

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Sthefanny Rupf Moreira

**UM ESTUDO DAS REPRESENTAÇÕES PARA DIFERENTES
GUPS**

VITÓRIA
2023

S. R. MOREIRA

**UM ESTUDO DAS REPRESENTAÇÕES PARA DIFERENTES
GUPS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
-Graduação em Física do Centro de Ciências
Exatas da Universidade Federal do Espírito
Santo como requisito parcial para a obten-
ção do grau de Mestre em Física, na área de
concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. GALEN MIHAYLOV SOTKOV

Vitória
30 de junho de 2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

M835e Moreira, Sthefanny Rupf, 1999-
Um estudo das representações para diferentes GUPS /
Sthefanny Rupf Moreira. - 2023.
123 f. : il.

Orientador: Galen Mihaylov Sotkov.
Coorientador: José Alexandre Nogueira.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Comprimento mínimo. 2. Princípio de incerteza generalizado (GUP). 3. Representação no espaço dos momentos. 4. Representação no espaço de quase posição. I. Sotkov, Galen Mihaylov. II. Nogueira, José Alexandre. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA


“Um Estudo das Representações para Diferentes GUP's”

Sthefanny Rupf Moreira

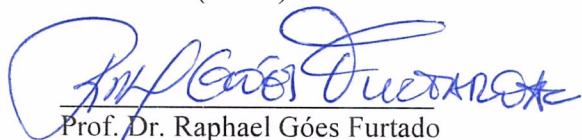
Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:


Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto
(CBPF)




Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov
(Orientador - PPGFis)



Prof. Dr. Raphael Góes Furtado
(CEUNES/UFES)



Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
(Coorientador - PPGFis/UFES)



Prof. Dr. Humberto Belich Júnior
(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 21 de julho de 2023





Página de Rosto - Sthefanny

Data e Hora de Criação: 28/07/2023 às 12:08:06

Documentos que originaram esse envelope:

- Página de Rosto - Sthefanny.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 83487fbca7d7a8d1ff13102b76ef3c1ae6784a383a3d6caae1d205d261d7cc1b

[SHA512]: 2ea9a6df64e358624ea19234058aebbbdd01fd1b4e66c18bfc89a50df47f485548f02a54967e2abdacc6be0a485225d825d28fb6c65655033231b2f2d9a351c3

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - José Abdalla Helayël-Neto (helayel@cbpf.br)

Data/Hora: 28/07/2023 - 13:14:08, IP: 201.17.85.168

[SHA256]: e210ec43cb5874ce61f35f43a77c9e233f7b0d6fca8b75a25e2d087fb56588fd

Histórico de eventos registrados neste envelope

28/07/2023 13:14:08 - Envelope finalizado por helayel@cbpf.br, IP 201.17.85.168

28/07/2023 13:14:08 - Assinatura realizada por helayel@cbpf.br, IP 201.17.85.168

28/07/2023 13:13:49 - Envelope visualizado por helayel@cbpf.br, IP 201.17.85.168

28/07/2023 12:09:32 - Envelope registrado na Blockchain por jose.nogueira@ufes.br, IP 216.238.115.63

28/07/2023 12:09:30 - Envelope encaminhado para assinaturas por jose.nogueira@ufes.br, IP 216.238.115.63

28/07/2023 12:08:07 - Envelope criado por jose.nogueira@ufes.br, IP 216.238.115.63

À todas pioneiras em suas áreas científicas.

Agradecimentos

Agradecimento especial à minha mãe, Valquiria, por sempre ter priorizado e incentivado meus estudos desde pequena. À minha prima Bruna por toda base de apoio, e ao meu primo Tonny por toda ajuda na realização desta dissertação.

Aos professores que fizeram parte da minha vida acadêmica até então, que ajudaram a construir meu conhecimento. Aos membros da banca, por disponibilizarem seu tempo a este trabalho. Ao meu orientador Galen e em especial, ao meu coorientador José Alexandre, por toda dedicação e paciência ao longo desses dois anos de mestrado, sua contribuição e atenção para a minha formação como pesquisadora não pode ser medida.

Aos meus amigos de longa data, Luisa, Eduardo e Rebecca, e meus amigos Daniela, Jacob, Helena e Luciano, agradeço por todo amparo nos momentos mais difíceis.

Ao fomento fornecido pela FAPES.

“O cientista não estuda a natureza porque ela é útil; estuda-a porque se delicia com ela, e se delicia com ela porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la e, se não valesse a pena conhecer a natureza, não valeria a pena viver.”

(Henri Poincaré)

Resumo

As diferentes propostas para gravitação quântica, quase em sua totalidade, conduzem à existência de um comprimento mínimo. A introdução de um comprimento mínimo provoca mudanças radicais na descrição matemática, bem como, dos conceitos físicos envolvidos em uma teoria. Em uma teoria quântica a implementação de um cenário de comprimento mínimo pode ser alcançada impondo uma incerteza mínima na posição, obtida através de uma generalização do princípio de incerteza de Heisenberg (GUP). Existem diferentes propostas de GUPs. Como resultado da incerteza mínima na posição, os autoestados do operador não são estados físicos, o que torna o uso da representação do espaço de posição inadequado. A alternativa mais natural é usar a representação do espaço dos momentos. Entretanto, para se recuperar as informações sobre a posição usa-se a representação de quase-posição obtida pela projeção do vetor de estado sobre os estados de máxima localização. O objetivo deste trabalho é, então, fazer uma análise funcional desses espaços de representação para as principais propostas de GUPs, em especial determinar as representações dos operadores posição e momento no espaço de quase-posição.

Palavras-chave: Comprimento Mínimo, Princípio de Incerteza Generalizado (GUP), Representação no Espaço dos Momentos, Representação no Espaço de Quase Posição.

Abstract

The different proposals for quantum gravity, almost in their entirety, lead to the existence of a minimum length. The introduction of a minimum length causes radical changes in the mathematical description, as well as the physical concepts involved in a theory. In a quantum theory the implementation of a minimum length scenario can be achieved by imposing a minimum uncertainty on the position, obtained through a generalization of the Heisenberg uncertainty principle (GUP). There are different proposals for GUPs. As a result of the minimal uncertainty in position, the operator's eigenstates are not physical states, which makes the use of position space representation inappropriate. The most natural alternative is to use the moment-space representation. However, to retrieve the information about the position, the quasi-position representation obtained by projecting the state vector onto the states of maximum location is used. The objective of this work is, then, to make a functional analysis of these representation spaces for the main proposals of GUPs, in particular to determine the representations of the position and moment operators in the quasi-position space.

Keywords: Minimum Length, Generalized Uncertainty Principle (GUP), Moment Space Representation, Quasi Position Space Representation.

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Revisão de Tópicos da Mecânica Quântica Ordinária	5
2.1 Princípio de Incerteza de Heisenberg e Relações de Comutação	6
2.2 Representações nos Espaços de Posição e Momento	7
2.3 Solução de Onda Plana	13
3 Análise Funcional dos Espaços de Representações para o KMM-GUP	15
3.1 Relação de Incerteza num Cenário de Comprimento Mínimo	16
3.2 Representação no Espaço de Hilbert	18
3.3 Análise Funcional do Operador Posição	22
3.4 Estados de Máxima Localização	28
3.5 Representação do Espaço de Quase Posição	36
3.6 Outra Representação para os Operadores Posição e Momento	39
3.6.1 Relação de Incerteza Modificada na Representação de P. Pedram	39
3.6.2 Espaço de Hilbert na Representação de P. Pedram	41
3.6.3 Estados Formais do Operador Posição na Representação do P. Pedram	43
3.6.4 Estados de Máxima Localização para a Representação do P. Pedram	45
3.6.5 Representação de Quase Posição	48
4 Análise Funcional dos Espaços de Representações para o Noucier-GUP	51
4.1 Relação de Incerteza para Todas as Ordens	51
4.2 Representação no Espaço de Hilbert	53
4.3 Autoestados Formais do Operador Posição	56
4.4 Estados de Máxima Localização	60
4.5 Representação do Espaço de Quase Posição	63

5	Análise Funcional dos Espaços de Representações para o ADV-GUP	66
5.1	Relação de Incerteza Associada a um Comprimento Mínimo e a um Momento Máximo	67
5.2	Representação no espaço de Hilbert	70
5.3	Autoestados Formais do Operador Posição	73
5.4	Algumas Análises sobre Estados de Máxima Localização	80
5.5	Representação do Espaço de Quase Posição	88
6	Análise Funcional dos Espaços de Representações para o Pedram-GUP	91
6.1	Relação de Incerteza Modificada	91
6.2	Representação no Espaço dos Momentos	93
6.3	Estados Formais do Operador Posição	97
6.4	Os estados de máxima localização	99
6.5	Representação dos Operadores no Espaço de Quase Posição	103
7	Conclusão	106
	Referências Bibliográficas	108
	Apêndice A Função Erro de Gauss	110
	Apêndice B Tabela de Integral	111

Capítulo 1

Introdução

O Modelo Padrão das partículas elementares é uma das maiores realizações do intelecto humano [1, 2]. Para muitos é considerada a teoria sobre a natureza da matéria que tem o melhor embasamento experimental, e a detecção de um bóson de Higgs com massa próxima a 125 GeV, em julho de 2012, no LHC, coroou o modelo [3, 4]. Conforme citado pelo físico teórico Gordon Kane¹ [6] “O Modelo Padrão é, na história, a mais sofisticada teoria matemática sobre a natureza. Apesar da palavra “modelo” em seu nome, o Modelo Padrão é uma teoria abrangente que identifica as partículas básicas e especifica como interagem. Tudo o que acontece em nosso mundo (exceto os efeitos da gravidade) resulta das partículas do Modelo Padrão interagindo de acordo com suas regras e equações.”

Como citado, a teoria busca entender os constituintes fundamentais da matéria e como eles interagem. Em suma, o Modelo Padrão argumenta que há dois tipos de partículas elementares: os *quarks* e os *léptons*, que não possuem estrutura interna². Também há os *hádrons*³, que surgem da união de quarks e *antiquarks*⁴. Essas partículas formam a matéria. Elas interagem entre si através das partículas mediadoras ou virtuais, que são conhecidas como bósons vetoriais. É como se os férmions trocassem partículas entre si. Para cada tipo de interação, a eletromagnética, fraca, forte e gravitacional, há um bóson correspondente⁵ [7]. As partículas mediadoras são os *quanta* dos campos gerados por cada partícula fundamental e elas são vistas como excitações desses campos⁶. Os campos do Modelo Padrão podem

¹Kane é um físico teórico de renome mundial que pesquisa maneiras de testar, estender e fortalecer o Modelo Padrão. Particularmente com relação a extensão supersimétrica do modelo e métodos para melhor compreender o setor de Higgs. Recentemente trabalhou com a união da Cosmologia com a Física de Partículas através de teorias supersimétricas e na conexão da Teoria de Cordas com o mundo real [5].

²No Modelo Padrão há dois tipos diferentes de partículas elementares de matéria: os *quarks* que interagem fortemente e não são encontrados livres na natureza (confinamento) e os *léptons* que não interagem fortemente e são encontrados livres na natureza, por exemplo, o elétron.

³Podem ser divididos em *mésons* e *bárions*. Os prótons e os nêutrons são os *hádrons* mais conhecidos.

⁴*Antiquarks* são as antipartículas dos *quarks*, ou seja, são partículas simétricas, com mesma massa, mas de cargas opostas.

⁵Para a interação eletromagnética o bóson é o fóton, para a forte é o glúon, para a fraca são as partículas W^\pm e Z^0 , e para a gravitacional é o gráviton, única partícula que não foi detectada experimentalmente.

⁶Campos podem ser definidos como objetos contínuos distribuídos no espaço-tempo, que detém um número infinito de graus de liberdade.

ser descritos pelo método da quantização⁷, arcabouço matemático vindo da chamada Teoria Quântica de Campos (TQC), teoria condizente tanto com a Relatividade Especial de Einstein quanto com a Mecânica Quântica de Planck e outros [8].

O problema do Modelo Padrão, que tentou descrever e explicar todas as quatro interações fundamentais, é que a teoria só funciona para três delas: as partículas virtuais grávitons, associadas à força gravitacional, até o presente trabalho não foram detectadas experimentalmente e além disso, quando é feita a tentativa de quantizar a gravidade, da mesma maneira que é feita nas forças eletromagnética, nuclear forte e fraca, surgem diversos problemas técnicos. A não linearidade da gravitação causa divergências no ultravioleta: para curar as quantidades infinitas geradas, é preciso infinitos contra-termos para cancelar essas divergências, o que impede a possibilidade de renormalizar a teoria. Uma teoria não renormalizável inviabiliza previsões [9]. Portanto, aplicar os conceitos de uma TQC na Relatividade Geral implica numa teoria sem previsão teórica. Esse problema trouxe a necessidade de desenvolver outras teorias que quantizassem a gravidade, as chamadas Teorias de Gravitação Quântica.

A premissa da Gravitação Quântica é a unificação da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica, tendo como objetivo a descrição de sistemas quânticos considerando os efeitos gravitacionais ao sondar pequenas distâncias a altas energias. Os exemplos da natureza que mais anseiam da validade dessa teoria são os Buracos Negros e o estudo do Universo Primordial, já que o nível da tecnologia atual torna impossível qualquer recriação experimental desses casos. O conceito base das mais diversas teorias de Gravidade Quântica, sendo as mais conhecidas a Teoria das Cordas⁸ e a Gravidade Quântica em Loop⁹, é que o espaço é quantizado. Outro aspecto em comum é que cada uma delas prediz a existência de um comprimento mínimo observável na escala de Planck, que está na ordem de $10^{-35}m$ [10].

O comprimento mínimo é um limite nas resoluções espaciais, na qual pensar em qualquer medida abaixo da sua escala implica na perda da própria noção de comprimento. Esse argumento pode ser defendido pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg: a gravidade amplifica a incerteza da posição, então ao fazer a tentativa de investigar distâncias menores que o comprimento de Planck, o aumento da energia perturba o espaço-tempo, e a incerteza espacial também aumenta. Isso torna impossível chegar a distâncias menores [11]. Há várias formas de introduzir um cenário teórico de comprimento mínimo: a modificação da Relação de Dispersão, a deformação da Relatividade Especial e a generalização do Princípio de Incerteza de Heisenberg, sendo a última a de interesse deste trabalho. Portanto, toda análise terá uma abordagem quântica, baseada no estudo dos Princípios de Incerteza Generalizados

⁷O método da quantização consiste em escrever observáveis em termos de operadores de criação e aniquilação que alteram o número dos *quantas* de excitação.

⁸Com a finalidade de ser uma Teoria de Tudo, a Teoria das Cordas tem como base o conceito de que as partículas constituintes da matéria não são objetos pontuais, mas sim filamentos de energia, as cordas. Cada partícula corresponde a um diferente modo de vibração dessa corda, que por ser indetectável, presume-se que está na escala de Planck.

⁹Nessa teoria, não é feita a tentativa de unificar as quatro forças fundamentais, mas sim quantizar a gravidade separadamente. O conceito base da Gravidade Quântica em Loop é que o espaço não é contínuo, mas é feito de pequenos nós conectados. Os *loops* são *quantas* de espaço e toda essa rede está na escala de Planck. Outro ponto importante é que a nível dos processos elementares, a ideia de tempo absoluto é perdida.

(GUPs). O comprimento mínimo nessa abordagem surge como uma incerteza mínima da posição $\Delta\hat{X}_0$ diferente de zero.

A generalização do Princípio de Heisenberg para os observáveis posição e momento implica em toda uma reformulação do arcabouço matemático da Mecânica Quântica Ordinária, desde a modificação das relações de comutação até a construção do espaço de Hilbert no cenário de comprimento mínimo. A relação de incerteza generalizada, unidimensionalmente, pode ter o aspecto comum

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \alpha(\Delta\hat{X})^2 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \gamma \right), \quad (1.1)$$

na qual α e β são variáveis positivas e independentes. As incertezas da posição $\Delta\hat{X}$ e do momento $\Delta\hat{P}$ podem depender dos valores esperados dos operadores posição \hat{X} e momento \hat{P} . O último termo é definido como $\gamma = \alpha\langle\hat{X}\rangle^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2$. Porém, essa relação de incerteza considera não só uma incerteza mínima da posição como também uma incerteza mínima do momento não nula, um caso mais geral que impede tanto a representação no espaço das posições como no espaço dos momentos, e não tem tanto apelo físico para ser trabalhado [12]. Em razão disso, a dependência com relação a incerteza da posição é desconsiderada, então ainda existe uma representação do espaço dos momentos e torna mais simples o estudo das implicações da presença de um comprimento mínimo. As informações sobre a posição são recuperadas ao usar a representação de quase-posição.

Essa dissertação tem como objetivo a realização de uma análise funcional desses espaços de representação para as principais propostas de GUPs: GUP-KMM, GUP-Nouicer, GUP-ADV e GUP-Pedram. E em especial, determinar as representações dos operadores posição e momento no espaço de quase-posição para cada um. Note que o trabalho em si não tenta argumentar a favor da existência desse comprimento mínimo, mas considera a possibilidade e estuda as implicações desse cenário.

No capítulo 2, é feita uma breve revisão dos tópicos mais importantes da chamada Mecânica Quântica Ordinária que terão uso no restante desta dissertação. São revisados o Princípio de Incerteza de Heisenberg e a relação de comutação associada. O estudo dos espaços de representação é detalhado e por último, a determinação da função de onda Gaussiana.

No capítulo 3, a modificação da Mecânica Quântica Ordinária para a Mecânica Quântica no cenário de Comprimento Mínimo é apresentada através da generalização do princípio de Incerteza de Heisenberg para o GUP-KMM. É escrita a relação de comutação modificada associada e a reformulação do espaço de Hilbert para esse GUP. A presença de uma incerteza de posição não nula implica em autoestados de posição formais, então a descrição escolhida é a representação no espaço dos momentos. Logo em seguida, são definidos os estados de máxima localização, para que estados quaisquer sejam projetados neles e a informação da posição seja recuperada na representação do espaço de quase posição.

Nos capítulos 4, 5 e 6 é feita a mesma construção realizada no capítulo 3, para respectivamente, GUP-Nouicer, GUP-ADV e GUP-Pedram. Cada um desses Princípios de Incerteza

Generalizados tem as suas particularidades, que serão enfatizadas em cada capítulo.

No capítulo 7, é feito um breve resumo de todos os resultados obtidos pelas quatro análises funcionais e a conclusão atingida com o estudo da teoria quântica no cenário de comprimento mínimo.

Capítulo 2

Revisão de Tópicos da Mecânica Quântica Ordinária

A capacidade de descrição dos mais diversos fenômenos físicos conhecidos até o final do século XIX concedeu um enorme sucesso para a Física Clássica. Ela era sustentada pelos três pilares clássicos: a Mecânica Clássica, o Eletromagnetismo e a Termodinâmica. Esses três ramos buscavam explicar a dinâmica da matéria, a radiação e como ambas interagem, respectivamente. Um ponto importante a ser destacado é que a matéria era descrita por partículas, enquanto a radiação era descrita por ondas. Todo esse arcabouço teórico condizia de forma muito satisfatória com os dados experimentais e ficou a sensação que seria a teoria física final.

Porém, com o início do século XX, foram desenvolvidas novas tecnologias experimentais, e a sondagem do mundo microscópico mostrou que a Física Clássica não tinha capacidade de descrever fenômenos atômicos e subatômicos, ela se limitava ao mundo macroscópico. Além disso, com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade de Einstein, foi visto que os conceitos clássicos se limitavam ao domínio de baixas velocidades, ou seja, bem abaixo da velocidade da luz. Portanto, com o impacto dessas duas novas frentes, foi preciso o desenvolvimento de uma nova teoria física para descrever fenômenos microscópicos: a Mecânica Quântica.

Considerado o pai da Mecânica Quântica, Max Planck foi o primeiro a introduzir a ideia de quantização: a energia não era emitida de forma contínua, ela era composta por pacotes discretos, os *quanta*. Posteriormente, ela foi consolidada por Einstein ao explicar o efeito fotoelétrico. Bohr também defendeu essa ideia ao estudar o modelo do átomo de hidrogênio. Foi de Broglie que introduziu um novo conceito: a radiação se comporta como partícula e corpos também podem se comportar como onda, quebrando mais um tópico importante da Física Clássica. Todos esses físicos chegaram a resultados surpreendentes, mas foram Heisenberg e Schrödinger que buscaram uma teoria concreta para explicar os experimentos e Born que desenvolveu uma interpretação probabilística da Mecânica Quântica [13].

Segue nas próximas seções os conceitos chaves da Mecânica Quântica Ordinária que

serão essenciais para o desenvolvimento desta dissertação.

2.1 Princípio de Incerteza de Heisenberg e Relações de Comutação

A Mecânica Quântica violou um dos principais pilares da Física Clássica: a capacidade de determinação. A base dessa física que descreve o mundo microscópico não é determinística e foi postulada pelo físico Werner Heisenberg. A ideia de ter grandezas, como posição e momento, bem definidas deu lugar a observáveis que só poderiam ser descritos em termos probabilísticos. Essa incerteza envolvendo pares de observáveis, inerente à teoria quântica, é conhecida como Princípio de Incerteza de Heisenberg. Esse princípio diz que não é possível medir posição e momento simultaneamente com precisão arbitrária, ou seja, para aumentar a precisão da medida da posição de alguma partícula teste, é preciso perturbá-la, aumentando a incerteza do momento. A velocidade da partícula também não poderia ter uma medida mais precisa sem perder a localidade dela. Matematicamente, para os observáveis posição \hat{x} e momento \hat{p} , o Princípio de Incerteza de Heisenberg tem a forma

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.1)$$

Essa relação pode ser melhor observada ao plotar um gráfico de $\Delta\hat{x}$ dependente de $\Delta\hat{p}$. Anali-

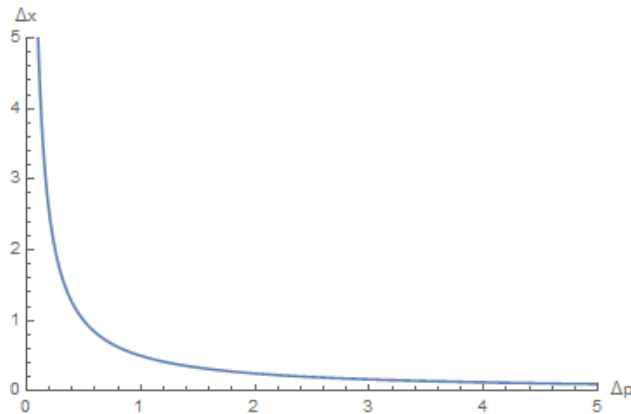


Figura 2.1. Princípio de Incerteza de Heisenberg.

sando o gráfico da figura 2.1, é possível perceber que se for preciso fazer uma medida precisa de algum dos observáveis, diminuindo a incerteza, para o outro observável, a incerteza vai tender ao infinito, o que mostra como ambas estão intimamente ligadas.

De forma generalizada, a relação de incerteza para dois observáveis quaisquer \hat{A} e \hat{B} , é dada por¹

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|, \quad (2.2)$$

¹A relação de incerteza (2.2) é conhecida como Relação de Incerteza de Robertson, a qual segue da mais geral Relação de Incerteza de Schrödinger: $(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \left| \frac{1}{2} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \right|^2 + \left| \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2$, onde $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ é o anticomutador.

na qual a relação de incerteza de um operador \hat{A} é definida como $\Delta\hat{A} := \sqrt{\langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle}$ e $[\hat{A}, \hat{B}]$ é a relação de comutação entre dois operadores quaisquer.

O comutador de dois observáveis \hat{A} e \hat{B} é definido como

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.3)$$

Esses dois operadores comutam se o comutador de ambos for nulo,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0. \quad (2.4)$$

Outro ponto é que qualquer operador comuta consigo mesmo, ou seja, $[\hat{A}, \hat{A}] = 0$. Uma propriedade importante dos comutadores, que será utilizada nos próximos capítulos, é a distributiva,

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]. \quad (2.5)$$

Para os operadores posição e momento, a relação de comutação, definida de forma a ser condizente com a relação de incerteza (2.1), não é nula. Em razão disto, é dito que os operadores posição e momento não comutam entre si e a relação de comutação é dada por

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2.6)$$

Para mostrar que ela é condizente com a relação de incerteza, basta substituir o comutador na equação (2.2),

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2} |\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle i\hbar \rangle| \geq \frac{1}{2} |i\hbar| \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.7)$$

o que mostra que ambas as relações estão associadas.

2.2 Representações nos Espaços de Posição e Momento

Na Mecânica Quântica, as grandezas físicas são representadas por operadores que atuam em funções de onda de quadrado integráveis². Essas funções de quadrado integráveis são representantes de vetores de um espaço de Hilbert³ \mathcal{H} complexo. Para extrair informações físicas dessas funções de onda, antes de tudo é preciso determinar a ação desses operadores, mais especificamente do operador posição e momento, nos espaços de representações. O foco deste capítulo é o estudo nos espaços das posições e dos momentos.

²Uma função é definida como de quadrado integrável se existir a integral: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2$.

³Um Espaço de Hilbert é um espaço vetorial munido de um produto interno e completo.

A relação dos operadores posição e momento com seus autoestados é dada por

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad (2.8)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad (2.9)$$

sendo x e p os autovalores, respectivamente, dos operadores \hat{x} e \hat{p} .

O autovalor x representa a exata posição da partícula quando a incerteza da posição $\Delta\hat{x}$ é nula, dos chamados "estados próprios". Analogamente, o mesmo para o autovalor do momento. O ponto é que os autoestados $|x\rangle$ e $|p\rangle$ não pertencem ao espaço de Hilbert por não serem normalizáveis. A forma de contornar essa questão é escrever os autovetores dos operadores posição e momento como uma sequência de estados físicos $|\psi_n\rangle$ com incertezas da posição e momento tendendo a zero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\hat{x}_{|\psi_n\rangle} = 0, \quad (2.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\hat{p}_{|\psi_n\rangle} = 0. \quad (2.11)$$

Assim, nesse limite os estados são ortogonais e conseqüentemente podem ser normalizados.

Com esses pontos em mente, é iniciado o estudo do formalismo dos espaços das representações. O produto interno de funções na representação de posição no espaço de Hilbert é definido como

$$\langle\psi|\phi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x)\phi(x). \quad (2.12)$$

A relação de totalidade é definida a partir do produto interno,

$$\begin{aligned} \langle\psi|\phi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle\psi|x\rangle\langle x|\phi\rangle \\ &= \langle\psi|\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle\langle x|\right]|\phi\rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle\langle x| = I, \quad (2.14)$$

na qual I é a matriz identidade.

A relação de ortonormalização é definida a partir da relação de totalidade,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \langle x|\psi\rangle = \langle x|\int_{-\infty}^{\infty} dx' |x'\rangle\langle x'|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x|x'\rangle\psi(x'). \end{aligned} \quad (2.15)$$

A Delta de Dirac pode ser definida como

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x')\psi(x'). \quad (2.16)$$

A equivalência de ambas equações permite encontrar a relação de ortonormalização,

$$\langle x|x' \rangle = \delta(x - x'). \quad (2.17)$$

Para escrever a representação de operadores no espaço de posição, é preciso de funções dependentes da posição x . Para que isso ocorra, um autoestado arbitrário $|\psi\rangle$ é projetado num autoestado de posição,

$$|\psi\rangle \longrightarrow \langle x|\psi\rangle = \psi(x), \quad \forall x. \quad (2.18)$$

Na representação no espaço dos momentos, as autofunções são escritas de forma análoga,

$$|\psi\rangle \longrightarrow \langle p|\psi\rangle = \tilde{\psi}(p), \quad \forall p. \quad (2.19)$$

O objetivo é passar o autoestado $|\psi\rangle$ na representação do espaço das posições para a representação do espaço dos momentos,

$$\psi(x) \longrightarrow \tilde{\psi}(p), \quad (2.20)$$

na qual a função $\tilde{\psi}$ é escrita dessa forma por ela atuar de forma diferente de ψ .

Utilizando a relação de totalidade (2.14) no espaço dos momentos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p| = I, \quad (2.21)$$

na equação (2.18) e levando em conta a função de onda no espaço das posições em (2.19), chega-se em

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \langle x| \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle x|p\rangle\tilde{\psi}(p), \quad (2.22)$$

na qual $\langle x|p\rangle$ são os autoestados do operador momento na representação de posição.

Fazendo analogamente essa construção para a autofunção do momento, encontra-se

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \langle p| \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x\rangle\psi(x), \quad (2.23)$$

na qual $\langle p|x\rangle$ são os autoestados do operador posição na representação de momento.

Para determinar a ação dos operadores posição e momento no espaço das posições,

são utilizadas as transformadas não normalizadas determinadas anteriormente,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle x|p\rangle \tilde{\psi}(p), \quad (2.24)$$

$$\tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x\rangle \psi(x). \quad (2.25)$$

É preciso escrever esses vetores de estado como uma projeção nas bases de \hat{x} e \hat{p} . Primeiro com relação ao operador posição, utilizando a relação de totalidade, encontra-se

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |x\rangle. \quad (2.26)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{x}|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x|\hat{x}|x'\rangle \langle x'|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' x' \langle x|x'\rangle \langle x'|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' x' \delta(x' - x) \psi(x') = x\psi(x), \end{aligned} \quad (2.27)$$

desde que a equação de autovalor (2.8) dos autoestados do operador \hat{x} seja válida.

Logo, conclui-se que a ação do operador posição na representação do espaço das posições é

$$\hat{x} \cdot \psi(x) = x\psi(x). \quad (2.28)$$

A partir da representação do operador \hat{x} , a representação do operador \hat{p} já está pré-determinada. É preciso satisfazer a relação de comutação da mecânica quântica ordinária dada na equação (2.6). Uma maneira dessa relação de comutação ser cumprida é se o operador momento atuar da forma

$$\hat{p} \cdot \psi(x) = -i\hbar \partial_x \psi(x). \quad (2.29)$$

Para comprovar que essa escolha é válida, é feita uma construção de forma análoga da realizada em (2.27),

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{p}|\psi\rangle &= \langle x|\hat{p} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) \langle x|\hat{p}|x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) (-i\hbar \partial_x) \langle x|x\rangle \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \psi(x) = \hat{p} \cdot \psi(x), \end{aligned} \quad (2.30)$$

e essa relação é válida desde que a equação de autovalor (2.9) dos autoestados do operador \hat{p} seja válida.

