

Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física

Ana Paula Jeakel Dias

**A Dinâmica Cosmológica na gravidade  $f(R, T)$**

Vitória

2023

Ana Paula Jeakel Dias

A Dinâmica Cosmológica na gravidade  $f(R, T)$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

Orientador: Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten

Vitória  
2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

D541d Dias, Ana Paula Jeakel, 1995-  
A dinâmica cosmológica na gravidade  $f(R; T)$  / Ana Paula Jeakel Dias. - 2023.  
79 f. : il.

Orientador: Hermano Endlich Schneider Velten.  
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Relatividade geral. 2. Gravitação modificada. 3. Energia escura. I. Velten, Hermano Endlich Schneider. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

## “A Dinâmica Cosmológica na gravidade $f(R,T)$ ”

**Ana Paula Jeakel Dias**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

---

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten  
(Orientador - PPGFis)

---

Prof. Dr. Júlio César Fabris  
(PPGFis/UFES)

---

Prof. Dr. Thiago Roberto da Possa Caramês  
(UFF)

Vitória-ES, 14 de setembro de 2023





## 238ª Defesa Ana Paula Jeakel Dias - Ata de Submissão

Data e Hora de Criação: 14/09/2023 às 14:58:04

Documentos que originaram esse envelope:

- 238ª Defesa Ana Paula Jeakel Dias - Ata de Submissão.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



### Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 2c607928f574ca5c4b8ea3d73b2a9532d06e9687f1f705c0c91a47ecfd5e005

[SHA512]: a83e7578dae046ac19a1df4b0637d380defc2b687521133ff0697bc9b1d94fbc17c4d2d41418ef5f2d7acdd3dd626ca72943426643611a667fd8e667bf7c57a0

### Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



#### ASSINADO - Hermano Endlich Schneider Velten (hermano.velten@ufop.edu.br)

Data/Hora: 14/09/2023 - 15:09:45, IP: 138.185.27.110

[SHA256]: a553ad31ee502179bc9877a11d3015e9a338593d8a1ed093d4113eead0a54492



#### ASSINADO - Júlio César Fabris (julio.fabris@cosmo-ufes.org)

Data/Hora: 14/09/2023 - 17:03:24, IP: 200.137.65.104, Geolocalização: [-20.285552, -40.302510]

[SHA256]: 2f145ebdf4660a387f290696fa55a5f0a50bcfb1b42139f6fee955441c24c0c4



#### ASSINADO - Thiago Roberto da Possa Caramês (trpcarames@gmail.com)

Data/Hora: 14/09/2023 - 15:19:43, IP: 45.4.47.178, Geolocalização: [-21.551465, -42.194245]

[SHA256]: 034cfc68d687ad2bba2d0608d7a07b105bd745c660e206e8a20212c6ceea18d8

### Histórico de eventos registrados neste envelope

14/09/2023 17:03:24 - Envelope finalizado por julio.fabris@cosmo-ufes.org, IP 200.137.65.104

14/09/2023 17:03:24 - Assinatura realizada por julio.fabris@cosmo-ufes.org, IP 200.137.65.104

14/09/2023 17:03:19 - Envelope visualizado por julio.fabris@cosmo-ufes.org, IP 200.137.65.104

14/09/2023 15:19:43 - Assinatura realizada por trpcarames@gmail.com, IP 45.4.47.178

14/09/2023 15:19:30 - Envelope visualizado por trpcarames@gmail.com, IP 45.4.47.178

14/09/2023 15:09:45 - Assinatura realizada por hermano.velten@ufop.edu.br, IP 138.185.27.110

14/09/2023 15:04:08 - Envelope registrado na Blockchain por jose.cruz@ufes.br, IP 200.137.65.102

14/09/2023 15:04:06 - Envelope encaminhado para assinaturas por jose.cruz@ufes.br, IP 200.137.65.102

14/09/2023 14:58:05 - Envelope criado por jose.cruz@ufes.br, IP 200.137.65.102

*à minha família e amigos*

# Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que contribuíram de maneira significativa para o sucesso desta jornada acadêmica.

Primeiramente, agradeço a Deus por me guiar e me sustentar ao longo deste caminho desafiador. À minha amada família, que sempre esteve ao meu lado, me proporcionando uma base sólida de suporte e carinho, especialmente ao meu pai Paulo e à minha mãe Viviani, por serem os pilares do meu apoio, amor e inspiração. Seu inabalável encorajamento e constante presença foram a luz que me guiou em todos os momentos.

Aos amigos que compartilharam risos, desafios e conquistas ao longo dessa jornada, vocês tornaram cada passo memorável e enriquecedor. Agradeço em especial ao Jonas que participou de maneira direta no desenvolvimento dessa pesquisa.

Ao meu orientador, Hermano Velten, cuja sabedoria, orientação perspicaz e dedicação incansável foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Suas orientações moldaram minha compreensão e paixão pelo conhecimento.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFES, pela oportunidade de fazer parte da comunidade acadêmica e pelo ambiente de aprendizado que fomentou meu crescimento como pesquisadora.

Por fim, meus agradecimentos à agência de fomento CAPES pelo apoio financeiro.

Cada um de vocês teve um impacto profundo em minha jornada, e estou profundamente agradecido por suas contribuições significativas.

Muito Obrigada!

Estranha Maneira de Amar

Se cada dia cai,  
Dentro de cada noite  
Há um poço  
Onde a claridade está presa

Há que sentar-se na beira  
Do poço da sombra  
Da sombra da claridade

E pescar luz caída  
Com paciência.

*Cecília Meireles*



# Resumo

Começamos com uma análise abrangente dos principais conceitos da Relatividade Geral e da Cosmologia, estabelecendo assim um fundamento sólido que permitirá uma compreensão completa do tópico central abordado por esta pesquisa. Em seguida, adentramos ao cerne deste estudo, onde procedemos a uma revisão detalhada do estado atual das teorias  $f(R, T)$ , em que  $T$  representa o traço do tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ , no que diz respeito à evolução da expansão de fundo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Usamos o caso plano onde  $k = 0$ . Começamos encontrando as equações de Friedmann modificadas para o caso de uma Lagrangiana gravitacional minimamente acoplada do tipo  $f(R, T) = R + \alpha e^{\beta T} + \gamma_n T^n$ . Com essa escolha, abrangemos todas as propostas existentes na literatura através de quatro parâmetros livres. Todos os modelos relevantes de  $f(R, T)$ , assim como o modelo  $\Lambda$ CDM, podem ser obtidos no limite apropriado. Mostramos que, nesse caso minimamente acoplado, existe uma relação útil de restrição entre a densidade efetiva total de matéria com um parâmetro de equação de estado arbitrário e os parâmetros de gravidade modificada. Em seguida, com essa associação, o setor de gravidade modificada pode ser restrito de forma independente usando estimativas da fração de massa gasosa em aglomerados de galáxias. Além disso, usando dados cronológicos cosmológicos de fundo e exigindo que o universo seja antigo o suficiente para acomodar a existência de aglomerados globulares galácticos com uma idade estimada de pelo menos  $\sim 14$  bilhões de anos, encontramos uma faixa estreita do espaço livre de parâmetros de gravidade modificada em que essa classe de teorias permanece viável para a evolução cosmológica em tempos tardios. Como esperado, essa região de espaço de parâmetros preferida acomoda o limite  $\Lambda$ CDM dos modelos  $f(R, T)$ . No entanto, ao analisar a dinâmica cosmológica incluindo a componente de radiação, descobrimos que essa densidade de energia interage com o campo de matéria e não segue o comportamento típico  $a^{-4}$ , sendo  $a$  o fator de escala. Concluimos afirmando que a gravidade  $f(R, T)$  não é capaz de fornecer um cenário cosmológico completo e deve ser descartada como uma alternativa de gravidade modificada para o fenômeno da energia escura.

## Palavras-chave

Relatividade Geral, Gravitação modificada, Energia Escura.

# Abstract

We begin with a comprehensive analysis of the key concepts in General Relativity and Cosmology, thus laying a strong foundation that will enable a thorough understanding of the central topic addressed in this research. Subsequently, we delve into the core of this study, where we conduct a detailed review of the current state of  $f(R, T)$  theories, where  $T$  represents the trace of the energy-momentum tensor  $T^{\mu\nu}$ , concerning the evolution of the cosmological background expansion of Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). We start focusing on the modified Friedmann equations for the case of a minimally coupled gravitational Lagrangian of the type  $f(R, T) = R + \alpha e^{\beta T} + \gamma_n T^n$ . With this choice one covers all existing proposals in the literature via four free parameters. All relevant  $f(R, T)$  models as well as the  $\Lambda$ CDM model can be achieved in the appropriate limit. We show that in such a minimally coupled case there exists a useful constraining relation between the effective total matter density with an arbitrary equation of state parameter and the modified gravity parameters. Then, with this association the modified gravity sector can be independently constrained using estimations of the gas mass fraction in galaxy clusters. Further, using cosmological background cosmic chronometers data and demanding the universe is old enough to accommodate the existence of Galactic globular clusters with estimated age of at least  $\sim 14$  Gyrs we find a narrow range of the modified gravity free parameter space in which this class of theories remains viable for the late time cosmological evolution. As expected, this preferred parameter space region accommodates the  $\Lambda$ CDM limit of  $f(R, T)$  models. However, when analysing the cosmological dynamics including a radiation component, we find that this energy density interacts with the matter field and it does not scale according to the typical  $a^{-4}$  behavior, being  $a$  the scale factor. We conclude stating that  $f(R, T)$  gravity is not able to provide a full cosmological scenario and should be ruled out as a modified gravity alternative to the dark energy phenomena.

## Keywords

General Relativity, Modified Gravity, Dark Energy.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria da Relatividade Geral</b>	<b>3</b>
2.1	Ferramentas matemáticas . . . . .	3
2.1.1	Variedades, Vetores e Tensores no espaço-tempo . . . . .	4
2.1.2	A Métrica . . . . .	7
2.1.3	Geodésica . . . . .	8
2.2	Equações de Einstein . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Cosmologia</b>	<b>17</b>
3.1	O princípio cosmológico . . . . .	17
3.2	A expansão do Universo . . . . .	18
3.3	Métrica de Friedmann Lemaître Robertson Walker (FLRW) . . . . .	21
3.3.1	Calculando as Conexões e tensores . . . . .	22
3.4	Equações de Friedmann: Origem e Derivação . . . . .	26
3.4.1	Conteúdo material do universo . . . . .	28
3.4.2	O parâmetro de desaceleração $q(t)$ . . . . .	30
3.5	O setor Escuro . . . . .	30
3.5.1	Matéria Escura . . . . .	30
3.5.2	Energia Escura . . . . .	33
3.6	A construção do modelo padrão de cosmologia . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Modificando a Gravidade</b>	<b>41</b>
4.1	Teorias alternativas à Relatividade Geral . . . . .	41
4.2	A teoria $f(R, T)$ . . . . .	42
4.2.1	A dinâmica de fundo cosmológico para a teorias $f(R, T)$ . . . . .	43
4.2.2	Testes observacionais para a teoria $f(R, T)$ . . . . .	48
4.2.3	Adicionando radiação ao modelo $f(R, T)$ . . . . .	53
4.2.4	Um comentário sobre o caso não-minimamente acoplado. . . . .	55

<b>5 Conclusões</b>	<b>60</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Introdução

A Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein revolucionou nossa compreensão da interação entre massa e o espaço-tempo, desvendando um mundo onde a força gravitacional não é mais uma força, mas uma curvatura que molda o movimento das partículas e a trajetória da luz. No entanto, à medida que exploramos fenômenos em escalas cósmicas, como a expansão do universo, surgem questões que desafiam os limites da nossa teoria gravitacional atual. Um desses desafios é explicar a expansão acelerada do universo, um fenômeno que, no modelo  $\Lambda$ CDM é explicado pela constante cosmológica. Apesar do sucesso do modelo ao ser consistente com os dados observacionais, ainda apresenta questões e incertezas a serem abordadas.

Com a intenção de aprimorar e expandir nossa compreensão da gravidade, surgiram abordagens que visam modificar a Relatividade Geral. Uma dessas abordagens é a teoria  $f(R, T)$ , onde as equações de campo de Einstein são estendidas por meio de funções arbitrárias  $f(R, T)$  que dependem tanto do escalar de curvatura  $R$  quanto do tensor energia-momento  $T$ . O objetivo subjacente ao estudar a teoria  $f(R, T)$  é buscar uma explicação mais abrangente para a expansão do universo. A ideia central da teoria  $f(R, T)$  é que a curvatura do espaço-tempo influencia a maneira como a expansão do universo ocorre.

Neste contexto, este trabalho tem como objetivo explorar a viabilidade da teoria  $f(R, T)$  aplicando testes cosmológicos. No Capítulo 2, estabelecemos as bases matemáticas necessárias para compreender tanto a Relatividade Geral quanto as teorias de gravidade modificada. Abordamos conceitos fundamentais, como variedades, vetores e tensores no espaço-tempo, além de explorar a métrica e as geodésicas, que são essenciais para a descrição da geometria curva.

No Capítulo 3, revisamos os principais tópicos da cosmologia, começando pelo princípio cosmológico e a expansão do universo. Introduzimos a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que é crucial para descrever a geometria do universo em larga escala. Exploramos as equações de Friedmann, que regem a evolução do universo e têm implicações significativas para os componentes cósmicos, como matéria escura e energia escura. No Capítulo 4, adentramos no âmbito das modificações da gravidade, com foco especial na abordagem da teoria  $f(R, T)$ . Exploramos como essa teoria pode explicar a expansão do

universo de forma alternativa e investigamos as implicações observacionais que podem ajudar a restringir os parâmetros dessa teoria. Além disso, examinamos como a radiação e a matéria se comporta no modelo  $f(R, T)$  e discutimos o caso de acoplamento não mínimo.

De maneira geral, este trabalho busca entender as teorias de gravidade modificada, com foco na teoria  $f(R, T)$ , como uma abordagem que pode fornecer explicações mais robustas para fenômenos cósmicos, como a expansão do universo, indo além das limitações da Relatividade Geral tradicional e da constante cosmológica.

# Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein revolucionou completamente a compreensão científica do universo. O termo "relatividade" engloba duas teorias físicas distintas. A primeira delas, denominada Relatividade Especial ou Restrita, foi publicada em 1905 e é uma teoria que trata dos fenômenos mecânicos e eletromagnéticos ocorrendo em sistemas de referenciais em movimento a altas velocidades em relação a um observador, mas que não são influenciados por forças gravitacionais [23]. Por outro lado, a Teoria da Relatividade Geral visa descrever as propriedades do tempo e do espaço, ela descreve a força gravitacional como a curvatura do espaço-tempo em vez de uma força como descrito na teoria da gravitação de Isaac Newton.

A ideia central da Relatividade Geral é simples: enquanto a maioria das forças naturais é representada por campos definidos no espaço-tempo, a gravidade está intrinsecamente ligada à geometria do espaço. O campo dinâmico que origina a gravitação é o tensor métrico, que descreve a curvatura do próprio espaço-tempo. Em outras palavras, a gravidade é a manifestação da curvatura do espaço-tempo.

Para iniciar este capítulo, abordaremos a estrutura do espaço e do tempo, apresentando novas ideias geométricas e introduzindo os conceitos fundamentais da Relatividade Geral de maneira física e intuitiva.

## 2.1 Ferramentas matemáticas

O papel da matemática é fundamental para a compreensão da natureza. A Relatividade Geral é um exemplo importante e singular desse papel. Pode-se afirmar que a teoria da gravitação de Einstein é, essencialmente, matemática em si. Seu princípio fundamental, de que a massa induz a curvatura do espaço-tempo, resulta em toda a teoria sendo expressa por meio de uma geometria diferencial em um espaço-tempo curvo.

## 2.1.1 Variedades, Vetores e Tensores no espaço-tempo

Para compreender melhor a estrutura de um espaço-tempo curvo, será necessário introduzir novos conceitos, tais como: variedades, vetores e tensores.

No contexto do cálculo tensorial, uma variedade  $\mathcal{M}$  é uma estrutura geométrica que generaliza o conceito de espaço euclidiano para espaços mais gerais e curvos [20]. Em outras palavras, uma variedade é um conjunto de pontos que possuem  $n$  coordenadas, onde  $n$  é a dimensão da variedade. Exemplos de variedades incluem a reta, o plano e a esfera. Para mapear uma variedade, utilizamos um sistema de coordenadas. No entanto, quando a variedade é uma superfície com curvatura, ela não pode ser completamente mapeada no plano. Nesses casos, fazemos uso das projeções estereográficas para representá-las de maneira mais adequada. Ao generalizar as variedades, pode ser necessário utilizar mais de um sistema de coordenadas para mapeá-las completamente.

Um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  é uma estrutura algébrica que consiste em um conjunto de vetores, um em cada ponto do espaço-tempo, juntamente com duas operações: adição de vetores e multiplicação por escalar. As propriedades dessas operações devem obedecer a regras específicas, como associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro e distributividade. Formalmente, um conjunto  $\mathbb{V}$  é considerado um espaço vetorial se satisfizer todas essas propriedades.

Um vetor é um objeto geométrico perfeitamente definido, assim como um campo vetorial. Podemos associar três características aos vetores: módulo, direção e sentido. Portanto em um sistema de coordenadas retangulares, um vetor  $\vec{V}$  pode ser expresso como:

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}, \quad (2.1)$$

onde as quantidades  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  são os vetores unitários correspondentes as coordenadas, eles formam uma base para vetores em três dimensões. No espaço de Minkowski, os vetores são quadridimensionais, também conhecidos como quadri-vetores, o que implica que não há produto vetorial entre eles. Geralmente, pensamos em vetores como sendo objetos que se estendem entre pontos no espaço ou até mesmo como vetores "livres" que podem ser deslizados de um ponto a outro, mas esses conceitos não são úteis fora do contexto de espaços planos. Além do simples fato da dimensionalidade, o mais importante a enfatizar é que cada vetor está localizado em um determinado ponto do espaço [15]. Quando introduzimos curvatura, perdemos



a capacidade de traçar retas ou curvas como em um espaço plano, nesses casos pensamos nos vetores como estando localizados em um único ponto.

É sempre útil decompor vetores em componentes em relação a algum conjunto de vetores de base, embora muitas vezes omitamos essas bases. Vamos utilizar a notação  $\hat{e}_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3\dots$ ) para representar vetores unitários que formam uma base. Qualquer vetor abstrato  $\vec{V}$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base, como segue:

$$\vec{V} = \sum_{\mu=0}^{\infty} V^\mu \hat{e}_\mu, \quad (2.2)$$

onde  $V^\mu$  são as componentes de  $\vec{V}$  na direção  $\hat{e}_\mu$ . Nesse contexto vamos utilizar a notação de Einstein, também conhecida como notação de índices repetidos. Nessa notação, omitimos o símbolo de somatório “ $\sum$ ” ao lidar com mais de um vetor.

