

Victor Breda Zaché

**Sobre o problema das cargas conservadas em
teorias de calibre**

Vitória, ES

2023

Victor Breda Zaché

Sobre o problema das cargas conservadas em teorias de calibre

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em física.

Universidade Federal do Espírito Santo – Ufes

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich Junior

Coorientador: Prof. Dr. Gabriel Luchini

Vitória, ES

2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

B831s Breda Zaché, Victor, 1997-
Sobre o problema das cargas conservadas em teorias de calibre / Victor Breda Zaché. - 2023.
133 f. : il.

Orientador: Humberto Belich Junior.
Coorientador: Gabriel Luchini Martins.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Teoria de campos (Física). 2. Campos de calibre. I. Belich Junior, Humberto. II. Luchini Martins, Gabriel. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

“Sobre o problema das cargas conservadas em teorias de calibre”

Victor Breda Zaché

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. José Abdalla Helayél-Neto
(CBPF)

Prof. Dr. Humberto Belich Junior
(Orientador - PPGFis)

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Gabriel Luchini Martins
(Coorientador - PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Ulysses Camara da Silva
(DFIS/UFES)

Vitória-ES, 08 de agosto de 2023





237ª Defesa Victor Breda Zaché - Ata de Submissão

Data e Hora de Criação: 31/08/2023 às 15:58:10

Documentos que originaram esse envelope:

- 237ª Defesa Victor Breda Zaché - Ata de Submissão.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: ccb8aadc0e97be6502da7194446a14f2b6ff8c170e5e076d75c4bdebd196cc2

[SHA512]: 34e2c0e06ee16ab0d87273a0838f4b2f71b724a1d49fc053212ee430d968a5c9d3f839b747a11bde118ab45e505ad703ea26b531e009f240279b1041833742

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Sergio Vitorino de Borba Gonçalves (sergio.v.goncalves@ufes.br)

Data/Hora: 31/08/2023 - 16:47:32, IP: 187.120.47.109, Geolocalização: [-20.823535, -40.684530]

[SHA256]: 1a38d6cb90a4162f253d699157358cfb2479bc2f4512d680b8bf42192d477001



ASSINADO - Humberto Belich Junior (belichjr@gmail.com)

Data/Hora: 31/08/2023 - 19:50:16, IP: 187.36.171.234, Geolocalização: [-20.224409, -40.281702]

[SHA256]: 6663c3753a2a1a014cf8eff508d5dccc996d5de250f7f6084907819c1ef05c6b



ASSINADO - Gabriel Luchini Martins (gabriel.luchini@gmail.com)

Data/Hora: 02/09/2023 - 07:34:20, IP: 179.102.141.101

[SHA256]: 715dbb300e13f1af6672b93fd261c8ff274aecf9a42e18c3356b435042295586



ASSINADO - Ulysses Camara da Silva (ulysses.silva@ufes.br)

Data/Hora: 02/09/2023 - 07:51:03, IP: 179.178.243.62, Geolocalização: [-20.252774, -40.267241]

[SHA256]: 566ab430e9ced65b0e6262f9b72f87c7aa91345969daa3beb5bcff482bdde8be



ASSINADO - José Abdalla Helayel Neto (josehelayel@gmail.com)

Data/Hora: 02/09/2023 - 12:25:51, IP: 201.17.85.168, Geolocalização: [-22.933734, -43.176713]

[SHA256]: 1630252343df167c1ebd19afc5bb490db48ebca858c32615fa7ad54c3bfe60e9

Histórico de eventos registrados neste envelope

02/09/2023 12:25:52 - Envelope finalizado por josehelayel@gmail.com, IP 201.17.85.168

02/09/2023 12:25:51 - Assinatura realizada por josehelayel@gmail.com, IP 201.17.85.168

02/09/2023 12:25:46 - Envelope visualizado por josehelayel@gmail.com, IP 201.17.85.168

02/09/2023 07:51:03 - Assinatura realizada por ulysses.silva@ufes.br, IP 179.178.243.62

02/09/2023 07:51:02 - Envelope visualizado por ulysses.silva@ufes.br, IP 179.178.243.62

02/09/2023 07:34:20 - Assinatura realizada por gabriel.luchini@gmail.com, IP 179.102.141.101

31/08/2023 19:50:16 - Assinatura realizada por belichjr@gmail.com, IP 187.36.171.234

31/08/2023 19:50:12 - Envelope visualizado por belichjr@gmail.com, IP 187.36.171.234

31/08/2023 16:47:32 - Assinatura realizada por sergio.v.goncalves@ufes.br, IP 187.120.47.109

31/08/2023 16:04:34 - Envelope registrado na Blockchain por jose.cruz@ufes.br, IP 200.137.65.108

31/08/2023 16:04:33 - Envelope encaminhado para assinaturas por jose.cruz@ufes.br, IP 200.137.65.108

31/08/2023 15:58:11 - Envelope criado por jose.cruz@ufes.br, IP 200.137.65.108

Agradecimentos

Gostaria de expressar meu profundo agradecimento à base sólida da minha vida, minha família. Um agradecimento especial aos meus pais, Edimar e Natalina, e ao meu irmão, Gustavo, que sempre me apoiaram, mesmo quando não entendiam muito bem o que eu falava (e está tudo bem, às vezes nem eu mesmo entendo). Sou grato pelo apoio de vocês.

À minha nova família, minha esposa Taciana, meu sincero agradecimento. Essa jornada foi desafiadora, mas com você ao meu lado, ela se tornou mais leve. Agradeço por suportar minhas reclamações, que não foram poucas, e por me apoiar em meus sonhos e ideias mirabolantes. Obrigado por sorrir, chorar e beber comigo. Você é meu sol.

Ao meu orientador e amigo, Gabriel Luchini, meu profundo agradecimento. Este trabalho é resultado de toda a sua paciência ao ouvir meus podcasts em formato de áudio e lidar com meus “resultados físicos interessantes”, que muitas vezes se revelavam erros bobos nos cálculos. Obrigado por me acompanhar e aconselhar desde o início da graduação, por me ensinar a amar a Física e, perdoe-me pelo trocadilho, toda a beleza que suas simetrias ocultas oferecem.

Aos meus amigos, em especial Laura e Vinicin, meu sincero obrigado. Laura foi, literalmente, minha dupla durante toda a graduação e continuou sendo, mesmo que indiretamente, durante o mestrado. Além disso, é com certeza uma das amizades mais sinceras que fiz nesse período. Vinicin sempre consegue me fazer rir, não importa a situação, e com certeza tornou esta trajetória mais leve. Vocês ocupam um lugar especial na minha vida e torço muito por vocês.

Meus agradecimentos à Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) como instituição e a todos os que fazem parte dela. Em particular, ao professor Humberto Belich pelo apoio neste trabalho.

Mestre Oogway disse: “O ontem é história, o amanhã é um mistério, mas o hoje é uma dádiva, é por isso que se chama presente”. Sem vocês, meu ontem teria sido menos leve e meu hoje não seria um presente. Com o apoio de vocês, estou ansioso para enfrentar o mistério do amanhã.

*“Não existe ingrediente secreto.
Para fazer algo especial,
só tem que acreditar que é especial”.*
Sr. Ping.

Resumo

Neste trabalho, abordamos a versão integral das equações de Yang-Mills e a utilizamos para resolver um problema em aberto em teorias não abelianas desde 1954: a definição de uma carga conservada e invariante de calibre. Nesse processo, formulamos também as equações integrais invariantes de Lorentz para o eletromagnetismo no vácuo e em meios materiais, além de provar o teorema de Stokes, fundamental para conectar a versão integral e a diferencial. Apresentamos uma nova perspectiva sobre a conservação da carga elétrica no eletromagnetismo, como consequência de uma simetria oculta no chamado loop space. Essa mesma simetria emerge na teoria não abeliana, resultando na conservação da carga, que também será invariante de calibre.

Palavras-chave: Teoria de Yang-Mills. Formulação integral de teorias de calibre. Cargas conservadas.

Abstract

In this work, we investigate the integral version of Yang-Mills equations and employ them to solve an open problem in non-abelian gauge theories since 1954: the definition of a gauge-invariant conserved charge. Throughout this process, we formulate the Lorentz-invariant integral equations of electromagnetism in vacuum and material media. Additionally, we prove the Stokes theorem, which is fundamental in the connection between integral and differential versions. We present a new perspective about the conservation of electric charge in electromagnetism as a consequence of a hidden symmetry at the so called loop space. The same symmetry emerges in non-abelian theory and implies in the gauge-invariant conserved charge.

Keywords: Yang-Mills theory. Integral formulation of gauge theories. Conserved charges.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Transporte paralelo em uma esfera por diferentes caminhos.	42
Figura 2 – Vetor $u(\sigma)$ em γ	44
Figura 3 – Ordenamento em σ	45
Figura 4 – Simetria simplexa para o terceiro termo de (2.6).	46
Figura 5 – Simetria simplexa para o segundo termo de (2.6).	47
Figura 6 – Simetria simplexa para o quarto termo de (2.6).	48
Figura 7 – Caminho fechado que separa o espaço-tempo em espaço e tempo por $\partial\Sigma = \Gamma_0 \circ \Gamma_L \circ (\Gamma_t)^{-1} \circ (\Gamma_{-L})^{-1}$	53
Figura 8 – Deformações sobre a superfície Σ partindo de $\Sigma(\tau = 0) \equiv \Sigma_0$ até $\Sigma(\tau = 2\pi) \equiv \Sigma_{2\pi}$	55
Figura 9 – Na primeira figura, representamos o loop space $\mathcal{LM}^{(0)}$ que é o mapeamento de pontos em pontos. Na segunda, está $\mathcal{LM}^{(1)}$ que representa caminhos fechados sobre uma superfície sendo levados em pontos. Já na terceira temos $\mathcal{LM}^{(2)}$, o mapeamento é de superfícies fechadas para pontos.	58
Figura 10 – Deformações contínuas na superfície geram variações no fluxo. Nesta figura, representa-se a superfície inicial, $\Sigma(\zeta = 0) \equiv \Sigma_0$, e a superfície final $\Sigma(\zeta = 2\pi) \equiv \Sigma_{2\pi}$	61
Figura 11 – Cilindro espaço-temporal $\Omega = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ cuja borda é $\partial\Omega = (\mathbb{D}_0^2)^{-1} \cup \mathbb{D}_t^2 \cup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$	63
Figura 12 – Caminhos para o cálculo da holonomia.	67
Figura 13 – Representação dos loops percorrendo a superfície Σ e a deformação homotópica da superfície para varrer o volume no espaço-tempo.	74
Figura 14 – As setas em vermelho mostram o campo antes da transformação e, as setas em azul, o campo após a transformação. À esquerda, a representação da transformação de calibre para o fluxo do campo não conjugado. À direita, a representação da transformação de calibre para o fluxo do campo conjugado	75
Figura 15 – O volume Ω é tomado como um cubo infinitesimal de arestas δx , δy e δz . As faces inferior e superior destacadas correspondem a Σ_{xy} e Σ'_{xy} , respectivamente.	81
Figura 16 – Caminhos $\Gamma_1 = \Gamma_{\Omega_0} \circ \Gamma_{\Omega_+}$ e $\Gamma_2 = \Gamma_{\Omega_-} \circ \Gamma_{\Omega_t}$ que ligam as esferas S_R^2 e S_∞^2	83
Figura 17 – Representação do escaneamento do cilindro $S_R^2 \times \mathbb{R}$. Na primeira etapa, escaneamos S_R^2 a tempo $t = 0$. Em seguida, na segunda, movemos para um instante posterior e repetimos o escaneamento, até retornar para x_R	85
Figura 18 – Movimentação do ponto de referência de x_R para x_R^t	85

Figura 19 – Representação de uma seção em um feixe trivial.	106
Figura 20 – Perturbação da curva γ em um único ponto x em uma direção e^μ	111
Figura 21 – Representação das translações sucessivas através dos caminhos $\Gamma_1 \equiv \Gamma_x \circ \Gamma_y$ e $\Gamma_2 \equiv \Gamma_y \circ \Gamma_x$	113
Figura 22 – À esquerda, o caminho puramente espacial. À direita, o caminho puramente temporal.	120
Figura 23 – Escolha dos caminhos em 1+1-dimensões.	122
Figura 24 – À esquerda, tem-se a superfície aberta usada para reaver a equação de Ampère-Maxwell. A superfície à direita, que é usada para reaver a lei de Faraday, corresponde a um cilindro espaço-temporal com tampas a tempos fixos.	124
Figura 25 – Escolha dos caminhos em 1+2-dimensões.	126

Sumário

	Introdução	17
1	INTRODUÇÃO ÀS TEORIAS DE CALIBRE	19
1.1	Weyl, eletromagnetismo e simetria de calibre	19
1.2	Carga de Noether associada à simetria de calibre do eletromagnetismo	23
1.3	Teorias de Calibre não abelianas	26
1.3.1	Da eletrodinâmica usual à eletrodinâmica de cor	26
1.3.2	Um protótipo de teoria de Yang-Mills para $SU(2)$	28
1.3.3	Teoria de Yang-Mills <i>in a nutshell</i>	30
1.4	O problema da carga em teorias não abelianas	33
1.5	Propostas para a carga conservada e invariante de calibre	36
2	HOLONOMIAS	41
2.1	Transporte paralelo	41
2.1.1	Solução da equação de transporte paralelo	44
2.1.2	Teorema de Stokes exponenciado não abeliano padrão	49
2.1.3	Curvatura nula, cargas conservadas e integrabilidade	51
2.2	Holonomias generalizadas	54
2.3	Loop space, independência de caminho e leis de conservação	57
3	EQUAÇÕES INTEGRAIS INVARIANTES DE LORENTZ PARA O ELETROMAGNETISMO	59
3.1	Equações integrais no vácuo e teorema de Stokes	59
3.2	Equações de Maxwell não invariantes de Lorentz	62
3.3	Simetrias escondidas e cargas conservadas no eletromagnetismo	64
3.4	Equações integrais em meios materiais lineares	68
3.4.1	Equações de Maxwell não invariantes de Lorentz em meios materiais	70
3.4.2	Conservação da carga via simetria no loop space	71
4	EQUAÇÕES INTEGRAIS EM TEORIAS DE CALIBRE NÃO ABELIANAS	73
4.1	Equações integrais de Yang-Mills e teorema de Stokes estendido	73
4.2	Cargas conservadas em teorias não abelianas	82
	Considerações finais	87

	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICE A – INTRODUÇÃO A FORMAS DIFERENCIAIS	93
A.1	Conceitos iniciais: p -formas, produto wedge, derivada exterior e dual de Hodge	93
A.2	Eletromagnetismo não covariante de Lorentz e formas diferenciais	96
A.3	Eletromagnetismo covariante de Lorentz e formas diferenciais	98
	APÊNDICE B – TEOREMA DE STOKES PARA p-FORMAS DIFERENCIAIS	101
	APÊNDICE C – INTRODUÇÃO A FEIXES E CONEXÕES	105
C.1	Introdução a feixes	105
C.2	Introdução conexões	107
C.3	Aplicando para o eletromagnetismo	109
C.4	Introdução à holonomia	110
	APÊNDICE D – A DERIVADA DA HOLONOMIA	111
	APÊNDICE E – TEOREMA DE NOETHER E SIMETRIA DE CALIBRE	115
E.1	O problema variacional de Noether	115
E.2	O primeiro teorema de Noether	116
E.3	O segundo teorema de Noether	117
	APÊNDICE F – EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA O ELETROMAGNETISMO EM OUTRAS DIMENSÕES	119
F.1	Equações integrais em 1+1-dimensões	119
F.1.1	Conservação da carga elétrica em 1+1-dimensões	120
F.2	Equações integrais em 1+2-dimensões	122
F.2.1	Conservação da carga elétrica em 1+2-dimensões	124
	APÊNDICE G – EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE INTEGRAL INVARIANTE DE LORENTZ	127
	APÊNDICE H – SOLUÇÃO TIPO COULOMB PARA A TEORIA DE YANG-MILLS	129

Introdução

Simetrias estão no cerne de toda teoria física que busca desvendar a estrutura oculta da natureza. Elas permeiam desde o palco em que a Física se desenrola, o espaço-tempo, até os atores responsáveis pelo mundo que conhecemos, os campos. As simetrias são mais do que apenas belas, elas são ingredientes essenciais em qualquer modelo teórico de Teoria de Campos.

Nesse contexto, a simetria de calibre é particularmente interessante, pois governa três das quatro interações fundamentais. Apesar de ser conhecida desde o desenvolvimento das equações da eletrodinâmica por Maxwell ([MAXWELL, 1865](#)), inicialmente ela foi considerada apenas uma conveniência matemática para simplificar cálculos na eletrodinâmica. Foi Weyl ([WEYL, 1918](#)) que propôs o princípio de calibre como um princípio fundamental da natureza na tentativa de unificar a Relatividade Geral e o Eletromagnetismo.

Originalmente, as equações de Maxwell foram formuladas em sua versão integral, tratando campos elétricos e magnéticos separadamente. Posteriormente, esses campos foram interpretados como componentes de um único campo eletromagnético. Nesse processo, incorpora-se a Relatividade Restrita nas equações de Maxwell e formula-se a versão diferencial covariante de Lorentz para o eletromagnetismo. Além disso, a eletrodinâmica foi entendida como uma teoria de calibre com grupo de simetria $U(1)$. No entanto, não era conhecida uma versão integral que acomodasse a Relatividade Restrita até 2006 ([KOO, 2006](#)).

Em 1954, Yang e Mills ([YANG; MILLS, 1954](#)) propuseram uma extensão para o eletromagnetismo para grupos de calibre não abelianos revolucionando todo o entendimento da física de partículas e inspirando outras áreas como, por exemplo, a Física da Matéria Condensada. Essa teoria foi formulada originalmente em sua versão diferencial e também não era conhecida a versão integral até 2012 ([FERREIRA; LUCHINI, 2012b](#)). Essa versão surge como essencial para resolver um problema em aberto desde sua formulação: as cargas conservadas.

Sabemos que simetrias contínuas são intrinsecamente relacionadas às cargas conservadas, conforme demonstrado nos teoremas de Noether ([NOETHER, 1918](#)). Aplicando esse teorema à simetria de calibre no eletromagnetismo, obtém-se como consequência direta a conservação da carga elétrica, que é derivada facilmente das equações covariantes de Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \implies \partial_\nu j^\nu = 0.$$

Entretanto, na teoria de Yang-Mills não é possível definir a conservação da corrente de

matéria, apenas sua conservação covariante:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \implies D_\nu j^\nu = 0.$$

Isso implica que, mesmo que a corrente seja conservada em um calibre, ela não necessariamente será conservada em outro, levando a uma ambiguidade no significado intrínseco do que conhecemos como carga. Essa é a pergunta central que tentaremos responder neste trabalho: como definir uma carga que seja conservada e invariante de calibre em teorias não abelianas?

Neste trabalho, começaremos a responder a essa pergunta analisando exatamente o que ela significa. No primeiro capítulo, apresentaremos uma visão geral do eletromagnetismo como uma teoria de calibre e da teoria de Yang-Mills. Calcularemos as cargas conservadas tanto para o eletromagnetismo quanto para a teoria de Yang-Mills usando o teorema de Noether, além de discutir duas propostas existentes para resolver o problema das cargas conservadas.

No segundo capítulo, abordaremos o conceito de holonomias e como o cálculo das cargas conservadas em teorias integráveis pode contribuir para a nossa compreensão do problema. Calcularemos em detalhes a solução da equação de transporte paralelo e investigaremos as chamadas holonomias generalizadas.

No capítulo subsequente, postulamos as equações integrais do eletromagnetismo seguindo um caminho ligeiramente diferente do encontrado na literatura. Demonstraremos o teorema de Stokes, fundamental para estabelecer a relação entre as versões integral e diferencial das equações, e forneceremos uma nova interpretação da conservação da carga elétrica como uma simetria oculta no chamado espaço dos loops (LUCINI; ZACHÉ, 2022).

Por fim, no capítulo 4, abordaremos a versão integral das equações de Yang-Mills. Descreveremos a teoria de Yang-Mills em termos do fluxo do campo conjugado com a holonomia e demonstraremos o teorema de Stokes para o campo conjugado. Também mostraremos como as equações diferenciais podem ser recuperadas a partir das equações integrais. Na última seção desse capítulo, descreveremos o cálculo das cargas que surge novamente a partir da simetria oculta no espaço dos loops.

Nos apêndices, são deixadas revisões sobre aspectos importantes para a compreensão do trabalho, bem como algumas discussões particularmente interessantes que poderiam interferir no fluxo principal do texto.

Durante todo este trabalho adotaremos a assinatura da métrica para um espaço-tempo 1+D-dimensional como $(+, -, \dots, -)$. Os índices gregos são índices no espaço-tempo e os índices latinos são índices no espaço euclidiano ou no espaço interno (será especificado pelo contexto). Também seguiremos a convenção de Einstein para somatórios e o sistema de unidades natural com $c = \hbar = 1$.

1 Introdução às teorias de calibre

Neste capítulo, são apresentadas aspectos gerais das teorias de Calibre abelianas e não abelianas. Começando pela abordagem histórica no eletromagnetismo clássico em Mecânica Quântica, ilustramos o princípio de calibre nas ideias originais de Weyl. Em seguida, introduzimos a abordagem usual de Teoria de Campos através da ação. Nesse ponto, mostramos como a simetria de calibre leva à conservação da carga elétrica através do teorema de Noether. Por fim, abordamos as teorias de calibre não abelianas de Yang-Mills. Nela, mostramos que existe um problema na definição da carga conservada que também seja invariante de calibre.

1.1 Weyl, eletromagnetismo e simetria de calibre

Durante a formulação do eletromagnetismo, já se sabia da existência de uma simetria na determinação dos campos físicos; há uma liberdade intrínseca aos potenciais que determinam os campos elétrico e magnético. Essa simetria, chamada de *simetria de calibre* e extremamente útil na simplificação matemática das equações, originalmente era tratada como acidental. Durante muito tempo seu verdadeiro significado permaneceu obscuro até que Weyl (WEYL, 1918) a pensou como ingrediente fundamental na interação entre partículas na natureza.¹

A história começa com a relatividade de Einstein. Na Relatividade Restrita, sempre é possível encontrar um referencial inercial (global) para descrever um sistema desde que o mesmo não esteja na influência de um campo gravitacional. Quando o campo está presente, só é possível que esse referencial seja local e, para conectar dois referenciais locais, é necessário introduzir um novo objeto matemático chamado de conexão. De maneira extremamente simplificada, essa é a ideia geral da Relatividade Geral: no espaço-tempo só é possível determinar uma régua (ou um referencial) de maneira local.

A proposta de Weyl era introduzir uma função escala na eletrodinâmica que mudaria no espaço-tempo junto com as quantidade físicas. As magnitudes dessas quantidades se alterariam ponto a ponto com a escala. Segundo Weyl, o que seria físico e não mudaria de um ponto a outro é a norma do produto da escala com a quantidade física tratada; essa seria a invariância de escala, ou de calibre.

Por exemplo, seja $S(x)$ a escala e $\psi(x)$ a quantidade física. Uma mudança na

¹ Uma parte das discussões desta seção são inspiradas em (MORIYASU, 1983).

coordenada por $x \rightarrow x + \delta x$ afeta esses entes por

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi(x + \delta x) = \psi(x) + \partial_\mu \psi(x) \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x^2); \\ S(x) &\rightarrow S(x + \delta x) = 1 + \partial_\mu S(x) \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x^2),\end{aligned}$$

onde assumimos que no ponto original a escala é unitária. Desconsiderando os termos de segunda ordem em δx e incorporando a escala na quantidade física, tem-se

$$S(x)\psi(x) \rightarrow S(x + \delta x)\psi(x + \delta x) = \psi(x) + [\partial_\mu S(x) + \partial_\mu] \psi(x) \delta x^\mu.$$

A mudança total preservada de um ponto a outro é²

$$\Delta\psi(x) = [\partial_\mu S(x) + \partial_\mu] \psi(x) \delta x^\mu \equiv D_\mu \psi(x) \delta x^\mu = 0.$$

Repare que $\partial_\mu S$ é responsável pela conexão entre os pontos x e $x + \delta x$ e uma segunda transformação apenas mudaria a escala:

$$\begin{aligned}S'(x) &\rightarrow S'(x + \delta x) = 1 + \partial_\mu S'(x) \delta x^\mu; \\ S'(x)S(x)\psi(x) &\rightarrow \psi(x) + [\partial_\mu S'(x) + \partial_\mu S'(x) + \partial_\mu] \psi(x).\end{aligned}$$

Lembrando do eletromagnetismo, uma transformação de calibre é dada por $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \theta$. Logo, naturalmente comparamos $\partial_\mu S$ com $-\partial_\mu \theta$ e a ideia de Weyl parece ser identificável com a eletrodinâmica.

Entretanto, pouco tempo após sua proposição, surgiram incompatibilidades entre a física quântica e os postulados originais de Weyl. Apesar da reviravolta, a ideia da localidade permaneceu e, na mesma teoria quântica, se ressignificou como veremos a seguir.

A descrição quântica de um sistema se dá através de uma função complexa, chamada de função de onda, cuja dinâmica é governada pela equação de Schrödinger que, na representação de coordenadas e em unidades naturais, é dada por

$$\left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(t, \mathbf{x}) \right) \psi(t, \mathbf{x}) = i \partial_t \psi(t, \mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Na interpretação mais comum da Mecânica Quântica (interpretação de Copenhague), a função de onda não é física, pois corresponde a amplitude de probabilidade do sistema; o físico será seu módulo quadrado. Portanto, existe uma simetria global descrita pelo grupo $U(1)$:

$$\psi \mapsto e^{i\theta} \psi, \quad g = e^{i\theta} \in U(1).$$

Porém, promovendo a simetria de global para local, a equação de Schrödinger perde sua invariância.

² Observe que essa equação corresponde ao transporte paralelo de ψ ao longo de um caminho no espaço-tempo.

Isso se torna mais evidente se analisarmos, ainda na representação de coordenadas, o momento e energia de uma partícula, que são identificados, respectivamente, como os operadores derivada espacial e temporal no procedimento de primeira quantização. Essas quantidades são associadas a simetrias no espaço-tempo de translação espacial (momento) e translação temporal (energia). Por outro lado, quando consideramos um boost, ou seja, uma transformação do tipo $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, a função de onda no novo referencial deve ter sua fase transformada localmente por

$$\psi(t', \mathbf{x}') = e^{i\theta(t', \mathbf{x}')} \psi(t, \mathbf{x}), \text{ com } \theta(t', \mathbf{x}') \equiv \frac{m\|\mathbf{v}\|^2 t'}{2} - m\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}. \quad (1.2)$$

Tomemos, por exemplo, o caso de uma partícula de carga q em uma região ausente de campos eletromagnéticos externos. Nesse caso,

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi_0(t, x) = i\partial_t \psi_0(t, x) \quad (1.3)$$

com $\psi_0(t, x)$ a função de onda “livre”. Em uma outra região na presença do campo, que é determinado pelos potenciais vetor \mathbf{A} e escalar ϕ , a mesma partícula será descrita por

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\nabla - \mathbf{A})^2 + q\phi \right] \psi(t, x) = i\partial_t \psi(t, x)$$

onde $\psi(t, x)$ é a função de onda na presença do campo. Ou, em uma notação mais conveniente:

$$-\frac{1}{2m} |\mathbf{D}|^2 \psi = iD_t \psi, \quad (1.4)$$

onde definimos $D_i \equiv \partial_i - iqA_i$ e $D_t \equiv \partial_t + iq\phi$ como as derivadas covariante. Esse procedimento de mudança das derivadas usuais para a derivada covariante aparecerá com frequência neste texto em momentos diferentes. No atual contexto, ele surge a partir do procedimento de *acoplamento mínimo* que, de maneira simplista, corresponde a troca do momento clássico da partícula por $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ e da energia clássica por $E \mapsto E - q\phi$, impactando diretamente o caso quântico no processo de primeira quantização. Por outro lado, é interessante notar que (1.4) também seria obtido caso transformássemos a função de onda livre por

$$\psi_0 \mapsto \psi = e^{-iq\theta(t,x)} \psi_0, \quad (1.5)$$

onde

$$\theta(x) = \int \phi dt - \int A_i dx^i = \int_\gamma A_\mu dx^\mu$$

e γ é o caminho escolhido para levar a partícula da ausência para a presença do campo.

Na ausência do campo, a fase da função de onda pode assumir um valor arbitrário e, na sua presença, ela deve tomar um valor definido que depende da trajetória da partícula.

Repare que a fase da função de onda satisfaz o necessário para ser uma variável local. Logo, reinterpretemos a invariância de calibre como uma invariância sobre a fase na função de onda devido a arbitrariedade no potencial escalar e vetor responsáveis pela interação eletromagnética. Dessa forma, o eletromagnetismo surge como uma teoria de calibre no contexto da Mecânica Quântica.

Por fim, concluindo a abordagem histórica, é no mínimo curioso pensar que, dentre as quatro interações fundamentais da natureza, justamente a gravitação seja a única não governada por um princípio de calibre, pois foi em suas ideias principais sobre referenciais que Weyl se inspirou para pensar na simetria de calibre.

Na abordagem usual do eletromagnetismo em Teoria de Campos, ele é descrito através do campo eletromagnético, $F^{\mu\nu}$, cuja ação, no vácuo, é

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_{\mu} j^{\mu} \right), \quad (1.6)$$

onde j^{μ} é a quadri-corrente de matéria e Ω é um volume quadridimensional no espaço-tempo. As componentes do campo eletromagnético são definidas em termos dos campos elétrico e magnético, \mathbf{E} e \mathbf{B} , como $F_{0i} = E_i$ e $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$. Por sua vez, a fonte será $j^{\mu} = (\rho, j^i)$ com \mathbf{j} a corrente elétrica e $e\rho$ a densidade de carga elétrica. A variável dinâmica, A^{μ} , é o campo de calibre, que leva ao tensor dos campos por $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ e é definida como $A^{\mu} = (\phi, A^i)$ com ϕ e \mathbf{A} o potencial escalar e o potencial vetor, respectivamente.

A condição de estacionaridade da ação por variações arbitrárias no campo devolve as equações de movimento com fonte:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}. \quad (1.7)$$

Essas equações, no espaço euclidiano, são as versões não covariantes de Lorentz para a equação de Gauss para o campo elétrico e a equação de Ampère-Maxwell. As outras duas - Gauss para o campo magnético e Faraday - são obtidas a partir da identidade de Bianchi

$$\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.8)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ é o dual do tensor dos campos.

O eletromagnetismo é uma das três interações fundamentais definidas pelo princípio de calibre. Para um dado o campo de calibre, existe uma arbitrariedade na sua definição, pois, sendo $\theta(x)$ uma função do espaço-tempo, uma transformação

$$A_{\mu} \mapsto A_{\mu} - \partial_{\mu} \theta. \quad (1.9)$$

não altera o tensor dos campos. Transformações desse tipo são ditas transformações de calibre locais³. Na próxima seção, calcularemos a carga conservada devido a essa simetria e discutiremos as diferenças ao impor a simetria como local ou global.

³ Essas transformações também são chamadas de transformações de calibre do segundo tipo, sendo as transformações do primeiro tipo as globais.

Em Teorias de Calibre, postula-se a invariância de calibre das quantidades físicas para que exista a simetria. Afirmamos que existe uma arbitrariedade na definição do campo, mas, em nenhum momento, analisamos como a fonte é afetada por uma transformação de calibre. Suponha que não é conhecida a maneira com que j^μ se transforma; nesse caso o segundo termo da ação (1.6) seria

$$A_\mu j^\mu \mapsto A'_\mu j'^\mu = A_\mu j'^\mu - \partial_\mu \theta j'^\mu = A_\mu j'^\mu - \theta \partial_\mu j'^\mu - \partial_\mu (\theta j'^\mu).$$

O último termo será descartado, pois a ação é sempre definida a menos de uma derivada total e, para que a teoria seja invariante de calibre, é necessário que $j'^\mu = j^\mu$ e $\partial_\mu j^\mu = 0$, ou seja, que a corrente seja invariante de calibre e a equação da continuidade seja satisfeita. Essa última condição é paradoxal, pois segue pelo lado oposto do teorema de Noether. Ela diz que uma carga é conservada (neste caso, a carga elétrica) para existir uma simetria (calibre local), ou seja, uma carga conservada implica em uma simetria. Porém, como $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, j^μ é conservado trivialmente desde que as equações de movimento sejam válidas,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 = \partial_\nu j^\nu. \quad (1.10)$$

Não é necessário exigir a conservação da carga; ela aparece naturalmente.

Resta analisar a invariância de calibre da corrente. Contorna-se essa situação acoplando minimamente a parte cinética da lagrangeana de Maxwell com um campo escalar complexo φ . Nesse caso, a densidade de lagrangeana é a chamada densidade de lagrangeana de Maxwell-Higgs⁴

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi - m^2 \varphi \varphi^* \quad (1.11)$$

onde $D_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi - ie A_\mu \varphi$ é a derivada covariante e m é a massa do campo escalar. As equações dinâmicas para Maxwell-Higgs são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu; \quad (1.12)$$

$$D_\mu D^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0; \quad (1.13)$$

$$(D_\mu D^\mu \varphi)^* + m^2 \varphi^* = 0, \quad (1.14)$$

com $j^\mu \equiv ie(\varphi(D^\mu \varphi)^* - \varphi^* D^\mu \varphi)$. Note que o campo escalar se transforma por $\varphi \mapsto e^{-ie\theta} \varphi$, assim a corrente é, por construção, invariante de calibre.

1.2 Carga de Noether associada à simetria de calibre do eletromagnetismo

Em 1918, Emmy Noether (NOETHER, 1918) estabeleceu a ponte entre simetrias e cargas conservadas através de dois teoremas, um para simetrias globais e outro para

⁴ De maneira geral, não é necessário escrever o potencial como $U(|\varphi|) = m^2 |\varphi|^2$, apenas que ele dependa do módulo do campo escalar, mas o faremos a fim de simplificar a próxima seção.

simetrias locais. A toda simetria contínua de um sistema físico existe uma quantidade conservada associada⁵, denominada carga de Noether, cuja lei de conservação aparece na forma de uma equação de continuidade: $\partial_\mu j_{Noether}^\mu = 0$, onde $j_{Noether}^\mu$ é a chamada *corrente de Noether*⁶.

A essência da carga é rotular uma classe de equivalência de soluções dinâmicas em sistemas físicos diferentes, portanto a carga deve ser invariante de calibre. Para o caso tratado aqui (simetria de calibre), ela rotula uma classe de campos de calibre correspondentes a uma mesma configuração de campo físico.

No modelo de Maxwell-Higgs, descrito pela densidade de lagrangeana (1.11), não é difícil obter a lei de conservação. Partindo da equação de movimento com fonte,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu,$$

basta contrair o índice livre e usar a antissimetria do tensor dos campos,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 = \partial_\nu j^\nu. \quad (1.15)$$

A corrente de Noether será a própria corrente de matéria, i.e. $j_{Noether}^\nu = j^\nu$, que naturalmente é invariante de calibre.

No caso da simetria de calibre global, só é possível obter a corrente de Noether impondo condições *on shell*, i.e. com as equações dinâmicas sendo válidas. Porém, como apontado por (BRADING; BROWN, 2000), para a simetria de calibre local, as equações de movimento são condições suficientes, mas não necessárias, para se obter a lei de conservação, portanto, é possível derivá-las *off shell* quando tratamos as equações dinâmicas como vínculos. É o que discutiremos agora.

Primeiro, considere variações arbitrárias em (1.11) e integre por partes. O resultado é

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\varphi \delta\varphi^* + \varepsilon_{\varphi^*} \delta\varphi + \varepsilon_A^\mu \delta A_\mu + \partial_\mu K^\mu, \quad (1.16)$$

onde definimos os vínculos e K^μ por

$$\varepsilon_\varphi \equiv -D_\mu D^\mu \varphi - m^2 \varphi; \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_{\varphi^*} \equiv -(D_\mu D^\mu \varphi)^* - m^2 \varphi^*; \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_A^\nu \equiv \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu; \quad (1.19)$$

$$K^\mu \equiv -F^{\mu\nu} \delta A_\nu + D^\mu \varphi \delta\varphi^* + (D^\mu \varphi)^* \delta\varphi. \quad (1.20)$$

⁵ No apêndice E, revisitamos o teorema de Noether, mas com foco na simetria de calibre.

⁶ De agora em diante, a corrente conservada pelo teorema de Noether será denotada por $j_{Noether}$. Em contrapartida, a corrente de matéria (ou corrente externa) obtida pelas equações de movimento será apenas j .

Analisaremos inicialmente o caso da simetria de calibre global. As variações nos campos são obtidas com as transformações de calibre global ($\partial_\mu \theta = 0$) infinitesimais, $\delta A_\mu = 0$ e $\delta \varphi = -ie\theta\varphi$, logo, com (1.16), a variação da ação será

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L} = \theta \int_{\Omega} d^4x [ie(\varepsilon_\varphi^* \varphi - \varepsilon_\varphi \varphi^*) + \partial_\mu j^\mu].$$

Repare que θ é global e, por isso, é fatorado da integral.

Neste ponto, utilizaremos de fato o teorema de Noether: uma determinada transformação é simetria apenas se a variação da ação correspondente for nula. Assim:

$$\delta \mathcal{S} = 0 \iff \varepsilon_\varphi \varphi^* - \varepsilon_\varphi^* \varphi = -\partial_\mu j^\mu. \quad (1.21)$$

A única forma de obter a conservação da corrente é impor condições *on shell*:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^* = 0 \implies \partial_\mu j^\mu = 0.$$

Portanto, transformações de calibre globais geram cargas conservadas apenas quando as equações de movimento são satisfeitas e as cargas obtidas são invariantes de calibre.

