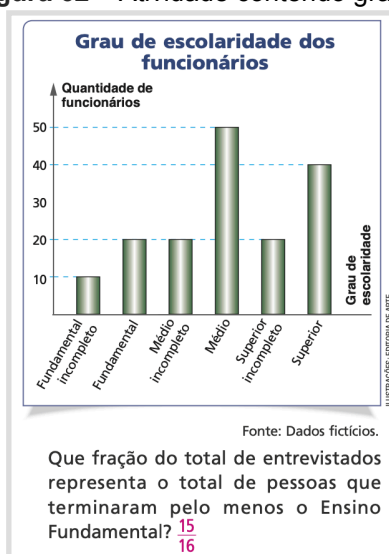



Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos sempre uma fração equivalente à fração dada.

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 143. A Conquista da Matemática. 6º ano.

Neste capítulo, também são trabalhados: simplificações de frações - frações irredutíveis, e redução de duas frações ao mesmo denominador. A Chave 5, pelo indicador (5.3), recomenda utilizar gráficos para extrapolar e interpolar soluções e / ou fazer previsões. Dentre as atividades propostas neste capítulo, encontramos o uso de tal indicador.

Figura 62 – Atividade contendo gráfico

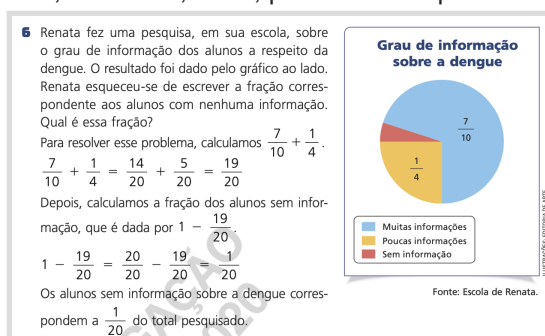


Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 145. A Conquista da Matemática. 6º ano.

Os autores avançam com o conteúdo de adição e subtração de frações. São propostas atividades iniciais esperando-se que os alunos cheguem à conclusão de que, para adicionar ou subtrair números representados por frações que têm o mesmo denominador, adicionamos ou subtraímos os numeradores e conservamos o denominador. Para as frações de denominadores diferentes, Giovanni Júnior e Castrucci (2018) recomendam proceder de maneira que os alunos cheguem à conclusão de que, para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes, primeiro encontramos frações equivalentes às frações dadas com denominador comum. Em seguida, efetuamos a adição ou a subtração com essas frações.

Figura 63 – Adição e subtração de frações


Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 152. A Conquista da Matemática. 6º ano.



Para aumentar a compreensão em um tópico extra, os autores trouxeram uma ilustração para os alunos se organizarem e desenvolverem. A recomendação é de iniciar a seção solicitando aos alunos que leiam o texto e depois explicarem o que entenderam. A seguir, está a questão apresentada no livro. Outra dica para iniciar a resolução da situação, é incentivar os alunos a organizar os dados e a calcular a metade, a terça parte e depois a nona parte de 35 camelos para constatar que não são divisões exatas; e lembrar de validar as hipóteses levantadas pelos alunos.

Figura 64 – Problemas com frações

O capítulo III de O homem que calculava narra uma aventura impressionante. Beremiz e um amigo viajaram rumo a Bagdá em um único camelo, quando encontraram três irmãos discutindo acaloradamente. Curioso, Beremiz quis saber o motivo da discussão. Os irmãos contaram que tinham recebido como herança 35 camelos e que, segundo a vontade do pai, o mais velho deveria receber a metade; o irmão do meio deveria receber a terça parte; e o irmão caçula, a nona parte da herança. Porém, discutiam por não saber como dividir daquela forma os 35 camelos, já que a metade, a terça e a nona parte de 35 não são exatas.



**Vamos ver o que Beremiz propôs**

Os 35 camelos deveriam ser divididos da seguinte forma:

$\frac{1}{2}$  → irmão mais velho       $\frac{1}{3}$  → irmão do meio       $\frac{1}{9}$  → irmão caçula

Como dividir um único camelo em partes? Após ouvir o problema, Beremiz Samir apresentou uma solução imediata. Ele disse:

“Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!”

TAHAN, M. O homem que calculava. 68 ed. Rio de Janeiro: Record, 2006, p. 22.

A solução encontrada pelo homem que calculava resolveu o problema dos irmãos. Ele juntou o seu camelo aos 35, fez a divisão de acordo com o estabelecido pelo pai, e ainda sobraram dois camelos!

Tente descobrir como Beremiz calculou. **Resposta pessoal.**

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 155. A Conquista da Matemática. 6º ano.

Para dar continuidade ao trabalho com frações, Giovanni Júnior e Castrucci (2018) apresentam a forma mista de números racionais. Sugerem aos professores que utilizem materiais manipuláveis para auxiliar na visualização e na representação dos exemplos apresentados no livro e a proporem outras situações para eles representarem com desenhos. Novamente, os autores instigam a imaginação e o raciocínio dos alunos.

Figura 65 – A forma mista de números racionais

**9.** Na imagem a seguir há 21 copos iguais. Sete desses copos estão cheios de suco, sete têm suco até a metade e sete estão vazios. De que maneira podemos colocá-los em três bandejas, de modo que cada bandeja tenha o mesmo número de copos e a mesma quantidade de suco? **7 cheios + 7 pela metade →  $10\frac{1}{2}$ ;  $3\frac{1}{2}$  em cada bandeja.**



Para achar a combinação de copos de cada bandeja, comece colocando os copos de suco até completar  $3\frac{1}{2}$ . Depois, complete com os copos vazios até o total de 7 copos em cada bandeja. Veja:

1ª bandeja:



2ª bandeja:



3ª bandeja:

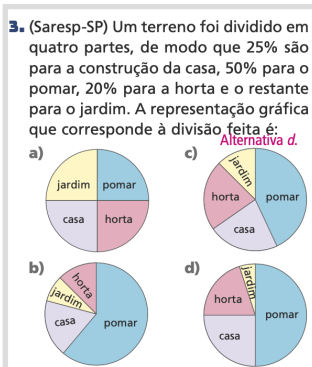


Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 159. A Conquista da Matemática. 6º ano.

A unidade 5 vai ser finalizada de forma a ser uma base introdutória para o conteúdo da unidade 6 - A Forma Decimal dos Números Racionais. Assim, neste

último tópico, os alunos são convidados a identificar a taxa percentual como uma fração de denominador 100. Os autores vão estimular a contextualização do ensino-aprendizagem e o uso de situações com comparações autênticas da vida dos alunos. Giovanni Júnior e Castrucci (2018) trazem que esse conteúdo, porcentagens, está presente em diversas situações do cotidiano, como situações que envolvem uma compra parcelada ou descontos oferecidos em compras à vista. Os autores enfatizam aos professores a importância de fazerem uma abordagem do conteúdo partindo das experiências dos alunos. Além disso, a unidade 6 tem por objetivo levar o aluno a reconhecer a forma decimal para representar os números racionais, aprofundando e organizando os conhecimentos prévios dos alunos. São associados os números decimais com as frações decimais. O foco está na compreensão de que um mesmo número pode ser representado de diferentes maneiras; neste caso, um número pode ser escrito na forma de fração ou na forma decimal. Novamente, os autores trazem que o trabalho com materiais manipuláveis auxilia no desenvolvimento do conceito de números na forma decimal, como o material dourado.

**Figura 66 – Porcentagem**



Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 163. A Conquista da Matemática. 6º ano.

Assim, o Quadro 24 apresenta os resultados obtidos da análise do livro do 6º ano, denotando alta evidência para cada um dos três indicadores da Chave 4, que se refere a: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Os Indicadores de que esta meta de aprendizagem atendeu a Chave 4 deu-se pelo fato, de, ao analisarmos o material didático, termos encontrado: (1) conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (2) as relações parte/fração inteira e relação parte/parte-todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (3) sinalização clara do



significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente).

**Quadro 24** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 6º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018)

<b>Livro: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 6º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Alta	Figura 61
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Alta	Figura 60
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Alta	Figura 60
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	-
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	-
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.3.4. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 7º ano

Para esta segunda etapa, iniciamos a análise sob a ótica da nossa pesquisa para o livro didático do 7º ano da coleção A Conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018). Sua quarta edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 372 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Frações e seus significados: como parte de um inteiro, resultado da divisão, razão e operador.
- (2) Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.
- (3) Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se três blocos de habilidades, a saber:

- (1) **(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração  $\frac{2}{3}$  para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
- (2) **(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas

propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

- (3) **(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

As unidades do volume do 7º ano que abordam especificamente fração, razão e proporção são as unidades 4 - O conjunto dos números racionais e 7 - Grandezas proporcionais. Na unidade 4 são trabalhados os tópicos (a) os números racionais - módulo ou valor absoluto de um número racional; a reta numérica; (b) adição algébrica de números racionais; (c) multiplicação com números racionais - multiplicação de números racionais na forma decimal; multiplicação de números racionais na forma de fração; (d) divisão com números racionais - divisão com números racionais na forma decimal; divisão com números racionais na forma de fração; (e) potenciação de números racionais - expoente inteiro negativo; (f) raiz quadrada exata de números racionais; e (g) média aritmética e média aritmética ponderada. Verificamos que o capítulo 5 apresenta 83 tarefas que abordam e exploram os tópicos de (a) a (g) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático com educação financeira - a ciência dos preços; e um tópico sobre tratamento da informação - análise de tabelas e gráficos com números racionais negativos. Há também a seção “Retomando o que aprendeu”, trazendo tudo o que foi estudado. Na unidade 7, temos os tópicos (h) razão - razões escrita na forma decimal; razões escritas na forma percentual; (i) proporção - propriedade fundamental das proporções; números diretamente proporcionais; números inversamente proporcionais; grandezas diretamente proporcionais; grandezas inversamente proporcionais; e (j) regra de três - regra de três simples; regra de três composta. Verificamos que a unidade 7 apresenta 74 tarefas que abordam e exploram os tópicos de (h) a (j) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático com educação financeira - mesada; e um tópico sobre tratamento da informação - construindo um gráfico de setores. Por fim, tem um resumo no final para retomar tudo o que foi estudado.

### **5.3.5. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 7º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)**

O foco do capítulo 4 são os números racionais. Os autores introduzem ressaltando a extrema importância deste conhecimento na melhor compreensão e atuação no mundo cotidiano, uma vez que esses números estão presentes em grande parte da nossa vida, de forma ampla e significativa. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 100) trazem ilustrações desse uso, como, por exemplo “em receitas culinárias, dosagem de materiais de limpeza e higiene, jornais e revistas (apresentação para análise de dados nas reportagens ou em gráficos e tabelas), problemas escolares, dentre outros.” Os autores também exploram o uso da reta numérica, representando e comparando os números racionais em pontos da reta. Avançando, são introduzidas as operações com números racionais: adição, multiplicação, divisão, potenciação, raiz quadrada, média aritmética. As atividades propostas para fixação desses aprendizados são limitados a “calcule”, “informe o valor de”, “determine o número”; de forma que não estimulam a descoberta, a ampliação do conhecimento, nem a curiosidade dos alunos.

A unidade 7 apresenta o estudo da proporcionalidade entre grandezas, aborda os conceitos de razão, proporção, grandezas direta e inversamente proporcionais e regra de três, aplicando-os na resolução de problemas. Para trabalhar os conceitos, os autores trazem situações do cotidiano, situações do dia a dia, como receitas culinárias, propícias para desenvolver os conceitos de razão e de proporção; ou seja, esperamos encontrar o uso de exemplos e exercícios em comparações autênticas, que propiciam a contextualização, conforme os indicadores da Chave 1 de Shield e Dole (2013). Essas atividades têm como objetivo levar os alunos a representarem e calcularem razões na forma decimal e percentual; e ampliar e consolidar os conhecimentos que os alunos construíram sobre proporções. Contudo, novamente, constatamos que são atividade do tipo “calcule”, “resolva” ou “determine o valor de x”.

Já a introdução dos números diretamente proporcionais trouxe uma atividade para verificar a percepção dos alunos a respeito do conceito de números diretamente proporcionais, mesmo sem o conceito ter sido apresentado

formalmente, de forma que os alunos respondam às questões utilizando raciocínio lógico. Esta introdução é a construção da base para o próximo tópico, que são grandezas direta e inversamente proporcionais. As atividades propostas aos alunos ao longo desta seção também se enquadram como sendo para verificarem o conhecimento e resolverem os cálculos.


Figura 67 – Números proporcionais

**Números diretamente proporcionais**

**PENSE E RESPONDA** Resoluções na p. 315

Responda às questões no caderno.