Vamos tomar uma outra base  $\hat{e}'_{\mu'}$ , onde podemos escrever esse mesmo vetor  $\vec{V}$  nesta outra base

$$\vec{V} = V^{\mu'} \hat{e}'_{\mu'}. \quad (2.3)$$

$V^{\mu'}$  são as componente de  $\vec{V}$  na direção da nova base  $\hat{e}'_{\mu'}$ . Para obter a relação entre as duas componentes  $V^\mu$  e  $V^{\mu'}$  projetamos os unitários de uma base sobre outra

$$\hat{e}_\mu = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}'_{\mu'}) \hat{e}'_{\mu'}. \quad (2.4)$$

Logo, substituindo a eq. (2.4) em eq. (2.2)

$$\vec{V} = V^\mu \hat{e}_\mu = V^\mu (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}'_{\mu'}) \hat{e}'_{\mu'} = V^{\mu'} \hat{e}'_{\mu'}, \quad (2.5)$$

assim, podemos identificar suas componentes como

$$V^{\mu'} = a_{\mu\mu'} V^\mu, \quad (2.6)$$

onde

$$a_{\mu\mu'} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}'_{\mu'}, \quad (2.7)$$

sendo o termo  $a_{\mu\mu'}$  uma matriz ortogonal.

Agora que temos a definição de espaço vetorial, podemos definir outro espaço vetorial associado, conhecido como espaço vetorial dual. Na matemática, qualquer espaço vetorial  $\vec{V}$

sobre um corpo pode ser associado a um espaço dual, denotado  $\vec{\omega}$ , consistindo dos funcionais lineares. Em outras palavras, o espaço dual consiste em todas as funções lineares que mapeiam vetores do espaço vetorial em números. Assim como os vetores, todo vetor dual pode ser escrito em termos dos seus componentes, só que nesse caso, representamos os índices em baixo

$$\vec{\omega} = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu, \quad (2.8)$$

onde  $\omega_\mu$  são as componentes de  $\vec{\omega}$  na base  $\hat{\theta}^\mu$ . Usando a notação de componentes, podemos escrever de maneira simples a ação de um dual sobre um vetor:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(\vec{V}) &= \omega_\mu \hat{\theta}^\mu (V^\nu \hat{e}_\nu), \\ &= \omega_\mu V^\nu (\hat{\theta}^\mu \hat{e}_\nu), \\ &= \omega_\mu V^\nu \delta_\mu^\nu, \\ &= \omega_\mu V^\mu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podemos pensar em vetores, como mapas lineares em vetores duais, definidos como:

$$\vec{\omega}(\vec{V}) \equiv \vec{V}(\vec{\omega}) = \omega_\mu V^\mu. \quad (2.10)$$

Portanto, o espaço dual para o espaço vetorial dual é o próprio espaço vetorial original. Chamamos os vetores que se transformam como eq. (2.2) de contravariantes, que por convenção são representados com índice em cima. São chamados de vetores covariantes, eq. (2.8), aqueles que se transformam como o gradiente de um campo escalar, que por sua vez são representados com o índice em baixo. Por regras de derivação, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (2.11)$$

A relação entre os dois tipos de vetores é dada através de

$$V_\mu = \delta_\nu^\mu V^\nu. \quad (2.12)$$

Com isso, podemos introduzir diretamente o conceito de tensor: ele nada mais é do que a generalização de um vetor, e pode ser representado da seguinte maneira

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \hat{e}_{\mu_1} \dots \hat{e}_{\mu_k} \hat{\theta}^{\nu_1} \dots \hat{\theta}^{\nu_l}, \quad (2.13)$$

onde podemos dizer que um escalar é um tensor do tipo (0,0), um vetor é um tensor do tipo (1,0) e um vetor dual é um tensor do tipo (0,1). As noções de covariante e contravariante, também podem ser aplicadas a tensores. Vale ressaltar que quando temos índice em cima e índice em baixo no mesmo tensor  $T_{\nu}^{\mu}$ , ele é chamado de tensor misto.

## 2.1.2 A Métrica

Mesmo que conheçamos as componentes de um vetor, ainda são necessárias informações adicionais para que possamos associar as coordenadas a uma distância física. A métrica é a ferramenta matemática que expressa as propriedades geométricas do espaço-tempo e nos permite calcular a distância entre eventos. Estamos familiarizados com a métrica no sistema de coordenadas cartesianas, que estabelece que o quadrado da distância entre dois pontos, digamos  $dx$  e  $dy$ , é  $(dx)^2 + (dy)^2$ . Da mesma forma, conhecemos a métrica para coordenadas polares, que nesse caso seria  $(dr)^2 + r^2(d\theta)^2$ . Perceba que um observador usando coordenadas cartesianas deve obter o mesmo resultado para a distância quando ele utiliza coordenadas polares. Assim, podemos afirmar que a métrica transforma coordenadas dependentes do observador em invariantes.

No espaço de Minkowski, a distância física de um objeto, ou seja, a métrica é denotada como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.14)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é o tensor métrico desse espaço. O espaço de Minkowski é comumente utilizado na Relatividade Restrita pois possui uma configuração das três dimensões usuais do espaço combinadas com uma única dimensão do tempo para formar uma variedade quadrimensional para representar o espaço-tempo. Vale destacar, que ele ocorre na ausência de campos gravitacionais.

Na Relatividade Geral, em contrapartida, trabalharemos com espaços curvos, ou seja, existe um campo gravitacional que torna a métrica dependente de cada ponto do espaço tempo

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.15)$$

Em um espaço-tempo curvo, a métrica  $g_{\mu\nu}$  é responsável por determinar a geometria local, ou seja, como os ângulos e as distâncias são medidos em torno de um ponto específico. A curva-

tura do espaço-tempo é incorporada na métrica, resultando em um conjunto de coeficientes métricos que variam conforme a localização no espaço-tempo.

Uma métrica é considerada não degenerada se, para qualquer vetor não nulo em um espaço vetorial tangente, o produto interno com ele mesmo não é zero. Matematicamente, uma métrica  $g_{\mu\nu}$  é não degenerada se a matriz que a representa é invertível, ou seja, seu determinante é diferente de zero em todos os pontos da variedade. Isso nos permite definir o inverso da métrica  $g_{\mu\nu}$  como

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_{\sigma}^{\mu}, \quad (2.16)$$

onde a simetria de  $g_{\mu\nu}$  implica que  $g^{\mu\nu}$  também é simétrico. A não degeneração da métrica é fundamental para garantir que o espaço-tempo tenha uma geometria bem definida e que não haja degeneração na descrição da distância e do intervalo temporal. Na relatividade geral, uma métrica não degenerada é essencial para garantir que as equações de movimento das partículas e campos sejam bem definidas e que a dinâmica do espaço-tempo seja coerente.

### 2.1.3 Geodésica

Em uma variedade diferenciável, como o espaço-tempo curvo, as geodésicas são definidas como as curvas que seguem o caminho mais curto entre dois pontos [22]. Especificamente, uma geodésica é uma curva parametrizada cujo vetor tangente é paralelo ao próprio vetor tangente ao longo de toda a curva, ver fig. (2.1). Uma geodésica pode ser interpretada como a trajetória que uma partícula livre seguiria no espaço-tempo sem estar sob a influência de forças externas, exceto a gravidade. Em outras palavras, uma partícula em movimento livre seguirá uma geodésica no espaço-tempo curvo. para chegar nas equações da geodésica, partiremos



**Figura 2.1:** O caminho de uma partícula parametrizado por  $\lambda$  que aumenta progressivamente de seu valor inicial  $\lambda_i$  ao seu valor final  $\lambda_f$  [22]

de uma métrica generalizada. Representamos a métrica de um espaço curvo por um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  de dimensões  $N \times N$ , onde  $\mu$  e  $\nu$  variam de 0 a  $N - 1$ . Cada elemento  $g_{\mu\nu}$  é uma

função das coordenadas generalizadas  $x^\mu$ . Descrevemos o caminho no espaço curvo através das coordenadas generalizadas  $x^\mu$  como funções de um parâmetro afim  $\lambda$ :

$$x^\mu = x^\mu(\lambda). \quad (2.17)$$

A ação  $S$  é uma integral ao longo do caminho que incorpora a métrica  $g_{\mu\nu}$  e as derivadas das coordenadas em relação a  $\lambda$ . A ação é dada por:

$$S = \int L d\lambda, \quad (2.18)$$

onde o Lagrangiano  $L$  é dado por:

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (2.19)$$

Para encontrar a trajetória que minimiza a ação  $S$ , realizamos variações na ação em relação às coordenadas  $x^\mu$  e suas derivadas em relação a  $\lambda$ . Com isso temos,

$$\delta S = \int \left( \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \right) \delta x^\mu \right) d\lambda. \quad (2.20)$$

O princípio de mínima ação exige que a expressão entre parênteses no integrando seja zero, o que nos leva a  $N$  equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada coordenada  $x^\mu$ :

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.21)$$

Primeiramente, precisamos calcular a derivada parcial de  $L$  em relação a  $dx^\mu/d\lambda$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} = \frac{1}{2L} 2g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}}{L}. \quad (2.22)$$

Agora, a derivada parcial de  $L$  em relação a  $x^\mu$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \quad (2.23)$$

Substituindo a eq. (2.22) e a eq. (2.23) nas equações da geodésica:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}}{L} \right) - \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.24)$$

Aplicando a regra do produto para a derivada da primeira parcela, temos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) - g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.25)$$

Um conceito importante a ser introduzido aqui são as conexões métricas  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ , também conhecidas como símbolos de Christoffel, que são elementos matemáticos utilizados na geometria diferencial para descrever a derivada covariante de um vetor ou tensor em um espaço curvo. Em espaços curvos as direções e as taxas de variação de vetores e tensores mudam de ponto para ponto. Os símbolos de Christoffel descrevem essas mudanças e são calculados a partir da métrica do espaço-tempo. Em coordenadas curvilíneas, a derivada covariante de um vetor é definida pela derivada parcial comum, mas nos espaços curvos, essa definição não é suficiente para descrever completamente a taxa de variação do vetor em todas as direções. Os símbolos de Christoffel adicionam a informação adicional necessária para considerar a geometria do espaço em questão. A fórmula para os símbolos de Christoffel é dada por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (2.26)$$

onde  $g_{ij}\delta_j^i = 0$ , se  $i \neq j$  e  $g_{ij}\delta_j^i \neq 0$ , se  $i = j$ , e  $g^{\mu\lambda}$  é a matriz inversa da métrica  $g_{\mu\nu}$ . Reescrevendo o termo  $\partial g_{\alpha\beta}/2\partial x^\mu$  como o símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ :

$$\frac{d}{d\lambda} \left( g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) - (g_{\alpha\mu} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.27)$$

Finalmente, obtemos a equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.28)$$

Essa é a equação diferencial de segunda ordem que descreve a trajetória das partículas no espaço curvo. As geodésicas são as soluções dessa equação, que representa o movimento mais curto (ou mais longo, dependendo da assinatura da métrica) entre os pontos em um espaço curvo.

## 2.2 Equações de Einstein

A ação  $S$  é definida como a integral da Lagrangeana em relação ao tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.29)$$

onde  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos inicial e final do intervalo considerado. O princípio da mínima ação afirma que a trajetória seguida pelo sistema entre dois pontos no espaço-tempo é aquela que minimiza a ação. Matematicamente, isso implica que a variação da ação

$$\delta S = 0. \quad (2.30)$$

Para qualquer perturbação, a trajetória é nula. Poderemos obter as equações de campo de Einstein através do princípio da mínima ação que, habitualmente, é definida como uma função de campo. A ação geral que descreve a Relatividade Geral incluindo tanto o setor gravitacional quanto o setor de matéria é dada pela soma da ação de Einstein-Hilbert com a ação da matéria. A forma geral da ação é:

$$S = S_G + S_m, \quad (2.31)$$

onde  $S_m$  é a ação da matéria, que engloba as interações da matéria com o campo gravitacional e pode ser específica para diferentes tipos de matéria. Para um campo escalar  $\phi$ , por exemplo, a ação da matéria é geralmente escrita como:

$$S_m = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.32)$$

Aqui,  $\mathcal{L}_m$  é a densidade Lagrangeana de matéria geral.  $S_G$  é a ação de Einstein-Hilbert, ela vai descrever todo o setor gravitacional. A variação da ação total em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  leva às equações de campo de Einstein, que descrevem como a geometria do espaço-tempo é influenciada pela distribuição de matéria e energia. Iremos calcular passo a passo as equações de Einstein, a começar pelo setor gravitacional.

A expressão que descreve a ação da gravidade que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de massa e energia é a chamada ação de Einstein-Hilbert, que é descrita por:

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.33)$$

onde  $\kappa^2 = 8\pi G$ , com  $G$  sendo a constante gravitacional de Newton,  $g$  é o determinante da métrica do espaço-tempo e  $R$  é o escalar de curvatura, ou escalar de Ricci, que é calculado a partir da métrica do espaço-tempo. Variando a ação de Einstein-Hilbert

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x \delta(\sqrt{-g}R) = 0. \quad (2.34)$$

Escrevemos o escalar de Ricci como  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , onde  $R_{\mu\nu}$  é conhecido como tensor de Ricci. Ele é obtido a partir da contração do tensor de Riemann. Mais a frente mostraremos como obtemos o tensor de Ricci. Aplicando a variação em todos os termos da ação:

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x \left[ (\delta\sqrt{-g})g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \right] = 0. \quad (2.35)$$

A priori nos preocupemos em obter as variações de eq. (2.35) :

$$\delta\sqrt{-g}, \quad (2.36)$$

$$\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

$$\delta R_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Tomemos o termo (2.36) e calculemos sua variação:

$$\delta\sqrt{-g} = \delta(-g)^{1/2} = \frac{\delta(-g)^{1/2}}{\delta g} \delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g. \quad (2.39)$$

Obtemos  $\delta g$  facilmente, uma vez que podemos escrever  $\det(g_{\mu\nu}) = g$  em termos de seus cofatores. Explicitando  $g$  em termos do cofator matricial:

$$g = \sum_w g_{\mu\nu} C^{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

onde podemos assumir que

$$C^{\mu\nu} = \frac{\delta g}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.41)$$

Como a métrica é diagonal, podemos expressar ela em termos da inversa, de forma que:

$$\frac{1}{g_{\mu\nu}} = g^{\mu\nu}, \quad \frac{C^{\mu\nu}}{g} = g^{\mu\nu}. \quad (2.42)$$

Consequentemente,

$$C^{\mu\nu} = \frac{\delta g}{\delta g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}. \quad (2.43)$$



Assim, explicitando  $\delta g$  ficamos com

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Logo, o termo (2.36) é escrito como

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Mas,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad e \quad g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Portanto:

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.47)$$

No caso da eq. (2.37), recorde que  $g^{\mu\nu}$  é um tensor métrico, o que significa que este descreve a geometria do espaço bem como a distância entre dois pontos. Então, por questões de consistência,  $\delta g^{\mu\nu}$  é nulo na fronteira do volume  $\Omega$ . Se  $\delta g^{\mu\nu}$  não fosse nulo, estaríamos essencialmente buscando uma nova solução, perturbada, das equações de campo.

Para obtermos eq. (2.38), precisamos entender o tensor de Riemann. O tensor de Riemann é um tensor de quarta ordem que mede a taxa na qual vetores se curvam quando movidos em uma variedade, ou seja, como eles se desviam do comportamento esperado em um espaço plano. Ele vai descrever a curvatura intrínseca de um espaço-tempo ou variedade n-dimensional. Vamos denotar o tensor de Riemann como

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}. \quad (2.48)$$

Como  $g^{\beta\mu} g_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha}^{\beta}$  e que  $\delta_{\alpha}^{\beta}$  é invariante, podemos explicitar o tensor de Riemann e aplicar a variação em suas conexões. Considere:

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \rightarrow \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \delta \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}, \quad (2.49)$$

e como  $\delta \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$  é a diferença entre duas conexões métricas, por sua vez,  $\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$  é um tensor. Desta forma, variando o tensor de Riemann,

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \delta \left( \partial_{\mu} \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \right) - \delta \left( \partial_{\nu} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \right) + \delta \left( \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} \right) - \delta \left( \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} \right). \quad (2.50)$$

Analisando a eq. (2.50) é fácil observar que na verdade há uma relação entre a derivada covariante e a variação das conexões tal que,  $\delta(\nabla_i \Gamma_{kl}^j) = \nabla_i(\delta\Gamma_{kl}^j)$ , isto é

$$\nabla_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) = \partial_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\lambda) - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda(\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(\delta\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha), \quad (2.51)$$

e

$$\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) = \partial_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\lambda) - \Gamma_{\beta\nu}^\lambda(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\delta\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha). \quad (2.52)$$

Todavia, note que a partir da propriedade de Leibniz

$$-\Gamma_{\beta\mu}^\lambda(\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha) = \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\lambda) - \delta(\Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha), \quad (2.53)$$

e devido a simetria do tensor de Riemann, podemos reescrever  $\Gamma_{\beta\mu}^\lambda(\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha)$  aparecendo em eq. (2.51) e em eq. (2.52). Subtraindo a eq. (2.51) da eq. (2.52),

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) &= \partial_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\lambda) + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\lambda) + \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(\delta\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha) \\ &\quad - \partial_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\lambda) - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\lambda) - \delta(\Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\delta\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha). \end{aligned}$$

Como alguns termos se anulam, ficamos com:

$$\nabla_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) = \partial_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - \partial_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) + \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda) - \delta(\Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda) + (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)(\delta\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha). \quad (2.54)$$

Como  $(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)(\delta\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha) = 0$ , logo:

$$\nabla_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) = \partial_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - \partial_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) + \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda) - \delta(\Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda). \quad (2.55)$$

Se manipularmos os índices das conexões na eq. (2.50), veremos que (2.50) = (2.55), ou melhor

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha), \quad (2.56)$$

que também é conhecida como Equação de Palatini. Com isto, finalmente podemos chegar ao tensor de Ricci contraindo  $\delta R_{\beta\mu\nu}^\alpha$

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^\alpha \rightarrow \delta_\alpha^\beta \delta R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \nabla_\beta(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\beta) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\beta), \quad (2.57)$$

ou,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\beta(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\beta) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\beta\mu}^\beta). \quad (2.58)$$

Agora, substituindo as equações (2.47) e (2.58) em (2.35)

$$\begin{aligned} \delta S_G = & \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_\beta (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta) \right] \end{aligned}$$

e fazendo  $g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta = A^\beta$  e  $g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta = B^\nu$ , utilizando ainda o teorema da divergência

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[ \partial_\beta A^\beta - \partial_\nu B^\nu \right] = 0, \quad (2.59)$$

supondo que estamos integrando por todo o espaço, a equação eq. (2.59) assume a forma:

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] = 0. \quad (2.60)$$

Assim, explicitamos o tensor de Einstein

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] = 0 \mapsto R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.61)$$

Isto é,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.62)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é comumente chamado de tensor de Einstein. Ele descreve a curvatura do espaço-tempo devido à geometria local.

Retornando para eq. (2.31), precisamos calcular a variação da ação com respeito a matéria. Como visto, pelo princípio da mínima ação ( $\delta S = \delta S_G + \delta S_M = 0$ ).

O tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  descreve como a densidade de matéria, a pressão, o fluxo de momento e a densidade de energia estão distribuídos no espaço e no tempo, ele é definido como:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \quad (2.63)$$

Dessa forma a variação da densidade Lagrangeana  $\delta \mathcal{L}_m$  é dada por:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} T_{\mu\nu}. \quad (2.64)$$

Logo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.65)$$

De maneira geral, a equação de campo de Einstein é escrita como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.66)$$

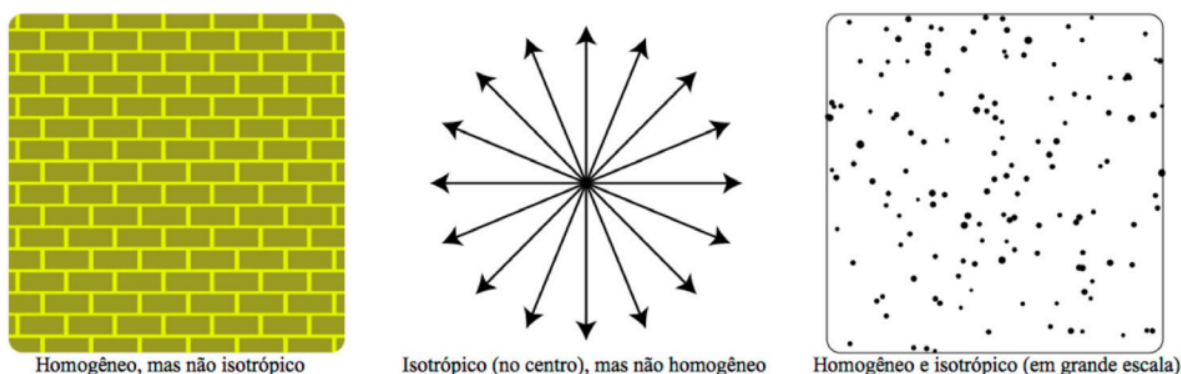
# Cosmologia

A cosmologia é o ramo da ciência que estuda a origem, evolução e estrutura do universo como um todo. Ela busca compreender as leis fundamentais que regem o universo, suas propriedades físicas, a distribuição de matéria e energia, a formação e evolução das galáxias, estrelas, planetas e outros objetos celestes. Como um campo científico interdisciplinar, tem sido objeto de fascínio e exploração há séculos. Compreender a origem, a evolução e a estrutura do universo é um dos maiores desafios intelectuais da humanidade.

Este capítulo tem como objetivo fornecer uma visão geral abrangente do campo da cosmologia, estabelecendo as bases conceituais e teóricas necessárias para a compreensão da pesquisa subsequente.

## 3.1 O princípio cosmológico

O princípio cosmológico é um dos pilares fundamentais da cosmologia moderna. Ele afirma que, em larga escala, o universo é caracterizado por sua homogeneidade e isotropia. Em outras palavras, as propriedades físicas do universo, como densidade e temperatura são uniformes em todas as direções (isotropia) e em todos os pontos do espaço (homogeneidade).[38]. O princípio cosmológico sugere que não existem pontos privilegiados no universo, e que sua estrutura e propriedades são as mesmas em qualquer lugar que se observe. Ilustrações destes conceitos na Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Exemplificação da Homogeneidade e Isotropia. Imagem: IAG/USP

É importante ressaltar que a homogeneidade não implica a isotropia e vice-versa. Para ilustrar, considere um universo com um campo magnético uniforme. Ele é homogêneo, já que todos os pontos são idênticos, mas não é isotrópico, pois as direções ao longo das linhas de campo se distinguem das direções perpendiculares a elas. Por outro lado, uma distribuição esfericamente simétrica, vista do seu ponto central, é isotrópica, mas não necessariamente homogênea. No entanto, o princípio cosmológico exige necessariamente que tratemos, em larga escala, de uma distribuição homogênea e isotrópica.

De acordo com as informações recentes provenientes do Sloan Digital Sky Survey (SDSS-III), a escala na qual o universo apresenta as propriedades de homogeneidade e isotropia é acima de  $64,3 \pm 1,6 h^{-1} \text{Mpc}$  [49].

## 3.2 A expansão do Universo

A velocidade com que uma galáxia se move é medida através do desvio observado em seu comprimento de onda. O desvio para o vermelho, do termo em inglês redshift é basicamente o efeito Doppler aplicado às ondas de luz de fontes que se afastam. Se uma galáxia está se movendo em nossa direção, as ondas de luz se aglomeram, aumentando a frequência. Como a luz azul está na extremidade de alta frequência do espectro visível, esse efeito de aproximação é conhecido como desvio para o azul. Se a galáxia está se afastando, o comprimento de onda emitido por ela se aproxima da extremidade vermelha do espectro, sendo esse efeito conhecido como desvio para o vermelho, ou redshift [38].

Consideremos uma galáxia cujo comprimento de onda medido em um laboratório aqui na Terra é  $\lambda_{em}$ . O comprimento de onda que medimos observacionalmente para a mesma galáxia distante  $\lambda_{ob}$ , não será, em geral, o mesmo. Dizemos que a galáxia tem um redshift  $z$ , dado pela fórmula

$$z \equiv \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (3.1)$$

O fato de que as galáxias apresentam um desvio para o vermelho, em vez de azul, não era conhecido até o século XX. Em 1912, Vesto Slipher, no Observatório Lowell, mediu o comprimento de onda da galáxia Andrômeda (M31), ele notou que ela apresentava um desvio para o azul, portanto estaria se aproximando de nós. Continuando sua pesquisa, em 1925, Slipher tinha medido o redshift para aproximadamente 40 galáxias, descobrindo que elas estavam quase todas se afastando de nós, com exceção das que estavam dentro do Grupo Local.

Em 1927, George H. Lemaître propôs um modelo do universo que indicava sua expansão. Ele documentou essa ideia em um artigo publicado nos anais da Sociedade Científica de Bruxelas. Dois anos depois, em 1929, Edwin Hubble também concluiu que a maioria das galáxias se afasta de nós, e essa recessão parece acelerar quanto mais distantes estão [33]. Inicialmente, a expansão do universo foi atribuída apenas a Hubble, mas atualmente reconhecemos que Lemaître também merece crédito. A relação linear entre a distância e a velocidade de recessão das galáxias é conhecida como Lei de Hubble-Lemaître, conforme ilustrado no gráfico da Figura (3.2), essa relação é dada por:

$$v = H_0 r, \quad (3.2)$$

onde  $v$  é a velocidade de recessão,  $r$  é a distância e  $H_0$  é a constante de Hubble, nomeada em homenagem ao Hubble.

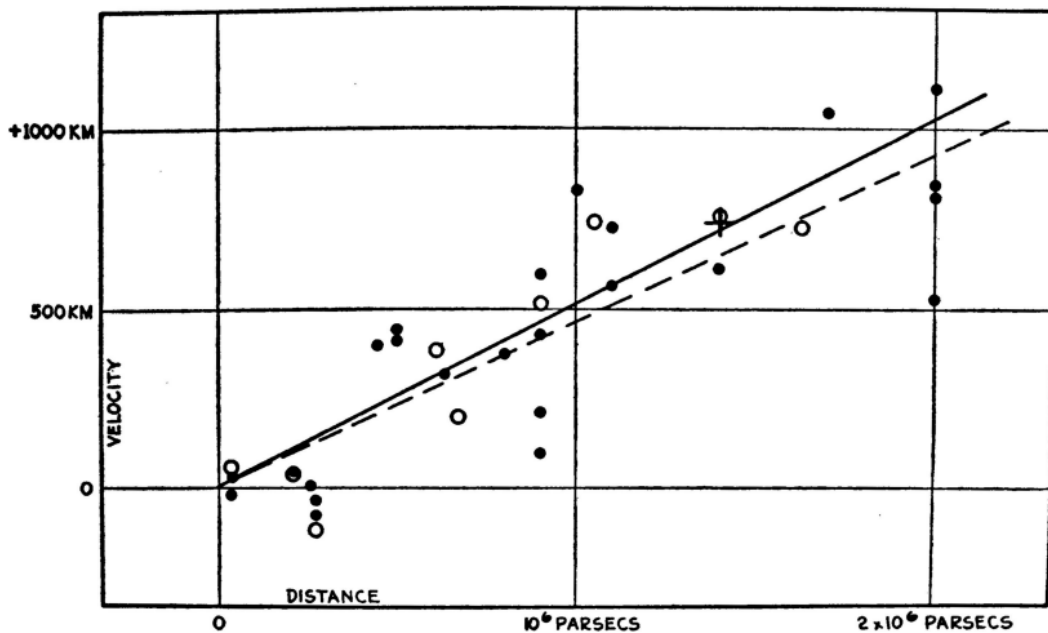


Figura 3.2: Figura 1 do artigo original de Hubble [33]

O valor de  $H_0$  determinado por Hubble em 1929 era da ordem de:

$$H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}. \quad (3.3)$$

A colaboração Planck foi uma missão da Agência Espacial Europeia (ESA) que tinha como objetivo mapear com alta precisão a radiação cósmica de fundo (CMB na sigla em inglês), que é a radiação remanescente do Big Bang que preenche todo o universo. Ela foi capaz de

medir a constante de Hubble indiretamente através da análise das anisotropias na temperatura da CMB em diferentes pontos do céu. Essas anisotropias são causadas por flutuações iniciais de densidade no universo primitivo e fornecem informações cruciais sobre a origem e a evolução do cosmos. A estimativa obtida pelo Planck [1] para a constante  $H_0$  com alta precisão foi de

$$H_0 = 67,8 \pm 0,9 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (3.4)$$

Já o Telescópio Espacial Hubble (HST) mede a constante de Hubble usando a técnica da "escada de distâncias cósmicas". Essa abordagem combina várias etapas, incluindo a medição de Cefeidas em galáxias próximas e o uso de supernovas tipo Ia em galáxias distantes. O HST também mede o redshift para determinar as velocidades de recessão das galáxias. Combinando essas medidas, o HST obtém uma estimativa precisa da taxa de expansão atual do universo [52] que gira em torno do valor

$$H_0 = 73,24 \pm 1,74 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (3.5)$$

A discrepância dos valores da constante  $H_0$  medidos pelo Planck e pelo HST gerou uma tensão na comunidade científica, pois ambos os experimentos são considerados altamente precisos e confiáveis. A diferença nos resultados sugere que podem existir fontes de erro não identificadas ou aspectos não compreendidos completamente em suas metodologias [40]. A tensão em torno do valor de  $H_0$  tem motivado pesquisas adicionais e esforços para reduzir as incertezas nas medições, bem como explorar novas abordagens e combinações de diferentes conjuntos de dados para alcançar uma convergência mais sólida e uma melhor compreensão da expansão do universo. À medida que novos experimentos e observações são realizados, espera-se que essa tensão seja esclarecida e que uma estimativa mais precisa e concordante da constante de Hubble seja obtida.

Para entendermos como funciona a expansão em um universo homogêneo e isotrópico, precisamos introduzir um novo conceito: o fator de escala  $a(t)$ . Um clássico exemplo lúdico de como o fator de escala vai atuar em uma expansão homogênea e isotrópica é a do bolo de passas. Suponha que você coloque duas uvas-passas próximas uma da outra em uma massa de bolo antes de ir ao forno. A distância entre elas é representada por " $r_{12}(t_0)$ ". Conforme o tempo passa e a fermentação age no bolo, o fator de escala  $a(t)$  entra em ação. A expressão

$$r_{12}(t) = a(t) \cdot r_{12}(t_0), \quad (3.6)$$



nos diz que a distância entre as duas uvas-passas no tempo atual  $t$ , representada por “ $r_{12}(t)$ ”, é igual ao fator de escala “ $a(t)$ ” multiplicado pela distância inicial “ $r_{12}(t_0)$ ”. Isso significa que à medida que o bolo cresce ( $a(t) > 1$ ), a distância entre as uvas-passas aumenta proporcionalmente. Se o fator de escala diminuir ( $a(t) < 1$ ), o bolo estaria se contraindo e as uvas-passas estariam se aproximando uma da outra. Essa expressão nos mostra como a distância entre duas galáxias, ilustrada pelas uvas-passas, é afetada pela expansão do universo, conforme descrito pelo fator de escala. Em resumo, o fator de escala nos informa como a expansão (ou possivelmente contração) do universo depende do tempo. À medida que o universo expande, as galáxias se afastam uma da outra, e a expressão “ $r_{12}(t)$ ” nos permite calcular essa distância em diferentes momentos.

Em qualquer momento  $t$ , um observador na galáxia 1 verá a galáxia 2 se afastando com uma velocidade.

$$v_{12}(t) = \frac{dr_{12}}{dt} = \dot{a}r_{12}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{12}(t). \quad (3.7)$$

Uma vez que esse argumento pode ser aplicado a qualquer dupla de galáxias, isso implica que em qualquer universo onde a distribuição de galáxias esteja passando por uma expansão homogênea e isotrópica, a relação entre velocidade e distância assume a forma linear

$$v = Hr, \quad (3.8)$$

com  $H = \dot{a}/a$  desempenhando o papel da constante de Hubble.

### 3.3 Métrica de Friedmann Lemaître Robertson Walker (FLRW)

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) foi formulada com base nas contribuições dos cientistas Alexander Friedmann, Georges Lemaître e a dupla Howard Robertson e Arthur Walker. No início do século XX, Friedmann e Lemaître propuseram soluções para as equações da Relatividade Geral que descreviam um universo em expansão. Posteriormente, Robertson e Walker desenvolveram uma forma mais geral da métrica para o universo em expansão, incluindo os casos de curvatura espacial nula, positiva e negativa. A métrica FLRW é uma das métricas mais importantes utilizadas na cosmologia para descrever a geometria do universo em larga escala. Ela é usada para modelar a expansão homogênea e isotrópica

do universo, conforme previsto pelas equações da teoria da Relatividade Geral de Einstein. A saber, o elemento de linha em coordenadas esféricas é escrito como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (3.9)$$

onde:  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $a(t)$  é o fator de escala,  $k$  é o parâmetro de curvatura espacial que pode assumir três valores distintos que classificam o tipo de universo:

$k = 0 \rightarrow$  universo plano e com dimensões infinitas;

$k = 1 \rightarrow$  universo esférico com dimensões finitas (fechado);

$k = -1 \rightarrow$  universo hiperbólico, aberto e infinito.

A métrica FLRW pode ser escrita na forma matricial como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Por questões de simplificação, vamos usar  $c^2 = 1$ . A partir do elemento de linha da equação (3.9) podemos obter as equações dinâmicas do universo, em escala cosmológica. Para isso, iremos apenas aplicar a métrica FLRW na equação de campo da gravitação utilizando o formalismo métrico.

### 3.3.1 Calculando as Conexões e tensores

A partir da métrica (3.10) identificamos os seguintes componentes:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1; \\ g_{11} &= \frac{a(t)^2}{1 - kr^2}; \\ g_{22} &= a(t)^2 r^2; \\ g_{33} &= a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pela eq. (2.26), podemos calcular as conexões não nulas para a métrica FLRW:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00} (\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} \right] = \frac{a(t)\dot{a}}{1 - kr^2}; \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00} (\partial_2 g_{02} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(t)^2] r^2 = r^2 a(t)\dot{a}; \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{00} (\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(t)^2] r^2 \sin^2 \theta = r^2 a(t)\dot{a} \sin^2 \theta; \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11} (\partial_1 g_{10} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{01}) = \frac{(1 - kr^2)}{2a(t)^2} \frac{d}{dt} [a(t)^2] \frac{1}{(1 - kr^2)} = \frac{\dot{a}}{a(t)}; \quad (3.15)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{(1 - kr^2)}{2a(t)^2} a(t)^2 \frac{d}{dr} (1 - kr^2)^{-1} = \frac{kr}{1 - kr^2}; \quad (3.16)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11} (\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = -\frac{(1 - kr^2)}{2a(t)^2} a(t)^2 \frac{d}{dr} [r^2] = -r (1 - kr^2); \quad (3.17)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11} (\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) = -\frac{(1 - kr^2)}{2a(t)^2} a(t)^2 \sin^2 \theta \frac{d}{dr} [r^2] = -r \sin^2 \theta (1 - kr^2); \quad (3.18)$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22} (\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{02} - \partial_2 g_{20}) = \frac{r^2}{2a(t)^2 r^2} \frac{d}{dt} [a(t)^2] = \frac{\dot{a}}{a(t)}; \quad (3.19)$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{21}) = \frac{a(t)^2}{2a(t)^2 r^2} \frac{d}{dr} [r^2] = \frac{1}{r}; \quad (3.20)$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22} (\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) = -\frac{1}{2a(t)^2 r^2} a(t)^2 r^2 \frac{d}{d\theta} [\sin^2 \theta] = -\sin \theta \cos \theta; \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33} (\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{03} - \partial_3 g_{30}) = \frac{1}{2} \frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dt} [a(t)^2] r^2 \sin^2 \theta = \frac{\dot{a}}{a}; \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33} (\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}) = \frac{1}{2} \frac{a(t)^2 \sin^2 \theta}{a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dr} (r^2) = \frac{1}{r}; \quad (3.23)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{33} (\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{23}) = \frac{1}{2a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta} a(t)^2 r^2 \frac{d}{d\theta} [\sin^2 \theta] = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta; \quad (3.24)$$

A partir do cálculo das componentes, podemos obter o tensor de Ricci para cada coordenada da métrica FLRW. Como vimos anteriormente na eq. (2.57), podemos obter o tensor de Ricci a partir da contração dos índices  $\alpha$  e  $\beta$  no tensor de Riemann, eq. (2.48). A contração é feita multiplicando-se o tensor de Riemann por um tensor pelo tensor métrico  $g^{\alpha\beta}$ , que é a matriz inversa do tensor  $g_{\mu\nu}$ . Realizamos a contração da seguinte forma:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} g^{\alpha\beta} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

O tensor de Ricci resultante,  $R_{\mu\nu}$ , tem apenas dois índices e descreve como a curvatura do espaço-tempo é influenciada pela distribuição de massa e energia. Vale ressaltar que, em um espaço-tempo com simetria esférica ou esfericamente simétrica, o tensor de Ricci tem um número reduzido de componentes independentes, o que torna mais fácil a solução das equações. De maneira geral, escrevemos o tensor de Ricci como:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha, \quad (3.26)$$

onde  $\alpha \neq \lambda$ . Como os índices  $\alpha$  e  $\lambda$  não necessariamente coincidirão, os termos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha, \quad (3.27)$$

podem ser melhor analisados para cada coordenada  $t, r, \theta$  e  $\phi$  considerando a Tabela (3.1).