Logo, conclui-se que a ação do operador momento na representação do espaço de posição é

$$\hat{p} \cdot \psi(x) = -i\hbar \partial_x \psi(x). \quad (2.31)$$

A verificação de que os operadores obedecem a relação de comutação (2.1) é feita ao substituir a ação de ambos ao atuar o comutador numa autofunção arbitrária $\psi(x)$,

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}] \cdot \psi(x) &= \hat{x}\hat{p} \cdot \psi(x) - \hat{p}\hat{x} \cdot \psi(x) = \langle x|\hat{x}\hat{p}|\psi\rangle - \langle x|\hat{p}\hat{x}|\psi\rangle \\
&= \langle x|\hat{p}(\hat{x}|\psi)\rangle - \langle x|\hat{x}(\hat{p}|\psi)\rangle = \langle x|\hat{p}(x|\psi)\rangle - \langle x|\hat{x}(-i\hbar\partial_x|\psi)\rangle \\
&= \langle x|x(\hat{p}|\psi)\rangle - \langle x|(-i\hbar\partial_x(\hat{x}|\psi))\rangle = \langle x|x(-i\hbar\partial_x|\psi)\rangle - \langle x|(-i\hbar\partial_x(x|\psi))\rangle \\
&= -i\hbar x\partial_x\langle x|\psi\rangle + i\hbar\partial_x(x\langle x|\psi\rangle) = i\hbar(\partial_x(x\psi(x)) - x\partial_x\psi(x)). \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Utilizando a relação envolvendo a derivada de um produto no termo entre parênteses,

$$\partial_x(x\psi(x)) = x\partial_x\psi(x) + \psi(x)\partial_x x \implies \partial_x(x\psi(x)) - x\partial_x\psi(x) = \psi(x), \tag{2.33}$$

o resultado obtido é

$$[\hat{x}, \hat{p}] \cdot \psi(x) = i\hbar\psi(x) \implies [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \tag{2.34}$$

e a relação de comutação é cumprida.

É também preciso determinar os autoestados do operador momento na representação do espaço das posições. Para tal, utiliza-se os autoestados de momento na representação de posição,

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = \langle x|p|p\rangle = p\langle x|p\rangle \equiv -i\hbar\partial_x\psi_p(x), \tag{2.35}$$

na qual foi escrito $\langle x|p\rangle \equiv \psi_p(x)$ como uma função do autoestado de p dependente de x .

A equação diferencial toma a forma

$$p\psi_p(x) = -i\hbar\partial_x\psi_p(x). \tag{2.36}$$

Reorganizando seus termos e integrando em ambos os lados, a sua solução é

$$\int \frac{d\psi_p(x)}{\psi_p(x)} = \frac{ip}{\hbar} \int dx \longrightarrow \ln \psi_p(x) = \frac{ipx}{\hbar} \implies \psi_p(x) = e^{ipx/\hbar}. \tag{2.37}$$

Logo,

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}, \tag{2.38}$$

$$(\langle x|p\rangle)^* = \langle p|x\rangle = e^{-ipx/\hbar}. \tag{2.39}$$

Substituindo as relações acima nas transformadas (2.24) e (2.25),

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p), \tag{2.40}$$

$$\tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x). \tag{2.41}$$

A partir dessas transformadas, determina-se a representação dos operadores posição e momento no espaço dos momentos. Ainda na representação de posição, é feita a substituição de (2.40) na equação de autovalor do operador posição (2.28),

$$\hat{x} \cdot \psi(x) = x\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} x\tilde{\psi}(p). \quad (2.42)$$

Na representação do espaço dos momentos é preciso que a equação tenha a forma equivalente ao lado direito da equação logo acima. Portanto,

$$\hat{x} \cdot \tilde{\psi}(p) = \langle p|\hat{x}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle p|x\rangle x\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ipx/\hbar} x\psi(x). \quad (2.43)$$

Então, o operador posição \hat{x} deve atuar como um operador diferencial sobre a transformada (2.41) para que surja um termo de posição ordinária x . Logo, a ação do operador posição na representação do espaço dos momentos é

$$\hat{x} \cdot \tilde{\psi}(p) = i\hbar \partial_p \tilde{\psi}(p). \quad (2.44)$$

Analogamente, para o operador momento tem-se que

$$\hat{p} \cdot \psi(x) = -i\hbar \partial_x \psi(x) = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \partial_x e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p). \quad (2.45)$$

Também é necessário que a equação logo abaixo seja equivalente a equação (2.45),

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot \psi(x) &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \partial_x e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p) = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{ip}{\hbar} \right) e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} p \tilde{\psi}(p). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para que surja o termo de momento p , o operador momento precisa ser um operador multiplicativo. Logo, a ação do operador momento na representação do espaço dos momento é

$$\hat{p} \cdot \tilde{\psi}(p) = p\tilde{\psi}(p). \quad (2.47)$$

Para mostrar que ambas representações são condizentes com a relação de comutação (2.1), basta fazer a mesma demonstração feita na equação (2.32),

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] \cdot \psi(p) &= \hat{x}\hat{p} \cdot \psi(p) - \hat{p}\hat{x} \cdot \psi(p) = \langle p|\hat{x}\hat{p}|\psi\rangle - \langle p|\hat{p}\hat{x}|\psi\rangle \\ &= \langle p|\hat{p}(\hat{x}|\psi)\rangle - \langle p|\hat{x}(\hat{p}|\psi)\rangle = \langle p|\hat{p}(i\hbar \partial_p |\psi)\rangle - \langle p|\hat{x}(p|\psi)\rangle \\ &= \langle p|i\hbar \partial_p (\hat{p}|\psi)\rangle - \langle p|p(\hat{x}|\psi)\rangle = \langle p|i\hbar \partial_p (p|\psi)\rangle - \langle p|p(i\hbar \partial_p |\psi)\rangle \\ &= i\hbar \partial_p (p\langle p|\psi\rangle) - i\hbar p \partial_p \langle p|\psi\rangle = i\hbar (\partial_p (p\psi(p)) - p \partial_p \psi(p)) = i\hbar \psi(p), \end{aligned} \quad (2.48)$$

retornando a relação de comutação de Heisenberg.

A representação do espaço dos momentos é extremamente útil para o estudo de um cenário de comprimento mínimo, como será visto nos próximos capítulos, devido a incerteza mínima da posição ser não nula.

2.3 Solução de Onda Plana

É importante determinar os estados para os quais a relação de incerteza é mínima, isto é, satisfeita na igualdade. Para tal, parte-se da positividade da norma,

$$\left\| \left(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right) |\psi\rangle \right\| \geq 0; \quad \Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|}{2}. \quad (2.49)$$

O interesse de estudo dessa revisão envolve as funções de onda do espaço dos momentos. Então, considerando a igualdade da norma, a equação acima é projetada nos autoestados do operador momento,

$$\langle p | \left(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0. \quad (2.50)$$

Substituindo relação de comutação da Mecânica Quântica Ordinária e a ação dos operadores posição e momento na representação dos momentos,

$$\left(i\hbar \partial_p - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle i\hbar \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} (p - \langle \hat{p} \rangle) \right) \langle p | \psi \rangle = 0. \quad (2.51)$$

Reorganizando os termos,

$$i\hbar \frac{d}{dp} \tilde{\psi}(p) = \left(\langle \hat{x} \rangle + \frac{i\hbar}{2(\Delta \hat{p})^2} (\langle \hat{p} \rangle - p) \right) \tilde{\psi}(p). \quad (2.52)$$

Chega-se na equação diferencial

$$\frac{d\tilde{\psi}(p)}{\tilde{\psi}(p)} = \left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar} + \frac{1}{2(\Delta \hat{p})^2} (\langle \hat{p} \rangle - p) \right) dp. \quad (2.53)$$

Integrando em ambos lados,

$$\int \frac{d\tilde{\psi}(p)}{\tilde{\psi}(p)} = \left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar} + \frac{\langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} \right) \int dp - \frac{\langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} \int dp p, \quad (2.54)$$

resultando em

$$\ln \tilde{\psi}(p) = \left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar} + \frac{\langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} \right) p - \frac{\langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} \frac{1}{2} p^2 + C. \quad (2.55)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados,

$$\tilde{\psi}(p) = Ne^{-i\langle\hat{x}\rangle p/\hbar} \exp\left[\frac{\langle\hat{p}\rangle}{2(\Delta\hat{p})^2} \left(p - \frac{1}{2}p^2\right)\right]. \quad (2.56)$$

A função acima representa, então, os estados para os quais a relação de incerteza é satisfeita na igualdade. Essa função de onda é conhecida como função de onda Gaussiana.

Para $\Delta\hat{p}$ tendendo ao infinito, a segunda exponencial se torna igual a 1 e é possível determinar o posição própria de uma partícula teste, ou seja, aquela para qual a incerteza da posição é nula (os estados para os quais a localização é máxima). Nessas condições, $\langle\hat{x}\rangle = x$. Logo,

$$\tilde{\psi}(p) = Ne^{-ixp/\hbar}. \quad (2.57)$$

Essa função de onda não pertence ao espaço de Hilbert por não ser de quadrado integrável, então ela não representa um estado físico real, é uma autofunção formal.

Note que a função da equação (2.57) é idêntica à autofunção do operador posição \hat{x} na representação do espaço dos momentos, pois ambas representam os estados para os quais a localização da partícula é exata, isto é, não há incerteza na medida da posição da partícula nesses estados⁴ ($\Delta\hat{x} = 0$).

⁴É claro que se $(\Delta\hat{x})_{min} > 0$, os estados que satisfazem a relação de incerteza na igualdade com a máxima localização possível (isto é, com $\Delta\hat{x} = (\Delta\hat{x})_{min}$) não serão mais os mesmos, visto que os autoestados do operador posição representam estados com $\Delta\hat{x} = 0$, cuja localização é exata.

Capítulo 3

Análise Funcional dos Espaços de Representações para o KMM-GUP

No ano de 1995, foi publicado o artigo “Representação do espaço de Hilbert da relação de incerteza de comprimento mínimo” em tradução livre, escrito pelos físicos Achim Kempf¹, Gianpiero Mangano² e Robert B. Mann³ [12], onde eles trabalham com a hipótese da existência de um comprimento mínimo mensurável, sugerida pelas teorias de gravidade quântica. Muito antes dessa publicação já eram citados os efeitos de um comprimento mínimo na Teoria Quântica de Campos, mas esse artigo foi o primeiro a desenvolver a base matemática da mecânica quântica que leva em conta um comprimento mínimo na escala de Planck [17].

No artigo, o comprimento mínimo surge como uma incerteza mínima da posição e o aparecimento de um $(\Delta\hat{X})_{min} > 0$, gera a necessidade de modificação de todo arcabouço físico e matemático da Mecânica Quântica Ordinária para um cenário de comprimento mínimo. Para inserir o comprimento mínimo na Mecânica Quântica, é preciso generalizar o Princípio de Incerteza de Heisenberg (HUP) para um Princípio de Incerteza Generalizado (GUP). Nesse cenário, A. Kempf et al. propuseram o GUP mais trivial, aquele que não depende de uma incerteza mínima do momento, e que origina o aparecimento de um comprimento mínimo, conhecido como GUP-KMM. Esse GUP considera apenas o termo de primeira ordem do parâmetro β , que está associado à existência do comprimento mínimo. O GUP tem a forma

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \gamma), \quad (3.1)$$

¹Kempf é um físico matemático, atualmente professor no Departamento de Matemática Aplicada na Universidade de Waterloo, no Canadá. Seus interesses de pesquisa variam da Teoria Clássica da Amostragem à Teoria da Informação Quântica, Gravidade Quântica e Cosmologia Inflacionária [14].

²Mangano é pesquisador sênior do Instituto Nacional de Física Nuclear, na Itália. Está envolvido principalmente em pesquisas de Física de Neutrinos e Cosmologia. É autor de mais de 120 publicações científicas [15].

³Mann também é professor na Universidade de Waterloo e tem um grupo de pesquisa que trabalha em cima de questões fundamentais da física, especialmente aquelas que podem ser testadas experimentalmente. Tem como foco trabalhos envolvendo Gravitação, Física Quântica e a união entre esses dois assuntos [16].

sendo o último termo γ do GUP-KMM definido como dependente do valor médio de \hat{P} , $\gamma = \beta \langle \hat{P} \rangle^2$. O parâmetro β é positivo e seu valor não depende das incertezas mínimas de posição $\Delta \hat{X}$ e momento $\Delta \hat{P}$, mas pode depender dos valor médio do operador momento $\langle \hat{P} \rangle$. O parâmetro GUP β pode ser definido em termos de outras grandezas quando inserido no contexto da Cosmologia. Ele toma a forma $\beta = \beta_0 / (\mathcal{M}_{pl} c)^2 = \beta_0 / \mathcal{L}_{pl}^2 \hbar^2$, sendo \mathcal{M}_{pl} a massa de Planck, \mathcal{L}_{pl} o comprimento de Planck e β_0 é uma constante adimensional [10]. Note que para o interesse de estudo dessa dissertação, essa aproximação não é feita.

Em altas energias, espera-se que a física da escala de Planck tenha influência gravitacional em seus efeitos quânticos. Em energias muito abaixo da energia de Planck, que é da ordem $\mathcal{E}_{pl} \approx 10^{19} \text{ GeV}$, o parâmetro GUP passa a não ter relevância por seus efeitos gravitacionais não mais perturbarem de forma significativa a estrutura do espaço-tempo, então o segundo termo da equação (3.1) é desconsiderado e o Princípio de Incerteza de Heisenberg da Mecânica Quântica Ordinária, estudado no capítulo 2, é recuperado [10].

3.1 Relação de Incerteza num Cenário de Comprimento Mínimo

Num cenário de comprimento mínimo, o HUP é generalizado para um GUP, portanto, para que uma relação de comutação esteja associada ao GUP, é preciso mudá-la também. A relação de comutação modificada correspondente ao GUP-KMM é dada por

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2). \quad (3.2)$$

A confirmação dessa associação é feita ao utilizar a relação de comutação acima na relação de incerteza para os observáveis \hat{X} e \hat{P}

$$\begin{aligned} \Delta \hat{X} \Delta \hat{P} &\geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right| \geq \frac{1}{2} \left| \langle i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2) \rangle \right| \geq \frac{1}{2} \left| i\hbar (1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle) \right| \\ &\geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle). \end{aligned} \quad (3.3)$$

A relação de incerteza de um operador qualquer \hat{A} ao quadrado é igual a $(\Delta \hat{A})^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$. Para o operador momento, é possível reescrever o valor médio de \hat{P}^2 utilizando a relação de incerteza na forma

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta \hat{P})^2 + \beta \langle \hat{P} \rangle^2). \quad (3.4)$$

garantindo que a relação de comutação modificada (3.2) é coerente com o GUP-KMM (3.1).

O gráfico da equação (3.4) gera a curva da incerteza mínima, ilustrada na figura 3.1. A curva tem um ponto de mínimo na incerteza da posição, que é o comprimento mínimo $\Delta \hat{X}_0$. Esse valor funciona como um limite ao tentar obter uma precisão maior da posição de uma partícula teste, já que ao tentar sondar com exatidão onde essa partícula se encontra, o espaço-tempo sofre uma perturbação devido a influência gravitacional, aumentando a incerteza da posição, como observado a partir do comprimento mínimo. Assim, por construção

verifica-se o aparecimento de um comprimento mínimo e a ausência de uma incerteza mínima do momento para o GUP-KMM. Os pontos acima da curva do gráfico compõem a chamada região permitida, ou seja, a região em que seus pontos satisfazem a relação de incerteza generalizada (3.1). Outro ponto a ser destacado é como a presença do $\Delta\hat{X}_0$ mudar o comportamento assintótico observado no gráfico do HUP, na figura 2.1.

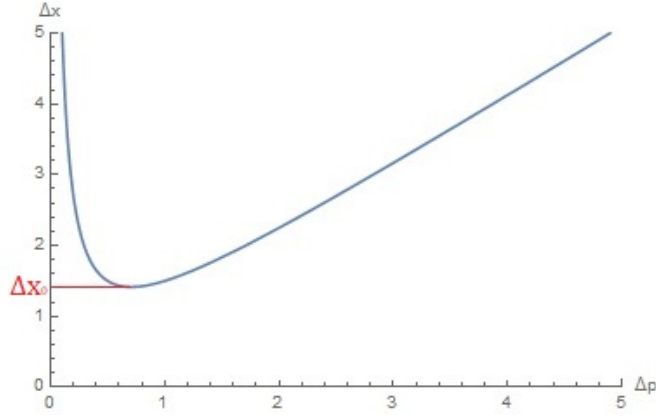


Figura 3.1. Princípio de Incerteza Generalizado que implica em um comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0 > 0$.

O valor dessa incerteza mínima pode ser determinado através da equação (3.4)⁴, que ao isolar $\Delta\hat{X}$,

$$\Delta\hat{X} \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{\Delta\hat{P}} + \beta\Delta\hat{P} \right), \quad (3.5)$$

a incerteza da posição pode ser escrita como uma função $f(k)$ dependente da incerteza do momento

$$f(k) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{a}{k} + bk \right); \quad a \equiv 1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2, b \equiv \beta, k \equiv \Delta\hat{P}. \quad (3.6)$$

Para encontrar o ponto de extremo da função $f(k)$, basta efetuar a derivada primeira dessa função

$$f'(k) = \frac{\hbar}{2} \frac{d}{dk} (ak^{-1} + bk) = \frac{\hbar}{2} \left(-\frac{a}{k^2} + b \right), \quad (3.7)$$

e igualá-la a zero quando valorada no ponto crítico k_0 ,

$$f'(k_0) = \frac{\hbar}{2} \left(-\frac{a}{k_0^2} + b \right) = 0 \longrightarrow \frac{a}{k_0^2} = b \implies k_0 = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (3.8)$$

O ponto crítico que minimiza a função é k_0 positivo⁵ e é para esse valor que as incertezas

⁴Há outra forma de determinar o comprimento mínimo, basta reorganizar os termos e a equação toma a forma de uma equação de segundo grau para $\Delta\hat{P}$, que é resolvida impondo que a incerteza do momento é um valor real.

⁵Isso pode ser conferido ao efetuar a derivada segunda da função para o ponto k_0 , de forma que o resultado

ficam dentro da região permitida, observada no gráfico anterior. A partir do k_0 da equação (3.8), encontra-se a incerteza do momento $\Delta\hat{P}'$,

$$\Delta\hat{P}' = \sqrt{\frac{1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{\beta}}, \quad (3.9)$$

ou seja, aquela que é correspondente a incerteza mínima da posição $(\Delta\hat{X})_{min}$,

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{X})_{min} &\geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{\Delta\hat{P}'} + \beta\Delta\hat{P}' \right) \geq \frac{\hbar}{2} \left[(1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2) \sqrt{\frac{\beta}{1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}} + \beta \sqrt{\frac{1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{\beta}} \right] \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left[\sqrt{\beta(1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2)} + \sqrt{\beta(1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2)} \right] \geq \hbar \sqrt{\beta(1 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

No limite da região permitida, é imposto que o valor médio do operador momento seja nulo, $\langle\hat{P}\rangle = 0$, para que a incerteza seja a menor possível. Com essa obrigatoriedade, têm-se que $(\Delta\hat{X})_{min}$ equivale ao comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0$,

$$\Delta\hat{X}_0 \geq \hbar \sqrt{\beta}. \quad (3.11)$$

A partir da equação (3.9), têm-se a incerteza crítica do momento, aquela para a qual ocorre o comprimento mínimo, sendo igual a

$$(\Delta\hat{P})_c = \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (3.12)$$

Desses resultados é notado que a incerteza da posição não pode ser arbitrariamente pequena como ocorre na Mecânica Quântica Ordinária. Se a escolha for aumentar $\Delta\hat{P}$ diminuindo $\Delta\hat{X}$, o termo $\beta(\Delta\hat{P})^2$ crescerá mais rapidamente.

3.2 Representação no Espaço de Hilbert

É preciso uma representação para os vetores de estado nesse cenário, porém a representação no espaço das posições não é viável pela presença do comprimento mínimo. A incerteza da posição não podendo ser nula $\Delta\hat{X} > 0$ faz com que os autoestados de posição gerados sejam não físicos, já que não é mais possível aproximar os autoestados do operador posição como uma sequência de estados físicos com a incerteza tendendo a zero, como discutido no capítulo 2. Portanto, é mais conveniente utilizar a representação do espaço dos momentos, já que não há incerteza mínima para o momento, de forma que $\Delta\hat{P}$ é admissível ser nulo e sendo possível obter sentido físico nesses autoestados. A construção do espaço de Hilbert \mathcal{H} é feita na representação dos momentos, então a função de onda nessa é positivo, ou seja, a função é minimizada.

representação é dada ao projetar os vetores de estado $|\psi\rangle$ sobre os autovetores de momento,

$$\langle p|\psi\rangle := \psi(p). \quad (3.13)$$

Então, a representação do vetor de estado é feita por todos os possíveis valores que a função de onda no espaço dos momentos ψ recebe para cada p diferente. No espaço de Hilbert das funções de onda de momento, $\psi(p) \in \mathcal{H}$, é preciso escolher a atuação dos operadores de posição e momento de forma a satisfazer a relação de comutação modificada (3.2). No espaço dos momentos, a nova representação para os operadores na presença do comprimento mínimo terá o operador momento modificado \hat{P} atuando como operador multiplicativo e o operador posição modificado \hat{X} como operador diferencial,

$$\hat{P} \cdot \psi(p) = p\psi(p), \quad (3.14)$$

$$\hat{X} \cdot \psi(p) = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi(p). \quad (3.15)$$

Para verificar se a escolha dessa representação é condizente com a relação de comutação modificada, basta atuar a relação de comutação numa função de onda qualquer e substituir as ações dos operadores posição e momento das duas equações acima,

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}] \cdot \psi(p) &= \hat{X}\hat{P} \cdot \psi(p) - \hat{P}\hat{X} \cdot \psi(p) = \langle x|\hat{X}\hat{P}|\psi\rangle - \langle x|\hat{P}\hat{X}|\psi\rangle \\ &= \langle x|\hat{P}(\hat{X}|\psi)\rangle - \langle x|\hat{X}(\hat{P}|\psi)\rangle = \langle x|\hat{P}(i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p|\psi)\rangle - \langle x|\hat{X}(p|\psi)\rangle \\ &= \langle x|i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p(\hat{P}|\psi)\rangle - \langle x|p(\hat{X}|\psi)\rangle \\ &= \langle x|i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p(p|\psi)\rangle - \langle x|p(i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p|\psi)\rangle \\ &= i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p(p\psi(p)) - i\hbar(1 + \beta p^2)p\partial_p\psi(p) \\ &= i\hbar(1 + \beta p^2)(\partial_p(p\psi(p)) - p\partial_p\psi(p)) = i\hbar(1 + \beta p^2)\psi(p) \\ &= i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2)\psi(p), \end{aligned} \quad (3.16)$$

na qual na penúltima linha foi utilizada a regra do produto de uma derivada. Desse modo, a relação de comutação é satisfeita e a escolha da representação é válida.

Os operadores posição e momento têm a condição de serem simétricos⁶ imposta, pois seus autovalores precisam ser reais para que seja possível obter alguma informação física. Então, por definição,

$$\langle \psi|\hat{P}^\dagger|\phi\rangle = \langle \psi|\hat{P}|\phi\rangle, \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}; \quad (3.17)$$

$$\langle \psi|\hat{X}^\dagger|\phi\rangle = \langle \psi|\hat{X}|\phi\rangle, \quad \hat{X}^\dagger = \hat{X}. \quad (3.18)$$

O fato de \hat{X} e \hat{P} serem simétricos implica em como o produto interno é definido nesse cenário de comprimento mínimo. A simetria do operador momento é simples de ser vista. O lado

⁶Note que a imposição é apenas que os operadores sejam simétricos, nada foi dito sobre serem auto-adjuntos ou não. Em realidade, apenas o operador momento é essencialmente auto-adjunto, o operador posição muda num cenário de comprimento mínimo, sendo apenas simétrico.

direito da equação (3.17) é escrito como

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P} \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi^*(p) p \phi(p), \quad (3.19)$$

sendo $dpV(p)$ o elemento de volume a ser determinado.

O momento p pertencendo aos números reais, $p \in \mathcal{R}$, implica nele ser igual ao seu conjugado complexo, $p = p^*$. Isso torna possível escrever a equação acima como

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) [\psi(p)p]^* \phi(p) = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle, \quad (3.20)$$

comprovando a simetria do operador momento.

A simetria do operador posição não é tão direta, mas é a partir dela que o elemento de volume do produto interno é determinado. O lado direito da equação (3.18) é igual a

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \langle \psi | \hat{X} \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi(p)^* [i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p] \phi(p) \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi(p)^* (1 + \beta p^2) \partial_p \phi(p). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Utilizando a regra do produto na integral acima, chega-se num termo de derivada total e mais três termos envolvendo derivadas de $\psi^*(p)$, $\phi(p)$ e $V(p)$,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \partial_p [V(p) \psi^*(p) (1 + \beta p^2) \phi(p)] - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) (1 + \beta p^2) \phi(p) \partial_p \psi^*(p) \\ &- i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi^*(p) (1 + \beta p^2) \phi(p) \partial_p V(p) - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi^*(p) \phi(p) \partial_p (1 + \beta p^2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

O termo com a derivada total tem a condição de contorno de ser nula no infinito para que a integral seja de quadrado integrável. O segundo termo é escrito em termos do operador \hat{X}^\dagger atuando na função de onda $\psi(p)$ e os dois últimos termos são unidos numa integral só. Em razão disto, a equação (3.22) toma a forma

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) [i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p)]^* \phi(p) \\ &- i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp [(1 + \beta p^2) \partial_p V(p) + 2\beta p V(p)] \psi^*(p) \phi(p). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para que tenha simetria do operador posição, a segunda integral da equação acima deve ser nula. Como as funções de onda $\psi^*(p)$ e $\phi(p)$ não são nulas, o integrando envolvendo o elemento de volume precisa ser nulo,

$$[(1 + \beta p^2) \partial_p V(p) + 2\beta p V(p)] = 0. \quad (3.24)$$

Reorganizando os termos, chega-se numa equação diferencial

$$(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp} V(p) = -2\beta p V(p) \longrightarrow \frac{dV(p)}{V(p)} = -\frac{2\beta p}{(1 + \beta p^2)} dp. \quad (3.25)$$

Integrando em ambos os lados de 0 a p , utilizando o método da substituição $w = 1 + \beta p^2$, $dw = 2\beta p dp$,

$$\int_0^p \frac{dV(p)}{V(p)} = - \int \frac{dw}{w} \longrightarrow \ln\left(\frac{V(p)}{V_0}\right) = -\ln(w) = \ln(1 + \beta p^2)^{-1} \Big|_0^p = \ln(1 + \beta p^2)^{-1}. \quad (3.26)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados,

$$V(p) = \frac{V_0}{(1 + \beta p^2)}. \quad (3.27)$$

Tomando a constante V_0 como igual a 1, o elemento de volume é igual

$$dpV(p) = \frac{dp}{(1 + \beta p^2)}. \quad (3.28)$$

Portanto, a equação (3.23) toma a forma

$$\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} [i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p)]^* \phi(p) = \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{X}^\dagger | \phi \rangle, \quad (3.29)$$

o que mostra a simetria no operador posição.

Como resultado da construção envolvendo a simetria dos operadores posição e momento, a definição do produto interno num cenário de comprimento mínimo com a elaboração do espaço de Hilbert a partir da relação de comutação modificada é igual a

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi^*(p) \phi(p). \quad (3.30)$$

Note que no GUP de A. Kempf et al. não há nenhum limite máximo com relação ao momento, por isso a região de integração do produto interno é ilimitada.

Continuando a reformulação da representação no espaço dos momentos para o GUP-KMM, a partir do produto interno definido em (3.30), é possível determinar a relação de totalidade para os autoestados do operador momento,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi^*(p) \phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \langle \psi | p \rangle \langle p | \phi \rangle \\ &= \langle \psi | \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} |p\rangle \langle p| \right] | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} |p\rangle \langle p| = I, \quad (3.32)$$

na qual I é a matriz identidade.

A relação de ortonormalização pode ser obtida utilizando a relação de totalidade,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \langle p|\psi\rangle = \langle p| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{(1 + \beta p'^2)} |p'\rangle \langle p'|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{(1 + \beta p'^2)} \langle p|p'\rangle \langle p'|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{(1 + \beta p'^2)} \langle p|p'\rangle \psi(p'). \end{aligned} \quad (3.33)$$

A Delta de Dirac pode ser escrita como

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta(p - p') \psi(p'). \quad (3.34)$$

Para que as equações (3.33) e (3.34) sejam equivalente, igualá-se seus integrandos,

$$\delta(p - p') = \frac{\langle p|p'\rangle}{(1 + \beta p'^2)}, \quad (3.35)$$

e a relação de ortonormalização é dada por

$$\langle p|p'\rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (3.36)$$

Finalizando a modificação do espaço de Hilbert de acordo o GUP-KMM.

3.3 Análise Funcional do Operador Posição

Com o estudo de como os autoestados se comportam no Espaço de Hilbert na presença do comprimento mínimo, sabe-se que uma representação no espaço de posição é formal (não física), então é essencial saber como são as autofunções formais do operador posição no espaço dos momentos para em seguida efetuar uma transformação para algum espaço que traga informações físicas no que diz respeito à posição (posteriormente será visto que a transformação é para o espaço de quase posição). Para tal, é necessário o uso de uma Transformada de Fourier generalizada. Toda essa elaboração é iniciada com uma análise funcional para um operador arbitrário \hat{A} , a fim de estudar em seguida o comportamento do operador posição. Primeiro será preciso encontrar as autofunções de \hat{A} na representação dos momentos, então \hat{A} é atuado na função de onda

$$\hat{A} \cdot \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p), \quad (3.37)$$

ao qual $\langle p|\psi_\lambda\rangle = \psi_\lambda(p)$.

Como ainda não foi definida a dependência funcional da função de onda no espaço dos momentos, ela é escrita como

$$\tilde{\psi}(\lambda) = \langle \lambda | \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} |p\rangle \langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \langle \lambda | p \rangle \psi(p). \quad (3.38)$$

Portanto, a Transformada de Fourier generalizada que passa da representação dos espaços dos momentos para a representação do operador \hat{A} é

$$\tilde{\psi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \langle \lambda | p \rangle \psi(p), \quad (3.39)$$

ao qual $\langle \lambda | p \rangle$ é o núcleo da transformada.

Por consequência, é preciso determinar o núcleo da transformada. Ele pode ser escrito como

$$\langle \lambda | p \rangle = (\langle p | \lambda \rangle)^*, \quad (3.40)$$

e as autofunções do operador \hat{A} na representação dos momentos são

$$\langle p | \psi_\lambda \rangle = \psi_\lambda(p). \quad (3.41)$$

Então, $\psi_\lambda(p)$ é solução da equação de autovalor

$$\hat{A} \cdot \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p), \quad (3.42)$$

sendo λ o autovalor.