Agora estudaremos o caso da simetria de calibre local ($\partial_\mu \theta \neq 0$). Substituindo as transformações locais infinitesimais, $\delta A_\mu = -\partial_\mu \theta$ e $\delta \varphi = -ie\theta\varphi$, em (1.16) e reorganizando, a variação da ação será

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x (-ie\theta(\varepsilon_\varphi \varphi^* - \varepsilon_\varphi^* \varphi) - \varepsilon_A^\mu \partial_\mu \theta) + \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu K^\mu.$$

Integrando por partes e usando o teorema do divergente podemos escrever

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \theta [\partial_\mu \varepsilon_A^\mu - ie(\varepsilon_\varphi \varphi^* - \varepsilon_\varphi^* \varphi)] + \int_{\partial\Omega} d^3S_\mu K^\mu.$$

Note que, sendo θ uma função arbitrária, podemos exigir que na borda do espaço-tempo, denotado por $\partial\Omega$, ela e sua derivada sejam nulas, levando ao descarte do segundo termo. Portanto, a condição de simetria é

$$\delta \mathcal{S} = 0 \iff \partial_\mu \varepsilon_A^\mu - ie(\varepsilon_\varphi \varphi^* - \varepsilon_\varphi^* \varphi) = 0. \quad (1.22)$$

Assim, a equação encontrada a partir do teorema de Noether é

$$\partial_\mu \varepsilon_A^\mu - ie(\varepsilon_\varphi \varphi^* - \varepsilon_\varphi^* \varphi) = 0. \quad (1.23)$$

Com um pouco de algebrismo e as definições de ε_φ e ε_φ^* , manipula-se o segundo termo de l.h.s. obtendo

$$-ie(\varepsilon_\varphi \varphi^* - \varepsilon_\varphi^* \varphi) = \partial_\mu j^\mu.$$

Dessa forma, (1.23) será

$$\partial_\mu (\partial_\nu F^{\nu\mu} - j^\mu + j^\mu) = 0 \implies \partial_\mu (\partial_\nu F^{\nu\mu}) = 0 \quad (1.24)$$

de onde derivamos a corrente de Noether, que também é invariante de calibre, como

$$j_{Noether}^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu}. \quad (1.25)$$

Por um lado, com as condições *off shell*, a carga conservada é o próprio fluxo do campo elétrico,

$$Q_{Noether} \equiv \int_{\Omega_S} d^3x j_{Noether}^0 = \int_{\Omega_S} d^3x \partial_i F^{i0} = \int_{\partial\Omega_S} dS_i F^{i0}, \quad (1.26)$$

onde Ω_S é a parte espacial de Ω (essa definição será usada durante todo o texto). Por outro, a condição de conservação é que o módulo de $j_{Noether}^i$ diminua suficientemente rápido conforme o raio, R , de Ω_S aumente, i.e.

$$\frac{d}{dt} Q_{Noether} = 0 \iff \lim_{R \rightarrow \infty} |j_{Noether}^i| R^2 = 0.$$

Apenas ao impor a validade das equações de movimento a corrente de Noether será identificada como a própria corrente de matéria. Entretanto, como dito no início da seção, as equações dinâmicas não são condições necessárias para derivar a lei de conservação.

Existem então dois tipos de leis de conservação. Seguindo a nomenclatura dada por Noether (NOETHER, 1918), o primeiro tipo são as chamadas *leis de conservações próprias* e são obtidas quando as equações dinâmicas são satisfeitas. O outro, são as *leis de conservação impróprias* e não necessitam das equações dinâmicas. Enquanto a conservação obtida pela simetria de calibre global é própria, a obtida pela simetria de calibre local é imprópria.

1.3 Teorias de Calibre não abelianas

Anteriormente, descrevemos a primeira teoria de calibre vista nos cursos de graduação: o eletromagnetismo. Afirmamos que o grupo de calibre do eletromagnetismo é o grupo $U(1)$. Porém, ele pode ser estendido para um grupo não abeliano através da teoria de Yang-Mills (YANG; MILLS, 1954) e é o que iremos tratar agora.

Antes de descrever a teoria de Yang-Mills a partir da ação, pretendemos introduzi-la seguindo uma abordagem um pouco mais pedagógica e natural seguindo, a menos de algumas modificações, a discussão em (BOOZER, 2011).

1.3.1 Da eletrodinâmica usual à eletrodinâmica de cor

O eletromagnetismo é invariante por transformações de calibre do tipo $U(1)$, i.e. $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu \lambda$, com λ uma função no espaço-tempo (propositalmente mudamos a notação da transformação de calibre de $\theta \rightarrow \lambda$ e a razão ficará clara adiante) deixa o tensor dos

campos e, por consequência, as equações dinâmicas invariantes. Para o eletromagnetismo, a simetria de calibre é abeliana e local.

Queremos nesta seção propor uma generalização para essa teoria através de um exemplo simples: uma partícula carregada em movimento. Suponha essa partícula com carga q e massa m , estando na posição $z^\mu(\tau)$ com velocidade $\omega^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau}$ em que τ é o tempo próprio da partícula. A partícula será fonte de um campo eletromagnético, pois gera uma corrente dada por

$$j^\nu = q \int_{\tau_0}^{\tau} \omega^\mu(\tau') \delta^{(4)}(x - z(\tau')) d\tau'. \quad (1.27)$$

Por outro lado, a dinâmica da partícula é regida pela equação

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} \omega_\nu, \quad (1.28)$$

onde $p^\mu = m\omega^\mu$ são as componentes do quadrimomento e ω_μ as componentes da quadrive-locidade.

Generalizaremos o eletromagnetismo propondo uma nova teoria a qual chamaremos de *eletrodinâmica de cor*. Imagine que, ao invés de uma única carga q , existam três tipos de carga: q_x , q_y e q_z . A fim de simplificar a teoria de cor, introduz-se um espaço interno chamado, com grande criatividade, de espaço de cor. Dessa forma, a carga de cor é um vetor no espaço de cor⁷, i.e. $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$. Como no eletromagnetismo, a força entre duas cargas pontuais depende do sinal do produto das cargas, mas agora o produto é o escalar no espaço de cor. Por exemplo, entre duas cargas \vec{q}_1 e \vec{q}_2 , se $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 > 0$ a força é repulsiva e se $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 < 0$ a força é atrativa.

Nessa nova eletrodinâmica, existem três campos de calibre, um para cada componente da carga de cor. Logo, tanto o potencial, quanto o tensor de Faraday são vetores de cor:

$$\vec{A}^\mu = (A_x^\mu, A_y^\mu, A_z^\mu); \quad (1.29)$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu. \quad (1.30)$$

Já as equações dinâmicas para \vec{F} são análogas às equações do eletromagnetismo:

$$\partial_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = \vec{j}^\nu. \quad (1.31)$$

Repare que essa é a descrição de “três eletromagnetismos” desacoplados entre si. Isso leva a equações de campo ainda lineares e o princípio da superposição ainda válido.

Nessa teoria, uma partícula com carga de cor \vec{q} na posição $z^\mu(\tau)$ e que tenha velocidade $\omega^\mu(\tau)$ gera a seguinte corrente:

$$\vec{j}^\nu = \vec{q} \int_{\tau_0}^{\tau} \omega^\mu(\tau') \delta^{(4)}(x - z(\tau')) d\tau' \quad (1.32)$$

⁷ Setas indicam vetores no espaço de cor. Porém, essa notação não continuará nas próximas seções.

e tem equação de movimento

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \vec{q} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} \omega_\nu. \quad (1.33)$$

Ainda existe simetria de calibre local nessa eletrodinâmica, mas agora a função λ é um vetor no espaço de cor além de função no espaço-tempo,

$$\vec{A}_\mu \mapsto \vec{A}_\mu - \partial_\mu \vec{\lambda}. \quad (1.34)$$

Além dessa, surge uma simetria extra que não aparecia no eletromagnetismo: a teoria é invariante por rotações globais⁸ no espaço de cor. Por exemplo, em (1.31), tanto \vec{F} quanto \vec{j} se transformam levando a equação como um todo a permanecer invariante.

1.3.2 Um protótipo de teoria de Yang-Mills para $SU(2)$

O que aconteceria caso a simetria extra da eletrodinâmica de cor fosse local, ou seja, se a rotação no espaço interno também dependesse do ponto no espaço-tempo? Nesta subseção, incorporaremos essa dependência na matriz de rotação e, em seguida, veremos quais modificações precisam ser feitas a fim de preservar as transformações gerais (calibre + rotações no espaço de cor).

Inicialmente, tome as rotações como infinitesimais na transformação geral:

$$\vec{q} \mapsto \vec{q} + \delta\vec{\theta} \times \vec{q} \quad (1.35)$$

$$\vec{j}^\nu \mapsto \vec{j}^\nu + \delta\vec{\theta} \times \vec{j}^\nu \quad (1.36)$$

$$\vec{A}_\mu \mapsto \vec{A}_\mu + \delta\vec{\theta} \times \vec{A}_\mu - \partial_\mu \vec{\lambda} \quad (1.37)$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} \mapsto \vec{F}_{\mu\nu} + \delta\vec{\theta} \times \vec{F}_{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

onde $\delta\theta$ é o ângulo infinitesimal de rotação e a notação $\delta\vec{\theta} \times \vec{v}$ indica o produto vetorial no espaço de cor. Por um lado, pensando $\delta\vec{\theta}$ como $\delta\vec{\theta}(x)$, o tensor dos campos antigo se transforma por:

$$\vec{F}_{\mu\nu}^{(0)} \mapsto \vec{F}_{\mu\nu}' = \vec{F}_{\mu\nu}^{(0)} + \delta\vec{\theta} \times \vec{F}_{\mu\nu}^{(0)} + \partial_\mu \delta\vec{\theta} \times \vec{A}_\nu - \partial_\nu \delta\vec{\theta} \times \vec{A}_\mu \quad (1.39)$$

com $\vec{F}_{\mu\nu}^{(0)} \equiv \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu$ (repare que ele não se transforma de maneira homogênea). Por outro lado, analisando a transformação do termo $\vec{F}_{\mu\nu}^{(1)} \equiv g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu$ (g é uma constante de acoplamento):

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mu\nu}^{(1)} \mapsto \vec{F}_{\mu\nu}'^{(1)} &= \vec{F}_{\mu\nu}^{(1)} + \delta\vec{\theta} \times g(\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu) + g\partial_\mu \vec{\lambda} \times \partial_\nu \vec{\lambda} - g\partial_\mu \vec{\lambda} \times \vec{A}_\nu - g\vec{A}_\mu \times \partial_\nu \vec{\lambda} \\ &\quad - g(\delta\vec{\theta} \cdot \partial_\nu \vec{\lambda})\vec{A}_\mu + g(\delta\vec{\theta} \cdot \partial_\mu \vec{\lambda})\vec{A}_\nu - g(\partial_\mu \vec{\lambda} \cdot \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{\lambda} \cdot \vec{A}_\mu)\delta\theta, \end{aligned}$$

⁸ Por global, entende-se transformações que não dependem do ponto no espaço-tempo no qual os campos são calculados.

onde desprezamos os termos de ordem $\mathcal{O}(\delta\theta^2)$. Perceba que definindo $\vec{\lambda} = \frac{1}{g}\vec{\theta}$ e novamente desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(\delta\theta^2)$,

$$\vec{F}'_{\mu\nu} = \vec{F}_{\mu\nu} + \delta\vec{\theta} \times \vec{F}_{\mu\nu} - \partial_\mu\delta\vec{\theta} \times \vec{A}_\nu + \partial_\nu\delta\vec{\theta} \times \vec{A}_\mu, \quad (1.40)$$

cancela-se os termos problemáticos na transformação. Por esse motivo, defini-se o novo tensor dos campos como $\vec{F}'_{\mu\nu} \equiv \vec{F}_{\mu\nu} + \delta\vec{F}_{\mu\nu}$ a fim de gerar um objeto que se transforme de maneira homogênea:

$$\vec{F}'_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \quad (1.41)$$

$$\vec{F}'_{\mu\nu} \mapsto \vec{F}_{\mu\nu} + \delta\vec{\theta} \times \vec{F}_{\mu\nu}. \quad (1.42)$$

Portanto, a transformação no campo de calibre que deixa a teoria invariante para o novo tensor dos campos é

$$\vec{A}_\mu \mapsto \vec{A}_\mu + \delta\vec{\theta} \times \vec{A}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\delta\vec{\theta}. \quad (1.43)$$

Entretanto, ainda é necessário lidar com as equações de movimento, pois se \vec{v} se transforma como $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \delta\vec{\theta} \times \vec{v}$, sua derivada não se transforma de maneira adequada:

$$\partial_\mu\vec{v} \mapsto \partial_\mu\vec{v} + \delta\vec{\theta} \times \partial_\mu\vec{v} + \partial_\mu\delta\vec{\theta} \times \vec{v}.$$

Entretanto, redefinindo também a derivada para

$$D_\mu\vec{v} \equiv \partial_\mu\vec{v} - g\vec{A}_\mu \times \vec{v} \quad (1.44)$$

esse problema é resolvido, pois ela se transformará como

$$\begin{aligned} D_\mu\vec{v} \mapsto D'_\mu\vec{v}' &= \partial_\mu\vec{v} - \vec{A}_\mu \times \vec{v} + \delta\vec{\theta} \times (\partial_\mu\vec{v} - \vec{A}_\mu \times \vec{v}) + \mathcal{O}(\delta\theta^2) \\ &= D_\mu\vec{v} + \delta\vec{\theta} \times D_\mu\vec{v}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Essa é a chamada *derivada covariante*. Ela atua em vetores no espaço de cor como em (1.44). Portanto, as equações de campo serão

$$D_\mu\vec{F}^{\mu\nu} = \vec{j}^\nu. \quad (1.46)$$

Note que essas equações são não-lineares devido a auto-interação do campo de calibre.

Existe uma propriedade extra nessas equações de movimento que é análoga a equação da continuidade para o eletromagnetismo. Atuando uma derivada covariante contraída em ambos lados da equação anterior ficamos com

$$D_\nu D_\mu\vec{F}^{\mu\nu} = D_\nu\vec{j}^\nu.$$

Como $D_\nu D_\mu$ é simétrico e $\vec{F}^{\mu\nu}$ é antissimétrico, temos

$$D_\nu\vec{j}^\nu = 0 \quad (1.47)$$

identicamente. Essa equação seria o análogo à equação da continuidade para o caso em que o campo de calibre possui auto-interação. Exploraremos essa “conservação covariante” da corrente na seção 1.4.

Por fim, voltemos no exemplo da partícula pontual. Suponha que a carga de cor possa variar e dependa do tempo próprio. Se a corrente associada a partícula é

$$\vec{j}^\mu = \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{q}(\tau') \omega^\mu(\tau') \delta^{(4)}(x - z(\tau')) d\tau' \quad (1.48)$$

e (1.47) é válida, temos que

$$\begin{aligned} D_\mu \vec{j}^\mu &= \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\frac{d\vec{q}}{d\tau} + g \vec{A}_\mu \times \vec{q} \omega^\mu(\tau') \right) \delta^{(4)}(x - z(\tau)) d\tau' = 0 \\ \implies \frac{d\vec{q}}{d\tau} + g \vec{A}_\mu \times \vec{q} \omega^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Essa equação nos diz que a magnitude do vetor no espaço de cor é constante, pois

$$\frac{d|\vec{q}|^2}{d\tau} = 2\vec{q} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} = -2g \vec{q} \cdot (\vec{A}_\mu \times \vec{q} \omega^\mu) = 0.$$

Ou seja, o vetor \vec{q} pode apenas precessionar no espaço de cor. Já a equação dinâmica para a partícula permanece (1.33) e é invariante pelas transformações gerais locais.

Completamos então um protótipo para a teoria de Yang-Mills. Começamos com o eletromagnetismo e definimos uma teoria a qual demos o nome de eletromagnetismo de cor que nada mais era que três eletromagnetismos desacoplados. Nessa teoria, ainda estávamos munidos de simetria de calibre, mas surgiram graus de liberdade extra: rotações globais no espaço de cor. Ao promover a simetria geral de global para local, ela deixa de ser abeliana e passa a ser não-abeliana, pois o campo de calibre se transforma de maneira não homogênea. Com isso, é necessário modificar o tensor dos campos e a derivada para que eles se transformem de maneira homogênea. Essa teoria com transformações de calibre locais é a teoria de Yang-Mills. Na verdade, sendo mais rigoroso, construímos Yang-Mills para o grupo de simetria $SU(2)$.

1.3.3 Teoria de Yang-Mills *in a nutshell*

Na subseção anterior, introduzimos a teoria de Yang-Mills estendendo o grupo de simetria do eletromagnetismo. Agora, iremos formalizá-la seguindo (MORIYASU, 1983; FRAMPTON, 2008; RUBAKOV, 2009) e, principalmente, o apêndice de (BLASCHKE et al., 2016).

Considere G um grupo de Lie compacto com álgebra \mathcal{G} associada cujos elementos de base são $\{T_a, a = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{G}\}$ em que $\dim \mathcal{G}$ é a dimensão da álgebra. Esses elementos relacionam-se entre si através da relação de comutação $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ com f_{abc} as constantes de estrutura. Assumiremos também que \mathcal{G} é semi-simples, pois assim as

constantes de estrutura são totalmente antissimétricas. Além disso, os elementos da base são hermitianos e têm traço nulo.

Por ser um grupo de Lie, o elemento do grupo, denotado por g , depende de um número $\dim\mathcal{G}$ de parâmetros reais, θ_a . Nas proximidades da identidade do grupo, tal elemento é escrito como uma exponenciação dos elementos da álgebra:

$$g = e^{-ie\theta} \approx \mathbb{I} - ie\theta \text{ com } \theta = \theta_a T_a, \quad (1.50)$$

onde e é a constante de acoplamento.

O campo de matéria será considerado como um multipletto relativístico e complexo com número de componentes igual a dimensão do grupo. Esse campo assume valores na álgebra de Lie, $\varphi = \varphi_a T_a$, e se transforma de acordo com uma representação matricial unitária do grupo:

$$\varphi \mapsto g\varphi; \quad (1.51)$$

$$\varphi^\dagger \mapsto \varphi^\dagger g^{-1}. \quad (1.52)$$

Para transformações ditas locais, os parâmetros θ são funções no espaço-tempo.

A fim de construir a ação para uma certo modelo em teoria de campos com simetria de calibre não abeliana, são necessárias as derivadas do campo escalar. No entanto, a dinâmica de φ com a derivada usual não é invariante de calibre, pois $\partial_\mu\varphi$ não se transforma de maneira covariante:

$$\partial_\mu\varphi \mapsto \partial_\mu(g\varphi) = \partial_\mu g\varphi + g\partial_\mu\varphi.$$

Por esse motivo, inclui-se um campo real na ação, o campo de calibre, que é denotado por $A_\mu(x) = A_\mu{}_a(x)T_a$ e que também assume valores na álgebra. Com esse campo, a derivada covariante é dada por:

$$D_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi; \quad (1.53)$$

$$D_\mu\varphi^\dagger \equiv (D_\mu\varphi)^\dagger = \partial_\mu\varphi^\dagger + ie\varphi^\dagger A_\mu. \quad (1.54)$$

Ou, em termos dos índices da álgebra:

$$D_\mu\varphi_a = \partial_\mu\varphi_a + ef_{abc}A_\mu{}_b\varphi_c.$$

Por definição $D_\mu\varphi \mapsto gD_\mu\varphi$, logo a derivada covariante se transforma por $D_\mu \mapsto gD_\mu g^{-1}$ e o campo de calibre por

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi \mapsto (D_\mu\varphi)' &= \partial_\mu(g\varphi) - ieA'_\mu(g\varphi) \\ &= g[g^{-1}\partial_\mu g\varphi + \partial_\mu\varphi - ieg^{-1}A'_\mu(g\varphi)] \\ &= g[\partial_\mu - ie(g^{-1}A'_\mu g + \frac{i}{e}g^{-1}\partial_\mu g)]\varphi \\ \implies A'_\mu &= gA_\mu g^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\mu g g^{-1}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

O comutador dessas derivadas determina o tensor dos campos:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\varphi &= -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu])\varphi \\ \implies [D_\mu, D_\nu] &\equiv -ieF_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

que se transforma homogeneamente com a representação adjunta:

$$F_{\mu\nu} \mapsto gF_{\mu\nu}g^{-1}. \quad (1.57)$$

Além disso, ele também obedece a identidade de Bianchi:

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \quad (1.58)$$

Definindo o dual do tensor dos campos como $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\beta}F^{\lambda\beta}$, essa identidade pode também ser escrita de forma simplificada por

$$D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.59)$$

Escolheremos a base da álgebra de tal maneira que a sua forma de traço seja $Tr(T_a T_b) = \delta_{ab}$. Assim, a dinâmica de uma teoria de Yang-Mills pura será dada por

$$\mathcal{S}_{YM} = \int_\Omega d^4x \operatorname{Tr} \left(-\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} \right) = -\frac{1}{4} \int_\Omega d^4x F_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu}. \quad (1.60)$$

Essa teoria é invariante por transformações de calibre (1.57).

Uma teoria simples com simetria de calibre que dita a dinâmica de φ é

$$\mathcal{S}_H = \int_\Omega d^4x \left(D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi - \mathcal{U}(|\varphi|) \right). \quad (1.61)$$

Nesse modelo, o campo de calibre é mero espectador, sem dinâmica própria. Construiremos uma teoria mais interessante para descrever uma interação combinando (1.60) e (1.61), pois assim ambos campos têm dinâmica e esta, por sua vez, é acoplada. Essa teoria será chamada de Yang-Mills-Higgs:

$$\mathcal{S} = \int_\Omega d^4x \left\{ \operatorname{Tr} \left(-\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} \right) + D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi - \mathcal{U}(|\varphi|) \right\}. \quad (1.62)$$

O primeiro termo representa a contribuição de Yang-Mills com o tensor dos campos ditando a evolução do campo de calibre. O segundo termo descreve a cinética do campo de matéria, que se acopla com o campo de calibre através da derivada covariante. O último termo é potencial que restringe o comportamento do campo de matéria.

Por simplicidade, tomaremos o potencial como em (1.11), ou seja, $\mathcal{U} = m^2 \varphi^\dagger \varphi$. Considere variações arbitrárias na ação⁹ (1.62):

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega d^4x \left\{ \operatorname{Tr} \left(-\frac{F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}}{2} \right) + \delta D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi + D_\mu \varphi^\dagger \delta D^\mu \varphi - m^2 \delta \varphi^\dagger \varphi - m^2 \varphi^\dagger \delta \varphi \right\}. \quad (1.63)$$

⁹ Neste ponto, vale lembrar que estamos lidando com representações matriciais e, entre as muitas propriedades do traço, há duas em particular que usaremos frequentemente ao longo do texto. A primeira é a simétrica, $Tr(AB) = Tr(BA)$, e a segunda é a cíclica, $Tr(A[B, C]) = Tr(B[C, A]) = Tr(C[A, B])$, onde A , B e C são matrizes.

O primeiro termo pode ser reorganizado como

$$Tr \left(-\frac{F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}}{2} \right) = Tr \{ -\partial_\mu(F^{\mu\nu}\delta A_\nu) + D_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu \}. \quad (1.64)$$

O segundo e terceiro serão:

$$\delta D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi = \partial_\mu(\delta\varphi^\dagger D^\mu \varphi) - \delta\varphi^\dagger D_\mu D^\mu \varphi - ie(D^\mu \varphi)\varphi^\dagger \delta A_\mu; \quad (1.65)$$

$$D_\mu \varphi^\dagger \delta D^\mu \varphi = \partial_\mu(D^\mu \varphi^\dagger \delta\varphi) - D_\mu D^\mu \varphi^\dagger \delta\varphi + ie\varphi(D^\mu \varphi^\dagger)\delta A_\mu. \quad (1.66)$$

Substituindo (1.64), (1.65) e (1.66) em (1.63):

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega d^4x \{ \partial_\mu K^\mu + \varepsilon_A^\mu{}_a \delta A_{\mu a} - \delta\varphi^\dagger \varepsilon_\varphi - \varepsilon_{\varphi^\dagger} \delta\varphi \}, \quad (1.67)$$

onde definimos

$$K^\mu \equiv -Tr(F^{\mu\nu}\delta A_\nu) + \delta\varphi^\dagger D^\mu \varphi + D^\mu \varphi^\dagger \delta\varphi; \quad (1.68)$$

$$j_a^\nu \equiv ie(\varphi^\dagger T_a D^\nu \varphi - D^\nu \varphi^\dagger T_a \varphi); \quad (1.69)$$

$$\varepsilon_\varphi \equiv D_\mu D^\mu \varphi + m^2 \varphi; \quad (1.70)$$

$$\varepsilon_{\varphi^\dagger} \equiv D_\mu D^\mu \varphi^\dagger + m^2 \varphi^\dagger; \quad (1.71)$$

$$\varepsilon_A^\nu{}_a \equiv D_\mu F_a^{\mu\nu} - j_a^\nu. \quad (1.72)$$

Sendo as variações arbitrárias, o termo com $\partial_\mu K^\mu$ se anula nas bordas. Além disso, pelo princípio da ação estacionária, as equações de movimento são

$$D_\mu F_a^{\mu\nu} = j_a^\nu; \quad (1.73)$$

$$D_\mu D^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0; \quad (1.74)$$

$$D_\mu D^\mu \varphi^\dagger + m^2 \varphi^\dagger = 0. \quad (1.75)$$

Em conjunto com a identidade de Bianchi, equação (1.59), descrevemos completamente do campo de calibre e o campo de matéria na teoria de Yang-Mills-Higgs.

1.4 O problema da carga em teorias não abelianas

A conservação da carga surge naturalmente através de uma equação da continuidade, conforme estabelecido pelo teorema de Noether, ou diretamente das equações de movimento na eletrodinâmica (ver seção 1.2). Entretanto, existe um problema em aberto desde o surgimento da teoria de Yang-Mills em 1954 (YANG; MILLS, 1954) que é a dificuldade em se definir uma carga conservada e invariante de calibre, uma vez que as equações de movimento permitem apenas a conservação covariante da corrente externa:

$$\begin{aligned} D_\nu j^\nu &= D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu]F^{\mu\nu} = ie\frac{1}{2}[F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}] = 0 \\ \implies D_\nu j^\nu &= 0. \end{aligned} \quad (1.76)$$

onde usamos a relação (1.56) na terceira passagem.

No entanto, é possível reorganizar a equação de movimento da seguinte maneira:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu + ie[A_\mu, F^{\mu\nu}] \equiv J^\nu, \quad (1.77)$$

definindo uma nova corrente (SCHLIEDER, 1981; LAI; OH, 1984; WEIJUN, 2017) como $J^\nu \equiv j^\nu + ie[A_\mu, F^{\mu\nu}]$, que será chamada de corrente total. Assim, é possível escrever uma equação da continuidade:

$$\partial_\nu J^\nu = 0. \quad (1.78)$$

Essa abordagem nos levaria ingenuamente a crer na solução do problema de carga na teoria de Yang-Mills: basta considerar a corrente como tendo uma contribuição externa, j^ν , e uma contribuição do próprio campo, $ie[A_\mu, F^{\mu\nu}]$. Propagando este erro, a carga poderia ser definida de maneira análoga a (1.26):

$$Q \equiv \int_{\Omega_S} d^3x J^0 = \underbrace{\int_{\Omega_S} d^3x j^0}_{\text{contribuição da fonte}} + \underbrace{ie \int_{\Omega_S} d^3x [A_i, F^{i0}]}_{\text{contribuição do campo}}, \quad (1.79)$$

onde Ω_S é a parte espacial de Ω . A condição de conservação seria então

$$\frac{d}{dt}Q = - \oint_{\partial\Omega_S} dS_i J^i \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 (\vec{J} \cdot \hat{r}) = 0. \quad (1.80)$$

O equívoco está em desconsiderar que, além de conservada, a carga precisa ser invariante de calibre, garantindo que a conservação em um certo calibre continue válida em todos os outros.

Em teorias não abelianas, além dos campos se transformarem, a corrente também o fará, pois assume valores na álgebra. Deduzir a forma com que a corrente muda não é difícil, basta lembrar das transformações de calibre da seção anterior:

$$F_{\mu\nu} \mapsto g F_{\mu\nu} g^{-1}; \quad (1.81)$$

$$A_\mu \mapsto g A_\mu g^{-1} - \frac{i}{e} \partial_\mu g g^{-1}; \quad (1.82)$$

$$D_\mu \mapsto g D_\mu g^{-1}. \quad (1.83)$$

Substituindo diretamente na equação dinâmica (1.73), obtém-se:

$$\begin{aligned} D'_\mu F^{\mu\nu} &= j'^\nu \\ g D_\mu F^{\mu\nu} g^{-1} &= j'^\nu \\ \implies j'^\nu &= g j^\nu g^{-1}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Com a transformação da corrente em mãos, considere-a na possível carga (1.79):

$$Q \mapsto Q' = \int_{\Omega_S} d^3x g(x) J^0 g^{-1}(x) + \int_{\Omega_S} d^3x g(x) [g^{-1}(x) \partial_i g(x), F^{i0}] g^{-1}(x). \quad (1.85)$$

Observe que a carga não se transforma de maneira homogênea e, portanto, seu traço não é invariante de calibre. Além disso, nem sequer é possível garantir que a carga se conserve nesse novo calibre¹⁰, pois

$$J^i \mapsto J^i = g(x)J^i g^{-1}(x) + g(x)[g^{-1}(x)\partial_\mu g(x), F^{\mu i}]g^{-1}(x), \quad (1.86)$$

ou seja, (1.80) não é necessariamente satisfeita. Portanto, o problema persiste.

Vale ressaltar que ao promover a simetria de local para global, ou seja, considerando \bar{g} tal que $\partial_\mu \bar{g} = 0$, a carga se transforma de maneira homogênea e seu traço é invariante de calibre, pois

$$Q \mapsto \bar{g} Q \bar{g}^{-1}; \quad (1.87)$$

$$J^i \mapsto \bar{g} J^i \bar{g}^{-1}. \quad (1.88)$$

Portanto, o problema da carga é exclusivo para a simetria local.

Poderíamos cogitar abordar esse problema através do teorema de Noether assim como na seção 1.2. No entanto, é necessária precaução, pois poderíamos concluir que a promoção da simetria de global para local aumenta o número de graus de liberdade levando a correntes extras (KARATAS; KOWALSKI, 1990). A utilização correta do teorema de Noether, implica na corrente conservada como a própria corrente total (AL-KUWARI; TAHA, 1991), definida pela equação (1.77).

No trabalho de Al-Kuwari e Taha, eles utilizam as equações dinâmicas ao aplicar o teorema de Noether. Entretanto, elas não são necessárias, como discutido anteriormente no caso abeliano (seção 1.2). Para ilustrar esse ponto também no caso não abeliano, consideraremos a ação do modelo de Yang-Mills-Higgs, dada em (1.62). A variação da ação é dada em (1.67) e usando as transformações infinitesimais de calibre, $\delta\varphi = -i\theta\varphi$, $\delta\varphi^\dagger = i\varphi^\dagger\theta$ e $\delta A_\mu = -D_\mu\theta$, obtemos:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \{ \partial_\mu K^\mu - \varepsilon_A^\mu D_\mu\theta_a - ie\varphi^\dagger\theta\varepsilon_\varphi + ie\varepsilon_{\varphi^\dagger}\theta\varphi \}. \quad (1.89)$$

Reorganizando essa expressão, temos:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \{ \partial_\mu(K^\mu - \theta_a\varepsilon_A^\mu) \} + \int_{\Omega} d^4x \{ \theta_a D_\mu\varepsilon_A^\mu + ie\theta_a(\varepsilon_{\varphi^\dagger}T_a\varphi - \varphi^\dagger T_a\varepsilon_\varphi) \}. \quad (1.90)$$

Após um pouco de trabalho algébrico, com auxílio das equações (1.69) à (1.72), chegamos em

$$ie(\varepsilon_{\varphi^\dagger}T_a\varphi - \varphi^\dagger T_a\varepsilon_\varphi) = D_\mu j_a^\mu.$$

Assim, (1.90) será

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{\Omega} d^4x \{ \partial_\mu(K^\mu - \theta_a\varepsilon_A^\mu) \} + \int_{\Omega} d^4x \{ \theta_a(D_\mu(D_\nu F_a^{\nu\mu} - j_a^\mu) + D_\mu j_a^\mu) \} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \{ \partial_\mu(K^\mu - \theta_a\varepsilon_A^\mu) \} + \int_{\Omega} d^4x \{ \theta_a D_\mu D_\nu F_a^{\nu\mu} \}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

¹⁰ No apêndice H, ilustramos esse fato com um exemplo explícito interessante.

A primeira integral será nula ao exigir θ como zero nas bordas do espaço-tempo. Portanto, o teorema de Noether para a simetria de calibre em uma teoria não abeliana fornece a seguinte expressão:

$$\delta\mathcal{S} = 0 \iff D_\mu D_\nu F^{\nu\mu} = 0. \quad (1.92)$$

Dessa forma, a corrente de Noether será

$$j_{Noether}^\mu = D_\nu F^{\mu\nu}. \quad (1.93)$$

Note a não necessidade das condições *on-shell* na dedução da corrente conservada. No entanto, essa corrente será identificada como a corrente de matéria somente ao exigir a validade das equações de movimento. Portanto, até mesmo quando aplicamos o teorema de Noether, não conseguimos definir a equação de continuidade para a corrente de matéria.

Como última observação, note que se impuséssemos as equações dinâmicas ainda na variação da ação, equação (1.89), teríamos:

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega d^4x \partial_\mu K^\mu. \quad (1.94)$$

O integrando dessa expressão pode ser reorganizado como

$$\begin{aligned} \partial_\mu K^\mu &= \partial_\mu (F_a^{\mu\nu} D_\nu \theta_a + ie\theta_a \varphi^\dagger T_a D^\mu \varphi - ie\theta_a D^\mu \varphi^\dagger T_a \varphi) \\ &= -\partial_\mu J_a^\mu \theta_a + (D_\nu F_a^{\nu\mu} - j_a^\mu) \partial_\mu \theta_a + F_a^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \theta_a \\ &= -\partial_\mu J_a^\mu \theta_a. \end{aligned}$$

Esse resultado é comumente chamado de teorema de Noether na literatura, mas ele não é verdadeiramente o proposto por Noether em 1918 (NOETHER, 1918). Apesar dessa diferença, seu resultado ainda assim é a conservação da corrente total e não da corrente de matéria e, portanto, ainda é problemático.

1.5 Propostas para a carga conservada e invariante de calibre

Diversas propostas foram feitas na tentativa de solucionar o problema das cargas em Yang-Mills. Na seção 4, exploraremos a proposta de L.A. Ferreira e G. Luchini em 2012 (FERREIRA; LUCHINI, 2012b). Antes disso, na presente seção, apresentaremos duas outras. Uma das quais envolve restrições das transformações na borda do espaço-tempo, enquanto a outra introduz um campo escalar extra para definir uma corrente invariante de calibre.

Primeira proposta: restringir as transformações de calibre

A carga total se transforma segundo (1.85):

$$Q \mapsto Q' = \int_{\Omega_S} d^3x g(x) J^0 g^{-1}(x) + \int_{\Omega_S} d^3x g(x) [g^{-1}(x) \partial_i g(x), F^{i0}] g^{-1}(x).$$

Suponha uma restrição nas transformações de calibre¹¹ por $g(x_0, x_i) \rightarrow g(x_0)$ na borda, i.e. quando $r \rightarrow \infty$. O segundo termo se anula, restando apenas

$$Q \mapsto Q' = g(x_0) \left(\int_{\Omega_S} d^3x J^0 \right) g^{-1}(x_0) = g(x_0) Q g^{-1}(x_0). \quad (1.95)$$

Portanto, a carga fica covariante. Porém, a corrente ainda se transforma como

$$J^i \mapsto J'^i = g(x_0) J^i g^{-1}(x_0) + g(x_0) [g^{-1}(x_0) \partial_0 g(x_0), F^{0i}] g^{-1}(x_0) \quad (1.96)$$

e a derivada temporal da carga por

$$\frac{dQ'}{dt} = g(x_0) \frac{dQ}{dt} g^{-1}(x_0) + \underbrace{g(x_0) \int_{\Omega_S} d^3x [g^{-1}(x_0) \partial_0 g(x_0), J^0]}_{\text{termo problemático}} g^{-1}(x_0). \quad (1.97)$$

Logo, ainda não é possível garantir a conservação da carga como independente do calibre.

Introduzindo, então, condições de contorno ainda mais restritivas,

$$r \rightarrow \infty \quad g(x) \rightarrow \bar{g},$$

onde \bar{g} é uma constante, tem-se a conservação da carga em todos os calibres (desde que eles satisfaçam essa condição) pois

$$Q \mapsto \bar{g} Q \bar{g}^{-1}; \quad (1.98)$$

$$J^i \mapsto \bar{g} J^i \bar{g}^{-1}; \quad (1.99)$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \mapsto \frac{dQ'}{dt} = \bar{g} \frac{dQ}{dt} \bar{g}^{-1} = 0. \quad (1.100)$$

Por fim, basta construir a carga invariante de calibre através de

$$\mathcal{Q} \equiv \sqrt{Q_a Q_a} = \sqrt{\text{Tr}(Q^2)}. \quad (1.101)$$

Entretanto, descartar parte das transformações de calibre não parece natural. Além disso, essa restrição compactifica a parte espacial do espaço-tempo de \mathbb{R}^3 para S^3 , não permitindo soluções de monopolos magnéticos, como apontado por (JACKIW, 1980).

Segunda proposta: corrente total invariante de calibre

Discutiremos agora uma alternativa adicional para a carga invariante de calibre sem impor condições de contorno restritivas sobre o grupo de calibre. Nesta subseção, referencia-se (BO-YU, 1982; LAI; OH, 1984; WEIJUN, 2017).

¹¹ Embora não tenhamos uma atribuição específica a esta abordagem, deixa-se como referência (JACKIW, 1980; LAI; OH, 1984; WEIJUN, 2017).