Coordenada $t$	Coordenada $r$	Coordenada $\theta$	Coordenada $\phi$
$\Gamma_{\mu\nu}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{\mu 0}^0 \Gamma_{\nu 0}^0$	$\Gamma_{\mu\nu}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{\mu 1}^1 \Gamma_{\nu 1}^1$	$\Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{\mu 2}^2 \Gamma_{\nu 2}^2$	$\Gamma_{\mu\nu}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{\mu 3}^3 \Gamma_{\nu 3}^3$
$\Gamma_{\mu\nu}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{\mu 0}^0 \Gamma_{\nu 0}^1$	$\Gamma_{\mu\nu}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{\mu 1}^1 \Gamma_{\nu 1}^0$	$\Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{\theta 0}^0 - \Gamma_{\mu 2}^2 \Gamma_{\nu 2}^0$	$\Gamma_{\mu\nu}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{\mu 3}^3 \Gamma_{\nu 3}^0$
$\Gamma_{\mu\nu}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{\mu 0}^0 \Gamma_{\nu 0}^2$	$\Gamma_{\mu\nu}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{\mu 1}^1 \Gamma_{\nu 1}^2$	$\Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{\mu 2}^2 \Gamma_{\nu 2}^1$	$\Gamma_{\mu\nu}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{\mu 3}^3 \Gamma_{\nu 3}^1$
$\Gamma_{\mu\nu}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{\mu 0}^0 \Gamma_{\nu 0}^3$	$\Gamma_{\mu\nu}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{\mu 1}^1 \Gamma_{\nu 1}^3$	$\Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{\mu 2}^2 \Gamma_{\nu 2}^3$	$\Gamma_{\mu\nu}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{\mu 3}^3 \Gamma_{\nu 3}^2$

**Tabela 3.1:** Relações de conexão para as coordenadas comóveis nos casos em que  $\alpha \neq \lambda$

Usando a expressão das conexões de Christoffel, vamos calcular as componentes do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  uma a uma. Para a coordenada temporal,  $R_{tt}$ , com auxílio da Tabela (3.1) verificamos que:

$$\begin{aligned} R_{tt} = R_{00} &= -\frac{d}{dt} \left( \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 \right) - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \\ &= 3 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] \\ &= -\frac{3\ddot{a}}{a} = \frac{3\ddot{a}}{a} g_{00}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Relembrando que  $t$  representa a componente temporal. Os outros índices  $r$ ,  $\theta$ , e  $\phi$  compõem o conjunto de coordenadas esféricas. Para a coordenada radial,  $R_{11}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 \\
&= \frac{d}{dt} [a(t)\dot{a}] \frac{1}{(1-kr^2)} - 2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - \frac{2}{r^2} \\
&= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} \\
&= \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{11}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Seguindo o mesmo procedimento, o tensor de Ricci nas coordenadas  $\theta$  e  $\phi$  é escrito como:

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{22}, \tag{3.30}$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{33}. \tag{3.31}$$

Observe que o tensor de Ricci respectivo a cada coordenada pode ser escrito em termos da função métrica associada àquela mesma coordenada comóvel eq. (3.11). E ainda, analisando as equações (3.29), (3.30) e (3.31), vemos que elas podem ser descritas por uma relação genérica, associada apenas às coordenadas  $r, \theta$  e  $\phi$ :

$$R_{ij} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{ij}, \tag{3.32}$$

se  $i \neq j$ ,  $R_{ij} = 0$ . Recorde que  $i = j$  deve coincidir apenas com as coordenadas  $r, \theta$  e  $\phi$ , como dito anteriormente. Por fim, como o escalar de Ricci é determinado mediante a contração do tensor de Ricci com a métrica, podemos escrevê-lo, também, em termos da métrica FLRW, como segue:

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= -g^{11} \frac{3\ddot{a}}{a} g_{11} - g^{11} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{11} - g^{22} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{22} - g^{33} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{33} \\
&= 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Como o parâmetro de Hubble se relaciona com o fator de escala,  $H = \dot{a}/a$ , as equações (3.28), (3.32) e (3.33) podem ser escritas em termos de  $H$  :

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, R_{ij} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + \frac{2k}{a^2} \right) g_{ij} \quad \text{e} \quad R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \quad (3.34)$$

Agora temos todas as relações pertinentes para desenvolvermos as equações de Friedmann para a Gravidade de Einstein.

## 3.4 Equações de Friedmann: Origem e Derivação

As equações de Friedmann desempenham um papel central na cosmologia, permitindo-nos descrever a evolução do universo com base na relatividade geral. Essas equações foram formuladas por Alexander Friedmann, um matemático e físico russo, em 1922, e são fundamentais para entender a expansão do universo e sua história cósmica [25, 61].

As equações de Friedmann encontram suas raízes na teoria da Relatividade Geral, introduzida por Einstein em 1915. A partir das soluções que Einstein derivou para essa teoria, Friedmann posteriormente deduziu as equações essenciais que regem a evolução de um universo homogêneo e isotrópico. Para entender como as equações foram derivadas, vamos acompanhar o passo a passo do processo.

Iniciamos considerando um universo homogêneo e isotrópico, e calculamos o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  usando a seguinte relação:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.35)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci e  $R$  é o escalar de curvatura. Conforme calculado previamente, determinamos os únicos elementos não nulos do tensor e escalar de Ricci (consulte a equação (3.34)). Agora, podemos empregar essas informações de maneira direta para efetuar o cálculo das componentes pertinentes do tensor  $G_{\mu\nu}$ . Para a componente  $G_{00}$ :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + k\frac{1}{a^2} \right) = 3 \left( H^2 + k\frac{1}{a^2} \right). \quad (3.36)$$

Para as componentes  $G_{ij}$ :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2k\frac{1}{a^2}\right)g_{ij} - 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + k\frac{1}{a^2}\right)g_{ij}. \quad (3.37)$$

Logo,

$$G_{ij} = -g_{ij}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + k\frac{1}{a^2}\right). \quad (3.38)$$

Agora, podemos usar as componentes calculadas do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  e relacioná-las com o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

Para as coordenadas temporais  $G_{00}$  e  $T_{00}$  temos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}T_{00} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.40)$$

A equação (3.40) é conhecida como equação de Friedmann. Agora para  $G_{ij}$  e  $T_{ij}$ , temos:

$$-g_{i,j}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + k\frac{1}{a^2}\right) = 8\pi GT_{ij}, \quad (3.41)$$

que é chamada de equação da aceleração. Por fim, precisamos apenas calcular as componentes do tensor energia-momento  $T_{00}$  e  $T_{ij}$  para chegar a forma final das equações. Vamos considerar um fluido perfeito, onde cada partícula é observada como em repouso em um dado ponto do espaço-tempo. Isso significa que o tensor energia-momento para o fluido é diagonal e a energia e a pressão são definidas em relação ao observador local, o tensor energia-momento de um fluido perfeito é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.42)$$

onde  $\rho$  representa a densidade de matéria do fluido, e  $p$  sua pressão. Para a Componente  $T_{00}$  a suposição de homogeneidade implica que a densidade de energia é a mesma em todos os pontos do universo. Assim, a componente  $T_{00}$  deve ser proporcional à densidade de energia  $\rho$  no universo:

$$T_{00} = \rho(t). \quad (3.43)$$

Para as componentes  $T_{ij}$  a suposição de isotropia implica que não há direção preferencial no espaço. Portanto, a pressão também deve ser a mesma em todas as direções. Em um universo em expansão, a pressão também pode diminuir devido à expansão do espaço. Assim, podemos

escrever as componentes  $T_{ij}$  como sendo proporcionais à pressão  $p$  multiplicada pelo tensor métrico  $g_{ij}$ , que representa a geometria do espaço:

$$T_{ij} = p(t)g_{ij}. \quad (3.44)$$

Essa é uma simplificação que assume uma equação de estado simples para a matéria, onde a pressão é proporcional à densidade de energia, como no caso de um fluido não-relativístico. Combinando as equações acima, a equação de Friedmann fica:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.45)$$

enquanto a equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.46)$$

### 3.4.1 Conteúdo material do universo

A equação de continuidade, também conhecida como equação de conservação para fluidos, é uma das equações fundamentais da cosmologia e vai descrever como a densidade de energia de uma determinada componente do universo (como matéria, radiação, etc.) varia à medida que o universo se expande. Vamos considerar:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.47)$$

Ela reflete a conservação da energia e do momento, ou seja, a taxa de mudança da densidade de energia em um ponto do espaço-tempo é igual ao fluxo de energia que sai ou entra nesse ponto. Agora, vamos considerar a equação de estado de um fluido relaciona sua pressão com sua densidade de energia, geralmente, essa relação é escrita como:

$$p = w\rho c^2, \quad (3.48)$$

onde  $w$  é o parâmetro de equação de estado, que pode variar dependendo do tipo de fluido em questão, como dito anteriormente, faremos  $c^2 = 1$ . Dessa forma, aplicando o tensor energia-



momento de um fluido perfeito eq. (3.42) à componente temporal da equação (3.47) junto a definição (3.48), temos a equação diferencial:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + w\rho) = 0. \quad (3.49)$$

Resolvendo-a, obtemos:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}, \quad (3.50)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade hoje. O universo é composto por uma variedade de materiais e substâncias. No entanto, é possível tratar as diferentes partes do fluido cósmico como se não interagissem entre si. Isso significa que cada uma dessas partes satisfaz uma equação de continuidade independentemente, o que, por consequência, leva a cada componente tendo sua própria equação de estado [36]

$$\rho(t) = \sum_i \frac{\rho_{0i}}{a^{3(1+w_i)}}. \quad (3.51)$$

Na cosmologia consideramos que as componentes de matéria, sendo não-relativísticas, possuem pressão não nula, e são descritas com  $w_m = 0$ , dessa forma, podemos ver que a densidade de matéria não relativística no universo se comporta como:

$$\rho_m(t) = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (3.52)$$

Esse resultado indica que a densidade diminui proporcionalmente ao volume do Universo. É muito natural que, se o volume do Universo aumentar em um fator, digamos dois, então a densidade da matéria deve cair pelo mesmo fator [38]. Para partículas que estão se movendo próximo à velocidade da luz, a pressão pode ser significativa em comparação com a densidade de energia. Para radiação, como fótons, o valor de  $w$  é  $1/3$ , o que resulta na evolução

$$\rho_r(t) = \frac{\rho_0}{a^4}. \quad (3.53)$$

Uma forma de relacionar o fator de escala  $a(t)$  com o desvio para o vermelho  $z$  é por meio da definição  $a(t) = (1+z)^{-1}$ , assim o tempo presente corresponde a  $z=0$ , com essa definição, e tendo  $H = \dot{a}/a$ , relacionamos o redshift com o tempo cósmico  $t$ . Considerando o caso onde a curvatura espacial é nula ( $k = 0$ ), a eq.(3.45) nos leva ao que chamamos de densidade crítica do universo:

$$\rho_{c,0}(t) \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (3.54)$$

O parâmetro de densidade de cada componente é definido como a razão entre a densidade dessa componente e a densidade crítica do universo

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}. \quad (3.55)$$

Dessa forma, a equação (3.45), reescrita em termos dos parâmetros de densidade, é dada por:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m,r}(t) - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (3.56)$$

### 3.4.2 O parâmetro de desaceleração $q(t)$

O parâmetro de desaceleração ( $q$ ) desempenha um papel crucial na compreensão da dinâmica da expansão do universo ao longo do tempo [38]. Ele é uma medida da taxa de desaceleração da expansão cósmica e nos oferece dicas importantes sobre como o universo está evoluindo em resposta às forças gravitacionais e às diferentes formas de energia presentes nele. Ele é definido como:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}. \quad (3.57)$$

Se  $q$  for positivo, isso significa que a expansão está desacelerando, enquanto se  $q$  for negativo, a expansão está acelerando. É possível obter a relação entre o parâmetro de desaceleração e a equação de Friedmann, dessa forma:

$$q(t) = \frac{1}{2} \sum \Omega_i(1 + 3w_i), \quad (3.58)$$

onde cada termo  $\Omega_i$  reflete a fração da densidade crítica associada a uma determinada componente do universo.

## 3.5 O setor Escuro

### 3.5.1 Matéria Escura

Fritz Zwicky, um astrônomo e astrofísico suíço-americano, foi um dos primeiros a investigar o Aglomerado de Coma, uma concentração de centenas de galáxias a cerca de 320

milhões de anos-luz da Terra. Zwicky era conhecido por seu estilo de pesquisa incisivo e suas contribuições em diversas áreas da astrofísica. Enquanto estudava as galáxias dentro do Aglomerado de Coma, Zwicky fez uma observação notável: as velocidades das galáxias individuais dentro do aglomerado eram muito maiores do que o esperado com base nas estimativas da quantidade de matéria visível presente, principalmente em forma de estrelas e gás. De acordo com as leis da gravitação de Newton, e pelo teorema do virial, essas galáxias deveriam ser ejetadas para longe do aglomerado devido à alta velocidade. No entanto, o aglomerado permanecia coeso, o que sugeria que uma quantidade significativa de massa adicional, não visível, estava exercendo uma influência gravitacional para manter as galáxias unidas. Zwicky observou que a quantidade de matéria visível não era suficiente para explicar as órbitas das galáxias dentro do aglomerado [8].

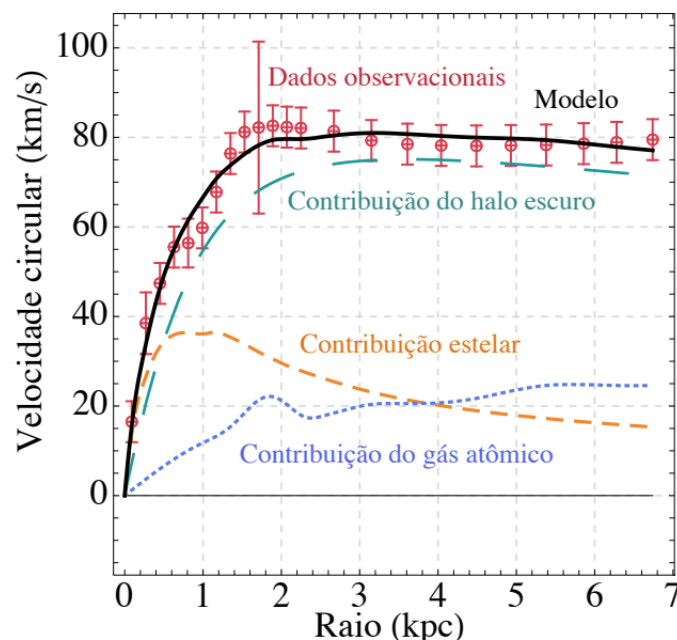
Em 1933, publicou um artigo intitulado "Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln" ("O Desvio para o Vermelho de Nebulosas Extragalácticas") [68], no qual apresentou suas descobertas e especulou sobre a presença dessa "massa invisível". Ele postulou que essa massa extra, não visível, poderia ser responsável pelas velocidades observadas das galáxias no Aglomerado de Coma. Zwicky utilizou o termo "massa faltante" para se referir a essa matéria invisível e pesquisou seu efeito em outros aglomerados de galáxias também. No entanto, sua proposta encontrou resistência e ceticismo na época, pois a ideia de uma forma de matéria que não interagisse com a luz era altamente incomum e desafiava as compreensões convencionais da física.

Em meados de 1960 a astrônoma Vera Rubin iniciou seu trabalho sobre a curva de rotação das galáxias. Assim como ilustrado na figura (3.3), essa curva de rotação é uma representação gráfica que mostra como a velocidade das estrelas (ou do gás) na galáxia varia em relação à distância do centro. De acordo com a mecânica newtoniana, espera-se que a velocidade das estrelas diminua à medida que nos afastamos do centro, devido à influência gravitacional da matéria contida mais internamente. No entanto, o que Vera Rubin observou ao estudar as curvas de rotação de muitas galáxias foi surpreendente: em vez de diminuir conforme se afastavam do centro, as velocidades das estrelas permaneciam relativamente constantes nas regiões externas da galáxia [58]. Isso se tornou conhecido como "curva de rotação plana".

A constatação da curva de rotação plana indicava algo intrigante: a quantidade de matéria visível, como estrelas e gás, não era suficiente para explicar as altas velocidades observadas nas regiões exteriores das galáxias [10, 54]. De acordo com as leis da gravidade, essa alta velocidade só poderia ser alcançada se houvesse mais massa presente do que aquela

que era visível. As curvas de rotação plana foram particularmente evidentes em galáxias espirais, como a Via Láctea, onde as velocidades das estrelas nas bordas externas estavam muito além do que seria esperado com base na quantidade de matéria bariônica. Esse fenômeno não podia ser explicado pela física convencional. A única explicação plausível era a presença de uma quantidade substancial de matéria invisível, exercendo uma influência gravitacional nas regiões exteriores da galáxia [58].

Dadas estas evidências, consolida-se o conceito de matéria escura, um tipo de matéria não visível que aparece como uma forma de explicar certas anomalias gravitacionais observadas em galáxias e aglomerados de galáxias. A matéria escura é uma forma de matéria que não emite, absorve ou reflete luz, e, portanto, não pode ser detectada diretamente por observações astronômicas tradicionais [8]. No entanto, ela exerce uma influência gravitacional sobre a matéria bariônica. A referência [31] mostra na figura (3.3) a curva de rotação com dados da galáxia UGC 05721 [37], os pontos vermelhos com barras de erro são os dados observacionais da velocidade circular, a curva pontilhada azul é a contribuição do gás atômico, a curva alaranjada é a contribuição da parte estelar, a curva esverdeada é a contribuição do halo de matéria escura e a curva preta é o melhor ajuste do modelo completo que contém a matéria bariônica e a matéria escura.



**Figura 3.3:** Exemplo de curva de rotação para a galáxia UGC 05721 [31]

Existem outras evidências da existência de matéria escura no universo [9]. Entre as mais comuns, a primeira envolve a distribuição de massa nos aglomerados de galáxias. Essa distribuição não corresponde à quantidade de matéria visível detectável [19]. A presença da

matéria escura explica a gravidade adicional necessária para manter a coesão desses aglomerados. Outra indicação vem das lentes gravitacionais. A matéria escura pode curvar a luz de objetos mais distantes, gerando um fenômeno conhecido como lente gravitacional [17]. Isso nos permite inferir a existência de matéria escura com base nas distorções observadas na luz de fundo. Além disso, ao voltarmos ao passado para compreender a formação das estruturas do universo, simulações computacionais que incorporam a matéria escura conseguem reproduzir a criação das estruturas cósmicas observadas. Isso abrange a maneira como galáxias e aglomerados se agrupam [65].

A quantidade exata de matéria escura no universo atualmente não é conhecida com precisão. Estima-se que ela compõe cerca de 26,4% da densidade de energia total do universo ou, equivalentemente, 84,4% do conteúdo total de matéria do universo, de acordo com os resultados do Planck da Agência Espacial Europeia [2], que analisou a radiação cósmica de fundo e outras observações, como a matéria escura não pode ser detectada diretamente através de observações de luz visível ou outros tipos de radiação eletromagnética. Sua presença é inferida por meio de suas interações gravitacionais e como ela afeta o comportamento da matéria visível.