Para o operador posição agindo em uma função de onda qualquer no espaço dos momentos, a equação de autovalor passa a ter a forma

$$\hat{X} \cdot \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \longrightarrow i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p). \quad (3.43)$$

Reescrevendo a equação diferencial,

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp} \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \longrightarrow \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \frac{\lambda}{i\hbar(1 + \beta p^2)} dp. \quad (3.44)$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \int \frac{-i\lambda}{\hbar} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \implies \ln \psi_\lambda(p) = \frac{-i\lambda}{\hbar} \int \frac{dp}{(1 + \beta p^2)}. \quad (3.45)$$

A integração é feita pelo método da substituição, $u = \sqrt{\beta}p$, $du = \sqrt{\beta}dp$,

$$(I_1) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{du}{(1 + u^2)} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(u) + C = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) + C, \quad (3.46)$$

e a equação (3.45) toma a forma

$$\ln \psi_\lambda(p) = \frac{-i\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) + C. \quad (3.47)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados,

$$\psi_\lambda(p) = N \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \exp(C), \quad (3.48)$$

na qual $e^C \equiv N$.

Para determinar o fator de normalização, é feito produto interno (3.30) da função de onda consigo mesma. A condição para ser normalizável é que o resultado seja igual a 1,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_\lambda^*(p) \psi_\lambda(p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} N^* \exp\left(\frac{i\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) N \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\ &= N^* N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} = 1. \end{aligned} \quad (3.49)$$

A integral já foi calculada em (3.46), assim

$$\begin{aligned} 1 &= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} = N^2 \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{N^2}{\sqrt{\beta}} \left[\lim_{p \rightarrow \infty} \arctan(\sqrt{\beta}p) - \lim_{p \rightarrow -\infty} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right] \\ &= \frac{N^2}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{N^2}{\sqrt{\beta}} \pi, \end{aligned} \quad (3.50)$$

ao qual $N \in \mathbb{R}$. O fator de normalização é, então, dado por

$$\frac{N^2}{\sqrt{\beta}} \pi = 1 \longrightarrow N^2 = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \implies N = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}. \quad (3.51)$$

Substituindo em (3.48), a função de onda torna-se

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right), \quad (3.52)$$

e têm-se as autofunções formais do operador posição na representação do espaço dos momentos.

O estudo sobre a energia desses autoestados formais de posição é feito efetuando o

valor médio da energia cinética,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_\lambda^*(p) \frac{p^2}{2m} \psi_\lambda(p) \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \exp\left(\frac{i\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) p^2 \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^2}{(1 + \beta p^2)}. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$u = p^2, \quad du = 2pdp; \tag{3.54}$$

$$dv = \frac{1}{(1 + \beta p^2)} dp, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p); \tag{3.55}$$

têm-se

$$(I_4) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} p^2 \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \int dp p \arctan(\sqrt{\beta}p). \tag{3.56}$$

Integrando por partes novamente a integral do segundo termo,

$$u = p, \quad dv = dp; \tag{3.57}$$

$$dv = \arctan(\sqrt{\beta}p) dp, \quad v = \frac{\sqrt{\beta}}{(1 + \beta p^2)}; \tag{3.58}$$

obtêm-se

$$\begin{aligned}
(I_5) &= \frac{\sqrt{\beta}p}{(1 + \beta p^2)} - \sqrt{\beta} \int \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} = \frac{\sqrt{\beta}p}{(1 + \beta p^2)} - \sqrt{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right) \\
&= \frac{\sqrt{\beta}p}{(1 + \beta p^2)} - \arctan(\sqrt{\beta}p). \tag{3.59}
\end{aligned}$$

A equação (3.56) passa a ter o formato

$$\begin{aligned}
(I_4) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} p^2 \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left[\frac{\sqrt{\beta}p}{(1 + \beta p^2)} - \arctan(\sqrt{\beta}p) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\beta}} p^2 \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{p}{2(1 + \beta p^2)} + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p), \tag{3.60}
\end{aligned}$$

e por fim, a equação (3.53) chega na forma

$$\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi m} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} p^2 \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{p}{2(1 + \beta p^2)} + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty}. \tag{3.61}$$

Analisando cada termo tendendo a $\pm\infty$, têm-se que o limite do primeiro termo diverge devido ao momento ao quadrado p^2 no numerador. O segundo termo tende a zero pelo p^2 no denominador e o último termo resulta na constante $\pi/\sqrt{\beta}$. Portanto, o valor médio da energia cinética para os autoestados formais do operador posição diverge, de forma que a energia é infinita,

$$\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle \equiv \text{diverge.} \quad (3.62)$$

Para finalizar a análise funcional do autoestado formal de posição, é feito um estudo da ortogonalização desses estados formais de posição $|\psi_\lambda\rangle$ através do produto interno entre si,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_{\lambda'}^*(p) \psi_\lambda(p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \exp\left(\frac{i\lambda'}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

É feita uma integração por partes $\int u dv = uv - \int v du$, na qual

$$u = \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right), \quad (3.64)$$

$$du = -\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \frac{1}{(1 + \beta p^2)} \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right);$$

$$dv = \frac{dp}{(1 + \beta p^2)}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p); \quad (3.65)$$

de modo que

$$\begin{aligned} (I_2) &= \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &+ \frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \arctan(\sqrt{\beta}p) \\ &\times \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

A integral do segundo termo é resolvida pelo método da substituição $w = \arctan(\sqrt{\beta}p)$, $dw = \sqrt{\beta}dp/(1 + \beta p^2)$,

$$(I_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{\beta}} w \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dw w \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right). \quad (3.67)$$

Integrando por partes novamente,

$$u = w, \quad du = dw; \quad (3.68)$$

$$dv = \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right), \quad v = -\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda - \lambda')} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right); \quad (3.69)$$

de modo que

$$\begin{aligned} (I_3) &= -\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda - \lambda')} w \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) + \frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda - \lambda')} \int_{-\infty}^{\infty} dw \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \\ &= -\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda - \lambda')} w \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) + \frac{\hbar^2\beta}{(\lambda - \lambda')^2} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')w}{\hbar\sqrt{\beta}}\right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Voltando para a variável original,

$$\begin{aligned} (I_3) &= -\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda - \lambda')} \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\ &\quad + \frac{\hbar^2\beta}{(\lambda - \lambda')^2} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right), \end{aligned} \quad (3.71)$$

a integral (3.66) passa a ter o aspecto de

$$\begin{aligned} (I_2) &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right. \\ &\quad + \frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\beta} \left[-\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda - \lambda')} \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\hbar^2\beta}{(\lambda - \lambda')^2} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right] \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\hbar}{(\lambda - \lambda')} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{i\hbar}{(\lambda - \lambda')} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{i\hbar}{(\lambda - \lambda')} \left[\exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \frac{\pi}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

sendo que $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \arctan(\sqrt{\beta}p) = \pm\pi/2$.

Finalmente, o produto interno é dado por

$$\begin{aligned}\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \left[\frac{i\hbar}{(\lambda - \lambda')} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) - \exp\left(\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \right] \\ &= \frac{i\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda - \lambda')} \left[\exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) - \exp\left(\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \right].\end{aligned}\quad (3.73)$$

As exponenciais complexas podem ser reescritas em termos de uma função seno pela relação $\sin(\theta) = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$. Assim, a equação acima toma a forma

$$\begin{aligned}\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \frac{i\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda - \lambda')} \left[-2i \sin\left(\frac{(\lambda - \lambda')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right) \right] \\ &= \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda - \lambda')} \sin\left(\frac{(\lambda - \lambda')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right),\end{aligned}\quad (3.74)$$

o que mostra que os autoestados formais de posição não mais são mutuamente ortogonais.

Os estados formais de posição foram determinados, mas como eles são não físicos pela incerteza não nula da posição, não é possível garantir a posição de uma partícula teste para tal estado. Mas a partícula ainda se encontra presente em algum ponto do espaço, então para recuperar a informação da posição, define-se os chamados estados de máxima localização.

3.4 Estados de Máxima Localização

A informação sobre a posição da partícula se encontra ainda no operador posição \hat{X} , isto é, nos elementos de matriz da representação do operador \hat{X} . Contudo, a determinação desses elementos de matriz através do uso da base das autofunções de posição não fornece qualquer informação física da posição. Assim, é necessário buscar uma forma de recuperar a informação sobre a posição contida no operador posição \hat{X} . Porém, como vimos, não é possível obter uma localização exata da partícula, isto é, com incerteza nula (a qual somente seria obtida com o uso das autofunções de posição, como ocorre na mecânica quântica ordinária). Portanto, devemos encontrar uma "base" de funções que permitam a mais precisa localização da partícula neste cenário de comprimento mínimo, isto é, aqueles estados cuja a incerteza na medida da posição é a menor possível, o comprimento mínimo. Os estados que seguem essa exigência são chamados de Estados de Máxima Localização $\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle$, definidos como aqueles que fornecem a máxima localização em torno da posição ξ . Assim,

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \xi, \quad (3.75)$$

com

$$(\Delta \hat{X})_{|\psi_{\xi}^{ML}\rangle} = \Delta \hat{X}_0. \quad (3.76)$$

Os estados de máxima localização têm como incerteza da posição o comprimento mínimo, então eles sucedem quando o valor médio do operador \hat{P} é nulo e a incerteza do momento é a crítica $(\Delta\hat{P})_c$. É fundamental a determinação da função de onda $\psi_\xi^{ML}(p)$ que representa esses estados maximamente localizados, ao passo que eles serão obtidos partindo da positividade da norma

$$\left\| \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta\hat{P})^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) |\psi\rangle \right\| \geq 0; \quad \Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{|\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|}{2}. \quad (3.77)$$

Um estado $|\psi\rangle$ estará no limite da região fisicamente permitida se considerarmos apenas a igualdade

$$\left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta\hat{P})^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0. \quad (3.78)$$

Dado que $|\psi_\xi^{ML}\rangle$ é um vetor de estado, é conveniente escolher um espaço para resolvê-lo. Esse espaço será o dos momentos, então a relação acima é projetada no autoestado de \hat{P} ,

$$\langle p | \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta\hat{P})^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0. \quad (3.79)$$

Substituindo a relação de comutação modificada (3.4) escrita em termos da incerteza do momento,

$$\langle p | \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2)}{2(\Delta\hat{P})^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0. \quad (3.80)$$

Substituindo a ação dos operadores momento e posição dadas nas equações (3.14) e (3.15), respectivamente,

$$\left(i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2)}{2(\Delta\hat{P})^2} (p - \langle \hat{P} \rangle) \right) \langle p | \psi \rangle = 0. \quad (3.81)$$

Reorganizando os termos,

$$i\hbar(1 + \beta p^2)\frac{d\psi(p)}{dp} = \left(\langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2)}{2(\Delta\hat{P})^2} (\langle \hat{P} \rangle - p) \right) \psi(p), \quad (3.82)$$

chega-se na equação diferencial

$$\frac{d\psi(p)}{\psi(p)} = \frac{1}{(1 + \beta p^2)} \left[\frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar} + \frac{1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta\hat{P})^2} (\langle \hat{P} \rangle - p) \right] dp. \quad (3.83)$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi(p)}{\psi(p)} = \int \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) - a \int dp \frac{p}{(1 + \beta p^2)}, \quad (3.84)$$

ao qual a fim de deixar a notação mais limpa, renomeou-se os termos na configuração $a \equiv (1 + \beta(\Delta\hat{p})^2 + \beta\langle \hat{p} \rangle^2)/2(\Delta\hat{p})^2$.

Cada termo será calculado separadamente. Começando pelo primeiro, a integral já foi resolvida anteriormente pelo método da substituição em (3.46), assim

$$(I_6) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) + C_1. \quad (3.85)$$

O segundo termo é calculado efetuando uma integração por parte

$$u = p, \quad du = dp; \quad (3.86)$$

$$dv = \frac{dp}{(1 + \beta p^2)}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p), \quad (3.87)$$

de maneira que

$$\begin{aligned} (I_7) &= \frac{p}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dp \arctan(\sqrt{\beta}p) \\ &= \frac{p}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\beta}p \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{1}{2} \ln |1 + \beta p^2| \right) + C_2 \right] \\ &= \frac{1}{2\beta} \ln |1 + \beta p^2| + C_2. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Substituindo (3.85) e (3.88) na equação (3.84), tem-se

$$\ln \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) - \frac{a}{2\beta} \ln |1 + \beta p^2| + C, \quad (3.89)$$

na qual $C = C_1 + C_2$.

Aplicando exponencial em ambos os lados,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= N \exp \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) \right] \exp \left(\ln |1 + \beta p^2|^{-a/2\beta} \right) \\ &= N(1 + \beta p^2)^{-a/2\beta} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) \right], \end{aligned} \quad (3.90)$$

ao qual foi aplicada a propriedade de potenciação de um logaritmo.

Voltando para os termos renomeados como a ,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= N(1 + \beta p^2)^{-(1+\beta(\Delta\hat{P})^2+\beta\langle\hat{P}\rangle^2)/4\beta(\Delta\hat{P})^2} \\ &\times \exp\left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \left(-\frac{i\langle\hat{X}\rangle}{\hbar} + \frac{1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{2(\Delta\hat{P})^2} \langle\hat{P}\rangle\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Impondo as condições para a ocorrência dos estados de máxima localização: $\langle\hat{P}\rangle = 0$, $\langle\hat{X}\rangle = \xi$ e $\Delta\hat{P} = (\Delta\hat{P})_c = 1/\sqrt{\beta}$,

$$\begin{aligned} \psi_\xi^{ML}(p) &= N(1 + \beta p^2)^{-(1+\beta(1/\beta))/4\beta(1/\beta)} \exp\left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \left(-\frac{i\xi}{\hbar}\right)\right] \\ &= N(1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{i\xi}{\sqrt{\beta}\hbar} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Para determinar o fator de normalização N utiliza-se a condição de normalização $\langle\psi_\xi^{ML}|\psi_\xi^{ML}\rangle = 1$,

$$\begin{aligned} \langle\psi_\xi^{ML}|\psi_\xi^{ML}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_\xi^{ML*}(p) \psi_\xi^{ML}(p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} N^* (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\ &\times N(1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\ &= N^* N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} = 1. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Para resolver essa integral, primeiro é utilizado o método da substituição $u = \sqrt{\beta}p$, $du = \sqrt{\beta}dp$,

$$(I_8) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{du}{(1 + u^2)^2}, \quad (3.94)$$

e em seguida é feita a substituição trigonométrica $u = \tan(v)$, $du = \sec^2(v)dv$,

$$\begin{aligned} (I_8) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dv \frac{\sec^2(v)}{(1 + \tan^2(v))^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dv \frac{\sec^2(v)}{\sec^4(v)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dv \frac{1}{\sec^2(v)} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dv \cos^2(v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dv \frac{1}{2} (1 + \cos(2v)) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left(v + \frac{1}{2} \sin(2v)\right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Voltando para a variável original,

$$\begin{aligned}
 (I_8) &= \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left[\arctan(\sqrt{\beta}p) + \frac{1}{2} \sin(2 \arctan(\sqrt{\beta}p)) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(-2\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}.
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

Enfim, o produto interno (3.93) tem como resultado

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = N^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, \tag{3.97}$$

e o fator de normalização é igual a

$$N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}. \tag{3.98}$$

Portanto, o estado de máxima localização normalizado é

$$\psi_{\xi}^{ML}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \tag{3.99}$$

Essa é a função de onda generalizada no espaço dos momentos que descreve a máxima localização de uma partícula teste. Os estados de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ são os estados em um cenário de comprimento mínimo que mais se aproximam fisicamente dos autoestados do operador posição da Mecânica Quântica Ordinária, já que eles são estados físicos verdadeiros⁷.

Para mostrar a relevância desses estados, é calculada a energia cinética

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_{\xi}^{ML*}(p) \frac{p^2}{2m} \psi_{\xi}^{ML}(p) \\
 &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) p^2 \\
 &\quad \times (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{-i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\
 &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^2}{(1 + \beta p^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

⁷No limite $\beta = 0$ os estados de máxima localização se tornam estados de onda plana.

Primeiro é aplicado o método da substituição, $u = \sqrt{\beta}p$, $du = \sqrt{\beta}dp$,

$$(I_9) = \int \frac{du}{\sqrt{\beta}} \frac{u^2}{\beta} \frac{1}{(1+u^2)} = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \int du \frac{u^2}{(1+u^2)^2}, \quad (3.101)$$

e em seguida feita uma substituição trigonométrica $u = \tan(\theta)$, $du = \sec^2(\theta)d\theta$,

$$(I_9) = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \int d\theta \sec^2(\theta) \frac{\tan^2(\theta)}{(1+\tan^2(\theta))^2}, \quad (3.102)$$

e utilizadas algumas identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} (I_9) &= \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \int d\theta \sec^2(\theta) \frac{\tan^2(\theta)}{(\sec^2(\theta))^2} \\ &= \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \int d\theta \frac{\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)} = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \int d\theta \cos^2(\theta) \tan^2(\theta) \\ &= \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \int d\theta \sin^2(\theta) = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \int d\theta \frac{(1-\cos(2\theta))}{2} = \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Voltando para a variável inicial,

$$\begin{aligned} (I_9) &= \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \left[\arctan(u) - \frac{1}{2} \sin(2 \arctan(u)) \right] \\ &= \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \left[\arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{1}{2} \sin(2 \arctan(\sqrt{\beta}p)) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2\beta\sqrt{\beta}}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

sendo que esses limites de integração já foram calculados em (3.96).

Substituindo o resultado da integral na equação (3.100),

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi m} \frac{\pi}{2\beta\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2m\beta}. \quad (3.105)$$

Portanto, os estados de máxima localização são verdadeiramente físicos, já que possuem energia finita.

Por último, será verificada a ortogonalidade desses estados através de um produto interno

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1+\beta p^2)} \psi_{\xi'}^{ML*}(p) \psi_{\xi}^{ML}(p) \\ &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1+\beta p^2)} (1+\beta p^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{i\xi'}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\ &\times (1+\beta p^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{-i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Então, a equação a ser calculada é

$$\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \exp\left(-\frac{i(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \quad (3.107)$$

Pelo método da substituição, $\theta = \arctan(\sqrt{\beta}p) \rightarrow \tan(\theta) = \sqrt{\beta}p, d\theta = \sqrt{\beta}dp/(1 + \beta p^2),$

$$(I_{10}) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\beta}(1 + \tan^2(\theta))} \frac{e^{a\theta}}{\sec^2(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int d\theta \frac{e^{a\theta}}{\sec^2(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int d\theta \cos^2(\theta) e^{a\theta}, \quad (3.108)$$

na qual para facilitar as contas definiu-se a constante $a \equiv -i(\xi - \xi')/\hbar\sqrt{\beta}.$

Efetuada uma integração por partes,

$$u = \cos^2(\theta), \quad du = -2\sin(2\theta)d\theta; \quad (3.109)$$

$$dv = e^{a\theta}d\theta, \quad v = \frac{1}{a}e^{a\theta}; \quad (3.110)$$

a integral é dada por

$$(I_{10}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{a} \cos^2(\theta) e^{a\theta} + \frac{2}{a} \int d\theta \sin(2\theta) e^{a\theta} \right]. \quad (3.111)$$

Será feita novamente uma integração por partes na integral do segundo termo da equação acima

$$u = \sin(2\theta), \quad du = 2\cos(2\theta)d\theta; \quad (3.112)$$

$$dv = e^{a\theta}d\theta, \quad v = \frac{1}{a}e^{a\theta}; \quad (3.113)$$

assim,

$$(I_{11}) = \frac{1}{a} \sin(2\theta) e^{a\theta} - \frac{2}{a} \int d\theta \cos(2\theta) e^{a\theta}. \quad (3.114)$$

Fazendo a última integração por partes,

$$u = \cos(2\theta), \quad du = -2\sin(2\theta)d\theta; \quad (3.115)$$

$$dv = e^{a\theta}d\theta, \quad v = \frac{1}{a}e^{a\theta}; \quad (3.116)$$

têm-se integrais se repetindo

$$\begin{aligned} (I_{12}) &= \frac{1}{a} \cos(2\theta) e^{a\theta} + \frac{2}{a} \int d\theta \sin(2\theta) e^{a\theta} \\ &= \frac{1}{a} \cos(2\theta) e^{a\theta} + \frac{2}{a} (I_{11}). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Voltando para a equação (3.114),

$$\begin{aligned}
(I_{11}) &= \frac{1}{a} \sin(2\theta)e^{a\theta} - \frac{2}{a} \left[\frac{1}{a} \cos(2\theta)e^{a\theta} + \frac{2}{a} (I_{11}) \right] \\
(I_{11}) + \frac{4}{a^2} (I_{11}) &= \frac{1}{a} \sin(2\theta)e^{a\theta} - \frac{2}{a^2} \cos(2\theta)e^{a\theta} \\
(I_{11}) &= \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{1}{a} e^{a\theta} \left[\sin(2\theta) - \frac{2}{a} \cos(2\theta) \right], \tag{3.118}
\end{aligned}$$

e substituindo a equação acima em (3.111),

$$\begin{aligned}
(I_{10}) &= \frac{1}{a\sqrt{\beta}} \cos^2(\theta)e^{a\theta} + \frac{2}{a\sqrt{\beta}} \left\{ \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{1}{a} e^{a\theta} \left[\sin(2\theta) - \frac{2}{a} \cos(2\theta) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{a\sqrt{\beta}} \cos^2(\theta)e^{a\theta} + \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{2}{a^2\sqrt{\beta}} e^{a\theta} \left[\sin(2\theta) - \frac{2}{a} \cos(2\theta) \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{a\sqrt{\beta}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{a\pi/2} + \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{2}{a^2\sqrt{\beta}} e^{a\pi/2} \left[\sin(\pi) - \frac{2}{a} \cos(\pi) \right] \\
&\quad - \frac{1}{a\sqrt{\beta}} \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) e^{-a\pi/2} - \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{2}{a^2\sqrt{\beta}} e^{-a\pi/2} \left[\sin(-\pi) - \frac{2}{a} \cos(-\pi) \right] \\
&= \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{4}{a^3\sqrt{\beta}} e^{a\pi/2} - \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{4}{a^3\sqrt{\beta}} e^{-a\pi/2} \\
&= -\left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^{-1} \frac{4}{a^3\sqrt{\beta}} (e^{-a\pi/2} - e^{a\pi/2}) = -\frac{a^2}{(a^2 + 4)} \frac{4}{a^3\sqrt{\beta}} (e^{-a\pi/2} - e^{a\pi/2}) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{a^3 + 4a}{4}\right)^{-1} (e^{-a\pi/2} - e^{a\pi/2}). \tag{3.119}
\end{aligned}$$

Substituindo a constante a definida anteriormente,

$$\begin{aligned}
(I_{10}) &= -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{i(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 + \left(-\frac{i(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right) \right]^{-1} \left[\exp\left(\frac{i(\xi - \xi')\pi}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) - \exp\left(-\frac{i(\xi - \xi')\pi}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{i}{4} \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 - i \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right) \right]^{-1} \left[2i \sin\left(\frac{(\xi - \xi')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right) \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right) \right]^{-1} \sin\left(\frac{(\xi - \xi')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right). \tag{3.120}
\end{aligned}$$

Por fim, o produto interno (3.106) tem o resultado,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= -\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right) \right]^{-1} \sin\left(\frac{(\xi - \xi')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{(\xi - \xi')}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right) - \left(\frac{(\xi - \xi')}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin\left(\frac{(\xi - \xi')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right). \tag{3.121}
\end{aligned}$$

Portanto, os estados de máxima localização não são mutuamente ortogonais. Mesmo que sejam estados fisicamente aceitáveis, a imprecisão na localidade do espaço impede a ortogonalidade.

Os estados de máxima localização formam, então, uma base supercompleta⁸. Portanto, é possível usar esses estados para representar um vetor de estado qualquer $|\psi\rangle$ na representação de quase posição, isto é, realizar a projeção de um vetor de estado qualquer $|\psi\rangle$ sobre os vetores de estado de máxima localização $\langle\psi_\xi^{ML}|\psi\rangle$. Na próxima seção será discutida essa construção.

3.5 Representação do Espaço de Quase Posição

Os estados de máxima localização recuperaram a informação física sobre a posição, porém, como já visto, eles são não ortogonais entre si. Contudo, ainda é plausível projetar estados quaisquer $|\psi\rangle$ nos estados de máxima localização $|\psi_\xi^{ML}\rangle$, obtendo assim a melhor medida possível da posição através da probabilidade de uma partícula teste estar localizada em torno de um ponto ξ no espaço. Por consequência, é criada a chamada função de onda na representação de quase posição,

$$\psi_{qp}(\xi) := \langle\psi_\xi^{ML}|\psi\rangle. \quad (3.122)$$

Através de uma Transformada de Fourier generalizada, é válido escrever a transformação de uma função de onda na representação do espaço dos momentos para uma função de onda na representação do espaço de quase posição na forma

$$\begin{aligned} \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_\xi^{ML*}(p) \psi(p) \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \psi(p). \end{aligned} \quad (3.123)$$

A transformação inversa é dada por

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{1/2} \exp\left(-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \psi_{qp}(\xi). \quad (3.124)$$

É essencial determinar como os operadores de posição e momento atuam no espaço de quase-posição. Para isso, é preciso que cada operador atuando num estado qualquer seja

⁸Em uma base supercompleta, o número de vetores da base é maior que a dimensão do espaço de vetores, e assim a representação de um vetor não é uma única combinação dos vetores dessa base.

projetado nos estados de quase posição. Partindo do operador momento,

$$\begin{aligned}\hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{P} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_{\xi}^{ML*}(p) p \psi(p) \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) p \psi(p).\end{aligned}\quad (3.125)$$

Note que a diferença entre as equações (3.123) e (3.125) é o momento p . É preciso de algum mecanismo que faça com que apareça o p na função de onda de quase posição, e através dele têm-se a ação do operador momento. É intuitivo iniciar uma derivação com relação a ξ na função de quase posição,

$$\partial_{\xi} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) = \frac{i}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right), \quad (3.126)$$

e eliminando os termos extras,

$$\begin{aligned}-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_{\xi} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) &= \arctan(\sqrt{\beta}p) \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan\left[-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_{\xi} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right)\right] &= p \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right).\end{aligned}\quad (3.127)$$

Portanto, a ação do operador momento no espaço de quase posição é

$$\hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_{\xi}) \psi_{qp}(\xi). \quad (3.128)$$

Para determinar a ação do operador posição no espaço de quase posição, é feito o processo análogo ao realizado para o operador momento,

$$\begin{aligned}\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi_{\xi}^{ML*}(p) [i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p)] \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi_{\xi}^{ML*}(p) \partial_p \psi(p) \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp [\partial_p (\psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi(p)) - \psi(p) \partial_p \psi_{\xi}^{ML*}(p)] \\ &= i\hbar (\psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi(p)) \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \partial_p \psi_{\xi}^{ML*}(p).\end{aligned}\quad (3.129)$$

É esperado que as funções de onda no limite $\pm\infty$ vão a zero para que as funções sejam quadrado integráveis, então o primeiro termo é desconsiderado,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \partial_p \psi_{\xi}^{ML*}(p) \\
&= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \partial_p \left[\sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right] \\
&= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \left[-\frac{1}{2} (1 + \beta p^2)^{-3/2} (2\beta p) \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right. \\
&\quad \times \left. (1 + \beta p^2)^{-1/2} \frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{1 + \beta p^2}\right) \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \right] \\
&= i\hbar\beta \int_{-\infty}^{\infty} dp p \psi(p) \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-3/2} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right) \\
&\quad + \xi \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-3/2} \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \tag{3.130}
\end{aligned}$$

A fim de ter melhor visualização, a equação acima será escrita em termos das funções de onda de quase posição,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= i\hbar\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} p \psi(p) \psi_{\xi}^{ML*}(p) \\
&\quad + \xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi(p) \psi_{\xi}^{ML*}(p) \\
&= i\hbar\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} p \psi(p) \psi_{\xi}^{ML*}(p) + \xi \psi_{qp}(\xi). \tag{3.131}
\end{aligned}$$

O primeiro termo da equação acima tem um momento p . Para que esse termo surja na função de onda de quase posição, basta usar a derivação construída em (3.127). Portanto, é possível substituir o primeiro termo por um estado de quase posição $\psi_{qp}(\xi)$,

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = i\hbar\beta \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_{\xi}) \right] \psi_{qp}(\xi) + \xi \psi_{qp}(\xi), \tag{3.132}$$

e finalmente, a ação do operador posição é definida como

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = [i\hbar\sqrt{\beta} \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_{\xi}) + \xi] \psi_{qp}(\xi). \tag{3.133}$$

Finalizada a análise funcional dos espaços de representações para o GUP-KMM, na próxima seção é feita uma proposta de modificação de uma das representações desse GUP.

3.6 Outra Representação para os Operadores Posição e Momento

Até esse momento foi feita a análise funcional da representação dos operadores posição e momento no espaço dos momentos e no espaço de quase posição proposto por A. Kempf, G. Mangano e R. B. Mann. Quando é realizado o estudo da representação de quase posição, nota-se que o operador posição é representado em (3.133) como uma combinação da ação do operadores ordinários \hat{x} e \hat{p} , e essa configuração tem como complicação na sua aplicabilidade uma Equação de Schrödinger generalizada de alta ordem que torna difícil determinar suas soluções [10]. Portanto, a fim de trabalhar em cima de problemas físicos no cenário de comprimento mínimo, como da partícula livre e do oscilador harmônico, e contornar esse impedimento foi proposto pelo físico Pouria Pedram uma nova representação no espaço dos momentos para os operadores posição e momento para o GUP-KMM,

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad (3.134)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}\hat{p}), \quad (3.135)$$

na qual \hat{x} e \hat{p} são os operadores posição e momento ordinários, de forma que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Pode-se interpretar \hat{P} como o operador momento para altas energias e o \hat{p} como operador para baixas energias.

A ação desses operadores sobre uma função de onda qualquer no espaço dos momentos é dada por

$$\hat{X} \cdot \psi(p_0) = \hat{x} \cdot \psi(p_0) = i\hbar \partial_{p_0} \psi(p_0), \quad (3.136)$$

$$\hat{P} \cdot \psi(p_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}\hat{p}) \cdot \psi(p_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) \psi(p_0). \quad (3.137)$$

O formalismo dessa nova representação é equivalente àquele proposto por A. Kempf, G. Mangano e R. B. Mann também prediz a mesma física, porém ela se mostra mais simples em alguns pontos da análise funcional, facilitando os cálculos. Além disso, origina naturalmente um momento canônico máximo, como será visto mais adiante.