O problema na definição da carga está na transformação não homogênea de A_μ , pois ela leva J^μ a se transformar também de maneira não homogênea, ver equações (1.85) e (1.86), como

$$J^\mu \mapsto J'^\mu = gJ^\mu g^{-1} - \frac{i}{e}g[g^{-1}\partial_\nu g, F^{\nu\mu}]g^{-1}. \quad (1.102)$$

A fim de tornar J^ν invariante de calibre, vamos postulá-lo diretamente a partir de um tensor dos campos também invariante de calibre. Isso será alcançado escolhendo uma direção no espaço interno através de um campo escalar $\eta(x)$, que é unitário na álgebra:

$$\eta(x) = \eta_a(x)T_a; \quad (1.103)$$

$$\eta_a\eta_a = \text{Tr}(\eta^2) = \mathbb{I}; \quad (1.104)$$

$$\eta \mapsto g\eta g^{-1}. \quad (1.105)$$

Então o novo tensor dos campos, que também é um escalar na álgebra, será

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv F_a^{\mu\nu}\eta_a. \quad (1.106)$$

Atuando uma derivada usual nesse novo campo, tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} &= \partial_\mu F_a^{\mu\nu}\eta_a + F_a^{\mu\nu}\partial_\mu \eta_a \\ &= j_a^\nu \eta_a + ie[A_\alpha, F^{\alpha\nu}]_a \eta_a + F_a^{\mu\nu}\partial_\mu \eta_a \\ &= j_a^\nu \eta_a + D_\mu \eta_a F_a^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Portanto, define-se a corrente invariante como

$$\mathcal{J}^\nu \equiv \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j_a^\nu \eta_a + D_\mu \eta_a F_a^{\mu\nu}. \quad (1.108)$$

Observe que o primeiro termo é a contribuição da corrente externa e o segundo é a contribuição da auto-interação do campo. Dessa forma, a corrente satisfaz

$$D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\nu, \quad (1.109)$$

pois \mathcal{J}^ν é um escalar na álgebra, logo o comutador $-ie[A_\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}]$ se anula. Isso implica que a equação da continuidade e a equação da conservação covariante são satisfeitas:

$$\partial_\nu \mathcal{J}^\nu = \partial_\nu \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.110)$$

$$D_\nu \mathcal{J}^\nu = D_\nu D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.111)$$

Apesar de construirmos a corrente requerida, precisamos garantir que de fato ela seja invariante de calibre e, por esse motivo, é necessário determinar como suas componentes no espaço interno se transformam. Para isso, imaginemos que exista uma conexão, digamos h , tal que a direção do vetor η seja preservada em qualquer ponto no espaço-tempo, i.e.

$$D_\mu^{(h)}\eta \equiv \partial_\mu \eta + [h_\mu, \eta] = 0. \quad (1.112)$$

Além disso, queremos que esse transporte paralelo seja preservado em qualquer calibre. Nesse caso, a conexão h se transforma por

$$\begin{aligned}
D_\mu^{(h)}\eta = 0 &\mapsto D'_\mu^{(h')}\eta' = 0 \\
&\partial_\mu(g\eta g^{-1}) + [h'_\mu, g\eta g^{-1}] = 0 \\
&\partial_\mu g\eta g^{-1} - g\eta g^{-1}\partial_\mu g g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} + [h'_\mu, g\eta g^{-1}] = 0 \\
&[h'_\mu, g\eta g^{-1}] = g([h_\mu, \eta] + [\eta, g^{-1}\partial_\mu g])g^{-1} \\
&[h'_\mu, g\eta g^{-1}] = [gh_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1}, g\eta g^{-1}] \\
&h'_\mu = gh_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.113}$$

Suponha também que é possível resolver o campo de calibre em duas partes¹²: $A_\mu = h_\mu + k_\mu$, onde h_μ é a já mencionada conexão responsável por transportar η paralelamente. É fácil deduzir qual a lei de transformação de k_μ já conhecendo aquela de h_μ e A_μ . Vejamos:

$$\begin{aligned}
A'_\mu &= gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\
h'_\mu + k'_\mu &= gh_\mu g^{-1} + gk_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\
h'_\mu + k'_\mu &= h'_\mu + gk_\mu g^{-1} \\
\implies k'_\mu &= gk_\mu g^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.114}$$

Substituindo essa nova forma de decompor A_μ na corrente invariante (1.108):

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\nu &= j_a^\nu \eta_a + D_\mu \eta_a F_a^{\mu\nu} \\
&= j_a^\nu \eta_a + \partial_\mu \eta_a F_a^{\mu\nu} + [h_\mu + k_\mu, \eta]_a F_a^{\mu\nu} \\
&= j_a^\nu \eta_a + D_\mu^{(h)} \eta_a F_a^{\mu\nu} + [k_\mu, F^{\mu\nu}]_a \eta_a \\
&= (j_a^\nu + [k_\mu, F^{\mu\nu}]_a) \eta_a \\
\implies \mathcal{J}'^\nu &= j_a^\nu + [k_\mu, F^{\mu\nu}]_a.
\end{aligned} \tag{1.115}$$

Agora, fica evidente que as componentes de \mathcal{J}^ν se transformam de maneira covariante,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}'^\nu &\mapsto \mathcal{J}_a^{\prime\nu} = j_a^{\prime\nu} + [k'_\mu, F^{\prime\mu\nu}]_a \\
&= g(j_a^\nu + [k_\mu, F^{\mu\nu}]_a)g^{-1} \\
\implies \mathcal{J}_a^{\prime\nu} &= g\mathcal{J}_a^\nu g^{-1},
\end{aligned} \tag{1.116}$$

levando a \mathcal{J}^ν se transformar de maneira invariante, pois η também é covariante.

A carga invariante total será definida a partir da corrente invariante conservada por

$$\mathcal{Q} \equiv \int_{\Omega_S} d^3x \mathcal{J}^0(x) = \int_{\Omega_S} d^3x \partial_i \mathcal{F}^{i0} = \int_{\partial\Omega_S} dS_i \mathcal{F}^{i0}. \tag{1.117}$$

¹² Essa decomposição da conexão é chamada de decomposição de Cho. Ver (DEHGHAN; DELDAR, 2019).

Novamente, essa carga é conservada se \mathcal{J}^i se anula rápido o suficiente para $r \rightarrow \infty$,

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = - \int_{\partial\Omega_S} dS_i \mathcal{J}^i. \quad (1.118)$$

Também é possível decompor a carga em partes que provêm ou da fonte externa ou do campo. Por (1.115) e (1.117):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \underbrace{\int_{\Omega_S} d^3x j_a^0 \eta_a}_{\equiv \mathcal{Q}_{fonte}} + \underbrace{\int_{\Omega_S} d^3x [k_i, F^{i0}]_a \eta_a}_{\equiv \mathcal{Q}_{campo}} \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{Q}_{fonte} + \mathcal{Q}_{campo}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Como observações finais, é importante ressaltar novamente que, por construção, a lei de conservação e a carga são invariantes sem a necessidade de impor restrições sobre as transformações de calibre. Entretanto, é necessário estabelecer uma direção inicial no espaço interno e garantir que essa escolha seja preservada. Por esse motivo, definimos uma conexão h_μ que faz parte da decomposição de A_μ como $h_\mu + k_\mu$.

Note ainda que, de acordo com (1.119), a conexão h_μ não contribui para a dinâmica do campo como uma “carga”, apenas a conexão k_μ o faz. Efetivamente, estamos decompondo o campo A_μ em uma parte que preserva a direção de η e outra parte que contribui para a dinâmica do tensor dos campos.

2 Holonomias

No capítulo anterior, apresentamos as teorias de calibre abelianas (eletromagnetismo) e não abelianas (Yang-Mills). Discutimos como derivar a conservação da carga elétrica no eletromagnetismo a partir do teorema de Noether e destacamos o problema intrínseco nas teorias não abelianas ao definir a conservação da carga. Para abordar esse problema, é necessário formular as teorias de Yang-Mills na versão integral, e um conceito-chave nesse processo são as holonomias generalizadas. Nesse capítulo, pretendemos descrever a equação da holonomia¹, escrever detalhadamente como solucioná-la e discutir as holonomias generalizadas fornecendo também sua solução.

2.1 Transporte paralelo

Um campo é um objeto matemático que leva pontos do espaço-tempo para a variedade dos campos (BAEZ; MUNIAIN, 1994). Introduzimos, no capítulo anterior, apesar de não mencionar diretamente, as teorias de calibre assumindo que cada ponto na variedade alvo possuía graus de liberdade extras. Podemos estender essa ideia assumindo que esses pontos suportam um espaço vetorial associada. Essa estrutura, descrita sem rigor matemático, e conhecida como feixe e cada espaço vetorial na variedade dos campos e chamada de fibra (ver apêndice C).

Em Física, interessa-nos o comportamento do campo quando mudamos a coordenada do espaço-tempo em que calculamos o valor do campo. A análise dessa variação é feita através do conceito de derivada; nela tomamos a diferença do valor do campo em dois pontos diferentes e depois fazemos a diferença ser infinitesimal. Contudo, devido aos novos graus de liberdade na variedade alvo, o campo levará pontos do espaço-tempo de Minkowski em vetores em espaços vetoriais diferentes e não existe maneira trivial e única de subtrair vetores em espaços vetoriais diferentes. O problema é resolvido ampliando o conceito de derivada para a chamada derivada covariante. Esse operador leva o campo em um ponto sobre a variedade alvo em outro e se transforma de maneira covariante com o grupo de calibre. Nesse processo, introduzimos um campo extra que funciona como conexão², assumindo valores na álgebra do grupo de simetria e se transformando de maneira não homogênea com o grupo.

Sendo possível comparar campos em espaços vetoriais diferentes, surge mais um

¹ A holonomia é o operador transporte paralelo sobre caminhos fechados. Neste trabalho, também nos referiremos ao operador transporte paralelo sobre um caminho aberto (comumente chamado de linha de Wilson) como holonomia.

² Na literatura de feixes e fibrados, esse campo é chamado de potencial e a derivada covariante que é a conexão. Entretanto, adotaremos o jargão de físicos.

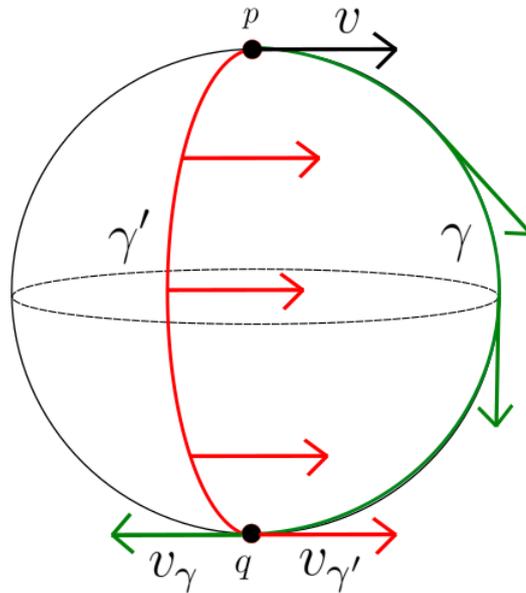


Figura 1 – Transporte paralelo em uma esfera por diferentes caminhos.

problema: transportar o valor do campo entre pontos na variedade alvo. Isso é feito através do transporte paralelo e é possível mostrar que tal procedimento é único para um certo caminho. Repare que o transporte do vetor sobre o caminho não precisaria, a priori, ser paralelo, entretanto a fim de preservar o vetor e, conseqüentemente, a informação física contida no mesmo, impomos que a direção do vetor seja preservada. Essa frase lembra a ideia original de Weyl (seção 1.1) e um exemplo simples é o transporte paralelo entre vetores sobre a superfície da esfera S^2 . Dados dois caminhos como na figura 1, o resultado do transporte do vetor u depende da escolha de γ_1 ou γ_2 , mas, definido o caminho, a translação desse vetor é única. Outro exemplo mais trivial é o espaço euclidiano que, devido a curvatura nula, independente do caminho escolhido o resultado é o mesmo.

Nesta seção, queremos introduzir o conceito de transporte paralelo e, para isso, partimos do simples ao usar a equação que define o transporte paralelo. Dados um vetor parametrizado por $\sigma \in [0, 2\pi]$, denotado por $u(\sigma)$, um caminho também parametrizado por σ , chamado de $\gamma(\sigma)$, e a tangente a esse caminho, $\gamma'(\sigma)$, a equação de transporte paralelo de u por γ sobre uma certa variedade, munida com espaços vetoriais em cada ponto, é

$$D_{\gamma'(\sigma)}u(\sigma) = 0.$$

Explicitamente:

$$\frac{du(\sigma)}{d\sigma} + A(\gamma'(\sigma))u(\sigma) = 0,$$

onde A é a conexão (campo de calibre).

É comum, e será usado daqui por diante, escrever a tangente ao caminho como $\frac{dx^\mu}{d\sigma}$ e a conexão A em termos de suas componentes. Também introduziremos a constante de

acoplamento $-ie$ por razões físicas³. Assim

$$\frac{du(\sigma)}{d\sigma} - ieA_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} u(\sigma) = 0. \quad (2.1)$$

Uma outra forma de enxergar o transporte paralelo de um certo vetor por um caminho é definindo um operador W tal que

$$u(2\pi) = W(\gamma, D)u(0) \quad (2.2)$$

seja o resultado do transporte do vetor u do ponto inicial para o ponto final do caminho. Como a equação diferencial de transporte é linear, esse operador também é linear. Além disso, ele possui as seguintes propriedades:

1. $W(\gamma, D) = W(\gamma_n, D) \dots W(\gamma_i, D) \dots W(\gamma_1, D)$, onde $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathcal{M}$ e $1 \leq i \leq n$;
2. $W(\gamma^{-1}, D) = W^{-1}(\gamma, D)$;
3. $W(\iota, D) = \iota$ se ι é o caminho “pontual”,

onde \mathcal{M} é a variedade dos campos sobre a qual W realiza o transporte. Denominaremos $W(\gamma, D)$ como o operador holonomia, apesar de, rigorosamente, a holonomia é o operador de transporte paralelo quando o caminho é fechado, i.e. um loop.

Note que as propriedades acima definem W como elemento de um grupo⁴. Tal grupo é G , o grupo de calibre da teoria. Isso é evidente se pensarmos que o transporte - ou transformação - age sobre os vetores da álgebra⁵.

Podemos escrever a equação da holonomia (2.1) em termos de W usando (2.2) e a propriedade 1, que nos permite compor os caminhos (ver figura 2). O vetor $u(\sigma)$ em um ponto qualquer $\sigma \in [0, 2\pi]$ do caminho pode ser obtido a partir de $u(0)$ através da atuação do operador W :

$$u(\sigma) = W(\sigma)u(0). \quad (2.3)$$

Observe que $W(\gamma(\sigma), D)$ seria a forma mais correta de se escrever a holonomia já que W depende do caminho e o calibre de A na derivada covariante, mas adotaremos uma notação simplificada. Voltando na equação (2.1), ficamos com

$$\frac{dW(\sigma)}{d\sigma} - ieA_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W(\sigma) = 0, \quad (2.4)$$

que é a equação que define o operador transporte paralelo⁶ entre pontos sobre a variedade alvo.

³ A_μ assume valores na representação de um grupo de calibre. No caso do $SU(N)$, esse fator faz com que A_μ seja hermitiano. A constante de carga fundamental e dá a “magnitude da interação”.

⁴ Faltaria escrever a associatividade, mas ela é trivial se pensarmos na propriedade (i).

⁵ No formalismo de feixes e fibrados, a variedade alvo do campo é um G -feixe e cada espaço vetorial sobre o grupo forma uma álgebra sobre aquele ponto.

⁶ Para uma discussão sobre derivadas da holonomia, ver apêndice D.

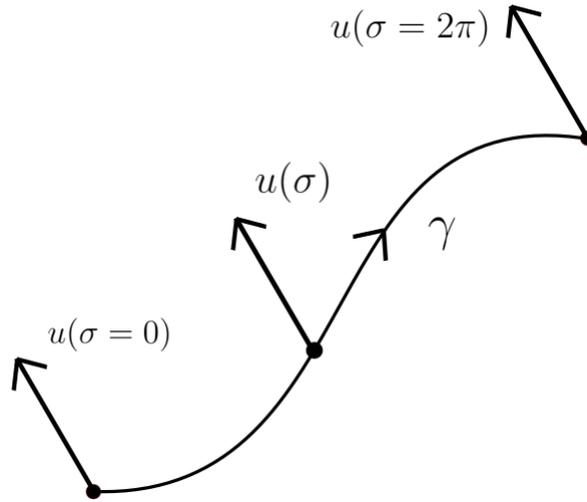


Figura 2 – Vetor $u(\sigma)$ em γ .

2.1.1 Solução da equação de transporte paralelo

Prosseguiremos determinando a solução dessa equação (LUCHINI, 2013). O método a ser utilizado é integração direta com aplicação de recursividade, ou seja, integraremos diretamente a equação (2.4) e substituiremos a solução na própria solução indefinidamente. Os detalhes das integrações serão apresentados no decorrer dos cálculos.

Integrando (2.4), o resultado é

$$W(\sigma) = W(0) + ie \int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} W(\sigma_1) d\sigma_1. \quad (2.5)$$

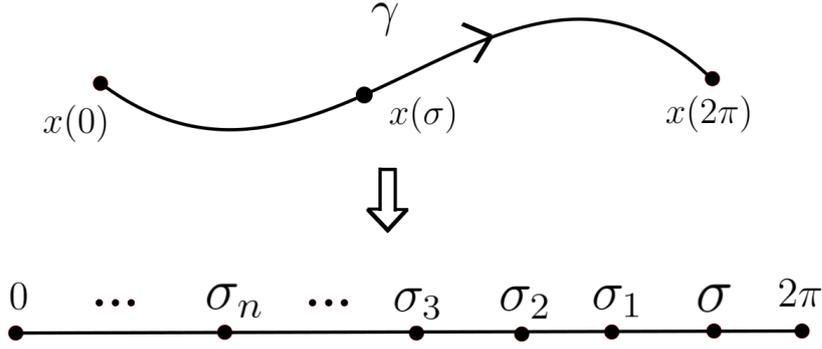
Note que enquanto $\sigma \in [0, 2\pi]$ a variável $\sigma_1 \in [0, \sigma]$, ou seja, o papel de $W(\sigma_1)$ é transportar o vetor a partir de 0 até σ .

Se essa solução é válida para $W(\sigma)$, podemos escrever também uma análoga para $W(\sigma_1)$ cuja solução é análoga a (2.5). Substituindo tal solução para $W(\sigma_1)$ em (2.5):

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= W(0) + ie \int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \left(W(0) + ie \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_2}(\sigma_2) \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} W(\sigma_2) d\sigma_2 \right) d\sigma_1 \\ &= W(0) + ie \int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} W(0) d\sigma_1 + (ie)^2 \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(\sigma_2) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1 \end{aligned}$$

Novamente, se (2.5) é válido para $W(\sigma)$ e $W(\sigma_1)$ também será para $W(\sigma_2)$, que é o operador que transporta o vetor de 0 a σ_1 , e teremos

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= W(0) + ie \int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} W(0) d\sigma_1 + (ie)^2 \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &\quad + (ie)^3 \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &\quad + (ie)^4 \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \int_0^{\sigma_3} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) A_{\mu_4}(\sigma_4) W(\sigma_4) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} \frac{dx^{\mu_4}}{d\sigma_4} d\sigma_4 d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \end{aligned}$$

Figura 3 – Ordenamento em σ .

Evidentemente, repetindo o processo algumas vezes a última integral será

$$(ie)^j \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{j-1}} A_{\mu_1}(\sigma_1) \dots A_{\mu_j}(\sigma_j) W(\sigma_j) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \dots \frac{dx^{\mu_j}}{d\sigma_j} d\sigma_j \dots d\sigma_1.$$

Repedindo indefinidamente:

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= W(0) + ie \int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} W(0) d\sigma_1 + (ie)^2 \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &+ (ie)^3 \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &+ (ie)^4 \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \int_0^{\sigma_3} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) A_{\mu_4}(\sigma_4) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} \frac{dx^{\mu_4}}{d\sigma_4} d\sigma_4 d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &+ \dots (ie)^j \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_j} A_{\mu_1}(\sigma_1) \dots A_{\mu_j}(\sigma_j) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \dots \frac{dx^{\mu_j}}{d\sigma_j} d\sigma_j \dots d\sigma_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nessa expressão, está implícito que $\sigma_j > \sigma_{j+1}$, pois estamos tomando a integração de zero até $\sigma_j < \sigma$. Portanto, percebe-se que existe um ordenamento específico para A_{μ_j} a ser respeitado (ver figura 3). Será útil introduzirmos o produto de caminho ordenado, ou simplesmente produto ordenado⁷. A fim de ilustrar sua funcionalidade, tomemos o terceiro termo de (2.6):

$$\int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1.$$

O produto ordenado nos potenciais funciona como

$$\mathcal{P}(A_{\mu_1}(\sigma_1), A_{\mu_2}(\sigma_2)) = \begin{cases} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2), & \text{se } \sigma_1 > \sigma_2 \\ A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_1}(\sigma_1), & \text{se } \sigma_2 > \sigma_1 \end{cases}$$

Na integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1 &= \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &+ \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_2} A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_1}(\sigma_1) W(0) \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 d\sigma_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁷ Repare que, se o grupo G fosse abeliano não seria necessário o produto ordenado.

Ambos termos em r.h.s. são equivalentes, pois compartilham o que chamaremos aqui de simetria simplexa. Em matemática, um n -simplexo é um objeto que generaliza triângulos. Exemplos desse objetos são um 0-simplexo, que é uma reta, um 1-simplexo, que é um triângulo, e um 2-simplexo, que é um tetraedro. Descreveremos a funcionalidade dessa “simetria” a seguir.

Antes de introduzir o ordenamento (ver figura 4), a região de integração era

$$R_1 = \{0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1; 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma\},$$

ou seja, um triângulo (1-simplexo) retângulo isósceles de catetos σ . Após o ordenamento, a região de integração passa a ser um quadrado de lados σ cuja região pode ser descrita por

$$R_{3^\circ} = \{0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq \sigma\}.$$

Repare que o triângulo superior é simétrico ao inferior (ver figura 4) e representa a região de integração

$$R_2 = \{0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2; 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma\},$$

que é a segunda integral em (2.7) e satisfaz $R_{3^\circ} = R_1 \cup R_2$, i.e. a união de dois 1-simplexos idênticos. Essa é a simetria simplexa e ela nos diz que ambas as integrais são equivalentes. Com isso, podemos reescrever (2.7) como

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1 &= \frac{1}{2} \mathcal{P} \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &\equiv \frac{1}{2} \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right)^2 W(0), \quad (2.8) \end{aligned}$$

onde a última passagem é possível devido a integral entre parênteses ser análoga a de σ_1 e σ_2 . Entretanto, ela é apenas uma definição que ilustra tal propriedade.

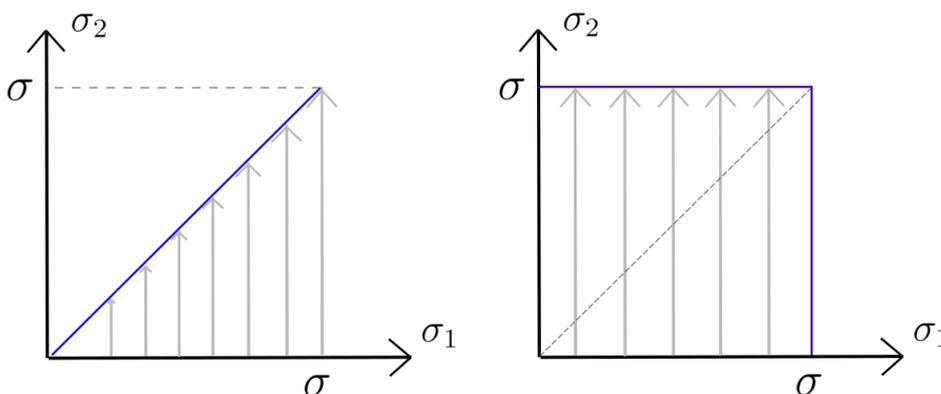


Figura 4 – Simetria simplexa para o terceiro termo de (2.6).



Figura 5 – Simetria simplexa para o segundo termo de (2.6).

Para prosseguir, precisamos voltar nosso olhar para o segundo termo da soma em (2.6). Sua região de integração é uma reta (ver figura 5), ou melhor um 0-simplexo. Como só existe um ordenamento possível para essa região, ela é trivial. Sendo assim:

$$\int_0^\sigma d\sigma_1 A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} W(0) \equiv \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma d\sigma_1 A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \right)^1 W(0) \quad (2.9)$$

Agora, repetiremos o processo para o quarto termo de (2.6). O produto ordenado será

$$\mathcal{P}(A_{\mu_1}(\sigma_1), A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3)) = \begin{cases} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3), & \text{se } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \\ A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_3}(\sigma_3) A_{\mu_2}(\sigma_2), & \text{se } \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \\ A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) A_{\mu_1}(\sigma_1), & \text{se } \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1 \\ A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_3}(\sigma_3), & \text{se } \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3 \\ A_{\mu_3}(\sigma_3) A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2), & \text{se } \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2 \\ A_{\mu_3}(\sigma_3) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_1}(\sigma_1), & \text{se } \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1 \end{cases}$$

Estamos simplesmente fazendo a permutação de 3 elementos e, por isso, existirão 3! integrais:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &= \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &+ \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_3} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_3}(\sigma_3) A_{\mu_2}(\sigma_2) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} d\sigma_2 d\sigma_3 d\sigma_1 \\ &+ \text{permutações} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Essas integrais, devido a simetria simplexa, serão equivalentes. A região de integração antes do ordenamento correspondia a um tetraedro (2-simplexo). Como, por exemplo

$$R_1 = \{0 \leq \sigma_3 \leq \sigma_2; 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1; 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma\}.$$

Após o ordenamento, a região de integração passa a ser um cubo com arestas σ (ver figura 6),

$$R_{4^o} = \{0 \leq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \leq \sigma\}.$$

Esse cubo pode ser construído através de 6 tetraedros iguais⁸ (ver figura 6). Tais tetraedros não são quaisquer, eles correspondem as regiões de integração das integrais em r.h.s. de (2.10). A equivalência das integrais devido a simetria simplexa nos permite escrever o quarto termo de (2.6) como

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\
 &= \frac{1}{3!} \mathcal{P} \int_0^\sigma \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} A_{\mu_1}(\sigma_1) A_{\mu_2}(\sigma_2) A_{\mu_3}(\sigma_3) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dx^{\mu_2}}{d\sigma_2} \frac{dx^{\mu_3}}{d\sigma_3} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\
 &\equiv \frac{1}{3!} \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right)^3 W(0)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Na última passagem, usamos a mesma ideia descrita para (2.8).

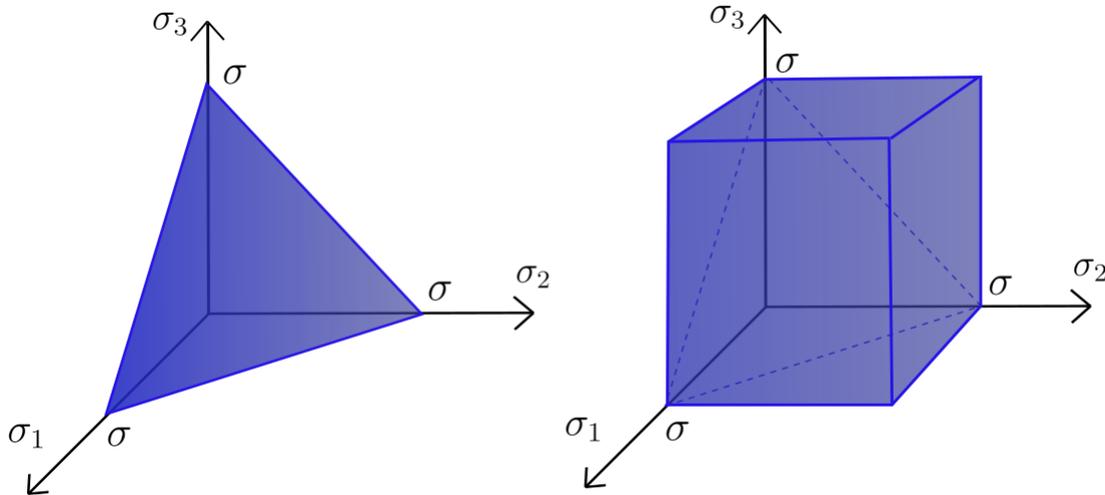


Figura 6 – Simetria simplexa para o quarto termo de (2.6).

Generalizando essa construção para o $(j + 1)$ -ésimo termo. A região de integração antes do ordenamento é um j -simplexo. Após o ordenamento, a região de integração é um hipervolume que pode ser dividido em $j!$ s regiões equivalentes ao j -simplexo antes do ordenamento, mas com as coordenadas permutadas. Explicitamente:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\sigma \dots \int_0^{\sigma_{j-1}} A_{\mu_1}(\sigma_1) \dots A_{\mu_j}(\sigma_j) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \dots \frac{dx^{\mu_j}}{d\sigma_j} d\sigma_j \dots d\sigma_1 \\
 &= \frac{1}{j!} \mathcal{P} \int_0^\sigma \dots \int_0^{\sigma_j} A_{\mu_1}(\sigma_1) \dots A_{\mu_j}(\sigma_j) W(0) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} \dots \frac{dx^{\mu_j}}{d\sigma_j} d\sigma_j \dots d\sigma_1 \\
 &= \frac{1}{j!} \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right)^j W(0)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

⁸ Enquanto o volume do cubo é σ^3 , o volume dos tetraedros é $\sigma^3/6$.

Voltando na expressão da holonomia:

$$W(\sigma) = W(0) + \frac{ie}{1!} \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right) W(0) + \frac{(ie)^2}{2!} \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right)^2 W(0) \\ + \dots + \frac{(ie)^j}{j!} \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right)^j W(0) + \dots$$

Organizando esses termos em uma série:

$$W(\sigma) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \mathcal{P} \left(\int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right)^n \right) W(0).$$

Portanto, a solução da equação de transporte paralelo é, formalmente, uma exponenciação:

$$W(\sigma) = \mathcal{P} \exp \left(ie \int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right) W(0).$$

Essa é a solução que procurávamos.

Adiante será necessário introduzir produtos ordenados para novos parâmetros além de σ e, por isso, renomearemos $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\sigma$ para indicar o produto ordenado em σ . Também definiremos a holonomia calculada no ponto inicial como $W(0) \equiv W_R$. Com essas definições, temos

$$W(\sigma) = \mathcal{P}_\sigma \exp \left(ie \int_0^\sigma A_{\mu_1}(\sigma_1) \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} d\sigma_1 \right) W_R. \quad (2.13)$$

2.1.2 Teorema de Stokes exponenciado não abeliano padrão

Na seção anterior, mostramos como calcular a holonomia em um certo caminho que liga espaços vetoriais em pontos diferentes da variedade alvo. Queremos agora entender a dependência da holonomia com o caminho escolhido para ligar esses pontos. Para isso, olharemos para a equação que define a holonomia sobre o caminho γ :

$$\frac{dW(\sigma)}{d\sigma} - ie A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W(\sigma) = 0.$$

Tomemos então deformações do caminho (ALVAREZ; FERREIRA; GUILLEN, 1998; FERREIRA; LUCHINI, 2012a; LUCHINI, 2013) através de variações $x \rightarrow x + \delta x$ diretamente sobre essa equação. Tais variações podem ser separadas em duas classes: variações tangentes (na direção de $\frac{dx^\mu}{d\sigma}$) e variações perpendiculares à γ . Em particular, as variações tangentes correspondem a reparametrizações, $x(\sigma') = x(\sigma'(\sigma))$, e não geram novos caminhos. Além disso, é fácil de perceber que seu papel é de apenas alterar a “velocidade” do transporte introduzindo um fator multiplicativo $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$ na equação da holonomia fazendo com que, de fato, W não mude. Por outro lado, as variações perpendiculares são as que geram novos caminhos e, por isso, introduzimos um novo parâmetro $\tau \in [0, 2\pi]$ responsável por as rotular durante a variação⁹. Agora, o vetor normal a curva é dado por $\frac{dx^\mu}{d\tau}$.

⁹ Naturalmente, para $\tau = 0$ estamos sobre o caminho original.

Ao invés de simplesmente fixar as extremidades do caminho, inicialmente, apenas o faremos para o ponto inicial, $p \equiv x_R$, ao qual nos referiremos como ponto de referência. Sua importância se dará quando generalizarmos o conceito de holonomia.

Variando a equação que define o operador W :

$$\begin{aligned} \delta \frac{dW}{d\sigma} - ie\delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) W - ieA_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta W &= 0 \\ \frac{d}{d\sigma} (W^{-1} \delta W) &= ieW^{-1} \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) W, \end{aligned}$$

onde multiplicamos pela esquerda por W^{-1} e reorganizamos o resultado. Integrando e lembrando que o ponto de referência é fixo tem-se

$$\delta W(\sigma) = ieW \int_0^\sigma W^{-1} \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \right) W d\sigma'.$$

Integrando por partes, substituindo a equação que define a holonomia nos termos $\frac{dW}{d\sigma}$ e usando que $\delta A_\mu = \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu$, teremos

$$\delta W(\sigma) = -ieW \int_0^\sigma W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\nu d\sigma' + ieA_\mu W \delta x^\mu, \quad (2.14)$$

onde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$. Parametrizando a variação em τ como já discutido:

$$\frac{dW}{d\tau} = -ieW \int_0^\sigma W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma' + ieA_\mu W \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}. \quad (2.15)$$

Caso o ponto final do caminho ($\sigma = 2\pi$) seja fixo, os resultados anteriores levam a

$$\delta W(\sigma) = -ieW \int_0^{2\pi} W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu d\sigma \quad (2.16)$$

e

$$\frac{dW}{d\tau} + ieW \int_0^{2\pi} W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma = 0. \quad (2.17)$$

A última equação estabelece como a holonomia muda de um loop para o outro. Definindo o loop final $\gamma(\tau = 2\pi) \equiv \partial\Sigma$, a partir dessa equação obtemos uma outra forma de calcular a holonomia sobre esse loop que difere de (2.13): basta integrar sobre a área Σ cuja borda é o loop $\partial\Sigma$. Essa integração é semelhante a feita anteriormente e a seguir ilustraremos os passos principais.

Definindo por simplicidade

$$\mathcal{A}(\tau) \equiv \int_0^{2\pi} W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma \quad (2.18)$$

ficamos com

$$\frac{dW}{d\tau} + ieW \mathcal{A} = 0. \quad (2.19)$$

Integrando iterativamente:

$$W(\tau) = W(0) - ie \int_0^\tau d\tau_1 W(\tau_1) \mathcal{A}(\tau_1).$$

Enquanto τ está definido de 0 a 2π , τ_1 está de 0 a τ . Se (2.19) continua válido para τ_1 , teremos

$$W(\tau) = W(0) - ie \int_0^\tau d\tau_1 W(0) \mathcal{A}(\tau_1) + (-ie)^2 \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 W(\tau_2) \mathcal{A}(\tau_2) \mathcal{A}(\tau_1)$$

Repetindo indefinidamente:

$$\begin{aligned} W(\tau) = & W(0) - ie \int_0^\tau d\tau_1 W(0) \mathcal{A}(\tau_1) + (-ie)^2 \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 W(0) \mathcal{A}(\tau_2) \mathcal{A}(\tau_1) \\ & + \dots + (-ie)^j \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j \dots d\tau_1 W(0) \mathcal{A}(\tau_j) \dots \mathcal{A}(\tau_1) + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Novamente existe um ordenamento que deve ser respeitado, mas agora para as integrações em τ . Introduzindo o produto ordenado em τ e aproveitando da simetria simplexa, o termo geral será

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j \dots d\tau_1 W(0) \mathcal{A}(\tau_j) \dots \mathcal{A}(\tau_1) &= \frac{1}{j!} \mathcal{P}_\tau \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j \dots d\tau_1 W(0) \mathcal{A}(\tau_j) \dots \mathcal{A}(\tau_1) \\ &\equiv W(0) \frac{1}{j!} \mathcal{P}_\tau \left(\int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{A}(\tau_1) \right)^j. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, para $\tau = 2\pi$, podemos reescrever (2.20) como

$$\begin{aligned} W(2\pi) &\equiv W_{\partial\Sigma} = W_R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \mathcal{P}_\tau \left(\int_0^{2\pi} d\tau_1 \mathcal{A}(\tau_1) \right)^n \\ &= W_R \mathcal{P}_\tau \exp \left(-ie \int_0^{2\pi} d\tau \mathcal{A}(\tau) \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde definimos $W_R \equiv W(0)$.

Temos então duas formas diferentes de calcular a holonomia sobre o loop $\partial\Sigma$. Integrando diretamente sobre o loop com (2.13), ou sobre a área englobada por esse loop com (2.22). Explicitamente:

$$\mathcal{P}_\sigma \exp \left(ie \oint_{\partial\Sigma} A_\mu dx^\mu \right) W_R = W_R \mathcal{P}_\tau \exp \left(-ie \int_\Sigma W^{-1} F_{\mu\nu} W dx^\mu dx^\nu \right). \quad (2.23)$$

Essa é a essência do teorema de Stokes e, por esse motivo, nos referiremos a (2.23) como o teorema de Stokes não abeliano exponenciado padrão.

2.1.3 Curvatura nula, cargas conservadas e integrabilidade

Segundo o teorema de Liouville (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002), um sistema clássico $2N$ dimensional é dito integrável se for possível associar ao mesmo um número N de quantidades conservadas (integrabilidade de Liouville). Dessa forma, é

possível transformar canonicamente as coordenadas e momentos em novos com coordenadas cíclicas e, por isso, as equações dinâmicas serão facilmente integradas levando a soluções que são mantidas estáveis devido ao número considerável de cargas conservadas.

Em tais sistemas sistemas, geralmente é possível, embora não simples, determinar uma representação de curvatura nula (ZAKHAROV; SHABAT, 1974; ZAKHAROV; SHABAT, 1979) equivalente as equações dinâmicas. Sendo C_μ uma conexão assumindo valores em uma certa álgebra de Lie¹⁰ e que acomode os campos envolvidos e suas derivadas, a equação de curvatura nula será

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu + [C_\mu, C_\nu] = 0. \quad (2.24)$$

A partir da conexão, define-se um operador holonomia através de uma equação de transporte paralelo análoga a (2.4),

$$\frac{dW}{d\sigma} - ieC_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0,$$

cujas soluções são também análogas a (2.13). Naturalmente, é possível variar o caminho em que W está contido e reobter os resultados das seções passadas em termos de C_μ .

Por (2.23), sabemos que é possível calcular a holonomia sobre o loop final $\partial\Sigma$ que engloba a área Σ de duas formas diferentes. Suponha que para uma certa região Σ na variedade, W seja independente do caminho, i.e. variações perpendiculares ao caminho que mantenham as suas bordas fixas levam a $\delta W = 0$. Isso só será possível se existir uma condição de curvatura nula para C_μ como em (2.24). Com o teorema de Stokes, tal condição se traduz em

$$\mathcal{P}_\sigma \exp \left(ie \oint_{\partial\Sigma} C_\mu dx^\mu \right) = \mathbb{I}, \quad (2.25)$$

onde \mathbb{I} é a identidade.

A construção das cargas conservadas é feita a partir dessa condição. Como, nessa região, a curvatura da conexão é nula, podemos escolher quaisquer caminhos entre dois pontos na variedade alvo. Tomaremos dois caminhos que formam um loop como na figura 7:

$$\partial\Sigma = \Gamma_{-L} \circ \Gamma_t \circ \Gamma_{+L}^{-1} \circ \Gamma_0^{-1}. \quad (2.26)$$

Esses caminhos são tais que Γ_0 e Γ_t são puramente espaciais, mas em instantes de tempo diferentes, e Γ_{-L} e Γ_L são puramente temporais, mas em pontos no espaço diferentes. Substituindo em (2.25):

$$\mathcal{P}_\sigma e^{ie \int_{\Gamma_{-L}} A_0} \Big|_{-L}^{dx^0} \mathcal{P}_\sigma e^{ie \int_{\Gamma_t} A_i} \Big|_{t>0}^{dx^i} = \mathcal{P}_\sigma e^{ie \int_{\Gamma_0} A_i} \Big|_{t=0}^{dx^i} \mathcal{P}_\sigma e^{ie \int_{\Gamma_L} A_0} \Big|_L^{dx^0}.$$

¹⁰ No caso de álgebras infinitas, existirão infinitas cargas conservadas que, por exemplo, são as responsáveis pela estabilidade de soluções solitônicas.