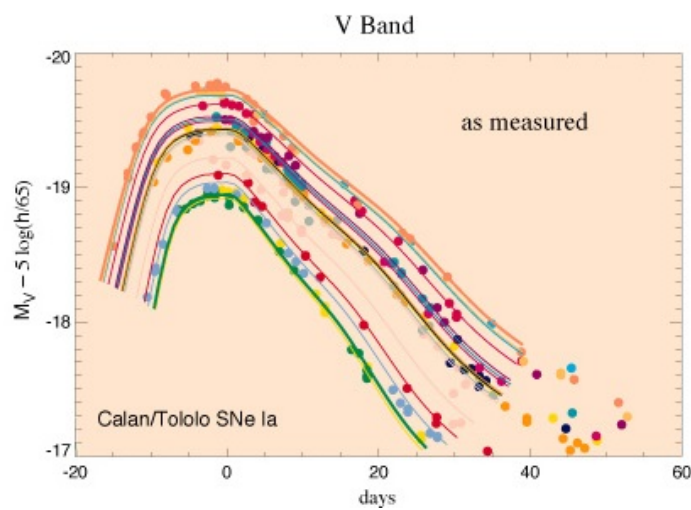
Dos principais modelos de matéria escura que temos na literatura, o mais conhecido é o da matéria escura fria (CDM, do inglês Cold Dark Matter). Neste modelo, a matéria escura é composta por partículas massivas que se movem a velocidades relativamente baixas [3]. Essa lentidão permite que elas se aglomerem e formem estruturas em grande escala, como galáxias e aglomerados de galáxias [46]. O modelo CDM tem sido bem-sucedido em explicar muitas das características observadas das estruturas cósmicas. No entanto, apresenta algumas discrepâncias. Por exemplo, em pequenas escalas a quantidade de galáxias é menor do que o esperado. Também existe o modelo de matéria escura quente (HDM, do inglês Hot Dark Matter). Aqui a matéria escura é composta por partículas menos massivas que se movem a velocidades relativamente altas [24], porém isso faria com que a matéria não se aglomerasse da mesma forma que a matéria escura fria, e isso teria implicações para a formação de estruturas cósmicas..

## 3.5.2 Energia Escura

No capítulo 3.2, adentramos na transição da concepção de um universo estático para um universo em constante expansão, pela lei de Hubble. No entanto, avanços recentes surgiram

a partir das observações de supernovas do tipo IA, revelando não apenas a expansão contínua, mas também um fenômeno surpreendente: o universo estaria expandindo de maneira acelerada [53].

Supernovas são explosões extremamente brilhantes e poderosas que ocorrem no final da vida de certas estrelas. Elas podem emitir um brilho tão intenso que muitas vezes ofusca a luminosidade da galáxia hospedeira por um curto período de tempo [28]. Durante uma supernova, a estrela aumenta dramaticamente em brilho e depois diminui gradualmente ao longo de várias semanas ou meses. Veja a figura (3.4) .



**Figura 3.4:** Decaimento da Magnitude de uma Supernova com o tempo [34]

As supernovas do tipo Ia (SNe Ia) são uma ótima ferramenta para medida de distâncias. Elas são consideradas “velas padrão” pois têm uma característica importante e previsível: todas explodem com uma luminosidade aproximadamente uniforme. Isso significa que, se uma supernova do tipo Ia puder ser observada com precisão suficiente para determinar o quão brilhante ela parece ser na Terra, é possível usar essa informação para estimar sua verdadeira luminosidade [51].

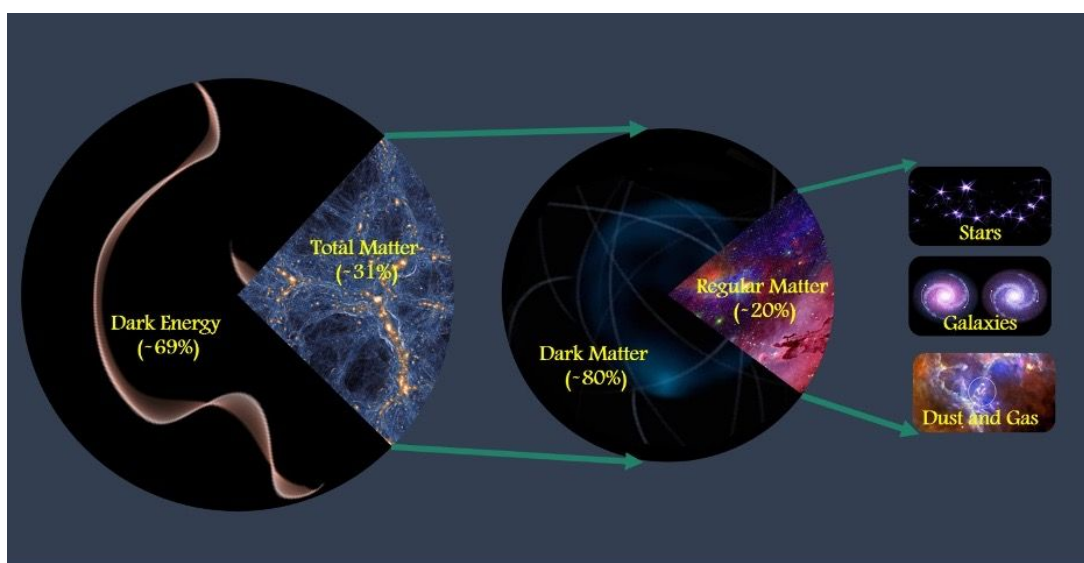
Ao observar supernovas Tipo Ia em galáxias distantes, pôde-se comparar o brilho intrínseco esperado dessas supernovas com o brilho observado. Se uma supernova aparece mais fraca do que o esperado, isso indica que está mais distante e, portanto, a luz viajou por mais tempo e apresenta um redshift maior. A descoberta veio quando observou-se que muitas supernovas distantes estavam mais fracas do que o esperado, sugerindo que estavam mais distantes do que os modelos de expansão do universo previam. Isso implicava que o universo estaria sofrendo uma expansão acelerada ao longo do tempo, em oposição à ideia anterior de que a expansão estava desacelerando devido à atração gravitacional da matéria [18].

Mas, o que estaria fazendo o universo se expandir aceleradamente? O conceito de energia escura surge nesse contexto. Na cosmologia, a energia escura se refere a uma forma misteriosa de energia que parece estar preenchendo o espaço vazio e contribuindo para a aceleração da expansão do universo [51, 53].

Além das supernovas, outras evidências também contribuíram para a compreensão da energia escura:

- Radiação Cósmica de Fundo: A análise detalhada da radiação cósmica de fundo, que é a radiação remanescente do Big Bang, forneceu informações sobre as propriedades da geometria do universo. Essas observações combinadas com outros dados sugerem a presença da energia escura [60].
- Estrutura em Grande Escala: O estudo da distribuição das galáxias em larga escala e a forma como essa distribuição evoluiu ao longo do tempo também indicam a presença da energia escura via, por exemplo, o efeito Sachs-Wolf integrado [26, 55].
- Lentes Gravitacionais: A maneira como a luz de objetos distantes é distorcida por lentes gravitacionais causadas por matéria entre nós e esses objetos também oferece informações sobre a distribuição de energia escura [6, 26].

Estima-se que o universo é composto hoje em cerca de  $\sim 68\%$  de energia escura [2]. Isso significa que a energia escura é responsável por uma parcela significativamente maior da composição do universo do que a matéria bariônica e a matéria escura.



**Figura 3.5:** Quantidade de matéria regular, matéria escura e energia escura no universo. Imagem: Mohamed Abdullah

Matéria e Energia escura compõem o chamado “Setor escuro” do universo. O que nós conhecemos de fato que é a matéria regular, ou matéria bariônica, que preenche aproximadamente apenas 5% do universo [2]. A partir dessa complexa dinâmica, emergem os modelos cosmológicos, que são estruturas teóricas que se esforçam por desvelar a estrutura, evolução e natureza do universo em larga escala.

## 3.6 A construção do modelo padrão de cosmologia

O modelo  $\Lambda$ CDM (abreviação de “Lambda Cold Dark Matter”) conhecido como modelo cosmológico padrão para a cosmologia, é o principal paradigma cosmológico usado para descrever e explicar a evolução e estrutura do universo. Ele é um dos modelos mais aceitos e bem-sucedidos e é baseado em observações detalhadas de várias fontes. A referência [36] lista os 6 pilares teóricos e observacionais sobre os quais o modelo cosmológico padrão é alicerçado:

- O princípio cosmológico;
- A teoria da Relatividade Geral;
- A descrição da matéria por fluidos perfeitos;
- A lei de Hubble;
- A existência da radiação cósmica de fundo;
- A abundância dos elementos leves resultantes da nucleossíntese primordial.

Juntando essa lista de elementos, o  $\Lambda$ CDM cria a estrutura de universo mais aceita na cosmologia moderna. Nosso ponto de partida para entender como surge o modelo  $\Lambda$ CDM, são as equações de Einstein.

No contexto da Relatividade Geral, a “energia do vácuo” refere-se à densidade de energia associada ao espaço vazio, mesmo na ausência de matéria visível. Isso pode parecer contraditório, uma vez que normalmente associamos energia à presença de partículas ou



campos. Na teoria quântica de campos, as flutuações quânticas permitem que a energia esteja presente mesmo no vácuo. Isso ocorre por que o “vácuo” não é realmente um estado de ausência total de qualquer coisa. Em vez disso, é um estado cheio de flutuações quânticas, ou seja, pequenas variações de campos e partículas virtuais que aparecem e desaparecem instantaneamente. Como vimos anteriormente, o tensor energia-momento é uma das fontes da curvatura do espaço-tempo, isso significa que a densidade de energia, a pressão e outros componentes do tensor influenciam diretamente a forma como o espaço-tempo se curva. A energia do vácuo, embora associada ao espaço vazio, também possui uma contribuição ao tensor energia-momento [15].

Uma característica desejável é que essa energia do vácuo não tenha uma direção preferencial, ou seja, não dependa de uma direção específica no espaço. Isso significa que a energia do vácuo pode ser presente independentemente da direção observada. Para que essa energia seja possível, o tensor energia-momento associado a ela deve ser invariante de Lorentz. Isso significa que ele não muda quando você muda de um sistema de coordenadas para outro. A invariância de Lorentz implica que o tensor energia-momento correspondente deve ser proporcional à métrica, em coordenadas arbitrárias, temos:

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{(vac)}g_{\mu\nu}. \quad (3.59)$$

Considerando o fluido perfeito descrito na eq. (3.42), descobrimos que o vácuo seria equivalente a um fluido perfeito com uma pressão isotrópica oposta em relação à densidade de energia

$$p_{(vac)} = -\rho_{(vac)}. \quad (3.60)$$

A densidade de energia deve ser constante em todo o espaço-tempo, uma vez que um gradiente não seria invariante de Lorentz. Se decompondo o tensor energia-momento em uma parte de matéria  $T_{\mu\nu}^{(M)}$  e uma parte de vácuo  $T_{\mu\nu}^{(vac)}$ , a equação de Einstein se torna

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{(vac)}g_{\mu\nu} \right). \quad (3.61)$$

Na época em que Einstein estava desenvolvendo a Relatividade Geral, a visão predominante no campo da astronomia era de que o universo era estático e imutável. No entanto, suas equações não eram compatíveis com essa hipótese. Para que essa cosmologia estática resolvesse a

equação de campo com uma fonte de matéria comum, foi necessário adicionar um novo termo “ $\Lambda$ ” as equações chamado de constante cosmológica, dessa forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.62)$$

Comparando com a eq. (3.61), vemos que a constante cosmológica é precisamente equivalente a introduzir uma densidade de energia de vácuo

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.63)$$

Para a componente da energia do vácuo, o valor de  $w$  é -1, dessa forma  $\rho_{\Lambda}$  evolui como:

$$\rho_{\Lambda}(t) = \frac{\rho_0}{a^{3(1+(-1))}} = cte. \quad (3.64)$$

Como dito anteriormente, Einstein inicialmente introduziu a constante cosmológica para permitir uma solução na Relatividade Geral que descrevesse um universo estático, em oposição às soluções anteriores que indicavam um universo em expansão. No entanto, quando Hubble e Lemaître constataram a expansão do universo, a introdução da constante cosmológica para criar um universo estático foi desnecessária. Com isso, a constante cosmológica ficou em segundo plano na cosmologia por muitas décadas, até que observações indicaram um universo em expansão acelerada [51, 53]. Embora a constante cosmológica tenha sido introduzida com intenções errôneas, hoje ela é o elemento mais intrigante da cosmologia moderna. É a constante cosmológica, que no modelo padrão é responsável pela expansão acelerada do universo, que será denominada de energia escura [18, 26].

Seguindo para as Equações de Friedmann com a constante cosmológica, vamos relacionar o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  com o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

Para as coordenadas temporais  $G_{00}$  e  $T_{00}$  temos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}T_{00} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.66)$$

E para  $G_{ij}$  e  $T_{ij}$ , temos:

$$-g_{i,j} \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + k\frac{1}{a^2} \right) + \Lambda g_{ij} = 8\pi GT_{ij}. \quad (3.67)$$

De forma que a equação de Friedmann fica:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.68)$$

Enquanto a equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.69)$$

Escrevendo todas as componentes em termos do parâmetro de densidade em função do redshift, isto é, para matéria:

$$\Omega_{m,0}(z) = \frac{\rho_m(z)8\pi G}{3H_0^2}, \quad (3.70)$$

para radiação:

$$\Omega_{r,0}(z) = \frac{\rho_r(z)8\pi G}{3H_0^2}. \quad (3.71)$$

A curvatura e a constante cosmológica também atuam como fonte da dinâmica cosmológica:

$$\Omega_{k,0}(z) = \frac{-k}{H_0^2}, \quad (3.72)$$

e

$$\Omega_{\Lambda,0}(z) = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (3.73)$$

Substituindo as expressões anteriores na eq. (3.68), ficamos com

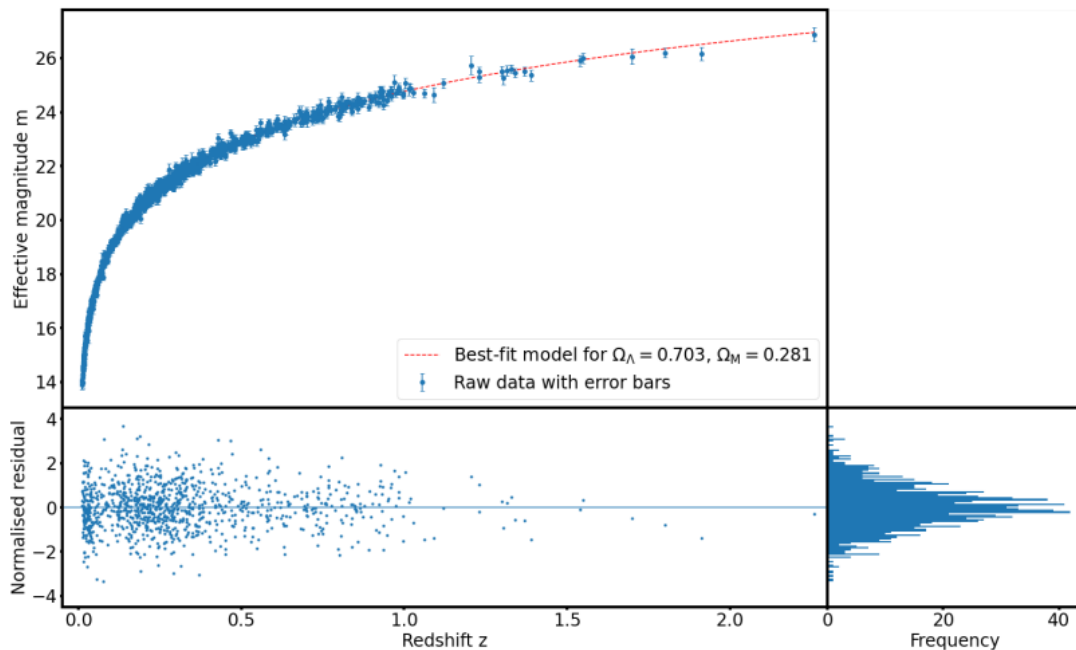
$$\frac{H(z)^2}{H_0^2} = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (3.74)$$

Dessa forma temos de maneira simplificada:

$$\Omega_{\text{mat}} + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_r + \Omega_{\Lambda} = 1. \quad (3.75)$$

Um modelo só é fisicamente aceito se ele for compatível com os dados observacionais. Inúmeros testes já foram feitos testando a compatibilidade do modelo  $\Lambda$ CDM. A Figura (3.6) mostra a relação magnitude-redshift para o conjunto Pantheon composto por 1048 SNe Ia na faixa de  $0,01 < z < 2,26$  ajustado pelo modelo  $\Lambda$ CDM plano quando  $\Omega_{\Lambda} = 0,703 \pm 0,016$  e  $\Omega_m = 0,281 \pm 0,011$  juntamente com gráfico de resíduos normalizados e frequências para

ajudar a visualizar a razoabilidade do modelo  $\Lambda$ CDM plano [50], é possível ver que o modelo é compatível com os dados apresentados.



**Figura 3.6:** Magnitude por Redshift, resíduos normalizados e frequências de SNe Ia do conjunto Pantheon.

Apesar de sua ampla aceitação e sucesso em explicar muitas observações cósmicas, o modelo  $\Lambda$ CDM não está isento de desafios e questões em aberto [13]. Um dos desafios centrais diz respeito à energia escura, cuja natureza ainda permanece enigmática. De fato, representar a energia escura simplesmente como a constante cosmológica muitas vezes é considerado insuficiente, uma vez que essa componente do universo não só permanece pouco compreendida, mas também deixa várias questões sem resposta. Além disso, observações de galáxias em escalas menores apresentam perturbações em relação às previsões do modelo  $\Lambda$ CDM [67]. Algumas galáxias anãs têm menos matéria escura do que o esperado, enquanto outras têm distribuições de matéria escura mais concentradas do que o previsto pelas simulações.[14, 45]. Para revisar mais problemas relacionados ao modelo  $\Lambda$ CDM consulte [12].

# Modificando a Gravidade

Como vimos anteriormente, a Relatividade Geral tem sido uma pedra angular da física moderna, fornecendo uma descrição precisa da interação gravitacional com base na curvatura do espaço-tempo. No entanto, sua aplicação, sobretudo, em escala cosmológica depara-se com desafios que sugerem a necessidade de modificações ou extensões conceituais. Neste contexto, a gravidade modificada surge como um campo de pesquisa que busca soluções para anomalias observacionais e problemas teóricos. A motivação central é enfrentar a questão da energia escura, cuja origem e natureza permanecem desconhecidas e inexplicadas pelo modelo  $\Lambda$ CDM. As teorias de gravidade modificada propõem ajustes nas equações da gravidade, muitas vezes incorporando novas propriedades geométricas do espaço-tempo, para explicar fenômenos como a expansão acelerada do universo. Também existem teorias alternativas que se propõem a substituir a matéria escura. No entanto, não iremos focar nestas teorias nesta dissertação.

Este capítulo busca proporcionar uma visão panorâmica das motivações, teorias e implicações da gravidade modificada. Ao fazê-lo, buscamos iluminar as possibilidades e os desafios que essa área de pesquisa oferece.