3.6.1 Relação de Incerteza Modificada na Representação de P. Pedram

A representação de P. Pedram para o GUP-KMM satisfaz a relação de comutação (3.2), porém antes de mostrar essa correlação, a ação do operador momento no espaço dos momentos será escrita apenas para primeira ordem do parâmetro β , enquanto o operador posição continua sendo escrito para todas ordens. Para tal, é feita primeira uma expansão

em séries de Taylor⁹ em torno de zero da função $f(z) = \tan(\hat{p})$,

$$\begin{aligned}\tan(\hat{p}) &= \tan(0) + \sec^2(\hat{p})\Big|_{\hat{p}=0}(\hat{p} - 0) + \frac{1}{2!}2 \sec^2(\hat{p}) \tan(\hat{p})\Big|_{\hat{p}=0}(\hat{p} - 0)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}[-4 \sec^2(\hat{p}) + 6 \sec^4(\hat{p})]\Big|_{\hat{p}=0}(\hat{p} - 0)^3 + \dots \\ &\approx 0 + \frac{1}{\cos^2(0)}\hat{p} + \frac{2}{4} \frac{1}{\cos^2(0)} \frac{\sin(0)}{\cos(0)}\hat{p}^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{-4}{\cos^2(0)} + \frac{6}{\cos^4(0)} \right) \hat{p}^3 \\ &\approx \hat{p} + 0 + \frac{1}{6}2\hat{p}^3 \approx \hat{p} + \frac{1}{3}\hat{p}^3,\end{aligned}\tag{3.138}$$

para então escrever $f(z) = \tan(\sqrt{\beta}\hat{p})/\sqrt{\beta}$ como

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\beta}\hat{p} + \frac{\beta\sqrt{\beta}}{3}\hat{p}^3 \right) = \hat{p} + \frac{\beta}{3}\hat{p}^3.\tag{3.139}$$

Logo, a representação utilizada nessa prova será

$$\hat{X} = \hat{x},\tag{3.140}$$

$$\hat{P} = \hat{p} + \frac{\beta}{3}\hat{p}^3.\tag{3.141}$$

Para mostrar como essa representação cumpre a relação de comutação modificada, é necessário a seguinte propriedade de comutadores: dados operadores quaisquer \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , é válido escrever a relação de comutação entre eles na forma $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}[\hat{X}, \hat{P}] &= \left[\hat{x}, \hat{p} + \frac{\beta}{3}\hat{p}^3 \right] = [\hat{x}, \hat{p}] + \left[\hat{x}, \frac{\beta}{3}\hat{p}^3 \right] = [\hat{x}, \hat{p}] + \frac{\beta}{3}[\hat{x}, \hat{p}^3] \\ &= i\hbar + \frac{\beta}{3}(\hat{p}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{p}^2) = i\hbar + \frac{\beta}{3}(\hat{p}(\hat{p}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{p}) + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{p}^2) \\ &= i\hbar + \frac{\beta}{3}(\hat{p}^2(i\hbar) + \hat{p}(i\hbar)\hat{p} + (i\hbar)\hat{p}^2) = i\hbar + \frac{\beta}{3}(3i\hbar\hat{p}^2) = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2).\end{aligned}\tag{3.142}$$

De acordo com a aproximação em primeira ordem, o operador momento na representação do P. Pedram ao quadrado tem a forma

$$\hat{P}^2 \approx \left(\hat{p} + \frac{\beta}{3}\hat{p}^3 \right)^2 \approx \hat{p}^2 + \frac{2}{3}\beta\hat{p}^4 + \frac{\beta^2}{9}\hat{p}^6 \approx \hat{p}^2 + \frac{2}{3}\beta\hat{p}^4 + \mathcal{O}(\beta^2).\tag{3.143}$$

Substituindo na relação de comutação modificada,

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2) \approx i\hbar + i\hbar\beta \left(\hat{p}^2 + \frac{2}{3}\beta\hat{p}^4 + \mathcal{O}(\beta^2) \right) \approx i\hbar \left(1 + \beta\hat{p}^2 + \mathcal{O}(\beta^2) \right).\tag{3.144}$$

⁹Uma função qualquer $f(z)$ escrita como uma expansão em séries de Taylor em torno de um ponto z_0 toma a forma: $f(z) = \frac{f(z_0)}{0!} + \frac{1}{1!}f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(z_0)(z - z_0)^3 + \dots$

Assim, de forma aproximada, as relações de comutação (3.142) e (3.144) são equivalentes,

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2) \approx i\hbar(1 + \beta p^2), \quad (3.145)$$

e é provado que a representação do P. Pedram a satisfaz.

3.6.2 Espaço de Hilbert na Representação de P. Pedram

Essa nova representação para os operadores de posição e momento trazem algumas mudanças técnicas ao abordar o Espaço de Hilbert. Esses operadores continuam sendo simétricos por definição,

$$\langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle, \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}; \quad (3.146)$$

$$\langle \psi | \hat{X}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle, \quad \hat{X}^\dagger = \hat{X}, \quad (3.147)$$

garantindo que todos os autovalores associados a seus autoestados sejam reais e determinam qual a definição do produto interno.

Iniciando o estudo pela simetria do operador posição, de forma a determinar o elemento de volume $V(p_0)$, o lado direito da equação (3.147) é igual a

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \langle \psi | \hat{X} \phi \rangle = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 V(p_0) \psi(p_0)^* [i\hbar \partial_{p_0}] \phi(p_0) \\ &= i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 V(p_0) \psi^*(p_0) \partial_{p_0} \phi(p_0). \end{aligned} \quad (3.148)$$

Pela regra do produto, chega-se a novos termos

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \partial_{p_0} [V(p_0) \psi^*(p_0) \phi(p_0)] - i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 V(p_0) \phi(p_0) \partial_{p_0} \psi^*(p_0) \\ &\quad - i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi^*(p_0) \phi(p_0) \partial_{p_0} V(p_0). \end{aligned} \quad (3.149)$$

O termo com a derivada total tem a condição ser nula nos limites de integração para que a integral seja de quadrado integrável. O segundo termo é escrito em termos do operador \hat{X}^\dagger atuando na função de onda $\psi(p_0)$. Assim, a equação toma a forma

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 V(p_0) [i\hbar \partial_{p_0} \psi(p_0)]^* \phi(p_0) \\ &\quad - i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi^*(p_0) \phi(p_0) \partial_{p_0} V(p_0). \end{aligned} \quad (3.150)$$

A simetria do operador posição está presente se a segunda integral da equação acima deve

for nula. Como as funções de onda $\psi^*(p_0)$ e $\phi(p_0)$ não são nulas, o integrando envolvendo o elemento de volume precisa ser nulo,

$$\partial_{p_0} V(p_0) = 0. \quad (3.151)$$

A integração desta equação diferencial resulta numa constante

$$V(p_0) = \text{constante}. \quad (3.152)$$

Para poder fixar essa constante, é feito o estudo da simetria do operador momento. O lado direito da equação (3.146), utilizando a representação do operador momento para todas as ordens de β (3.137), é dado por

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P} \phi \rangle = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 V(p_0) \psi^*(p_0) \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta} p_0) \right] \phi(p_0). \quad (3.153)$$

Para p real, é possível escrever

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 V(p_0) \left[\psi(p_0) \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta} p_0) \right]^* \phi(p_0) = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle, \quad (3.154)$$

mostrando a simetria do operador momento e que $V(p_0)$ constante pode ser qualquer um, então é feita a escolha mais simples

$$V(p_0) = 1, \quad (3.155)$$

e o produto interno na representação de P. Pedram para o GUP-KMM é então definido como

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi^*(p_0) \phi(p_0). \quad (3.156)$$

Note que região de integração é modificada pela presença de um momento canônico máximo $p_{max} = \pi/2\sqrt{\beta}$, que surge como um limite para o momento da partícula uma vez que $\tan(\sqrt{\beta} p_0)$ não existe quando $p_0 = \pm p_{max}$.

Continuando o tratamento análogo ao feito nas seções anteriores, a relação de totalidade é determinada a partir do produto interno (3.156),

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi^*(p_0) \phi(p_0) = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \langle \psi | p_0 \rangle \langle p_0 | \phi \rangle \\ &= \langle \psi | \left[\int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 | p_0 \rangle \langle p_0 | \right] | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Desse modo,

$$\int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 |p_0\rangle\langle p_0| = I. \quad (3.158)$$

A partir da relação de totalidade, define-se a relação de ortonormalização,

$$\begin{aligned} \psi(p_0) &= \langle p_0|\psi\rangle = \langle p_0|\int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp'_0 |p'_0\rangle\langle p'_0|\psi\rangle = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp'_0 \langle p_0|p'_0\rangle\langle p'_0|\psi\rangle \\ &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp'_0 \langle p_0|p'_0\rangle\psi(p'_0), \end{aligned} \quad (3.159)$$

e para que a equação acima equivalha a outra definição da Delta de Dirac,

$$\psi(p_0) = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp'_0 \delta(p_0 - p'_0)\psi(p'_0), \quad (3.160)$$

os integrandos precisam ser iguais,

$$\langle p_0|p'_0\rangle = \delta(p_0 - p'_0). \quad (3.161)$$

Encontrando a relação de ortonormalização e finalizando a construção do espaço de Hilbert.

3.6.3 Estados Formais do Operador Posição na Representação do P. Pedram

Continua ser fundamental a definição das autofunções do operador posição no espaço dos momentos, então o operador posição na representação de P. Pedram (3.136) é substituído na equação de autovalor (3.42),

$$\hat{X} \cdot \psi_\lambda(p_0) = \lambda\psi_\lambda(p_0) \longrightarrow \hat{x} \cdot \psi_\lambda(p_0) = \lambda\psi_\lambda(p_0), \quad (3.162)$$

e resolvendo-a, tem-se a equação diferencial

$$i\hbar \frac{d}{dp_0} \psi_\lambda(p_0) = \lambda\psi_\lambda(p_0) \longrightarrow \frac{d\psi_\lambda(p_0)}{\psi_\lambda(p_0)} = -\frac{i\lambda}{\hbar} dp_0. \quad (3.163)$$

Integrando em ambos os lados,

$$\ln \psi_\lambda(p_0) = -\frac{i\lambda}{\hbar} p_0 + C. \quad (3.164)$$

Ao aplicar exponencial em ambos os lados, encontra-se as autofunções não normalizadas

$$\psi_\lambda(p) = Ne^{-i\lambda p_0/\hbar}, \quad (3.165)$$

na qual $e^C = N$. Note que o cálculo das autofunções foi bem mais simples com o uso da representação do P. Pedram.

O fator N é determinado pela condição de normalização $\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle = 1$,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_\lambda^*(p_0) \psi_\lambda(p_0) = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 N^* e^{i\lambda p_0/\hbar} N e^{-i\lambda p_0/\hbar} \\ &= N^* N \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 = N^2 p_0 \Big|_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} = N^2 \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = 1. \end{aligned} \quad (3.166)$$

Assim sendo,

$$N^2 = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \implies N = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}, \quad (3.167)$$

e as autofunções formais do operador posição normalizadas do GUP-KMM na representação de P. Pedram têm a forma

$$\psi_\lambda(p_0) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} e^{-i\lambda p_0/\hbar}. \quad (3.168)$$

O estudo da energia desses estados é feita da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_\lambda^*(p_0) \frac{1}{2m\beta} \tan^2(\sqrt{\beta}p_0) \psi_\lambda(p_0) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \frac{1}{2m\beta} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 e^{i\lambda p_0/\hbar} \tan^2(\sqrt{\beta}p_0) e^{-i\lambda p_0/\hbar}, \end{aligned} \quad (3.169)$$

resultando em

$$\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle = \frac{1}{2m\pi\sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \tan^2(\sqrt{\beta}p_0). \quad (3.170)$$

Essa integral é resolvida pelo método da substituição, $u = \sqrt{\beta}p_0$, $du = \sqrt{\beta}dp_0$,

$$\begin{aligned} (I_{11}) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int du (-1 + \sec^2(u)) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} (-u + \tan(u)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} (-\sqrt{\beta}p + \tan(\sqrt{\beta}p)) \Big|_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[-\sqrt{\beta} \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} + \tan\left(\sqrt{\beta} \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right) - \sqrt{\beta} \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} - \tan\left(-\sqrt{\beta} \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[-\pi + \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.171)$$

Não existe tangente para $p_0 = \pm\pi/2$, assim a integral acima diverge,

$$\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle = \text{diverge} \quad (3.172)$$

Conseqüentemente, a energia é infinita, como já é esperado em razão de as autofunções de posição $\psi_\lambda(p_0)$ não serem físicas.

Para finalizar o estudo dos estados formais de posição, é analisada a sua ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_{\lambda'}^*(p_0) \psi_\lambda(p_0) = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 e^{i\lambda'p_0/\hbar} e^{-i\lambda p_0/\hbar} \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')p_0}{\hbar}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \left[-\frac{\hbar}{i(\lambda - \lambda')} \exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')p_0}{\hbar}\right) \right] \Big|_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} \\ &= \frac{i\hbar\sqrt{\beta}}{(\lambda - \lambda')} \left[\exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{2\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{2\hbar}\right) \right] \\ &= \frac{i\hbar\sqrt{\beta}}{(\lambda - \lambda')} \left[-2i \sin\left(\frac{(\lambda - \lambda')\pi}{2\sqrt{\beta}}\right) \right] = \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{(\lambda - \lambda')} \sin\left(\frac{(\lambda - \lambda')\pi}{2\sqrt{\beta}}\right). \end{aligned} \quad (3.173)$$

Portanto, esses estados são mutuamente não ortogonais.

3.6.4 Estados de Máxima Localização para a Representação do P. Pedram

É preciso também recuperar a informação acerca da posição para a representação do P. Pedram, já que os estados do operador posição no espaço dos momentos são formais. Logo, define-se os estados de máxima localização da mesma maneira, partindo da positividade da norma projetada num autoestado do operador momento no limite da região permitida,

$$\begin{aligned} \langle p_0 | \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2)}{2(\Delta\hat{P})^2} (\hat{P} - \langle\hat{P}\rangle) \right) | \psi \rangle &= 0 \\ \left(i\hbar\partial_{p_0} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2)}{2(\Delta\hat{P})^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) - \langle\hat{P}\rangle \right) \right) \psi(p_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Reorganizando os termos, chega-se na equação diferencial,

$$\frac{d\psi(p_0)}{\psi(p_0)} = \left[\frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar} + \frac{1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{2(\Delta\hat{P})^2} \left(\langle\hat{P}\rangle - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) \right) \right] dp_0. \quad (3.175)$$

Integrando em ambos os lados,

$$\begin{aligned}
\ln \psi(p_0) &= \int dp \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) - \int dp \alpha \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) \\
&= \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) p_0 - \frac{a}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln |\sec(\sqrt{\beta}p_0)| \right] + C \\
&= \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) p_0 + \frac{a}{\beta} \ln |\cos(\sqrt{\beta}p_0)| + C; \quad a \equiv \frac{1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta\hat{P})^2}. \quad (3.176)
\end{aligned}$$

Aplicando exponencial em ambos os lados,

$$\begin{aligned}
\psi(p_0) &= N \exp \left[\left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) p_0 \right] \exp \left[\ln |\cos(\sqrt{\beta}p_0)|^{a/\beta} \right] \\
&= N \cos(\sqrt{\beta}p_0)^{(1+\beta(\Delta\hat{P})^2\beta\langle \hat{P} \rangle^2)/2\beta(\Delta\hat{P})^2} \\
&\times \exp \left[\left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + \frac{1 + \beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta\hat{P})^2} \langle \hat{P} \rangle \right) p_0 \right]. \quad (3.177)
\end{aligned}$$

Impondo a condição que a incerteza mínima da posição seja o comprimento mínimo ($\Delta\hat{X}_0$) para a ocorrência dos estados de máxima localização, por consequência têm-se também que $\langle \hat{X} \rangle = \xi$, $\langle \hat{P} \rangle = 0$ e $\Delta\hat{P} = 1/\sqrt{\beta}$,

$$\begin{aligned}
\psi_{\xi}^{ML}(p_0) &= N \cos(\sqrt{\beta}p_0)^{(1+\beta(1/\beta))/2\beta(1/\beta)} \exp \left(-\frac{i\xi}{\hbar} p_0 \right) \\
&= N \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{-i\xi p_0/\hbar}. \quad (3.178)
\end{aligned}$$

A normalização dos estados de máxima localização se dá pela condição,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_{\xi}^{ML*}(p_0) \psi_{\xi}^{ML}(p_0) \\
&= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 N^* \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} N \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{-i\xi p_0/\hbar} = 1, \quad (3.179)
\end{aligned}$$

resultando na relação

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = N^* N \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \cos^2(\sqrt{\beta}p_0) = 1. \quad (3.180)$$

Pelo método da substituição, $u = \sqrt{\beta}p_0$, $du = \sqrt{\beta}dp_0$,

$$\begin{aligned}
(I_{12}) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int du \cos^2(u) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \int dp (1 + \cos(2u)) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left(u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\beta}p_0 + \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{\beta}p_0) \right) \Big|_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}. \quad (3.181)
\end{aligned}$$

Assim, a equação (3.179) toma a forma

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = N^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1 \implies N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}. \quad (3.182)$$

O estado de máxima localização normalizado é, então, dado por

$$\psi_{\xi}^{ML}(p_0) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{-i\xi p_0/\hbar}. \quad (3.183)$$

Para mostrar que esses estados são físicos, é feita uma análise da energia associada a eles,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_{\xi}^{ML*} \frac{1}{2m\beta} (p_0) \tan^2(\sqrt{\beta}p_0) \psi_{\xi}^{ML}(p_0) \\ &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \frac{1}{2m\beta} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} \tan^2(\sqrt{\beta}p_0) \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{-i\xi p_0/\hbar} \\ &= \frac{1}{\pi m \sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \cos^2(\sqrt{\beta}p_0) \tan^2(\sqrt{\beta}p_0) \\ &= \frac{1}{\pi m \sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \sin^2(\sqrt{\beta}p_0) \\ &= \frac{1}{\pi m \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\beta}p_0 - \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{\beta}p_0) \right) \right] \Big|_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} \\ &= \frac{1}{2\pi m \beta} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin(\pi) + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) = \frac{1}{2m\beta}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Portanto, os estados de máxima localização apresentam energia finita. Porém, esses estados não são mutuamente ortogonais, como é mostrado abaixo

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_{\xi'}^{ML*}(p_0) \psi_{\xi}^{ML}(p_0) \\ &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi' p_0/\hbar} \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{-i\xi p_0/\hbar} \\ &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \cos^2(\sqrt{\beta}p_0) \exp\left(\frac{-i(\xi - \xi')p_0}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (3.185)$$

Pelo método da substituição $\theta = \sqrt{\beta}p_0$, $d\theta = \sqrt{\beta}dp_0$,

$$(I_{13}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dw \cos^2(\theta) \exp\left(\frac{-i(\xi - \xi')\theta}{\hbar \sqrt{\beta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int dw \cos^2(\theta) e^{a\theta}, \quad (3.186)$$

na qual $a \equiv -i(\xi - \xi')/\hbar \sqrt{\beta}$.

Realizando uma sequência de integração por partes, têm-se o resultado já calculado anteriormente na equação (3.125). Logo,

$$(I_{13}) = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{a^3 + 4a}{4} \right)^{-1} (e^{-a\pi/2} - e^{a\pi/2}). \quad (3.187)$$

Substituindo a constante a , o resultado já foi encontrado anteriormente em (3.126),

$$(I_{13}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar \sqrt{\beta}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{(\xi - \xi')}{\hbar \sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin \left(\frac{(\xi - \xi')}{2\hbar \sqrt{\beta}} \pi \right). \quad (3.188)$$

e o produto interno tem o resultado final visto em (3.127),

$$\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{(\xi - \xi')}{2\hbar \sqrt{\beta}} \right) - \left(\frac{(\xi - \xi')}{2\hbar \sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin \left(\frac{(\xi - \xi')}{2\hbar \sqrt{\beta}} \pi \right). \quad (3.189)$$

Logo, os estados de máxima localização não são mutuamente ortogonais.

3.6.5 Representação de Quase Posição

Através dos estados de máxima localização é possível determinar a função de onda no espaço de quase posição, obtendo assim a melhor medida aproximada da posição de uma partícula. Dessa maneira, a função de onda na representação de quase posição é dada por

$$\begin{aligned} \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_{\xi}^{ML*}(p_0) \psi(p_0) \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} \psi(p_0). \end{aligned} \quad (3.190)$$

A determinação da ação dos operadores posição e momento no espaço de quase posição é feita da seguinte forma: cada operador atuando num estado $|\psi\rangle$ é projetado nos estado $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$, para em seguida comparar com $\psi_{qp}(\xi)$, à medida que são efetuadas derivadas com relação a ξ para que surjam termos equivalentes entre ambas equações. Começando pelo operador momento,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{P} | \psi \rangle &= \hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_{\xi}^{ML*}(p_0) \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) \psi(p_0) \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) \psi_{qp}(p_0). \end{aligned} \quad (3.191)$$

Para que surja o termo $\tan(\sqrt{\beta}p_0)/\sqrt{\beta}$ na função de quase posição, têm-se que

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p\right) &= \frac{i}{\hbar}p_0 \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right) \implies -i\hbar\partial_\xi \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right) = p_0 \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right) \\
\implies \tan\left[-i\hbar\partial_\xi \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right)\right] &= \tan(p_0) \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right) \\
\implies \tan\left[-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right)\right] &= \tan(\sqrt{\beta}p_0) \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right) \\
\implies \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan\left[-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right)\right] &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) \exp\left(\frac{i\xi}{\hbar}p_0\right). \tag{3.192}
\end{aligned}$$

Logo, a ação do operador momento no espaço de quase posição é

$$\hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi) \psi_{qp}(\xi). \tag{3.193}$$

Analogamente, para o operador posição,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda^{ML} | \hat{X} | \psi \rangle &= \hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi_\lambda^{ML*}(p_0) i\hbar \partial_{p_0} \psi(p_0) \\
&= i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \left[\partial_{p_0} (\psi_\xi^{ML*}(p_0) \psi(p_0)) - \partial_{p_0} \psi_\xi^{ML*}(p_0) \psi(p_0) \right] \\
&= i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \partial_{p_0} (\psi_\xi^{ML*}(p_0) \psi(p_0)) - i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \partial_{p_0} \psi_\xi^{ML*}(p_0) \psi(p_0). \\
&= i\hbar (\psi_\xi^{ML*}(p_0) \psi(p_0)) \Big|_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} - i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \partial_{p_0} \psi_\xi^{ML*}(p_0) \psi(p_0). \tag{3.194}
\end{aligned}$$

O primeiro termo vai a zero, já que os termos de cosseno se anulam quando $p_0 = \pm\pi/2\sqrt{\beta}$, assim

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= -i\hbar \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \partial_{p_0} \psi_\xi^{ML*}(p_0) \psi(p_0) \\
&= -i\hbar \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi(p_0) \partial_{p_0} (\cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar}) \\
&= -i\hbar \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi(p_0) \left[-\sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} + \frac{i\xi}{\hbar} \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} \right] \\
&= i\hbar \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi(p_0) \sin(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} \\
&+ \xi \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi(p_0) \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar}. \tag{3.195}
\end{aligned}$$

Multiplicando o primeiro termo da equação acima por $\sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}p_0)/\sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}p_0)$ para que surja o autovalor de \hat{P} na representação de P. Pedram,

$$\begin{aligned} \hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= i\hbar\beta \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi(p_0) \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p_0) \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} \\ &+ \xi \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi(p_0) \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Escrevendo a equação em termos da função de quase posição,

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = i\hbar\beta \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\pi/2\sqrt{\beta}}^{\pi/2\sqrt{\beta}} dp_0 \psi(p_0) \frac{\tan(\sqrt{\beta}p_0)}{\sqrt{\beta}} \cos(\sqrt{\beta}p_0) e^{i\xi p_0/\hbar} + \xi \psi_{qp}(\xi), \quad (3.197)$$

o primeiro termo é escrito como uma função de quase posição se a ação do operador momento for aquela construída em (3.192),

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = i\hbar\beta \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi) \right] \psi_{qp}(\xi) + \xi \psi_{qp}(\xi). \quad (3.198)$$

Portanto, a ação do operador posição no espaço de quase posição é

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = [i\hbar\sqrt{\beta} \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi) + \xi] \psi_{qp}(\xi). \quad (3.199)$$

Como dito no início da seção, as representações de A. Kempf et al. e de P. Pedram são equivalentes em sua essência, então podem ser correlacionados pelas transformações

$$\hat{P} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}\hat{P}), \quad (3.200)$$

$$\hat{X} \longrightarrow [1 + \arctan^2(\sqrt{\beta}\hat{P})] \hat{X}, \quad (3.201)$$

de forma que a física que ambas tratam é a mesma. Isso pode ser observado comparando as energias associadas aos estados formais de posição para a representação de A. Kempf et al. e da representação de P. Pedram em (3.62) e (3.165), respectivamente, e também às energias associadas aos estados de máxima localização em cada representação respectiva em (3.105) e (3.172), ao qual em ambos os casos as energias são as mesmas. As ações dos operadores posição e momento no espaço de quase posição também são idênticas nas duas representações.

Capítulo 4

Análise Funcional dos Espaços de Representações para o Noucier-GUP

No capítulo 3, o estudo sobre o comprimento mínimo foi feito através da generalização do princípio de incerteza, proposto por A. Kempf et al. O GUP-KMM tem como característica considerar apenas a primeira ordem do parâmetro β que está associado a existência do comprimento mínimo. Em 2007, o físico Khireddine Nouicer¹ propôs um novo GUP para todas as ordens do parâmetro β e que também prevê a existência de uma incerteza mínima da posição [19]. Este GUP concorda em primeira ordem com o GUP-KMM e resolve algumas limitações que o GUP de A. Kempf et al. possui por desconsiderar termos extras. Conhecido como GUP-Nouicer, o GUP exponencial é escrito como

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \exp\left(\beta(\Delta\hat{P})^2 + \gamma\right), \quad (4.1)$$

sendo o último termo equivalente a $\gamma = \beta\langle\hat{P}\rangle^2$.

A ideia por trás de um GUP exponencial surge de alguns resultados obtidos em artigos publicados anteriormente no cenário de uma Teoria de Campos, na qual a existência de um comprimento mínimo no plano não comutativo deveria se manifestar no propagador de Feynmann para o caso de uma partícula livre exibindo um corte UV exponencial [20].

4.1 Relação de Incerteza para Todas as Ordens

A relação de comutação modificada associada ao GUP-Nouicer, que engloba todas as ordens do parâmetro β , é igual a

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar e^{\beta\hat{P}^2}. \quad (4.2)$$

¹Nouicer é um físico teórico, atualmente professor do Departamento de Física da Universidade de Jijel, na Argélia. Suas áreas de interesse englobam Teoria da Física de Altas Energias, Teoria Quântica de Campos e Cosmologia. Seu trabalho atual envolve o estudo de vários aspectos do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) em Cosmologia [18].

A confirmação que ambos são correspondentes é feita ao substituir a relação de comutação (4.2) na equação abaixo

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle| \geq \frac{1}{2} \left| \langle i\hbar \exp(\beta\hat{P}^2) \rangle \right| \geq \frac{1}{2} |i\hbar \exp(\beta\langle\hat{P}^2\rangle)|. \quad (4.3)$$

A Desigualdade de Jensen garante que para uma função real convexa qualquer ϕ , é válido escrever $\langle\phi(\hat{A})\rangle \geq \phi(\langle\hat{A}\rangle)$ [21]. Assim, com base nessa desigualdade a exponencial do valor médio do operador momento ao quadrado pode ser escrita como

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \exp(\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2), \quad (4.4)$$

como regressou ao GUP-Nouicer, têm-se a garantia da associação da relação de comutação com o GUP.

O valor dessa incerteza mínima pode ser determinado ao isolar $\Delta\hat{X}$ na relação de incerteza,

$$\Delta\hat{X} \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\exp(\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2)}{\Delta\hat{P}} \right), \quad (4.5)$$

a incerteza da posição pode ser escrita como uma função $f(k)$ dependente da incerteza do momento,

$$f(k) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\exp(bk^2 - a)}{k^2} \right); \quad b \equiv \beta, a \equiv \beta\langle\hat{P}\rangle^2, k \equiv \Delta\hat{P}. \quad (4.6)$$

Para encontrar o ponto de extremo da função $f(k)$, basta efetuar a derivada primeira da função,

$$f'(k) = \frac{\hbar}{2} \frac{d}{dk} \left(\frac{\exp(bk^2 - a)}{k^2} \right) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{2bk^2 \exp(bk^2 - a) - \exp(bk^2 - a)}{k^2} \right), \quad (4.7)$$

e igualá-la a zero quando valorada no ponto crítico k_0 ,

$$f'(k_0) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{2bk_0^2 \exp(bk_0^2 - a) - \exp(bk_0^2 - a)}{k_0^2} \right) = 0 \rightarrow \frac{\exp(bk_0^2 - a)}{k_0^2} (2bk_0^2 - 1) = 0. \quad (4.8)$$

Se $k_0 \neq 0$ para que a fração seja determinada e a exponencial não se anula, o termo nulo é

$$(2bk_0^2 - 1) = 0 \rightarrow k_0^2 = \frac{1}{2b} \implies k_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2b}}. \quad (4.9)$$

O ponto crítico que minimiza a função é k_0 positivo e é para esse valor que as incertezas ficam dentro da região permitida. A partir do k_0 da equação (4.9), encontra-se a incerteza do

momento $\Delta\hat{P}'$, que é a incerteza crítica do momento, dada por

$$\Delta\hat{P}' = (\Delta\hat{P})_c = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}, \quad (4.10)$$

ou seja, aquela que é correspondente a incerteza mínima da posição $(\Delta\hat{X})_{min}$,

$$(\Delta\hat{X})_{min} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\exp(\beta(\Delta\hat{P}')^2 + \beta\langle\hat{P}'\rangle^2)}{\Delta\hat{P}'} \right) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\exp(\beta(1/2\beta) + \beta\langle\hat{P}'\rangle^2)}{(1/\sqrt{2\beta})} \right). \quad (4.11)$$

No limite da região permitida, é imposto que o valor médio do operador momento seja nulo, $\langle\hat{P}'\rangle = 0$, para que a incerteza seja a menor possível. Com essa obrigatoriedade, têm-se que $(\Delta\hat{X})_{min}$ equivale ao comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0$,

$$\Delta\hat{X}_0 = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{e^{1/2}}{(1/\sqrt{2\beta})} \right) = \frac{\hbar}{2} \sqrt{2\beta} \sqrt{e} = \hbar \sqrt{\frac{e\beta}{2}}. \quad (4.12)$$

Portanto, o valor de comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0 = \hbar \sqrt{e\beta/2}$ ocorre para o valor da incerteza crítica do momento $(\Delta\hat{P})_c = 1/\sqrt{2\beta}$.