1. Em cada uma das cenas aparecem pessoas chegando em um chá de bebê. Cada pessoa convidada levou dois pacotes de fraldas. Observe:



a) É correto afirmar que, quanto maior for o número de pessoas no chá de bebê, maior será o número de pacotes de fraldas? **Sim.**

b) Chegaram 6 convidados. Quantos pacotes de fraldas eles levaram? **12 pacotes de fraldas.**

c) Se tivesse chegado o dobro de convidados, quantos pacotes de fraldas levariam? Comparando com a quantidade do item anterior, o que aconteceu? **24 pacotes de fraldas. O número de pacotes também dobrou.**

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 216. A Conquista da Matemática. 7º ano.

Para o ensino e aprendizado de grandezas direta e inversamente proporcionais, Giovanni Júnior e Castrucci (2018) consideraram o que os alunos já sabem a respeito de números proporcionais para compreenderem os conceitos envolvidos aqui. Eles trazem situações cotidianas e conduzem os alunos a apresentarem outros exemplos de situações que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais. Importante trazer que neste tópico, quando é trazida uma variedade de representações de situações de proporção, temos o uso de dois indicadores da Chave 5 de Shield e Dole (2013): (5.1) utilizar tabelas para destacar as relações multiplicativas; (5.2) mostrar que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem. A seguir, apresentamos uma situação ilustrativa.

Figura 68 – Grandezas proporcionais e tabelas

Analisando a tabela, você pode notar que:

- se o número de convidados duplica, a quantidade de carne também duplica;
- se o número de convidados triplica, a quantidade de carne também triplica.

As duas grandezas aqui envolvidas (o número de convidados e a quantidade de carne) são chamadas **grandezas diretamente proporcionais**.

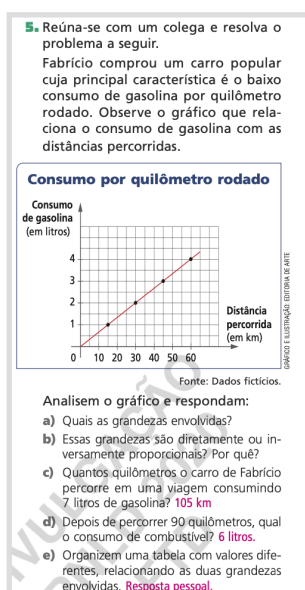
Quantidade de carne	
Número de convidados	Carne comprada (em kg)
50	10
100	20
150	30

Fonte: Dados fictícios.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando, dobrando uma delas, a outra também dobra; triplicando uma delas, a outra também triplica, e assim por diante.

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 220. A Conquista da Matemática. 7º ano.

Figura 69 – Grandezas proporcionais e gráficos



Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 223. A Conquista da Matemática. 7º ano.

Giovanni Júnior e Castrucci (2018) vão introduzir a relação entre a regra de três e os conceitos de grandezas e números direta e inversamente proporcionais. Esta abordagem vai ser o oposto do recomendado por Shield e Dole (2013) pela Chave 3, quando orientam “adiar” a introdução do algoritmo de proporção padrão. O esperado pelas pesquisas é que os problemas de solução das atividades sejam baseados em representação simbólica consistente para problemas que compartilham a mesma estrutura até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes, ao invés de apresentar a equação de proporção formal. Contudo, os conceitos de regra de três simples e regra de três compostas são ensinados e trabalhados por meio de atividades que classificamos como “calcule” ou “resolva”.

Figura 70 – Regra de três Simples

Em um treino de automobilismo, um piloto fez parte do percurso em 18 segundos, registrados pelo cronômetro, com uma velocidade média de 200 km/h. Se a velocidade média fosse de 240 km/h, qual seria o tempo gasto nessa parte do percurso? Vamos representar por  $x$  o tempo procurado.

Se duplicarmos a velocidade inicial do carro, o tempo gasto no percurso cairá pela metade, e assim por diante. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais. Assim, os números 200 e 240 são inversamente proporcionais aos números 18 e  $x$ .

Para isso, organizamos o quadro a seguir.

Velocidade	Tempo
200 km/h	18 s
240 km/h	$x$

Dai, temos:

$$\frac{200}{240} = \frac{x}{18} \Rightarrow 200 \cdot 18 = 240 \cdot x \Rightarrow 3600 = 240x \Rightarrow 240x = 3600 \Rightarrow x = \frac{3600}{240} \Rightarrow x = 15$$

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 225. A Conquista da Matemática. 7º ano.

O Quadro 25 apresenta os resultados da análise deste livro do 7º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 25** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 7º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018)

<b>Livro: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 7º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Nenhuma	-
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Nenhuma	-
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Alta	Figura 68
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Alta	Figura 69
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.3.6. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 8º ano

Nesta segunda etapa, fizemos uma leitura na busca de identificar qual foi a abordagem dada ao conteúdo de razão e proporção neste volume, sob a ótica da nossa pesquisa para o livro didático do 8º ano da coleção A Conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018). Sua quarta edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 372 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se:

- (1) **(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

A unidade do volume do 8º ano que aborda especificamente razão e proporção é a unidade 9 - Estudo de Grandezas. Na unidade 9 são trabalhados os tópicos (a) Grandezas - razão e proporção; grandezas proporcionais; grandezas não proporcionais; representação gráfica; (b) Algumas razões especiais - velocidade média; escala; densidade de um corpo; densidade demográfica; (c) grandezas diretamente proporcionais; (d) grandezas inversamente proporcionais; e (e) Regra de três - regra de três simples; regra de três composta. Verificamos que o capítulo 9 apresenta 69 tarefas que abordam e exploram os tópicos de (a) a (e) citados. Temos uma seção que integra o conteúdo matemático com o tratamento da informação - interpretando os significados das informações, e a seção “Retomando o que aprendeu”, trazendo tudo o que foi estudado.



### 5.3.7. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 8º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)

A unidade 9 trabalha o estudo de grandezas. Nesse momento, os autores retomam os conceitos de razão e proporção para que, na sequência, sejam explorados, com maior profundidade, o reconhecimento de relações proporcionais e não proporcionais entre grandezas. O primeiro conceito apresentado é que a igualdade de razões equivalentes nomeamos de proporção. Shield e Dole (2013) consideram a importância de se definir claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão, que envolve a estrutura de razões equivalentes, consoante o indicador 2.1 da Chave 2. Pela Figura 71, encontramos alta evidência de uso do referido indicador, inclusive, por trazerem como as quantidades se relacionam umas com as outras, ao mostrarem pro aluno que “a cada 4 pontos feitos, 1 foi desse jogador. Assim, temos a razão  $\frac{1}{4}$ ”.

**Figura 71 – Razões equivalentes**

Considere a situação a seguir.


Em um jogo de basquete, determinado jogador fez 23 dos 92 pontos marcados pela sua equipe em certa partida. A razão entre o número de pontos feitos por esse jogador e o total de pontos da partida é dada por:  $\frac{23}{92}$ .

No exemplo dado, podemos afirmar que a cada 4 pontos feitos, 1 foi desse jogador. Assim, temos a razão  $\frac{1}{4}$ .

As razões são equivalentes; portanto, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\frac{23}{92} = \frac{1}{4}$$

A essa igualdade, damos o nome de **proporção**.



LEONARD ZHUKOVSKIY/SHUTTERSTOCK.COM

Kevin Durant, jogador da seleção norte-americana de basquete, nos Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro. 2016.

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 250. A Conquista da Matemática. 8º ano.

O uso integral da Chave 2 requer que o livro didático seja explícito sobre a relação multiplicativa presente em todas as situações de razão, e que proponham, de variadas formas, tarefas que se fundamentem nas definições formais de razão e proporção. Ao apresentar as razões equivalentes, os autores apresentaram somente o pensamento dentro do raciocínio proporcional, sem ressaltar o pensamento entre proporções, que evidencia a relação multiplicativa.


Prosseguindo, encontramos oportunidades para o aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas, ao encontrarmos situações de grandezas proporcionais (multiplicativa), Figura 72; e grandezas não proporcionais (aditiva), Figura 73. O que nos remete a uma alta evidência do indicador 1.1 - oferece oportunidades para aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas. Também, encontramos baixa evidência do indicador 1.2 - explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais. Essa classificação foi considerada baixa pois não houve formalização clara de que, na relação multiplicativa, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta na mesma proporção; ou se uma diminui, a outra diminui na mesma proporção; ou seja, existe uma relação constante que não foi explicitada, apesar de apresentada pela Figura 72.

**Figura 72 – Grandezas proporcionais**

Para asfaltar certa região retangular, de 25 m por 60 m, usamos 2 340 L de betume. Qual volume de betume é necessário para asfaltarmos outra região retangular, de 80 m por 60 m? Para resolver essa situação, vamos construir um quadro, relacionando a área a ser asfaltada e a quantidade de betume necessário.

Área retangular a ser asfaltada (em m <sup>2</sup> )	Volume de betume (em L)
$25 \times 60 = 1\,500 \text{ m}^2$	2 340
$80 \times 60 = 4\,800 \text{ m}^2$	x

Observe que uma das dimensões do terreno se manteve. A outra dimensão aumentou 3,2 vezes ( $80 : 25 = 3,2$ ). Assim, o volume de betume necessário também deverá aumentar em 3,2 vezes. Dessa maneira,  $2\,340 \times 3,2 = 7\,488$ . O volume necessário de betume será de 7 488 L.



Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 251. A Conquista da Matemática. 8º ano.

**Figura 73 – Grandezas não proporcionais**

A escala de temperatura Fahrenheit é muito utilizada nos países de língua inglesa. Para converter uma temperatura, medida em graus Celsius (°C) para graus Fahrenheit (°F) é preciso multiplicar a temperatura em °C por 1,8 e somar 32. Observe o quadro a seguir.


Medida em grau Celsius (°C)	Medida em grau Fahrenheit (°F)
10	50
20	68

Assim, 10 °C correspondem a 50 °F e 20 °C, a 68 °F. As duas escalas termométricas não são proporcionais, pois, ao dobrarmos a temperatura em graus Celsius, isso não se repetirá na escala Fahrenheit.

**PENSE E RESPONDA** Resoluções a partir da p. 289

Um bebê nasceu com 3,5 kg e 50 cm; ao final do primeiro ano, ele está com 75 cm. Podemos afirmar que, aos 20 anos, esse bebê terá 1 500 cm, ou seja, 15 m? Explique seu raciocínio.

Não, pois a idade de uma pessoa e sua altura não são grandezas proporcionais.



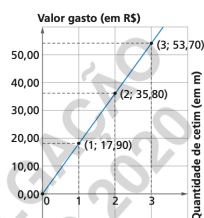
Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 252. A Conquista da Matemática. 8º ano.

Giovanni Júnior e Castrucci (2018) apresentam (a) tabelas para destacar as relações entre grandezas, e (b) representações gráficas para ilustrar que gráficos de situações proporcionais são linhas retas que passam pela origem, remetendo a uma alta evidência dos indicadores 5.1 e 5.2, conforme Figura 74. Para reforçar, os autores contrastam com outros gráficos que não passam pela origem do plano cartesiano, que, portanto, representam situação não proporcional, como apresentado pela Figura 75.

**Figura 74 – Representação de grandezas proporcionais**

Uma costureira está fazendo a tabela de preço dos vestidos que vai produzir. Ela sabe que o preço de 1 metro de cetim custa R\$ 17,90. Decidiu fazer um quadro com valores para saber o quanto vai gastar, dependendo da quantidade de cetim que precisará comprar, depois representou em um gráfico. Observe.

Quantidade de cetim (em m)	Valor gasto (em R\$)
1	17,90
2	35,80
3	53,70



Com a representação gráfica, ela consegue perceber que, se precisar de 2,5 m de tecido, por exemplo, vai gastar por volta de R\$ 45,00.

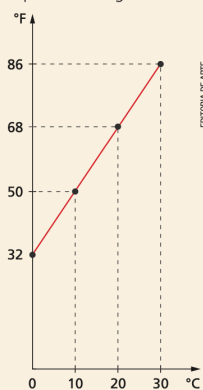
Podemos dizer que o valor gasto depende da quantidade de metros. Assim, se chamarmos o valor gasto em reais de  $y$  e a quantidade de cetim em metros, de  $x$ , temos:  $y = 17,9 \cdot x$ .

Com essa expressão, podemos calcular que para 2,5 metros de cetim essa costureira pagará R\$ 44,75.

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 253. A Conquista da Matemática. 8º ano.

**Figura 75 – Representação de grandezas não proporcionais**

Se julgar oportuno, construir com os alunos o gráfico que relaciona a temperatura em graus Celsius e a temperatura em graus Fahrenheit a partir da relação:  $F = 32 + 1,8 \cdot C$ , em que  $F$  representa a temperatura em graus Fahrenheit e  $C$  representa a temperatura em graus Celsius.