## 4.1 Teorias alternativas à Relatividade Geral

Dentro do espectro das teorias alternativas à Relatividade Geral, emergem uma variedade de abordagens que têm como objetivo preencher lacunas teóricas e explicar anomalias observacionais. Existem muitas maneiras distintas de ir além da Relatividade Geral. As referências [16, 47] fazem uma revisão completa. Em primeiro, temos as teorias escalares-tensoriais que buscam expandir a gravidade, introduzindo campos escalares além do tensor métrico que descreve a geometria do espaço-tempo. Um exemplo é a teoria de Brans-Dicke [11]. A Teoria de Brans-Dicke introduz um campo escalar que modifica a força gravitacional e permite uma constante gravitacional variável. Neste mesmo contexto temos também a teoria de Horndeski [32]. No âmbito observacional, a Teoria MOND busca explicar as curvas de rotação galáctica sem recorrer à matéria escura, por meio de modificações na dinâmica newtoniana em escalas maiores [5]. Além de adicionar novos campos, afastar-se das geometrias riemannianas ou até adotar argumentos quânticos, talvez, a maneira mais natural de modificar a gravidade seja

adicionar invariantes na Lagrangiana de Einstein-Hilbert, dando origem à teorias de ordem superior. O protótipo amplamente conhecido dentro desta categoria é o conjunto de teorias  $f(R)$  [21, 48]. Aqui, modificamos a Lagrangiana de Einstein-Hilbert. O termo  $f_{EH}(R) = R$ , lembrando que  $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  é o escalar de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica e  $R^{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci, é substituído por uma combinação algébrica mais geral de  $R$ . Ao ir além das teorias  $f(R)$ , pode-se continuar adicionando invariantes geométricos à Lagrangiana gravitacional ou, por exemplo, implementar um acoplamento não mínimo entre geometria e campos de matéria. Dentro desta última estratégia, surgiram recentemente duas classes de teorias, a gravidade  $f(R, L_m)$  [29], onde  $L_m$  é a Lagrangiana da matéria, e a gravidade  $f(R, T)$  [30], onde  $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$  é o traço do tensor energia-momento.

A ideia central deste trabalho é investigar a teoria  $f(R, T)$  como uma alternativa ao fenômeno da energia escura, com foco em sua expansão. Várias soluções  $f(R, T)$  para o fundo cosmológico em expansão foram encontradas na literatura. O comportamento assintótico do fator de escala e a confrontação com dados foram realizados em, por exemplo, Refs. [27, 44, 56, 57, 66]. A fenomenologia da expansão do universo também pode ser abordada pelas teorias  $f(R, T)$  usando sua versão tensor-escalar [39]. No entanto, a complexidade das equações de campo e a diversidade de possíveis escolhas para a função  $f$  tornam a teoria  $f(R, T)$  um campo de pesquisa desafiador e em constante evolução, exigindo análises teóricas detalhadas e testes observacionais para determinar sua viabilidade e relevância no contexto cosmológico.

## 4.2 A teoria $f(R, T)$

Como comentado anteriormente, a inclusão de energia e matéria escura no modelo cosmológico padrão pode ser entendida como a incapacidade da Relatividade Geral de descrever adequadamente a interação gravitacional em escalas além da galáctica. E foi isso que motivou o surgimento de uma nova rota de pesquisa em que se busca por extensões/modificações da Lagrangiana de Einstein-Hilbert. A maioria dos modelos  $f(R, T)$  é capaz de induzir uma taxa de expansão acelerada em tempos tardios, fornecendo valores negativos para o parâmetro de desaceleração atual  $q_0$ . No entanto, à luz dos dados cosmológicos modernos disponíveis, um modelo verdadeiramente viável deve obedecer a vários outros requisitos.

A Ref. [66], desafiou alguns dos modelos  $f(R, T)$  disponíveis, argumentando que, embora a evolução de baixo redshift dos modelos  $f(R, T)$  possa ser razoavelmente apoiada

pelos dados disponíveis, há uma considerável discrepância na dinâmica de altos redshifts ( $z > 1$ ) em comparação com a cosmologia padrão  $\Lambda$ CDM. Assim, esta referência conclui que a viabilidade dos modelos cosmológicos  $f(R, T)$  é severamente questionada.

Agora, ao considerar uma ampla classe de cosmologias  $f(R, T)$  e usando informações adicionais sobre a idade do universo e os limites existentes para a fração de massa de gás em aglomerados de galáxias, revisitaremos essa questão. Vamos considerar que cosmologias de gravidade modificada viáveis baseadas em  $f(R, T)$

- I. São capazes de reproduzir quantitativamente os dados de baixo redshift, como os dados de  $H(z)$ .
- II. Podem levar a um valor mínimo para a idade do universo consistente com os objetos astrofísicos mais antigos encontrados até agora.
- III. Seus parâmetros livres de gravidade modificada são limitados de forma que o parâmetro de densidade de matéria fracionária efetiva seja consistente com os dados disponíveis de fração de massa de gás em aglomerados de galáxias.

Os requisitos *I* e *II* são os novos aspectos considerados neste trabalho em comparação com a análise realizada em Ref. [66]. O argumento da idade é motivado pelo fato de que estimativas de idade de aglomerados globulares em nossa galáxia estão disponíveis. Tais estimativas estabelecem um limite conservador de  $t_U \gtrsim 14.16$  Gyrs para a idade do universo [63, 64]. Além disso, estimativas da fração de massa de gás dentro de aglomerados de galáxias obtidas em [41] estabelecem limites para o parâmetro de densidade total de matéria fracionária cosmológica  $\Omega_0$ .

### 4.2.1 A dinâmica de fundo cosmológico para a teorias

$$f(R, T)$$

O passo inicial na busca pelas equações que descrevem a dinâmica cosmológica na teoria  $f(R, T)$  é a aplicação de uma modificação à ação de Einstein-Hilbert. Similarmente à abordagem adotada no capítulo 2.2 para a Relatividade Geral, é viável derivar as equações de campo e, subseqüentemente, as equações de Friedmann modificadas. Com isso, será possível analisar a viabilidade dessa teoria aplicando alguns testes cosmológicos.

A ação geral que descreve a teoria  $f(R, T)$  tem a forma

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, T) + \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g_{\mu\nu}, \psi_m), \quad (4.1)$$

onde  $\kappa^2 = 8\pi G$ , o fator  $f(R, T)$  depende de uma função arbitrária do escalar de Ricci e do traço do tensor energia momento.  $g$  é o determinante da métrica  $g_{\mu\nu}$  e  $L_m$  é a lagrangeana do setor de matéria que depende da métrica  $g_{\mu\nu}$  e dos campos de matéria,  $\psi_m$ . Aplicando o princípio variacional à ação acima, encontra-se

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( f_R R_{\mu\nu} + f_T \frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{f(R, T)}{2} g_{\mu\nu} - f_R \Delta_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Na equação acima, usamos a notação

$$f_R \equiv \frac{\partial f(R, T)}{\partial R} \quad \text{e} \quad f_T \equiv \frac{\partial f(R, T)}{\partial T}. \quad (4.3)$$

Vale notar que a variação do tensor de Ricci tem uma dependência explícita da métrica

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -\Delta_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

onde o d'Alembertiano está relacionado com o tensor de Ricci por  $\square = g^{\beta\alpha} \nabla_\beta \nabla_\alpha$  e  $\Delta_{\beta\alpha} = \nabla_\beta \nabla_\alpha - g_{\beta\alpha} \square$ . Para caracterizar o setor de matéria, usaremos a mesma definição do tensor energia-momento apresentado anteriormente em (2.63), logo a variação dessa quantidade pode ser escrita como

$$\delta T_{\mu\nu} = (\Theta_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

onde a quantidade auxiliar  $\Theta_{\mu\nu}$  foi definida como

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} L_m - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 L_m}{\partial g^{\alpha\beta} \partial g^{\mu\nu}}. \quad (4.6)$$

Dessa forma, a variação da ação 4.1, nos leva a

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{f(R, T)}{2} g_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu} f_R = \kappa^2 T_{\mu\nu} \left( 1 - \frac{f_T}{\kappa^2} \right) - f_T \Theta_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Como estamos adotando a estrutura de um fluido perfeito para o tensor do energia momento, vamos utilizar a definição 3.42 com as quadri-velocidades nas coordenadas  $u_\nu = (1, 0, 0, 0)$ . Vamos então aplicar a este conjunto de equações um espaço-tempo plano,



homogêneo, isotrópico e em expansão dado pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) vista na eq. (3.9) com  $k = 0$ .

A componente 0 – 0 da gravidade  $f(R, T)$  (4.7) fornecerá uma expressão para a taxa de expansão  $H = \dot{a}/a$ . Como o escalar de Ricci indica  $R = -6(\ddot{a}/a + H^2)$ , a equação de Friedmann modificada na cosmologia  $f(R, T)$  torna-se

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left\{ \rho - \frac{\rho(1 + f_R)}{f_R} - \frac{[f_T \rho(1 + \omega) + f(R, T)/2 - 3H \dot{f}_R + 3\dot{H} f_R]}{\kappa^2 f_R} \right\}. \quad (4.8)$$

A equação acima tem o limite da relatividade geral apropriado com  $f(R, T) = R$ ,  $f_R = 1$ ,  $f_T = 0$  e também o limite de gravidade  $f(R)$  com  $f_T = 0$ . Além disso,  $\omega$  é a equação do parâmetro de estado relacionando a densidade de energia  $\rho$  à pressão por  $\omega = p/\rho$ . A taxa de expansão pode ser reescrita de forma compacta como

$$3H^2 = \kappa^2 (\rho + \bar{\rho}), \quad (4.9)$$

onde

$$\bar{\rho} = -\frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ \kappa^2 \rho(1 + f_R) + f_T \rho(1 + \omega) + \frac{f(R, T)}{2} - 3H \dot{f}_R + 3\dot{H} f_R \right]. \quad (4.10)$$

A quantidade  $\rho$  deve ser interpretada como a soma de todos os campos de matéria que compõem o tensor energia-momento total da teoria. Na cosmologia padrão, pode ser aproximado pela soma de radiação, matéria (escura + bariônica) e a componente de energia escura. A contribuição da gravidade modificada para a taxa de expansão pode ser coletada em termos da densidade de energia efetiva geométrica  $\bar{\rho}$ . Isso pode ser associado ao setor de energia escura, mas aqui escrito em termos de grandezas geométricas e  $\rho$  também. Se o setor de gravidade modificada é inteiramente responsável pela fase acelerada tardia, então  $\rho$  deve ser aproximado, em tempos tardios, pela matéria total. Essa é a interpretação que adotamos neste trabalho.

A descrição completa da expansão cosmológica de fundo requer a segunda equação de Friedmann obtida com as componentes espaciais de (4.7)

$$(\dot{H} + 3H^2) f_R + \frac{f(R, T)}{2} - 2H \dot{f}_R - \ddot{f}_R = \kappa^2 p. \quad (4.11)$$

Vale a pena notar que as teorias  $f(R, T)$  são no geral não conservativas, pois apresentam uma derivada covariante não nula do tensor energia-momento, dada pela expressão

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + \omega) = -\frac{1}{\kappa^2 + f_T} \left[ \dot{f}_T \rho(1 + \omega) + f_T \dot{\rho} \omega + \frac{\dot{f}(T)}{2} \right]. \quad (4.12)$$

As equações acima se aplicam a qualquer modelo  $f(R, T)$ . Apenas em alguns casos a função  $f(R, T)$  escolhida leva a um desaparecimento do lado direito de (4.12). Trataremos disso abaixo. Além deste caso específico, os modelos cosmológicos  $f(R, T)$  não são conservativos e o parâmetro de densidade de matéria efetiva não será mais escalado como  $\rho \sim a^{-3}$ . Para uma discussão completa sobre a questão da conservação do tensor do momento de energia nas teorias  $f(R, T)$  veja [7, 66].

Para ir além, é preciso especificar a forma funcional de  $f(R, T)$ . A suposição mais simples é o caso minimamente acoplado em que as contribuições de  $R$  e o traço  $T$  são escritas separadamente como

$$f(R, T) = f_1(R) + f_2(T). \quad (4.13)$$

Mantendo este formato, a função mais geral que cobre as principais propostas na literatura pode ser escrita como

$$f(R, T) = R + \alpha e^{\beta T} + \gamma_n T^n. \quad (4.14)$$

Este modelo possui quatro parâmetros livres  $\alpha, \beta, \gamma_n$  e  $n$ . Todos os modelos de lei de potência propostos na literatura são alcançados com  $\alpha = 0$ . Além disso, o modelo exponencial recentemente proposto (ver. [43]) é equivalente a  $\gamma_n = 0$ . A Relatividade Geral sem constante cosmológica (o universo Einstein-de Sitter) corresponde a  $\alpha = \gamma_n = 0$ . Para  $\beta = 0$  e  $n = 0$  o modelo  $\Lambda$ CDM é recuperado. É conveniente reescrever as equações de fundo substituindo  $\rho$  pela densidade fracionária  $\Omega = \rho/\rho_{c0}$ , onde  $\rho_{c0}$  é a densidade crítica de hoje  $\rho_0 = 3H_0^2/\kappa^2$ . Então, de acordo com (4.14) a taxa de expansão do FLRW nas teorias  $f(R, T)$  é

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega + \bar{\alpha} e^{\bar{\beta} \Omega(1-3\omega)} \left[ \bar{\beta} \Omega(1 + \omega) + \frac{1}{2} \right] + \bar{\gamma}_n \left[ n(1 + \omega)(1 - 3\omega)^{n-1} + \frac{1}{2}(1 - 3\omega)^n \right] \Omega^n. \quad (4.15)$$

Na expressão acima, reescrevemos os parâmetros livres de gravidade modificada em uma forma adimensional de acordo com

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\kappa^2 \rho_0}; \quad \bar{\beta} = \beta \rho_0 \quad \bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_n \rho_0^{n-1}}{\kappa^2}. \quad (4.16)$$

A dinâmica cosmológica será obtida em função do parâmetro de densidade fracionária  $\Omega$ . Essa quantidade é obtida reescrevendo (4.12) em termos das quantidades adimensionais definidas acima de modo que

$$\dot{\Omega}(1+z) + 3H\Omega(1+\omega) = -\frac{\dot{\Omega}(1+z)}{1 + \bar{\alpha}e^{\bar{\beta}\Omega(1-3\omega)}\bar{\beta} + \bar{\gamma}_n n \Omega^{n-1}(1-3\omega)^{n-1}} \times \left\{ \bar{\alpha}e^{\bar{\beta}\Omega(1-3\omega)}\bar{\beta} \left[ \bar{\beta}\Omega(1+\omega) + \omega + \frac{1}{2} \right] + \bar{\gamma}_n n \Omega^{n-1}(1-3\omega)^{n-1} \left[ \frac{2n(1+\omega) - (1+3\omega)}{2} \right] \right\} \quad (4.17)$$

A solução numérica da equação acima (4.17) nos permitirá analisar a expansão de background nas teorias  $f(R, T)$ . O primeiro passo para resolvê-lo é definir o valor de hoje  $\Omega(z=0) \equiv \Omega_0$  como a condição inicial para esta equação diferencial. Mais uma vez, esta quantidade é interpretada como a fração de matéria total (bariônica + escura). Essa quantidade não é um parâmetro livre, pois está sujeita à relação de restrição

$$1 = \Omega_0 + \bar{\alpha}e^{\bar{\beta}\Omega_0(1-3\omega)} \left[ \bar{\beta}\Omega_0(1+\omega) + \frac{1}{2} \right] + \bar{\gamma}_n \left[ n(1+\omega)(1-3\omega)^{n-1} + \frac{1}{2}(1-3\omega)^n \right] \Omega_0^n. \quad (4.18)$$

Esta relação aparece de (4.15) definindo  $H(z=0) = H_0$ . Portanto, o parâmetro de matéria fracionária efetiva de hoje  $\Omega_0$  não pode ser escolhido arbitrariamente. Este é um aspecto muito importante que queremos destacar, pois, com exceção da Ref. [66], isso geralmente não é considerado em análises anteriores da expansão de fundo nas teorias  $f(R, T)$ . Isso é possível porque a função  $f(R, T)$  adotada é minimamente acoplada. Isso significa que  $H^2$  não depende de  $\dot{H}$ . Conforme discutido adiante, no caso não minimamente acoplado não se pode obter uma relação de restrição semelhante, assim como no caso das teorias  $f(R)$ . Em ambos os casos, usando o formalismo métrico,  $H^2$  depende de  $\dot{H}$  e não existe uma relação de restrição como (4.18). Desligando as contribuições de gravidade modificadas com  $\bar{\alpha} = \bar{\gamma}_n = 0$  recupera-se o modelo de Einstein-de Sitter  $\Omega_0 = 1$ . Para valores não nulos de  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\gamma}_n$ , e exigentes  $0 < \Omega_0 < 1$  é possível definir limites nos valores possíveis para os parâmetros de gravidade modificada.

## 4.2.2 Testes observacionais para a teoria $f(R, T)$

Vamos agora confrontar a expansão de fundo (4.15) obtida pela solução numérica da equação (4.17) que está sujeita à restrição (4.18) com os dados observacionais disponíveis. Nossa análise será semelhante à Ref. [66] mas agora adicionando as restrições de idade dos aglomerados globulares galácticos e os limites da fração de massa de gás do aglomerado de galáxias nos parâmetros livres do modelo. Antecipando um de nossos resultados, tais novas informações serão muito importantes para revisitar a principal conclusão da Ref. [66].

Vamos considerar dois modelos  $f(R, T)$  diferentes:

- $f(R, T) = R + \gamma_n T^n$ ;
- $f(R, T) = R + \alpha e^{\beta T}$ .

Cada modelo tem dois parâmetros livres, um a mais que o modelo plano  $\Lambda$ CDM. Neste último a expansão é descrita em termos de  $H_0$  e  $\Omega_0$ . A densidade fracionária da constante cosmológica é  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_0$ . No cenário da gravidade modificada aqui estudados, a quantidade  $\Omega_0$  é substituída por uma combinação de  $\alpha$  ( $\gamma_n$ ) e  $\beta$  ( $n$ ) de acordo com (4.18). Nosso objetivo é encontrar uma região de concordância no espaço livre de parâmetros para cada modelo. Para esta tarefa, usaremos três informações observacionais diferentes.

*Idade do universo:* Para uma dada taxa de expansão  $H$ , a idade do universo  $t_U$  é calculada via integração.

$$t_U = \int_0^1 \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}H(\tilde{a})}, \quad (4.19)$$

onde o fator de escala de hoje foi definido  $a_0 = 1$ . As restrições de idade podem ser usadas como uma ferramenta simples para discriminar entre cosmologias viáveis e inviáveis. Neste trabalho adotaremos um requisito mínimo e óbvio de que  $t_U$  não pode ser menor que a idade estimada de objetos astrofísicos. Claro, o universo não pode ser mais jovem do que as estruturas que contém. Estimativas recentes de idade dos aglomerados globulares galácticos colocaram os limites [63, 64]

$$t_{glob} = 13.5_{-0.14}^{+0.16} (stat.) \pm 0.5 (sys.). \quad (4.20)$$

Usaremos os limites acima para excluir os parâmetros de gravidade modificada que levam a universos jovens.