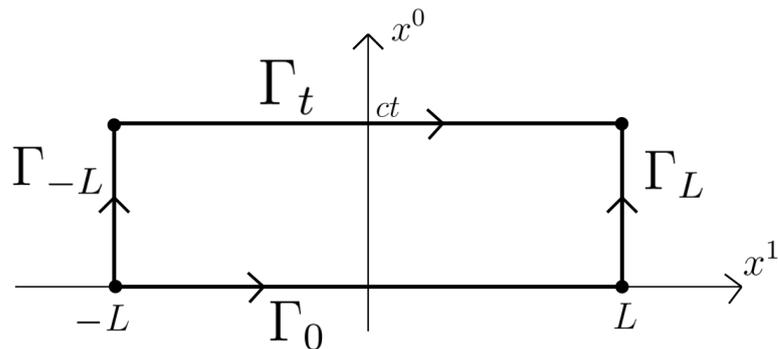


Figura 7 – Caminho fechado que separa o espaço-tempo em espaço e tempo por $\partial\Sigma = \Gamma_0 \circ \Gamma_L \circ (\Gamma_t)^{-1} \circ (\Gamma_{-L})^{-1}$.

Impondo a condição de contorno $A_0|_{-L} = A_0|_L$, ficaremos com

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{U}(t) \mathcal{Q}(0) \mathcal{U}^{-1}(t) \quad (2.27)$$

onde definimos o operador de carga e a matriz de evolução, respectivamente, como

$$\mathcal{Q}(t) \equiv \mathcal{P}_\sigma e^{ie \int_{\Gamma_t} A_i \Big|_{t>0} dx^i} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{U}(t) \equiv \mathcal{P}_\sigma e^{-ie \int_{\Gamma_{-L}} A_0 \Big|_{-L} dx^0}. \quad (2.29)$$

Note que, devido a evolução isoespectral, os autovalores do operador de carga, i.e. os fluxos da conexão sobre uma hipersuperfície (um caminho), devem ser preservados. Construímos portanto as cargas conservadas a partir desse operador e a lei de conservação como (2.27).

Além disso, essas cargas são invariantes de calibre. Verifica-se essa propriedade a partir da transformação do operador holonomia¹¹,

$$W(\gamma) \mapsto W'(\gamma) = g(x)W(\gamma)g^{-1}(x_R), \quad (2.30)$$

a qual, para um loop, dependerá apenas do ponto de referência,

$$W'(\gamma) = g(x_R)W(\gamma)g^{-1}(x_R). \quad (2.31)$$

Portanto, o traço das potências do operador de carga é invariante de calibre se estiver calculada sobre um caminho fechado,

$$\text{Tr}(W'^n) = \text{Tr}(W^n). \quad (2.32)$$

¹¹ Basta considerar uma transformação de calibre diretamente na equação (2.4). A constante $g^{-1}(x_R)$ será fixada fracionando o caminho γ e compondo as holonomias resultantes.

2.2 Holonomias generalizadas

O operador holonomia é o responsável pelo transporte de vetores sobre caminhos fechados na variedade alvo. Quando a curvatura da conexão é nula, existe uma simetria escondida na variedade alvo devido a independência do caminho desse operador. Isso permite determinar as cargas conservadas a partir da evolução isoespectral de W . Esse processo já é bem compreendido para teorias em espaços-tempo 1+1 dimensionais desde a década de 70, mas este não era o caso para outras dimensões de espaço-tempo até 1998 (ALVAREZ; FERREIRA; GUILLEN, 1998). Seguindo este trabalho, além de (LUCHINI, 2013), descreveremos como obter as cargas conservadas em espaços-tempos de dimensões maiores.

Para isso, introduziremos o transporte paralelo entre caminhos fechados e superfícies fechadas. A pista inicial para definir o que chamaremos de 2-holonomia¹² já foi dada pela equação (2.19). A ideia será generalizar a conexão, que antes era uma 1-forma, para uma 2-forma como em (2.18), mas não necessariamente exata¹³.

Denotando por V a 2-holonomia, a equação que a define será postulada como

$$\frac{dV}{d\tau} + ieV \int_0^{2\pi} G_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma = 0, \quad (2.33)$$

onde $G_{\mu\nu}^W \equiv W^{-1}G_{\mu\nu}W$ com W a holonomia obtida por (2.4) e $G_{\mu\nu}$ as componentes de uma 2-forma $G = \frac{1}{2}G_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$. Integrando iterativamente assim como ilustrado nas seções passadas, ficamos com um operador definido sobre a área varrida pelos loops

$$V(\tau) = V_R \mathcal{P}_\tau \exp \left(-ie \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau') d\tau' \right) \quad (2.34)$$

com $\mathcal{C}(\tau) \equiv \int_0^{2\pi} G_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma$.

Naturalmente nos indagamos com a relação entre a 2-holonomia e a superfície sobre a qual esse operador está definido. Fazendo variações do tipo $x \rightarrow x + \delta x$ extrairemos essa informação. Entretanto, apenas deformações perpendiculares a superfície serão significativas (ver figura 8) e, por isso, a parametrizaremos por $\zeta \in [0, 2\pi]$, assim $x = x(\sigma, \tau, \zeta)$. Enquanto σ localiza o ponto sobre o loop, τ identifica o loop sobre a superfície e ζ a superfície dentro do volume.

Variando (2.33):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\delta V) + ie\delta V\mathcal{C} + ieV\delta\mathcal{C} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau}(\delta VV^{-1}) + ieV\delta\mathcal{C}V^{-1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

¹² O nome vem do grau da forma usada como potencial. A holonomia definida anteriormente era responsável pelo transporte paralelo entre pontos em um loop, sendo assim, será chamada a partir de agora de 1-holonomia.

¹³ Note que \mathcal{A} era exato por construção.

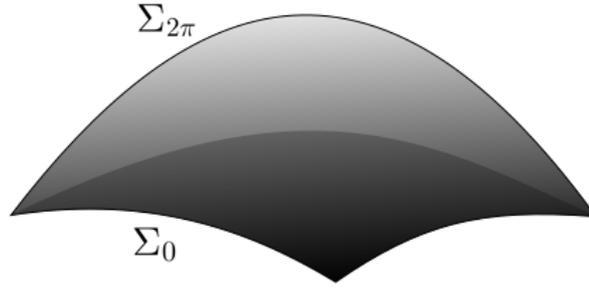


Figura 8 – Deformações sobre a superfície Σ partindo de $\Sigma(\tau = 0) \equiv \Sigma_0$ até $\Sigma(\tau = 2\pi) \equiv \Sigma_{2\pi}$.

onde multiplicamos pela direita por V^{-1} e reorganizamos. Integrando em τ de 0 à 2π :

$$\begin{aligned} \delta V V^{-1} &= -ie \int_0^{2\pi} d\tau V \left\{ \delta \left(\int_0^{2\pi} d\sigma G_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \right) V^{-1} \right\} \\ &= -ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ V \left(\delta G_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} + G_{\mu\nu}^W \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} + G_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial \tau} \right) V^{-1} \right\} d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Calcularemos cada termo separadamente. Para o primeiro:

$$\begin{aligned} &-ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V \left([G_{\mu\nu}^W, W^{-1} \delta W] + W^{-1} \partial_\lambda G_{\mu\nu} W \delta x^\lambda \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\ &= -ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V W^{-1} (D_\lambda G_{\mu\nu}) W V^{-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x^\lambda d\sigma d\tau \\ &-ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V \left[G_{\mu\nu}^W, -ie \int_0^\sigma F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \delta x^\beta d\sigma' \right] V^{-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau \end{aligned} \quad (2.37)$$

Integrando por partes o segundo:

$$\begin{aligned} &-ie \int_0^{2\pi} V \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(G_{\mu\nu}^W \delta x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \right) d\sigma \right\} V d\tau + ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V \frac{\partial G_{\mu\nu}^W}{\partial \sigma} V^{-1} \delta x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\ &+ ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V G_{\mu\nu}^W V^{-1} \delta x^\mu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \sigma \partial \tau} d\sigma d\tau \end{aligned}$$

onde usamos que $V = V(\tau)$. Reorganizando e por (2.4) ficamos com

$$\begin{aligned} &+ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V \left\{ \left[G_{\mu\nu}^W, W^{-1} \frac{dW}{d\sigma} \right] + W^{-1} \partial_\lambda G_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\lambda}{\partial \sigma} \right\} V^{-1} \delta x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\ &= +ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V W^{-1} (D_\lambda G_{\mu\nu}) W V^{-1} \delta x^\mu \frac{\partial x^\lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Por último, o terceiro termo de (2.36) será

$$\begin{aligned} &-ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(V G_{\mu\nu}^W V^{-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \delta x^\nu \right) d\sigma d\tau + ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dV}{d\tau} G_{\mu\nu}^W V^{-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau \\ &+ ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V \frac{\partial G_{\mu\nu}^W}{\partial \tau} V^{-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau + ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V G_{\mu\nu}^W \frac{dV^{-1}}{d\tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau \\ &+ ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V G_{\mu\nu}^W V^{-1} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau \partial \sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau \end{aligned}$$

Usando (2.15) e (2.33):

$$\begin{aligned}
& +ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V G_{\mu\nu}^W V^{-1} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau\partial\sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau + ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V W^{-1} (D_\lambda G_{\mu\nu}) W V^{-1} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \delta x^\nu d\sigma d\tau \\
& - ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V [G_{\mu\nu}^W, \mathcal{C}] V^{-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau \\
& + ie \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V \left[G_{\mu\nu}^W, -ie \int_0^{2\pi} F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\tau} d\sigma' \right] V^{-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Substituindo (2.37), (2.38) e (2.39) em (2.36) e parametrizando as variações por $\zeta \in [0, 2\pi]$:

$$\frac{dV}{d\zeta} + ie\mathcal{K}V = 0, \tag{2.40}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} \equiv & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\tau) \left\{ W^{-1} (D_\lambda G_{\mu\nu} + D_\mu G_{\nu\lambda} + D_\nu G_{\lambda\mu}) W \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} \right. \\
& \left. - ie \left(\left[G_{\mu\nu}^W, \int_0^\sigma F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\zeta} d\sigma' \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} - \left[G_{\mu\nu}^W, \int_0^\sigma F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\tau} d\sigma' \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\zeta} \right) \right\} V^{-1}(\tau) d\sigma d\tau.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Novamente, podemos integrar (2.40) iterativamente. Definindo $V(\zeta = 0) \equiv V_R$ e introduzindo o produto ordenado em ζ , a solução é

$$V(\zeta) = \mathcal{P}_\zeta \exp \left(-ie \int_0^\zeta \mathcal{K}(\zeta') d\zeta' \right) V_R. \tag{2.42}$$

Assim como para a 1-holonomia, existem duas abordagens distintas para calcular a 2-holonomia de uma superfície fechada $\partial\Omega$: através de (2.34), que está avaliada sobre a superfície, ou por (2.42), que está avaliada sobre o volume englobado por essa área. Explicitamente:

$$V_R \mathcal{P}_\tau \exp \left(-ie \oint_{\partial\Omega} \mathcal{C} d\tau \right) = \mathcal{P}_\zeta \exp \left(-ie \int_0^{2\pi} \mathcal{K} d\zeta \right) V_R. \tag{2.43}$$

Esse é o teorema de Stokes exponenciado não abeliano para a 2-holonomia.

Observe que (2.40) é o que chamaremos de 3-holonomia, pois sua conexão é uma 3-forma. Apesar de ser viável construir o teorema de Stokes também para esse objeto, ele não será necessário para os propósitos deste trabalho.

É possível generalizar essa construção para p -holonomias seguindo a abordagem desta seção. Basta começar com (2.40) e seguir o caminho natural já fornecido. Porém, para os nossos propósitos, vamos nos contentar com 1,2 e 3-holonomias.

2.3 Loop space, independência de caminho e leis de conservação

Para o caso de d -holonomias, primeiro introduziremos o chamado loop space $\mathcal{LM}^{(d-1)}$ (ALVAREZ; FERREIRA; SANCHEZ-GUILLEN, 2009). Suponha \mathcal{M} como uma variedade $d + 1$ -dimensional com uma certa métrica. $\mathcal{LM}^{(d-1)}$ será construído a partir da imagem do mapeamento de hiper-esferas $(d - 1)$ -dimensionais definidas em \mathcal{M} , onde tais esferas compartilham um ponto em comum, x_R sobre a borda de \mathcal{M} . Em outras palavras,

$$\mathcal{LM}^{(d-1)} = \{\Gamma / \Gamma : S^{d-1} \rightarrow \mathcal{M} / \Gamma(0) = x_R \in \partial\mathcal{M}\}.$$

Dessa forma, um hiper-volume entre duas hiper-superfícies será um caminho no loop space. Por exemplo, para $d = 2$ o espaço-tempo \mathcal{M} tem dimensão 3, ao varrer esse espaço com esferas S^1 (loops), que compartilham um ponto em comum, teremos uma área bidimensional em \mathcal{M} cuja imagem em $\mathcal{LM}^{(1)}$ será um caminho (ver figura 9). Já para $d = 3$ o espaço é varrido com esferas fechadas S^2 , também com um ponto em comum, e o volume formado pela sobreposição dessas esferas será o caminho no espaço dos loops. Observe também que no caso $d = 1$ os loops no espaço-tempo são pontos e, portanto, o mapeamento é trivial.

Esse mapeamento é exatamente o que fazemos no teorema de Stokes estendido (2.43). O lado direito define um caminho¹⁴ sobre o loop space cujas bordas são a esfera infinitesimal sobre x_R e a esfera na borda $\partial\Omega$. Note que Ω é tridimensional, enquanto \mathcal{M} será quadridimensional. Assim, no caso de Ω um volume fechado em \mathcal{M} , ou seja, um caminho fechado sobre o espaço dos loops, ficamos com

$$\mathcal{P}_\zeta \exp \left(-ie \int_0^{2\pi} \mathcal{K} d\zeta \right) V_R = \mathbb{I}. \quad (2.44)$$

Essa condição diz que a d -holonomia é independente do caminho no loop space.

A estrutura de obtenção das cargas conservadas para teorias integráveis é análoga. Para uma representação de curvatura nula da conexão, a holonomia é independente do caminho e o escolheremos de tal forma que separe o espaço-tempo conforme a figura 7. A condição de conservação aparecerá como a evolução isoespectral do operador holonomia. Portanto, as cargas conservadas construídas nessa estrutura são consequência de uma simetria oculta no espaço dos loops.

Temos então uma maneira de obter cargas em teorias integráveis. Pretendemos generalizar essa formulação para o caso de teorias de calibre e faremos isso escrevendo a conexão através dos campos de calibre. No entanto, repare que o operador de carga será dado por um fluxo do campo de calibre e, por esse motivo, será necessário também escrever a versão integral das teorias de calibre invariantes de Lorentz. Essa é será abordagem dos próximos capítulos.

¹⁴ Repare que uma mudança na varredura do volume Ω corresponde a uma mudança no caminho do loop space.

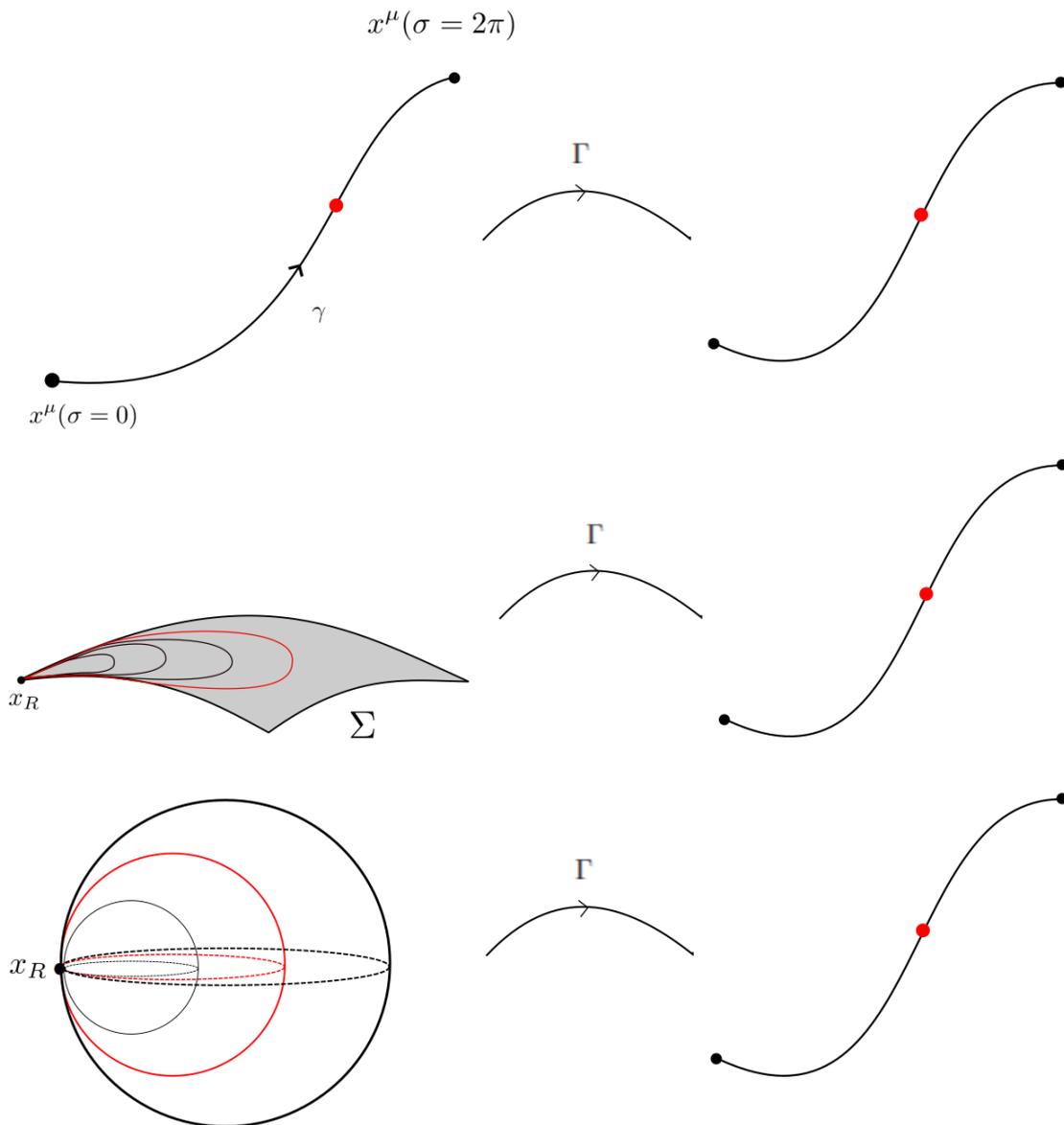


Figura 9 – Na primeira figura, representamos o loop space $\mathcal{LM}^{(0)}$ que é o mapeamento de pontos em pontos. Na segunda, está $\mathcal{LM}^{(1)}$ que representa caminhos fechados sobre uma superfície sendo levados em pontos. Já na terceira temos $\mathcal{LM}^{(2)}$, o mapeamento é de superfícies fechadas para pontos.

3 Equações integrais invariantes de Lorentz para o eletromagnetismo

Neste capítulo, postulamos as equações integrais do eletromagnetismo no vácuo e em meios materiais. Demonstramos o teorema de Stokes para uma 2-forma e descrevemos como ele é a ponte entre a versão integral e diferencial. Apesar da conservação da carga ser problemática apenas em teorias não abelianas, mostramos como as equações integrais fornecem uma reinterpretação da conservação da carga elétrica como consequência da independência do caminho do operador holonomia no loop space.

3.1 Equações integrais no vácuo e teorema de Stokes

Baseado no conceito de linhas de força de Faraday, as equações do eletromagnetismo foram formuladas originalmente na versão integral, descrevendo fluxos e circuitações sobre superfícies e caminhos espaciais. Em 1865, Maxwell introduziu o conceito matemático de campo e descreveu o eletromagnetismo por meio de um conjunto de equações parciais lineares (MAXWELL, 1865). Embora ambas formulações pareçam distintas, elas estão conectadas através do teorema do divergente e rotacional, ou simplesmente teorema de Stokes. Com ele, as equações diferenciais emergem como uma condição de consistência para os campos (LUCHINI; ZACHÉ; BATTISTI,).

A partir da versão diferencial das equações de Maxwell, a versão diferencial covariante de Lorentz é obtida diretamente no tratamento dos campos elétrico e magnético como componentes do campo eletromagnético. No entanto, a versão integral invariante de Lorentz descreve fluxos sobre superfícies espaço-temporais, não mais se restringindo apenas a superfícies puramente espaciais. Não parece natural, do ponto de vista dos autores deste texto, escrevê-las diretamente a partir da versão integral não invariante, como feito inicialmente por (KOO, 2006; JIMÉNEZ; MONSIVAIS, 2021). Da mesma forma, começar com versão diferencial covariante também não parece adequado, pois as equações integrais descrevem quantidades globais (fluxos) e começar com a versão local pode levar a perda de informação global. Portanto, adotaremos o caminho histórico das equações do eletromagnetismo e postular as equações integrais invariantes de Lorentz. Em seguida, mostraremos que as equações diferenciais covariantes manifestam-se a partir da versão integral com o teorema de Stokes para uma 2-forma diferencial (LUCHINI; ZACHÉ, 2022).

Antes de postular as equações do eletromagnetismo é necessário estabelecer o conceito de fluxo. O campo eletromagnético, $F^{\mu\nu}$, são as componentes de uma 2-forma

definida sobre uma variedade com métrica lorentziana. Portanto, defini-se naturalmente seu fluxo e de seu dual sobre uma superfície bidimensional, Σ , que não é necessariamente puramente espacial, como¹

$$\Phi[F, \Sigma] \equiv \int_{\Sigma} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau \quad \text{e} \quad \Phi[\tilde{F}, \Sigma] \equiv \int_{\Sigma} \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau. \quad (3.1)$$

Com essa definição de fluxo, postulamos que as equações integrais invariantes de Lorentz do eletromagnetismo são

$$\Phi[F, \partial\Omega] = 0; \quad (3.2)$$

$$\Phi[\tilde{F}, \partial\Omega] = -\mathcal{Q}[j, \Omega], \quad (3.3)$$

onde Ω é um volume tridimensional no espaço-tempo quadridimensional e

$$\mathcal{Q}[j, \Omega] \equiv \int_{\Omega} j^{\mu} dV_{\mu} \quad (3.4)$$

é a fonte de campo com $dV_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta$ o elemento de volume em três dimensões. Explicitando as integrais:

$$\oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau = 0 \quad (3.5)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau = \int_{\Omega} j^{\gamma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta. \quad (3.6)$$

A versão diferencial surge ao relacionar o fluxo do campo com o interior do volume Ω e, para isso, é necessário o teorema de Stokes. Uma prova² desse teorema é obtida ao considerar deformações contínuas em uma superfície Σ_0 parametrizada por $\sigma, \tau \in [0, 2\pi]$ mantendo suas bordas fixas (ver figura 10). Denotando $B_{\mu\nu}$ como um tensor de rank 2 genérico, que pode ser tanto $F_{\mu\nu}$ quanto $\tilde{F}_{\mu\nu}$, a variação do fluxo ao deformar a superfície é

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_{\Sigma} \delta B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau + \int_{\Sigma} B_{\mu\nu} \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau + \int_{\Sigma} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\ &= \int_{\Sigma} \partial_{\lambda} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \delta x^{\lambda} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \right) \delta x^{\mu} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} \frac{d}{d\tau} \left(B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \right) \delta x^{\nu} d\sigma d\tau \\ &= \int_{\Sigma} \partial_{\lambda} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \delta x^{\lambda} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} \partial_{\lambda} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \delta x^{\mu} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} \partial_{\lambda} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tau} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

onde integramos por partes, descartamos os termos calculados sobre a borda e usamos a comutatividade das derivadas segundas em σ e τ (teorema de Clairaut-Schwarz). Renomeando os índices, reescrevemos essa expressão como

$$\delta\Phi = \int (\partial_{\lambda} B_{\mu\nu} + \partial_{\mu} B_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} B_{\lambda\mu}) \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \delta x^{\lambda} d\sigma d\tau. \quad (3.7)$$

¹ De maneira geral, o fluxo de uma p -forma é sua integração sobre uma hipersuperfície p -dimensional.

² Para matemáticos, essa não é uma prova real e formal. No entanto, seguiremos o jargão de físicos.

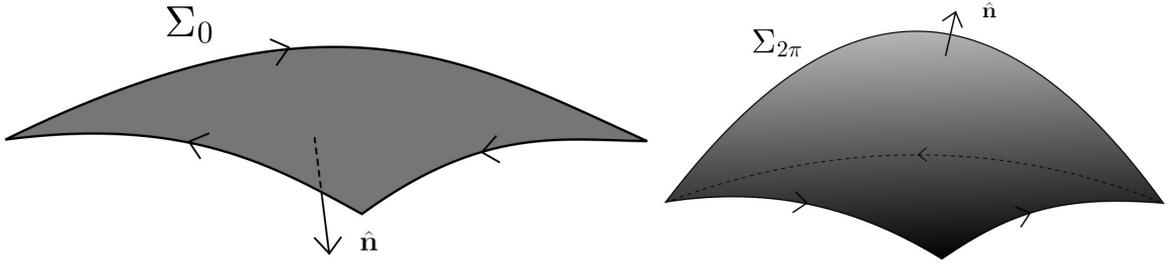


Figura 10 – Deformações contínuas na superfície geram variações no fluxo. Nesta figura, representa-se a superfície inicial, $\Sigma(\zeta = 0) \equiv \Sigma_0$, e a superfície final $\Sigma(\zeta = 2\pi) \equiv \Sigma_{2\pi}$.

As deformações podem ser parametrizadas por $\zeta \in [0, 2\pi]$ de forma que $\zeta = 0$ corresponde a Σ_0 e $\zeta = 2\pi$ corresponde a $\Sigma_{2\pi}$. Dessa maneira, a expressão para variação do fluxo será uma equação diferencial

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \int (\partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau \quad (3.8)$$

cuja solução é

$$\Phi(B, \Sigma_{2\pi}) - \Phi(B, \Sigma_0) = \int_\Omega (\partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta. \quad (3.9)$$

Usando a definição do fluxo e invertendo a orientação de Σ_0 , o l.h.s. será escrito como o fluxo sobre a borda de Ω , pois $\partial\Omega = \Sigma_0^{-1} \cup \Sigma_{2\pi}$. Com isso, tem-se o teorema de Stokes para uma 2-forma³:

$$\oint_{\partial\Omega} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau = \int_\Omega (\partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta. \quad (3.10)$$

Portanto, o fluxo nas equações integrais invariantes se relaciona com o interior da superfície fechada com

$$\int_\Omega (\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta = 0; \quad (3.11)$$

$$\int_\Omega (\partial_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{F}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \tilde{F}_{\lambda\mu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta = \int_\Omega \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} j^\gamma \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta. \quad (3.12)$$

Dessa forma, tem-se a identidade de Bianchi escrita em termos de $F^{\mu\nu}$,

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (3.13)$$

e as equações com fonte em termos de $\tilde{F}^{\mu\nu}$,

$$\partial_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{F}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \tilde{F}_{\lambda\mu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} j^\gamma. \quad (3.14)$$

³ No apêndice B, mostramos como derivar o teorema de Stokes para uma p -forma a partir de uma construção análoga.

Para escrevê-las como em (1.7) e (1.8), basta usar $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}$.

Concluimos então que as equações diferenciais covariantes são consequência das equações de fluxo de $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ sobre uma superfície fechada, uma vez que o fluxo pode ser escrito em termos da derivada exterior sobre o volume envolvido por essa borda. Essas equações são invariantes sobre transformações de Lorentz e podem também ser escritas em meios materiais, conforme estudaremos na seção 3.4. Antes disso, mostraremos como obter as equações integrais usuais de Maxwell, i.e. não invariantes de Lorentz, a partir de (3.2) e (3.3).

3.2 Equações de Maxwell não invariantes de Lorentz

A equações de Maxwell em sua versão integral não invariante de Lorentz são consequência de uma escolha particular na natureza⁴ do volume Ω . Quando Ω é puramente espacial, teremos as leis de Gauss para o campo elétrico e magnético. Por outro lado, quando Ω possui uma componente temporal, ficamos com as leis de Faraday e Ampère-Maxwell.

Ω puramente espacial

Começando por (3.5), sendo Ω um volume espacial 3-dimensional, todos os índices rotulam apenas direções espaciais e o l.h.s. será

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau &= \oint_{\partial\Omega_S} F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau = - \oint_{\partial\Omega_S} B^k \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &= - \oint_{\partial\Omega_S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

onde usamos $dS_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau$, levando a lei de Gauss para o campo magnético

$$\oint_{\partial\Omega_S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.15)$$

A ideia é análoga para (3.6). Por um lado, o l.h.s. dá o fluxo do campo elétrico:

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau = \oint_{\partial\Omega_S} \tilde{F}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau = - \oint_{\partial\Omega_S} E^k \epsilon_{kij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau = - \oint_{\partial\Omega_S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Por outro, o r.h.s. devolve a fonte do campo:

$$\int_{\Omega} j^\gamma \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta = \int_{\Omega_S} j^0 \epsilon_{ijk0} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^k}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta = - \int_{\Omega_S} \rho d^3x.$$

Logo, a equação (3.3) para Ω espacial será a lei de Gauss para o campo elétrico,

$$\oint_{\partial\Omega_S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega_S} \rho d^3x. \quad (3.16)$$

⁴ Essa forma de obter a teoria não invariante por Lorentz, pode ser usada também para reinterpretar a equação da continuidade como uma equação de fluxo. Para mais detalhes, ver apêndice G.

Ω espaço-temporal

Consideraremos Ω como um volume espaço-temporal na forma de um cilindro $\Omega = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ (ver figura 11). O eixo de simetria do cilindro será a direção espacial de forma que esse volume possa ser gerado por um “disco espacial” evoluindo no tempo. Também iremos adotar a tampa inferior, \mathbb{D}_0^2 , como uma superfície a tempo fixo $t = 0$ e a superior, \mathbb{D}_t^2 , a tempo fixo $t > 0$. Com isso, o fluxo nas equações integrais será calculado sobre a superfície orientável $\partial\Omega = (\mathbb{D}_0^2)^{-1} \cup \mathbb{D}_t^2 \cup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$, que é a borda do cilindro.

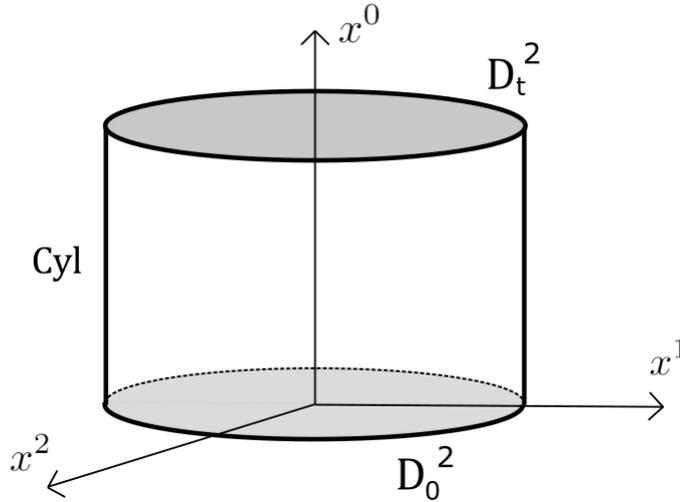


Figura 11 – Cilindro espaço-temporal $\Omega = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ cuja borda é $\partial\Omega = (\mathbb{D}_0^2)^{-1} \cup \mathbb{D}_t^2 \cup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$.

Começando por (3.5), o l.h.s. será

$$\oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau = - \oint_{\mathbb{D}_0^2} F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau + \oint_{\mathbb{D}_t^2} F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau + \oint_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau.$$

As duas primeiras integrais representam o fluxo do campo magnético em instantes de tempo diferentes. Na terceira integral, tomaremos σ como um parâmetro da borda a tempo constante e τ como o parâmetro do tempo:

$$\oint_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau = - \int_0^t \int_0^{2\pi} E^i \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} d\sigma dt'.$$

Para um intervalo de tempo infinitesimal, teremos

$$\oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau = -\Delta\Phi(\mathbf{B}, \mathbb{D}^2) - \Delta t \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = 0,$$

onde $\Delta\Phi(\mathbf{B}, \mathbb{D}^2)$ é diferença de fluxo magnético nas superfícies \mathbb{D}_0^2 e \mathbb{D}_t^2 . Fazendo $t \rightarrow 0$, recuperamos a lei de Faraday

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B}, \mathbb{D}^2)}{dt} + \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (3.17)$$

Agora para a equação (3.6). O l.h.s. será análogo ao anterior e o resultado será

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau = \Phi(\mathbf{E}, \mathbb{D}_0^2) - \Phi(\mathbf{E}, \mathbb{D}_t^2) + \int_0^t \int_0^{2\pi} B^i \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} d\sigma dt'.$$

O r.h.s. (fonte do fluxo), por sua vez, fica

$$\int_{\Omega} j^{\gamma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta = \int_{\Omega} j^k \epsilon_{ij0k} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \frac{\partial x^0}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta = \int_0^t \int_{\mathbb{D}^2} j^k \epsilon_{kij} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} d\sigma d\tau dt'.$$

Para um intervalo de tempo infinitesimal:

$$-\frac{\Delta\Phi(\mathbf{E}, \mathbb{D}^2)}{\Delta t} + \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{j}, \mathbb{D}^2).$$

E com $t \rightarrow 0$ recuperamos a lei de Ampère-Maxwell

$$-\frac{d\Phi(\mathbf{E}, \mathbb{D}^2)}{dt} + \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{j}, \mathbb{D}^2). \quad (3.18)$$

3.3 Simetrias escondidas e cargas conservadas no eletromagnetismo

As equações integrais do eletromagnetismo oferecem uma nova perspectiva sobre a conservação da carga elétrica. A construção da carga conservada é baseada na generalização da obtenção das cargas de teorias integráveis descrita no capítulo anterior.

O teorema de Noether garante que a toda simetria contínua da ação existe uma carga conservada. Para a simetria de calibre local, vimos na seção 1.2 que a carga conservada é a elétrica. Entretanto, como estudado em 2.1.3, existe uma outra maneira de se obter cargas conservadas que é independente da construção de Noether. Vimos que nessa construção é necessário varrer o espaço-tempo por loops e utilizar as holonomias generalizadas.

Nesta seção, o caso de interesse é o espaço-tempo quadridimensional para o eletromagnetismo, logo as holonomias são abelianas. No apêndice F, deixamos os casos de espaço-tempos bidimensionais e tridimensionais e, no capítulo 4, discutimos o caso de teorias de calibre não abelianas.

O espaço-tempo 3 + 1-dimensional será escaneado por superfícies fechadas com um ponto em comum, x_R , ou seja, o loop space é o $\mathcal{L}^{(2)}(\mathcal{M})$. Além disso, ele mapeia tais superfícies em pontos de forma que um volume no espaço-tempo corresponde a um caminho no loop space. Nesse espaço, a conexão \mathcal{A} é escrita em termos de uma 3-forma exata, $H = dB$, portanto, por construção, possui curvatura nula, $\delta\mathcal{A} = 0$.

A 2-holonomia será avaliada sobre uma superfície fechada e calculada a partir da seguinte equação de transporte paralelo:

$$\frac{dU}{d\tau} + ie \left(\oint_{\gamma} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma \right) U = 0, \quad (3.19)$$

onde $B_{\mu\nu}$ são as componentes de uma 2-forma. A solução dessa equação é dada por (2.34), mas ao invés de $B_{\mu\nu}^W$ tem-se apenas $B_{\mu\nu}$, pois a teoria é abeliana. Conseqüentemente:

$$U_{\Sigma} = e^{-ie \oint_{\Sigma} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau} U_R. \quad (3.20)$$

Observe que a 2-holonomia não é necessariamente avaliada sobre uma superfície fechada, mas a tomamos como tal neste contexto.

A 2-holonomia sobre uma superfície fechada pode ser relacionada com o volume interior a essa superfície segundo o teorema de Stokes exponenciado (2.43). Basta considerar variações perpendiculares na superfície Σ por $x \rightarrow x + \delta x$, que levam a

$$\delta U = -ie \left(\oint_{\Sigma} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x^\lambda d\sigma d\tau \right) U, \quad (3.21)$$

onde $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$. Parametrizando as deformações por $\zeta \in [0, 2\pi]$, tem-se a equação definidora da 3-holonomia (2.40) no contexto abeliano:

$$\frac{dU}{d\zeta} + ie \left(\oint_{\Sigma} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau \right) U = 0. \quad (3.22)$$

Sua solução é

$$U_{\Omega} = e^{-ie \int_{\Omega} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau} U_R, \quad (3.23)$$

onde Ω é um volume tridimensional imerso no espaço-tempo.

Definiremos as componentes de $B_{\mu\nu}$ em termos de uma combinação do tensor eletromagnético e seu dual:

$$B_{\mu\nu} = \alpha F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

onde α e β são constantes arbitrárias. Desse modo, usando as equações de movimento (1.7) e (1.8):

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\lambda} &= \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} \\ &= \alpha (\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}) + \beta \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \partial_\rho F^{\rho\gamma} \\ &= \beta \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} j^\gamma. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Isso implica na conexão sendo escrita em termos da corrente como

$$\mathcal{A} \equiv \oint_{\Sigma} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau = \beta \oint_{\Sigma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} j^\gamma \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau. \quad (3.26)$$

Agora, o teorema de Stokes (2.43) devolverá

$$U_{\partial\Omega} = e^{-ie \oint_{\partial\Omega} B_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau} U_{\Omega} = e^{-ie\beta \int_{\Omega} j^\gamma \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta}, \quad (3.27)$$

onde $\partial\Omega$ é a borda de Ω e definimos o operador calculado no ponto de referência U_R como a identidade.