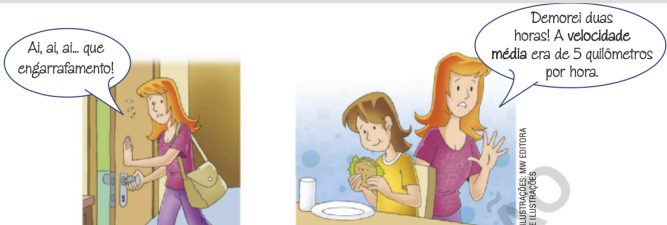
Destacar aos alunos que esse gráfico é uma reta que, diferente dos outros casos, não passa pela origem do plano cartesiano.

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 253. A Conquista da Matemática. 8º ano.

Shield e Dole (2013), por meio da Chave 3, recomendam que seja feita uma representação simbólica significativa para os pensamentos dentro (razões equivalentes) e entre (relações multiplicativas) nas situações de proporção. A instrução é que os livros didáticos forneçam os procedimentos de solução baseados em representações simbólicas consistentes para problemas que compartilham a mesma estrutura. Com isso, a introdução da “equação de proporção” formal é adiada até que uma ampla experiência com outras representações seja alcançada.

Todavia, como consequência da falta de demonstração de estratégias dentro e entre, falta o suporte para a identificação de estratégias dentro e entre. Assim, a abordagem que Castrucci e Giovanni Júnior (2018) deram para problemas de valor ausente com velocidade, preço por unidade, escala, densidade, que poderiam ser trabalhados com o mesmo raciocínio, foi a introdução de procedimento de cálculo. O método adotado de calcular, conforme a Figura 76, é uma forma produtiva de chegar a uma resposta, mas pesquisas mostram que a introdução precoce de procedimentos dificulta o entendimento do raciocínio proporcional. Então, esta tarefa sobre a velocidade média com manipulação da fórmula  $v = d/t$  não dá oportunidade aos alunos de abordar os problemas com intuição, o que contraria uma escolha consciente de adiar a introdução de procedimentos para não confundir a compreensão dos alunos. O mesmo podemos afirmar para as abordagens dada pelos autores às razões especiais como escala, densidade de um corpo e densidade demográfica, todos esses trabalhados neste volume por meio da aplicação de fórmulas.

Figura 76 – Razões especiais



Demorei duas horas! A velocidade média era de 5 quilômetros por hora.

Ai, ai, ai... que engarrafamento!

Denomina-se **velocidade média** a razão entre a distância total percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

Considere esta situação:

1 Um trem percorreu a distância de 453 km em 6 horas. Qual foi a velocidade média do trem nesse percurso?

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{453 \text{ km}}{6 \text{ h}} = 75,5 \text{ km/h}$$

A velocidade média do trem foi de 75,5 km/h. Lê-se: 75,5 quilômetros por hora.

velocidade média =  $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$

ILUSTRAÇÕES: WVI EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 255. A Conquista da Matemática. 8º ano.

O Quadro 26 apresenta os resultados da análise deste livro do 8º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 26** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 8º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018)

<b>Livro: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 8º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Alta	Figuras 72 e 73
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Baixa	Figura 72
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Alta	Figura 71
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Baixa	Figura 71
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Nenhuma	-
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Nenhuma	-
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Alta	Figura 74
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Alta	Figura 74
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.3.8. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 2ª etapa de análise do livro do 9º ano

Nesta segunda etapa, fizemos uma leitura na busca de identificar qual foi a abordagem dada ao conteúdo de razão e proporção neste volume, sob a ótica da nossa pesquisa para o livro didático do 9º ano da coleção A Conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018). Sua quarta edição, utilizada em nossa análise, foi publicada em 2018, contendo 372 páginas. O manual do professor e o livro didático trabalham os seguintes objetos de conhecimento para o conteúdo de proporcionalidade:

- (1) Razão entre grandezas de espécies diferentes.
- (2) Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Em relação às habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pretendidas pelo autor a serem desenvolvidas pelo professor com o aluno durante as aulas de Matemática, tem-se:

- (1) **(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferente, como velocidade e densidade demográfica.
- (2) **(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

A unidade do volume do 9º ano que aborda especificamente razão e proporção é a unidade 5 - Proporção e semelhança. Na unidade 5 são trabalhados os tópicos (a) razão e proporção; (b) razão entre segmentos; e (c) segmentos proporcionais. Verificamos que a unidade 5 apresenta 11 tarefas que abordam e exploram os tópicos de (a) a (c) citados. Temos, ainda, a seção “Retomando o que aprendeu”, trazendo tudo o que foi estudado.

### 5.3.9. Análise do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 3ª etapa de análise do livro do 9º ano usando os indicadores de Shield e Dole (2013)

Neste volume, a proporcionalidade é apresentada por meio da temática proporção e semelhança. Castrucci e Gionvanni Júnior (2018) trazem proposições de atividades com o objetivo de levar os alunos a retomarem e ampliarem os conceitos de razão e proporção, trabalhando com mais exemplos. Neste sentido, os autores voltam nos conceitos anteriores intencionalmente para familiarizar os alunos com os temas, facilitando a compreensão dos próximos conteúdos. O foco é chegar até a ideia de proporção com aplicação em Geometria, foco da unidade. Inicialmente, a estratégia é apresentar razão entre segmentos e segmentos proporcionais.

Figura 77 – Segmentos proporcionais

**Segmentos proporcionais**

Pelas definições de proporção e razão de segmentos, podemos dizer que quatro segmentos, AB, CD, EF e GH, nessa ordem, são proporcionais quando a razão entre as medidas dos dois primeiros for igual à razão entre as medidas dos dois últimos, ou seja:

$$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \text{ e } \overline{GH} \text{ são, nessa ordem, proporcionais, quando } \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Lembre-se de que as medidas dos segmentos devem estar na mesma unidade para formar a proporção. Considere, então, as seguintes situações:

**1** Os segmentos  $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $CD = 6 \text{ cm}$ ,  $EF = 8 \text{ cm}$  e  $GH = 12 \text{ cm}$  formam, nessa ordem, uma proporção?

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} \quad \frac{EF}{GH} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Logo, os segmentos AB, CD, EF e GH, nessa ordem, são proporcionais.

**2** Quatro segmentos, AB, MN, PQ e XY, nessa ordem, são proporcionais. Sabendo que  $AB = 5 \text{ cm}$ ,  $MN = 15 \text{ cm}$  e  $PQ = 4 \text{ cm}$ , vamos encontrar a medida de XY.

Como  $\overline{AB}, \overline{MN}, \overline{PQ}$  e  $\overline{XY}$  são proporcionais, temos:  $\frac{AB}{MN} = \frac{PQ}{XY}$ .

Mas  $\frac{AB}{MN} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Então:  $\frac{PQ}{XY} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{XY} = \frac{1}{3} \Rightarrow XY = 12$

Assim, a medida de XY é 12 cm.

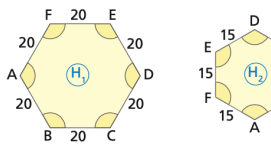
Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 149. A Conquista da Matemática. 9º ano.

Os autores avançam para a introdução de novos conceitos que se fundamentam na proporcionalidade, no campo da geometria. São trazidos tópicos como teorema de Tales; figuras semelhantes, envolvendo escala, ou seja, ampliação e redução; até chegar em figuras geométricas semelhantes, levando-os a identificar polígonos semelhantes, a compreender as condições de semelhança desses polígonos, a aplicar essas condições para resolver problemas e compreender e aplicar a propriedade do perímetro em polígonos semelhantes. Neste aspecto, não vamos debruçar em análises, considerando que nosso objeto de estudo são os

capítulos que abordam diretamente a proporcionalidade como fundamento para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Assim, apesar de serem tópicos baseados na proporcionalidade, somente descrevemos a abordagem, em virtude dos autores trazerem esses conteúdos juntamente com o aprofundamento dos conceitos de razão e proporção. E, da mesma forma como procedemos com as outras duas coleções, não analisaremos sob as lentes de Shield e Dole (2013) a proporcionalidade encontrada dentro da geometria. A Figura 78, reflete a estratégia.

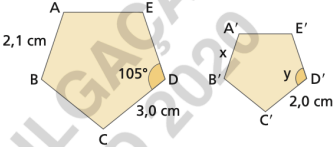
Figura 78 – Polígonos semelhantes

3. Os hexágonos  $H_1$  e  $H_2$  são regulares; logo, são semelhantes.



Qual é a razão de semelhança entre  $H_1$  e  $H_2$ ?  $\frac{4}{3}$

6. Sabe-se que os pentágonos ABCDE e  $A'B'C'D'E'$  são semelhantes; o lado  $\overline{CD}$  é correspondente a  $\overline{C'D'}$  e o lado  $\overline{AB}$  é correspondente a  $\overline{A'B'}$ .



a) Qual a razão de semelhança entre ABCDE e  $A'B'C'D'E'$ ?  $\frac{3}{2}$  ou 1,5.

b) Qual a medida  $y$  indicada?  $105^\circ$

c) Qual a medida  $x$  indicada? 1,4 cm

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 163. A Conquista da Matemática. 9º ano.

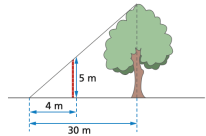
Finalizando a seção, a abordagem é para semelhança de triângulos, que também está baseada na proporcionalidade, conforme a Figura 79, a seguir. Percebemos a estratégia de se estabelecer conexões entre os diferentes tópicos ao longo do volume para ilustrar que o mesmo raciocínio proporcional é aplicável em várias situações e, portanto, isso pode levar os alunos a compreenderem a importância desta temática central da Matemática que é o raciocínio proporcional.

Figura 79 – Triângulos semelhantes

2. Caio tem um carrinho de brinquedo que é uma miniatura do carro de seu pai. A razão entre o comprimento do carro do pai e o comprimento do carro de Caio é  $\frac{14}{3}$ . Se o carro de Caio tem 0,9 m de comprimento, qual é o comprimento do carro do pai de Caio? **Alternativa b.**

a) 4 m      c) 4,5 m      e) 3,6 m  
b) 4,2 m      d) 4,8 m

3. Para determinar a altura de uma árvore, utilizou-se o esquema a seguir.



Nessas condições, qual é a altura da árvore? **Alternativa c.**

a) 35 m      c) 37,5 m      e) 40 m  
b) 36 cm      d) 38,5 m

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci; 2018, p. 172. A Conquista da Matemática. 9º ano.



O Quadro 27 apresenta os resultados da análise deste livro do 9º ano, organizados sob os cinco objetivos de aprendizagem da estrutura definida por Shield e Dole (2013).

**Quadro 27** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) no livro 9º Ano - A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018)

<b>Livro: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 9º Ano</b>		
<b>Uso das Chaves de Shield e Dole (2013)</b>		
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	-
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	-
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	-
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	-
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	-
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	-
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	-
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Nenhuma	-
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Nenhuma	-
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Nenhuma	-
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>	<b>Evidência</b>	<b>Exemplo</b>
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	-
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	-
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	-

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

### 5.3.10. Evidências encontradas dos indicadores de Shield e Dole (2013) para a coleção A Conquista da Matemática

**Quadro 28** - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) na Coleção A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018)

Classificação de uso das Chaves de Shield e Dole (2013)	A Conquista da Matemática			
	6º Ano	7º Ano	8º Ano	9º Ano
<b>CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.</b>				
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	Nenhuma	<b>Alta</b>	Nenhuma
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	Nenhuma	<b>Baixa</b>	Nenhuma
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.</b>				
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	Nenhuma	<b>Alta</b>	Nenhuma
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	Nenhuma	<b>Baixa</b>	Nenhuma
<b>CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.</b>				
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>				
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	<b>Alta</b>	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>				
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	<b>Alta</b>	<b>Alta</b>	Nenhuma
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa.

Adiante, passamos aos resultados apresentados no Quadro 28 para a Coleção A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior e Castrucci; 2018), que estão organizados sob as cinco chaves da estrutura definida por Shield e Dole (2013). Nesta análise, é importante considerar que, nesta coleção, a proporção é introduzida no 7º ano e a proporcionalidade no 8º ano.

- ➔ Chave 1: Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.
  - Indicador 1.1) São fornecidos exemplos de comparações aditivas, bem como são fornecidas oportunidades para diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas. Consideramos como alta evidência do uso deste indicador quando, no livro do 8º ano, os autores oferecem oportunidades para o aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas, ao encontrarmos situações de grandezas proporcionais (multiplicativa) e de grandezas não proporcionais (aditiva).
  - Indicador 1.2) A relação multiplicativa em situações proporcionais é explicitada. Porém, consideramos que foi baixa a evidência deste indicador já que não houve formalização clara de que, na relação multiplicativa, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta na mesma proporção. Ou se uma diminui, a outra diminui na mesma proporção. Então, existe uma relação constante que não foi explicitada, apesar de apresentada.
  - Indicador 1.3) Exemplos e exercícios envolveram comparações autênticas, mas não explicitaram a relação multiplicativa em situações proporcionais, e não ofereceram oportunidades para aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas. Muitas tarefas são relacionadas a “calcule” e “resolva”. Então, apesar de trazerem bons exemplos de contextualização e de situações autênticas sobre o cotidiano dos dias atuais, os autores não desenvolvem o raciocínio proporcional e não aprofundam o conhecimento, principalmente, por não levarem os alunos a responderem com reflexão.
- ➔ Chave 2: Identificação da estrutura multiplicativa em situações de

proporção.