4.2 Representação no Espaço de Hilbert

Toda construção do espaço de Hilbert é feita na representação do espaço dos momentos devido a incerteza mínima da posição ser o comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0 > 0$. A definição da ação dos operadores posição e momento na representação do espaço dos momentos, que corresponde ao GUP-Nouicer, é dada por

$$\hat{P} \cdot \psi(p) = p\psi(p), \quad (4.13)$$

$$\hat{X} \cdot \psi(p) = i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p \psi(p). \quad (4.14)$$

Para mostrar que essa representação satisfaz a relação de comutação modificada (4.2), calcula-se $[\hat{X}, \hat{P}]$ atuando em uma autofunção arbitrária do operador momento,

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}] \cdot \psi(p) &= \hat{X}\hat{P} \cdot \psi(p) - \hat{P}\hat{X} \cdot \psi(p) = \langle p | \hat{X}\hat{P} | \psi \rangle - \langle p | \hat{P}\hat{X} | \psi \rangle \\ &= \langle p | \hat{P} (\hat{X} | \psi \rangle) - \langle p | \hat{X} (\hat{P} | \psi \rangle) = \langle p | \hat{P} (i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p | \psi \rangle) - \langle p | \hat{X} (p | \psi \rangle) \rangle \\ &= \langle p | i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p | \hat{P} | \psi \rangle - \langle p | p | \hat{X} | \psi \rangle \rangle \\ &= \langle p | i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p (p | \psi \rangle) - \langle p | p (i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p | \psi \rangle) \rangle \\ &= i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p (p \langle p | \psi \rangle) - i\hbar e^{\beta p^2} p \partial_p \langle p | \psi \rangle \\ &= i\hbar e^{\beta p^2} (\partial_p (p \psi(p)) - p \partial_p \psi(p)) = i\hbar e^{\beta p^2} \psi(p) = i\hbar e^{\beta p^2} \psi(p), \end{aligned} \quad (4.15)$$

e a relação de comutação é retornada.

É necessário toda uma reformulação da representação do espaço de Hilbert para o

GUP-Nouicer. Iniciando a construção, os operadores posição e momento são definidos como simétricos,

$$\langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle, \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}; \quad (4.16)$$

$$\langle \psi | \hat{X}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle, \quad \hat{X}^\dagger = \hat{X}. \quad (4.17)$$

Então, seus autovalores são reais, e essa imposição é essencial para ser possível obter alguma informação física dos observáveis. Trabalhando com a simetria de cada operador, primeiro é estudado operador posição sendo simétrico,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \langle \psi | \hat{X} \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi^*(p) [i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p] \phi(p) = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi^*(p) e^{\beta p^2} \partial_p \phi(p) \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \partial_p [V(p) \psi^*(p) e^{\beta p^2} \phi(p)] - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) e^{\beta p^2} \phi(p) \partial_p \psi^*(p) \\ &\quad - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi^*(p) e^{\beta p^2} \phi(p) \partial_p V(p) - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi^*(p) \phi(p) \partial_p e^{\beta p^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

O primeiro termo com a derivada total é condicionado como sendo nulo no infinito para que a integral seja de quadrado integrável. O segundo termo é escrito em termos da ação de um operador \hat{X}^\dagger e os dois últimos termos são unidos numa integral só. Assim,

$$\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) [i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p \psi(p)]^* \phi(p) - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp [\partial_p V(p) + 2\beta p V(p)] \psi^*(p) \phi(p). \quad (4.19)$$

Para que tenha simetria do operador posição, a segunda integral da equação acima deve ser nula, de forma que o seu integrando envolvendo o elemento de volume é nulo,

$$[\partial_p V(p) + 2\beta p V(p)] = 0. \quad (4.20)$$

Reorganizando os termos, chega-se na equação diferencial

$$\frac{d}{dp} V(p) = -2\beta p V(p) \longrightarrow \frac{dV(p)}{V(p)} = -2\beta p dp. \quad (4.21)$$

Integrando em ambos os lados,

$$\ln \left(\frac{V(p)}{V_0} \right) = -2\beta \left(\frac{p^2}{2} \right) = -\beta p^2. \quad (4.22)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados, o elemento de volume é determinado,

$$dp V(p) = V_0 e^{-\beta p^2} dp, \quad (4.23)$$

sendo que a constante V_0 pode ser fixada como igual a 1 sem influenciar na simetria dos operadores.

A equação (4.19) toma a forma

$$\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) [i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p \psi(p)]^* \phi(p) = \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{X}^\dagger | \phi \rangle, \quad (4.24)$$

mostrando a simetria do operador momento e determinando o elemento de volume da integral que representa o produto interno. A simetria do operador momento é simples de ser vista,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle &= \langle \psi | \hat{P} \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi^*(p) p \phi(p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} [\psi(p) p]^* \phi(p) = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle, \end{aligned} \quad (4.25)$$

para p pertencente ao conjunto dos números reais, então $p^* = p$ e a simetria do operador momento é mostrada.

Assim, a partir da simetria desses dois operadores define-se o produto interno num cenário de comprimento mínimo na construção do espaço de Hilbert correlacionado ao GUP-Nouicer como

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi^*(p) \phi(p). \quad (4.26)$$

A relação de totalidade é definida a partir desse produto interno,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi^*(p) \phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \langle \psi | p \rangle \langle p | \phi \rangle \\ &= \langle \psi | \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} |p\rangle \langle p| \right] | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} |p\rangle \langle p| = I, \quad (4.28)$$

na qual I é a matriz identidade.

A relação de ortonormalização é definida a partir da relação de totalidade,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \langle p | \psi \rangle = \langle p | \int_{-\infty}^{\infty} dp' e^{-\beta p'^2} |p'\rangle \langle p' | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp' e^{-\beta p'^2} \langle p | p' \rangle \langle p' | \psi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp' e^{-\beta p'^2} \langle p | p' \rangle \psi(p'). \end{aligned} \quad (4.29)$$

A Delta de Dirac pode ser escrita como

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta(p - p') \psi(p'). \quad (4.30)$$

para que ambas sejam iguais,

$$\delta(p - p') = \langle p|p' \rangle e^{-\beta p^2} \implies \langle p|p' \rangle = e^{\beta p^2} \delta(p - p'). \quad (4.31)$$

Finalizando então o espaço de Hilbert do GUP exponencial.

4.3 Autoestados Formais do Operador Posição

A presença de uma incerteza mínima da posição não nula, o comprimento mínimo, implica que os autoestados do operador posição não são estados fisicamente aceitáveis. Porém, é essencial determinar as autofunções formais do operador posição para continuar o estudo para outro espaço que dê a informação física da posição.

As autofunções são as soluções da equação de valor para o operador posição. Então, o operador posição atuando nos autoestados do espaço de momento resulta na equação de autovalor,

$$\hat{X} \cdot \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \longrightarrow i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p). \quad (4.32)$$

Reescrevendo a equação diferencial,

$$i\hbar e^{\beta p^2} \frac{d}{dp} \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \longrightarrow \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \frac{\lambda}{i\hbar} e^{-\beta p^2} dp. \quad (4.33)$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \int \frac{-i\lambda}{\hbar} e^{-\beta p^2} dp \implies \ln \psi_\lambda(p) = \frac{-i\lambda}{\hbar} \int dp e^{-\beta p^2}. \quad (4.34)$$

A integração é feita pelo método da substituição, $u = \sqrt{\beta}p$, $du = \sqrt{\beta}dp$,

$$(I_1) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int du e^{-u^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(u) \right) + C = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + C, \quad (4.35)$$

sendo $\operatorname{erf}(u)$ a função erro de Gauss ou também conhecida como integral gaussiana. Mais informações no apêndice 1.

Substituindo na equação (4.34),

$$\ln \psi(p) = \frac{-i\lambda}{\hbar} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + C = \frac{-i\sqrt{\pi}\lambda}{2\sqrt{\beta}\hbar} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + C. \quad (4.36)$$

aplicando exponencial,

$$\psi(p) = N \exp \left[\frac{-i\sqrt{\pi}\lambda}{2\sqrt{\beta}\hbar} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right]. \quad (4.37)$$

Normalizando a função pela condição de normalização $\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle = 1$,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_\lambda^*(p) \psi_\lambda(p) \\ &= N^* N \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{i \sqrt{\pi} \lambda}{2 \sqrt{\beta \hbar}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) \right] \exp \left[\frac{-i \sqrt{\pi} \lambda}{2 \sqrt{\beta \hbar}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) \right] \\ &= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

A integral já foi resolvida em (4.35), então a integral nos limites de integração é

$$(I_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} (1 - (-1)) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}}, \quad (4.39)$$

e o fator de normalização é, então, dado por

$$N^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} = 1 \implies N = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}}. \quad (4.40)$$

Finalmente, obtêm-se os autovetores formais de posição

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}} \exp \left[\frac{-i \sqrt{\pi} \lambda}{2 \sqrt{\beta \hbar}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) \right]. \quad (4.41)$$

Será feita um estudo com relação a energia para esses autoestados formais de posição,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_\lambda^*(p) \frac{p^2}{2m} \psi_\lambda(p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{i \sqrt{\pi} \lambda}{2 \sqrt{\beta \hbar}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) \right] p^2 \exp \left[\frac{-i \sqrt{\pi} \lambda}{2 \sqrt{\beta \hbar}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{2 \sqrt{\pi} m} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} p^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Efetuada uma integração por partes,

$$u = p^2, \quad du = 2p dp; \quad (4.43)$$

$$dv = e^{-\beta p^2} dp, \quad v = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p), \quad (4.44)$$

a integral acima toma a forma

$$(I_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} p^2 \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \int dp p \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p). \quad (4.45)$$

A integral do segundo termo é resolvida ao fazer uma nova integração por partes,

$$u = p, \quad du = dp; \quad (4.46)$$

$$dv = \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p), \quad v = p \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{e^{-\beta p^2}}{\sqrt{\pi\beta}}, \quad (4.47)$$

e a integral resulta em

$$\begin{aligned} (I_3) &= p^2 \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{p}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta p^2} - \int dp \left[p \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{e^{-\beta p^2}}{\sqrt{\pi\beta}} \right] \\ &= p^2 \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{p}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta p^2} - \int dp p \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} \int dp e^{-\beta p^2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

O terceiro termo é a própria integral (I_3) e a integral do quarto termo já foi calculada anteriormente em (4.39). Logo,

$$\begin{aligned} (I_3) &= p^2 \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{p}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta p^2} - (I_3) + \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right) \\ 2(I_3) &= p^2 \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{p}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta p^2} + \frac{1}{2\beta} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \\ (I_3) &= \frac{p^2}{2} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{p}{\sqrt{2\pi\beta}} e^{-\beta p^2} + \frac{1}{4\beta} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Voltando para a equação (4.45), tem-se

$$\begin{aligned} (I_2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} p^2 \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{p^2}{2} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{p}{\sqrt{2\pi\beta}} e^{-\beta p^2} + \frac{1}{4\beta} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right] \\ &= -\frac{p}{2\beta} e^{-\beta p^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \Big|_{-\infty}^{\infty}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Analisando os limites no infinito para cada termo, tem-se que o primeiro termo é aplicado a regra de L'Hospital e a parte $pe^{-\beta p^2}$ se torna um denominador, que quando tende a $\pm\infty$, zera a fração. A função erro de Gauss do segundo termo quando $p \rightarrow \infty$, tende a 1 e quando $p \rightarrow -\infty$, é usada a propriedade da função erro que garante que $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$, então a função erro tende a -1 . Portanto, a equação toma a forma

$$(I_2) = -\frac{1}{2\beta}(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{\beta}}(1+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta\sqrt{\beta}}. \quad (4.51)$$

A equação (4.42) chega ao resultado,

$$\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\pi m}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\beta\sqrt{\beta}} \right) = \frac{1}{4m\beta}. \quad (4.52)$$

Será feita um estudo sobre a ortogonalização desses autoestados de posição. Efetuando o produto interno entre os autoestados (4.41),

$$\begin{aligned}\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{-i \sqrt{\pi} (\lambda - \lambda')}{2 \sqrt{\beta \hbar}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)}, \quad a \equiv \frac{-i \sqrt{\pi} (\lambda - \lambda')}{2 \sqrt{\beta \hbar}}.\end{aligned}\quad (4.53)$$

Integrando por partes,

$$u = e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)}, \quad du = \frac{2 \sqrt{\beta} a}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta p^2} e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)} dp; \quad (4.54)$$

$$dv = e^{-\beta p^2} dp, \quad v = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p); \quad (4.55)$$

chega-se em

$$(I_4) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)} - \frac{2 \sqrt{\beta} a}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} \int dp e^{-\beta p^2} e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p). \quad (4.56)$$

É utilizado o método da substituição, $w = \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)$, $dw = 2 \sqrt{\beta} e^{-\beta p^2} dp / \sqrt{\pi}$,

$$(I_5) = \int \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} dw \right) w e^{aw} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} \int dw w e^{aw}. \quad (4.57)$$

Realizando uma integração por partes,

$$u = w, \quad du = dw; \quad (4.58)$$

$$dv = e^{aw} dp, \quad v = \frac{1}{a} e^{aw}, \quad (4.59)$$

e a integral toma a forma

$$\begin{aligned}(I_6) &= \frac{w}{a} e^{aw} - \frac{1}{a} \int dw e^{aw} = \frac{w}{a} e^{aw} - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} e^{aw} \right) = \frac{w}{a} e^{aw} - \frac{1}{a^2} e^{aw} \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)} - \frac{1}{a^2} e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)}.\end{aligned}\quad (4.60)$$

Voltando para a equação (4.57),

$$(I_5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\beta}} \left(\frac{1}{a} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p) e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)} - \frac{1}{a^2} e^{a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} p)} \right). \quad (4.61)$$

Substituindo a equação acima em (4.56), chega-se em

$$\begin{aligned}
(I_4) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) e^{a\operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p)} - a \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}a} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) e^{a\operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p)} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}a^2} e^{a\operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p)} \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}a} e^{a\operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p)} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}a} (e^a - e^{-a}).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Voltando para a equação (4.53) e substituindo a definição da constante a ,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \left(\frac{-i\sqrt{\pi}\lambda}{2\sqrt{\beta}\hbar} \right)^{-1} \left[\exp\left(\frac{-i\sqrt{\pi}(\lambda - \lambda')}{2\sqrt{\beta}\hbar} \right) - \exp\left(\frac{i\sqrt{\pi}(\lambda - \lambda')}{2\sqrt{\beta}\hbar} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{i\hbar}{(\lambda - \lambda')} \left[-2i \sin\left(\frac{(\lambda - \lambda')}{2\sqrt{\beta}\hbar} \sqrt{\pi} \right) \right] \\
&= \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}(\lambda - \lambda')} \sin\left(\frac{(\lambda - \lambda')}{2\sqrt{\beta}\hbar} \sqrt{\pi} \right),
\end{aligned} \tag{4.63}$$

mostrando que os autoestados não são ortogonais.

4.4 Estados de Máxima Localização

Os estados de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ estão definidos em torno de um ponto ξ no espaço. Pelo formalismo quântico, $\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \xi$, sendo ξ a melhor posição possível para uma incerteza mínima da posição maior que zero. Para calculá-los, parte-se da positividade da norma no limite da região permitida, sendo projetada no autoestado do operador \hat{P} . Substitui-se a relação comutação modificada (4.2) na norma,

$$\langle p | \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar (e^{\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2})}{2(\Delta\hat{P})^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) | \psi \rangle = 0. \tag{4.64}$$

Substituindo ação dos operadores posição e momento atuando na função de onda $\psi(p)$,

$$\left(i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar (e^{\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2})}{2(\Delta\hat{P})^2} (p - \langle \hat{P} \rangle) \right) \psi(p) = 0. \tag{4.65}$$

Reorganizando os termos da equação acima, tem-se uma equação diferencial,

$$\frac{d\psi(p)}{\psi(p)} = e^{-\beta p^2} \left[\frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar} + \frac{e^{\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}}{2(\Delta\hat{P})^2} (\langle \hat{P} \rangle - p) \right] dp. \tag{4.66}$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi(p)}{\psi(p)} = \int dp e^{-\beta p^2} \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) - a \int dp e^{-\beta p^2} p, \quad a \equiv \frac{e^{\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}}{2(\Delta\hat{P})^2}. \tag{4.67}$$

As integrais são calculadas separadamente. A integral do primeiro termo já foi determinada em (4.35), então

$$(I_7) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p). \quad (4.68)$$

A integral do segundo termo é calculada pelo método da substituição, $w = \beta p^2$, $dw = 2\beta p dp$,

$$(I_8) = \int \left(\frac{dw}{2\beta} \right) e^{-w} = -\frac{1}{2\beta} e^{-w} = -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta p^2}. \quad (4.69)$$

Substituindo os resultados (4.68) e (4.69) na equação principal (4.67), tem-se

$$\ln \psi(p) = \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{a}{2\beta} e^{-\beta p^2}. \quad (4.70)$$

Aplicando exponencial nos dois lados da equação,

$$\psi(p) = N \exp \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{a}{2\beta} e^{-\beta p^2} \right]. \quad (4.71)$$

Substituindo a constante a novamente,

$$\psi(p) = N \exp \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + \frac{e^{\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}}{2(\Delta\hat{P})^2} \langle \hat{P} \rangle \right) \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{1}{2\beta} \frac{e^{\beta(\Delta\hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}}{2(\Delta\hat{P})^2} e^{-\beta p^2} \right]. \quad (4.72)$$

Para a ocorrência dos estados de máxima localização, é preciso cumprir as condições de existência: $\langle \hat{P} \rangle = 0$, $\langle \hat{X} \rangle = \xi$ e $\Delta\hat{P} = (\Delta\hat{P})_c = 1/\sqrt{2\beta}$,

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}^{ML}(p) &= N \exp \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} \left(-\frac{i\xi}{\hbar} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right) + \frac{1}{2\beta} \frac{e^{\beta(1/2\beta)}}{2(1/2\beta)} e^{-\beta p^2} \right] \\ &= N \exp \left[\frac{-i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{1}{2\beta} \frac{\sqrt{e}}{(1/\beta)} e^{-\beta p^2} \right] \\ &= N \exp \left[\frac{-i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

O fator de normalização N é encontrado pela condição de normalização $\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = 1$,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi_{\xi}^{ML}(p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} N^* \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \\ &\times N \exp \left[\frac{-i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right], \end{aligned} \quad (4.74)$$

e a integral a ser calculada é

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} e^{\sqrt{e} e^{-\beta p^2}} = 1. \quad (4.75)$$

Não foi possível exibir uma solução analítica para essa integral, então para ser possível realizar cálculo numérico, primeiro é feita a aproximação até a primeira ordem do parâmetro β da exponencial da exponencial, $e^{-\beta p^2} \approx (1 - \beta p^2)$. Assim,

$$(I_9) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} e^{\sqrt{e} e^{-\beta p^2}} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} e^{\sqrt{e}(1-\beta p^2)}. \quad (4.76)$$

Para facilitar o cálculo, a integral é escrita de forma adimensional através da substituição $w = \sqrt{\beta}p$, $dw = \sqrt{\beta}dp$, encontrando

$$(I_9) \approx \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-w^2} e^{\sqrt{e}(1-w^2)} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{\sqrt{e}} \sqrt{\frac{\pi}{1+\sqrt{e}}} \approx \frac{5,66353}{\sqrt{\beta}}. \quad (4.77)$$

O produto interno é então dado por

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = N^2 \frac{5,66353}{\sqrt{\beta}} = 1, \quad (4.78)$$

e o fator de normalização igual a

$$N = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{5,66353}} = 0.4202\beta^{1/4}. \quad (4.79)$$

Os estados de máxima localização normalizados são, então, dados por

$$\psi_{\xi}^{ML}(p) \approx 0.4202\beta^{1/4} \exp \left[-\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right]. \quad (4.80)$$

Continuando a análise dos estados de máxima localização, é feito o estudo da energia associada aos estados de máxima localização,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_{\xi}^{ML*}(p) \frac{p^2}{2m} \psi_{\xi}^{ML}(p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{5,66353} \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] p^2 \\ &\times \exp \left[-\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{5,66353} \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} p^2 e^{\sqrt{e} e^{-\beta p^2}}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para resolver a integral numericamente, novamente é feita aproximação da exponencial, e a mesma construção para que ela seja adimensional,

$$(I_{11}) \approx \frac{1}{\beta \sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-w^2} w^2 e^{\sqrt{e}(1-w^2)} = \frac{1}{\beta \sqrt{\beta}} e^{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+\sqrt{e})^{3/2}} \approx \frac{1,06911}{\beta \sqrt{\beta}}. \quad (4.82)$$

Assim, a energia associada é

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{5,66353} \frac{1}{2m} \frac{1,06911}{\beta \sqrt{\beta}} \approx \frac{1,06911}{11,32706} \frac{1}{m\beta} \approx \frac{0,94385}{10m\beta}. \quad (4.83)$$

Por último, o estudo sobre a ortogonalidade desses estados,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_{\xi'}^{ML*}(p) \psi_{\xi}^{ML}(p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{5,66353} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{5,66353} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[-\frac{i\sqrt{\pi}(\xi - \xi')}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \sqrt{e} e^{-\beta p^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{5,66353} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \sqrt{e} e^{-\beta p^2} \right], \end{aligned} \quad (4.84)$$

na qual $a \equiv -i\sqrt{\pi}(\xi - \xi')/2\hbar\sqrt{\beta}$.

É feito o mesmo passo a passo anterior, com a aproximação em primeira ordem e a transformação em uma integral adimensional,

$$(I_{12}) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[a \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \sqrt{e}(1 - \beta p^2) \right] \neq 0. \quad (4.85)$$

e a equação (4.84) toma a forma,

$$\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle \neq 0, \quad (4.86)$$

para todo a , o que mostra que os estados de máxima localização não são ortogonais².

4.5 Representação do Espaço de Quase Posição

As informações sobre a posição podem ser recuperadas projetando-se um vetor de estado qualquer $|\psi\rangle$ sobre os vetores de estado de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$, sendo ela

²Não foi possível determinar a integral I_{12} para um a qualquer usando o Mathematica. Então, foi verificado que os estados $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ e $|\psi_{\xi'}^{ML}\rangle$ são não ortogonais calculando a I_{12} para valores de a iguais a 1.0, 2.3, 3.0, 5.7 e 68.4, para os quais os resultados foram todos diferente de 0.

denominada de representação no espaço de quase posição. A função de onda nesse espaço de representação é denominada função de quase posição e é definida como $\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi \rangle := \psi_{qp}(p)$. Através de uma Transformada de Fourier generalizada, a função de onda na representação do espaço de quase posição é escrita na forma

$$\begin{aligned} \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi(p) \\ &= 0.4202\beta^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \psi(p). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Para determinar a ação dos operadores posição e momento no espaço de quase posição, é preciso escrever cada operador atuando numa função de quase posição. Partindo do operador momento,

$$\begin{aligned} \hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_{\xi}^{ML*}(p) p \psi(p) \\ &= 0.4202\beta^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] p \psi(p). \end{aligned} \quad (4.88)$$

A diferença entre a equação acima e a equação da função de quase posição é o momento p . Para fazer com que ela surja em $\psi_{qp}(\xi)$, basta derivá-la com relação a ξ ,

$$\partial_{\xi} \exp \left(\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right) = \frac{i\sqrt{\pi}}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \exp \left(\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right), \quad (4.89)$$

sendo considerada nessa equação apenas a parte da exponencial que tenha a variável ξ .

Para que tenha apenas o termo de momento, é preciso eliminar os demais,

$$\begin{aligned} \frac{-2i\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} \partial_{\xi} \exp \left(\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right) &= \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \exp \left(\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}^{-1} \left[\frac{-2i\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} \partial_{\xi} \exp \left(\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right) \right] &= p \exp \left(\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) \right), \end{aligned} \quad (4.90)$$

sendo erf^{-1} a inversa da função erro.

Portanto, a ação do operador momento na representação do espaço de quase posição é

$$\hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{-2i\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \partial_{\xi} \right) \right] \psi_{qp}(\xi). \quad (4.91)$$

Para determinar a ação do operador posição no espaço de quase posição, é feito o processo

análogo ao realizado para o operador momento,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \psi_{\xi}^{ML*}(p) [i\hbar e^{\beta p^2} \partial_p] \psi(p) \\
&= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \partial_p [\psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi(p)] - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \partial_p \psi_{\xi}^{ML*}(p) \\
&= [\psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi(p)] \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \partial_p \psi_{\xi}^{ML*}(p). \tag{4.92}
\end{aligned}$$

É esperado que as funções de onda nos limites $\pm\infty$ vão a zero para que as funções sejam de quadrado integráveis, então o primeiro termo é desconsiderado,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi(p) \partial_p \psi_{\xi}^{ML*}(p) \\
&= -0.4202\beta^{1/4} i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \partial_p \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \psi(p) \\
&= -0.4202\beta^{1/4} i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta p^2} + \frac{\sqrt{e}}{2} (-2\beta p) e^{-\beta p^2} \right] \\
&\times \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \psi(p) \\
&= 0.4202\beta^{1/4} \xi \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2} \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \psi(p) \\
&+ 0.4202\beta^{1/4} i\hbar\beta \sqrt{e} \int_{-\infty}^{\infty} dp p \exp \left[\frac{i\sqrt{\pi}\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}p) + \frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\beta p^2} \right] \psi(p). \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Essa equação é então escrita em termos das funções de onda de quase posição. O primeiro termo da equação acima também tem um momento p . Ele surge em $\psi_{qp}(\xi)$ ao usar a derivada construída em (4.90). Portanto,

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \xi \psi_{qp}(\xi) + i\hbar\beta \sqrt{e} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{-2i\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \partial_{\xi} \right) \right] \psi_{qp}(\xi). \tag{4.94}$$

Finalmente, a ação do operador posição na representação do espaço de quase posição é

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \left[\xi + i\hbar \sqrt{e} \sqrt{\beta} \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{-2i\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \partial_{\xi} \right) \right] \psi_{qp}(\xi). \tag{4.95}$$

Assim, a análise funcional dos espaços de representações para o GUP-Nouicer é finalizada.

Capítulo 5

Análise Funcional dos Espaços de Representações para o ADV-GUP

O estudo das Teorias da Relatividade Duplamente Especiais tem como principal objetivo a descrição do regime de curta distância/elevado momento, regime esse na escala de Planck. Nessa escala de comprimento a descrição através da Relatividade Restrita já não é mais adequada, então uma das propostas feitas é a mudança dos postulados da relatividade: a introdução de uma nova escala absoluta independente dos observadores. Então, essas teorias relativísticas são tais que as transformações (*boosts*) entre observadores inerciais são caracterizados por duas grandezas independentes do observador: a velocidade da luz c , já conhecida da Relatividade Restrita e comprimento de Planck \mathcal{L}_{pl} , que é relevante no estudo da Gravitação Quântica [22]. A estrutura do espaço-tempo na escala de Planck da Relatividade Duplamente Especial sugere a existência de um comprimento mínimo e de um momento máximo [23].

Em 2009, os físicos Ahmed Farag Ali¹, Saurya Das² e Elias C. Vagenas³ publicaram um artigo propondo um novo GUP que é condizente com as Teorias da Relatividade Duplamente Especiais [27]. Esse GUP contém um comprimento mínimo na incerteza mínima da posição e contém um momento máximo p_{max} , um limite superior para as flutuações de momento. Conhecido como GUP-ADV, esse GUP linear tem a forma

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + \eta \right), \quad (5.1)$$

sendo o termo η dependente do valor médio do operador momento, $\eta = 4\alpha\langle\hat{P}\rangle^2$. O parâmetro

¹Ali é um físico teórico, professor da faculdade Essex County College, Estados Unidos. Tem como foco de pesquisa modelos de gravidade quântica com interesses particulares em problemas abertos em Buracos Negros, Cosmologia, Fenomenologia da Gravidade Quântica [24].

²Das é um físico teórico, professor do Departamento de Física e Astronomia da Universidade de Lethbridge, Canadá. Suas áreas de interesse de pesquisa incluem gravidade clássica e quântica, cosmologia e informação quântica [25].

³Vagenas é um físico teórico, professor do Departamento de Física da Universidade Kuwait, Kuwait. Seu foco de pesquisa é com física gravitacional, no entanto, trabalha em vários outros problemas em Física Teórica, como Relatividade Geral, Buracos Negros, Cosmologia Teoria das Cordas, entre outros [26].

α é o parâmetro GUP na presença de comprimento mínimo e momento máximo. No contexto da cosmologia, esse parâmetro⁴ α pode ser definido como $\alpha = \alpha_0 / \mathcal{M}_{pl} c^2 = \alpha_0 \mathcal{L}_{pl} / \hbar$. \mathcal{M}_{pl} é a massa de Planck, $\mathcal{M}_{pl} c \approx 10^{19} \text{GeV}$ é a energia de Planck, \mathcal{L}_{pl} o comprimento de Planck e α_0 é um parâmetro adimensional ao qual para certos casos assume-se que tem um valor muito próximo da unidade.

Então, os termos dependentes de α só são importantes quando o regime das energias (momento) é comparável com a energia de Planck (momento máximo) e os comprimentos com o comprimento de Planck. O termo extra de primeira ordem no momento da partícula da equação acima tem sua origem na existência do momento máximo e é ele que irá diferenciar a análise funcional do GUP-ADV para o GUP-KMM e do GUP-Nouicer [28].

5.1 Relação de Incerteza Associada a um Comprimento Mínimo e a um Momento Máximo

A relação de comutação modificada associada ao GUP-ADV é dada por

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 - 2\alpha\hat{P} + 4\alpha^2\hat{P}^2). \quad (5.2)$$

Para mostrar que a relação de comutação modificada corresponde ao princípio de incerteza generalizado proposto, basta utilizar a relação de comutação na relação de incerteza para os operadores posição e momento,

$$\begin{aligned} \Delta\hat{X}\Delta\hat{P} &\geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right| \geq \frac{1}{2} \left| \langle i\hbar (1 - 2\alpha\hat{P} + 4\alpha^2\hat{P}^2) \rangle \right| \geq \frac{1}{2} \left| i\hbar (1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2\langle\hat{P}^2\rangle) \right| \\ &\geq \frac{\hbar}{2} (1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2\langle\hat{P}^2\rangle). \end{aligned} \quad (5.3)$$

A relação de incerteza para o operador \hat{P} ao quadrado é igual a $(\Delta\hat{P})^2 = \langle\hat{P}^2\rangle - \langle\hat{P}\rangle^2$. Assim, é possível reescrever o valor médio do operador momento a partir desse resultado,

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} (1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2), \quad (5.4)$$

comprovando a associação.