O ponto chave na obtenção das cargas é a curvatura nula da conexão, pois ela será equivalente a equação da continuidade no loop space. Isso é evidente se variarmos o caminho definido pela mesma no loop space, mantendo as bordas fixas:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{\gamma} \mathcal{A}d\zeta &= \int_{\Omega} \delta H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta + \int_{\Omega} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta \\
&+ \int_{\Omega} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta + \int_{\Omega} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial \delta x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta \\
&= \int_{\Omega} \partial_{\theta} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} \delta x^{\theta} d\sigma d\tau d\zeta - \int_{\Omega} \partial_{\theta} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} \delta x^{\mu} d\sigma d\tau d\zeta \\
&- \int_{\Omega} \partial_{\theta} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau d\zeta - \int_{\Omega} \partial_{\theta} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial \zeta} \delta x^{\lambda} d\sigma d\tau d\zeta \\
&\quad + (\text{termos de superfície}),
\end{aligned}$$

onde na segunda passagem integramos por partes e cancelamos os termos de derivada segunda usando a comutatividade das derivadas ordem superior. Os termos de superfícies são nulos, pois os extremos do caminho são mantidos fixos. Assim, reorganizando os índices, resta:

$$\delta \int_{\gamma} \mathcal{A}d\zeta = \int_{\Omega} K_{\mu\nu\lambda\theta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} \delta x^{\theta} d\sigma d\tau d\zeta. \quad (3.28)$$

onde definimos $K_{\mu\nu\lambda\theta} \equiv \partial_{\theta} H_{\mu\nu\lambda} - \partial_{\mu} H_{\nu\lambda\theta} + \partial_{\nu} H_{\lambda\theta\mu} - \partial_{\lambda} H_{\theta\mu\nu}$. Agora, substituindo (3.25) em $K_{\mu\nu\lambda\theta}$,

$$K_{\mu\nu\lambda\theta} = \beta(\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_{\theta} j^{\kappa} - \epsilon_{\nu\lambda\theta\kappa} \partial_{\mu} j^{\kappa} + \epsilon_{\lambda\theta\mu\kappa} \partial_{\nu} j^{\kappa} - \epsilon_{\theta\mu\nu\kappa} \partial_{\lambda} j^{\kappa}),$$

e contraindo os índices com $\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta} K_{\mu\nu\lambda\theta} &= \beta(\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_{\theta} j^{\kappa} - \epsilon_{\nu\lambda\theta\kappa} \partial_{\mu} j^{\kappa} + \epsilon_{\lambda\theta\mu\kappa} \partial_{\nu} j^{\kappa} - \epsilon_{\theta\mu\nu\kappa} \partial_{\lambda} j^{\kappa}) \\
&= \beta(6 \delta_{\kappa}^{\theta} \partial_{\theta} j^{\kappa} + 6 \delta_{\kappa}^{\mu} \partial_{\mu} j^{\kappa} + 6 \delta_{\kappa}^{\nu} \partial_{\nu} j^{\kappa} + 6 \delta_{\kappa}^{\lambda} \partial_{\lambda} j^{\kappa}) \\
&= 24\beta \partial_{\kappa} j^{\kappa}.
\end{aligned} \quad (3.29)$$

Portanto, devido a curvatura nula da conexão, (3.28) será

$$\delta \int_{\gamma} \mathcal{A}d\zeta = \beta \int_{\Omega} \partial_{\kappa} j^{\kappa} d^4x = 0. \quad (3.30)$$

As holonomias obtidas a partir dessa conexão são independentes do caminho. Logo, existe uma liberdade na escolha dos caminhos para a varredura do volume Ω . Optaremos por dois que dividem o espaço-tempo em e espaço e tempo, conforme a figura 12.

O caminho, $\Gamma = \Gamma_L \circ \Gamma_0$, é composto por Γ_0 , que começa em Σ_0 e termina em $\partial\Omega_0$, e por Γ_L , que começa em $\partial\Omega_0$ e termina em $\partial\Omega_t$. A holonomia para Γ é dada por $U_{\Omega} = U_{\Omega_L} \cdot U_{\Omega_0}$ em que

$$U_{\Omega_0} = e^{-ie\beta \int_{\Omega_0} \epsilon_{ijk0} j^0 \Big|_{t=0} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \frac{\partial x^k}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta} = e^{-ie\beta Q(t=0)}; \quad (3.31)$$

$$U_{\Omega_L} = e^{-ie \int_{\Omega_L} \epsilon_{ij0k} j^k \Big|_{t=0} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \frac{\partial x^0}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta} = e^{-ie\beta \int_0^t \Phi[j, \partial\Omega] dt}, \quad (3.32)$$

sendo $\Phi[j, \partial\Omega]$ é o fluxo de corrente por $\partial\Omega$ e $Q(t=0)$ é carga total inicial.

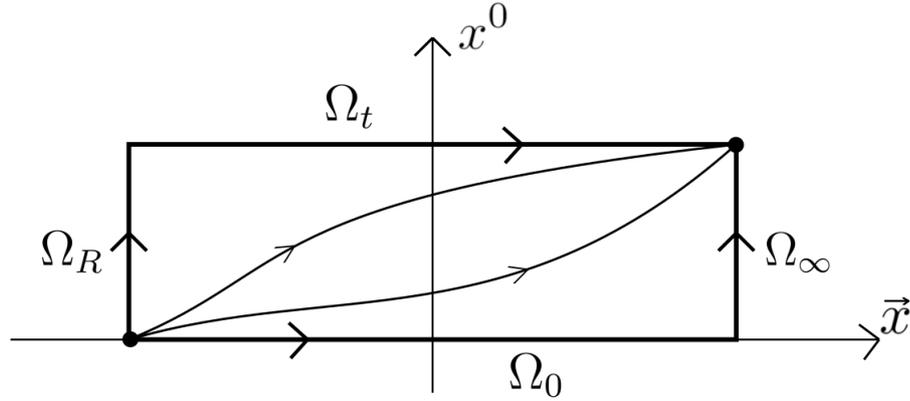


Figura 12 – Caminhos para o cálculo da holonomia.

O caminho alternativo, $\Gamma' = \Gamma_t \circ \Gamma_{x_R}$, é composto por Γ_{x_R} , que começa em Σ_0 e termina em Σ_t , e por Γ_t , que começa em Σ_0 e termina em $\partial\Omega_t$. A holonomia associada é $U'_\Omega = U_{\Omega_t} \cdot U_{\Omega_R}$ onde

$$U_{\Omega_t} = e^{-ie\beta \int_{\Omega_t} \epsilon_{ijk0} j^0 \Big|_{t>0} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \frac{\partial x^k}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta} = e^{-ie\beta Q(t)}; \quad (3.33)$$

$$U_{\Omega_R} = e^{-ie \int_{\Omega_R} \epsilon_{ij0k} j^k \Big|_{t>0} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \frac{\partial x^0}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta} = e^{-ie\beta \int_0^t \Phi[j, \Sigma] dt}. \quad (3.34)$$

O operador de carga⁵, $\mathcal{Q} \equiv U_{\Omega_0}$, será a holonomia calculada sobre a parte espacial do caminho no loop space a tempo constante e evolui de maneira isoespectral:

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{U}(t) \mathcal{Q}(0) \mathcal{U}^{-1}(t) \quad \text{com} \quad \mathcal{U}(t) \equiv e^{-ie\beta \int_0^t \Phi[j, \Sigma] dt}. \quad (3.35)$$

Portanto, os autovalores de \mathcal{Q} são preservados. Essa preservação é evidente se tomarmos a carga como localizada, ou seja, quando $|\mathbf{j}| \sim r^{-(2+\epsilon)}$, $\epsilon > 0$, para $r \rightarrow \infty$, e a holonomia sobre Σ_0 como a identidade quando Σ_0 é infinitesimal. Assim, temos

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}(0) \implies e^{ie\beta[Q(t)-Q(0)]} = \mathbb{I} \implies Q(t) = Q(0), \quad (3.36)$$

que é a conservação da carga elétrica.

Repare que além de conservada, a carga é invariante de calibre devido a transformação global do operador holonomia, ver (2.31).

Em resumo, ao examinarmos as holonomias generalizadas no espaço de loops, podemos obter uma perspectiva alternativa sobre a conservação da carga elétrica. Esse operador é independente do caminho nesse espaço e essa propriedade revela uma simetria oculta que desempenha um papel fundamental na preservação da carga. Essa abordagem fornece uma compreensão mais profunda da conservação da carga elétrica no eletromagnetismo.

⁵ Apesar de, na falta de uma notação mais apropriada, empregarmos a mesma letra para definir o operador de carga, $\mathcal{Q}(t)$, e a carga, $\mathcal{Q}[F, \Omega]$, é fundamental ressaltar que elas são discerníveis no contexto em que são empregadas.

3.4 Equações integrais em meios materiais lineares

Nas seções anteriores, exploramos a formulação integral do eletromagnetismo a fim de obter a conservação da carga elétrica. Entretanto, restringimos a discussão considerando apenas campos no vácuo. Mostraremos agora⁶ que é possível estender as equações integrais para meios materiais levando em consideração a polarização e magnetização do meio. Nessa extensão, a carga conservada será escrita em termos dessas grandezas características do meio, conforme o esperado. O discutido nesta seção, até onde sabemos, não é encontrado na literatura.

Na eletrodinâmica clássica, descrevemos os fenômenos eletromagnéticos através de dois campos vetoriais⁷, \mathbf{E} e \mathbf{B} , cuja dinâmica é dada pelas equações de Maxwell. Essas equações no vácuo são

$$\vec{\partial} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \vec{\partial} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0; \quad (3.37)$$

$$\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} = \rho; \quad \vec{\partial} \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}. \quad (3.38)$$

Para meios materiais lineares, computamos o estímulo do campo através das relações constitutivas,

$$\rho = -\vec{\partial} \cdot \mathbf{P} \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = \partial_t \mathbf{P} + \vec{\partial} \times \mathbf{M}, \quad (3.39)$$

que permitem definir a densidade de campo elétrico e o campo magnético como

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad (3.40)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (3.41)$$

Assim, as equações diferenciais de Maxwell para meios lineares serão

$$\vec{\partial} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \vec{\partial} \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0; \quad (3.42)$$

$$\vec{\partial} \cdot \mathbf{D} = 0; \quad \vec{\partial} \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = 0; \quad (3.43)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (3.44)$$

No caso das equações de Maxwell covariantes em meios materiais, precisamos definir o tensor das polarizações e magnetizações, $L_{\mu\nu}$, e o tensor dos campos materiais, $G_{\mu\nu}$. Esses tensores são antissimétricos e têm como componentes $L_{0i} = -P_i$ e $L_{ij} = \epsilon_{ijk}M_k$, e $G_{0i} = -D_i$ e $G_{ij} = -\epsilon_{ijk}H_k$. Com as relações constitutivas, a corrente é escrita por

$$j^\nu = -\partial_\lambda L^{\lambda\nu}. \quad (3.45)$$

⁶ Esta seção foi resultado de valiosas discussões com Dr. Rodrigo A. Muniz.

⁷ Iremos nos referir a \mathbf{E} como campo elétrico e \mathbf{B} como densidade de campo magnético quando precisarmos diferenciá-los de \mathbf{D} e \mathbf{H} , que serão a densidade de campo elétrico e o campo magnético, respectivamente. Para os casos em que o meio é o vácuo, $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, não fazendo sentido diferenciá-los, logo apenas os chamaremos de campo elétrico e magnético.

Assim, a equação de Maxwell covariante com fonte, (1.7), fica

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\lambda L^{\lambda\nu} \implies \partial_\mu G^{\mu\nu} = 0.$$

Então, as equações de Maxwell covariantes para meios materiais lineares serão

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (3.46)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0; \quad (3.47)$$

Repare que a identidade de Bianchi permanece inalterada e, assim como existe liberdade de calibre para $F_{\mu\nu}$, também existe para $L_{\mu\nu}$, pois existe um conjunto de funções no espaço-tempo que deixam a corrente invariante

$$j \mapsto j'^\nu = -\partial_\mu (L^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \omega_\beta) = j^\nu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha \omega_\beta = j^\nu.$$

Anteriormente, na seção 3.1, postulamos as equações integrais como a relação entre fluxos e cargas. Além de invariantes de Lorentz, esses objetos também são invariantes de calibre. Estenderemos essas equações para o caso de meios materiais lineares mantendo essa essência. Para isso, substituiremos (3.45) diretamente em (3.4). Assim

$$\int_\Omega \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} j^\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta = - \int_\Omega \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\gamma L^{\gamma\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta.$$

Sendo $\tilde{L}_{\mu\nu}$ o tensor dual de $L_{\mu\nu}$ definido por $\tilde{L}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} L^{\lambda\alpha}$, podemos reescrever o r.h.s. da equação anterior em termos do fluxo de $\tilde{L}_{\mu\nu}$ sobre $\partial\Omega$ através do teorema de Stokes para 2-formas (equação (3.10))

$$\begin{aligned} \int_\Omega \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\gamma L^{\gamma\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta &= \int_\Omega \left(\partial_\lambda \tilde{L}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{L}_{\nu\lambda} + \partial_\lambda \tilde{L}_{\mu\nu} \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta \\ &= \oint_{\partial\Omega} \tilde{L}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, (3.3) será escrita em termos do fluxo do dual do tensor dos campos materiais como

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{G}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau = 0. \quad (3.48)$$

As equações integrais continuam dadas em termos de fluxos, mas agora ambas não possuem fonte:

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{G}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau = 0; \quad (3.49)$$

$$\oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau = 0. \quad (3.50)$$

Outra maneira de interpretar essas equações é não definindo $G_{\mu\nu}$ explicitamente,

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau = - \oint_{\partial\Omega} \tilde{L}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau.$$

Dessa forma, evidenciamos o fluxo do campo $\tilde{F}_{\mu\nu}$ como uma resposta ao fluxo do dual campo das polarizações e magnetizações do meio.

3.4.1 Equações de Maxwell não invariantes de Lorentz em meios materiais

As escolhas na natureza de Ω são as mesmas que na seção 3.2. Novamente, teremos dois casos: Ω puramente espacial ou Ω espaço-temporal.

(i) Ω puramente espacial

Começando por (3.49):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \tilde{G}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau &= \oint_{\partial\Omega_S} \tilde{G}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau = \oint_{\partial\Omega_S} -\epsilon_{ijk} D^k \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &\implies \oint_{\partial\Omega_S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Agora para (3.50):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau &= \oint_{\partial\Omega_S} F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau = - \oint_{\partial\Omega_S} B^k \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &\implies \oint_{\partial\Omega_S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

(ii) Ω espaço-temporal

Novamente faremos Ω como um cilindro $\Omega = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ com componentes no espaço e tempo assim como na figura 11.

Começando por (3.50):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \tilde{G}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau &= - \int_{\mathbb{D}_0^2} \tilde{G}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau + \int_{\mathbb{D}_t^2} \tilde{G}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \tilde{G}_{i0} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &= \int_{\mathbb{D}_0^2} \epsilon_{ijk} D^k \Big|_{t=0} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau - \int_{\mathbb{D}_t^2} \epsilon_{ijk} D^k \Big|_{t>0} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} H_i \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &= \Phi(\mathbf{D}, \mathbb{D}_0^2) - \Phi(\mathbf{D}, \mathbb{D}_t^2) + \int_0^t \int_0^{2\pi} H_i \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} d\sigma dt' \\ &= \Delta\Phi(\mathbf{D}, \mathbb{D}^2) + \int_0^t \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} dt', \end{aligned}$$

onde denotamos o fluxo de \mathbf{D} pela superfície \mathbb{D}^2 por $\Phi(\mathbf{D}, \mathbb{D}^2)$. Considerando um intervalo de tempo infinitesimal:

$$\frac{\Delta\Phi(\mathbf{D}, \mathbb{D}^2)}{\Delta t} + \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Correspondendo a equação de Ampère-Maxwell quando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d\Phi(\mathbf{D}, \mathbb{D}^2)}{dt} + \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

A construção é análoga para (3.50):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau &= -\Delta\Phi(\mathbf{B}, \mathbb{D}^2) - \Delta t \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \\ \implies \frac{d\Phi(\mathbf{B}, \mathbb{D}^2)}{dt} + \oint_{\partial\mathbb{D}^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= 0. \end{aligned}$$

3.4.2 Conservação da carga via simetria no loop space

A construção para obtenção das cargas pode ser repetida para o caso de meios materiais, mas agora utilizando as equações integrais (3.49) e (3.50).

O tensor $B_{\mu\nu}$ é definido de maneira análoga ao caso do vácuo, pelo tensor eletromagnético e seu dual,. A conexão será expressa como

$$\mathcal{A} = \oint_{\Sigma} H_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \delta x^\lambda d\sigma d\tau, \quad (3.53)$$

onde

$$H_{\mu\nu\lambda} = \beta \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} j^\gamma = -\beta \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \partial_\alpha L^{\alpha\gamma}. \quad (3.54)$$

A curvatura nula da conexão será novamente equivalente a uma equação da continuidade. Porém, há um detalhe extra: ela é trivialmente satisfeita. Isso ocorre, pois a corrente é escrita em termos das relações constitutivas e o tensor $L_{\mu\nu}$ é antissimétrico,

$$\delta\mathcal{A} = 0 \implies 24\beta \partial_\kappa j^\kappa = 0 \implies -24\beta \partial_\kappa \partial_\lambda L^{\lambda\kappa} = 0. \quad (3.55)$$

Ao calcular as holonomias para os mesmos caminhos da figura 12, tem-se para Γ

$$\begin{aligned} U_\Gamma &= U_{\Gamma_{\Omega_L}} \cdot U_{\Gamma_{\Omega_0}} \\ &= e^{-ie \int_{\Omega_L} H_{ij0} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^0}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta} \cdot e^{-ie \int_{\Omega_0} H_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^k}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Note que as integrais são

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} H_{ij0} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^0}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta &= - \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_{t'} P^k + \epsilon_{nlk} \partial_l M^k) \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\zeta} d\sigma d\zeta dt' \\ &= - \int_0^t \oint_{\partial\Sigma_\infty} (\partial_{t'} \mathbf{P} + \vec{\partial} \wedge \mathbf{M}) \cdot \hat{n} d\Sigma dt' \\ &= - \int_0^t \oint_{\partial\Sigma_\infty} \partial_{t'} \mathbf{P} \cdot \hat{n} d\Sigma dt' \\ \int_{\Omega_0} H_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^k}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta &= - \int_{\Omega_0} \vec{\partial} \cdot \mathbf{P} \Big|_{t=0} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot \hat{n} \Big|_{t=0} d\Sigma. \end{aligned}$$

Portanto, (3.56) será escrita como

$$U_{\Gamma} = e^{ie \int_0^t \oint_{\partial\Sigma_{\infty}} \partial_{t'} \mathbf{P} \cdot \hat{n} \, d\Sigma \, dt'} \cdot e^{ie \oint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot \hat{n} \Big|_{t=0} d\Sigma}. \quad (3.57)$$

Analogamente para Γ' :

$$U_{\Gamma'} = e^{ie \int_0^t \oint_{\partial\Sigma_{\infty}} \partial_{t'} \mathbf{P} \cdot \hat{n} \, d\Sigma \, dt'} \cdot e^{ie \oint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot \hat{n} \Big|_{t>0} d\Sigma}. \quad (3.58)$$

Devido à simetria no loop space (independência dos caminhos), tem-se $U_{\Gamma} = U_{\Gamma'}$ e, por consequência, o operador de carga, $\mathcal{Q}(t) \equiv e^{ie \oint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot \hat{n} \Big|_{t>0} d\Sigma}$, evolui de maneira isopectral:

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{U}(t) \mathcal{Q}(0) \mathcal{U}^{-1}(t) \quad \text{com} \quad \mathcal{U}(t) \equiv e^{-ie \int_0^t \oint_{\partial\Sigma_{\infty}} \partial_{t'} \mathbf{P} \cdot \hat{n} \, d\Sigma \, dt'}. \quad (3.59)$$

A conservação é explícita impondo⁸ que $|\mathbf{P}| \sim r^{-2-\epsilon}$, mas a carga conservada é o fluxo da polarização,

$$U_{\Gamma} = U_{\Gamma'} \implies \oint \mathbf{P} \cdot \hat{n} \Big|_{t=0} d\Sigma = \oint \mathbf{P} \cdot \hat{n} \Big|_{t>0} d\Sigma \quad (3.60)$$

Por fim, repare que, como a densidade de carga é dada por $\rho = -\vec{\partial} \cdot \mathbf{P}$, não reobtemos nenhuma “física nova”, pois ainda temos a conservação da carga elétrica. Demonstramos apenas que as equações integrais são consistentes com as relações constitutivas.

⁸ Lembre que a corrente elétrica no espaço euclidiano é dada por $\mathbf{j} = \partial_t \mathbf{P} + \vec{\partial} \wedge \mathbf{M}$.

4 Equações integrais em Teorias de Calibre não abelianas

As equações de Yang-Mills surgiram inicialmente em sua versão diferencial como uma generalização do eletromagnetismo para uma teoria de calibre não abeliana. No entanto, não era conhecida sua versão integral até 2012 (FERREIRA; LUCHINI, 2012a). Nesse ano, elas foram formuladas na versão integral, revelando sua utilidade para solucionar o problema de definição das cargas em Yang-Mills.

Neste capítulo, pretendemos expor uma visão alternativa sobre as equações integrais, diferente da proposta original. Iniciamos o capítulo redefinindo o fluxo e demonstrando o teorema de Stokes para o que chamaremos de campo conjugado. Em seguida, mostraremos como podemos reobter as equações diferenciais de Yang-Mills a partir da versão integral. Por fim, construiremos abstratamente as cargas a partir da simetria escondida no loop space.

4.1 Equações integrais de Yang-Mills e teorema de Stokes estendido

No capítulo anterior, estabelecemos a noção de fluxo a partir da integral de um 2-forma sobre uma superfície bidimensional por

$$\Phi[F, \Sigma] = \int_{\Sigma} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau.$$

Em teorias abelianas, essa definição é útil, pois, ao mudar o calibre, o tensor dos campos não se transforma e, conseqüentemente, o fluxo também não. Porém, em teorias não abelianas, o tensor dos campos se transforma localmente por $F_{\mu\nu}(x) \mapsto g(x) F_{\mu\nu}(x) g^{-1}(x)$ e, portanto, definir o fluxo dessa maneira não é mais adequado, pois o fluxo é uma quantidade global e deve se transformar como tal.

A solução para este problema é reconstruir a noção de fluxo a partir da conjugação do campo com a 1-holonomia¹. Chamaremos este novo fluxo de *fluxo do campo conjugado*, ou simplesmente *fluxo conjugado*:

$$\Phi[F^W, \Sigma] = \int_{\Sigma} F_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau \quad (4.1)$$

¹ O tensor dos campos conjugado com a holonomia aparece naturalmente quando consideramos que teorias de calibre são representações de um homomorfismo entre grupos de loops e o grupo de calibre. Porém, esse caso difere ligeiramente do que consideramos aqui, pois a holonomia está associada ao homomorfismo e uma mudança de calibre será relacionada a uma mudança de caminho no grupo de loops. Para uma discussão mais detalhada, ver, por exemplo, o primeiro capítulo de (GAMBINI; PULLIN, 2000).

onde W é a 1-holonomia definida a partir do campo de calibre e a notação “ B^W ” será adotada daqui por diante para representar a conjugação de qualquer objeto com a holonomia, ou seja, $B^W \equiv W^{-1}BW$.

Para o cálculo do fluxo, a superfície fechada Σ será percorrida por loops conectados por um ponto em comum, denotado por x_R . Essa superfície será deformada homotopicamente a fim de varrer um certo volume no espaço-tempo (imagine à inflação de um balão). Cada ponto nesse volume espaço-temporal é caracterizado por três parâmetros: $\sigma, \tau, \zeta \in [0, 2\pi]$, ou seja, $x^\mu(\sigma, \tau, \zeta)$. Enquanto σ identifica o ponto sobre o loop, o parâmetro τ identifica o loop sobre a superfície e ζ rotula a superfície sobre o volume no espaço-tempo (ver figura 13).

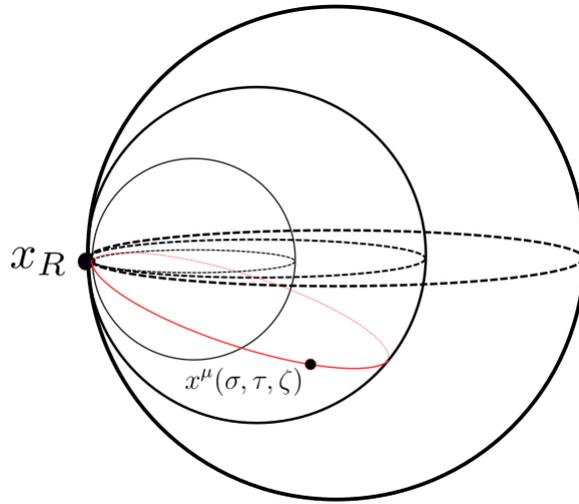


Figura 13 – Representação dos loops percorrendo a superfície Σ e a deformação homotópica da superfície para varrer o volume no espaço-tempo.

Estabelecido o escaneamento do volume, repare que a 1-holonomia W está definida sobre cada loop sobre a esfera. Portanto, de certa forma, ela leva o campo do ponto de referência até o ponto sobre o loop no qual avaliaremos o valor do campo e depois o devolve para o ponto de referência. Nesse sentido, como a holonomia é um objeto não local, pois a priori depende do caminho a qual está definida, o campo conjugado e o fluxo também serão não locais.

Apesar de ser um objeto não local, o fluxo do campo conjugado se transforma globalmente por transformações de calibre. Essa propriedade não é difícil de ser demonstrada. Por (2.30), a holonomia se transforma como

$$W \mapsto g(x)W(x)g^{-1}(x_R).$$

Logo, o campo conjugado se transforma de maneira global,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^W(x) &\mapsto F_{\mu\nu}^{\prime W'}(x) = g^{-1}(x_R)W^{-1}(x)g^{-1}(x) g(x)F_{\mu\nu}(x)g^{-1}(x) g(x)W(x)g(x_R) \\ &= g^{-1}(x_R)F_{\mu\nu}^W(x)g(x_R), \end{aligned} \quad (4.2)$$

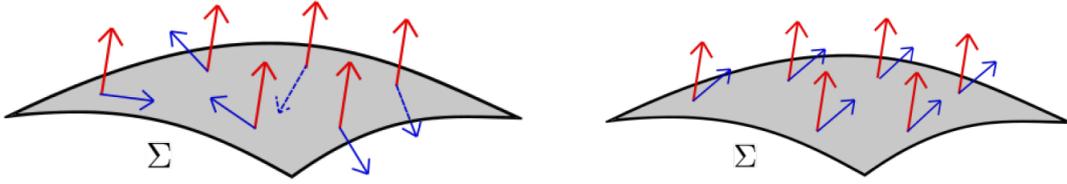


Figura 14 – As setas em vermelho mostram o campo antes da transformação e, as setas em azul, o campo após a transformação. À esquerda, a representação da transformação de calibre para o fluxo do campo não conjugado. À direita, a representação da transformação de calibre para o fluxo do campo conjugado

e o fluxo também,

$$\Phi[F^W, \Sigma] \mapsto g^{-1}(x_R) \Phi[F^W, \Sigma] g(x_R). \quad (4.3)$$

Uma forma de visualizar o que estamos fazendo está ilustrada na figura 14. Apesar do fluxo não poder mais ser relacionado com “setas” atravessando uma superfície, adotaremos essa representação apenas para fins pedagógicos. Na figura à esquerda de 14, ao tomar um transformação de calibre, cada ponto sobre a superfície sofre uma mudança local. Por outro lado, ao considerar o fluxo conjugado, todos os pontos sobre a superfície se transformam da mesma maneira, como representado à direita na figura 14. Dessa forma, é possível relacionar o campo calculado sobre cada ponto na superfície com uma “base comum” e, assim, sobre uma transformação de calibre, o campo conjugado calculado sobre todos os pontos da superfície se transforma de maneira unívoca, ao contrário do campo não conjugado, que se transforma de maneira local sobre os pontos da superfície.

Além de se transformar de maneira global, o campo conjugado possui uma outra propriedade importante no que diz respeito a sua derivada usual. A fim de descrevê-la, considere a derivada² de um campo conjugado $B_{\mu\nu}^W$:

$$\partial_\mu(W^{-1}B^{\mu\nu}W) = -W^{-1}\partial_\mu W W^{-1} B^{\mu\nu} W + W^{-1}\partial_\mu B^{\mu\nu}W + W^{-1}B^{\mu\nu}\partial_\mu W.$$

Agora, use a equação (2.4), aquela que define a holonomia, sem parametrizar a curva em σ , i.e. $\partial_\mu W - ieA_\mu W = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu B^{\mu\nu} W &= -ieW^{-1}A_\mu B^{\mu\nu}W + W^{-1}\partial_\mu B^{\mu\nu}W + ieW^{-1}B^{\mu\nu}A_\mu W \\ &= W^{-1}(\partial_\mu B^{\mu\nu} - ie[A_\mu, B^{\mu\nu}])W \\ &= W^{-1}D_\mu B^{\mu\nu}W. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Logo, a divergência usual de um campo conjugado é igual a conjugação com a holonomia da sua divergência covariante. Essa propriedade é particularmente interessante quando identificamos $B_{\mu\nu}^W$ como o tensor dos campos, $F_{\mu\nu}^W$, ou o seu dual, $\tilde{F}_{\mu\nu}^W$, e usamos as

² Para uma discussão sobre derivadas da holonomia, ver apêndice D.

equações dinâmicas, pois, assim, teremos duas equações diferenciais para o tensor dos campos conjugado:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{W\ \mu\nu} &= W^{-1} D_\mu F^{\mu\nu} W = W^{-1} j^\nu W \\ \implies \partial_\mu F^{W\ \mu\nu} &= j^{W\ \nu}\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{W\ \mu\nu} &= W^{-1} D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} W = 0 \\ \implies \partial_\mu \tilde{F}^{W\ \mu\nu} &= 0,\end{aligned}\quad (4.6)$$

onde definimos a *corrente conjugada* como $j^{W\ \nu} \equiv W^{-1} j^\nu W$. Portanto, é possível escrever equações diferenciais até mesmo para o campo conjugado, mas a fonte, assim como o campo, será não local. Repare também que as equações diferenciais para o campo conjugado não possuem contribuição da auto-interação do campo como uma fonte adicional.

A partir da corrente conjugada seria natural pensar em definir a carga a partir da componente 0 dessa corrente, mas não é possível seguir a construção em (1.26) e escrevê-la a partir do fluxo do campo elétrico não abeliano conjugado:

$$Q^{(W)} \equiv \int_{\Omega_S} d^3x \partial_i (W^{-1} F^{i0} W) \neq \int_{\partial\Omega_S} dS_i W^{-1} F^{i0} W. \quad (4.7)$$

Isso se deve ao fato do campo conjugado não obedecer o teorema de Stokes usual, como demonstraremos nos parágrafos subsequentes. Portanto, apenas tomar o campo F^W como “fundamental” não é suficiente para resolver o problema da carga.

Definido o campo conjugado e o fluxo conjugado, postularemos as equações integrais de Yang-Mills como

$$\Phi[F^W, \partial\Omega] = -\mathcal{Q}[F^W, \Omega]; \quad (4.8)$$

$$\Phi[\tilde{F}^W, \partial\Omega] = -\tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}^W, j^W, \Omega], \quad (4.9)$$

onde Ω é um volume tridimensional no espaço-tempo cuja borda é $\partial\Omega$ e as fontes, $\mathcal{Q}[F, \Omega]$ e $\tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}, j, \Omega]$ são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[F^W, \Omega] &= ie \int_{\Omega} \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\zeta}, F_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau d\zeta \\ &\quad - ie \int_{\Omega} \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\tau}, F_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta;\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}^W, j^W, \Omega] &= \int_{\Omega} \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} j^{W\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta \\ &\quad + ie \int_{\Omega} \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\zeta}, \tilde{F}_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau d\zeta \\ &\quad - ie \int_{\Omega} \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\tau}, \tilde{F}_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Note a diferença com o caso abeliano, equações (3.2) e (3.3), tanto o tensor dos campos quanto o seu dual tem uma carga não local devido a auto-interação do campo. Também

não existe mais versão integral para a identidade de Bianchi como na equação (3.2). Além disso, a fonte externa, j^ν , aparece conjugada com a holonomia.

Neste ponto, é importante fazer um paralelo com a abordagem original em (FERREIRA; LUCHINI, 2012a) e a tratada neste texto. Originalmente, os autores conceberam as equações integrais como uma série que formalmente era escrita como uma exponencial ordenada da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_{\partial\Omega} \exp \left\{ \int_{\partial\Omega} W^{-1} (\alpha F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \right\} = \mathcal{P}_\Omega \exp \left\{ \beta \int_\Omega \mathcal{J} d\sigma d\tau d\zeta \right\},$$

onde $\mathcal{P}_{\partial\Omega}$ e \mathcal{P}_Ω são os ordenamentos na superfície e volume, respectivamente, e \mathcal{J} é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \alpha \left(ie \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta}, F_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} - ie \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau}, F_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta} \right) \\ & + \beta \left(\epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} j^{W\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} + ie \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta}, \tilde{F}_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \right. \\ & \left. - ie \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau}, \tilde{F}_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta} \right). \end{aligned}$$

Ferreira e Luchini consideraram o teorema de Stokes não abeliano exponenciado generalizado e identificaram o campo no lado do fluxo como $B_{\mu\nu} = \alpha F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\nu}$. Em seguida, as equações diferenciais foram impostas para obter a fonte do campo. A abordagem do presente texto difere ligeiramente da original, pois postulamos as equações integrais e, a partir delas, obtemos as equações diferenciais. As razões são o próprio caminho histórico da descrição do eletromagnetismo e, de acordo com o julgamento dos autores deste texto, a forma mais natural de as conectar à versão diferencial. Como já mencionado em capítulos anteriores, inicialmente o eletromagnetismo foi descrito a partir de fluxos de campo; parece mais intuitivo postular as equações de Yang-Mills como também uma conexão direta entre fluxo e carga. Sobre a segunda razão, a conexão entre a versão diferencial e a versão integral, trataremos-na mais adiante. No entanto, ambas as abordagens são válidas e levam a mesma descrição para as teorias de calibre. A escolha entre uma ou outra perspectiva, apenas enriquece a discussão.

O teorema de Stokes desempenha um papel fundamental na conexão entre a versão integral e a versão diferencial das equações. Ele fornece a pista crucial para relacionar o fluxo do campo sobre uma borda com a fonte de campo em seu interior. No entanto, não podemos aplicar diretamente o teorema de Stokes (3.10) porque ele é válido apenas para o campo não conjugado; precisamos demonstrar o teorema de Stokes para a nova definição de fluxo. O processo de demonstração é semelhante ao caso abeliano em que consideramos o fluxo sobre uma superfície e variamos essa superfície (ver figura 10). Porém, nesse “novo” teorema, o campo é não local, o que significa contribuições adicionais não locais durante a variação.

Tomemos um campo conjugado não abeliano como $B_{\mu\nu}^W$, podendo ser tanto $F_{\mu\nu}^W$ quanto $\tilde{F}_{\mu\nu}^W$ ou algum outro campo que é as componentes de uma 2-forma conjugada com a holonomia de seu campo de calibre. O fluxo é então dado por

$$\Phi[B^W, \Sigma] = \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau. \quad (4.12)$$

Começamos variando perpendicularmente o fluxo conjugado sobre uma superfície Σ :

$$\delta\Phi = \int_{\Sigma} \delta B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau + \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau + \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau. \quad (4.13)$$

Analisaremos cada termo separadamente. O primeiro deles pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \delta B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau &= \int_{\Sigma} (-W^{-1} \delta W B_{\mu\nu}^W + W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} W \delta x^\lambda + W^{-1} B_{\mu\nu} \delta W) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\ &= \int_{\Sigma} W^{-1} (-\delta W W^{-1} B_{\mu\nu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu} \delta x^\lambda + B_{\mu\nu} \delta W W^{-1}) W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Substituindo (2.14):

$$\begin{aligned} &= ie \int_{\Sigma} \left(\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \delta x^\beta \right) B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau + \int_{\Sigma} W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x^\lambda d\sigma d\tau \\ &- ie \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \left(\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \delta x^\beta \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau - ie \int_{\Sigma} W^{-1} A_\lambda B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x^\lambda d\sigma d\tau \\ &\quad + ie \int_{\Sigma} W^{-1} B_{\mu\nu} A_\lambda W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x^\lambda d\sigma d\tau \\ &= \int_{\Sigma} W^{-1} D_\lambda B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x^\lambda d\sigma d\tau + ie \int_{\Sigma} \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \delta x^\beta, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (4.14)$$

O segundo termo será

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} (B_{\mu\nu}^W) \delta x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \delta x^\mu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \sigma \partial \tau} d\sigma d\tau + \text{termo de borda} \\ &= \int_{\Sigma} \left(W^{-1} \frac{dW}{d\sigma} B_{\mu\nu}^W - W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} W \frac{dx^\lambda}{d\sigma} - W^{-1} B_{\mu\nu} \frac{dW}{d\sigma} \right) \delta x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\ &\quad - \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \delta x^\mu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \sigma \partial \tau} d\sigma d\tau \\ &= - \int_{\Sigma} W^{-1} D_\lambda B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \delta x^\mu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \sigma \partial \tau} d\sigma d\tau, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde anulamos o termo de borda. O terceiro termo será

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} (B_{\mu\nu}^W) \delta x^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \delta x^\nu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau \partial \sigma} d\sigma d\tau + \text{termo de borda} \\ &= \int_{\Sigma} \left(W^{-1} \frac{dW}{d\tau} B_{\mu\nu}^W - W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} - W^{-1} B_{\mu\nu} \frac{dW}{d\tau} \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \delta x^\nu d\sigma d\tau \\ &\quad - \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \delta x^\nu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau \partial \sigma} d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

onde novamente anulamos os termos de borda. Substituindo (2.15) na expressão anterior:

$$\begin{aligned}
&= -ie \int_{\Sigma} \left(\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tau} \right) B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau - \int_{\Sigma} W^{-1} \partial_{\lambda} B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tau} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau \\
&+ ie \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \left(\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tau} \right) \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau + ie \int_{\Sigma} W^{-1} A_{\lambda} B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tau} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau \\
&\quad - \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \delta x^{\nu} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \tau \partial \sigma} d\sigma d\tau - ie \int_{\Sigma} W^{-1} B_{\mu\nu} A_{\lambda} W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tau} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau \\
&= - \int_{\Sigma} W^{-1} D_{\lambda} B_{\mu\nu} W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tau} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau - ie \int_{\Sigma} \left[\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tau}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau \\
&\quad - \int_{\Sigma} B_{\mu\nu}^W \delta x^{\nu} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \tau \partial \sigma} d\sigma d\tau. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Agora, combinando os termos (4.14), (4.15) e (4.16) em (4.13):

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \int_{\Sigma} W^{-1} (D_{\lambda} B_{\mu\nu} + D_{\mu} B_{\lambda\nu} + D_{\nu} B_{\mu\lambda}) W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \delta x^{\lambda} d\sigma d\tau \\
&+ ie \int_{\Sigma} \left[\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \delta x^{\beta}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\
&- ie \int_{\Sigma} \left[\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tau}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \delta x^{\nu} d\sigma d\tau. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Variações tangentes ao caminho, nas direções σ e τ , não afetam o fluxo, pois elas correspondem apenas a reparametrizações nessas direções. No entanto, é necessário introduzir um novo parâmetro, que denotaremos por $\zeta \in [0, 2\pi]$, para rotular as variações perpendiculares, essas são as que realmente afetam o fluxo. Dessa forma, temos uma equação diferencial facilmente resolvível:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{d\zeta} &= \int_{\Sigma} W^{-1} (D_{\lambda} B_{\mu\nu} + D_{\mu} B_{\lambda\nu} + D_{\nu} B_{\mu\lambda}) W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau \\
&+ ie \int_{\Sigma} \left[\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \zeta}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\
&- ie \int_{\Sigma} \left[\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tau}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Repare que cada ζ rotula uma superfície na variação. Integrando sobre todas as superfícies, o lado direito será um volume, denotado por Ω :

$$\begin{aligned}
\Phi[B^W, \Sigma_{2\pi}] - \Phi[B^W, \Sigma_0] &= \int_{\Omega} W^{-1} (D_{\lambda} B_{\mu\nu} + D_{\mu} B_{\lambda\nu} + D_{\nu} B_{\mu\lambda}) W \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta \\
&+ ie \int_{\Omega} \left[\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \zeta}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} d\sigma d\tau d\zeta \\
&- ie \int_{\Omega} \left[\int_0^{\sigma} d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tau}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \zeta} d\sigma d\tau d\zeta, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

onde $\Sigma_0 \equiv \Sigma(\zeta = 0)$ e $\Sigma_{2\pi} \equiv \Sigma(\zeta = 2\pi)$. Reorientando a superfície Σ_0 e usando a definição do fluxo conjugado, temos uma relação entre o fluxo na borda e uma quantidade no

interior:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Omega} B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau &= \int_{\Omega} W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\lambda\nu} + D_\nu B_{\mu\lambda}) W \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta \\
&+ ie \int_{\Omega} \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\zeta}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau d\zeta \\
&- ie \int_{\Omega} \left[\int_0^\sigma d\sigma' F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial\tau}, B_{\mu\nu}^W \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Esse é o teorema de Stokes para o campo conjugado.