- Indicador 2.1) Foi definida a relação comparativa multiplicativa de situações de razão no livro do 8º ano, quando é apresentado que a igualdade de razões equivalentes é chamada de proporção. Então, encontramos alta evidência de uso deste indicador, basicamente, por trazerem como as quantidades se relacionam umas com as outras, ao mostrarem pro aluno que *“a cada 4 pontos feitos, 1 foi desse jogador. Assim, temos a razão  $\frac{1}{4}$ ”*.
- Indicador 2.2) Não trouxe que multiplicação e divisão são operações inversas.
- Indicador 2.3) Evidenciou, com uma classificação baixa, o uso de ambos dentro e entre o pensamento. Ao apresentar as razões equivalentes, os autores apresentaram somente o pensamento dentro do raciocínio proporcional, sem ressaltar o pensamento entre proporções, que evidencia a relação multiplicativa.

➔ Chave 3: Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.

- Indicador 3.1) Não houve evidência de representação na situação de proporção que apoiasse a identificação de relacionamentos dentro e entre eles (dentro da situação e entre ideia da situação de proporção).
- Indicador 3.2) Não explicitou ligações entre a representação simbólica dentre os tipos de problemas.
- Indicador 3.3) A introdução da “equação de proporção” formal não foi adiada até que uma vasta experiência com outras representações tivessem sido alcançada.

➔ Chave 4: Conexão explícita com o conhecimento de fração.

- Indicador 4.1) Exibiu, com alta evidência, conexões explícitas com ideias de frações e equivalências. Exemplo: no volume 6, os autores trazem a conceituação de frações equivalentes, sugerindo ao professor

iniciar por uma atividade em que os alunos possam manipular algum material para comparar frações, como as dobraduras feitas de papel sulfite. Eles também ressaltam que as frações são equivalentes porque suas áreas correspondentes são equivalentes, relacionando o conceito de frações equivalentes com a geometria.

- Indicador 4.2) Com alta evidência, explorou explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração. Exemplo: No livro do 6º ano, Giovanni Júnior e Castrucci (2018) trabalham fração como parte de um todo por meio de figuras de pizza e barras, ou seja, ressaltando o significado de fração como medida. Em seguida, é trabalhada a ideia de fração como resultado da divisão de dois números naturais.
  - Indicador 4.3) Sinalizou claramente o significado da notação de fração em uso com alta evidência.
- ➔ Chave 5: Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.
- Indicador 5.1) Utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas com alta evidência. Exemplo: Os livros do 7º e 8º ano trazem situações cotidianas e conduzem os alunos a apresentarem outros exemplos de situações que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais. Foi importante que trouxeram uma variedade de representações de situações de proporção, com tabelas e gráficos.
  - Indicador 5.2) Mostra com alta evidência que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem. Para reforçar, os autores contrastam com outros gráficos que não passam pela origem do plano cartesiano, que, portanto, representam situação não proporcional.
  - Indicador 5.3) Não utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1. Descobertas e Reflexões para Os Objetivos de Pesquisa

Nesta seção, apresentamos as ideias conclusivas de tudo o que descobrimos ao longo desta tese de doutorado com a análise das três coleções de livros didáticos. Neste momento, condensamos as respostas encontradas para as perguntas de pesquisa, alcançando os objetivos gerais e específicos estabelecidos no primeiro capítulo da tese. Analisamos os livros dos 6º, 7º, 8º e 9º anos - Manual do Professor - das três coleções selecionadas conforme o critério apresentado no Capítulo 4, seção 4.2 - Seleção dos Livros Didáticos para Análise. A saber, a coleção com menor volume de distribuição em território nacional em todos os anos, intitulada Convergências Matemática (Chavante, 2018), da Edições SM; o título Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018), Editora FTD, que teve volume médio de distribuição em todo o Brasil; e a obra de maior volume de distribuição entre as escolas públicas do Brasil, intitulada A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior e Castrucci; 2018), Editora FTD.

#### 6.1.1. Sobre o objetivo geral

O nosso objetivo geral pode ser desmembrado em duas partes. A primeira parte é *investigar, compreender e analisar como o raciocínio proporcional é abordado em livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019), voltados aos anos finais do ensino fundamental*. A visão geral que abstraímos dessas análises é que cada livro é composto por pouco menos de 400 páginas, divididas em capítulos que apresentam um tópico matemático específico. Assim, nos concentramos em analisar os capítulos e seções que focavam diretamente o raciocínio proporcional. Cada uma das seções de tópicos consiste em breves definições e explicações, exemplos trabalhados e vários exercícios práticos. De modo similar em todos os livros, temos que em algumas seções há uma tarefa de aprendizagem. As três coleções listam os objetos de conhecimento da BNCC (BRASIL, 2018) abordados, as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) desenvolvidas em cada estudo e as competências da Matemática da BNCC (BRASIL, 2018) para as quais haverá maior ênfase. Encontramos orientações aos professores, com

indicações de momentos que possibilitam desenvolver as competências gerais e específicas da BNCC (BRASIL, 2018), bem como, sugestões de abordagens que propiciam o trabalho com essas competências.

Os conteúdos que desenvolvem o raciocínio proporcional são iniciados nos volumes do 6º ano, abordando frações, seus significados e operações com números fracionários. Em seguida, apresentam números decimais, reta numerada, as operações com números decimais e porcentagens. Já os três livros do 7º ano trazem números racionais na forma de fração, operações com esses números, reta numerada, razão, proporção e regra de três. Os livros de 8º ano trabalham proporcionalidade e grandezas proporcionais. Já os livros de 9º ano apresentam os conteúdos de proporcionalidade e razões especiais.

Ao longo dos quatro volumes de cada coleção, os diferentes tópicos de raciocínio proporcional foram tratados com o intuito de articular e relacionar possíveis conhecimentos prévios<sup>23</sup> dos alunos com o conteúdo complementar seguinte. Os autores fazem assim quando buscam inicialmente retomar um conceito para, em seguida, ampliar e aprofundar o estudo. Neste sentido, entendemos que os estudos dos volumes do 6º e 7º ano, de forma generalizada na amostra, serviram como alicerce para a construção do conhecimento sobre proporcionalidade que encontramos nos livros do 8º e 9º anos.

∴

A segunda parte do objetivo geral envolve *avaliar e investigar se os livros didáticos analisados estão alinhados com as cinco chaves e objetivos de aprendizagem encontrados pelos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013)*. Para responder à este ponto específico do objetivo geral, apresentamos o Quadro 29, onde estão os resultados da análise das três coleções de forma resumida e esquematizada.

---

<sup>23</sup> É importante que cada professor tenha entendimento dos conhecimentos prévios necessários a cada novo conhecimento a ser ensinado, pois é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio proporcional do aluno. Por exemplo, saber identificar  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{1}{2}$  numa figura plana (superfície); calcular  $\frac{1}{2}$  de um pacote com 10 bolinhas de gude; encontrar  $\frac{1}{5}$  dos amigos na lanchonete.





<b>CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.</b>												
4.1 exibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	<b>A</b>	<b>A</b>	N	N	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	N	<b>A</b>	N	N	N
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	<b>M</b>	<b>A</b>	N	N	<b>A</b>	<b>A</b>	N	N	<b>A</b>	N	N	N
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	<b>M</b>	<b>A</b>	N	N	<b>A</b>	<b>A</b>	N	N	<b>A</b>	N	N	N
<b>CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.</b>												
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	N	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	N	<b>M</b>	<b>A</b>	N	N	<b>A</b>	<b>A</b>	N
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	N	<b>B</b>	<b>A</b>	N	N	N	<b>A</b>	N	N	<b>A</b>	<b>A</b>	N
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

Fonte: Elaborado pela autora a partir de dados apurados na pesquisa.

LEGENDA da Classificação de Evidências: (N) Nenhuma; (B) Baixa; (M) Média; (A) Alta.

Por meio do Quadro 29, com a lente focada em responder à segunda parte do objetivo geral, podemos destacar a respeito do alinhamento de cada uma das três coleções com as chaves de Shield e Dole (2013):

- ➔ Chave 1: Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa:

As três coleções de livros didáticos fizeram um esforço para apresentar as tarefas em um contexto cotidiano, presumivelmente familiar para a maioria dos alunos. No entanto, elas não oferecem oportunidades para comparar e contrastar situações aditivas e multiplicativas. A relação multiplicativa em situações proporcionais não é explicitada ou comparada com situações não proporcionais, exceto pelo livro do 8º ano da coleção A Conquista da

Matemática. De forma abrangente, a importância de fornecer comparação aditiva e multiplicativa contrastada através do uso de situações autênticas relacionadas à vida não recebeu atenção dos autores das três coleções de livros didáticos. Ou seja, faltou esta abordagem para a coleção menos distribuída no território nacional, para a de média distribuição e também para a mais distribuída por meio do PNLD 2020 (BRASIL, 2019). A Chave 1 traz a estratégia fundamental para a compreensão do raciocínio proporcional, o que significa que precisa ser muito bem trabalhada com os alunos para prepará-los para os níveis de estudos posteriores (ensino médio e superior), bem como para as situações cotidianas da vida.

- ➔ Chave 2: Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção:

Dominar dentro (razões equivalentes) e entre estratégias (relações multiplicativas) é importante para resolver problemas que exigem raciocínio proporcional. Mesmo assim, as coleções não demonstram como trabalhar com essas estratégias para resolver problemas de comparação de valores omissos e razões. Exceto pelos livros do 6º e 7º anos da coleção Convergências Matemáticas, as outras duas coleções não destacam em nenhum de seus volumes as operações inversas para apoiar a identificação de uma estrutura multiplicativa. Estratégias de trabalho dentro ou entre proporções para o raciocínio proporcional não são demonstradas em nenhum dos livros das três coleções.

- ➔ Chave 3: Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão:

Como consequência da falta de demonstração de estratégias dentro e entre, falta o suporte para a identificação de estratégias dentro e entre. Neste sentido, não encontramos ligações explícitas entre os procedimentos de solução baseados em representação simbólica consistente para problemas que compartilham a mesma estrutura. Por exemplo, aqueles problemas de valor ausente com velocidade, densidade, preço pro unidade, etc., que poderiam ser abordados com o mesmo raciocínio. O uso da regra de três é uma forma produtiva de calcular uma resposta, mas entendemos

ser uma introdução precoce de procedimentos feita pelas três coleções, dificultando o entendimento do raciocínio proporcional.

➔ Chave 4: Conexão explícita com o conhecimento de fração.

As três coleções, em seus livros de 6º e 7º anos, apresentam ligações claras com ideias de frações e equivalência. Da mesma forma, as relações parte/todo e parte/parte/todo são explicitamente distinguidas. Também, o significado da notação de fração em uso é claramente sinalizado. Percebemos que, em todas as três coleções, esta foi a chave melhor desenvolvida pelos autores, evidenciando alto alinhamento das coleções com esta chave de Shield e Dole (2013).

➔ Chave 5: Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.

As três coleções fazem uso de uma gama de representações para ilustrar que gráficos de situações proporcionais são linhas retas que passam pela origem. A situação multiplicativa em situações de proporção é explicitada em todas as coleções de livros didáticos, principalmente com uma variedade de gráficos proporcionais que são contrastados com outros gráficos não lineares. Tabelas, usadas para destacar relações nas três coleções, ilustram as proporcionalidades. As introduções às proporcionalidades são muito semelhantes nas três coleções, tendo seus conceitos introduzidos no 8º ano. No entanto, todas as coleções carecem de gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.

Pelo exposto, concluímos que as três coleções de livros didáticos são fracas em relação ao alinhamento com as cinco chaves de Shield e Dole (2013). Isto sugere que as ideias dos pesquisadores australianos sobre a representação do raciocínio proporcional não foram encontradas nestes livros. Possivelmente, tal situação se deu por não considerarem pesquisas nacionais e/ou internacionais desenvolvidas sobre o tema durante a elaboração dos seus livros. Ou mesmo, pela dificuldade encontrada pelos autores em selecionar pesquisas sobre livros didáticos para se basearem e incorporarem em seus próprios livros.