Para obter a incerteza mínima da posição e a incerteza máxima do momento, o estudo da equação da relação de incerteza (5.4) é feito de uma forma um pouco diferente da realizada nos dois capítulos anteriores. Primeiro é feita uma expansão em primeira ordem

⁴O parâmetro α do GUP-ADV está relacionado com o parâmetro β do GUP-KMM, GUP-Nouicer e do GUP-Pedram (que será estudado no último capítulo) por análise adimensional: $[\alpha^2] = [\beta]$.

do valor médio do operador momento, escrito em termos da incerteza do momento,

$$\begin{aligned}\langle \hat{P} \rangle &= \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle - (\Delta \hat{P})^2} = \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle \left(1 - \frac{(\Delta \hat{P})^2}{\langle \hat{P}^2 \rangle}\right)} \approx \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle} \left(1 - \frac{(\Delta \hat{P})^2}{2\langle \hat{P}^2 \rangle}\right) \\ &\approx \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle} - \frac{(\Delta \hat{P})^2}{2\sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle}}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Substituindo esse resultado na equação (5.4),

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 - 2\alpha \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle} + 4\alpha^2 (\Delta \hat{P})^2 + \alpha \frac{(\Delta \hat{P})^2}{\sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle}} + 4\alpha^2 \langle \hat{P} \rangle^2\right). \quad (5.6)$$

A equação acima é escrita em termos de um $\Delta \hat{X}$ como uma função dependente de $\Delta \hat{P}$,

$$\Delta \hat{X} \geq \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1 - 2\alpha \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle} + 4\alpha^2 \langle \hat{P} \rangle^2}{\Delta \hat{P}} + \left(4\alpha^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle}}\right) \Delta \hat{P} \right]. \quad (5.7)$$

Então, define-se a função $f(k) := \Delta \hat{X}$ e sua variável independente $k := \Delta \hat{P}$,

$$f(k) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{a}{k} + bk \right); \quad a \equiv 1 - 2\alpha \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle} + 4\alpha^2 \langle \hat{P} \rangle^2, \quad b \equiv 4\alpha^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle}}. \quad (5.8)$$

Para determinar o mínimo da função, é preciso encontrar o ponto de extremo da função antes. Para tal, é feita a derivada primeira da função $f(k)$,

$$f'(k) = \frac{\partial}{\partial k} \frac{\hbar}{2} \left(\frac{a}{k} + bk \right) = \frac{\hbar}{2} \left(-\frac{a}{k^2} + b \right), \quad (5.9)$$

para depois a derivada ser igualada a zero para um certo valor de k_0 ,

$$f(k_0) = \frac{\hbar}{2} \left(-\frac{a}{k_0^2} + b \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{a}{k_0^2} = b \quad \Longrightarrow \quad k_0 = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (5.10)$$

Então, tomando o valor positivo de k_0 para estar na região permitida, encontra-se a incerteza do momento $\Delta \hat{P}'$,

$$\Delta \hat{P}' = \sqrt{\frac{1 - 2\alpha \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle} + 4\alpha^2 \langle \hat{P} \rangle^2}{4\alpha^2 + \alpha / \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle}}}. \quad (5.11)$$

que é correspondente a incerteza mínima da posição $\Delta \hat{X}_{min}$,

$$\Delta \hat{X}_{min} \geq \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1 - 2\alpha \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle} + 4\alpha^2 \langle \hat{P} \rangle^2}{\Delta \hat{P}'} + \left(4\alpha^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle}}\right) \Delta \hat{P}' \right], \quad (5.12)$$

resultando na relação,

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{X}_{min} &\geq \frac{\hbar}{2} \left[\left(1 - 2\alpha \sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle} + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2 \right) \left(\frac{1 - 2\alpha \sqrt{\langle\hat{P}\rangle^2} + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2}{4\alpha^2 + \alpha/\sqrt{\langle\hat{P}\rangle^2}} \right)^{-1/2} \right. \\
&\quad \left. + \left(4\alpha^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle}} \right) \left(\frac{1 - 2\alpha \sqrt{\langle\hat{P}\rangle^2} + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2}{4\alpha^2 + \alpha/\sqrt{\langle\hat{P}\rangle^2}} \right)^{1/2} \right] \\
&\geq \frac{\hbar}{2} \left[2 \sqrt{1 - 2\alpha \sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle} + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2} \sqrt{\left(4\alpha^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle}} \right)} \right].
\end{aligned} \tag{5.13}$$

No limite da região permitida, o valor médio do operador momento seja nulo, $\langle\hat{P}\rangle = 0$, e encontra-se o comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0$,

$$\Delta\hat{X}_0 \geq \hbar \sqrt{1 - 2\alpha \sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle}} \sqrt{\left(4\alpha^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle}} \right)}. \tag{5.14}$$

O primeiro termo dentro da raiz quadrada precisar ser maior ou igual a zero,

$$1 - 2\alpha \sqrt{\langle\hat{P}^2\rangle} \geq 0 \longrightarrow \langle\hat{P}^2\rangle \leq \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^2 \longrightarrow (\Delta\hat{P})^2 + \langle\hat{P}\rangle^2 \leq \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^2, \tag{5.15}$$

como $\langle\hat{P}\rangle = 0$, encontra-se a incerteza máxima do momento,

$$(\Delta\hat{P})_{max} \leq \frac{1}{2\alpha}. \tag{5.16}$$

O comprimento mínimo é determinado sem utilizar a aproximação do valor médio do operador momento. Voltando para a equação (5.4), escrevendo $\Delta\hat{X}$ como uma função dependente de $\Delta\hat{P}$,

$$\Delta\hat{X} \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2}{\Delta\hat{P}} + 4\alpha^2\Delta\hat{P} \right), \tag{5.17}$$

ela é minimizada quando $\Delta\hat{P}'$ é a incerteza máxima do momento, encontrada na equação (5.16),

$$\begin{aligned}
(\Delta\hat{X})_{min} &\geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2}{\Delta\hat{P}'} + 4\alpha^2\Delta\hat{P}' \right) \\
&\geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2\langle\hat{P}\rangle^2}{1/2\alpha} + 4\alpha^2 \frac{1}{2\alpha} \right).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Para incerteza da posição ser a menor possível, é preciso impor que $\langle\hat{P}\rangle = 0$,

$$\Delta\hat{X}_0 \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{1/2\alpha} + 2\alpha \right) \geq \frac{\hbar}{2} (2\alpha + 2\alpha), \tag{5.19}$$

e o comprimento mínimo é dado por

$$\Delta\hat{X}_0 \geq 2\alpha\hbar. \quad (5.20)$$

Assim, o comprimento mínimo ocorre quando a incerteza do momento é maximizada.

5.2 Representação no espaço de Hilbert

A construção do espaço de Hilbert é feita no espaço dos momentos devido à incerteza do momento poder se anular, enquanto a incerteza da posição é maior que zero. Em razão disso, os autoestados de posição são formais.

A representação dos operadores posição e momento no espaço dos momentos que correspondem ao GUP-ADV é dada por

$$\hat{P} \cdot \psi(p) = p \psi(p), \quad (5.21)$$

$$\hat{X} \cdot \psi(p) = i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p \psi(p). \quad (5.22)$$

Para mostrar que essa representação satisfaz a relação de comutação modificada (5.2), calcule-se $[\hat{X}, \hat{P}]$ atuando em uma autofunção arbitrária do operador momento,

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}] \cdot \psi(p) &= \hat{X}\hat{P} \cdot \psi(p) - \hat{P}\hat{X} \cdot \psi(p) = \langle p | \hat{X}\hat{P} | \psi \rangle - \langle p | \hat{P}\hat{X} | \psi \rangle \\ &= \langle p | \hat{P} (\hat{X} | \psi \rangle) - \langle p | \hat{X} (\hat{P} | \psi \rangle) \\ &= \langle p | \hat{P} (i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p | \psi \rangle) - \langle p | \hat{X} (p | \psi \rangle) \\ &= \langle p | i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p (| \psi \rangle) - \langle p | p (\hat{X} | \psi \rangle) \\ &= \langle p | i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p (p | \psi \rangle) - \langle p | p (i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p | \psi \rangle) \\ &= i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p (p \langle p | \psi \rangle) - i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) p \partial_p \langle p | \psi \rangle \\ &= i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) (\partial_p (p \psi(p)) - p \partial_p \psi(p)) \\ &= i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \psi(p) = i\hbar(1 - 2\alpha \hat{P} + 4\alpha^2 \hat{P}^2) \psi(p), \end{aligned} \quad (5.23)$$

e a relação de comutação é retornada, mostrando que essa escolha de representação é válida.

É necessário toda uma reformulação da representação do espaço de Hilbert para o GUP-ADV. Iniciando a construção, os operadores posição e momento são definidos como simétricos, assim

$$\langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle, \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}; \quad (5.24)$$

$$\langle \psi | \hat{X}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle, \quad \hat{X}^\dagger = \hat{X}; \quad (5.25)$$

de forma que seus autovalores pertençam ao conjunto dos números reais. Para definir o produto interno correspondente ao GUP-ADV, é trabalhada a simetria de cada operador

separadamente. Iniciando pelo operador posição, o lado direito da equação (5.25) é

$$\begin{aligned}\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \langle \psi | \hat{X} \phi \rangle = \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp V(p) \psi(p)^* \left[i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p \right] \phi(p) \\ &= i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp V(p) \psi(p)^* (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p \phi(p).\end{aligned}\quad (5.26)$$

Substituindo a regra do produto,

$$\begin{aligned}\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \partial_p \left[V(p) \psi^*(p) (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \phi(p) \right] \\ &\quad - i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp V(p) (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \phi(p) \partial_p \psi^*(p) \\ &\quad - i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \psi^*(p) (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \phi(p) \partial_p V(p) \\ &\quad - i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp V(p) \psi^*(p) \phi(p) \partial_p (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2).\end{aligned}\quad (5.27)$$

A derivada total integrada é definida como nula nos limites de integração para que a integral seja de quadrado integrável. O segundo termo mostra o operador \hat{X}^\dagger atuando na função de onda. Em razão disto, a equação (5.27) é escrita de forma mais simples,

$$\begin{aligned}\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp V(p) \left[i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p \psi(p) \right]^* \phi(p) \\ &\quad - i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \left[(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p V(p) + (-2\alpha + 8\alpha p) V(p) \right] \psi^*(p) \phi(p).\end{aligned}\quad (5.28)$$

A simetria do operador posição ocorre quando a segunda integral da equação anterior for nula. As funções de onda não são nulas, então só resta ao integrando envolvendo $V(p)$ ser nulo,

$$\left[(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p V(p) + (-2\alpha + 8\alpha^2 p) V(p) \right] = 0.\quad (5.29)$$

Os termos reorganizados resultam numa equação diferencial,

$$(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \frac{d}{dp} V(p) = (2\alpha - 8\alpha^2 p) V(p) \longrightarrow \frac{dV(p)}{V(p)} = \frac{(2\alpha - 8\alpha^2 p)}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} dp.\quad (5.30)$$

Integrando em ambos os lados, utilizando o método da substituição $w = 1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2$, $dw = -(2\alpha - 8\alpha^2 p) dp$,

$$\int_0^p \frac{dV(p)}{V(p)} = - \int \frac{dw}{w} \longrightarrow \ln \left(\frac{V(p)}{V_0} \right) = -\ln(w) = \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1}.\quad (5.31)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados,

$$V(p) = \frac{V_0}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)}. \quad (5.32)$$

A constante V_0 é fixada como igual a 1, então o elemento de volume é igual

$$dpV(p) = \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)}. \quad (5.33)$$

Portanto, a equação (5.25) toma a forma

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \left[i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p \psi(p) \right]^* \phi(p) \\ &= \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{X}^\dagger | \phi \rangle, \end{aligned} \quad (5.34)$$

e a simetria no operador posição é mostrada.

Para a simetria do operador posição, o lado direito da equação (5.24) é dado por

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi^*(p) p \phi(p). \quad (5.35)$$

O momento p sendo real implica nele ser igual ao seu conjugado complexo, $p = p^*$. A equação acima é então escrita como

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} [\psi(p)p]^* \phi(p) = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle, \quad (5.36)$$

comprovando a simetria do operador momento e mostrando que fixar a constante V_0 como sendo igual a 1 não impede a ocorrência da simetria dos operadores.

Pela simetria dos operadores, o elemento de volume é determinado e o produto interno num cenário de comprimento mínimo e momento máximo é igual a

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi^*(p) \phi(p). \quad (5.37)$$

Note que para o GUP-ADV existe um limite máximo para o momento, devido o termo linear αp e ele modifica a região de integração, já que há uma restrição para o momento das partículas. Logo, as integrais são calculadas entre o intervalo $-P_{max}$ e P_{max} , sendo $P_{max} = 1/2\alpha$.

Continuando as modificações no espaço dos momentos, a relação de totalidade é

determinada a partir do produto interno (5.37),

$$\begin{aligned}\langle \psi | \phi \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi^*(p) \phi(p) = \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \langle \psi | p \rangle \langle p | \phi \rangle \\ &= \langle \psi | \left[\int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} |p\rangle \langle p| \right] | \phi \rangle.\end{aligned}\quad (5.38)$$

O termo entre colchetes é a relação de totalidade

$$\int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} |p\rangle \langle p| = I, \quad (5.39)$$

sendo I é a matriz identidade.

Pela relação de totalidade, define-se a relação de ortonormalização

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \langle p | \psi \rangle = \langle p | \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp'}{(1 - 2\alpha p' + 4\alpha^2 p'^2)} |p'\rangle \langle p' | \psi \rangle \\ &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp'}{(1 - 2\alpha p' + 4\alpha^2 p'^2)} \langle p | p' \rangle \langle p' | \psi \rangle \\ &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp'}{(1 - 2\alpha p' + 4\alpha^2 p'^2)} \langle p | p' \rangle \psi(p').\end{aligned}\quad (5.40)$$

A Delta de Dirac pode ser escrita como

$$\psi(p) = \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \delta(p - p') \psi(p'). \quad (5.41)$$

Para que as equações (5.40) e (5.41) sejam equivalentes, o núcleo das transformadas devem ser iguais,

$$\delta(p - p') = \frac{\langle p | p' \rangle}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)}, \quad (5.42)$$

e a relação de ortonormalização toma a forma

$$\langle p | p' \rangle = (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \delta(p - p'). \quad (5.43)$$

O espaço de Hilbert para o GUP-ADV é então construído, com as representações dos operadores, o produto interno, a relação de totalidade e ortonormalização.

5.3 Autoestados Formais do Operador Posição

A determinação das autofunções formais do operador posição é necessária para que seja feita posteriormente a transformação da função de onda do espaço dos momentos para o espaço de quase posição através de uma Transformada de Fourier Generalizada. Então,

para encontrar essas autofunções não físicas, o operador posição é atuado nos autoestados do espaço de momento, resultando na equação de autovalor para \hat{X} ,

$$\hat{X} \cdot \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \longrightarrow i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p), \quad (5.44)$$

onde $\psi_\lambda(p) = \langle p | \psi \rangle$ é um autoestado de posição formal.

A equação diferencial tem seus termos reorganizados para poder ser resolvida,

$$i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \frac{d}{dp} \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \longrightarrow \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \frac{\lambda}{i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} dp. \quad (5.45)$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \int \frac{-i\lambda}{\hbar} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \implies \ln \psi_\lambda(p) = \frac{-i\lambda}{\hbar} \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)}. \quad (5.46)$$

Dada a integral

$$(I_1) = \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)}, \quad (5.47)$$

ela será calculada utilizando uma expansão em frações parciais. Como o grau do denominador é maior que do numerador, o quociente na integral pode ser expandido na soma de frações parciais e cada fração é integrada separadamente de forma mais facilitada. O denominador por ser escrito na forma

$$1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2 = (p - p_1)(p - p_2), \quad (5.48)$$

onde p_1 e p_2 são as raízes desse termo. Então, o primeiro passo é determinar as raízes reais (ou complexas) do denominador,

$$1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2 = 0 \longrightarrow 4\alpha^2 \left(p^2 - \frac{p}{2\alpha} + 1 \right) = 0. \quad (5.49)$$

As soluções dessa equação de segundo grau são

$$p_{1,2} = \frac{1}{4\alpha} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} - \frac{4}{4\alpha^2}} = \frac{1}{4\alpha} \pm \frac{1}{4\alpha} \sqrt{-3} = \frac{1}{4\alpha} (1 \pm i\sqrt{3}). \quad (5.50)$$

O denominador então é escrito como a soma de duas frações parciais, já que o grau do denominador é 2,

$$\frac{1}{4\alpha^2} \frac{1}{(p^2 - p/2\alpha + 1)} \equiv \frac{1}{4\alpha^2} \left[\frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{(p - p_2)} \right] = \frac{1}{4\alpha^2} \frac{A(p - p_2) + B(p - p_1)}{(p - p_1)(p - p_2)}. \quad (5.51)$$

Pela igualdade, o denominador do terceiro termo acima deve ser igual a 1. Então, para

determinar as constantes A e B , são feitas duas suposições: se $p = p_1$,

$$B(p_1 - p_1) = 0, \quad A(p_1 - p_2) = 1 \implies A = \frac{1}{(p_1 - p_2)}, \quad (5.52)$$

e se $p = p_2$,

$$A(p_2 - p_2) = 0, \quad B(p_2 - p_1) = 1 \implies B = \frac{1}{(p_2 - p_1)} = \frac{-1}{(p_1 - p_2)}. \quad (5.53)$$

Substituindo as frações parciais na integral (5.47), têm-se

$$\begin{aligned} (I_1) &= \frac{1}{4\alpha^2} \int dp \left[\frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{(p - p_2)} \right] \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \int \left[\frac{1}{(p_1 - p_2)(p - p_1)} - \frac{1}{(p_1 - p_2)(p - p_2)} \right] \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \frac{1}{(p_1 - p_2)} \left[\int \frac{dp}{(p - p_1)} - \int \frac{dp}{(p - p_2)} \right] \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \frac{1}{(p_1 - p_2)} [\ln(p - p_1) - \ln(p - p_2)] \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \frac{1}{(p_1 - p_2)} \ln \left[\frac{(p - p_1)}{(p - p_2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Substituindo os valores das raízes encontrados em (5.50),

$$\begin{aligned} (I_1) &= \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{4\alpha^2}(1 + i\sqrt{3}) - \frac{1}{4\alpha}(1 - i\sqrt{3}) \right)^{-1} \ln \left[\frac{p - (1 + i\sqrt{3})/4\alpha}{p - (1 - i\sqrt{3})/4\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{i2\sqrt{3}}{4\alpha} \right)^{-1} \ln \left[\frac{(4\alpha - 1) - i\sqrt{3}}{4\alpha} \frac{4\alpha}{(4\alpha - 1) + i\sqrt{3}} \right] \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{3}\alpha} \ln \left[\frac{(4\alpha - 1) - i\sqrt{3}}{(4\alpha - 1) + i\sqrt{3}} \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Pela tabela de integração presente no apêndice 2, a integral pode ser escrita como

$$(I_1) = -\frac{i}{2\sqrt{3}\alpha} \left[2i \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{3}\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) + C, \quad (5.56)$$

e equação (5.46) toma a forma

$$\ln \psi_\lambda(p) = -\frac{i\lambda}{\hbar} \left[\frac{1}{\sqrt{3}\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] + C. \quad (5.57)$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados,

$$\psi_\lambda(p) = N \exp \left[-\frac{i\lambda}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \quad (5.58)$$

Será feita o produto interno do autoestado com ele mesmo para determinar o fator de normalização,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_\lambda^*(p) \psi_\lambda(p) \\
&= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} N^* \exp \left[\frac{i\lambda}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&\times N \exp \left[-\frac{i\lambda}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} N^* N.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

A integral já foi resolvida anteriormente em (5.56), logo

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle &= N^* N \left[\frac{1}{\sqrt{3}\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \\
&= \frac{N^2}{\sqrt{3}\alpha} \left[\arctan \left(\frac{4\alpha}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(\frac{4\alpha}{\sqrt{3}} \frac{(-1)}{2\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= \frac{N^2}{\sqrt{3}\alpha} \left[\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(\frac{-3}{\sqrt{3}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.60}$$

O resultado de cada arco tangente é determinado para o intervalo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle = \frac{N^2}{\sqrt{3}\alpha} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{(-\pi)}{3} \right) = \frac{N^2}{\sqrt{3}\alpha} \frac{\pi}{2}. \tag{5.61}$$

O fator de normalização é dado por

$$N^2 = \frac{2\sqrt{3}\alpha}{\pi} \implies N = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\alpha}{\pi}}, \tag{5.62}$$

e finalmente, obtêm-se os autovetores formais de posição normalizados,

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\alpha}{\pi}} \exp \left[-\frac{i\lambda}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \tag{5.63}$$

Esse é o autoestado de espaço de momento generalizado do operador posição na presença de um comprimento mínimo e um momento máximo.

Agora será feita um estudo sobre a ortogonalização desses autoestados de posição.

Efetuatingo o produto interno entre os autoestados (5.37),

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_{\lambda'}^*(p) \psi_{\lambda}(p) \\
&= \frac{2\sqrt{3}\alpha}{\pi} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \exp \left[\frac{i\lambda'}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{i\lambda}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}\alpha}{\pi} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Utilizando o método da substituição para resolver a integral, têm-se que $w = \arctan[(4\alpha p - 1)/\sqrt{3}]$, $dw = \sqrt{3}\alpha/(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)$,

$$\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle = \frac{2\sqrt{3}\alpha}{\pi} \int \frac{dw}{\sqrt{3}\alpha} \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} w \right] = \frac{2}{\pi} \int dw \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} w \right]. \tag{5.65}$$

Novamente por substituição, $z = -i(\lambda - \lambda')w/\sqrt{3}\hbar\alpha$, $dz = -i(\lambda - \lambda')dw/\sqrt{3}\hbar\alpha$,

$$\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle = \frac{2}{\pi} \int \frac{i\sqrt{3}\alpha\hbar}{(\lambda - \lambda')} dz \exp(z) = \frac{2\sqrt{3}i\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \exp(z). \tag{5.66}$$

Voltando para a variável original,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \frac{2\sqrt{3}i\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} w \right] = \frac{2\sqrt{3}i\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \Big|_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \\
&= \frac{2\sqrt{3}i\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \left\{ \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\
&- \left. \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha}{\sqrt{3}} \frac{(-1)}{2\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2\sqrt{3}i\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \left\{ \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] - \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{-3}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2\sqrt{3}i\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \left\{ \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \frac{\pi}{6} \right] - \exp \left[-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \frac{(-\pi)}{3} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{5.67}$$

chega-se no resultado final

$$\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle = -\frac{2\sqrt{3}i\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \left[\exp \left(\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{3\sqrt{3}\alpha\hbar} \right) - \exp \left(-\frac{i(\lambda - \lambda')\pi}{6\sqrt{3}\alpha\hbar} \right) \right]. \tag{5.68}$$

O que mostra que os autoestados não são ortogonais.

Para encerrar a seção, será feito um estudo com relação a energia para esses autoestados

formais de posição,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_\lambda^*(p) \frac{p^2}{2m} \psi_\lambda(p) \\
&= \frac{2\sqrt{3}\alpha}{\pi} \frac{1}{2m} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} p^2 \exp \left[\frac{i\lambda}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{i\lambda}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}\alpha}{\pi m} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} p^2. \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Utilizando o método da substituição, $w = 2\alpha p$, $dw = 2\alpha dp$, a integral toma a forma

$$(I_2) = \int \frac{dw}{2\alpha} \frac{1}{(1 - w + w^2)} \left(\frac{w^2}{4\alpha^2} \right) = \frac{1}{8\alpha^3} \int dw \frac{w^2}{(1 - w + w^2)}. \tag{5.70}$$

Efetuada uma manipulação algébrica para facilitar a integração, é possível reescrever o integrando como

$$\begin{aligned}
(I_2) &= \frac{1}{8\alpha^3} \int dw \left[1 + \frac{(w-1)}{(1-w+w^2)} \right] = \frac{1}{8\alpha^3} \left[\int dw + \int dw \frac{(w-1)}{(1-w+w^2)} \right] \\
&= \frac{1}{8\alpha^3} \left[w + \int dw \frac{(w-1)}{(1-w+w^2)} \right]. \tag{5.71}
\end{aligned}$$

Essa integral vai ser resolvida por integração por frações parciais, como já feito anteriormente. O denominador é escrito em termos de suas raízes,

$$1 - w + w^2 = (w - w_1)(w - w_2), \tag{5.72}$$

que são determinadas ao resolver a equação de segunda ordem,

$$w^2 - w + 1 = 0. \tag{5.73}$$

Assim, encontra-se as raízes complexas

$$w_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4} = \frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{3}), \tag{5.74}$$

na qual esse resultado será guardado para ser usado mais a frente.

O denominador então pode ser reescrito como a soma de duas frações parciais,

$$\frac{1}{(1 - w + w^2)} \equiv \frac{C}{(w - w_1)} + \frac{D}{(w - w_2)} = \frac{C(w - w_2) + D(w - w_1)}{(w - w_1)(w - w_2)}. \tag{5.75}$$

As constantes podem ser determinadas supondo um valor para w e igualando o numerador

a 1, devido a igualdade acima,

$$w = w_1 : C(w_1 - w_2) + D(w_1 - w_1) = 1 \implies C = \frac{1}{(w_1 - w_2)}; \quad (5.76)$$

$$w = w_2 : C(w_2 - w_2) + D(w_2 - w_1) = 1 \implies D = \frac{-1}{(w_1 - w_2)}. \quad (5.77)$$

Assim, a integral é escrita na forma

$$(I_3) = \int dw \frac{w}{(1 - w + w^2)} - \int \frac{dw}{(1 - w + w^2)}, \quad (5.78)$$

que serão calculadas separadamente.

Iniciando pela segunda integral por ser a mais simples, e substituindo os valores das constantes encontrados em (5.76) e (5.77),

$$\begin{aligned} (I_4) &= \int \frac{dw}{(1 - w + w^2)} = \int dw \left[\frac{C}{(w - w_1)} + \frac{D}{(w - w_2)} \right] \\ &= C \int \frac{dw}{(w - w_1)} + D \int \frac{dw}{(w - w_2)} = C \ln(w - w_1) + D \ln(w - w_2) \\ &= \frac{1}{(w_1 - w_2)} \ln(w - w_1) - \frac{1}{(w_1 - w_2)} \ln(w - w_2) \\ &= \frac{1}{(w_1 - w_2)} \ln \left(\frac{w - w_1}{w - w_2} \right). \end{aligned} \quad (5.79)$$

E a primeira integral, realizando uma manipulação algébrica, é dada por

$$\begin{aligned} (I_5) &= \int dw \frac{w}{(1 - w + w^2)} = \int \frac{dw}{(1 - w + w^2)} \left[\frac{1}{2}(2w - 1) + \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dw \frac{2w - 1}{(1 - w + w^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dw}{(1 - w + w^2)} \\ &= \frac{1}{2} \int dw \frac{2w - 1}{(1 - w + w^2)} + \frac{1}{2}(I_4). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Realizando o método da substituição, $z = 1 - w + w^2$, $dz = (2w - 1)dw$, a primeira integral é dada por

$$(I_6) = \frac{1}{2} \int dw \frac{2w - 1}{(1 - w + w^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln(z) = \ln(1 - w + w^2)^{1/2}. \quad (5.81)$$

Voltando para a integral (I_3) , substitui-se nela as equações (5.79), (5.80) e (5.81),

$$\begin{aligned} (I_3) &= \ln(1 - w + w^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(I_5) - (I_4) \\ &= \ln(1 - w + w^2)^{1/2} - \frac{1}{2(w_1 - w_2)} \ln \left(\frac{w - w_1}{w - w_2} \right), \end{aligned} \quad (5.82)$$

e substituindo as raízes encontradas em (5.74),

$$\begin{aligned}
(I_2) &= \ln(1 - w + w^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \right]^{-1} \ln \left[\frac{w - (1 + i\sqrt{3})/2}{w - (1 - i\sqrt{3})/2} \right] \\
&= \ln(1 - w + w^2)^{1/2} - \frac{1}{2\sqrt{3}i} \ln \left[\frac{(2w - 1) - i\sqrt{3}}{(2w - 1) + i\sqrt{3}} \right]. \tag{5.83}
\end{aligned}$$

Voltando para a equação (5.71), substituindo a equação acima e voltando para a variável p ,

$$\begin{aligned}
(I_2) &= \frac{1}{8\alpha^3} \left\{ w + \ln(1 - w + w^2)^{1/2} - \frac{1}{2\sqrt{3}i} \ln \left[\frac{(2w - 1) - i\sqrt{3}}{(2w - 1) + i\sqrt{3}} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{8\alpha^3} \left\{ 2\alpha p + \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{1/2} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \ln \left[\frac{(4\alpha p - 1) - i\sqrt{3}}{(4\alpha p - 1) + i\sqrt{3}} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{8\alpha^3} \left\{ 2\alpha p + \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{1/2} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \left[2i \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\}, \tag{5.84}
\end{aligned}$$

ao qual foi substituído a tabela do apêndice 1 na segunda linha no termo de logaritmo natural. Finalmente, a equação (5.69) é calculada

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{P}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle &= \frac{\sqrt{3}\alpha}{\pi m} \frac{1}{8\alpha^3} \left[2\alpha p + \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \Big|_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{1}{\alpha^2 m} \left[2\alpha \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - 2\alpha \frac{1}{2\alpha} + 4\alpha^2 \frac{1}{4\alpha^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{4\alpha}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2\alpha \left(\frac{-1}{2\alpha} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + 2\alpha \frac{1}{2\alpha} + 4\alpha^2 \frac{1}{4\alpha^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{4\alpha}{\sqrt{3}} \frac{(-1)}{2\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{1}{\alpha^2 m} \left[1 + \ln(1)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 - \ln(3)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{-3}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{1}{\alpha^2 m} \left[2 + \ln \left(\frac{1}{3} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{1}{\alpha^2 m} \left[2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right] = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \frac{1}{\alpha^2 m} \left[4 + \ln \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right]. \tag{5.85}
\end{aligned}$$

5.4 Algumas Análises sobre Estados de Máxima Localização

A presença do comprimento mínimo $(\Delta\hat{X})_0 = 2\alpha\hbar$ impede que seja admissível determinar a posição propriamente dita de uma partícula teste, então é necessário introduzir os chamados estados de máxima localização, como já discutido nos capítulos anteriores. Serão esses estados que darão a melhor posição possível da partícula.

Os estados de máxima localização $|\psi_\xi^{ML}\rangle$ estão definidos em torno de um ponto clássico ξ no espaço, então matematicamente eles são escritos na forma $\langle \psi_\xi^{ML} | \hat{X} | \psi_\xi^{ML} \rangle = \xi$. Para calculá-los, parte-se da positividade da norma, que está projetada no autoestado do operador \hat{P} . Considerando apenas o limite da região permitida, substitui-se a relação de comutação

modificada (5.2),

$$\begin{aligned} \langle p | \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 - 2\alpha\langle \hat{P} \rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle \hat{P}^2 \rangle)}{2(\Delta\hat{P})^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) | \psi \rangle &= 0 \\ \left(i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 - 2\alpha\langle \hat{P} \rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle \hat{P}^2 \rangle)}{2(\Delta\hat{P})^2} (p - \langle \hat{P} \rangle) \right) \psi(p) &= 0. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Reorganizando os termos, chega-se numa equação diferencial

$$\frac{d\psi(p)}{\psi(p)} = \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \left(\frac{-i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} \frac{(1 - 2\alpha\langle \hat{P} \rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle \hat{P}^2 \rangle)}{2(\Delta\hat{P})^2} (\langle \hat{P} \rangle - p) \right). \quad (5.87)$$

Para simplificar as contas, define-se

$$a := \frac{(1 - 2\alpha\langle \hat{P} \rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle \hat{P}^2 \rangle)}{2(\Delta\hat{P})^2}; \quad (5.88)$$

$$b := \frac{-i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle. \quad (5.89)$$

Assim, a equação (5.87) ao ser integrada e aplicada exponencial, toma a forma

$$\begin{aligned} \int \frac{d\psi(p)}{\psi(p)} &= \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} (-ap + b) \\ \ln \psi(p) &= - \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} (ap - b) \equiv -(I_7) \\ \psi(p) &= N e^{-(I_7)}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

na qual N é o fator de normalização.