*Fração de gás em aglomerados de galáxias:* As medições *Chandra* de raios-X de aglomerados de galáxias são uma ferramenta poderosa para restringir a temperatura, a densidade do gás e perfis de massa de aglomerados de galáxias. Tais quantidades são sensíveis à quantidade de fração de massa de gás em tais sistemas e podem ser ligadas ao bárion cosmológico para a razão de matéria total  $\Omega_{b0}/\Omega_0$  [41]. Baseando-se nesses limites e associando a matéria total ao parâmetro  $\Omega_0$  que aparece em (4.18), podemos restringir indiretamente os parâmetros de gravidade modificada. Então, a partir dos resultados apresentados na Ref. [41] vamos exigir

$$0.23 < \Omega_0 < 0.31. \quad (4.21)$$

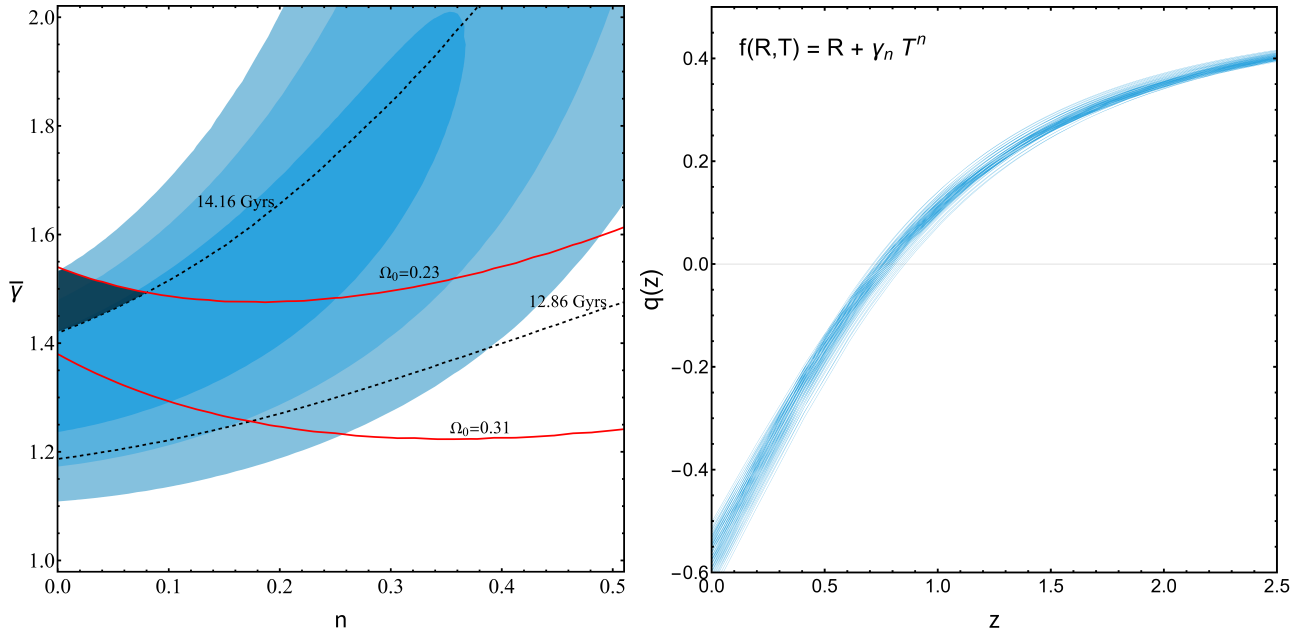
*Cronômetros cósmicos:* Uma técnica amplamente utilizada para medir a taxa de expansão não-local do universo é obter a idade diferencial de certas galáxias através da idade de sua população estelar. Este método nos permitiu obter medidas para  $H(z)$  chegando até redshifts em torno de  $z \sim 2$ . Este método, proposto em [35], pode ser entendido pela relação

$$H(z) = -(1+z)\frac{dz}{dt}, \quad (4.22)$$

fornecendo  $H(z)$  em algum redshift  $z$  através da relação entre idades cósmicas diferenciais de objetos  $dt$  dentro de certo intervalo de redshift diferencial  $dz$ .

Para análise estatística dos parâmetros utilizaremos a função de verossimilhança, também conhecida no termo em inglês como likelihood. Ela é um conceito fundamental na estatística e na análise de dados pois desempenha um papel importante na modelagem e na inferência estatística. A função de verossimilhança mede a probabilidade de observar os dados que foram coletados, dadas as suposições feitas sobre o modelo estatístico subjacente. Em outras palavras, ela avalia o quão provável é que os dados observados tenham sido gerados pelo modelo estatístico em consideração. Se temos um conjunto de dados e um modelo estatístico com parâmetros desconhecidos, a função de verossimilhança ajuda a quantificar o quão bem esses parâmetros se ajustam aos dados observados. O objetivo é encontrar os valores dos parâmetros que maximizem a função de verossimilhança, já que esses valores representam as estimativas mais prováveis dos parâmetros subjacentes do modelo. Para essa análise, utilizaremos o conjunto de dados disponível na Tabela (4.2) de [62] para calcular contornos de confiança. A função de verossimilhança pode ser calculada através da relação

$$\chi_{H(z)}^2 = \left( \frac{H_{obs}(z) - H_{teo}(z)}{\sigma(z)} \right)^2, \quad (4.23)$$



**Figura 4.1:** Restrições sobre os parâmetros livres do modelo de lei de potência  $f(R, T) = R + \gamma_n T^n$ . No painel esquerdo, os contornos azuis mostram as regiões  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de nível de confiança estatística. As linhas tracejadas representam os valores dos parâmetros para os quais o universo tem 12,86 e 14,16 Gyrs. As linhas vermelhas são limites máximos e mínimos em  $\Omega_0$ . A região azul mais escura representa a região de concordância do espaço de parâmetros. No painel direito, plotamos o parâmetro de desaceleração como uma função do redshift  $q(z)$  para conjuntos de valores  $\{\bar{\gamma}, n\}$  dentro da região azul mais escura do painel esquerdo.

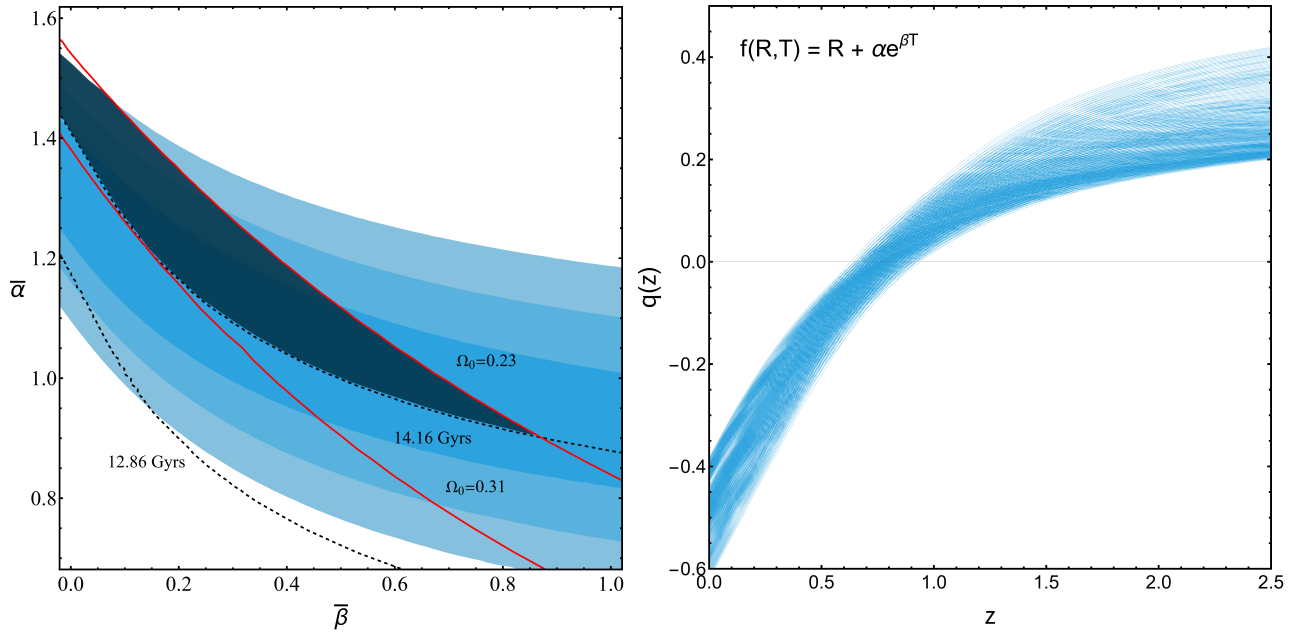
onde  $H_{obs}(z)$  são os dados observacionais apresentados na tabela (4.2),  $H_{teo}(z)$  é a previsão teórica de  $H(z)$  que obtemos para os dois modelos e  $\sigma(z)$  são os erros de  $H_{obs}(z)$ . Para uma análise mais completa, calculamos a região de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  dos parâmetros para cada modelo.

Mostramos no painel esquerdo da Fig. (4.1) o espaço livre de parâmetros para o modelo de lei de potência. Em nossa análise, fixaremos  $H_0 = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [2]. Verificamos que a alteração dos valores de  $H_0$  em torno dela produz um leve impacto em nossas conclusões finais. Neste painel esquerdo, linhas tracejadas mostram contornos de idade de 12,86 Gyrs e 14,16 Gyrs (cf. (4.20)), linhas vermelhas mostram contornos de  $\Omega_0$  fixado os limites como em (4.18) e regiões azuis exibem os contornos estatísticos de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  do nível de confiança resultantes da função de verossimilhança obtida a partir dos dados  $H(z)$ .

Vamos considerar aqui, que o universo deveria ter mais de 14,16 Gyrs. Isso exclui uma grande região do espaço de parâmetros. O cruzamento de todas essas informações, ou seja, um universo com mais de 14,16 Gyrs, o parâmetro  $\Omega_0$  dentro dos limites dados por (4.21) e dentro de pelo menos a região  $3\sigma$  fornece um espaço de parâmetros aceito estreito,

$z$	$H(z)$ ( $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ )	References
0.09	$69 \pm 12$	Jimenez et al. (2003)
0.17	$83 \pm 8$	Simon et al. (2005)
0.27	$77 \pm 14$	
0.4	$95 \pm 17$	
0.9	$117 \pm 23$	
1.3	$168 \pm 17$	
1.43	$177 \pm 18$	
1.53	$140 \pm 14$	
1.75	$202 \pm 40$	
0.48	$97 \pm 62$	Stern et al. (2010)
0.88	$90 \pm 40$	
0.1791	$75 \pm 4$	Moresco et al. (2012)
0.1993	$75 \pm 5$	
0.3519	$83 \pm 14$	
0.5929	$104 \pm 13$	
0.6797	$92 \pm 8$	
0.7812	$105 \pm 12$	
0.8754	$125 \pm 17$	
1.037	$154 \pm 20$	
0.07	$69 \pm 19.6$	Zhang et al. (2014)
0.12	$68.6 \pm 26.2$	
0.2	$72.9 \pm 29.6$	
0.28	$88.8 \pm 36.6$	
1.363	$160 \pm 33.6$	Moresco (2015)
1.965	$186.5 \pm 50.4$	
0.3802	$83 \pm 13.5$	Moresco et al. (2016b)
0.4004	$77 \pm 10.2$	
0.4247	$87.1 \pm 11.2$	
0.4497	$92.8 \pm 12.9$	
0.4783	$80.9 \pm 9.0$	
0.47	$89.0 \pm 23.0$	Ratsimbazafy et al. (2017)

**Figura 4.2:** Tabela 1 disponível em [62] com o compilado de medições de  $H(z)$



**Figura 4.3:** Restrições nos parâmetros livres do modelo exponencial  $f(R, T) = R + \alpha e^{\beta T}$ . No painel esquerdo, os contornos azuis mostram as regiões  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de nível de confiança estatística. As linhas tracejadas representam os valores dos parâmetros para os quais o universo tem 12,86 e 14,16 Gyrs. As linhas vermelhas são limites máximos e mínimos em  $\Omega_0$ . A região azul mais escura representa a região de concordância do espaço de parâmetros. No painel direito, plotamos o parâmetro de desaceleração como uma função do redshift  $q(z)$  para conjuntos de valores  $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$  dentro do região azul mais escura do painel esquerdo.

representamos esse espaço de parâmetros aceitos através da região azul mais escura nesta figura.

Para tal faixa de concordância de valores de parâmetros encontrada na região do azul mais escuro, pode-se também verificar como a taxa de expansão transita da fase desacelerada para a acelerada através da definição do parâmetro de desaceleração.

$$q(z) = -1 + (1 + z) \frac{H'}{H}. \quad (4.24)$$

Em seguida, plotamos no painel direito nas Figs. 4.1 o parâmetro de desaceleração  $q(z)$  em função do redshift  $z$ . Esta figura mostra uma coleção de pequenas curvas azuis calculadas usando valores de parâmetros permitidos encontrados na região de concordância azul mais escura do painel esquerdo.

A Fig. 4.3 mostra os resultados para o modelo exponencial usando a mesma estrutura descrita na Fig. 4.1.



No caso em que  $n$  ou  $\beta$  desaparecem,  $\gamma_n$  e  $\alpha$  desempenham o papel de uma constante cosmológica na ação gravitacional, respectivamente. Pode-se associar os valores  $\bar{\gamma}_n$  e  $\bar{\alpha}$  ao dobro do parâmetro fracionário da constante cosmológica, ou seja, pode-se esperar valores preferenciais em torno de  $\bar{\gamma}_n \sim \bar{\alpha} \sim 2\Omega_\Lambda \sim 1.5$ . Neste caso limite, a região observacional permitida em ambas as figuras concorda com esta estimativa.

Então, como se pode ver em ambas as figuras, as cosmologias  $f(R, T)$  possuem um espaço de parâmetros viável quando aplicado a baixos Redshift.

### 4.2.3 Adicionando radiação ao modelo $f(R, T)$

Nesta seção, vamos discutir o impacto de adicionar radiação ao modelo minimamente acoplado. Uma vez que a radiação é um fluido sem traço, em princípio, poderíamos esperar que não houvesse impacto na dinâmica. Isso é realmente verdadeiro para o universo primordial, onde a densidade de energia efetiva é bem aproximada por um fluido radiativo verdadeiro. Portanto, qualquer investigação sobre o impacto dos modelos  $f(R, T)$  nas características do universo primordial é ineficaz. No entanto, vejamos agora como a dinâmica de fundo cosmológico será afetada na gravidade  $f(R, T)$  quando analisarmos separadamente o comportamento tanto da matéria quanto da radiação no tensor de densidade de energia total.

É importante notar que as equações deduzidas na seção 4.2.1 se referem à densidade de energia total  $\rho$ . Nosso objetivo agora é decompor essa densidade em uma soma de radiação e matéria:

$$\rho = \rho_m + \rho_r. \quad (4.25)$$

As equações de estado de ambos os fluidos serão respectivamente  $p_m = 0$  e  $p_r = \rho_r/3$ . Além disso, o parâmetro efetivo da equação de estado  $\omega$  que entra nas relações de fundo (4.15) e (4.12) deverá ser substituído por

$$\omega = \frac{p_m + p_r}{\rho_m + \rho_r} = \frac{\rho_r}{3(\rho_m + \rho_r)}. \quad (4.26)$$

Portanto, na presença de campos de radiação e matéria, as relações de fundo finais são as seguintes:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = (\Omega_m + \Omega_r) \left(1 + f_T/\kappa^2\right) + \frac{f_T}{3\kappa^2} \Omega_r + \frac{f(T)}{2\kappa^2 \rho_0}, \quad (4.27)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_m \left[ 1 + \frac{1}{(1 + f_T/\kappa^2)} \left( \frac{f_{TT}\rho_0\Omega_m}{\kappa^2} + \frac{f_T}{2\kappa^2} \right) \right] + 3H\Omega_m \\ + \dot{\Omega}_r \left[ 1 + \frac{1}{3(1 + f_T/\kappa^2)} \left( \frac{4f_{TT}\rho_0\Omega_r\dot{\Omega}_m}{\kappa^2\dot{\Omega}_r} + \frac{f_T}{\kappa^2} \right) \right] + 4H\Omega_r = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A equação acima representa a conservação total de energia. Para resolvê-la, vamos dividi-la em duas equações diferentes e exigir que ambas sejam satisfeitas simultaneamente. O mesmo procedimento se aplica no modelo cosmológico padrão. Portanto, o conjunto resultante de equações é

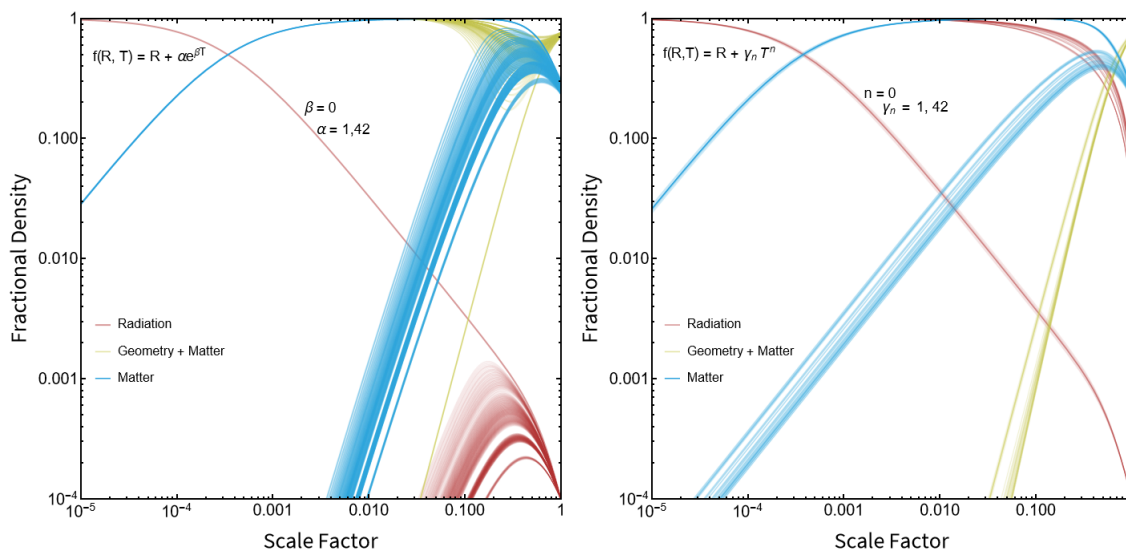
$$\dot{\Omega}_m \left[ 1 + \frac{1}{(1 + f_T/\kappa^2)} \left( \frac{f_{TT}\rho_0\Omega_m}{\kappa^2} + \frac{f_T}{2\kappa^2} \right) \right] + 3H\Omega_m = 0 \quad (4.29)$$

$$\dot{\Omega}_r \left[ 1 + \frac{1}{3(1 + f_T/\kappa^2)} \left( \frac{4f_{TT}\rho_0\Omega_r\dot{\Omega}_m}{\kappa^2\dot{\Omega}_r} + \frac{f_T}{\kappa^2} \right) \right] + 4H\Omega_r = 0. \quad (4.30)$$

No limite da Relatividade Geral, ambas as equações reduzem-se às leis usuais de conservação, levando a  $\Omega_m \propto a^{-3}$  e  $\Omega_r \propto a^{-4}$ .