## 6.1.2. Sobre os objetivos específicos

### 6.1.2.1. Primeiro Objetivo Específico

O primeiro *objetivo específico* é *investigar o que tem de parecido e de diferente nas tarefas propostas sobre raciocínio proporcional entre os livros didáticos de Matemática analisados para o alcance do objetivo geral*. Para atingi-lo, buscamos responder à pergunta:

- O que existe de similar e o que existe de diferente entre as tarefas com foco em raciocínio proporcional nesses livros didáticos de Matemática?

#### 6.1.2.1.1. Similaridades

Um forte ponto em comum encontrado nos manuais dos professores das três coleções são as orientações e recomendações feitas aos professores nas margens dos livros, em formato de U, onde há o detalhamento das situações e atividades propostas no livro do aluno, juntamente com sugestões que possam tornar o processo de ensino e aprendizagem mais rico e proveitoso. Além dessas indicações, será possível visualizar as habilidades e competências a serem desenvolvidas.

Figura 80. Similaridades

- Comente com os alunos que a ideia de proporcionalidade está presente em diversas situações do dia a dia, contemplando, assim, aspectos da **competência específica 2** e da **competência específica 5**, ao incentivar os alunos a exercitar a curiosidade, a imaginação e a reflexão para investigar problemas, bem como a aplicar processos e ferramentas matemáticas na resolução de problemas cotidianos.
- Se achar conveniente, retome, nesse momento, o conceito de frações equivalentes estudado em anos anteriores, para explorar a relação de proporção existente entre esses tipos de frações.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 120. *Convergências Matemática*. 7º ano.

Figura 81. Similaridades

#### Proporção

Dizer aos alunos que, nos modelos **A** e **B** do leitor de livro digital, as cotas indicam as dimensões da tela e não as dimensões do aparelho.

É importante que eles compreendam a relação entre razão e proporção, isto é, temos uma proporção quando duas razões são iguais. Na formalização do conceito de proporção, explicar a eles que, como  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são razões, consideramos **b** e **d** números diferentes de zero.

#### PARA PENSAR

Para complementar, com base na resposta apresentada pelos alunos, escrever na lousa as proporções a seguir e propor a eles que determinem o número que está faltando em cada item.

- $\frac{3}{5} = \frac{12}{\quad}$ . Resposta: 20.
- $\frac{8}{7} = \frac{\quad}{21}$ . Resposta: 24.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 169. *Matemática, Realidade e Tecnologia*. 7º ano.

Figura 82. Similaridades

#### ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

##### Proporção

Ampliar a situação apresentada, propondo aos alunos que verifiquem se uma cidade de 120 000 habitantes, que conta com 200 médicos, segue a recomendação da OMS. Espera-se que eles comparem a razão médico por habitante dessa cidade com a recomendação da OMS de 1 para 1 000. Assim:

$$\frac{200}{120\,000} = \frac{1}{600}$$

Isso significa que há 1 médico para cada 600 habitantes.

Logo, essa cidade está em uma situação melhor do que recomenda a OMS, pois tem quase o dobro do número de médicos recomendado para cada grupo de 1 000 habitantes.

Fonte: GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p. 210. *A Conquista da Matemática*. 7º ano.

### Similaridades dos Livros do 6º ano:

Os livros do 6º ano trazem como fator de similaridade atividades que vão trabalhar os números racionais na forma de fração e seus significados. As três coleções trazem nas primeiras tarefas algumas figuras que são divididas em partes iguais para desenvolver o significado de fração como parte de um todo baseado no modelo de área em que as partes ocupam a mesma superfície ou região plana. Assim, encontramos tarefas com desenho de pizza, figuras geométricas e barras, por exemplo. Em muitas tarefas, os alunos são incentivados a utilizarem desenhos como representação de situações e a relacioná-los com a representação fracionária.

### Similaridades dos Livros do 7º ano:

Os livros do 7º ano apresentam em comum os conteúdos de razão, proporção e grandezas proporcionais. As tarefas estão voltadas para a resolução e a elaboração de problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta, além de problemas envolvendo a associação entre razão, fração e porcentagem. Situações comuns às três coleções são tarefas de receitas culinárias, propícias para desenvolver os conceitos de razão e de proporção. Também são exploradas as tarefas sobre razões entre grandezas de mesma espécie em situações do dia a dia.

### Similaridades dos Livros do 8º e 9º anos:

Os livros do 8º e 9º anos trazem conteúdos muito semelhantes nestes dois volumes de cada coleção. Os sumários do 8º e 9º anos são muito parecidos. Todavia, em cada um dos anos, mesmo que venha repetido os assuntos de razão e proporção, esses conteúdos estão com novas abordagens em cada volume, e explorando, com maior profundidade, o reconhecimento de relações proporcionais e não proporcionais, como a representação gráfica dessas grandezas. Ainda, há a formalização dos conceitos de regra de três, simples e composta, ressaltando as relações multiplicativas entre as linhas e as colunas de diferentes quadros construídos a partir das situações apresentadas. Há somente uma particularidade na coleção A Conquista da Matemática, livro do 9º ano, que traz de forma breve os tópicos de razão e proporção para já adentrar no conteúdo de segmentos proporcionais, pois o foco da proporcionalidade neste volume está na geometria. Cabe ressaltar que os conteúdos de geometria que envolvem proporcionalidade

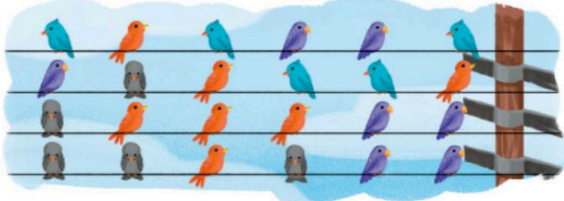
também foram abordados nas outras duas coleções, em unidades distintas. Entretanto, fizemos a escolha de analisar os capítulos que abordam diretamente a proporcionalidade, como fundamento deste tópico matemático, e não analisamos todos os conteúdos que refletem o raciocínio proporcional.

### 6.1.2.1.2. Diferenças

Algo diferente dentre as três coleções é a estratégia da coleção *Convergências Matemáticas*, de Chavante (2018), trazendo uma proposição de elaboração de problemas pelos alunos em todos os conteúdos. Esta abordagem leva os alunos a refletirem sobre o conhecimento, desenvolverem o raciocínio e suas habilidades pessoais, como também, a apresentarem as próprias respostas às atividades. Essa abordagem é característica da coleção. O autor acredita que esta estratégia de atividade contribui para a autonomia e a criatividade dos alunos. Esta crença é sustentada por Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto e Miller (1998), uma vez que estes pesquisadores defendem que os alunos que são incentivados a construir o próprio conhecimento conceitual e processual da proporcionalidade por meio de atividades colaborativas de resolução de problemas, obtém melhores resultados do que os alunos com experiências instrucionais mais tradicionais e orientadas pelo professor.

**Figura 83.** Diferenças

12 Observe a imagem abaixo e elabore uma situação-problema que envolva fração de uma quantidade. Em seguida, entregue para um colega resolver. Depois, verifique se a resposta obtida por ele está correta.  
Possível resposta: Do total de pássaros,  $\frac{3}{4}$  voaram. Quantos pássaros continuaram no fio?



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 127 *Convergências Matemática*. 6º ano.

**Figura 84.** Diferenças

42 Leia o texto abaixo:

Três amigos, Geovane, Matheus e Otávio, compraram uma pizza de 12 pedaços. Geovane comeu  $\frac{1}{6}$  da pizza, Matheus comeu  $\frac{1}{4}$  e Otávio comeu  $\frac{1}{3}$ .

Agora, elabore um problema utilizando as informações do texto acima e em seguida dê para um colega resolver. Possível resposta: Quantos pedaços sobraram da pizza?


Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 140. *Convergências Matemática*. 6º ano.

Outra diferença a ser ressaltada foi encontrada na coleção *Matemática Realidade & Tecnologia* (Souza, 2018). No volume do 6º ano, encontramos tarefas que exploram a compreensão da fração com a ideia de partes de um inteiro, trazendo uma abordagem da reta numerada representada por pedaços de corda.

Veja a Figura 85. Ainda, temos outra tarefa, indicada pela Figura 86, agora sobre fração com a ideia de quociente de uma divisão, mas relacionando a fração com pontos na reta numérica. Assim, encontramos nesta coleção a ênfase em demonstrar para os alunos a representação da reta numérica, indicando que a distância entre uma marcação e a seguinte é a mesma. A tarefa vem com orientação na construção da reta numérica, instruindo os alunos a dividir cada unidade da reta pela quantidade indicada no denominador de cada fração. Depois, eles devem contar a quantidade indicada no numerador da fração, a partir do zero, e identificar entre quais dois números naturais consecutivos a fração está localizada na reta numérica.

**Figura 85. Diferenças**

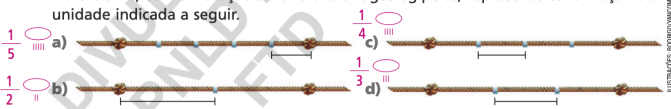
3. No Egito antigo, para medir as terras destinadas ao plantio, eram utilizadas cordas demarcadas com nós indicando certa unidade de comprimento. Porém, nem sempre as unidades cabiam uma quantidade inteira de vezes nessas medições, sendo necessário utilizar frações da unidade. Observe como os egípcios escreviam algumas frações.



Como os egípcios escreviam						
Como escrevemos hoje	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

Fonte dos dados: IFRAH, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*. Trad. Alberto Mulloz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. p. 348-349.

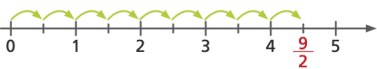
Inspirada nos egípcios, Nicole fez nós em uma corda para estabelecer uma unidade de medida de comprimento. Depois, fez marcações dividindo essa unidade em partes iguais. No caderno, com a notação atual e dos antigos egípcios, represente cada fração da unidade indicada a seguir.



Fonte: SOUZA, 2018, p. 150. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

**Figura 86. Diferenças**

6. Para localizar a fração  $\frac{9}{2}$  na reta numérica, Hélio dividiu cada unidade em 2 partes iguais. Depois, contou 9 partes e localizou a fração  $\frac{9}{2}$ .



Escreva entre quais números naturais consecutivos na reta numérica localizamos as frações a seguir.

a)  $\frac{18}{5}$  3 e 4. b)  $\frac{7}{3}$  2 e 3. c)  $\frac{25}{4}$  6 e 7.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 150. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Mais uma tarefa a ser destacada é a tarefa do livro do 7º ano da coleção A Conquista da Matemática, onde os alunos são estimulados a relatarem se compreenderam adequadamente o conceito de números diretamente proporcionais. Outro ponto forte desta tarefa é o estímulo para o raciocínio dos alunos. Mesmo sem

o conceito ter sido apresentado formalmente, é possível que eles consigam responder às questões utilizando raciocínio lógico. Ou seja, é estimulado o pensamento e a busca por formas de resolução intuitivas. A tarefa é representada pela Figura 87 a seguir.


Figura 87. Diferenças

**Números diretamente proporcionais**

**PENSE E RESPONDA** Resoluções na p. 315

Responda às questões no caderno.

1. Em cada uma das cenas aparecem pessoas chegando em um chá de bebê. Cada pessoa convidada levou dois pacotes de fraldas. Observe:



a) É correto afirmar que, quanto maior for o número de pessoas no chá de bebê, maior será o número de pacotes de fraldas? **Sim.**

b) Chegaram 6 convidados. Quantos pacotes de fraldas eles levaram? **12 pacotes de fraldas.**

c) Se tivesse chegado o dobro de convidados, quantos pacotes de fraldas levariam? Comparando com a quantidade do item anterior, o que aconteceu? **24 pacotes de fraldas. O número de pacotes também dobrou.**

Fonte: GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018, p. 216. A Conquista da Matemática. 7º ano.

### 6.1.2.2. Segundo Objetivo Específico

O segundo *objetivo específico* é *identificar e examinar quais são as tarefas comuns aos livros didáticos de Matemática referidos no item anterior que favorecem o aprendizado pelos alunos dos conceitos de razão e proporção, e como desenvolvem o raciocínio proporcional nos mesmos*. Neste sentido, precisamos responder à três perguntas:

- Quais tarefas identificamos que são comuns aos livros analisados?
- Como esses autores sugerem a abordagem dessas tarefas para que elas propiciem o entendimento dos alunos a respeito dos conceitos que envolvem raciocínio proporcional?
- Como cada livro didático de Matemática evidenciou que suas tarefas geram aprendizado para alunos e professores no desenvolvimento do raciocínio proporcional?



As próximas seções visam apresentar as respostas para essas três perguntas associadas ao segundo objetivo específico desta pesquisa.

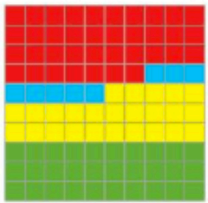
### 6.1.2.2.1. Primeira pergunta associada

- Quais tarefas identificamos que são comuns aos livros analisados?