Comparando (4.20) com as equações integrais de Yang-Mills, (4.8) e (4.9), percebemos que ao usar as equações diferenciais no primeiro termo do r.h.s. do teorema de Stokes, obtém-se ou o dual da corrente conjugada (no caso de $B^W = \tilde{F}^W$), ou esse termo como nulo (no caso de $B^W = F^W$). Os termos seguintes são as contribuições não locais para as cargas das equações integrais.

As equações diferenciais seguem das integrais ao considerar Ω infinitesimal que, por simplicidade, será considerado como um cubo com arestas δx , δy e δz . O ponto de referência está indicado em uma das arestas do cubo como mostra a figura 15. A holonomia e o tensor dos campos infinitesimais, usando a expansão de Taylor ao redor de x_R , serão dados por

$$W(x_R + \delta x) \approx \mathbb{I} + ie A_\mu(x_R) \delta x^\mu; \quad (4.21)$$

$$B_{\mu\nu}(x_R + \delta x) \approx B_{\mu\nu}(x_R) + \partial_\lambda B_{\mu\nu}(x_R) \delta x^\lambda. \quad (4.22)$$

As superfícies do cubo serão escaneadas por um único loop devido a natureza infinitesimal de Ω . Para as superfícies que estão em contato com x_R , tanto $\frac{dx^\mu}{d\sigma}$ quando $\frac{dx^\nu}{d\tau}$ são positivos. As demais superfícies têm $\frac{dx^\mu}{d\sigma}$ positivo e $\frac{dx^\nu}{d\tau}$ negativo, pois o escaneamento começa da borda e termina no ponto de referência. Iremos decompor $\partial\Omega$ como as faces do cubo, $\partial\Omega = \Sigma_{xy} \cup \Sigma_{yz} \cup \Sigma_{zx} \cup \Sigma'_{xy} \cup \Sigma'_{yz} \cup \Sigma'_{zx}$, de forma que as faces indicadas sem linha contém o ponto de referência e as faces sem linha não contém o ponto de referência. Por exemplo, o cálculo para as faces Σ_{xy} e Σ'_{xy} devolve o seguinte fluxo:

$$\begin{aligned}
\Phi[B^W, \Sigma_{xy}] &= B_{\mu\nu}^W \delta x^\mu \delta y^\nu \Big|_{x_R} = B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta x^\mu \delta y^\nu \\
\Phi[B^W, \Sigma'_{xy}] &= -B_{\mu\nu}^W \delta x^\mu \delta y^\nu \Big|_{x_R + \delta z} \\
&= -(\mathbb{I} - ie A_\alpha \delta z^\alpha) (B_{\mu\nu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu} \delta z^\lambda) (\mathbb{I} + ie A_\beta \delta z^\beta) \Big|_{x_R} \delta x^\mu \delta y^\nu \\
&= -B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta x^\mu \delta x^\nu - D_\lambda B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta x^\mu \delta y^\nu \delta z^\lambda
\end{aligned}$$

Para as outras superfícies:

$$\Phi[B^W, \Sigma_{yz}] = B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta y^\mu \delta z^\nu$$

$$\Phi[B^W, \Sigma'_{yz}] = -B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta y^\mu \delta z^\nu - D_\lambda B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta x^\lambda \delta y^\mu \delta z^\nu$$

$$\Phi[B^W, \Sigma_{zx}] = B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta z^\mu \delta x^\nu$$

$$\Phi[B^W, \Sigma'_{zx}] = -B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta z^\mu \delta x^\nu - D_\lambda B_{\mu\nu} \Big|_{x_R} \delta x^\lambda \delta y^\mu \delta z^\nu$$

Portanto, o fluxo total será

$$\Phi[B^W, \partial\Omega] = -(D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} + D_\lambda B_{\mu\nu}) \delta x^\mu \delta y^\nu \delta z^\lambda.$$

Em termos de F^W e \tilde{F}^W , escreveremo-o como

$$\Phi[F^W, \partial\Omega] = -(D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu}) \delta x^\mu \delta y^\nu \delta z^\lambda \quad (4.23)$$

$$\Phi[\tilde{F}^W, \partial\Omega] = -(D_\mu \tilde{F}_{\nu\lambda} + D_\nu \tilde{F}_{\lambda\mu} + D_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}) \delta x^\mu \delta y^\nu \delta z^\lambda. \quad (4.24)$$

Por outro lado, as cargas calculadas nesse volume Ω são

$$\mathcal{Q}[F^W, \Omega] = 0 \quad (4.25)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}^W, j^W, \Omega] = \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} j^\alpha \delta x^\mu \delta y^\nu \delta z^\lambda. \quad (4.26)$$

Os termos de comutador não locais são nulos, pois aparecerão termos de ordem mais alta.

Dessa forma, ficamos com

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.27)$$

$$D_\mu \tilde{F}_{\nu\lambda} + D_\nu \tilde{F}_{\lambda\mu} + D_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} j^\alpha. \quad (4.28)$$

Pela definição do tensor dual, reobteremos as equações de Yang-Mills na versão diferencial como em (1.59) e (1.73).

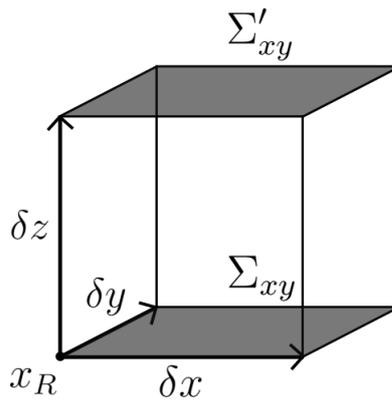


Figura 15 – O volume Ω é tomado como um cubo infinitesimal de arestas δx , δy e δz . As faces inferior e superior destacadas correspondem a Σ_{xy} e Σ'_{xy} , respectivamente.

É interessante destacar que nos restringimos apenas a análise em primeira ordem. Ao considerar termos de ordem mais alta na expansão as equações diferenciais de Yang-Mills terão modificações significativas, potencialmente gerando novos resultados físicos a serem explorados e compreendidos.

4.2 Cargas conservadas em teorias não abelianas

Descreveremos nesta seção o procedimento para o cálculo das cargas em teorias de calibre não abelianas, não calculando exemplos específicos. Alguns desses (instantons, monopolos, dyons etc) podem ser encontrados em (FERREIRA; LUCHINI, 2012b).

Na construção das cargas, assim como no caso abeliano, consideraremos o loop space $\mathcal{L}^{(2)}(\mathcal{M})$, ou seja, o mapeamento de superfícies fechadas topologicamente equivalentes a esferas S^2 em pontos (ver figura 9). Sobre cada superfície fechada, definimos um operador 2-holonomia, denotada por V , que satisfaz a seguinte equação

$$\frac{dV}{d\tau} + ieV\mathcal{B} = 0, \quad (4.29)$$

sendo \mathcal{B} uma conexão dada por

$$\mathcal{B} \equiv \int_0^{2\pi} B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma. \quad (4.30)$$

De acordo com o que foi discutido no capítulo 2, a solução dessa equação está definida sobre uma superfície Σ , que tomaremos como fechada, e é dada por

$$V_\Sigma = V_R \mathcal{P}_\tau e^{-ie \oint_\Sigma B_{\mu\nu}^W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau}. \quad (4.31)$$

No contexto da teoria de Yang-Mills, definiremos o campo $B_{\mu\nu}$ como $B_{\mu\nu} = \alpha F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\nu}$ em que α e β são parâmetros independentes. Dessa forma, a 2-holonomia anterior fica avaliada através do fluxo de $F_{\mu\nu}^W$ e $\tilde{F}_{\mu\nu}^W$, resultando em

$$V_\Sigma = V_R \mathcal{P}_\tau \exp \left\{ -ie(\alpha \Phi[F^W, \Sigma] + \beta \Phi[\tilde{F}^W, \Sigma]) \right\}. \quad (4.32)$$

Deformações perpendiculares em Σ , permitem definir a 3-holonomia que é denotada por U e satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{dU}{d\zeta} - ie\mathcal{A}U = 0 \quad (4.33)$$

cuja solução é

$$U_\Omega = \mathcal{P}_\zeta e^{-ie \int_0^{2\pi} \mathcal{A} d\zeta} U_R, \quad (4.34)$$

sendo a conexão \mathcal{A} dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \equiv & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\tau) \left\{ W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} \right. \\ & \left. - ie \left(\left[B_{\mu\nu}^W, \int_0^\sigma F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta} d\sigma' \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} - \left[B_{\mu\nu}^W, \int_0^\sigma F_{\alpha\beta}^W \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma'} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} d\sigma' \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta} \right) \right\} V^{-1}(\tau) d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (4.35)$$

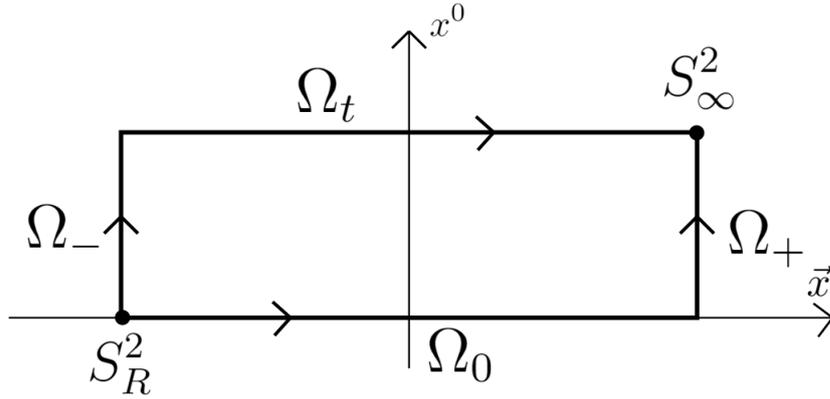


Figura 16 – Caminhos $\Gamma_1 = \Gamma_{\Omega_0} \circ \Gamma_{\Omega_+}$ e $\Gamma_2 = \Gamma_{\Omega_-} \circ \Gamma_{\Omega_t}$ que ligam as esferas S_R^2 e S_∞^2 .

Usando as equações integrais (4.8) e (4.9), a 3-holonomia é expressa como

$$U_\Omega = \mathcal{P}_\zeta \exp \left\{ -ie(\alpha \mathcal{Q}[F, \Omega] + \beta \tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}, j, \Omega]) \right\} U_R. \quad (4.36)$$

Esse operador será independente do caminho se a conexão \mathcal{A} possuir curvatura nula, $\delta\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0$, ou, de maneira equivalente, se

$$U(\Gamma) = V(\partial\Gamma), \quad (4.37)$$

onde Γ é o caminho no loop space equivalente ao volume Ω e $\partial\Gamma$ é a borda do caminho equivalente a borda do volume, $\Sigma \equiv \partial\Omega$. A equação anterior corresponde ao teorema de Stokes que de fato é válido, pois a 3-holonomia foi construída a partir da 2-holonomia. Portanto, por construção, a conexão tem curvatura nula no loop space e a 3-holonomia é independente do caminho.

Para mostrar a conservação da carga como consequência dessa simetria, consideraremos duas superfícies: uma de raio infinitesimal sobre o ponto x_R e denotada por S_R^2 e outra denotada por S_∞^2 . Deformando homotopicamente S_R^2 até S_∞^2 , varremos um volume no espaço-tempo que corresponde a um caminho no loop space. Como a 3-holonomia é independente do caminho, escolheremos dois caminhos particulares, Γ_1 e Γ_2 , esquematizados na figura 16. O primeiro caminho, $\Gamma_1 = \Gamma_{\Omega_0} \circ \Gamma_{\Omega_+}$, é tal que Γ_{Ω_0} evolui a superfície S_R^2 no espaço até S_∞^2 a tempo constante e igual a zero, enquanto Γ_{Ω_+} evolui S_∞^2 no tempo até $t > 0$ sem mudar sua parte espacial. O segundo caminho, $\Gamma_2 = \Gamma_{\Omega_-} \circ \Gamma_{\Omega_t}$, é tal que Γ_{Ω_-} evolui S_R^2 no tempo sem mudar sua parte espacial até um tempo $t > 0$, já Γ_{Ω_t} evolui no espaço a superfície S_R^2 a tempo constante $t > 0$ até a superfície S_∞^2 . Devido a independência do caminho, as holonomias se relacionam por

$$U_{\Omega_+} \cdot U_{\Omega_0} = U_{\Omega_t} \cdot U_{\Omega_-}. \quad (4.38)$$

Os caminhos Γ_{Ω_-} e Γ_{Ω_+} podem ser descritos topologicamente como cilindros $S_R^2 \times \mathbb{R}$ e $S_\infty^2 \times \mathbb{R}$, respectivamente. Ressalta-se que cada superfície em que a conexão \mathcal{A} é calculada

é escaneada por loops e essa varredura não é qualquer. Para o cilindro $S_R^2 \times \mathbb{R}$, ela é feita da seguinte maneira: primeiro escaneamos a esfera S_R^2 com loops, em seguida a movemos um instante posterior no tempo, a escaneamos novamente e retornamos para o ponto inicial pelo mesmo caminho que a movemos no tempo, depois repetimos o processo até o instante $t > 0$. O procedimento é análogo para $S_\infty^2 \times \mathbb{R}$ e ilustramos essa varredura na figura 17. Dessa forma, cada escaneamento pode ser dividido em três etapas: um caminho que começa em x_R e termina em x_R^t (ponto x_R no instante t), a varredura da esfera nesse instante de tempo, podendo ser tanto S_R^2 quanto S_∞^2 (depende do cilindro a que nos referimos), e o retorno de x_R^t à x_R . Essas etapas permitem separar, respectivamente, a conexão \mathcal{A} em três partes: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\uparrow + \mathcal{A}_o + \mathcal{A}_\downarrow$. Repare que os sinais de $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ em \mathcal{A}_\uparrow e \mathcal{A}_\downarrow são opostos e os integrando são os mesmo, logo elas sempre se cancelam. Também note que, se \mathcal{A}_o corresponde ao escaneamento sobre S_R^2 , ele não contribui para a conexão, pois será sempre calculada sobre a superfície de raio infinitesimal. Portanto, a conexão para o caminho Γ_{Ω_-} é nula e a holonomia é constante. No caso do caminho Γ_{Ω_+} , resta apenas a conexão \mathcal{A}_o . Essa conexão será nula escolhendo adequadamente as condições de contorno sobre a corrente e o tensor dos campos como $j_\mu \sim R^{-(2+\epsilon)}$ e $F_{\mu\nu} \sim R^{-(\frac{3}{2}+\epsilon)}$, onde R é o “raio espacial” e $\epsilon > 0$. Portanto, temos

$$U_{\Omega_-} = U_{\Omega_+} = U_{cte}, \quad (4.39)$$

onde U_{cte} é a holonomia constante, pois a conexão sobre esses dois caminhos é nula. Assim, até agora (4.38) fica

$$U_{\Omega_t} = U_{cte} \cdot U_{\Omega_0} \cdot U_{cte}^{-1}. \quad (4.40)$$

Entretanto, na equação anterior, toda a expressão está calculada sobre o ponto x_R no tempo $t = 0$. É necessário ainda encontrar uma forma de calcular cada “fatia espacial” separadamente. Isso será feito ao notar que a conexão no tempo $t = 0$, denotada aqui por \mathcal{A}_{x_R} , se relaciona com aquela em $t > 0$, $\mathcal{A}_{x_R^t}$, por

$$\mathcal{A}_{x_R^t} = W(x_R^t, x_R) \mathcal{A}_{x_R} W(x_R, x_R^t), \quad (4.41)$$

onde $W(x_R^t, x_R)$ é a holonomia que começa em x_R^t e termina em x_R e $W(x_R, x_R^t)$ é a holonomia que começa em x_R e termina em x_R^t , logo $W(x_R^t, x_R) = W^{-1}(x_R, x_R^t)$. Dessa forma, movemos o ponto de referência de x_R para x_R^t e a holonomia $U_{\Omega_t}^t$, àquela cujo ponto de referência está em x_R^t , se relaciona com U_{Ω_t} , àquela cujo ponto de referência está em x_R , por

$$U_{\Omega_t}^t = W(x_R^t, x_R) U_{\Omega_t} W^{-1}(x_R, x_R^t). \quad (4.42)$$

Ilustramos a movimentação do ponto de referência na figura 18.

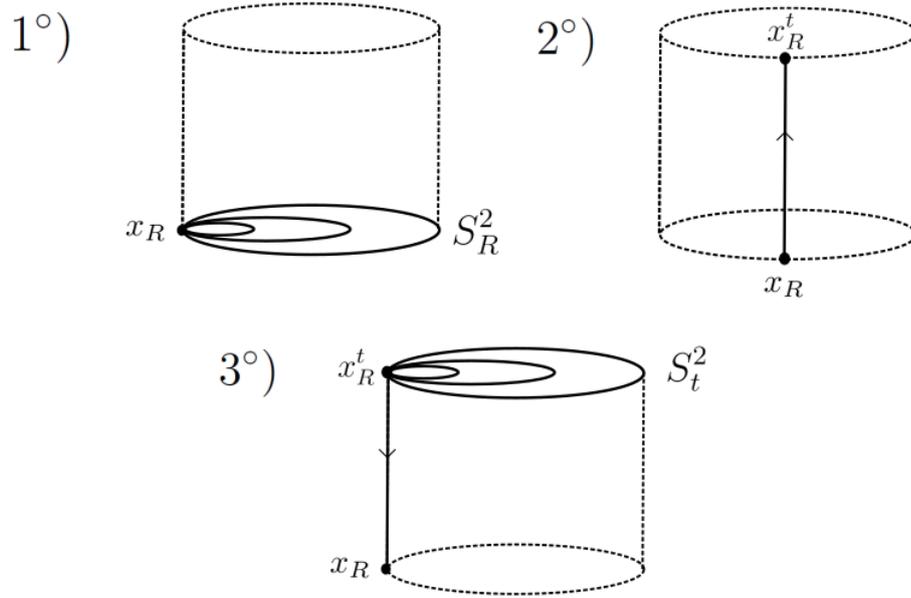


Figura 17 – Representação do escaneamento do cilindro $S_R^2 \times \mathbb{R}$. Na primeira etapa, escaneamos S_R^2 a tempo $t = 0$. Em seguida, na segunda, movemos para um instante posterior e repetimos o escaneamento, até retornar para x_R .

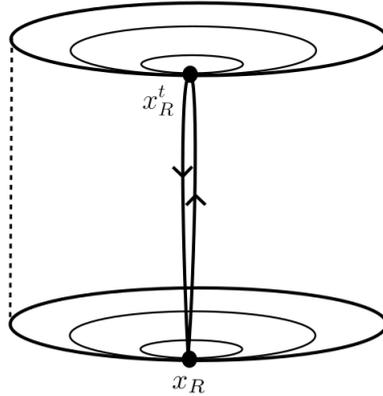


Figura 18 – Movimentação do ponto de referência de x_R para x_R^t .

Portanto, substituindo (4.42) em (4.40), ficamos com

$$\begin{aligned} W^{-1}(x_R^t, x_R) \cdot U_{\Omega_t}^t \cdot W(x_R^t, x_R) &= U_{cte} \cdot U_{\Omega_0} \cdot U_{cte}^{-1} \\ \Rightarrow U_{\Omega_t}^t &= W(x_R^t, x_R) \cdot U_{cte} \cdot U_{\Omega_0} \cdot (W(x_R^t, x_R) \cdot U_{cte})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Definindo o operador evolução como $\mathcal{U}(t) \equiv W(x_R, x_R^t) \cdot U_{cte}$ e o operador de carga³ como $\mathcal{Q}(t) \equiv U_{\Omega_t}^t$, temos a evolução isoespectral de $\mathcal{Q}(t)$,

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{U}(t) \mathcal{Q}(0) \mathcal{U}^{-1}(t), \quad (4.44)$$

³ Assim como no caso abeliano, na falta de uma notação melhor, usamos a mesma letra para definir o operador de carga, $\mathcal{Q}(t)$, e as cargas, $\mathcal{Q}[F^W, \Omega]$ e $\tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}^W, j^W, \Omega]$, é importante destacar que elas são novamente discerníveis pelo contexto em que são utilizadas.

logo seus autovalores, dados por $\text{Tr}[\mathcal{Q}(t)]^N$, são preservados. Esses autovalores serão as cargas conservadas na teoria de Yang-Mills.

Repare que por (4.36) as cargas conservadas são dadas em termos das fontes no r.h.s. das equações integrais de Yang-Mills. Essas cargas, pelo teorema de Stokes (4.37), podem ser calculadas também através do fluxo do campo conjugado e seu dual, equação (4.32). Além disso, por construção, essas cargas são também invariantes de calibre, pois as holonomias W e V se transformam como $g(x) W g^{-1}(x_R)$ e $g(x) V g^{-1}(x_R)$. Por outro lado, a corrente e os campos conjugados se transformam por $j^W \mapsto g^{-1}(x_R) j^W g(x_R)$, $F^W \mapsto g^{-1}(x_R) F^W g(x_R)$ e $\tilde{F}^W \mapsto g^{-1}(x_R) \tilde{F}^W g(x_R)$. Logo, as cargas $\mathcal{Q}[F^W, \Omega]$ e $\tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}^W, j^W, \Omega]$ transformam-se globalmente como

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}[F^W, \Omega] &\mapsto g^{-1}(x_R) \mathcal{Q}[F^W, \Omega] g(x_R) \\ \tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}^W, j^W, \Omega] &\mapsto g^{-1}(x_R) \tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{F}^W, j^W, \Omega] g(x_R). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Portanto, o operador de carga se transforma também globalmente:

$$\mathcal{Q}(t) \mapsto g^{-1}(x_R) \mathcal{Q}(t) g(x_R). \quad (4.46)$$

Concluimos então que a construção das cargas em teorias não abelianas segue, com algumas modificações, as ideias apresentadas em teorias abelianas. As cargas são conservadas e invariantes de calibre. Além disso, elas são consequência da formulação integral e da simetria de independência do caminho, que está oculta no loop space.

Considerações finais

Nem todo progresso em ciência requer uma completa ruptura com as ideias predecessoras. Muitas vezes, uma simples mudança de perspectiva abre o caminho para novas descobertas. Neste trabalho, não propomos revoluções, mas sim mudanças de perspectiva que nos permitam explorar novos cenários físicos.

Entre as muitas lacunas a serem preenchidas nas teorias de calibre não abelianas, exploramos aquela que diz respeito ao problema da definição da carga conservada e invariante de calibre. Enquanto no eletromagnetismo a carga conservada (carga elétrica) pode ser obtida através do teorema de Noether, como visto no capítulo 1, na teoria de Yang-Mills não é possível derivar uma equação de continuidade para a corrente de matéria a partir desse teorema. Portanto, o teorema de Noether por si só não garante que a carga conservada em um calibre seja conservada em todos os outros, o que compromete a principal característica que uma carga deve possuir: rotular uma classe de equivalência de soluções dinâmicas para um mesmo fenômeno físico.

Abordamos esse problema por uma perspectiva diferente e independente do teorema de Noether. Importamos da integrabilidade a definição de um operador da carga cujos autovalores correspondem às cargas conservadas. Nesse processo, estudamos a generalização da holonomia para o transporte paralelo entre superfícies fechadas e mostramos como construir o operador de carga para o eletromagnetismo e a teoria de Yang-Mills. Devido a uma simetria oculta no loop space, independência do caminho, o operador de carga evolui isoespectralmente no tempo e, portanto, seus autovalores são conservados. No caso do eletromagnetismo, essa construção resulta na conservação da carga elétrica, como esperávamos. Por outro lado, para a teoria de Yang-Mills, as cargas conservadas são (4.10) e (4.11).

Outra mudança de perspectiva tratada neste trabalho está em considerar, a priori, as equações do eletromagnetismo como relações entre fluxo e carga, inclusive na versão invariante de Lorentz. Embora essa mudança seja simples, sua profundidade é significativa, pois segue o tratamento histórico do eletromagnetismo. Além disso, provamos o teorema de Stokes de uma forma alternativa a encontrada na literatura que aumenta a intuição sobre o seu significado. Nesse ponto, também apresentamos a versão integral invariante de Lorentz para meios materiais que, até onde sabemos, não são encontradas na literatura. Demonstramos sua compatibilidade com a versão não invariante de Lorentz e constatamos que a carga conservada é o próprio fluxo da polarização, conforme o esperado.

Inspirados pela versão integral do eletromagnetismo, olhamos para o caso de Yang-Mills. Postulamos as equações integrais de maneira diferente a sua concepção original, no

formato não exponenciado. Nesse processo, voltamos nossa atenção para o fluxo conjugado com a holonomia. Essa abordagem, segundo a opinião dos autores, representa uma espécie de “novo princípio de calibre” para as equações integrais. Além disso, seguindo o processo de deformações de superfícies, provamos o teorema de Stokes para o campo conjugado que também não é encontrado na literatura, segundo o nosso conhecimento. Mostramos em detalhes que a versão diferencial de Yang-Mills é compatível com a versão integral ao considerar um volume infinitesimal e expansões até primeira ordem.

As equações integrais fornecem uma nova perspectiva sobre os fenômenos físicos e apresentam uma solução efetiva para o problema da carga conservada e invariante de calibre em Yang-Mills. No entanto, também levantam novas perguntas que aguçam nossa curiosidade. Por exemplo, como construir uma versão quântica das equações integrais? Quais modificações nas equações diferenciais de Yang-Mills surgem ao considerar termos de ordem mais elevada na expansão das equações integrais? Ou ainda, como as equações de Yang-Mills integrais são expressas em termos dos campos elétrico e magnético não abelianos? Embora ainda não tenhamos condições de fornecer respostas definitivas para essas perguntas, estamos ansiosos para nos dedicar a sua busca.

Referências

- AL-KUWARI, H. A.; TAHA, M. Noether's theorem and local gauge invariance. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 59, n. 4, p. 363–365, 1991. Citado na página 35.
- ALVAREZ, O.; FERREIRA, L. A.; GUILLEN, J. S. A new approach to integrable theories in any dimension. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 529, n. 3, p. 689–736, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 54.
- ALVAREZ, O.; FERREIRA, L. A.; SANCHEZ-GUILLEN, J. Integrable theories and loop spaces: fundamentals, applications and new developments. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 24, n. 10, p. 1825–1888, 2009. Citado na página 57.
- BAEZ, J. C.; MUNIAIN, J. P. *Gauge fields, knots and gravity*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1994. v. 4. Citado 4 vezes nas páginas 41, 93, 99 e 105.
- BLASCHKE, D. N. et al. The energy–momentum tensor (s) in classical gauge theories. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 912, p. 192–223, 2016. Citado na página 30.
- BO-YU, H. Nonlocal currents as noether currents due to a nonlocally transformed global symmetry. *Communications in Theoretical Physics*, IOP Publishing, v. 1, n. 3, p. 333, 1982. Citado na página 37.
- BOOZER, A. Classical yang-mills theory. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 79, n. 9, p. 925–931, 2011. Citado na página 26.
- BRADING, K.; BROWN, H. R. Noether's theorems and gauge symmetries. *arXiv preprint hep-th/0009058*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 115.
- DEGHAN, Z.; DELDAR, S. Cho decomposition, abelian gauge fixing, and monopoles in $g(2)$ yang-mills theory. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 11, p. 116024, 2019. Citado na página 39.
- FERREIRA, L. A.; LUCHINI, G. Gauge and integrable theories in loop spaces. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 858, n. 2, p. 336–365, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 49, 73 e 77.
- FERREIRA, L. A.; LUCHINI, G. Integral form of yang-mills equations and its gauge invariant conserved charges. *Physical Review D*, APS, v. 86, n. 8, p. 085039, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 17, 36 e 82.
- FRAMPTON, P. H. *Gauge field theories*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 30.
- FUMERON, S.; BERCHE, B.; MORAES, F. Improving student understanding of electrodynamics: The case for differential forms. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 88, n. 12, p. 1083–1093, 2020. Citado na página 93.
- GAMBINI, R.; PULLIN, J. *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 111.

- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002. Citado na página 51.
- IKEDA, M.; MIYACHI, Y. On the static and spherically symmetric solutions of the yang-mills field. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 27, n. 3, p. 474–482, 1962. Citado na página 129.
- JACKIW, R. Introduction to the yang-mills quantum theory. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 52, n. 4, p. 661, 1980. Citado na página 37.
- JIMÉNEZ, J.; MONSIVAIS, G. Explicitly covariant form of the integral maxwell equations. *Revista Mexicana de Física E*, v. 18, n. 1 Jan-Jun, p. 76–89, 2021. Citado na página 59.
- KARATAS, D. L.; KOWALSKI, K. L. Noether’s theorem for local gauge transformations. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 58, n. 2, p. 123–131, 1990. Citado na página 35.
- KOO, E. L. Maxwell equations in lorentz covariant integral form. *Revista mexicana de física E*, Sociedad Mexicana de Física, v. 52, n. 1, p. 84–89, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 59.
- LAI, C.; OH, C. Color screening in classical yang-mills theories with sources. *Physical Review D*, APS, v. 29, n. 8, p. 1805, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- LODATO, I. Noether potential: definition and applications. *Master Thesis*, Utrecht University Utrecht, 2010. Citado na página 115.
- LUCHINI, G. *Hidden symmetries in gauge theories & quasi-integrability*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 44, 49 e 54.
- LUCHINI, G.; ZACHÉ, V. B. A zero-curvature representation of electromagnetism and the conservation of electric charge. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 52, n. 4, p. 129, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 18, 59 e 119.
- LUCHINI, G.; ZACHÉ, V. B.; BATTISTI, G. A derivation of the stokes theorem. (SUBMETIDO À PUBLICAÇÃO). Citado 2 vezes nas páginas 59 e 101.
- MAXWELL, J. C. Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, The Royal Society London, n. 155, p. 459–512, 1865. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 59.
- MIYACHI, Y.; IKEDA, M.; MAEKAWA, T. On the spherically symmetric solution of the classical su (2) yang-mills field. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 68, n. 1, p. 261–276, 1982. Citado na página 129.
- MORIYASU, K. *An elementary primer for gauge theory*. [S.l.]: World Scientific, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 30.
- NOETHER, E. Invariant variation problems. *Transport theory and statistical physics*, Taylor & Francis, v. 1, n. 3, p. 186–207, 1918. Citado 5 vezes nas páginas 17, 23, 26, 36 e 115.

- RUBAKOV, V. Classical theory of gauge fields. In: *Classical Theory of Gauge Fields*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. Citado na página 30.
- SCHLIEDER, S. Some remarks on charges and their conservation in a classical su 2 yang-mills theory. *Nuovo Cimento. A*, v. 63, n. 2, p. 137–154, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 129.
- WEIJUN, L. Wave solutions to the yang-mills equation. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- WEYL, H. Gravitation and electricity, sittingsber. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, v. 465, p. 1918, 1918. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.
- YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical review*, APS, v. 96, n. 1, p. 191, 1954. Citado 3 vezes nas páginas 17, 26 e 33.
- ZAKHAROV, V. E.; SHABAT, A. B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. i. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, v. 8, n. 3, p. 43–53, 1974. Citado na página 52.
- ZAKHAROV, V. E.; SHABAT, A. B. Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. ii. *Functional Analysis and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers New York, v. 13, n. 3, p. 166–174, 1979. Citado na página 52.

APÊNDICE A – Introdução a formas diferenciais

Neste apêndice, pretendemos introduzir o conceito de formas diferenciais com foco no eletromagnetismo clássico. Toda a discussão é baseado nas referências (FUMERON; BERCHE; MORAES, 2020; BAEZ; MUNIAIN, 1994).

A.1 Conceitos iniciais: p-formas, produto wedge, derivada exterior e dual de Hodge

Uma maneira simplista de definir uma forma diferencial de grau p , sem rigor matemático, é como algo que será integrado p vezes a fim de se obter um escalar sobre uma certa região p -dimensional. No entanto, seguiremos outro caminho e as definiremos a partir de diferenciais exatos de uma função escalar F no espaço euclidiano tridimensional em um sistema de coordenadas cartesiano,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i. \quad (\text{A.1})$$

Nessa definição, uma transformação na função F afeta apenas as derivadas parciais e, por esse e outros motivos, podemos tratar $\{dx^i, i = 1, 2 \text{ ou } 3\}$ como uma base. Qualquer objeto desse tipo será chamado de 1-forma e o espaço vetorial de todas elas nessa base será denotado por $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Esse espaço é cotangente, ou dual, ao espaço de vetores em \mathbb{R}^3 .

A partir das 1-formas, construiremos objetos de classe mais alta (2-formas, por exemplo) com o produto wedge, que é definido a partir do produto tensorial antissimetrizado

$$dx^a \otimes dx^b - dx^b \otimes dx^a = dx^a \wedge dx^b. \quad (\text{A.2})$$

Assim, o espaço das 2-formas¹ em \mathbb{R}^3 será gerado por $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3 \text{ e } dx^3 \wedge dx^1\}$ cujas componentes são tensores antissimétricos de rank $(0, 2)$

$$\omega = \frac{1}{2} w_{ij} dx^i \wedge dx^j. \quad (\text{A.3})$$

Podemos interpretar vetores em \mathbb{R}^3 como pertencendo a um espaço tangente e para isso usaremos a ideia de derivada direcional. Sendo f uma função suave em \mathbb{R}^3 , associaremos sua derivada direcional na direção \mathbf{v} como um operador um a um da seguinte maneira:

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = v^i \partial_i f \equiv v f. \quad (\text{A.4})$$

¹ De maneira geral, uma p -forma será gerada por $dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$.

Repare que v^i são as componentes desse operador na base $\{\partial_i\}$.

Como as funções estão calculadas sobre um certo ponto, digamos x , diremos que o espaço gerado por $\{\partial_i\}$ no ponto x é o espaço tangente a \mathbb{R}^3 no ponto x , $T_x\mathbb{R}^3$. Assim como no caso de 1-formas, construiremos p -vetores com o operador wedge.

Apesar dessa exposição inicial ter sido feita em um caso particular - espaço euclidiano - podemos generalizá-la naturalmente para uma variedade de dimensão n , digamos \mathcal{M} . Sendo $\{x^i$ com $i = 1, \dots, n\}$ um sistema de coordenadas, as bases para 1-vetores serão $\{\partial_i\}$ e para 1-formas serão $\{dx^i\}$, onde ambas são duais uma da outra, i.e.

$$dx^i(\partial_j) = \partial_j(dx^i) = \delta_j^i. \quad (\text{A.5})$$

O produto wedge também pode ser estendido para ligar duas formas de graus diferentes. Sendo duas m -formas, u e v , uma p -forma, w , e uma q -forma, z , o produto wedge satisfaz as seguintes propriedades

1. Supercomutatividade: $u \wedge w = (-1)^{p \cdot q} w \wedge u$;
2. Associatividade: $u \wedge (w \wedge z) = (u \wedge w) \wedge z$;
3. Linearidade: $(\alpha u + \beta v) \wedge w = \alpha u \wedge w + \beta v \wedge w$.

Note que partindo de duas formas diferenciais de graus diferentes, o produto wedge devolve uma forma com grau igual a soma das outras duas envolvidas.

Uma outra maneira de aumentar o grau da forma é com o que chamaremos de derivada exterior, que é um operador tal que

$$d : \Lambda^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{p+1}(\mathcal{M}), \quad (\text{A.6})$$

e definido formalmente como

$$d\omega \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \omega \quad (\text{A.7})$$

Dadas duas formas v e u (não necessariamente de mesmo grau), duas funções f e g em \mathcal{M} e um escalar α , a derivada exterior obedece as seguintes propriedades:

1. $d(v + u) = dv + du$;
2. $d(\alpha v) = \alpha dv$;
3. $(f + g)dv = f dv + g dv$;
4. $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p v \wedge du$;
5. $d(du) = 0$.