Para dar formato a esse estado, a integral (I_7) é calculada utilizando integração por frações parciais,

$$(I_7) = a \int dp \frac{p}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} - b \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \equiv a(I_8) - b(I_9). \quad (5.91)$$

A integral (I_9) já foi resolvida anteriormente e seu resultado é encontrado na equação (5.56).

A integral (I_8) será resolvida primeiro realizando uma manipulação algébrica,

$$\begin{aligned} (I_8) &= \int dp \frac{p}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} = \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \left[\frac{1}{4\alpha} (4\alpha p - 1) + \frac{1}{4\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{4\alpha} \int dp \frac{(4\alpha p - 1)}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} + \frac{1}{4\alpha} \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \\ &= \frac{1}{4\alpha} \int dp \frac{(4\alpha p - 1)}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} + \frac{1}{4\alpha} (I_9). \end{aligned} \quad (5.92)$$

A integral será calculada utilizando o método da substituição, $w = 1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2$, $dw = 2\alpha(4\alpha p - 1)dp$,

$$(I_{10}) = \frac{1}{2\alpha} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\alpha} \ln(w) = \frac{1}{2\alpha} \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2). \quad (5.93)$$

Assim,

$$(I_9) = \frac{1}{8\alpha^2} \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) + \frac{1}{4\sqrt{3}\alpha^2} \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right), \quad (5.94)$$

e,

$$\begin{aligned} (I_7) &= \frac{a}{8\alpha^2} \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) + \frac{a}{4\sqrt{3}\alpha^2} \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{b}{\sqrt{3}\alpha} \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right). \\ &= \frac{a}{8\alpha^2} \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) + \frac{1}{4\sqrt{3}\alpha^2} (a - 4b\alpha) \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Voltando para a equação (5.90) e substituindo as definições (5.88) e (5.89),

$$\begin{aligned} \psi(p) &= N \exp \left[-\frac{1}{8\alpha^2} \frac{(1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle\hat{P}^2\rangle)}{2(\Delta\hat{P})^2} \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \right. \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{3}\alpha^2} \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{(1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle\hat{P}^2\rangle)}{2(\Delta\hat{P})^2} + \frac{4i\alpha\langle\hat{X}\rangle}{\hbar} \right. \\ &\quad \left. \left. - 4\alpha \frac{(1 - 2\alpha\langle\hat{P}\rangle + 4\alpha^2(\Delta\hat{P})^2 + 4\alpha^2\langle\hat{P}^2\rangle)}{2(\Delta\hat{P})^2} \langle\hat{P}\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Cumprindo as condições para a ocorrência dos estados de máxima localização: $\langle\hat{P}\rangle = 0$, $\langle\hat{X}\rangle = \xi$ e $(\Delta\hat{P})_c = 1/2\alpha$, define-se

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}^{ML}(p) &= N \exp \left[-\frac{1}{8\alpha^2} \frac{(1 + 4\alpha^2(1/4\alpha^2))}{2(1/4\alpha^2)^2} \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\sqrt{3}\alpha^2} \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{(1 + 4\alpha^2(1/4\alpha^2))}{2(1/4\alpha^2)^2} + \frac{4i\alpha\xi}{\hbar} \right) \right] \\ &= N \exp \left[-\frac{1}{8\alpha^2} 4\alpha^2 \ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) - \frac{1}{4\sqrt{3}\alpha^2} \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right) \left(4\alpha^2 + \frac{4i\alpha\xi}{\hbar} \right) \right] \\ &= N \exp \left[\ln(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right) \right] \\ &= N(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Para finalizar, basta normalizar os estados de máxima localização pela condição,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi_{\xi}^{ML}(p) \\
&= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} N^* (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] N (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= N^2 \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^2} \exp \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] = 1. \quad (5.98)
\end{aligned}$$

Pelo método da substituição, $w = \arctan[(4\alpha p - 1)/\sqrt{3}]$, $dw = \sqrt{3}\alpha/(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)$,

$$(I_{11}) = N^2 \int_{-\pi/3}^{\pi/6} \left(\frac{dw}{\sqrt{3}\alpha} \right) \frac{1}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} e^{-2w/\sqrt{3}}, \quad (5.99)$$

ao qual o termo ainda com a variável p é escrita como

$$\begin{aligned}
\tan(w) &= \frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \rightarrow \tan^2(w) = \frac{16\alpha^2 p^2 - 8\alpha p + 1}{3} \\
\rightarrow \sec^2(w) &= \frac{16\alpha^2 p^2 - 8\alpha p + 1}{3} + 1 \rightarrow \frac{1}{\cos^2(w)} = \frac{4}{3}(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \\
\rightarrow \frac{1}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} &= \frac{4}{3} \cos^2(w); \quad (5.100)
\end{aligned}$$

e a equação (5.99) toma a forma

$$\begin{aligned}
(I_{11}) &= N^2 \int_{-\pi/3}^{\pi/6} \left(\frac{dw}{\sqrt{3}\alpha} \right) \left(\frac{4}{3} \cos^2(w) \right) e^{-2w/\sqrt{3}} = \frac{4N^2}{3\sqrt{3}\alpha} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \cos^2(w) e^{-2w/\sqrt{3}} \\
&= \frac{4N^2}{3\sqrt{3}\alpha} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \cos^2(w) e^{aw}, \quad a \equiv -\frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (5.101)
\end{aligned}$$

A integral é resolvida começando por uma integração por partes

$$u = \cos^2(w), \quad du = -\sin(2w)dw; \quad (5.102)$$

$$dv = e^{aw} dw, \quad v = \frac{1}{a} e^{aw}, \quad (5.103)$$

resultando em

$$(I_{12}) = \frac{1}{a} \cos^2(w) e^{aw} + \frac{1}{a} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \sin(2w) e^{aw}. \quad (5.104)$$

Novamente uma integração por partes,

$$u = \sin(2w), \quad du = 2 \cos(2w)dw; \quad (5.105)$$

$$dv = e^{aw} dw, \quad v = \frac{1}{a}e^{aw}; \quad (5.106)$$

tem-se

$$(I_{13}) = \frac{1}{a} \sin(2w)e^{aw} - \frac{2}{a} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \cos(2w)e^{aw}. \quad (5.107)$$

A terceira e última integração por partes,

$$u = \cos(2w), \quad du = -2 \sin(2w)dw; \quad (5.108)$$

$$dv = e^{aw} dw, \quad v = \frac{1}{a}e^{aw}, \quad (5.109)$$

resulta em

$$\begin{aligned} (I_{14}) &= \frac{1}{a} \cos(2w)e^{aw} + \frac{2}{a} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \sin(2w)e^{aw} \\ &= \frac{1}{a} \cos(2w)e^{aw} + \frac{2}{a}(I_{13}). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Substituindo o resultado acima em (5.107),

$$\begin{aligned} (I_{13}) &= \frac{1}{a} \sin(2w)e^{aw} - \frac{2}{a} \left(\frac{1}{a} \cos(2w)e^{aw} + \frac{2}{a}(I_{13}) \right) \\ (I_{13}) + \frac{4}{a^2}(I_{13}) &= \frac{1}{a} \sin(2w)e^{aw} - \frac{2}{a^2} \cos(2w)e^{aw} \\ (I_{13}) &= \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left[\frac{1}{a} \sin(2w)e^{aw} - \frac{2}{a^2} \cos(2w)e^{aw} \right], \end{aligned} \quad (5.111)$$

e substituindo na equação (5.104),

$$\begin{aligned} (I_{12}) &= \frac{1}{a} \cos^2(w)e^{aw} + \frac{1}{a} \left\{ \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left[\frac{1}{a} \sin(2w)e^{aw} - \frac{2}{a^2} \cos(2w)e^{aw} \right] \right\} \\ &= \left[\frac{1}{a} \cos^2(w) + \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{a^2} \sin(2w) - \frac{2}{a^3} \cos(2w) \right) \right] e^{aw} \Big|_{-\pi/3}^{\pi/6} \\ &= \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{a^3} \frac{1}{2} \right) \right] e^{a\pi/6} \\ &\quad - \left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{a^2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{2}{a^3} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \right] e^{-a\pi/3} \\ &= \left[\frac{3}{4a} + \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2a^2} - \frac{1}{a^3} \right) \right] e^{a\pi/6} - \left[\frac{1}{4a} + \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2a^2} + \frac{1}{a^3} \right) \right] e^{-a\pi/3}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Substituindo a constante $a = -2/\sqrt{3}$, a integral tem como resultado

$$\begin{aligned}
(I_{12}) &= \left[-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right] e^{-\pi/3\sqrt{3}} - \left[\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right] e^{2\pi/3\sqrt{3}} \\
&= \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \right) e^{-\pi/3\sqrt{3}} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \right) e^{2\pi/3\sqrt{3}} \\
&= -\frac{3\sqrt{3}}{16} e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}}{16} e^{2\pi/3\sqrt{3}}.
\end{aligned} \tag{5.113}$$

Substituindo esse resultado na equação (5.101),

$$\begin{aligned}
(I_{11}) &= \frac{4N^2}{3\sqrt{3}\alpha} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{16} e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}}{16} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{N^2}{\alpha} \left(-\frac{1}{4} e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5}{12} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right),
\end{aligned} \tag{5.114}$$

e finalmente,

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{N^2}{4\alpha} \left(-e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right) = 1. \tag{5.115}$$

O fator de normalização é

$$N = 2\sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right)^{-1/2}. \tag{5.116}$$

Os estados de máxima localização normalizados são

$$\begin{aligned}
\psi_{\xi}^{ML}(p) &= 2\sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right)^{-1/2} (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.117}$$

Para estudar a ortogonalização desses estados, é feito o produto interno,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_{\xi'}^{ML*}(p) \psi_{\xi}^{ML}(p) \\
&= 4\alpha \left(-e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right)^{-1} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \\
&\times (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi'}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&\times (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= 4\alpha \left(-e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right)^{-1} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^2} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.118}$$

Reescrevendo a equação acima definindo a constante da exponencial como a ,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= 4\alpha \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^2} \\ &\times \exp \left[a \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right], \quad a \equiv -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right), \end{aligned} \quad (5.119)$$

essa integral já foi resolvida anteriormente, utilizando o método da substituição em (5.99) e sucessivas integrações por partes na equação que resultaram na equação (5.112). Assim,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= 4\alpha \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1} \frac{4}{3\sqrt{3}\alpha} \left\{ \left[\frac{3}{4a} + \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2a^2} - \frac{1}{a^3} \right) \right] e^{a\pi/6} \right. \\ &- \left. \left[\frac{1}{4a} + \left(1 + \frac{4}{a^2} \right)^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2a^2} + \frac{1}{a^3} \right) \right] e^{-a\pi/3} \right\} \\ &= \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1} \left[\frac{1}{4a} (3e^{a\pi/6} - e^{-a\pi/3}) \right. \\ &+ \left. (a^2 + 4)^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{a} \right) (e^{a\pi/6} + e^{-a\pi/3}) \right]. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Substituindo a constante a ,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right) \right)^{-1} \right. \\ &\times \left\{ 3 \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right) \frac{\pi}{6} \right] - \exp \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right) \frac{\pi}{3} \right] \right\} \\ &+ \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right)^2 + 4 \right]^{-1} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right) \right)^{-1} \right] \\ &\times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right) \frac{\pi}{6} \right] + \exp \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{i(\xi - \xi')}{\sqrt{3}\hbar\alpha} \right) \frac{\pi}{3} \right] \right\} \Bigg\}, \end{aligned} \quad (5.121)$$

assim, os estados de máxima localização não são ortogonais.

Para finalizar a análise dos estados maximamente localizados, é feito o estudo da energia associada a esses estados,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(12\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_{\xi}^{ML*}(p) \frac{p^2}{2m} \psi_{\xi}^{ML}(p) \\ &= 4\alpha \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1} \frac{1}{2m} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^2} \\ &\times p^2 \exp \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Essa integral, tirando o termo de momento p^2 , já foi resolvida anteriormente. Assim, segundo o mesmo cálculo feito a partir da equação (5.99), pelo método da substituição:

$$w = \arctan[(4\alpha p - 1)/\sqrt{3}], \quad dw = \sqrt{3}\alpha/(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2),$$

$$\begin{aligned} (I_{15}) &= \int_{-\pi/3}^{\pi/6} \left(\frac{dw}{\sqrt{3}\alpha} \right) \left(\frac{4}{3} \cos^2(w) \right) \left(\frac{(\sqrt{3} \tan(w) + 1)^2}{16\alpha^2} \right) e^{-2w/\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}\alpha^3} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \cos^2(w) (3 \tan^2(w) + 2\sqrt{3} \tan(w) + 1) e^{-2w/\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}\alpha^3} \left[3 \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \sin^2(w) e^{aw} + \sqrt{3} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \sin(2w) e^{aw} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \cos^2(w) e^{aw} \right], \quad a \equiv \frac{-2}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Resolvendo as integrais separadamente, a terceira já foi resolvida anteriormente e seu resultado é dado pela equação (5.113). A primeira integral toma a forma

$$(I_{16}) = \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw (1 - \cos^2(w)) e^{aw} = \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw e^{aw} - \int_{-\pi/3}^{\pi/6} dw \cos^2(w) e^{aw}. \quad (5.124)$$

A segunda integral da equação (5.124) tem seu resultado já calculado em (5.113), e substituindo a constante a tem-se,

$$\begin{aligned} (I_{17}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-2w/\sqrt{3}} \Big|_{-\pi/3}^{\pi/6} + \frac{3\sqrt{3}}{16} e^{-\pi/3\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3}}{16} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (e^{-\pi/3\sqrt{3}} - e^{2\pi/3\sqrt{3}}) + \frac{3\sqrt{3}}{16} e^{-\pi/3\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3}}{16} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \\ &= \frac{-5\sqrt{3}}{16} e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{16} e^{2\pi/3\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

A segunda integral da equação (5.123) já foi calculada anteriormente e tem seu resultado dada pela equação (5.111), que ao substituir a constante a , toma a forma

$$\begin{aligned} (I_{18}) &= \frac{1}{4} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2w) - \frac{3}{2} \cos(2w) \right] e^{-2w/\sqrt{3}} \Big|_{-\pi/3}^{\pi/6} \\ &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} \right) \right] e^{-\pi/3\sqrt{3}} - \left[-\frac{\sqrt{3}}{8} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{3}{8} \left(-\frac{1}{2} \right) \right] e^{2\pi/3\sqrt{3}} \\ &= -\frac{3}{8} (e^{-\pi/3\sqrt{3}} + e^{2\pi/3\sqrt{3}}). \end{aligned} \quad (5.126)$$

A equação (5.123) é dada por

$$\begin{aligned} (I_{15}) &= \frac{1}{12\sqrt{3}\alpha^3} \left\{ 3 \left(\frac{-5\sqrt{3}}{16} e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{16} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3} \left[-\frac{3}{8} (e^{-\pi/3\sqrt{3}} + e^{2\pi/3\sqrt{3}}) \right] - \frac{3\sqrt{3}}{16} e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}}{16} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right\} \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}\alpha^3} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{24\alpha^3} (-3e^{-\pi/3\sqrt{3}} + e^{2\pi/3\sqrt{3}}). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Finalmente, a energia associada aos estados de máxima localização é dada por

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \frac{2\alpha}{m} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1} \left[\frac{1}{24\alpha^3} \left(-3e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{12m\alpha^2} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1} \left(-3e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (5.128)$$

5.5 Representação do Espaço de Quase Posição

Projetar estados quaisquer nos estados de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ ocasiona a obtenção da posição mais precisa possível. Para determinar o ponto na qual a medida da posição vai flutuar, é definida uma função de onda na representação de quase posição $\psi_{qp}(\xi)$. A transformação de uma função de onda na representação do espaço de quase posição para uma função de onda na representação no espaço dos momentos $\psi_{qp}(p)$ pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi(p) \\ &= 2\sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1/2} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{3/2}} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \psi(p). \end{aligned} \quad (5.129)$$

Para determinar a ação dos operadores posição e momento na representação do espaço de quase posição, é preciso que cada operador atue na função $\psi_{qp}(\xi)$ e seja feita a comparação com a própria função de onda de quase posição (5.129). Os termos a mais entre ambas surgem ao efetuar derivadas com relação a ξ , o que mostra que ambos operadores são operadores diferenciais. Por ser o mais simples de se determinar, primeiro é feita a análise do operador momento,

$$\begin{aligned} \hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_{\xi}^{ML*}(p) p \psi(p) \\ &= 2\sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1/2} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{3/2}} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] p \psi(p). \end{aligned} \quad (5.130)$$

A diferença entre essa equação e a função de onda de quase posição é apenas o aparecimento de um momento p . Para que surja p em $\psi_{qp}(\xi)$, basta efetuar uma derivação com relação a ξ na função de quase posição, então levando em conta apenas o termo com ξ na exponencial,

tem-se

$$\begin{aligned} \partial_\xi \exp \left[\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] &= \frac{i}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \\ &\times \exp \left[\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Para surgir apenas o termo de momento, é preciso eliminar os demais,

$$\begin{aligned} -i\alpha\hbar\partial_\xi \exp \left[-\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] &= \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \\ \exp \left[\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] &\implies \sqrt{3} \tan \left\{ -i\alpha\hbar\partial_\xi \exp \left[\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} \\ &= (4\alpha p - 1) \exp \left[\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ \implies \frac{1}{4\alpha} \left\{ 1 + \sqrt{3} \tan \left\{ -i\alpha\hbar\partial_\xi \exp \left[\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} \right\} \\ &= p \exp \left[\frac{i\xi}{\sqrt{3}\alpha\hbar} \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Portanto, a ação do operador momento no espaço de quase posição é

$$\hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \left\{ \frac{1}{4\alpha} \left[1 + \sqrt{3} \tan(-i\alpha\hbar\partial_\xi) \right] \right\} \psi_{qp}(\xi). \quad (5.133)$$

Para determinar a ação do operador posição é seguido o mesmo passo a passo,

$$\begin{aligned} \hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} \psi_\xi^{ML*}(p) \left[i\hbar(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2) \partial_p \right] \psi(p) \\ &= i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \partial_p \left[\psi_\xi^{ML*}(p) \psi(p) \right] - i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \psi(p) \partial_p \psi_\xi^{ML*}(p) \\ &= \left[\psi_\xi^{ML*}(p) \psi(p) \right] \Big|_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} - i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \psi(p) \partial_p \psi_\xi^{ML*}(p). \end{aligned} \quad (5.134)$$

É esperado que as funções de onda nos extremos $\pm 1/2\alpha$ vão a zero para que as funções sejam de quadrado integráveis. Portanto, o primeiro termo é nulo e na integral do segundo termo é substituída os estados de máxima localização do GUP-ADV,

$$\begin{aligned} \hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= -i\hbar \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \psi(p) \partial_p \psi_\xi^{ML*}(p) = -i\hbar 2\sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3\sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3\sqrt{3}} \right)^{-1/2} \\ &\times \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \psi(p) \partial_p \left\{ (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \right. \\ &\times \left. \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.135)$$

e é feita a derivação desses estados,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= -i\hbar 2 \sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1/2} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \psi(p) \left[-\frac{1}{2}(-2\alpha + 8\alpha^2 p) \right. \\
&\times \left. \frac{1}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\hbar\alpha} \right) \frac{\sqrt{3}\alpha}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)} (1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{-1/2} \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\
&= i\hbar 2 \sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1/2} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} dp \psi(p) \frac{(-\alpha + 4\alpha^2 p)}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{3/2}} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] + i\hbar 2 \sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1/2} \\
&\times \alpha \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{3/2}} \psi(p) \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \tag{5.136}
\end{aligned}$$

Com o propósito de visualizar melhor a ação do operador posição, a equação acima será escrita em termos das funções de onda de quase posição,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= -i\hbar\alpha\psi_{qp}(\xi) + 4i\hbar\alpha^2 2 \sqrt{\alpha} \left(-e^{-\pi/3 \sqrt{3}} + \frac{5}{3} e^{2\pi/3 \sqrt{3}} \right)^{-1/2} \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)^{3/2}} \\
&\times \psi(p)p \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \arctan \left(\frac{4\alpha p - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] + i\hbar\alpha \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \psi_{qp}(\xi). \tag{5.137}
\end{aligned}$$

O segundo termo da equação acima tem um momento p na integral. Comparando novamente com a função de quase posição, esse momento surge se for feita derivação construída na equação (5.132). Portanto, é possível escrever toda equação acima em termos de $\psi_{qp}(\xi)$,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= -i\hbar\alpha\psi_{qp}(\xi) + 4i\hbar\alpha^2 \frac{1}{4\alpha} \left[1 + \sqrt{3} \tan(-i\alpha\hbar\partial_\xi) \right] \psi_{qp}(\xi) + i\hbar\alpha \left(1 - \frac{i\xi}{\alpha\hbar} \right) \psi_{qp}(\xi) \\
&= -i\hbar\alpha\psi_{qp}(\xi) + i\hbar\alpha \left[1 + \sqrt{3} \tan(-i\alpha\hbar\partial_\xi) \right] \psi_{qp}(\xi) + i\hbar\alpha\psi_{qp}(\xi) + \xi\psi_{qp}(\xi). \tag{5.138}
\end{aligned}$$

Portanto, a ação do operador posição na representação do espaço de quase posição é dada por

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \left\{ i\hbar\alpha \left[1 + \sqrt{3} \tan(-i\alpha\hbar\partial_\xi) \right] + \xi \right\} \psi_{qp}(\xi). \tag{5.139}$$

Finalizando, então, a análise funcional dos espaços de representações do GUP-ADV.

Capítulo 6

Análise Funcional dos Espaços de Representações para o Pedram-GUP

No capítulo 3, foi feito o estudo sobre o comprimento mínimo e como ele surge como uma incerteza mínima da posição. Toda sua análise funcional foi realizada a partir do GUP-KMM, proposto pelos físicos A. Kempf, G. Mangano e R. B. Mann. Na última seção do capítulo, foi estudada uma representação proposta por Pouria Pedram¹ a fim de contornar algumas complicações da representação de A. Kempf et al. Em 2012, esse mesmo físico propôs um novo GUP em todas as ordens do parâmetro do comprimento mínimo β [30], que concorda com a física do GUP-KMM e do GUP-Nouicer (estudado no capítulo 4) para a ordem principal do parâmetro β e também resolve alguns problemas do GUP-ADV (estudado no capítulo 5).

Esse novo GUP é o mais simples possível em que é implementado um momento canônico máximo de uma partícula teste. O GUP-Pedram tem como aspecto

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{(1 - \beta(\Delta\hat{P})^2 - \gamma)} \right), \quad (6.1)$$

sendo $\gamma = \beta\langle\hat{P}\rangle^2$. Sucederá, então, nas próximas seções a análise funcional do GUP com momento máximo.

6.1 Relação de Incerteza Modificada

A relação de comutação modificada que está associada ao GUP-Pedram tem a forma

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \frac{i\hbar}{(1 - \beta\hat{P}^2)}. \quad (6.2)$$

¹Pedram é um físico teórico, atualmente professor do Departamento de Física, Ciência e Ramo de Pesquisa na Universidade Islâmica Azad, Irã. Suas áreas de interesse são Gravidade Quântica, Cosmologia Quântica e Informações Quânticas [29].

A confirmação da correspondência entre essa relação de comutação e o GUP-Pedram é vista através da equação

$$\begin{aligned}\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} &\geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle| \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{i\hbar}{(1 - \beta\hat{P}^2)} \right\rangle \right| \geq \frac{1}{2} \left| \frac{i\hbar}{(1 - \beta\langle\hat{P}^2\rangle)} \right| \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{(1 - \beta\langle\hat{P}^2\rangle)} \right).\end{aligned}\quad (6.3)$$

O GUP-Pedram pode ser escrito em termos da incerteza do momento, basta substituir o termo do valor médio de um operador ao quadrado pela soma da incerteza do momento ao quadrado com o valor médio ao quadrado do operador momento,

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{(1 - \beta(\Delta\hat{P})^2 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2)} \right).\quad (6.4)$$

A equação acima tem uma incerteza mínima da posição que corresponde ao valor do comprimento mínimo para esse GUP. Para determiná-lo, primeiro é preciso isolar a incerteza da posição da equação (6.4),

$$\Delta\hat{X} \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{(\Delta\hat{P} - \beta(\Delta\hat{P})^3 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2\Delta\hat{P})} \right) = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{[(1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2)\Delta\hat{P} - \beta(\Delta\hat{P})^3]} \right].\quad (6.5)$$

Escrevendo $\Delta\hat{X}$ como uma função f dependente de $\Delta\hat{P}$,

$$f(k) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{(ak - bk^3)} \right); \quad a \equiv 1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2, b \equiv \beta, k \equiv \Delta\hat{P}.\quad (6.6)$$

O ponto de extremo é encontrado ao efetuar a derivada primeira,

$$f'(k) = \frac{\hbar}{2} \frac{d}{dk} (ak - bk^3)^{-1} = \frac{\hbar}{2} \left[-(ak - bk^3)^{-2} (a - 3bk^2) \right] = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{3bk^2 - a}{(ak - bk^3)^2} \right],\quad (6.7)$$

e ela ser igualada a zero para um $k = k_0$,

$$\frac{\hbar}{2} \left[\frac{3bk_0^2 - a}{(ak_0 - bk_0^3)^2} \right] = 0.\quad (6.8)$$

Para que a função seja definida o denominador não pode ser nulo, então $(ak_0 - bk_0^3)^2 \neq 0$ e só é possível que o numerador seja igual a zero,

$$3bk_0^2 - a = 0 \longrightarrow k_0^2 = \frac{a}{3b} \implies k_0 = \pm \sqrt{\frac{a}{3b}}.\quad (6.9)$$

O ponto crítico que minimiza a função é o k_0 positivo da equação acima. Logo, a incerteza do momento que atenua a incerteza da posição é

$$\Delta\hat{P}' = \sqrt{\frac{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle}{3\beta}}, \quad (6.10)$$

que corresponde a

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{X})_{min} &\geq \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{[(1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2)\Delta\hat{P}' - \beta(\Delta\hat{P}')^3]} \right] \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left[(1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2) \sqrt{\frac{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{3\beta}} - \beta \left(\sqrt{\frac{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{3\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{3\beta}} \left[(1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2) - \beta \left(\frac{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{3\beta} \right) \right] \right\}^{-1} \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left[\sqrt{\frac{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{3\beta}} (1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \right]^{-1} \geq \frac{\hbar}{2} \left[\frac{2}{3} (1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2) \sqrt{\frac{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{3\beta}} \right]^{-1} \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left[\frac{3}{2(1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2)} \frac{\sqrt{3\beta}}{\sqrt{1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2}} \right] \geq \frac{3\sqrt{3}}{4} \hbar \sqrt{\beta} \frac{1}{(1 - \beta\langle\hat{P}\rangle^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Fazendo o estudo no limite da região permitida, têm-se que $\langle\hat{P}\rangle = 0$. Então, a incerteza mínima da posição corresponde ao comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0$, que é igual a

$$\Delta\hat{X}_0 \geq \frac{3\sqrt{3}}{4} \hbar \sqrt{\beta}, \quad (6.12)$$

e está associado a incerteza crítica do momento

$$(\Delta\hat{P})_c = \frac{1}{\sqrt{3\beta}}. \quad (6.13)$$

6.2 Representação no Espaço dos Momentos

Como visto, a incerteza mínima da posição é maior do que zero, então os estados de posição são não físicos, tornando impraticável o estudo no espaço das posições. A construção do espaço de Hilbert é então feita no espaço dos momentos, já que não há incerteza mínima do momento. É necessário a escolha de uma representação que cumpra a relação de comutação modificada associada ao GUP-Pedram dada na equação (6.2). Os operadores momento e posição na representação do espaço dos momentos, atuando numa função de onda é dada

por

$$\hat{P} \cdot \psi(p) = p\psi(p), \quad (6.14)$$

$$\hat{X} \cdot \psi(p) = \frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)} \partial_p \psi(p). \quad (6.15)$$

A verificação dessa escolha é feita ao atuar a relação de comutação modificada entre o operador posição e momento numa função de onda arbitrária,

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}] \cdot \psi(p) &= \hat{X}\hat{P} \cdot \psi(p) - \hat{P}\hat{X} \cdot \psi(p) = \langle p|\hat{X}\hat{P}|\psi\rangle - \langle p|\hat{P}\hat{X}|\psi\rangle \\ &= \langle p|\hat{P}(\hat{X}|\psi\rangle) - \langle p|\hat{X}(\hat{P}|\psi\rangle) = \langle p|\hat{P}\left(\frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}\partial_p|\psi\rangle\right) - \langle p|\hat{X}(p|\psi\rangle) \\ &= \langle p|\frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}\partial_p|\hat{P}|\psi\rangle - \langle p|p(\hat{X}|\psi\rangle) \\ &= \langle p|\frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}\partial_p(p|\psi\rangle) - \langle p|p\left(\frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}\partial_p|\psi\rangle\right) \\ &= \frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}\partial_p(p\langle p|\psi\rangle) - \frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}p\partial_p\langle p|\psi\rangle \\ &= \frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}(\partial_p(p\psi(p)) - p\partial_p\psi(p)) = \frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}\psi(p) \\ &= \frac{i\hbar}{(1-\beta\hat{P}^2)}\psi(p), \end{aligned} \quad (6.16)$$

e a escolha da representação é condizente com a relação de comutação.