Encontramos tarefas comuns nos livros do 6º ano sobre fração como parte de um todo que têm como objetivo mostrar ao aluno que as figuras divididas em partes de mesmo tamanho vão expressar o conceito de divisão, que é a ideia de repartir em partes iguais. As Figuras 88, 89 e 90 ilustram essa situação.

Figura 88. Tarefas comuns

1. Observe a imagem e responda às questões.



a) Em quantas partes iguais a figura foi dividida? **100 partes.**

b) Que fração representa a parte pintada de:

• vermelho? $\frac{37}{100}$	• amarelo? $\frac{25}{100}$
• azul? $\frac{8}{100}$	• verde? $\frac{30}{100}$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 124. *Convergências Matemática*. 6º ano.

Figura 89. Tarefas comuns

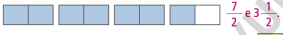
7. Tainá e Vicente representaram as partes destacadas das figuras idênticas a seguir de diferentes maneiras. Observe.


Como as figuras estão divididas em 4 partes iguais e 5 delas estão destacadas, representei pela fração  $\frac{5}{4}$ .


Como uma figura está toda destacada e a outra tem uma de 4 partes destacada, representei escrevendo um número na forma mista:  $1\frac{1}{4}$ .

O número na forma mista  $1\frac{1}{4}$  pode ser lido como **um inteiro e um quarto.**

Represente por meio de fração e de número na forma mista a parte destacada das figuras a seguir.

a)   $\frac{3}{2}$  e  $1\frac{1}{2}$


b)   $\frac{16}{6}$  e  $2\frac{4}{6}$


c)   $\frac{7}{5}$  e  $1\frac{2}{5}$

Fonte: SOUZA, 2018, p. 151. *Matemática, Realidade e Tecnologia*. 6º ano.

Figura 90. Tarefas comuns

2. Os triângulos destacados na cor azul representam que fração de cada figura?

a)   $\frac{1}{4}$

b)   $\frac{1}{10}$

Fonte: GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p. 136. *A Conquista da Matemática*. 6º ano.

Tarefas comuns sobre resolução de problemas com uso de frações foram encontradas nos livros de 6º ano, que trabalham ideias de frações equivalentes e de adição e subtração de frações. As Figuras 91, 92 e 93 representam a situação.

**Figura 91.** Tarefas comuns

**29.** Ricardo fez um passeio de quatro dias. No primeiro dia, ele gastou  $\frac{3}{12}$  do seu dinheiro, no segundo,  $\frac{2}{8}$ , no terceiro,  $\frac{5}{20}$  e no último,  $\frac{1}{4}$ . Ele disse que gastou a mesma quantia por dia. Verifique se a afirmação de Ricardo está correta.


Sim, pois  $\frac{3}{12}$ ,  $\frac{2}{8}$ ,  $\frac{5}{20}$  e  $\frac{1}{4}$  são frações equivalentes.

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 133. Convergências Matemática. 6º ano.

**Figura 93.** Tarefas comuns

**6.** No ano passado, uma cidade registrou 1450 acidentes de trânsito. Em  $\frac{18}{25}$  desses acidentes não havia vítimas. Quantos foram os acidentes com vítimas? **406 acidentes.**

**7.** Observe a figura.



Quantos  representam:

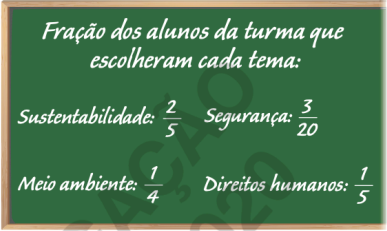
a)  $\frac{1}{2}$  da figura? **9**      c)  $\frac{5}{6}$  da figura? **15**  
 b)  $\frac{2}{3}$  da figura? **12**      d)  $\frac{4}{9}$  da figura? **8**

**8.** No Brasil, o início da primavera acontece em 23 de setembro. Esse mês tem 30 dias. Já se passaram  $\frac{9}{10}$  desse número de dias. Quantos dias faltam para setembro terminar? **3 dias.**

Fonte: GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018, p. 138. A Conquista da Matemática. 6º ano.

**Figura 92.** Tarefas comuns

**7.** A professora de Geografia fez uma pesquisa com os alunos de uma turma sobre o tema que eles deveriam apresentar na feira cultural da escola. Observe o resultado dessa pesquisa.



Com base nessas informações, elabore questões que envolvam o cálculo de adição e subtração de frações. Troque as questões com um colega para que ele as resolva, enquanto você resolve aquelas que ele elaborou. No fim, confirmem juntos as resoluções.

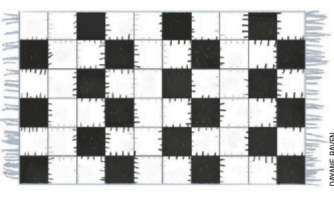
Resposta pessoal.

Fonte: SOUZA, 2018, p. 163. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Tarefas comuns sobre razões são encontradas nos livros do 7º ano. Elas têm o objetivo de trabalhar a escrita de razão entre partes de um todo e entre cada parte e o todo considerado. Também, ressalta a importância da ordem dos números ao indicar a razão. As Figuras 94, 95 e 96 representam a situação.

Figura 94. Tarefas comuns

2. Cláudio confecciona tapetes reaproveitando retalhos de tecido. Ele fez um tapete com retalhos quadrados, de mesmo tamanho, nas cores branca e preta. Observe.



a) Quantos retalhos de cada cor Cláudio usou?  
Quantos retalhos são ao todo?


b) Qual é a razão entre a quantidade de retalhos:


- brancos e a de retalhos pretos?  $\frac{39}{21}$  ou  $39 : 21$ .
- pretos e a de retalhos brancos?  $\frac{21}{39}$  ou  $21 : 39$ .
- brancos e a quantidade total de retalhos?  $\frac{39}{60}$  ou  $39 : 60$ .

Fonte: SOUZA, 2018, p. 166. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.



Figura 95. Tarefas comuns



2. As figuras abaixo foram divididas em partes iguais. Escreva a razão entre as partes correspondentes a cada cor e o total de partes em que as figuras foram divididas:

**A**  azul:  $\frac{2}{4}$ ; verde:  $\frac{1}{4}$ ; amarelo:  $\frac{1}{4}$

**B**  roxo:  $\frac{2}{6}$ ; cinza:  $\frac{3}{6}$ ; rosa:  $\frac{1}{6}$

3. As razões abaixo relacionam a quantidade de partes pintadas de vermelho com o total de partes na figura. No caderno, relacione a figura com a razão, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondente. A-III; B-IV; C-I; D-II

**A**  **C** 

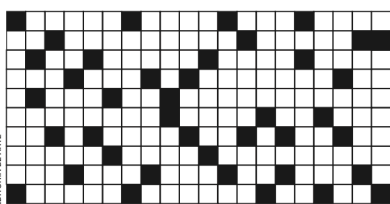
**B**  **D** 

I  $\frac{7}{12}$  II  $\frac{4}{9}$  III  $\frac{2}{4}$  IV  $\frac{1}{8}$

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 117. Convergências Matemática. 7º ano.

Figura 96. Tarefas comuns

7. Fiz um esquema para representar como vai ficar o piso do quintal da minha casa após revestir com lajotas quadradas brancas e pretas.



Observando o esquema, responda:

a) de quantas lajotas vou precisar para revestir todo o piso? **200 lajotas.**

$\frac{1}{5}$  b) qual é a razão entre o número de lajotas pretas e o total de lajotas?

$\frac{4}{5}$  c) qual é a razão entre o número de lajotas brancas e o total de lajotas?

$\frac{1}{4}$  d) qual é a razão entre o número de lajotas pretas e o número de lajotas brancas?

Fonte: GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018, p. 206. A Conquista da Matemática. 7º ano.

Nos livros do 7º ano, também encontramos tarefas comuns sobre proporções, que têm o objetivo de trabalhar a resolução de uma situação envolvendo grandezas diretamente proporcionais. As Figuras 97, 98 e 99 representam a situação.

Figura 97. Tarefas comuns

- 28.** Para regar um jardim, um jardineiro adiciona 5 mL de um produto contra pragas em 10 litros de água. Calcule quantos litros de água são necessários para misturar as seguintes quantidades desse produto:
- a) 10 mL **20 L**   b) 25 mL **50 L**   c) 100 mL **200 L**
- Se em um recipiente há 150 L de água, quantos mililitros do produto contra pragas o jardineiro deve usar para misturar corretamente todo o conteúdo do recipiente?  
**75 mL**

Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 126.  
Convergências Matemática. 7º ano.

Figura 98. Tarefas comuns

- 2.** Bernardo é *pizzaiolo*. No preparo da massa, ele utiliza uma receita em que são necessárias 6 xícaras de farinha de trigo, que rende 4 discos. Para preparar 10 discos como esses, utilizando proporcionalmente os ingredientes dessa receita, quantas xícaras de farinha de trigo são necessárias?  
**15 xícaras de farinha de trigo.**

Fonte: SOUZA, 2018, p. 174.  
Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Figura 99. Tarefas comuns

- 12.** Em uma receita de bolo, são necessários 2 ovos para cada 0,5 kg de farinha utilizada. Quantos ovos serão necessários para 2 kg de farinha?  
**8 ovos.**



Fonte: GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI; 2018, p. 215. A Conquista da Matemática. 7º ano.

#### 6.1.2.2. Segunda pergunta associada

- Como esses autores sugerem a abordagem dessas tarefas para que elas propiciem o entendimento dos alunos a respeito dos conceitos que envolvem raciocínio proporcional?

Similarmente, em todas as coleções, os autores apresentam a abordagem dada aos conteúdos e nos afirmam que iremos encontrar páginas de teorias com proposições de questões para estimular a participação dos alunos, atividades que tentam aproximar o conteúdo à realidade e que favorecem a construção do conhecimento. No início de cada capítulo, são evidenciados o que se espera alcançar no desenvolvimento dos estudos apresentados ali. Percorrendo os capítulos, nos deparamos com atividades propostas em ordem gradual de dificuldade, além de encontrarmos dicas em algumas delas, que são orientações

para os alunos terem êxito na realização.

De forma abrangente, a maioria das tarefas trazidas pelas três coleções não exigia mais do que imitar o procedimento apresentado nos exemplos trabalhados. Resultados semelhantes foram encontrados por Shield e Dole (2013) na Austrália, e por Ahl (2016) na Suécia. Como esses pesquisadores, descobrimos que os livros didáticos analisados mostraram baixo potencial para promover uma compreensão profunda do raciocínio proporcional. Entendemos que os professores podem usar os resultados encontrados em nossas pesquisas para reconsiderarem como organizar o conteúdo para melhor apoiar a compreensão do raciocínio proporcional pelos alunos, e usarem os livros didáticos apenas como uma ferramenta para o ensino, e não como instrumento norteador do ensino. Isso somente será possível se os professores tiverem conhecimento matemático de raciocínio proporcional e o conhecimento de ensino desse tema, da forma como argumenta Ball (2003). Outrossim, a conscientização dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental sobre os pontos fortes e as limitações das três coleções de livros didáticos pode ser uma ferramenta para superar os obstáculos para o desenvolvimento aprofundado do raciocínio proporcional em suas salas de aulas.

#### **6.1.2.2.3. Terceira pergunta associada**

- Como cada livro didático de Matemática evidenciou que suas tarefas geram aprendizado para alunos e professores no desenvolvimento do raciocínio proporcional?

Os pontos fortes das três coleções são o uso da Chave 4 - Conexão explícita com o conhecimento de frações e da Chave 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações proporcionais. A alta evidência de uso da Chave 4 pelos livros de 6º e 7º anos das três coleções propicia o bom entendimento da diferença entre razões e frações. O uso da Chave 5 desenvolve o entendimento das proporções. Porém, o suporte para a compreensão do raciocínio proporcional pode ser dificultado pela ausência de representação do pensamento proporcional dentro (razões equivalentes) e entre (relações multiplicativas) pelas três coleções de livros didáticos, conforme as poucas evidências encontradas para a Chave 2 -

Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção. Quando os alunos compreendem bem essa estrutura comum, que é a relação multiplicativa representada na situação proporcional, é possível que os alunos abordem satisfatoriamente todas as tarefas, pois são variações sobre o mesmo tipo de problema. Também entendemos que as relações multiplicativas requerem a capacidade de distinguir entre situações aditivas e multiplicativas, conforme a Chave 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa. Estas chaves não foram bem desenvolvidas em nenhuma das três coleções. Isso pode ser uma parte da dificuldade que os alunos têm em entender o raciocínio proporcional. Outra parte significativa do problema está vinculada à introdução de procedimentos de algoritmo de proporção padrão, que é a regra de três, contrariando a Chave 3. O procedimento é uma muleta para os alunos, pois muitas vezes representa uma maneira rápida de obter uma resposta, sem demonstrar com clareza a razão do cálculo, nem o entendimento do porquê devem efetuar tal procedimento.