A partir da última propriedade, chamada de nilpotência, definimos o que chamamos de formas exatas e formas fechadas. Formas diferenciais exatas são tais que $\omega = du$ e formas fechadas são tais que $d\omega = 0$, ω é uma p -forma e u uma $(p-1)$ -forma. Toda forma exata é necessariamente fechada, mas nem toda forma fechada é exata. Essa simples frase tem implicações importantes para teorias de calibre, pois o tensor dos campos, F , é exato e escrito em termos do campo de calibre, A , como $F = dA$ e, por isso, a identidade de Bianchi, $dF = 0$, é válida levando a não existência de monopolos magnéticos e a liberdade de calibre. Se $d\omega = 0$ implicar que ω é também exata, temos o que chamamos de lema de Poincaré. Esse lema é válido apenas localmente em \mathcal{M} , pois depende da topologia da variedade.

O operador derivada exterior se manifesta no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 como os operadores gradiente, divergente e rotacional dependendo do grau da forma em que atua. Vejamos: sendo f uma função (0-forma), $\omega = \omega_i dx^i$ (1-forma) e $u = u_1 dx^2 \wedge dx^3 + u_2 dx^3 \wedge dx^1 + u_3 dx^1 \wedge dx^2$ (2-forma), teremos que

$$df = \partial_i f dx^i \quad (\text{gradiente})$$

$$d\omega = (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) dx^3 \wedge dx^1 \quad (\text{“rotacional”})$$

$$du = \partial_i u^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (\text{divergente}).$$

As aspas no rotacional são necessárias, pois para definir o rotacional precisamos escolher uma orientação para a base, i.e. impor a “regra da mão direita” para o produto vetorial. Faremos isso através do operador dual de Hodge.

Antes de falar do dual de Hodge, introduziremos a noção de distância em \mathcal{M} através da métrica. Definimos² a métrica em um certo espaço vetorial V como o mapa bilinear simétrico não-degenerado:

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.8})$$

Porém, é necessário fazê-la a cada ponto de \mathcal{M} , ou seja, a métrica está no espaço tangente de \mathcal{M} .

Estaremos interessados em variedades com a mesma assinatura em todos os pontos. Nesse caso, temos duas possibilidades: se g tem assinatura $(n, 0)$ com $n = \dim \mathcal{M}$, a métrica será chamada de riemanniana e se g tem assinatura $(1, n-1)$, ela será chamada de métrica lorentziana.

A métrica também é usada para ligar objetos de um espaço vetorial (contravariantes) em outros objetos no espaço vetorial dual (covariantes). Portanto, existe um isomorfismo invertível entre vetores e 1-formas. Um exemplo da aplicação desse isomorfismo é quando utilizamos a métrica para “elevar” ou “baixar” índices no cálculo tensorial.

² Também é possível definir a métrica como um tensor simétrico de rank $(0, 2)$ tal que $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ij} dx^i(\mathbf{u}) \otimes dx^j(\mathbf{v})$ e $g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c$.

Com a métrica e uma orientação na variedade, definimos um mapa invertível que conecta p -formas em $(n - p)$ -formas, onde n é a dimensão da variedade, ou seja,

$$\star : \Lambda^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{n-p}(\mathcal{M}). \quad (\text{A.9})$$

Esse operador atua em uma p -forma como

$$\star\omega = \frac{\omega^{a_1 \dots a_p}}{(n - p)!} \sqrt{|\det g_{ab}|} \epsilon_{a_1 \dots a_p} dx^{a_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{a_n}, \quad (\text{A.10})$$

onde $\epsilon_{a_1 \dots a_p}$ e $\omega = \omega_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$.

Por último, mas não menos importante, dissemos inicialmente que formas diferenciais podem ser integradas. De maneira geral, uma p -forma é integrada sobre uma hipersuperfície (subvariedade), digamos Σ , de dimensão p imersa na variedade \mathcal{M} de dimensão n ($n > p$)

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \omega_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}. \quad (\text{A.11})$$

Quando a variedade \mathcal{M} é simplesmente conexa e a subvariedade é uma borda de uma outra variedade Ω imersa em \mathcal{M} , ou seja $\Sigma = \partial\Omega$, e caso ω seja uma p -forma exata, podemos relacionar a borda com o seu interior através do teorema de Stokes³

$$\int_{\Omega} d\omega = \oint_{\partial\Omega} \omega. \quad (\text{A.12})$$

A.2 Eletromagnetismo não covariante de Lorentz e formas diferenciais

Iremos obter as equações de Maxwell em um meio linear livre partindo do pressuposto que a carga elétrica é quantificável, i.e. dado uma certa região, digamos Ω , compacta em \mathbb{R}^3 sempre é possível contar a quantidade de carga e obter a carga total que será dada por

$$Q = \int_{\Omega} \rho, \quad (\text{A.13})$$

onde ρ é a densidade de carga em Ω , que é uma 3-forma.

Como ρ é uma 3-forma em \mathbb{R}^3 , teremos que

$$d\rho = 0 \quad (\text{A.14})$$

e, ao menos localmente, pelo lema de Poincarè, existe uma 2-forma D tal que

$$dD = \rho. \quad (\text{A.15})$$

³ Para uma prova, ver apêndice B.

Identificamos D como a densidade de campo elétrico e, portanto, obtemos a lei de Gauss.

Agora, tomemos a derivada temporal de (A.14). Pelo teorema de Schwarz, d e ∂_t podem ser intercambiados e teremos

$$d(\partial_t \rho) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Logo, $\partial_t \rho$ também é fechado e, novamente usando o lema de Poincarè, definimos uma 2-forma $-j$ tal que

$$\partial_t \rho = d(-j) \implies \partial_t \rho + dj = 0. \quad (\text{A.17})$$

Essa é a equação da continuidade. Combinando a equação da continuidade com a lei de Gauss:

$$\partial_t(dD) + dj = 0 \implies d(\partial_t D + j) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Mais uma vez usando o lema de Poincarè, definimos uma 1-forma H tal que

$$\partial_t D + j = dH \quad (\text{A.19})$$

e obtemos a lei de Ampère-Maxwell com H sendo o campo magnético. Portanto, nesta construção, D e H são formas diferenciais associadas as fontes ρ e j , que foram introduzidas por razões topológicas e assumindo que a carga é quantificável.

As outras equações são baseadas na ausência de monopolos magnéticos

$$Q_m = 0 = \int_{\Omega} \rho_m. \quad (\text{A.20})$$

Se ρ_m é uma 3-forma nula em \mathbb{R}^3 , então

$$dB = \rho_m = 0, \quad (\text{A.21})$$

onde B é uma 2-forma que será chamada de densidade de campo magnético. Pelo teorema de Schwarz, teremos a lei de Faraday,

$$d(\partial_t B) = 0 \implies \partial_t B = -dE, \quad (\text{A.22})$$

onde definimos uma 1-forma E que será o campo elétrico.

Até agora as equações de Maxwell são

$$dD = \rho; \quad dB = 0; \quad (\text{A.23})$$

$$dH - \partial_t D = j; \quad dE + \partial_t B = 0. \quad (\text{A.24})$$

Note que falta ainda relacionar as densidades de campo elétrico e magnético com os campos elétrico e magnético, respectivamente. Por um lado, D e B são 2-formas, e E e H são

1-formas, não podemos relacioná-las diretamente. Por outro, 2-formas e 1-formas são naturalmente mapeadas umas nas outras em uma variedade tridimensional através do operador dual de Hodge. Portanto, tomaremos as relações constitutivas como

$$E = \star D \quad \text{e} \quad B = \star H. \quad (\text{A.25})$$

Com isso, completamos as equações de Maxwell.

A construção desta seção é uma forma elegante de se obter as equações de Maxwell não covariantes de Lorentz de um ponto de vista de formas diferenciais. Repare que as quatro equações de Maxwell são construídas sem menção a métrica, que só é usada nas relações constitutivas para mostrar como o meio se conecta com a geometria através da dualidade de Hodge e relacionar objetos distintos (E e D , e B e H) que carregam informações diferentes.

A.3 Eletromagnetismo covariante de Lorentz e formas diferenciais

Na seção anterior, a variedade em que as formas eram definidas era euclidiana e tridimensional. Nesta, iremos tomar uma variedade quadridimensional com métrica de assinatura lorentziana denotada por $\mathbb{M}^{3,1}$. Essa variedade é o que chamaremos de espaço-tempo de Minkowski e pode ser pensada como $\mathbb{M}^{3,1} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Definiremos o campo eletromagnético como uma 2-forma, F , em $\mathbb{M}^{3,1}$ que acomoda E e B por

$$F = B + dE \wedge dt = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (\text{A.26})$$

onde a base para $\mathbb{M}^{3,1}$ será $\{dt, dx, dy, e dz\}$ e $F_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor dos campos. Com isso, as equações de Maxwell sem fonte (identidade de Bianchi) são

$$dF = 0. \quad (\text{A.27})$$

Como qualquer forma diferencial em $\mathbb{M}^{3,1}$ pode ser decomposta em suas partes espacial e temporais, i.e

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial_\mu \omega_I dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= d_S \omega + dt \wedge \partial_t \omega, \end{aligned}$$

onde d_S é o operador derivada exterior no espaço euclidiano, recuperamos as equações não-covariantes:

$$\begin{aligned} dF &= d_S B + dt \wedge \partial_t B + (d_S E + dt \wedge \partial_t E) \wedge dt \\ &= d_S B + (d_S E + \partial_t B) \wedge dt = 0 \\ \implies d_S B &= 0 \quad \text{e} \quad d_S E + \partial_t B = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

O outro par de equações de Maxwell possui fonte e a definiremos como uma 3-forma⁴, J , tal que

$$J = \rho - j \wedge dt. \quad (\text{A.29})$$

Também é necessário o campo dual ao campo eletromagnético que será escrito a partir do dual de Hodge de F :

$$G = \star F = D - H \wedge dt. \quad (\text{A.30})$$

Com isso, as equações com fonte serão

$$dG = J. \quad (\text{A.31})$$

Reobteremos as equações não covariantes através de

$$\begin{aligned} dG &= dD - d(H \wedge dt) \\ &= d_S D + (\partial_t D - d_S H) \wedge dt \\ &= \rho - j \wedge dt \\ \implies d_S D &= \rho \quad \text{e} \quad d_S H - \partial_t D = j. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Note que as equações covariantes diferenciais do eletromagnetismo são obtidas facilmente a partir das não covariantes na linguagem de formas diferenciais. Portanto, apesar de parecer pouco intuitivo trabalhar com formas diferenciais ao invés do cálculo vetorial usual, ganhamos generalidade e aprofundamos o entendimento da relação da geometria com o eletromagnetismo.

⁴ Em alguns livros, como, por exemplo, (BAEZ; MUNIAIN, 1994) é comum definir a fonte como uma 1-forma $J = j - \rho dt$. Nessa outra definição, estamos tratando ρ como uma função e, portanto, uma 0-forma.

APÊNDICE B – Teorema de Stokes para p -formas diferenciais

Neste apêndice, mostraremos como demonstrar o teorema de Stokes com ferramentas de cálculo variacional e o formalismo de formas diferenciais (LUCHINI; ZACHÉ; BATTISTI,). A construção será análoga àquela feita na seção 3.1 para tensores antissimétricos de rank 2, que são as componentes de uma 2-forma¹.

De maneira geral, o fluxo de uma p -forma, denotada por ω , sobre uma hipersuperfície orientada p -dimensional, Σ , imersa em uma variedade D -dimensional ($D > p$), \mathcal{M} , é definido por

$$\Phi = \int_{\Sigma} \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \int_{\Sigma} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} d\sigma_1 \dots d\sigma_p, \quad (\text{B.1})$$

onde $x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_D}$ são coordenadas sobre Σ .

Deformando a superfície de maneira ortogonal por $x \rightarrow x + \delta x$, mantendo as bordas fixas, o fluxo mudará por

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_{\Sigma} \partial_{\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \delta x^{\lambda} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} d\sigma_1 \dots d\sigma_p \\ &\quad - \int_{\Sigma} \frac{d}{d\sigma_1} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial \sigma_2} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_1} d\sigma_1 \dots d\sigma_p + \dots + \\ &\quad - \int_{\Sigma} \frac{d}{d\sigma_n} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma_{n-1}} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_n} d\sigma_1 \dots d\sigma_p + \dots + \\ &\quad - \int_{\Sigma} \frac{d}{d\sigma_p} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial \sigma_2} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma_{p-1}} \right) \delta x^{\mu_p} d\sigma_1 \dots d\sigma_p, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde já integramos por partes e descartamos os termos calculados sobre as bordas, pois $\delta x = 0$.

¹ Lembrando que as componentes de uma p -forma podem ser definidas a partir de tensores de rank p antissimétricos.

O termo geral será

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \frac{d}{d\sigma_n} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma_{n-1}} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_n} d\sigma_1 \dots d\sigma_p \\
&= \int_{\Sigma} \partial_{\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \left(\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma_{n-1}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \sigma_n} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_n} d\sigma_1 \dots d\sigma_p \\
&+ \int_{\Sigma} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial^2 x^{\mu_1}}{\partial \sigma_n \partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma_{n-1}} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_n} d\sigma_1 \dots d\sigma_p + \dots \\
&+ \int_{\Sigma} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial^2 x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma_n \partial \sigma_{n-1}} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_n} d\sigma_1 \dots d\sigma_p + \dots \\
&+ \int_{\Sigma} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma_{n-1}} \frac{\partial^2 x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma_n \partial \sigma_{n+1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_n} d\sigma_1 \dots d\sigma_p + \dots \\
&+ \int_{\Sigma} \left(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma_{n-1}} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} \dots \frac{\partial^2 x^{\mu_p}}{\partial \sigma_n \partial \sigma_p} \right) \delta x^{\mu_n} d\sigma_1 \dots d\sigma_p.
\end{aligned}$$

Lembrando que o $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$ é antissimétrico, podemos renomear os índices de forma a cancelar todas as derivas de segunda ordem em (B.2). O que resta é

$$\delta \Phi = (-1)^p \int_{\Sigma} \left(\partial_{\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} + \dots \right) \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \delta x^{\lambda} d\sigma_1 \dots d\sigma_p. \quad (\text{B.3})$$

Repare que o termo entre parênteses é um tensor antissimétrico de rank $p + 1$ que será identificado como as componentes de uma $p + 1$ -forma em uma certa base.

Parametrizando a variação do fluxo por $s \in [0, 2\pi]$, ficamos com uma equação diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{ds} &= (-1)^p \int_{\Sigma} \left(\partial_{\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \dots \right) \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma_p} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial s} d\sigma_1 \dots d\sigma_p \\
&= \int_{\Sigma} \frac{(-1)^p}{(p+1)!} \left(\partial_{\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \dots \right) dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}
\end{aligned}$$

que será integrada de $s = 0$ à $s = 2\pi$

$$\Phi(s = 2\pi) - \Phi(s = 0) = \int_{\Sigma} \frac{(-1)^p}{(p+1)!} \left(\partial_{\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \dots \right) dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{B.4})$$

O l.h.s. representa a diferença do fluxo para as superfícies calculadas em $s = 0$ e $s = 2\pi$. Com a definição do fluxo (B.1) e invertendo a orientação da superfície $s = 0$, as bordas entre essas superfícies desaparecem e elas podem ser mescladas, $\Sigma(s = 2\pi) \cup \Sigma(s = 0)^{-1} = \partial\Omega$, formando a borda de um hiper-volume Ω $p + 1$ -dimensional. Assim, temos o teorema de Stokes para uma p -forma

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = (-1)^p \int_{\Omega} d\omega, \quad (\text{B.5})$$

onde o sinal negativo para as formas de grau ímpar pode ser absorvido mudando a orientação da superfície.

Para o caso de \mathcal{M} ser o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , teremos formas diferenciais, não nulas, para os graus $p = 0, 1, 2$ ou 3 . Nesse caso, o teorema de Stokes para 0-formas, 1-formas e 2-formas será, respectivamente, o teorema fundamental do cálculo, o teorema do rotacional e o teorema do divergente. Já para o caso de 3-formas, o teorema de Stokes é trivial, pois a borda é o próprio volume \mathbb{R}^3 e a derivada exterior sobre a forma será sempre nula.

APÊNDICE C – Introdução a feixes e conexões

As discussões deste apêndice são baseadas no livro (BAEZ; MUNIAIN, 1994).

C.1 Introdução a feixes

Um feixe, não necessariamente vetorial, é uma estrutura envolvendo duas variedades - \mathcal{E} e \mathcal{M} - e um mapa entre essas variedades, $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$. A variedade \mathcal{E} será chamada de espaço total, a variedade \mathcal{M} será chamada de espaço base, o mapa às vezes é chamado de projeção e denotaremos as fibras de \mathcal{E} como \mathcal{E}_p , onde p é um ponto de \mathcal{M} . As fibras são espaços contidos em \mathcal{E} que satisfazem a relação

$$\mathcal{E} = \bigcup_p \mathcal{E}_p.$$

Em física, estaremos interessados em feixes de vetores. A definição continua válida, mas agora \mathcal{E}_p são espaços vetoriais. Também faremos \mathcal{M} ser o espaço-tempo. Um exemplo de feixe vetorial é o chamado feixe tangente de \mathcal{M} . Neste, o mapa projetivo é $\pi : \mathcal{T}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, onde $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ é o espaço tangente de \mathcal{M} em p . Ou seja, o feixe tangente mapeia cada vetor no espaço tangente de \mathcal{M} em p em um ponto $p \in \mathcal{M}$.

Note que em nenhum momento impomos que as fibras do espaço total tenham a mesma estrutura ou sejam espaço iguais. Ainda pensando no contexto físico, seria interessante introduzir tal característica aos feixes que trataremos. Para isso, introduziremos o feixe trivial de \mathcal{M} com fibra padrão \mathcal{F} , de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{M} \times \mathcal{F} \\ (p, f) &\in \mathcal{M} \times \mathcal{F} \\ \pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} &\implies \pi(p, f) = p \\ \mathcal{E}_p &= p \times \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Podemos definir também o inverso do mapa projetivo: a seção de um feixe (ver figura 19), $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, para cada $p \in \mathcal{M}$ tal que $s(p) \in \mathcal{E}_p$. Note que $s \circ \pi = 1$. Resumindo, uma seção leva um ponto do espaço base em um vetor na fibra correspondente àquele ponto.

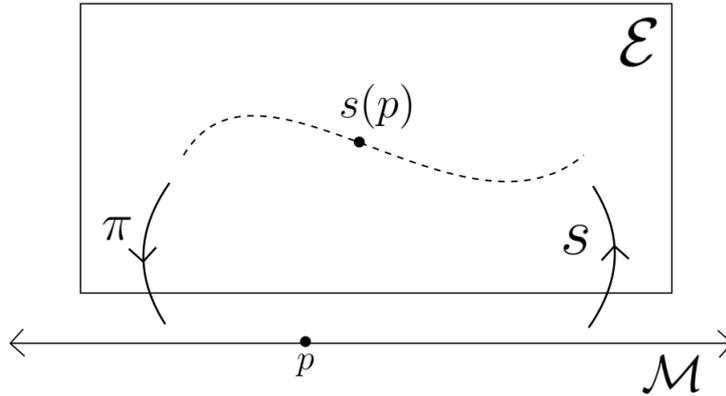


Figura 19 – Representação de uma seção em um feixe trivial.

Geralmente, tomamos $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathcal{F}$ como o feixe trivial com fibra padrão \mathcal{F} . Nesses casos, a seção não é nada mais que uma função¹ de \mathcal{M} em \mathcal{E} :

$$s(p) = (p, f(p)) \in \mathcal{E}_p.$$

Pensando no contexto físico (mais uma vez) a seção é quem faz o papel do campo. Tal objeto também será útil se desejarmos trabalhar com feixes não triviais, o que não faremos.

A pergunta que fica é onde entram as teorias de calibre nessa história? Pulando boa parte (na verdade, quase toda) construção formal, tomaremos os feixes como G -feixes, que são feixes sobre o grupo de Lie correspondente a interação fundamental que estamos tratando. Cada fibra do G -feixe será um espaço vetorial V com representação ρ que fará o papel da transformação linear da fibra $V = \mathcal{E}_p$ em $V = \mathcal{E}_p$, ou seja, atuando com o elemento do grupo em um vetor da fibra, teremos um outro vetor na mesma fibra.

Já as transformações de calibre entram na história quando consideramos transformações lineares das fibras V do G -feixe. Tais transformações são endomorfismos e tomaremos o espaço de todos os endomorfismos de V como $End(V)$. Vale ressaltar que $End(V)$ forma uma álgebra² (linear):

$$(\alpha T)(v) = \alpha(T(v));$$

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v);$$

$$(ST)(v) = S(T(v)).$$

Definindo o dual do espaço V como \tilde{V} , podemos generalizar os endomorfismos de V para endomorfismos de \mathcal{E} ao tomar o feixe $\mathcal{E} \otimes \tilde{\mathcal{E}}$ como $End(\mathcal{E})$. Note que uma fibra de $End(\mathcal{E})$ sobre um ponto $p \in \mathcal{M}$ é o mesmo que $End(\mathcal{E}_p)$, ou seja, que os endomorfismos de \mathcal{E}_p . Cada seção T de $End(\mathcal{E})$ define um mapa de \mathcal{E} para \mathcal{E} já que manda um $v \in \mathcal{E}$

¹ Note a estrutura de gráfico da seção com relação a uma função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}_p$.

² As duas primeiras propriedades mostram a linearidade da transformação, enquanto a última é o produto da álgebra.

para $T_p v \in \mathcal{E}_p$. Com isso, cada seção T de $End(\mathcal{E})$ atua ponto a ponto em uma seção s de \mathcal{E} dando uma nova seção Ts em \mathcal{E} :

$$(Ts)(p) = T(p)s(p).$$

Resumindo. T é uma função do tipo $T : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$, onde $\Gamma(\mathcal{E})$ é o espaço das seções de \mathcal{E} .

Ressalta-se que, para um G -feixe, $T \in End(\mathcal{E})$, se $T(p)$ está em G para todo $p \in \mathcal{M}$, então T será a transformação de calibre que procuramos.

Portanto, em teorias de calibre, os campos são seções de G -feixes e as leis físicas (equações diferenciais) são tais que, se $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ é solução, então gs com $g \in G$ também é solução. Essas equações são ditas invariantes de calibre.

C.2 Introdução conexões

Sabemos dos cursos introdutórios de Cálculo que uma derivação compara funções, ou vetores, em pontos diferentes. Em física, também precisaremos comparar campos em pontos diferentes. Entretanto, para comparar seções em pontos diferentes de feixes a tarefa fica mais complicada, pois cada seção leva um ponto do espaço base para uma fibra referente àquele ponto. Não existe uma maneira trivial e única de se subtrair vetores de fibras diferentes.

Definimos uma conexão em \mathcal{M} como uma identificação de campos de vetores v em \mathcal{M} em funções $D_v : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$, que satisfazem:

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v(s); \\ D_v(s + t) &= D_v(s) + D_v(t); \\ D_v(fs) &= v(f)s + fD_v(s); \\ D_{v+w}(s) &= D_v(s) + D_w(s); \\ D_{fv}(s) &= fD_v(s), \end{aligned}$$

onde $v, w \in Vect(\mathcal{M})$, $s, t \in \Gamma(\mathcal{E})$, $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ e α é um escalar. Chamaremos D_v de derivada covariante.

Tomando uma base de seções de \mathcal{E} sobre U ("parte de \mathcal{E} "):

$$D_{\partial_\mu} e_j = A_{\mu j}^i e_i.$$

Identificaremos os coeficientes $A_{\mu}^i{}_j$ como o vetor potencial. Seguindo:

$$\begin{aligned}
 D_v(s) &= D_{v^\mu \partial_\mu}(s^j e_j) \\
 &= v^\mu D_{\partial_\mu}(s^j e_j) \\
 &= v^\mu (\partial_\mu s^j e_j + s^j D_{\partial_\mu}(e_j)) \\
 &= v^\mu (\partial_\mu s^j e_j + A_{\mu}^i{}_j s^j e_i) \\
 &= v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu}^i{}_j s^j) e_i
 \end{aligned}$$

Definindo $D_{\partial_\mu} \equiv D_\mu$:

$$D_v(s) = (D_\mu s)^i e_i.$$

Tratamos o potencial apenas como coeficientes da derivada covariante atuando na base, agora diremos seu significado geométrico. Analisemos $A_{\mu}^i{}_j s^j e_i$. Esse termo é linear em s e v para funções, então olharemos para ele como um objeto que toma campos de vetores e seções, e devolve uma nova seção. Diremos que tal objeto é uma 1-forma $\text{End}(\mathcal{E})$ -valuada, ou seja, uma seção do feixe $\text{End}(\mathcal{E}|_U) \otimes T^*U$ e escrito como

$$A = A_{\mu}^j{}_i e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu.$$

Atuando em um campos de vetores:

$$\begin{aligned}
 A(v) &= A_{\mu}^j{}_i e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu(v) \\
 &= A_{\mu}^j{}_i v^\nu e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu(\partial_\nu) \\
 &= A_{\mu}^j{}_i v^\mu e_j \otimes e^i.
 \end{aligned}$$

Agora, atuando em uma seção de \mathcal{E} :

$$\begin{aligned}
 A(v)s &= A_{\mu}^j{}_i v^\mu (e_j \otimes e^i)(s) \\
 &= A_{\mu}^j{}_i v^\mu s^k (e_j \otimes e^i)(e_k) \\
 &= A_{\mu}^j{}_i v^\mu s^i e_j
 \end{aligned}$$

Um ponto importante é que não existe uma única conexão D em um feixe. Mesmo que a conexão não seja única, sempre podemos ligar duas conexões usando um potencial,

$$D = D^0 + A,$$

e escolheremos D^0 como uma trivialização local de \mathcal{E} :

$$D_v^0(s) = v(s^j) e_j.$$

Essa é a conexão chata padrão.

Voltando para o caso de G -feixes. Afirmaremos que D é uma G -conexão se, em componentes locais, $A_\mu \in \text{End}(\mathcal{E})$ está em \mathcal{G} (álgebra de G). Vale ressaltar que fazendo uma mudança de coordenadas $x \rightarrow x'$:

$$A'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu$$

continua na álgebra.

As G -conexões também são afetadas por transformações de calibre:

$$D'_v(gs) = gD_v(s) \implies D'_v = gD_v g^{-1}.$$

Se fazemos $D = D^0 + A$, o potencial se transforma como

$$\begin{aligned} D'_v(s) &= gD_v(g^{-1}s) \\ &= g(D_v^0(g^{-1}s) + A(v)(g^{-1}s)) \\ &= g(\partial_\mu(g^{-1}s^i)e_i + A_\mu^j{}_i v^\mu g^{-1}s^i e_j) \\ &= g\partial_\mu g^{-1}s^i e_i + gg^{-1}\partial_\mu s^i e_i + gA_\mu^j{}_i v^\mu g^{-1}s^i e_j \\ &= \partial_\mu s^i e_i + (g\partial_\mu g^{-1}s^i + gA_\mu^i{}_j v^\mu g^{-1}s^j)e_i \\ \implies A'_\mu &= g\partial_\mu g^{-1} + gA_\mu g^{-1} \end{aligned}$$

Por último, diremos que duas conexões D e D' são calibre-equivalentes se estão ligadas por uma transformação de calibre.

C.3 Aplicando para o eletromagnetismo

Tomando o grupo de simetria como o $U(1)$ e construindo o $U(1)$ -feixe com \mathcal{E} um feixe trivial sobre \mathcal{M} , ou seja, $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathbb{C}$. Agora, cada fibra \mathcal{E}_p é igual a \mathbb{C} .

A conexão D é descrita pelo potencial A , que será simplesmente uma 1-forma complexa, pois $\text{End}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (lembrando que os endomorfismos de \mathbb{C} é \mathbb{C}). Se essa conexão é uma $U(1)$ -conexão, as componentes A_μ estão na álgebra $u(1)$,

$$u(1) = \{ix : x \in \mathbb{R}\}.$$

Com isso, obtemos que as componentes de A_μ são funções puramente imaginárias:

$$A = iA_{\mathbb{R}},$$

onde $A_{\mathbb{R}}$ representa a classe de 1-formas reais.

Fazendo uma transformação de calibre no potencial:

$$A'_\mu = A_\mu + g\partial_\mu g^{-1},$$

pois o grupo $U(1)$ é abeliano. Escrevendo o elemento do grupo em termos do elemento da álgebra $g = e^{-if}$:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + i\partial_\mu f \\ \implies A' &= A + df. \end{aligned}$$

Justamente a transformação usual do potencial vetor A que aprendemos nos cursos de eletromagnetismo.

C.4 Introdução à holonomia

Dissemos que, ao contrário do conceito usual de derivada, não existe forma única e trivial de se comparar vetores em fibras diferentes de um feixe. Por essa comparação não ser trivial, introduzimos uma conexão ao feixe, que não é única, e dissemos que podemos relacionar duas conexões diferentes através de um potencial. Porém, quando escolhemos um caminho γ que liga as fibras de interesse, digamos p e q , a translação dos vetores através desse caminho é única.

A fim de ilustrar essa ideia, tomemos o feixe TS^2 , ou seja, o feixe cujo espaço base é a superfície da esfera, as fibras são os espaços tangentes a essa esfera e o mapa projetivo é $\pi : TS^2 \rightarrow S^2$. Um vetor em T_pS^2 será transportado até T_qS^2 por γ de forma que ele fique sempre paralelo a superfície da esfera (ver figura 1). Façamos agora o transporte do vetor por γ' de forma semelhante a dita anteriormente. Repare que o vetor que chega em q por γ é diferente daquele que chega por γ' . Isso ilustra o que havíamos afirmado: o transporte do vetor depende do caminho escolhido.

Definimos a holonomia da conexão ao redor de um loop como o transporte paralelo do vetor de uma fibra para uma mesma fibra. Poderemos calcular explicitamente a holonomia usando que a projeção da derivada covariante no vetor tangente ao caminho é zero. Matematicamente:

$$D_{\gamma'(\sigma)}u(\sigma) = 0, \tag{C.1}$$

onde tomamos um feixe de vetores sobre \mathcal{M} com conexão D , um caminho $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{M}$ de p a q e $u(\sigma)$ um vetor na fibra de \mathcal{E} sobre γ .

Explicitamente, essa equação fica:

$$\frac{du(\sigma)}{d\sigma} + A(\gamma'(\sigma))u(\sigma) = 0. \tag{C.2}$$

Como observação. Talvez o leitor esteja estranhando a falta de um comutador entre os termos A e u já que ambos estão na álgebra. O comutador aparece quando escolhemos trabalhar com A na representação adjunta. Não tratamos o potencial em representação alguma. Ele seria algo como um “operador”, apesar desse termo não parecer o mais correto para essa situação.

APÊNDICE D – A derivada da holonomia

Sobre uma certa curva γ parametrizada por σ define-se a holonomia a partir da equação de transporte paralelo dada por

$$\frac{dW}{d\sigma} - ieA_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0, \quad (\text{D.1})$$

onde A_μ é a chamada conexão que, no contexto de teoria de campos, assume o papel de campo de calibre.

Considere uma perturbação na curva em um único ponto x em uma certa direção ϵ^μ (ver figura 20):

$$W(\Gamma \circ \gamma) = W(\gamma) + \epsilon^\mu \partial_\mu W. \quad (\text{D.2})$$

Essa perturbação contrasta com as variações discutidas no capítulo 2, pois, anteriormente, as variações mudavam a curva como um todo.

Suponha que exista um operador (GAMBINI; PULLIN, 2000), denotado por $U(\epsilon^\mu, x)$ e chamado por *operador translação*, que é responsável por alterar a curva dessa maneira:

$$W(\Gamma \circ \gamma) = U(\epsilon^\mu, x)W(\gamma). \quad (\text{D.3})$$

Esse operador por si só é uma holonomia, mas para um caminho infinitesimal, pois conecta as holonomias $W(\gamma)$, definida em γ , e $W(\Gamma \circ \gamma)$, definida em γ' . Dessa forma, podemos escrevê-lo como

$$U(\epsilon^\mu, x) = \mathbb{I} + ieA_\mu \epsilon^\mu. \quad (\text{D.4})$$

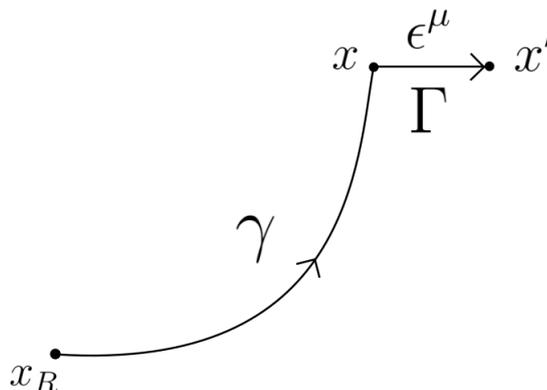


Figura 20 – Perturbação da curva γ em um único ponto x em uma direção ϵ^μ .

Assim, por (D.3), temos

$$W(\Gamma \circ \gamma) = W(\gamma) + ie\epsilon^\mu A_\mu W(\gamma). \quad (\text{D.5})$$

Note a consistência dessa construção ao combinar (D.2) e (D.5), pois, assim, reobtemos a equação da holonomia:

$$\begin{aligned} W(\Gamma \circ \gamma) - W(\gamma) &= ieA_\mu \epsilon^\mu W(\gamma) = W(\gamma) \epsilon^\mu \partial_\mu W(\gamma) \\ \implies \partial_\mu W - ieA_\mu W &= 0. \end{aligned}$$

Considere agora duas translações sucessivas que levam de uma holonomia que contém o ponto x , digamos $W(\gamma)$ até outra que contém o ponto x''' conforme ilustrado na figura 21. Nesse processo, tomamos dois caminhos possíveis que diferem pela ordem dos deslocamentos. O primeiro deles, $\Gamma_1 \equiv \Gamma_x \circ \Gamma_y$, parte de x deslocando δx até chegar em x_1 . Em seguida, parte de x' deslocando δy para enfim chegar em x''' . O segundo caminho, $\Gamma_2 \equiv \Gamma_y \circ \Gamma_x$, parte de x deslocando δy primeiro para chegar em x'' . Depois, parte de x'' deslocando δx para chegar em x''' . Calculando a holonomia para Γ_1 :

$$\begin{aligned} W(\Gamma_1 \circ \gamma) &= U(\delta y, x') U(\delta x, x) W(\gamma) \\ &= (\mathbb{I} + ieA_\mu(x') \delta y^\mu) (\mathbb{I} + ieA_\nu(x) \delta x^\nu) W(\gamma) \\ &= (\mathbb{I} + ieA_\mu \delta y^\mu + ie\partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \delta y^\mu) (\mathbb{I} + ieA_\nu \delta x^\nu) W(\gamma) \\ &= [\mathbb{I} + ieA_\nu \delta x^\nu + ieA_\mu \delta y^\mu + ie(\partial_\mu A_\nu + A_\nu A_\mu) \delta x^\mu \delta y^\nu] W(\gamma). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Agora para Γ_2 :

$$\begin{aligned} W(\Gamma_2 \circ \gamma) &= U(\delta x, x'') U(\delta y, x) W(\gamma) \\ &= (\mathbb{I} + ieA_\mu(x'') \delta x^\mu) (\mathbb{I} + ieA_\nu(x) \delta y^\nu) W(\gamma) \\ &= (\mathbb{I} + ieA_\mu \delta x^\mu + ie\partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \delta y^\nu) (\mathbb{I} + ieA_\nu \delta y^\nu) W(\gamma) \\ &= [\mathbb{I} + ieA_\mu \delta x^\mu + ieA_\nu \delta y^\nu + ie(\partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu) \delta x^\mu \delta y^\nu] W(\gamma). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

onde desconsideramos os termos de ordem quadrática em δx ou δy . Com isso:

$$\begin{aligned} W(\Gamma_1 \circ \gamma) - W(\Gamma_2 \circ \gamma) &= ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]) W(\gamma) \delta x^\mu \delta y^\nu \\ &\equiv ieF_{\mu\nu} W(\gamma) \delta x^\mu \delta y^\nu. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Por outro lado, essas holonomias são calculadas também através de (D.2):

$$W(\Gamma_1 \circ \gamma) = \delta y^\mu \partial_\mu (\delta x^\nu \partial_\nu W) = \partial_\mu \partial_\nu W(\gamma) \delta x^\nu \delta y^\mu \quad (\text{D.9})$$

$$W(\Gamma_2 \circ \gamma) = \delta x^\mu \partial_\mu (\delta y^\nu \partial_\nu W) = \partial_\mu \partial_\nu W(\gamma) \delta x^\mu \delta y^\nu. \quad (\text{D.10})$$

Levando a

$$W(\Gamma_1 \circ \gamma) - W(\Gamma_2 \circ \gamma) = -[\partial_\mu, \partial_\nu] W(\gamma) \delta x^\mu \delta y^\nu. \quad (\text{D.11})$$

Portanto, por (D.8) e (D.11), temos que

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]W(\gamma) = -ieF_{\mu\nu}W(\gamma). \quad (\text{D.12})$$

A derivada direcional da holonomia está relacionada com o operador translação. Além disso, a mudança de caminho permitida pelo operador translação, quando é tal que varre uma certa área no espaço, relaciona-se com o tensor de curvatura.

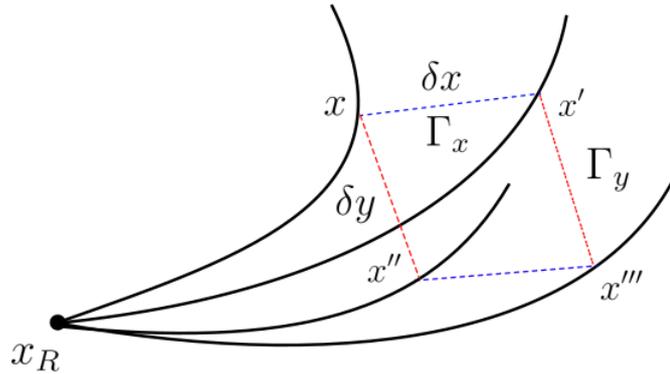


Figura 21 – Representação das translações sucessivas através dos caminhos $\Gamma_1 \equiv \Gamma_x \circ \Gamma_y$ e $\Gamma_2 \equiv \Gamma_y \circ \Gamma_x$.

APÊNDICE E – Teorema de Noether e simetria de calibre

Neste apêndice, revisitamos o teorema de Noether para o caso de simetrias globais e locais com foco nas simetrias de calibre. Toda a discussão segue, principalmente, (BRADING; BROWN, 2000). No entanto, outras fontes também foram consultadas como, por exemplo, (NOETHER, 1918; LODATO, 2010).

E.1 O problema variacional de Noether

O trabalho original de Emmy Noether pode ser resumido, de forma simplista, em um problema de cálculo variacional:

Quais condições devem ser válidas para que uma dada transformação das variáveis independentes e dependentes, que obedeça um certo grupo, deixe a ação invariante, i.e. $\delta\mathcal{S} = 0$, onde a variação da ação contenha o termo de borda?