Os operadores posição e momento são simétricos por definição, assim

$$\langle \psi|\hat{P}^\dagger|\phi\rangle = \langle \psi|\hat{P}|\phi\rangle, \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}; \quad (6.17)$$

$$\langle \psi|\hat{X}^\dagger|\phi\rangle = \langle \psi|\hat{X}|\phi\rangle, \quad \hat{X}^\dagger = \hat{X}. \quad (6.18)$$

Além da simetria desses operadores gerar autovalores reais, a definição do produto interno se dá pela análise dessas simetrias, especificamente pela do operador posição, já é a partir dela que o elemento de volume do produto interno é definido. Iniciando pela simetria da posição, o lado direito da equação (6.18) é igual a

$$\begin{aligned} \langle \psi|\hat{X}|\phi\rangle &= \langle \psi|\hat{X}\phi\rangle = \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp V(p)\psi(p)^* \left[\frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)}\partial_p \right] \phi(p) \\ &= i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp V(p)\psi^*(p) \frac{1}{(1-\beta p^2)} \partial_p \phi(p). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Utilizando a regra do produto na integral acima,

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \partial_p \left[V(p) \psi^*(p) \frac{1}{(1-\beta p^2)} \phi(p) \right] \\
&- i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp V(p) \frac{1}{(1-\beta p^2)} \phi(p) \partial_p \psi^*(p) \\
&- i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \psi^*(p) \frac{1}{(1-\beta p^2)} \phi(p) \partial_p V(p) \\
&- i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp V(p) \psi^*(p) \phi(p) \partial_p \frac{1}{(1-\beta p^2)}. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

A derivada total precisa ser nula nos limites de integração para que a integral seja de quadrado integrável. O segundo termo é a ação do operador \hat{X}^\dagger atuando em $\psi(p)$. Assim sendo, a equação (6.20) toma a forma

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp V(p) \left[\frac{i\hbar}{(1-\beta p^2)} \partial_p \psi(p) \right]^* \phi(p) \\
&- i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \left[\frac{1}{(1-\beta p^2)} \partial_p V(p) + \frac{2\beta p}{(1-\beta p^2)} V(p) \right] \psi^*(p) \phi(p). \tag{6.21}
\end{aligned}$$

A simetria do operador surge se o integrando envolvendo o elemento de volume for nulo,

$$\left[\frac{1}{(1-\beta p^2)} \partial_p V(p) + \frac{2\beta p}{(1-\beta p^2)} V(p) \right] = 0. \tag{6.22}$$

Reorganizando os termos, chega-se na equação diferencial,

$$\frac{1}{(1-\beta p^2)} \frac{d}{dp} V(p) = -\frac{2\beta p}{(1-\beta p^2)^2} V(p) \longrightarrow \frac{dV(p)}{V(p)} = -\frac{2\beta p}{(1-\beta p^2)} dp. \tag{6.23}$$

Integrando em ambos os lados, utilizando o método da substituição $w = 1 - \beta p^2$, $dw = -2\beta p dp$,

$$\int_0^p \frac{dV(p)}{V(p)} = \int \frac{du}{u} \longrightarrow \ln\left(\frac{V(p)}{V_0}\right) = \ln(u) = \ln(1 - \beta p^2). \tag{6.24}$$

Aplicando exponencial em ambos os lados,

$$V(p) = V_0(1 - \beta p^2). \tag{6.25}$$

Tomando a constante V_0 como igual a 1, o elemento de volume é igual

$$dpV(p) = (1 - \beta p^2) dp. \tag{6.26}$$

Portanto, a equação (6.21) toma a forma

$$\langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \left[\frac{i\hbar}{(1 - \beta p^2)} \partial_p \psi(p) \right]^* \phi(p) = \langle \psi | \hat{X} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{X}^\dagger | \phi \rangle, \quad (6.27)$$

o que mostra a simetria no operador posição.

A simetria do operador momento é bem simples de ser vista e mostrará que não há restrições para a escolha da constante ser unitária. O lado direito da equação (6.17) é escrito como

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P} \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp V(p) \psi^*(p) p \phi(p), \quad (6.28)$$

sendo $dpV(p)$ o elemento de volume determinado em (6.26).

Se o momento ordinário $p \in \mathcal{R}$, implica nele ser igual ao seu conjugado complexo. Então, é possível escrever a equação acima como

$$\langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) [\psi(p)p]^* \phi(p) = \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{P}^\dagger | \phi \rangle, \quad (6.29)$$

comprovando a simetria do operador momento e como a escolha da constante não impede a ocorrência de simetria.

O produto interno correspondente ao GUP-Pedram é então definido como

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi^*(p) \phi(p). \quad (6.30)$$

Note que há uma descontinuidade para $p = \pm 1/\sqrt{\beta}$, de forma que o momento não pode ultrapassar esse limite.

Utilizando a definição do produto interno, será definida a relação de totalidade,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi^*(p) \phi(p) = \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \langle \psi | p \rangle \langle p | \phi \rangle \\ &= \langle \psi | \left[\int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) |p\rangle \langle p| \right] | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Logo,

$$\int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) |p\rangle \langle p| = I, \quad (6.32)$$

sendo I a matriz identidade.

Por último, a relação de ortonormalização é obtida relacionando a equação abaixo

$$\begin{aligned}
\psi(p) &= \langle p|\psi\rangle = \langle p|\int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp' (1 - \beta p'^2)|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle \\
&= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp' (1 - \beta p'^2)\langle p|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle \\
&= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp' (1 - \beta p'^2)\langle p|p'\rangle\psi(p'), \tag{6.33}
\end{aligned}$$

com uma outra definição da Delta de Dirac,

$$\psi(p) = \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \delta(p - p')\psi(p'). \tag{6.34}$$

Assim, ambas equações são iguais se os integrando também forem iguais. Portanto,

$$\delta(p - p') = \langle p|p'\rangle(1 + \beta p^2) \implies \langle p|p'\rangle = \frac{\delta(p - p')}{(1 - \beta p^2)}. \tag{6.35}$$

e a relação de ortonormalização associada ao GUP-Pedram é determinada e o espaço de Hilbert construído.

6.3 Estados Formais do Operador Posição

A análise funcional dos estados formais do operador posição no espaço dos momentos se inicia com a determinação deles. A partir da equação de autovalor, sua solução gera as autofunções de posição. Assim, substituindo a ação (6.15) na equação de autovalor abaixo

$$\hat{X} \cdot \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p), \tag{6.36}$$

e reorganizando os termos da equação, encontra-se uma equação diferencial

$$\frac{i\hbar}{(1 - \beta p^2)} \partial_p \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda(p) \longrightarrow \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \frac{(1 - \beta p^2)}{i\hbar} \lambda dp. \tag{6.37}$$

Integrando de ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi_\lambda(p)}{\psi_\lambda(p)} = \frac{-i\lambda}{\hbar} \int dp (1 - \beta p^2) \longrightarrow \ln \psi_\lambda(p) = \frac{-i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) + C. \tag{6.38}$$

Aplicando a exponencial,

$$\psi_\lambda(p) = \exp \left[\frac{-i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) + C \right] = N \exp \left[\frac{-i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right], \tag{6.39}$$

na qual $e^C = N$.

Pela condição de normalização, o fator N é determinado ao efetuar o produto interno da função de onda com ela própria,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_\lambda^*(p) \psi_\lambda(p) \\
&= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) N^* \exp \left[\frac{i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] N \exp \left[\frac{-i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] \\
&= N^* N \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) = N^2 \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \Big|_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} \\
&= N^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta}{3} \frac{1}{\beta \sqrt{\beta}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) + \frac{\beta}{3} \left(-\frac{1}{\beta \sqrt{\beta}} \right) \right] \\
&= N^2 \left(\frac{2}{\sqrt{\beta}} - \frac{2\beta}{3} \frac{1}{\beta \sqrt{\beta}} \right) = N^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{2}{3\sqrt{\beta}} \right) = N^2 \frac{4}{3\sqrt{\beta}}. \tag{6.40}
\end{aligned}$$

O fator é dado por

$$N^2 = \frac{3\sqrt{\beta}}{4} \implies N = \frac{\sqrt{3\sqrt{\beta}}}{2}, \tag{6.41}$$

e a autofunção formal do operador posição normalizada tem o formato final igual a

$$\psi_\lambda(p) = \frac{\sqrt{3\sqrt{\beta}}}{2} \exp \left[\frac{-i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right]. \tag{6.42}$$

As autofunções formais foram determinadas, agora basta fazer a análise da energia associada a elas e sobre sua ortogonalidade. Iniciando pela energia,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_\lambda^*(p) \frac{p^2}{2m} \psi_\lambda(p) \\
&= \frac{3\sqrt{\beta}}{4} \frac{1}{2m} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[\frac{i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] p^2 \exp \left[\frac{-i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] \\
&= \frac{3\sqrt{\beta}}{8m} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (p^2 - \beta p^4) = \frac{3\sqrt{\beta}}{8m} \left(\frac{1}{3} p^3 - \frac{\beta}{5} p^5 \right) \Big|_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} \\
&= \frac{3\sqrt{\beta}}{8m} \left(\frac{2}{3\beta \sqrt{\beta}} - \frac{2\beta}{5\beta^2 \sqrt{\beta}} \right) = \frac{3}{8m} \left(\frac{2}{3\beta} - \frac{2}{5\beta} \right) = \frac{3}{8m} \left(\frac{4}{15\beta} \right) = \frac{1}{10m\beta}. \tag{6.43}
\end{aligned}$$

E por último o estudo sobre a ortogonalização,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_{\lambda'}^*(p) \psi_{\lambda}(p) \\
&= \frac{3\sqrt{\beta}}{4} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp\left[\frac{i\lambda'}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3\right)\right] \exp\left[\frac{-i\lambda}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3\right)\right] \\
&= \frac{3\sqrt{\beta}}{4} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp\left[\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3\right)\right] \\
&= \frac{3\sqrt{\beta}}{4} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp\left[a \left(p - \frac{\beta}{3} p^3\right)\right], \quad a \equiv -\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar}. \quad (6.44)
\end{aligned}$$

Para resolver essa integral, basta utilizar o método da substituição, $w = p - \beta p^3/3$, $dw = (1 - \beta p^2)dp$,

$$\begin{aligned}
(I_1) &= \int dw e^{aw} = \frac{1}{a} e^{aw} = \frac{1}{a} \exp\left[a \left(p - \frac{\beta}{3} p^3\right)\right] \Big|_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} \\
&= \frac{1}{a} \left\{ \exp\left[a \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta}{3\beta\sqrt{\beta}}\right)\right] - \exp\left[-a \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta}{3\beta\sqrt{\beta}}\right)\right] \right\}. \quad (6.45)
\end{aligned}$$

Substituindo novamente a constante a ,

$$\begin{aligned}
(I_1) &= -\frac{\hbar}{i(\lambda - \lambda')} \left[\exp\left(-\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar} \frac{2}{3\sqrt{\beta}}\right) - \exp\left(\frac{i(\lambda - \lambda')}{\hbar} \frac{2}{3\sqrt{\beta}}\right) \right] \\
&= \frac{\hbar}{i(\lambda - \lambda')} \left[2i \sin\left(\frac{2(\lambda - \lambda')}{3\hbar\sqrt{\beta}}\right) \right] = \frac{2\hbar}{(\lambda - \lambda')} \sin\left(\frac{2(\lambda - \lambda')}{3\hbar\sqrt{\beta}}\right). \quad (6.46)
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado da integral na equação (6.44),

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\lambda'} | \psi_{\lambda} \rangle &= \frac{3\sqrt{\beta}}{4} \left[\frac{2\hbar}{(\lambda - \lambda')} \sin\left(\frac{2(\lambda - \lambda')}{3\hbar\sqrt{\beta}}\right) \right] \\
&= \frac{3\hbar\sqrt{\beta}}{2(\lambda - \lambda')} \sin\left(\frac{2(\lambda - \lambda')}{3\hbar\sqrt{\beta}}\right). \quad (6.47)
\end{aligned}$$

Portanto, as autofunções formais do operador posição não são ortogonais.

6.4 Os estados de máxima localização

Para obter a informação física da posição, são definidos os estados de máxima localização, aqueles que proporcionarão a melhor posição possível considerando que a sua incerteza da posição seja o comprimento mínimo. Portanto, por não ter um $\Delta\hat{X}$ nulo, não é possível determinar com total exatidão a localização de uma partícula, apenas as flutuações em torno

de um ponto qualquer ξ . A definição matemática desses estados maximamente localizados é $\langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{X} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \xi$. Para determinar sua forma, é utilizada a positividade da norma no limite da região permitida, sendo projetada no autoestado do operador momento,

$$\langle p | \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta \hat{P})^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) | \psi \rangle = 0. \quad (6.48)$$

Na relação de comutação, será utilizada a relação aproximada $[\hat{X}, \hat{P}] \simeq i\hbar(1 + \beta(\Delta \hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2)$, por $[\hat{X}, \hat{P}]$ depender de $\langle \hat{P} \rangle^4$, $\langle \hat{P} \rangle^6$, entre outros, e essas quantidades não puderem ser calculadas antes de especificar $|\psi\rangle$. Logo,

$$\left(\frac{i\hbar}{1 - \beta p^2} \partial_p - \langle \hat{X} \rangle + i\hbar \left(\frac{1 + \beta(\Delta \hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta \hat{P})^2} \right) (p - \langle \hat{P} \rangle) \right) \psi(p) \simeq 0. \quad (6.49)$$

Reorganizando os termos,

$$\frac{d\psi(p)}{\psi(p)} \simeq (1 - \beta p^2) \left[\frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar} + \frac{1 + \beta(\Delta \hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta \hat{P})^2} (\langle \hat{P} \rangle - p) \right] dp. \quad (6.50)$$

Integrando de ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi(p)}{\psi(p)} \simeq \int dp (1 - \beta p^2) \left(\frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) - a \int dp (1 - \beta p^2) p, \quad (6.51)$$

na qual $a \equiv (1 + \beta(\Delta \hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2)/2(\Delta \hat{P})^2$.

O resultado da integração é

$$\ln \psi(p) \simeq \left(\frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - a \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{\beta}{4} p^4 \right) + C. \quad (6.52)$$

Aplicando exponencial de ambos os lados,

$$\begin{aligned} \psi(p) &\simeq N \exp \left[\left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + a\langle \hat{P} \rangle \right) \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] \exp \left[-a \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{\beta}{4} p^4 \right) \right] \\ &\simeq N \exp \left[\left(-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + \frac{1 + \beta(\Delta \hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta \hat{P})^2} \langle \hat{P} \rangle \right) \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{1 + \beta(\Delta \hat{P})^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta \hat{P})^2} \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{\beta}{4} p^4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Os estados de máxima localização são definidos para as condições $\langle \hat{P} \rangle = 0$, $\langle \hat{X} \rangle = \xi$ e que a incerteza crítica do momento seja a crítica $\Delta \hat{P} = 1/\sqrt{3\beta}$,

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}^{ML}(p) &\simeq N \exp \left[-\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] \exp \left[-\frac{1 + \beta(1/3\beta)}{2(1/3\beta)} \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{\beta}{4} p^4 \right) \right] \\ &\simeq N \exp \left[-\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Efetuada um produto interno de $\psi_\xi^{ML}(p)$ consigo, encontra-se o fator de normalização N ,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\xi^{ML} | \psi_\xi^{ML} \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_\xi^{ML*}(p) \psi_\xi^{ML}(p) \\
&= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) N^* \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \\
&\times N \exp \left[-\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \\
&= N^2 \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left(-2\beta p^2 + \beta^2 p^4 \right). \tag{6.55}
\end{aligned}$$

Essa integral só pode ser resolvida numericamente. Para deixá-la adimensional e facilitar o cálculo numérico, é feita a substituição $w = \sqrt{\beta}p$, $dw = \sqrt{\beta}dp$. Assim, a integral toma a forma

$$(I_2) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-1}^1 dw (1 - w^2) \exp(-2w^2 + w^4) \approx \frac{1,01234}{\sqrt{\beta}}, \tag{6.56}$$

que está de acordo com o resultado da referência [30].

Substituindo na equação (6.55),

$$\langle \psi_\xi^{ML} | \psi_\xi^{ML} \rangle \approx N^2 \frac{1,01234}{\sqrt{\beta}} = 1. \tag{6.57}$$

O fator de normalização é então igual a

$$N \approx \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}}. \tag{6.58}$$

O estado de máxima localização normalizado, aproximadamente, é

$$\psi_\xi^{ML}(p) \approx \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \exp \left[-\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right]. \tag{6.59}$$

Iniciando o estudo da energia associada aos estados de máxima localização, tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_{\xi}^{ML*}(p) \frac{p^2}{2m} \psi_{\xi}^{ML}(p) \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{1,01234} \frac{1}{2m} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] p^2 \\
&\times \exp \left[-\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{1,01234} \frac{1}{2m} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) p^2 \exp(-2\beta p^2 + \beta^2 p^4). \tag{6.60}
\end{aligned}$$

Tornando a integral acima adimensional como feita com a integral (6.56),

$$(I_3) = \frac{1}{\beta \sqrt{\beta}} \int_{-1}^1 dw (1 - w^2) w^2 \exp(-2w^2 + w^4) \approx \frac{0,14871}{\beta \sqrt{\beta}}. \tag{6.61}$$

Substituindo esse resultado em (6.60),

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle \approx \frac{\sqrt{\beta}}{1,0123} \frac{1}{2m} \frac{0,14871}{\beta \sqrt{\beta}} \approx \frac{0,14871}{2,02468} \frac{1}{\beta m} \approx \frac{0,73449}{10m\beta}, \tag{6.62}$$

que também condiz com o resultado da referência [30].

Analisando a ortogonalização desses estados,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_{\xi'}^{ML*}(p) \psi_{\xi}^{ML}(p) \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{1,0123} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[\frac{i\xi'}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{1,0123} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[-\frac{i(\xi - \xi')}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta (2p^2 - \beta p^2) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\beta}}{1,0123} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[a \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta (2p^2 - \beta p^2) \right], \tag{6.63}
\end{aligned}$$

na qual $a \equiv -i(\xi - \xi')/\hbar$.

A integral é resolvida numericamente resultando em²,

$$(I_3) = \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[a \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta (2p^2 - \beta p^2) \right] \neq 0, \quad (6.64)$$

para todo a . O que mostra que os estados de máxima localização não são mutuamente ortogonais.

6.5 Representação dos Operadores no Espaço de Quase Posição

Para determinar a ação dos operadores posição e momento no espaço de quase posição, basta atua cada operador num estado qualquer de quase posição. Primeiro é preciso determinar a função de onda na representação de quase posição,

$$\begin{aligned} \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_{\xi}^{ML*}(p) \psi(p) \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \psi(p). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Agora, basta atuar o momento na função de quase posição,

$$\begin{aligned} \hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_{\xi}^{ML*}(p) p \psi(p) \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \\ &\quad \times \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] p \psi(p). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Para que surja um termo de momento na função de onda cima, basta derivar a exponencial com relação a ξ , e na conta será considerado apenas o expoente contendo essa variável. Portanto,

$$\begin{aligned} \partial_{\xi} \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] &= \frac{i}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] \\ \Rightarrow -i\hbar \partial_{\xi} \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right] &= \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.67)$$

²Da mesma forma como ocorreu para a integral (4.85), não foi possível obter a integral para qualquer valor a usando o Mathematica, então é possível mostrar que (6.64) é diferente de zero para os valores de a iguais a 1.0, 2.0 e 3.1.

Para que seja possível aparecer um tempo linear do momento, é preciso adicionar mais um termo de derivada terceira com relação a ξ ,

$$\begin{aligned}
& -i\hbar\partial_\xi \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] + i\hbar^3\partial_\xi^3 \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] = \left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right) \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \\
& + i\hbar^3\partial_\xi^2 \left[\frac{i}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] = \left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right) \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \\
& + i\hbar^3\partial_\xi \left[\frac{i}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right) \frac{i}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right) \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right]\right] \\
& = \left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right) \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] + i\hbar^3 \left[\frac{i^3}{\hbar^3}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)^3 \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right]\right] \\
& = \left\{\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right) + i\hbar^3 \left[-\frac{i}{\hbar^3}\left(p^3 - \frac{\beta}{3}3p^5 + \frac{\beta^2}{9}3p^7 - \frac{\beta^3}{27}p^9\right)\right]\right\} \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right]. \tag{6.68}
\end{aligned}$$

Desconsiderando termos de ordem β^2 para cima,

$$\begin{aligned}
& -i\hbar\partial_\xi \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] + i\hbar^3\partial_\xi^3 \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \\
& \simeq \left(p - \frac{\beta}{3}p^3 + p^3 - \beta p^5\right) \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \\
\Rightarrow & -i\hbar\partial_\xi \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] + \frac{i\hbar^3}{3}\beta\partial_\xi^3 \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \\
& \simeq \left(p - \frac{\beta}{3}p^3 + \frac{\beta}{3}p^3 - \frac{\beta^2}{3}p^5\right) \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right] \simeq p \exp\left[\frac{i\xi}{\hbar}\left(p - \frac{\beta}{3}p^3\right)\right]. \tag{6.69}
\end{aligned}$$

Portanto, a ação do operador momento no espaço de quase-posição é

$$\hat{P} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \left(-i\hbar\partial_\xi + \frac{i\hbar^3}{3}\beta\partial_\xi^3\right) \psi_{qp}(\xi). \tag{6.70}$$

Para o operador posição,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi_\xi^{ML*}(p) \frac{i\hbar}{1 - \beta p^2} \partial_p \psi(p) \\
&= i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \psi_\xi^{ML*}(p) \partial_p \psi(p) \\
&= i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \left[\partial_p (\psi_\xi^{ML*}(p) \psi(p)) - \psi(p) \partial_p \psi_\xi^{ML*}(p)\right] \\
&= i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \partial_p (\psi_\xi^{ML*}(p) \psi(p)) - i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \psi(p) \partial_p \psi_\xi^{ML*}(p). \tag{6.71}
\end{aligned}$$

Para a integral ser de quadrado integrável, a derivada total da primeira equação precisa se anular nos limites. Logo,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= -i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \psi(p) \partial_p \psi_{\xi}^{ML*}(p) \\
&= -i\hbar \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \psi(p) \partial_p \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \right\} \\
&= -i\hbar \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp \psi(p) \left[\frac{i\xi}{\hbar} (1 - \beta p^2) - \beta (2p - 2\beta p^3) \right] \\
&\times \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \\
&= \xi \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi(p) \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right] \\
&+ 2i\beta\hbar \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi(p) p \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Comparando a equação acima com a função de onda no espaço de quase posição, ela surge no primeiro termo da equação acima,

$$\begin{aligned}
\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) &= \xi \psi_{qp}(\xi) + 2i\beta\hbar \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{1,01234}} \int_{-1/\sqrt{\beta}}^{1/\sqrt{\beta}} dp (1 - \beta p^2) \psi(p) p \\
&\times \exp \left[\frac{i\xi}{\hbar} \left(p - \frac{\beta}{3} p^3 \right) - \beta \left(p^2 - \frac{\beta}{2} p^2 \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Para que seja possível escrever a segunda parte da equação em termos de $\psi_{qp}(\xi)$, é preciso que surja um momento ordinário na função de onda no espaço de quase-posição. Essa conta já foi realizada anteriormente em (6.69). Então,

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \xi \psi_{qp}(\xi) + 2i\beta\hbar \left(-i\hbar \partial_{\xi} e^a + \frac{i\hbar^3}{3} \beta \partial_{\xi}^3 \right) \psi_{qp}(\xi). \tag{6.74}$$

Portanto, a ação do operador posição no espaço de quase-posição é

$$\hat{X} \cdot \psi_{qp}(\xi) = \left[\xi + 2i\beta\hbar \left(-i\hbar \partial_{\xi} e^a + \frac{i\hbar^3}{3} \beta \partial_{\xi}^3 \right) \right] \psi_{qp}(\xi). \tag{6.75}$$

Assim, a análise funcional dos espaços de representações para o GUP-Pedram é finalizada.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta dissertação foi realizada a análise funcional dos espaços de representações para diferentes GUPs, introduzindo um cenário de comprimento mínimo, que tem fortes implicações tanto para a Teoria Quântica de Campos como para a Cosmologia. O interesse pelo estudo de teorias na escala de comprimento mínimo teve acentuado aumento com o advento de modelos de grandes dimensões extras, que elevou consideravelmente a escala de comprimento mínimo, permitindo a busca por evidências experimentais de sua existência através de tecnologias atuais. O valor de 125 GeV encontrado para a massa de um bóson de Higgs é muito especial, pois nesse valor as auto interações de Higgs permanecem constantes quando se vai a escalas muito pequenas. Isso pode indicar a existência de uma nova escala entre a escala de TeV ($10^{-18}m$), a escala que a tecnologia atual tem capacidade de sondar, e a escala de Planck, 10^{16} TeV ($10^{-35}m$).

A introdução do estudo do comprimento mínimo foi feito a partir do Princípio de Incerteza Generalizado (GUP), com quatro propostas diferentes para esses GUPs. Através do GUP-KMM, o primeiro a ser proposto, é feita uma análise funcional detalhada, realizando uma comparação das modificações com relação a Mecânica Quântica Ordinária. Prosseguindo para o GUP-Nouicer, GUP-ADV e por último o GUP-Pedram. Para cada um deles foram escritas as relações de comutação modificadas associadas, construído o espaço de Hilbert através da representação do espaço dos momentos, já que a presença de um comprimento mínimo $\Delta\hat{X}_0 > 0$ torna inviável a representação no espaço das posições. Foram definidos o produto interno, relação de totalidade e relação de ortogonalização para cada GUP. A análise formal de posição também foi feita, calculando as autofunções e depois definidos os estados de máxima localização. Para ambas foi feito o estudo da energia e ortogonalidade. Por último, a representação do espaço de quase posição é feita projetando vetores de estado nos estados de máxima localização para recuperar a informação da posição. Portanto, foi realizada uma descrição clara e objetiva da análise funcional das representações para cada GUP proposto. Isso permitirá que outros pesquisadores utilizem os resultados desta dissertação em futuros trabalhos.

Uma forma de expandir essa pesquisa seria, agora que a análise funcional dos quatro

GUPs está completa, aplicar cada um deles a diferentes problemas físicos e comparar os resultados finais. Outro ponto importante seria uma análise considerando além da incerteza mínima da posição também uma incerteza mínima do momento, que para tal seria necessário recorrer a uma representação espacial generalizada de Bargmann-Fock, que nem uma representação do espaço das posições nem dos momentos seria viável.

Referências Bibliográficas

- [1] Kane, G. *Modern Elementary Particle Physics: The Fundamental Particles and Forces* (Addison-Wesley Publ. Company, 1993).
- [2] Bettini, A. *Introduction to Elementary Particle* (Cambridge University Press, 2014).
- [3] Collab., A. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Phys. Lett. B* **716**, 1–29.
- [4] Collb., C. Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lhc. *Phys. Lett. B* **716**, 30–61.
- [5] Gordon kane. <https://lsa.umich.edu/physics/people/emeritus/gkane.html> (2023).
- [6] Kane, G. The dawn of physics beyond the standard model. *Scientific American* **288**, 58.
- [7] Moreira, M. A. O modelo padrão da física de partículas. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 1306.
- [8] Pimenta, J. J. M., Belussi, L. F. B., Natti, E. R. T. & Natti, P. L. O bóson de higgs. *Rev. Bras. Ensino Fís.* **35**, 1–14 (2013).
- [9] Abdalla, E. Teoria quântica da gravitação: Cordas e teoria m. *Rev. Bras. Ensino Fís.* **27**, 147–155 (2005).
- [10] Pedram, P. New approach to non perturbative quantum mechanics with minimal length uncertainty. *Physical Review D* **85**, 024016 (2012).
- [11] Pedram, P. On the boundary conditions in deformed quantum mechanics with minimal length uncertainty. *Advances in High Energy Physics* **2013**, 1687–7357 (2013).
- [12] Kempf, A., Mangano, G. & Mann, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D* **52**, 1108.
- [13] Zettili, N. *Quantum mechanics: concepts and applications* (American Association of Physics Teachers, 2009).

- [14] Kempf, A. Archim kempf. <https://ieeexplore.ieee.org/author/37671436200> (2023).
- [15] Giampiero mangano. <http://www.aracneeditrice.it/index.php/autori.html?auth-id=414459> (2021).
- [16] Robert mann. <https://uwaterloo.ca/physics-astronomy/profile/rbmann>.
- [17] Hossenfelder, S. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Rev. Relativity* **16**, 90.
- [18] Khireddine, N. Nouicer khireddine. <https://www.researchgate.net/profile/Nouicer-Khireddine> (2023).
- [19] Nouicer, K. Black hole thermodynamics to all orders in the planck length in extra dimension. *Classical and Quantum Gravity* **24**, 5917 (2007).
- [20] Sabri, Y. & Nouicer, K. Phase transitions of a gup-corrected schwarzschild black hole within isothermal cavities. *Classical and Quantum Gravity* **29**, 215015 (2012).
- [21] Jensen, J. L. W. V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica* **30**, 175–193 (1906).
- [22] Jafari, N. & Shariati, A. Doubly special relativity: a new relativity or not? *AIP Conference Proceedings* (2006).
- [23] Amelino-Camelia, G. Doubly-special relativity: first results and key open problems. *International Journal of Modern Physics D* **11**, 1643–1669 (2002).
- [24] Ahmed farag ali. <https://quantumgravityresearch.org/ahmed-farag-ali/>.
- [25] Saurya das. <https://uniweb.uleth.ca/members/33/profile>.
- [26] Elias c. vagenas. <https://www.researchgate.net/profile/Elias-Vagenas> (2023).
- [27] Ali, A. F., Das, S. & Vagenas, E. C. Discreteness of space from the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B* **678**, 497–499 (2009).
- [28] Nozari, K. & Etemadi, A. Minimal length, maximal momentum, and hilbert space representation of quantum mechanics. *Phys. Rev. D* **85**, 104029 (2012).
- [29] Pouria pedram. <https://scholar.google.com/citations?user=9jUN8-IAAAAJ&hl=en>.
- [30] Pedram, P. A higher order gup with minimal length uncertainty and maximal momentum. *Physics Letters B* **714**, 317–323 (2012).

Apêndice A

Função Erro de Gauss

A função erro ou função erro de Gauss, é uma função complexa definida como

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}. \quad (\text{A.1})$$

A função erro é uma função ímpar, então

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z). \quad (\text{A.2})$$

Sua derivada é dada por

$$\frac{d}{dz} \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}. \quad (\text{A.3})$$

e a sua integral é igual a

$$\int dz \operatorname{erf}(z) = z \operatorname{erf}(z) - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + C. \quad (\text{A.4})$$

Sua função inversa é definida na forma

$$\operatorname{erf}(\operatorname{erf}^{-1}(z)) := z. \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

Tabela de Integral

A integral abaixo é tabelada na forma

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln\left(\frac{2ax + b - \sqrt{-\Delta}}{2ax + b + \sqrt{-\Delta}}\right), \quad (\text{B.1})$$

para $\Delta < 0$.

Assim, a integral

$$(I_1) = \int \frac{dp}{(1 - 2\alpha p + 4\alpha^2 p^2)}, \quad (\text{B.2})$$

tem como solução

$$(I_1) = \frac{1}{\alpha \sqrt{3}} \arctan\left(\frac{8\alpha p - 2}{2\alpha i \sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\alpha \sqrt{-3}} \ln\left(\frac{8\alpha^2 p + -2\alpha - 2\alpha i \sqrt{-3}}{8\alpha^2 p + -2\alpha + 2\alpha i \sqrt{-3}}\right), \quad (\text{B.3})$$

e, finalmente,

$$2i \arctan\left(\frac{4\alpha p - 1}{\alpha \sqrt{3}}\right) = \ln\left[\frac{(4\alpha - 1) - i \sqrt{3}}{(4\alpha - 1) + i \sqrt{3}}\right]. \quad (\text{B.4})$$