## **6.2. Descobertas e Reflexões Encontradas para A Tese**

Concluídas as respostas às questões que nortearam nossa pesquisa, e após quase quatro anos de estudo intenso, destacamos o que consideramos como a principal tese que este estudo defende à luz das análises dos dados obtidos:

- Considero que os livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019) se basearam na BNCC (BRASIL, 2018) como instrumento norteador para a escolha do conteúdo de ensino-aprendizagem a ser trabalhado em cada volume. Também, para ter a definição das competências e habilidades a serem exploradas e desenvolvidas nas coleções didáticas. Outrossim, acredito que cada autor tem acompanhado as descobertas científicas decorrentes de pesquisas atuais sobre temas contemporâneos na área da Matemática e da Educação Matemática. Contudo, tenho para mim que, apesar do atendimento aos requisitos exigidos pelos documentos norteadores de ensino brasileiros, os livros didáticos fornecem suporte limitado para o desenvolvimento de estruturas multiplicativas necessárias para o raciocínio proporcional e, portanto, não contribuem

adequadamente para um aprendizado mais amplo e profundo deste tema pelos alunos.

Assim, neste último capítulo, afirmamos que a tese levantada está coerente aos fatos levantados e analisados ao longo da pesquisa. O que nos leva a concluirmos que, de fato, as três coleções de livros didáticos analisados atendem e estão em conformidade aos pressupostos da BNCC (BRASIL, 2018), todavia, são superficiais em suas abordagens e não promovem uma compreensão profunda do raciocínio proporcional.

Eu me pergunto se esses materiais estão baseados na tradição das editoras, na interpretação da BNCC (BRASIL, 2018), ou nos critérios estabelecidos pelos editais dos PNLD. Será que as coleções refletem as próprias experiências dos autores como aprendizes de Matemática? Eles se alinham com as próprias crenças do professor sobre Educação Matemática?

Sabemos que os professores brasileiros muitas vezes baseiam seu planejamento de aula apenas pelos livros didáticos. Acredito que essa prática dos professores possa estar alicerçada em uma confiança nesses materiais, considerando que a representação do conteúdo no livro didático possa ter um forte impacto na aprendizagem dos alunos (DANTE, 1996; Ben-Chaim, Keret e Illany, 2012; Powell, 2018). Broetto (2016) afirmou que

o livro didático está presente em praticamente todas as escolas do Brasil. O **Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)** avalia e distribui coleções de livros didáticos para todas as escolas públicas brasileiras da educação básica. Sendo assim, o livro didático está presente no ambiente escolar e ao alcance dos alunos, constituindo-se assim em um valioso aliado para o desenvolvimento da atividade docente no que diz respeito às dimensões didáticas e pedagógicas (BROETTO, 2016, p. 402).

Contudo, esta pesquisa ressalta que, para promover a compreensão de situações proporcionais, os livros didáticos precisam destacar o raciocínio proporcional. Para o professor se basear no livro didático, é necessário que ele tenha conhecimento profundo do conteúdo a ser lecionado, criticando o texto do livro e podendo extrapolá-lo para garantir que as aulas e o ensinamento estejam com a qualidade devida para promover aprendizagem. Um professor não pode ignorar as

limitações dos livros didáticos adotados em sala de aula. Em última instância, cabe ao professor decidir a forma de ensinar os conteúdos para seus alunos. Afinal, conforme Broetto (2016, p. 402), “o professor pode discordar da forma como determinado conteúdo está sendo abordado no livro, seja porque considere a abordagem sucinta demais, profunda demais, superficial demais, técnica demais, etc.”.

Reafirmamos, nestas conclusões de pesquisa, as ideias dos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013) e da sueca Ahl (2016), que vislumbraram que, embora o livro didático possa servir de apoio para os professores, neste caso a análise mostra que ele pode não apoiar a compreensão dos alunos. Ao contrário, pode dificultá-las.

### 6.3. Limites e Possibilidades

Respondidas as questões de pesquisa e com a tese confirmada, trazemos a seguir, em considerações finais, alguns limites da tese, reflexões e possibilidades para pesquisas futuras. Nesta pesquisa, estudamos os livros didáticos para fornecer um instantâneo de como o raciocínio proporcional é abordado ***em livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019), voltados aos anos finais do ensino fundamental***. Nossa abordagem foi inspirada na estrutura de Shield e Dole (2013). Consultamos a literatura de longa data neste campo, para identificar o conteúdo-chave em relação ao raciocínio proporcional, a partir de investigações sobre as dificuldades dos alunos com tarefas relacionadas a proporções e descrições da essência do raciocínio proporcional.

Começando pelas limitações, temos que a análise dos livros didáticos sustentada pelas chaves e indicadores de Shield e Dole (2013) forneceu um meio para determinar como os livros lidam com ideias centrais neste domínio. Embora se reconheça que tal análise não leva em conta como os livros didáticos possam ser usados pelo professor e pelos alunos, é bem estabelecido na literatura que a apresentação do material em um livro didático impacta na forma como ele é usado. Muitas pesquisas destacam a influência dos livros didáticos de matemática no currículo implementado nas salas de aula. Nosso estudo analisou coleções de livros



didáticos apenas em nível de conteúdo, sem determinar o uso real destes livros didáticos específicos no ensino e aprendizagem de Matemática. Mesmo sem o ímpeto de um currículo com uma abordagem pedagógica claramente enunciada, seria de se esperar que o livro didático auxiliasse os professores a criar ambientes de aprendizagem e sequências de ensino que apoiassem o aprendizado mais profundo da matemática.

Outra limitação é que as três coleções de livros didáticos examinadas no estudo mostraram dar atenção bastante restringida à estrutura matemática e à conectividade. A abordagem de todos os volumes foi muito focada em procedimentos para diferentes tipos de problemas, com pouca tentativa aparente de destacar as ligações entre os diferentes tipos de problemas ou as estruturas comuns subjacentes dos problemas. Também, foram evidenciadas as limitações dos livros didáticos em suas definições, exemplos trabalhados e procedimentos de solução sugeridos para os tópicos de razão e proporção. A representação simbólica de situações de proporção e a subsequente manipulação de números dentro de equações de proporção fornecem pouco significado, seja para o contexto real dos exemplos apresentados, seja para o conhecimento prévio de outros tópicos matemáticos relacionados (por exemplo, particularmente o tópico de frações e porcentagem).

Mais uma limitação é que o tratamento dos tópicos de razão e proporção nessas três coleções parece oferecer pouca conexão e faz pouco para expor a estrutura predominantemente parte:parte (ou todo:todo) das situações de proporção; uma estrutura que pode contextualizar a outros tópicos relacionados. As definições e exemplos trabalhados retirados dos textos ilustram a brevidade de informações básicas fornecidas aos usuários de livros didáticos, com conteúdos muito resumidos, proporcionando informações pouco úteis para os alunos e possivelmente também para os pais.

Focando nas possibilidades, o tema escolhido para a análise, ou seja, razão e proporção, é um componente significativo dos currículos dos anos finais do Ensino Fundamental, e a maioria dos professores compartilha o objetivo geral de desenvolver uma compreensão profunda em seus alunos. Uma revisão da literatura de pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem do tema forneceu a base para a

pesquisa. Os resultados encontrados devem fornecer aos professores insights sobre os pontos fortes e fracos dos livros didáticos que estão sendo empregados, e permitir que eles tomem decisões eficazes sobre a seleção e o uso de livros didáticos. É natural sugerir que esta pesquisa se torne uma excelente maneira de iniciar uma conversa com os professores e conscientizá-los sobre a estrutura e o conteúdo do livro didático e como ele aborda as ideias-chave do currículo. Uma continuação dessa análise de livros didáticos em relação ao raciocínio proporcional seria focar em outras ideias-chave no currículo de matemática, como pensamento geométrico e visualização, pensamento algébrico e raciocínio, e assim por diante.

Esta pesquisa também possibilita às escolas e professores a montarem grupos de estudos sobre outros temas e conteúdos de livros didáticos, buscando refletirem sobre as razões de escolha dos livros didáticos adotados para trabalharem com seus alunos. Uma outra opção de muita valia para escolas é se debruçarem para aprofundarem os conhecimentos dos docentes de Matemática por meio de grupos de formação continuada dos professores sobre o tema do raciocínio proporcional. Tal sugestão depende do envolvimento efetivo, além do planejamento em conjunto dos professores das disciplinas envolvidas, sem perder de vista que o licenciando deverá estar preparado para lecionar o conteúdo na educação básica.

Percorrendo pelo leque de possibilidades, entendemos que os resultados encontrados nesta pesquisa podem fornecer orientação para autores de livros didáticos e suas editoras em relação à estrutura de livros didáticos. Também, podem servir como fundamento para reformulação das abordagens dadas aos conteúdos relacionados ao raciocínio proporcional.

Por fim, é importante salientar que, embora este estudo se refira à análise de livros didáticos usados em escolas públicas do Brasil, a estratégia de pesquisa pode ser aplicada a livros didáticos de Matemática de qualquer lugar ou país. Principalmente, pelo fato de originalmente ter sido desenvolvida para os livros didáticos da Austrália (Shield e Dole, 2013) e já ter sido aplicada na Suécia (Ahl, 2016). Com isso, novas pesquisas podem ser realizadas em outros locais, propiciando comparações e aprofundamento de estudos sobre raciocínio proporcional baseados na estrutura de Shield e Dole (2013).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHL, Linda Marie. Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish Mathematics textbooks. **REDIMAT**, 5(2), 2016, p. 180-204. doi: 10.4471/redimat.2016.1987

ALMEIDA, Alex Brandão de. **Elaboração de atividades para a introdução do conceito de razão e proporção: com análise dos professores da rede pública de ensino**. 2014, 119 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Rio de Janeiro.

ALMEIDA, Ricardo Guimarães de. **Razão e proporção para além da sala de aula**. 2015, 58 f. : il. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

BALL, Deborah Loewenberg. **What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?** University of Michigan. p. 1-9, 2003. <http://jwilson.coe.uga.edu/situations/Framework%20Folder/Framework.Jan08/articles/Ball2003Math%20Summit.pdf> Acesso em 17.01.2023.

BATISTA, Jakeline de Aquino. **O ensino de razão e proporção por meio de atividades**. 2018, 297 f. Mestrado em Educação. Universidade do Estado do Pará, Belém.

BEHR, Merlyn; LESH, Richard; POST, Thomas; SILVER, Edward. Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983, p. 91-125.

BEN-CHAIM, David; ILANY, Bat-Sheva; KERET, Yaffa. Atividades investigativas autênticas" para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, vol. 21, núm. 31, 2008, pp. 129-159. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

BEN-CHAIM, David; ILANY, Bat-Sheva; KERET, Yaffa. **Ratio and proportion: research and teaching in mathematics teachers' education (pre- and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes)**. Sense Publishers, The Netherlands, 2012.

BEN-CHAIM, David; FAY, J.T.; FITZGERALD, M.W.; BENEDETTO, C.; MILLER, J. Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. **Educational Studies in Mathematics**, 36, 247-273, 1998.

BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. **Livro didático e saber escolar. 1810-1910**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BORTOLOTTI, Roberta D'Angela Menduni. **Um estudo sobre a matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade**. 2016, 141 f. Doutorado em Educação. Universidade Federal da Bahia, Salvador.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)**. Brasília: MEC, 1996. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm)>. Acesso em: 10 fev. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2020**: apresentação - guia de livros didáticos/Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica - Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: MEC, 2019.

BROETTO, Geraldo Claudio. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. 2016, 422 f. Doutorado em Educação. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

BRUM, Jaqueline Magalhães; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos. Estratégias de resolução de problemas de divisão não rotineiros. **Revista Teoria e Prática da Educação**, Maringá/PR: UEM, v. 18, n.2, p. 121-132, maio/agosto 2015.

CANOVA, Raquel Factori; SILVA, Angelica da Fontoura Garcia; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Resultados Obtidos em Situações Parte-Todo por alunos que passaram por diferentes intervenções de ensino. **JIEEM** v.11, n.3, p. 282-290, 2018.

CARPES, Patrícia Pujol Goulart; BISOGNIN, Eleni. Compreensão das operações adição e subtração de números racionais com o uso do frac soma por um grupo de licenciados em matemática. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Sergipe:ReviSeM, ano 2019, n.1, p. 187-199.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**: ensino fundamental - anos finais, 6º ano. 2a ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**: ensino fundamental - anos finais, 7º ano. 2a ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**: ensino fundamental - anos finais, 8º ano. 2a ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**: ensino fundamental - anos finais, 9º ano. 2a ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

COMENIUS, Jan Amos. **Didática Magna**. Rio de Janeiro: Organizações Simões, 1954.