Esse problema é ligeiramente diferente do princípio de Hamilton, pois este, por sua vez, diz que para um determinado campo extremizar a ação ($\delta\mathcal{S} = 0$) por variações arbitrárias que se anulem nas bordas, as equações de Euler-Lagrange devem ser satisfeitas. Em outras palavras, dada uma lagrangeana que dependa de N campos independentes, φ_a ($a = 1, 2, \dots, N$), suas derivadas, $\partial_\mu\varphi_a$, e de pontos do espaço-tempo, x_μ ,

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x_\mu, \varphi_a, \partial_\mu\varphi_a), \quad (\text{E.1})$$

devemos ter N equações do tipo:

$$\delta\mathcal{S} = 0 \iff [\varphi_a] \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a} \right) = 0. \quad (\text{E.2})$$

Resolveremos o problema variacional de Noether (PVN) genericamente variando a ação (E.1):

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} \delta_0\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a} \delta_0\partial_\mu\varphi_a + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \right], \quad (\text{E.3})$$

onde $\delta\varphi_a = \delta_0\varphi_a + \partial_\mu\varphi_a\delta x^\mu$, ou seja, estamos decompondo as variações do campo em partes dependentes e independentes do espaço-tempo. Integrando por partes e reorganizando:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a} \right) \right] \delta_0\varphi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a} \delta_0\varphi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right) \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^4x ([\varphi_a] \delta_0\varphi_a + \partial_\mu B^\mu), \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

onde definimos $B^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta_0 \varphi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu$. Portanto, o PVN se resume em

$$\delta \mathcal{S} = 0 \iff [\varphi_a] \delta_0 \varphi_a = -\partial_\mu B^\mu. \quad (\text{E.5})$$

Interessa-nos o caso de transformações de calibre e, nessa restrição $\delta \varphi_a = \delta_0 \varphi_a$. Com isso, o PVN será

$$[\varphi_a] \delta \varphi_a = -\partial_\mu C^\mu \quad (\text{E.6})$$

com $C^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a$. Geralmente ainda é imposta uma condição extra: a validade das equações de movimento. Quando isso ocorre, $[\varphi_a] = 0$ e temos uma equação da continuidade:

$$\partial_\mu C^\mu = 0. \quad (\text{E.7})$$

Por esse motivo, é comum se referir a C^μ como *corrente conservada* ou *corrente de Noether*.

E.2 O primeiro teorema de Noether

Considere a ação invariante por um grupo contínuo finito, ou seja, a simetria é global e depende de n parâmetros ω_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). Nesse caso:

$$\delta \varphi_a = \frac{\partial \delta \varphi_a}{\partial \Delta \omega_\alpha} \Delta \omega_\alpha, \quad (\text{E.8})$$

em que $\Delta \omega_\alpha$ é o infinitesimal de ω_α , e a equação que emerge do PVN será

$$[\varphi_a] \frac{\partial \delta \varphi_a}{\partial \Delta \omega_\alpha} \Delta \omega_\alpha = -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \frac{\partial \delta \varphi_a}{\partial \Delta \omega_\alpha} \Delta \omega_\alpha \right). \quad (\text{E.9})$$

Como $\Delta \omega_\alpha$ não é função do espaço-tempo, ele pode ser fatorado da derivada e obtemos

$$[\varphi_a] \frac{\partial \delta \varphi_a}{\partial \Delta \omega_\alpha} = -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \frac{\partial \delta \varphi_a}{\partial \Delta \omega_\alpha} \right) \equiv \partial_\mu j_\alpha^\mu. \quad (\text{E.10})$$

Apenas ao impor condições *on-shell*, obtemos uma lei de conservação para o caso global, pois assim

$$\partial_\mu j_\alpha^\mu = 0. \quad (\text{E.11})$$

Levando a um número de α cargas conservadas definidas como

$$Q_\alpha \equiv \int_{\Omega_S} d^3x j_\alpha^0. \quad (\text{E.12})$$

Um exemplo está discutido na seção 1.2 para o caso do modelo de Maxwell-Higgs.

E.3 O segundo teorema de Noether

Considere agora que a ação seja invariante por um grupo contínuo infinito, ou seja, a simetria é local e depende de n parâmetros $p_\alpha(x_\mu)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). Para esse caso, temos

$$\delta\varphi_a = b_{\alpha a}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x_\mu) \Delta p_\alpha(x_\mu) + c_{\alpha a}^\mu(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x_\mu) \partial_\mu(\Delta p_\alpha(x_\mu)), \quad (\text{E.13})$$

onde $\Delta p_\alpha(x_\mu)$ é o infinitesimal de p_α . Nesse caso:

$$[\varphi_a](b_{\alpha a} \Delta p_\alpha + c_{\alpha a}^\mu \partial_\mu \Delta p_\alpha) = -\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} (b_{\alpha a} \Delta p_\alpha + c_{\alpha a}^\nu \partial_\nu \Delta p_\alpha) \right]. \quad (\text{E.14})$$

Podemos escolher δp_α e $\partial_\mu \delta p_\alpha$ como nulos nas bordas. Dessa forma, integrando por partes, ficamos com

$$[\varphi_a] b_{\alpha a} = \partial_\mu ([\varphi_a] c_{\alpha a}^\mu). \quad (\text{E.15})$$

Essa é a relação que o segundo teorema de Noether impõe que exista para que o grupo seja simetria.

É importante destacar que os termos presentes no interior do PVN devem ser nulos independentemente dos termos de borda. Isso é exatamente o que é observado no exemplo da seção 1.2: as equações de movimento são condições suficientes, mas não necessárias. Portanto, apesar de geralmente as derivações da corrente de Noether exigirem a validade das equações dinâmicas, elas não são indispensáveis.

APÊNDICE F – Equações integrais para o eletromagnetismo em outras dimensões

Neste apêndice, abordaremos as equações integrais invariantes de Lorentz do eletromagnetismo em 1+1 e 1+2 dimensões. Além disso, também calcularemos a carga conservada via representação de curvatura nula. A discussão se baseia em (LUCHINI; ZACHÉ, 2022).

F.1 Equações integrais em 1+1-dimensões

Em 1+1-dimensões, temos apenas uma equação integral que relaciona o fluxo de uma 0-forma sobre uma superfície 0 dimensional com uma fonte. O fluxo de uma 0-forma é dado por

$$\Phi[f, x] = f(x), \quad (\text{F.1})$$

ou seja, o fluxo será uma função avaliada sobre um ponto.

Variando o ponto, $x \rightarrow x + \delta x$, formamos um caminho e o fluxo passa a ser¹

$$\delta\Phi[f, x] = \partial_\mu f \delta x. \quad (\text{F.2})$$

Parametrizando o caminho por $\sigma \in [0, 2\pi]$

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \partial_\mu f \frac{dx^\mu}{d\sigma} \quad (\text{F.3})$$

e integrando

$$\Delta f(x) = \int_0^{2\pi} \partial_\mu f \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma, \quad (\text{F.4})$$

onde $\Delta f \equiv \Phi[f, x(2\pi)] - \Phi[f, x(0)]$, temos o teorema de Stokes para uma 0-forma (teorema fundamental do cálculo).

Postulamos que a equação integral será

$$\Delta E = \int_\gamma \epsilon_{\mu\nu} j^\nu dx^\mu, \quad (\text{F.5})$$

onde $E(x)$ é o campo elétrico, γ é um caminho no espaço-tempo e $j^\nu = (\rho, j)$ é a corrente.

Para obter as equações de Maxwell covariantes

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (\text{F.6})$$

¹ Os índices gregos representam $\mu = 0, 1$.

onde $F_{01} = E$, devemos usar o teorema de Stokes e que $\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = E$. Assim

$$\Delta E = \int_0^{2\pi} \partial_\mu E \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma = \int_0^{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} j^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} d\sigma$$

de onde obtemos que

$$\partial_\mu E = \epsilon_{\mu\nu} j^\nu \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (\text{F.7})$$

A escolha na natureza de γ define qual equação de Maxwell não covariante obteremos (ver figura 22).

Começando considerando γ puramente espacial em um tempo constante t :

$$E(t, x) - E(t, x_R) = 2 \int_{x_R}^x \epsilon_{10} j^0 \frac{dx^1}{d\sigma} d\sigma = 2 \int_{x_R}^x \rho dx' \quad (\text{F.8})$$

que é a lei de Gauss.

Agora, quando γ for puramente temporal em uma posição x_R :

$$E(t, x) - E(0, x) = 2 \int_0^t \epsilon_{01} j^1 \frac{dx^0}{d\sigma} d\sigma = -2 \int_0^t j dt' \quad (\text{F.9})$$

tem-se a lei de Ampère-Maxwell.

Repare que essas são as únicas equações para o espaço-tempo bidimensional, pois não existe identidade de Bianchi.

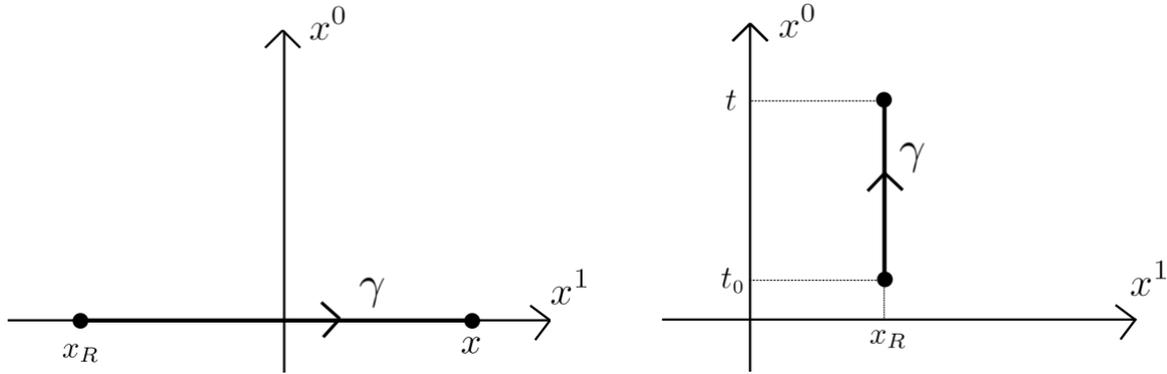


Figura 22 – À esquerda, o caminho puramente espacial. À direita, o caminho puramente temporal.

F.1.1 Conservação da carga elétrica em 1+1-dimensões

Neste caso, o loop space é trivial, pois mapeia pontos em pontos, $\mathcal{L}^{(0)}(\mathcal{M})$. A conexão é dada por

$$\mathcal{A} = A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma, \quad (\text{F.10})$$

onde A_μ são as componentes de uma 1-forma exata, $A = df$. A 0-forma f é escrita em termos dos campos físicos como

$$f = \frac{\beta}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (\text{F.11})$$

onde β é uma constante arbitrária.

Pelas equações de movimento, a conexão é expressa através da corrente de matéria como

$$\mathcal{A} = 2\beta \epsilon_{\mu\nu} j^\nu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma. \quad (\text{F.12})$$

Sua curvatura nula é equivalente a equação da continuidade:

$$\delta\mathcal{A} = 0 \implies \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (\text{F.13})$$

A partir dessa conexão, defini-se um operador holonomia, W , calculada através da equação de transporte paralelo sobre uma curva γ :

$$\frac{dW}{d\sigma} - ieA_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \quad (\text{F.14})$$

cuja solução é

$$W_\gamma = e^{-\int_0^{2\pi} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma} W_R. \quad (\text{F.15})$$

Considerando dois caminhos ilustrados pela figura 23 que ligam x_R e x_f . O primeiro deles, $\gamma = \gamma_L \circ \gamma_0$, pode ser conectado ao segundo, $\gamma' = \gamma_t \circ \gamma_R$, através de deformações contínuas, $x \rightarrow x + \delta x$. Nesse caso, tomando as variações sobre (F.14), a holonomia muda por

$$\delta W = \int_0^{2\pi} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu d\sigma. \quad (\text{F.16})$$

Como A é exato, $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$ e a holonomia é independente do caminho. Portanto, podemos escrever

$$W_\gamma = W_{\gamma'} \implies W_{\gamma_t} \cdot W_{\gamma_{x_R}} = W_{\gamma_L} \cdot W_{\gamma_0}. \quad (\text{F.17})$$

Por (F.12) e (F.15), a equação (F.17) será

$$e^{2ie\beta \int_0^t j \Big|_{x=L} dt'} e^{-i2e\beta Q|_{t=0}} = e^{-i2e\beta Q|_{t>0}} e^{i2e\beta \int_0^t j|_{x=x_R} dt'}, \quad (\text{F.18})$$

onde Q é a carga.

O operador de carga, $\mathcal{Q}(t) \equiv e^{-i2e\beta Q|_{t>0}}$, evolui de maneira isopectral,

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{U}(t) \mathcal{Q}(0) \mathcal{U}^{-1}(t) \quad \text{com} \quad \mathcal{U}(t) \equiv e^{i2e\beta \int_0^t j|_{x=x_R} dt'}. \quad (\text{F.19})$$

Portanto, os seus autovalores são preservados. Isso é evidente assumindo $j(t, x) \rightarrow 0$ no limite que x_R e x_L tendem a infinito, pois, neste caso,

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}(0) \implies e^{-i2e\beta Q|_{t>0}} = e^{-i2e\beta Q|_{t=0}} \implies \mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}(0). \quad (\text{F.20})$$

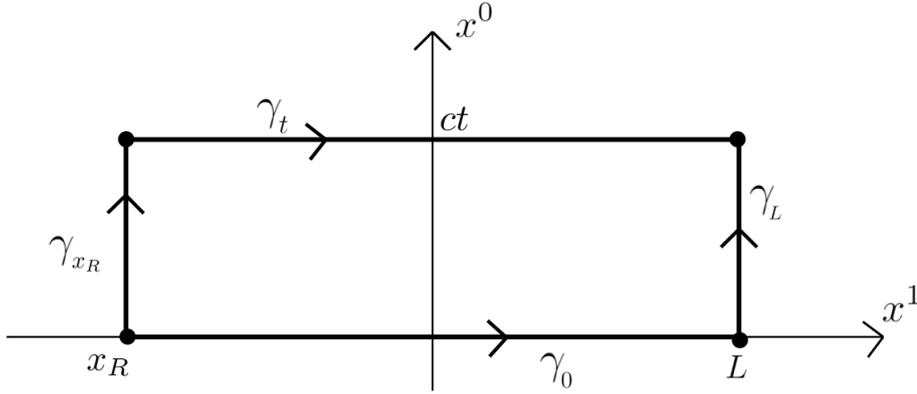


Figura 23 – Escolha dos caminhos em 1+1-dimensões.

F.2 Equações integrais em 1+2-dimensões

Em (1 + 2)-dimensões, as equações integrais ditam o fluxo de uma 1-forma sobre uma superfície 1-dimensional, ou seja, sobre um caminho fechado. Definimos o fluxo de uma 1-forma², $C = C_\mu dx^\mu$, como

$$\Phi[C, \gamma] = \int_\gamma C_\mu dx^\mu. \quad (\text{F.21})$$

Variando o caminho mantendo suas bordas fixas e parametrizando as variações por $\tau \in [0, 2\pi]$ ficamos com

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = - \int_0^{2\pi} (\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu d\sigma. \quad (\text{F.22})$$

Integrando essa expressão e invertendo a orientação do caminho em $\sigma = 0$:

$$\oint_{\partial\Sigma} C_\mu dx^\mu = - \int_\Sigma G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{F.23})$$

onde $\partial\Sigma = \gamma(\sigma = 0) \cup \gamma^{-1}(\sigma = 2\pi)$ é a borda de uma superfície Σ e $G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$. Esse é o teorema de Stokes para uma 1-forma.

Postularemos que as equações integrais são

$$\oint_\Sigma F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau = 0; \quad (\text{F.24})$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \tilde{F}_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma = - \int_\Sigma \epsilon_{\mu\nu\lambda} j^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau, \quad (\text{F.25})$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético cujas componentes são $F_{0i} = E_i$, $F_{ij} = -\epsilon_{ij}B$. O tensor dual, \tilde{F}_μ , é se relaciona com o tensor eletromagnético por $\tilde{F}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}F^{\nu\lambda}$. A corrente será definida como $j^\mu = (\rho, j_1, j_2)$.

² Os índices gregos são $\mu = 0, 1, 2$.

Para obter as equações covariantes diferenciais³, basta usar o teorema de Stokes (F.23):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 2j^\nu; \quad (\text{F.26})$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0. \quad (\text{F.27})$$

Novamente, a escolha na natureza de Σ determina as equações não invariantes. As três equações de Maxwell serão encontradas quando impomos Σ puramente espacial, Σ como uma superfície espaço-temporal aberta que evolui no tempo ou como uma superfície espaço-temporal fechada com forma de um cilindro (ver figura 24).

Considere a superfície puramente espacial em (F.25). O l.h.s será

$$\oint_{\partial\Sigma} \tilde{F}_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \tilde{F}_i \frac{dx^i}{d\sigma} d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \epsilon_{ij} E_j \frac{dx^i}{d\sigma} d\sigma = - \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dr, \quad (\text{F.28})$$

onde na última passagem definimos $\partial\Sigma$ as $\hat{\mathbf{n}}_i dr = \epsilon_{ij} dx^j$ como a direção normal a curva $\partial\Sigma$. Para o r.h.s., temos

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Sigma} \epsilon_{\mu\nu\lambda j} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau &= -2 \int_{\Sigma} \epsilon_{ij0j} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau \\ &= -2 \int_{\Sigma} \rho \epsilon_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau = -2 \int_{\Sigma} \rho dS, \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

onde $dS = \epsilon_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} d\sigma d\tau$ é o elemento de área. Portanto, com (F.28) e (F.29), temos a lei de Gauss em 1+2-dimensões

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dr = 2 \int_{\Sigma} \rho dS. \quad (\text{F.30})$$

Para a lei de Ampère-Maxwell, considere (F.25) para a superfície à esquerda na figura 24. Por um lado, l.h.s. será

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Sigma} \tilde{F}_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma &= \int_{\gamma_0} \tilde{F}_i \Big|_{t=0} dx^i + \int_{\gamma_b} \tilde{F}_0 \Big|_b dx^0 - \int_{\gamma_t} \tilde{F}_i \Big|_{t>0} dx^i - \int_{\gamma_a} \tilde{F}_0 \Big|_a dx^0 \\ &= \int_{\gamma_0} \epsilon_{ij} E_j \Big|_{t=0} dx^i - \int_{\gamma_b} B \Big|_b dt - \int_{\gamma_t} \epsilon_{ij} E_j \Big|_{t>0} dx^i + \int_{\gamma_a} B \Big|_a dt \\ &= \int_{\gamma_t} \mathbf{E} \Big|_{t>0} \cdot \hat{\mathbf{n}} dr - \int_{\gamma_0} \mathbf{E} \Big|_{t=0} \cdot \hat{\mathbf{n}} dr - \left(\int_{\gamma_b} B \Big|_b dt - \int_{\gamma_a} B \Big|_a dt \right). \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

Por outro lado, r.h.s. será

$$-2 \int_{\Sigma} \epsilon_{\mu\nu\lambda j} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} d\sigma d\tau = -2 \int_a^b \int_0^t \epsilon_{i0j} j^j \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} d\sigma d\tau = -2 \int_0^t \int_a^b \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dr dt'. \quad (\text{F.32})$$

³ Na verdade, com o teorema de Stokes, obtemos as seguintes equações $\partial_\mu \tilde{F}_\nu - \partial_\nu \tilde{F}_\mu = 2\epsilon_{\mu\nu\lambda j} j^\lambda$ e $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$. Porém, ao usar $\tilde{F}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda}$ tem-se as formas dessas equações comumente encontradas na literatura.

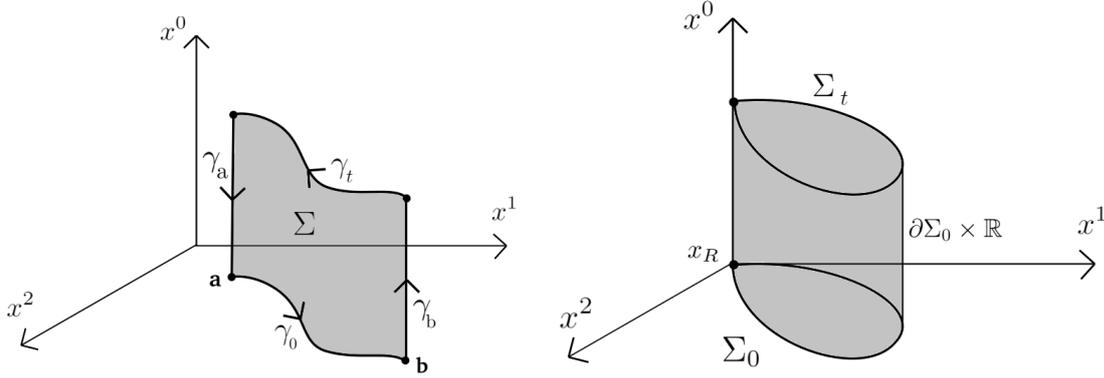


Figura 24 – À esquerda, tem-se a superfície aberta usada para reaver a equação de Ampère-Maxwell. A superfície à direita, que é usada para reaver a lei de Faraday, corresponde a um cilindro espaço-temporal com tampas a tempos fixos.

Considerando um intervalo de tempo infinitesimal, (F.31) e (F.32) implicarão na lei de Ampère-Maxwell em 2+1-dimensões:

$$B|_b - B|_a = \frac{d}{dt} \int_a^b \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dr + 2 \int_a^b \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dr. \quad (\text{F.33})$$

A lei de Faraday será consequência da escolha de superfície como à direita da figura 24 na equação integral (F.24). A superfície Σ será decomposta em três partes: $\Sigma = \Sigma_0 \cup (\partial\Sigma_0 \times \mathbb{R}) \cup \Sigma_t$ com Σ_0 e Σ_t as tampas inferior e superior, respectivamente, e $\partial\Sigma_0 \times \mathbb{R}$ a lateral do cilindro. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau &= \int_{\Sigma_0} F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} d\sigma d\tau + \int_{\partial\Sigma_0 \times \mathbb{R}} F_{i0} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^0}{\partial \tau} d\sigma d\tau \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} d\sigma d\tau = 0. \end{aligned}$$

Substituindo as definições do tensor dos campos e reorganizando:

$$- \int_{\Sigma_0} B|_{t=0} dS - \oint_{\partial\Sigma_0} \int_0^t E_i dt' dx^i + \int_{\Sigma_t} B|_{t>0} dS = 0.$$

Para um intervalo de tempo infinitesimal, obtemos a lei de Faraday em 1+2-dimensões:

$$\oint_{\partial\Sigma_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_0} B dS. \quad (\text{F.34})$$

F.2.1 Conservação da carga elétrica em 1+2-dimensões

O loop space mapeia caminhos fechados em pontos, $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{M})$, e a conexão é dada por

$$\mathcal{A} = \oint_{\gamma} G_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma, \quad (\text{F.35})$$

onde $G_{\mu\nu}$ são as componentes de uma 2-forma exata, $G = dC$.

A 1-forma $C = C_\mu dx^\mu$ é escrita em termos dos campos físicos como

$$C_\mu = A_\mu + \beta \tilde{F}_\mu \quad (\text{F.36})$$

com β uma constante arbitrária. Pelas equações dinâmicas, obtemos G como

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + 2\beta \epsilon_{\mu\nu\lambda} j^\lambda \quad (\text{F.37})$$

e, conseqüentemente, a conexão (F.35) será

$$\mathcal{A} = \oint_\gamma F_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma + 2\beta \oint_\gamma \epsilon_{\mu\nu\lambda} j^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma. \quad (\text{F.38})$$

Essa conexão possui curvatura nula no loop space que tem como consequência a conservação da carga:

$$\delta \mathcal{A} = \oint (\partial_\lambda G_{\mu\nu} + \partial_\mu G_{\nu\lambda} + \partial_\nu G_{\lambda\mu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta} d\sigma d\tau = 2\beta \int \partial_\mu J^\mu d^3x = 0. \quad (\text{F.39})$$

As cargas conservadas são obtidas a partir dos autovalores da holonomia generalizada responsável pelo transporte paralelo de loops em uma superfície.. A equação que define essa holonomia é

$$\frac{dV}{d\tau} - \left(\int_0^{2\pi} G_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma \right) V = 0 \quad (\text{F.40})$$

cujas soluções é dada por

$$V_\Sigma = e^{\int_\Sigma G_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} d\sigma d\tau} V_R, \quad (\text{F.41})$$

onde Σ é um superfície no espaço-tempo escaneada por loops com um ponto em comum, x_R , e V_R é a holonomia calculada sobre esse ponto.

O escaneamento dessa superfície define um caminho sobre o loop space, Γ . Por ser independente do caminho, podemos considerar quaisquer caminho ligando dois pontos no loop space que suas holonomias serão equivalentes. Escolheremos os caminhos como na figura 25. O primeiro deles será $\Gamma_L \circ \Gamma_0$, onde Γ_0 começa com um loop infinitesimal sobre x_R e termina em $\partial\Sigma_0$, que será um loop sobre a borda de Σ a tempo $t = 0$. A holonomia sobre esse caminho será

$$\begin{aligned} V_{\Gamma_L} \cdot V_{\Gamma_0} &= e^{\int_{\partial\Sigma_0 \times \mathbf{R}} G_{i0} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^0}{\partial \tau} d\sigma d\tau} e^{\int_{\Sigma_0} G_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} d\sigma d\tau} \\ &= e^{\int \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} dt + 2\beta \int \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\mathbf{r} dt} \cdot e^{-\int_{\Sigma_0} B \Big|_{t=0} dS} e^{2\beta Q \Big|_{t=0}}. \end{aligned}$$

Assumindo a corrente como localizada e que o campo elétrica caia suficientemente rápido conforme $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, temos

$$V_{\Gamma_L} \cdot V_{\Gamma_0} = e^{-\int_{\Sigma_0} B \Big|_{t=0} dS} e^{2\beta Q \Big|_{t=0}}. \quad (\text{F.42})$$

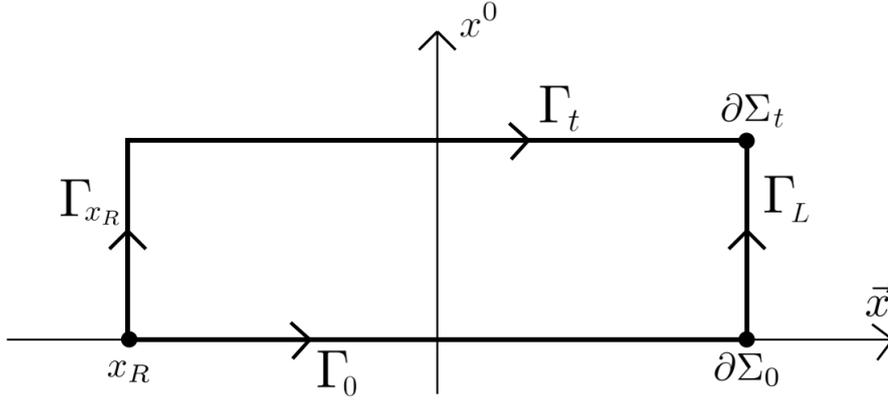


Figura 25 – Escolha dos caminhos em 1+2-dimensões.

O segundo caminho será $\Gamma_t \circ \Gamma_{x_R}$, onde Γ_{x_R} evolui o loop infinitesimal até $t > 0$ e Γ_t leva esse loop, em um tempo constante $t > 0$, até $\partial\Sigma_t$. A holonomia, de maneira análoga a anterior, será

$$V_{\Gamma_t} \cdot V_{\Gamma_{x_R}} = e^{-\int_{\Sigma_0} B|_{t>0} dS} \cdot e^{2\beta Q|_{t>0}}. \quad (\text{F.43})$$

A independência do caminho novamente implica no operador de carga, $\mathcal{Q}(t) \equiv V_{\Gamma_t}$, evoluindo isoespectralmente e as condições de contorno listadas levarão a $V_{\Gamma_L} = V_{\Gamma_{x_R}}$. Assim:

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{U}(t) \mathcal{Q}(0) \mathcal{U}^{-1}(t) \quad \text{com} \quad \mathcal{U}(t) \equiv V_{\Gamma_L} = V_{\Gamma_{x_R}}. \quad (\text{F.44})$$

Logo, os autovalores de \mathcal{Q} são preservados no tempo. Esses autovalores serão a carga elétrica e o fluxo de campo magnético sobre a superfície espacial:

$$V_{\Gamma_t} = e^{-\int_{\Sigma_0} B|_{t>0} dS} \cdot e^{2\beta Q|_{t>0}}. \quad (\text{F.45})$$

Repare que no espaço-tempo tridimensional essa construção devolve uma condição de conservação sobre o fluxo de campo magnético, o que não ocorre nos espaços-tempo de dimensão par.

APÊNDICE G – Equação da continuidade integral invariante de Lorentz

O teorema de Stokes para uma 3-forma definida sobre uma subvariedade 4-dimensional imersa em uma variedade D -dimensional simplesmente conexa (ver apêndice B) diz que

$$\oint_{\partial\Omega} G_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta = - \int_{\Omega} H_{\mu\nu\lambda\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta} d\sigma d\tau d\zeta d\theta, \quad (\text{G.1})$$

onde Ω é um volume 4-dimensional e $\partial\Omega$ sua borda. Já $H_{\mu\nu\lambda\alpha}$ são as componentes da 4-forma exata, $H = dG$, tais que

$$H_{\mu\nu\lambda\alpha} = \partial_\mu G_{\nu\lambda\alpha} - \partial_\nu G_{\lambda\alpha\mu} + \partial_\lambda G_{\alpha\mu\nu} - \partial_\alpha G_{\mu\nu\lambda}. \quad (\text{G.2})$$

Suponha que $G_{\mu\nu\lambda} = \epsilon_{\mu\nu\lambda,\alpha} J^\alpha$ i.e. as componentes de G como o dual da corrente total de Noether na teoria de Yang-Mills, definida na equação (1.77):

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \implies J^\nu \equiv j^\nu + ie[A_\mu, F^{\mu\nu}].$$

Nesse caso, o l.h.s. da equação (G.1) fica

$$\oint_{\partial\Omega} G_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta = \oint_{\partial\Omega} \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} J^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta \quad (\text{G.3})$$

e

$$H_{\mu\nu\lambda\alpha} = \epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta} \partial_\mu J^\beta - \epsilon_{\lambda\alpha\mu\beta} \partial_\nu J^\beta + \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \partial_\lambda J^\beta - \epsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \partial_\alpha J^\beta. \quad (\text{G.4})$$

Sabemos que é possível escrever a equação de Yang-Mills com fonte em termos do dual da corrente (basta usar a definição do tensor dual). O resultado é

$$\partial_\sigma \tilde{F}_{\theta\gamma} + \partial_\gamma \tilde{F}_{\sigma\theta} + \partial_\theta \tilde{F}_{\gamma\sigma} = \epsilon_{\nu\sigma\theta\gamma} J^\nu. \quad (\text{G.5})$$

Com isso, H é nulo e agora sabemos que, além de exata, essa 4-forma é também fechada:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\lambda\alpha} &= \partial_\mu (\partial_\nu \tilde{F}_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda \tilde{F}_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \tilde{F}_{\nu\lambda}) - \partial_\nu (\partial_\lambda \tilde{F}_{\alpha\mu} + \partial_\alpha \tilde{F}_{\mu\lambda} + \partial_\mu \tilde{F}_{\lambda\alpha}) \\ &\quad + \partial_\lambda (\partial_\alpha \tilde{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{F}_{\nu\alpha} + \partial_\nu \tilde{F}_{\alpha\mu}) - \partial_\alpha (\partial_\mu \tilde{F}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \tilde{F}_{\lambda\mu} + \partial_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}) \\ &\implies H_{\mu\nu\lambda\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Portanto, voltando no teorema de Stokes, escrevemos a versão integral invariante de Lorentz da equação da continuidade como o fluxo do dual da corrente sobre uma superfície fechada quadri-dimensional no espaço tempo:

$$\oint_{\partial\Omega} \epsilon_{\mu\nu\lambda\beta} J^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta = 0. \quad (\text{G.7})$$

Para escrevê-la, apenas utilizamos o teorema de Stokes para uma 4-forma e as equações de movimento. Usualmente, é comum apresentar a equação da continuidade como consequência da antissimetria do tensor dos campos e, portanto, ela seria conservada trivialmente. Com a construção apresentada, evidenciamos sua formulação integral a partir de uma forma diferencial exata.

A equação da continuidade na versão usual não invariante de Lorentz, emerge da escolha da superfície assim como as equações de Maxwell na seção 3.2. Basta tomar o espaço-tempo como um cilindro quadridimensional tal que suas bordas são $\partial\Omega = (V_0)^{-1} \cup (\mathbb{R} \times \partial V) \cup V_t$. Neste cilindro, as tampas inferior e superior representam volumes espaciais tridimensionais e a lateral é a evolução da borda desse volume no tempo. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \epsilon_{\mu\nu\lambda\beta} J^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta &= 0 = - \int_{V_0} \epsilon_{ijk0} J^0 \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^k}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta \\ &+ \int_{V_t} \epsilon_{ijk0} J^0 \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^k}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta + \int_{\mathbf{R} \times \partial V} \epsilon_{ij0k} J^k \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^0}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta. \end{aligned}$$

Identificando os elementos de volume, $dV = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\tau} \frac{\partial x^k}{\partial\zeta} d\sigma d\tau d\zeta$, e de área, $dS_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial\zeta} d\sigma d\zeta$, no espaço euclidiano, ficamos com

$$\begin{aligned} \int_{V_t} J^0 dV - \int_{V_0} J^0 dV &= - \int_0^t \int_{\partial V} J^k d\Sigma_k dt' \\ Q(t) - Q(0) &= - \int_0^t \int_{\partial V} J^k d\Sigma_k dt'. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Agora, fazendo a altura do cilindro ser infinitesimal, ou seja, o intervalo de tempo ser infinitesimal, obtemos a equação da continuidade:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Sigma}. \quad (\text{G.9})$$

Note que, em coordenadas esféricas, definindo o “raio espacial” do cilindro como R , a condição de conservação da carga é

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_r R^2 d\theta d\phi = 0 \quad (\text{G.10})$$

com J_r a componente radial da corrente total.

Essa derivação ainda é válida para a teoria abeliana, mas com a corrente sendo j e não J . O cálculo para mostrar que $H_{\mu\nu\lambda\alpha} = 0$ é similar, se não for igual, àquele que mostra a conexão \mathcal{A} como chata para as equações integrais invariantes de Lorentz na teoria abeliana.

APÊNDICE H – Solução tipo Coulomb para a teoria de Yang-Mills

Afirmamos no decorrer do texto que a conservação da carga na teoria de Yang-Mills é problemática. Mesmo que a carga seja conservada em um certo calibre, não é possível garantir que ela também o seja em um outro calibre qualquer. Neste apêndice, iremos ilustrar esse fato através de um exemplo específico retirado de (SCHLIEDER, 1981).

Suponha que o grupo de calibre seja o $SU(2)$. Nesse caso, os geradores da álgebra satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c \quad (\text{H.1})$$

com ϵ_{abc} o símbolo de Levi-Civita e $a, b, c = 1, 2$ ou 3 . Tome também uma solução de campo estático e esfericamente simétrica do tipo Coulomb:¹

$$E^i = \frac{qx^i}{r^3}T_3 \quad \text{e} \quad B^i = 0. \quad (\text{H.2})$$

Repare que o campo está fixo em uma direção da álgebra que escolhemos como T_3 .

Pela definição usual de carga da equação (1.79), tem-se que

$$Q = \int_{\Omega_S} d^3x J^0(x) = \int_{\Omega_S} d^3x \partial_i E^i = \oint_{\partial\Omega_S} dS_i E^i = qT_3, \quad (\text{H.3})$$

ou seja, a carga e o campo elétrico estão na mesma direção da álgebra. É evidente que para esse calibre - denotado por (1) - a carga não muda, pois o campo elétrico é estático:

$$Q^{(1)}(0) = Q^{(1)}(t > 0). \quad (\text{H.4})$$

Portanto, as componentes espaciais da corrente total são nulas:

$$J^{(1) i} = \partial_0 F^{(1) 0i} = \partial_t E^{(1) i} = 0. \quad (\text{H.5})$$

Porém, façamos uma transformação do tipo $g(x) = e^{iT_2}$ para um novo calibre, denotado por (2). Como o campo se transforma de maneira homogênea, i.e. $F_{\mu\nu} \mapsto g F_{\mu\nu} g^{-1}$, a carga nesse calibre será

$$Q^{(2)} = \oint_{\partial\Omega_S} dS_i g E^i g^{-1} = e^{iT_2} Q^{(1)} e^{-iT_2}. \quad (\text{H.6})$$

¹ Ver (IKEDA; MIYACHI, 1962; MIYACHI; IKEDA; MAEKAWA, 1982) para a discussão interessante sobre soluções estáticas e esfericamente simétricas em Yang-Mills. Até mesmo no caso homogêneo é possível obter uma solução de campo esférica.

Note que, para $t = 0$, a carga nos dois calibres é igual e para $t > 0$ ela é diferente. Portanto, ela evolui de maneira diferente nos calibres.

Segundo a equação da continuidade,

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial\Omega_S} dS_i J^i, \quad (\text{H.7})$$

a condição de conservação da carga (já em coordenadas esféricas) é

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_r R^2 d\theta d\phi = 0. \quad (\text{H.8})$$

Calculemos, então, as componentes espaciais da corrente total no calibre (2):

$$\begin{aligned} J^{(2) i} &= \partial_t E^{(2) i} = \partial_t (e^{itT_2} E^{(1) i} e^{-itT_2}) \\ &= i \left(e^{itT_2} \left[T_2, \frac{qx^i}{r^3} T_3 \right] e^{-itT_2} \right) \\ &\implies J^{(2) i} = e^{itT_2} T_1 e^{-itT_2} \frac{qx^i}{r^3}. \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Substituindo em (H.8):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_r R^2 d\theta d\phi = -q e^{itT_2} T_1 e^{-itT_2} = q (\cos t \mathbb{I} - i \sin t T_3) \neq 0, \quad (\text{H.10})$$

onde na última passagem usamos que $e^{itT_a} T_b e^{-itT_a} = \cos t \mathbb{I} + i\epsilon_{abc} \sin t T_c$.

Repare que a corrente transfere parte da carga para o infinito espacial. Portanto, apesar de ser conservada no calibre (1), a carga não é conservada no calibre (2), pois a condição de conservação não é satisfeita independente do valor de t no calibre (2).