COMMANDINO, Frederico. **Euclides - elementos de geometria**. São Paulo: Ed. cultura, 1944.

CREPALDI, Silvio Aparecido. **Contabilidade gerencial**. São Paulo, Ed. Atlas, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, p. 83-97, jan/mar 1996.

DOLE, Shelley; HILTON, Annette; HILTON, Geoff. Proportional reasoning as essential numeracy. In M. Marshman, V. Geiger, & A. Bennison (Eds.). **Mathematics education in the margins (Proceedings of the 38th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)**. p. 189-196, 2015.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3 ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. Coleção formação de professores.

FIOREZA, Leandra Anversa. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais**. 2010, 240 f. Doutorado em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

FLORA, Mauro José dos Santos. **Matemática e cidadania: o ensino da regra de três em uma classe do 2º ano do ensino médio noturno**. 2011, 149 f. Mestrado Profissionalizante em Ensino das Ciências. Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias.

FOSSA, John A. Razão e proporção: a herança antiga. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. Edição Especial da **Revista Brasileira de História da Matemática**. 2011, Vol. 11, no 23. 1-6 p. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

GIL, Rita Sidmar Alencar. **Formação de professores de matemática: conexões didáticas entre matemática, história e arquitetura**. 2013, 382 f. Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática: 6º ano**. Ensino fundamental, anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática: 7º ano**. Ensino fundamental, anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática: 8º ano**. Ensino fundamental, anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática: 9º ano**. Ensino fundamental, anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GUIMARÃES, Douglas Ribeiro. **Educação matemática crítica permeando capítulos de geometria em livros didáticos: entre direcionamentos, contextos e**

enunciados. Rio Claro, 2022. 267 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro/SP.

HELLER, Patricia M.; AHLGREN, Andrew; POST, Thomas; BEHR, Merlyn; LESH, Richard. Proportional reasoning: the effect of two context variables, rate type and problem setting. **Journal of Research in Science Teaching**. vol. 26, no. 3, 1989, p. 205-220.

HOUAISS, Antonio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

JUNIOR, Hercules Luiz. **As diferentes abordagens do ensino de proporcionalidade**. 2016, 29 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Paraná.

JÚNIOR, José Roberto Costa. **Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade**: contribuições da história da matemática. 2010, 237 f. Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

KIEREN, T. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: Hiebert, J and Behr, M. (eds.) **Number concepts and operations in the Middle Grades**. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1980, p. 162-180.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In Lesh, R. (Ed.) **Number and measurement**: Paper from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, 1975, p.101-144.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. London: Routledge, Taylor & Francis Group. 2005.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester Jr. (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston, VA: National Council of the Teachers of Mathematics. 2007, p. 629–668.

LAWTON, Carol A. Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, 24, 1993. p. 460–466.

LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportional Reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.) **Number concepts and operations in the middle grades**.. Reston, VA: Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 1988, p. 93-118.

LÜDKE, Menga. ANDRE, Marli E.D.A. **A Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2 ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MACHADO, Benedito Fialho. **Saberes elementares de aritmética em manuais didáticos do curso primário produzidos no Pará (1850 – 1950)**, 2018, 207 f.

Doutorado em Educação em Ciências Matemáticas. Universidade Federal do Pará, Belém.

MARCHELLI, Paulo Sergio. Da LDB 4.024/61 ao debate contemporâneo sobre as Bases Curriculares Nacionais. **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v. 12, n. 03, p.1480-1511, out/dez. 2014. Programa de Pós-graduação Educação: Currículo - PUC/SP.

MARTINS, Larissa de Conti. **Abstração reflexionante e aprendizagem de proporção**: ensino de matemática na 6ª série. 2007, 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul– UFRGS, Porto Alegre.

MASETTI, Cristina. **Análise de livros didáticos de matemática: função exponencial**. 2016, 165 f. Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

MAZZANTI, David Luiz. **Educação de jovens e adultos: uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas**. 2008, 105 f. Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

MEIRA, Janeisi de Lima. **Labirintos da compreensão de regras em matemática: um estudo a partir da regra de três**. 2012, 101 f. Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará, Belém.

MERLINI, Vera Lúcia. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental. 2005, 215f. Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MIGUEL, Antonio; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**. n. 27, set-dez/2004.

MISAILIDOU, Christina; WILLIAMS, Julian. Improving performance on 'ratio' tasks: can pupils convert their 'additive approach'? **Proceedings of 10th International Congress on Mathematics Education (ICME)**, Roskilde, Denmark. 2004, Julho.

NASCIMENTO, Raul Francisco da Silva. **Análise de erros no processo de resoluções de proporcionalidade**. 2017, 57 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Oeste do Pará, Rio de Janeiro.

NUNES, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLEIMANN, Analucia. **Na vida dez, na escola zero**. 16 ed. São Paulo: Cortez, 2011.

NUNES, Sula Cristina Teixeira. **Flexibilidade cognitiva em cálculo mental: perfil de estudantes de 2º e 4º ano do Ensino Fundamental**. 2018, 111 f. Mestrado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre

OLIVEIRA, Mônica Teixeira de; ALVARENGA, André Martins; SILVEIRA, Daniel da Silva. **A matemática do corpo humano: relacionando conteúdos de razão, proporção e regra de três por meio de uma unidade didática**. Universidade Federal do Pampa – Campus Caçapava do Sul Curso: Licenciatura em Ciências Exatas – Semestre: 2/2013.

OLIVEIRA, Sandro Farias de. **Preparando o aluno de ensino fundamental para o aprendizado de razões e proporções**. 2017, 40 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

PETIT, Marjorie M.; LAIRD, Robert E.; WYNEKEN, Matthew F.; HUNTOON, Frances R.; ABELE-AUSTIN, Mary D.; SEQUEIRA, Jean D. **A focus on ratios and proportions bringing mathematics education research to the classroom**. New York, NY : Routledge, 2020. Routledge is an imprint of the Taylor & Francis Group.

PONTES, Maria Gilvanese de Oliveira. **Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extraescolar**. 1996, 220 f. Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. Lisboa, Novembro 2014: In: **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Publisher: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa Editors, p.13-27.

PONTE, João Pedro da. SILVESTRE, Ana Isabel. Proporcionalidade directa no 6o ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, Lisboa, 2012. No. 20, p. 70-97. Disponível em: <<http://www.eses.pt/interaccoes>>

PONTE, João Pedro da; SILVESTRE, Ana Isabel; GARCIA, Cristina; COSTA, Sara. **O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades**. Tarefas para o 1o e o 2o Ciclos do Ensino Básico. Universidade da Beira Interior. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Projecto IMLNA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. Setembro 2010.

POST, Thomas; CRAMER, K.; HAREL, G.; KIEREN, T.; LESH, Richard. Research on rational number, ratio and proportionality. **Proceedings of PME-North American 20**, 1998, vol. 1, p. 89-93. Raleigh, NC, EUA.

POST, Thomas; BEHR, Merlyn; LESH, Richard. Proportionality and the development of prealgebra understandings. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.), **Algebraic concepts in the curriculum K-12**, 1988, p. 78-90. Reston, VA: NCTM.

POWELL, Arthur Belford. Melhorando a epistemologia de números fracionários: uma ontologia baseada na história e neurociência. **RIPEM**. v. 9, n. 2, 2019, p. 50-68.



POWELL, Arthur Belford. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática. Ano 13, n. 29, set. - dez. 2018, p. 78-93.

QUARESMA, Marisa; PONTE, João Pedro da. Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor. **Interacções**, 2012, n. 20, p. 37-69. <https://doi.org/10.25755/int.485>

RAMOS, Paulo Luiz da Silva. **Razão áurea: Uma proposta para o ensino**. 2016, 99 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade de Brasília, Rio de Janeiro.

RIBEIRO, Fabio. **“Prezado professor”**: prefácios, notas, advertências e Manual do Professor. 2015, 183 f. Mestrado em História Social. Universidade de São Paulo, São Paulo.

RIPOLL, Cydara Cavedon. RANGEL, Letícia. GIRALDO, Victor. ROQUE, Tatiana. Comparando grandezas – Parte I. In: **2o Simpósio Nacional de Professores de Matemática da ANPMat**. 2015. Disponível em: [https://anpmat.org.br/simposio-nacional-2/wp-content/uploads/sites/3/2016/01/ripoll\\_rangel\\_comp\\_grandezas.pdf](https://anpmat.org.br/simposio-nacional-2/wp-content/uploads/sites/3/2016/01/ripoll_rangel_comp_grandezas.pdf). Acesso em: 17 ago 2022.

SANTOS, Edna Rodrigues dos. **Raciocínio Proporcional: a resolução de problemas por estudantes da EJA**. 2015, 129 f. Mestrado em Psicologia Cognitiva. Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

SANTOS, Vania Maria Pereira dos. **Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics content course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions**. Tese de doutorado defendida em Indiana University, Bloomington, Indiana, USA. Associação de Professores de Matemática. ESE de Lisboa. 1993. 451 p.

SANTOS, Vania Maria Pereira dos (Org). **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos**. Projeto Fundação - Instituto de Matemática - UFRJ. Rio de Janeiro: 1997, 224p.

SCHEFFER, Nilve Fátima.; POWELL, Arthur Belford. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, 2019, 1(3), p. 476-503.

SCHLIEMANN, Analúcia Dias; CARRAHER, David. Razões e proporções na vida diária e na escola. In: Schliemann Carraher, D. W.; Spiillo, A. G.; Meira, L. e Falcão, J.T.R (ela). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: UFPE, 1993, p. 13-37.

SHIELD, Malcolm; DOLE, Shelley. Investigating textbook presentations of ratio and proportion. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuck, & O. J. Thomas (Eds.), **Mathematics Education in the South Pacific**. Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)

2002, p. 608-616. Auckland, New Zealand: MERGA.

SHIELD, Malcolm; DOLE, Shelley. Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. In Springer Science Business Media, **Education Studies in Mathematics**, 2013, 82:183–199.

SILVA, Davidson Moura Lopes. **Uma análise do ensino de proporcionalidade no Ensino Fundamental: realidade e perspectivas**. 2015, 109 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de São Carlos, Rio de Janeiro.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **Regra de três: prática escolar de modelagem matemática**. 2011, 81 f. Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará, Belém.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **A invariável prática da regra de três na escola**. 2017, 194 f. Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará, Belém.

SILVA, Luis Carlos da. **A prática de ensino de física no ensino médio e o conceito de proporcionalidade: conexão fundamental na construção e (re)construção de conhecimentos**. 2009, 108 f. Mestrado em E Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará, Belém.

SILVESTRE, Ana Isabel; PONTE, João Pedro da. Ser ou não ser uma relação proporcional: uma experiência de ensino com alunos do 6.o ano. In **Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Viana do Castelo: APM. [CdRom], 2009.

SILVESTRE, Ana Isabel; PONTE, João Pedro da. Proporcionalidade direta no 6º ano de escolaridade: Uma abordagem exploratória. **Interacções**. No. 20, p. 70-97. 2012. Lisboa, Portugal.

SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica**. 2016, 250 f. Doutorado em Educação nas Ciências. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

SOUZA, Janderson Matricardi de. **A abordagem dos conceitos de proporcionalidade sob a ótica da resolução de problemas**. 2014, 94 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Rio de Janeiro.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática, realidade & tecnologia**. 6º ano. Ensino fundamental: anos finais. 1 ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática, realidade & tecnologia**. 7º ano. Ensino fundamental: anos finais. 1 ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática, realidade & tecnologia**. 8º ano. Ensino fundamental: anos finais. 1 ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática, realidade & tecnologia**. 9º ano. Ensino fundamental: anos finais. 1 ed. São Paulo: FTD, 2018.

SPINILLO, Alina Galvão. As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: Uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. 1993, p. 349-364.

SWETZ, F. Fifteenth and sixteenth century arithmetic texts: what can we learn from them? **Science and Education**, 1992, v. 1, p. 365-378.

TINOCO, Dayane Cristina Rocha. **Uma abordagem ecológica envolvendo proporcionalidade na educação básica**. 2016, 153p. Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative estruturas. In: LESH, R.; LANDAU, Morgan. **Acquisitions of mathematics concepts and processes**. New York, Academic Press, p. 127-174, 1983.

VOJTA, Ricardo William Ramirez. **A matemática comercial como ferramenta necessária para a educação e formação da cidadania do ser humano**. 2016, 174 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Oeste do Pará, Rio de Janeiro

WIELEWSKI, Sergio Antonio. **Pensamento instrumental e pensamento relacional na educação matemática**. 2008, 471 f. Doutorado em Educação Matemática: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.