Observe que, dado que  $T = \rho_m$ , na família de teorias  $f(R, T)$  a evolução de  $\Omega_m$  não depende de  $\Omega_r$ . Dado o modelo de  $f(R, T)$ , é possível resolver a equação (4.29). No entanto, em cosmologias  $f(R, T)$ , a densidade de radiação, obedecendo a (4.30), inevitavelmente interage com a componente de matéria. Isso implica que a componente de radiação não segue mais a lei  $a^{-4}$  de escala.

Na Figura 4.4, é apresentada a trajetória das densidades de energia fracionárias para os diversos componentes, conforme o fator de escala varia. As curvas em azul retratam a evolução da matéria, enquanto as curvas vermelhas descrevem a evolução da radiação. As curvas esverdeadas ilustram a evolução da densidade de energia efetiva, que resulta da interação entre a contribuição geométrica e a evolução da matéria. É importante notar que a curva da esquerda corresponde ao modelo exponencial, enquanto a curva da direita representa o modelo de potência. Para todas as curvas, os valores atuais da densidade de energia da radiação foram fixados como  $\Omega_{r0} = 9.847 \times 10^{-5}$ , de acordo com o resultado do Planck de 2018. Em ambos os painéis, plotamos o limite  $\Lambda$ CDM como sendo a curva com  $\beta = 0$  (painel esquerdo) e  $n = 0$  (painel direito). Nas curvas restantes, resolvemos a dinâmica dada por (4.29) e (4.30) para o mesmo conjunto de valores de parâmetros de gravidade modificada usados para traçar as Figuras 4.1 e 4.3.



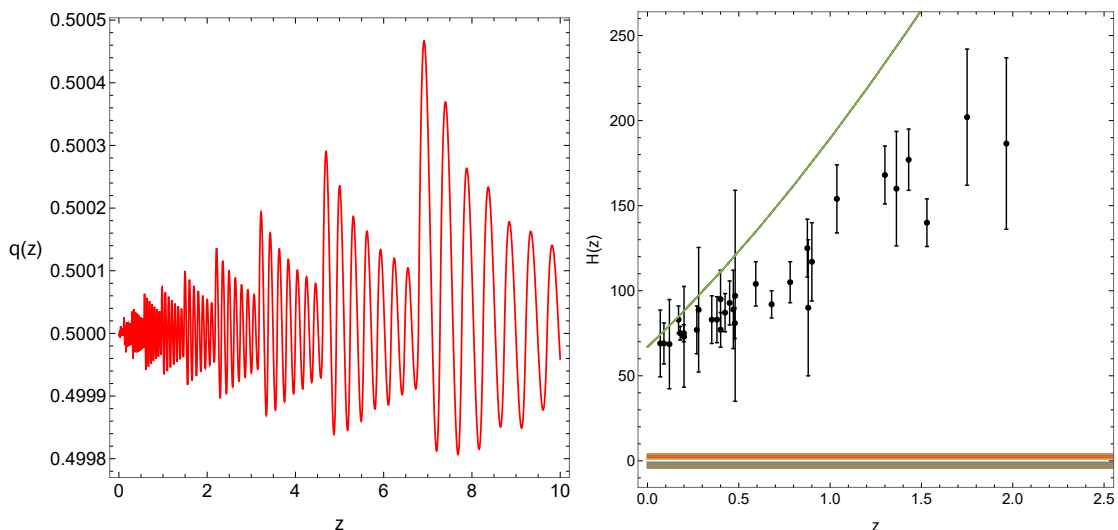
**Figura 4.4:** Evolução da densidade de energia fracionária em função do fator de escala.

Todos os casos com  $\beta \neq 0$  e  $n \neq 0$  são fisicamente sem sentido. Testamos este comportamento até valores da ordem  $\mathcal{O}(10^{-4})$  para  $\alpha$  e  $n$ . Em comum, para  $\beta \neq 0$  e  $n \neq 0$ , ambos os modelos apresentam uma transição da fase dominada pela radiação para a fase de matéria bastante recente. Isso claramente impede que os modelos com  $\beta \neq 0$  e  $n \neq 0$  expliquem, por exemplo, a estrutura dos picos acústicos do fundo cósmico de micro-ondas e o crescimento das sobredensidades de matéria. Esse comportamento vai além das expectativas cosmológicas convencionais. A Figura 4.5 mostram como é o comportamento do parâmetro de desaceleração  $q(z)$ , e das curvas  $H(z)$

Dessa forma, a anomalia observada na maneira como a radiação interage com ambos os modelos de  $f(R, T)$  aponta para uma possível inviabilidade dos modelos em sua totalidade. Como já observado na seção anterior, enquanto eles se mostram coerentes com a dinâmica cosmológica atual (baixos redshifts), ao retrocedermos ao passado, eles revelam-se inconsistentes pois a inclusão da radiação é inevitável.

#### 4.2.4 Um comentário sobre o caso não-minimamente acoplado.

Quando falamos de "acoplamento não-mínimo", nos referimos à situação em que há uma interação ou acoplamento direto entre a matéria e as outras partes da ação que não são apenas o tensor de curvatura. No contexto da teoria  $f(R, T)$  o acoplamento não mínimo ocorre quando a função  $f(R, T)$  depende tanto de  $R$  quanto de  $T$ . Isso significa que a ação



**Figura 4.5:** A esquerda o parâmetro de desaceleração em função do redshift para  $\lambda = -4$  e  $n=2.75$ . A direita as curvas de  $H(z)$  dentro do intervalo  $\lambda = (-4, -1)$  e  $n=(1,4)$  com os dados da Tabela 1 disponível em [62]

que descreve a gravidade nesses modelos inclui termos que são funções tanto do tensor de curvatura quanto do tensor energia-momento. A evolução de fundo cosmológico em casos de acoplamento não-mínimo tem a forma

$$f(R, T) = f_1(R) + f_1(R)f_2(T), \quad (4.31)$$

que foi investigada em Refs. [42, 59]. Conforme mostrado nessas referências, as equações de Friedmann modificadas resultantes são tais que a taxa de expansão ao quadrado depende de sua derivada. Portanto, uma relação de restrição como (4.18) não pode ser imposta para determinar o valor de  $\Omega_0$ . Em vez de resolver numericamente a dinâmica de fundo, nas referências [42, 59], soluções analíticas são encontradas ao impor que a taxa de expansão tenha uma dependência de lei de potência no tempo cósmico.

Uma outra abordagem para resolver a dinâmica de fundo em modelos não minimamente acoplados  $f(R, T)$  é através das equações dinâmicas no formalismo métrico-afim, como estudado inicialmente em Ref. [4].

No entanto, no formalismo métrico-afim (ou formalismo de Palatini), a variação do escalar de Ricci é feita também em termos da conexão, o que significa que o operador  $\Delta_{\mu\nu}$  na equação (4.7) não existe [4]. Em relação às equações de Friedmann modificadas, esse resultado implica que as derivadas primeira e segunda em relação ao tempo,  $\dot{f}_R$  e  $\ddot{f}_R$ , desaparecem.

Para fornecer um exemplo explícito, mostramos agora a dinâmica de fundo do modelo acoplado não minimamente considerando

$$f(R, T) = f_1(R) + f_1(R)f_2(T) = \epsilon R + \lambda_m RT^m. \quad (4.32)$$

O parâmetro  $\epsilon$  permite manter o termo de Einstein-Hilbert intacto ou desativá-lo com  $\epsilon$  nulo. A partir disso, encontramos as seguintes equações de dinâmica cosmológica no formalismo métrico-afim:

$$3H^2 [\epsilon + \lambda_m \rho^m (1 - 3\omega)^m + 4\lambda_m m \rho^m (1 - 3\omega)^{m-1} (1 + \omega)] = \kappa^2 \rho - 6\lambda_m m \rho^m (1 - 3\omega)^{m-1} (1 + \omega) \dot{H}, \quad (4.33)$$

e

$$-2\dot{H} [\epsilon + \lambda_m \rho^m (1 - 3\omega)^m] = \kappa^2 \rho \omega + 3H^2 [\epsilon + \lambda_m \rho^m (1 - 3\omega)^m]. \quad (4.34)$$

Ambas as expressões (4.33) e (4.34) são diferentes dos resultados anteriores apresentados na literatura com base no formalismo métrico [42, 59]. Combinando (4.33) e (4.34), encontramos a taxa de expansão de fundo não minimamente acoplada  $f(R, T)$  com base no formalismo métrico-afim

$$\frac{H^2}{H_0^2} = [\epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega^m (1 - 3\omega)^m + \tilde{\lambda}_m m \Omega^m (1 + \omega) (1 - 3\omega)^{m-1}]^{-1} \times \left\{ \Omega + \frac{6\tilde{\lambda}_m m \Omega (1 + \omega) (1 - 3\omega)^{m-1} \omega \Omega^m}{2[\epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega^m (1 - 3\omega)^m]} \right\}. \quad (4.35)$$

O parâmetro adimensional acima foi definido como

$$\tilde{\lambda}_m = \lambda_m \rho_0^m. \quad (4.36)$$

Vale ressaltar que o caso limite  $m = 0$  não é equivalente à cosmologia  $\Lambda$ CDM. Em vez disso, esse caso implica em uma simples redefinição do acoplamento gravitacional  $\kappa^2$  por um valor constante  $(\epsilon + \tilde{\lambda}_0)$ .

Contrariamente ao formalismo métrico, a equação acima para  $H$  obtida na abordagem métrico-afim permite estabelecer a relação de restrição entre  $\Omega_0$  e os parâmetros de gravidade modificada, como em (4.18), ou seja,

$$1 = \left[ \epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega_0^m (1 - 3\omega)^m + \tilde{\lambda}_m m \Omega_0^m (1 + \omega) (1 - 3\omega)^{m-1} \right]^{-1} \times \left\{ \Omega_0 + \frac{6\tilde{\lambda}_m m \Omega_0 (1 + \omega) (1 - 3\omega)^{m-1} \omega \Omega_0^m}{2[\epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega_0^m (1 - 3\omega)^m]} \right\}. \quad (4.37)$$

Para obter a evolução dinâmica do parâmetro de densidade de matéria  $\Omega$ , resolve-se sua lei de conservação expressa pela equação

$$\dot{\Omega} + 3H\Omega(1 + \omega) = \left\{ 1 + \frac{\chi\omega}{\zeta [\epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega^m (1 - 3\omega)^m]} \right\}^{-1} \times \left\{ (1 + \omega) \left( \frac{\dot{\chi}}{\chi} - \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} \right) \Omega - \dot{\Omega}\omega + \frac{\dot{\Omega}\chi\omega}{\zeta [\epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega^m (1 - 3\omega)^m]} \right\}, \quad (4.38)$$

onde definimos

$$\chi = \left[ \epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega^m (1 - 3\omega)^m + \tilde{\lambda}_m m \Omega^m (1 - 3\omega)^{m-1} (1 + \omega) \right], \quad (4.39)$$

e

$$\zeta = 1 + \frac{3\tilde{\lambda}_m (1 + \omega) (1 - 3\omega)^{m-1} \omega \Omega^m}{\epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega^m (1 - 3\omega)^m}. \quad (4.40)$$

Agora, assumindo uma componente de matéria sem pressão,  $\omega = 0$ , a derivada temporal de (4.39) e (4.40) reduz-se, respectivamente, a  $\dot{\chi} = \tilde{\lambda}_m m (m + 1) \Omega^{m-1} \dot{\Omega}$  e  $\dot{\zeta} = 0$ . Assim, usando esses resultados, a equação (4.38), agora escrita em função do redshift, torna-se

$$\dot{\Omega}(1 + z) + 3H\Omega = \frac{\tilde{\lambda}_m m (m + 1) \dot{\Omega} (1 + z) \Omega^m}{\epsilon + \tilde{\lambda}_m \Omega^m (m + 1)}. \quad (4.41)$$

Os casos limites que levam a modelos conservativos são facilmente identificados, ou seja,  $\tilde{\lambda}_m = 0$  ou  $m = 0, -1$ . Mais uma vez, usando a mesma estratégia da seção anterior, podemos aplicar os limites fornecidos em (4.18) à relação de restrição (4.37) para encontrar os valores permitidos dos parâmetros de gravidade modificada. Em seguida, resolvemos numericamente a equação (4.41) para os valores permitidos dos parâmetros de gravidade modificada e descobrimos que toda a dinâmica cosmológica resultante é inconsistente com os dados. Em

particular, todos os casos têm uma evolução semelhante à de Einstein-de Sitter para todos os redshifts, não havendo transição para uma época acelerada.

## Conclusões

Nosso objetivo neste trabalho foi revisitar a expansão de fundo cosmológico em teorias de gravidade  $f(R, T)$ , focando no modelo minimamente acoplado  $f(R, T) = f_1(R) + f_2(T)$ . O último caso representa uma situação particular dentro das teorias de gravidade modificada em que a taxa de expansão  $H$  pode ser expressa explicitamente em termos do parâmetro de densidade de matéria total  $\Omega$ , bem como os parâmetros do modelo de gravidade modificada. Isso nos permite encontrar a relação restritiva (4.18), que é a relação mais importante neste trabalho. A validade de (4.18) permite, portanto, impor restrições rigorosas nos parâmetros livres do modelo. Ao interpretar  $\Omega_0$  como o parâmetro efetivo de densidade de matéria fracionária e exigir que ele seja limitado pelas estimativas da fração de massa de gás em aglomerados de galáxias dadas por (4.21), podemos restringir diretamente os parâmetros de gravidade modificada que aparecem em (4.14). Um requisito adicional diz respeito à idade do universo. Os parâmetros de gravidade modificada devem fornecer uma idade para o universo maior do que a idade estimada dos aglomerados globulares galácticos. As Figuras 4.1 e 4.3 resumem nossas principais descobertas. De fato, há um espaço de parâmetros de gravidade modificada muito pequeno permitido pelos dados cosmológicos de fundo para baixos redshift.

No entanto, é possível que ao considerar a radiação nas perturbações de primeira ordem, o espectro CMB seja afetado. Isso ocorre porque, nos modelos  $f(R, T)$ , espera-se que a densidade de energia radiativa não siga mais a escala  $\propto a^{-4}$ . A introdução da radiação em ambos os modelos apresentados, revela uma incompatibilidade na dinâmica cósmica em tempos tardios. Enquanto os modelos parecem coerentes com a atualidade, seu desempenho retrocedendo no tempo é inconsistente, como mostra a Figura 4.4, indicando uma possível inviabilidade da teoria quando examinada em sua totalidade.

Em síntese, nossa análise, em comparação com o trabalho anterior [66], oferece uma abordagem mais refinada. Ela indica claramente que existe uma região no espaço de parâmetros livres, próxima a  $n = 0$  ou  $\beta = 0$ , que é compatível com os dados observacionais em baixos redshifts. No entanto, ao considerarmos a inclusão da radiação nos modelos, o cenário da viabilidade da teoria  $f(R, T)$  é questionada, pois ela apresenta uma dinâmica cosmológica que não se alinha com a realidade observada.

Como uma observação final, a relação restritiva (4.18) não existe nos modelos não minimamente acoplados usando o formalismo métrico, uma vez que  $H^2$  depende da derivada



$\dot{H}$ . Isso também ocorre nas teorias  $f(R)$ . No entanto, na abordagem métrico-afim, as equações de Friedmann modificadas levam à relação restritiva (4.37). A evolução dinâmica de fundo do caso não minimamente acoplado, por outro lado, não é viável, uma vez que todos os valores de parâmetros de gravidade modificados permitidos pelos limites da fração de gás são consistentes com cosmologias de Einstein-de Sitter para todos os deslocamentos para o vermelho, ou seja, o universo não transita para uma fase acelerada, como apoiado pelos observáveis cosmológicos atuais.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ade, P. A. R. et al. **Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters.** *Astron. Astrophys.* 594 (2016), A13 (citado na página 20).
- [2] Aghanim, N. et al. **Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters.** *Astron. Astrophys.* 641 (2020). [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)], A6 (citado nas páginas 33, 35, 36, 50).
- [3] Arias, P., Cadamuro, D., Goodsell, M. et al. **WISPy Cold Dark Matter.** *JCAP* 06 (2012), p. 013 (citado na página 33).
- [4] Barrientos, E., Lobo, F. S. N., Mendoza, S., Olmo, G. J. e Rubiera-Garcia, D. **Metric-affine  $f(R,T)$  theories of gravity and their applications.** *Phys. Rev. D* 97.10 (2018), p. 104041 (citado na página 56).
- [5] Bekenstein, J. D. **Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm.** *Phys. Rev. D* 70 (2004). [Erratum: *Phys. Rev. D* 71, 069901 (2005)], p. 083509 (citado na página 41).
- [6] Bernstein, G. M. e Jain, B. **Dark energy constraints from weak lensing cross - correlation cosmography.** *Astrophys. J.* 600 (2004), pp. 17–25 (citado na página 35).
- [7] Bertini, N. R. e Velten, H. **Fully conservative  $f(R,T)$  gravity and Solar System constraints.** *Phys. Rev. D* 107.12 (2023), p. 124005 (citado na página 46).
- [8] Bertone, G. e Hooper, D. **History of dark matter.** *Rev. Mod. Phys.* 90.4 (2018), p. 045002 (citado nas páginas 31, 32).
- [9] Bertone, G., Hooper, D. e Silk, J. **Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints.** *Phys. Rept.* 405 (2005), pp. 279–390 (citado na página 32).
- [10] Blok, W. J. G. de e Bosma, A. **High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies.** *Astron. Astrophys.* 385 (2002), p. 816 (citado na página 31).
- [11] Brans, C. e Dicke, R. H. **Mach's principle and a relativistic theory of gravitation.** *Physical review* 124.3 (1961), p. 925 (citado na página 41).
- [12] Bull, P. et al. **Beyond  $\Lambda$ CDM: Problems, solutions, and the road ahead.** *Phys. Dark Univ.* 12 (2016), pp. 56–99 (citado na página 40).
- [13] Bullock, J. S. e Boylan-Kolchin, M. **Small-Scale Challenges to the  $\Lambda$ CDM Paradigm.** *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 55 (2017), pp. 343–387 (citado na página 40).

- [14] Bullock, J. S., Kolatt, T. S., Sigad, Y. et al. **Profiles of dark haloes. Evolution, scatter, and environment.** *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 321 (2001), pp. 559–575 (citado na página 40).
- [15] Carroll, S. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.** Benjamin Cummings, 2003 (citado nas páginas 4, 37).
- [16] Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A. e Skordis, C. **Modified Gravity and Cosmology.** *Phys. Rept.* 513 (2012), pp. 1–189 (citado na página 41).
- [17] Clowe, D., Bradac, M., Gonzalez, A. H. et al. **A direct empirical proof of the existence of dark matter.** *Astrophys. J. Lett.* 648 (2006), pp. L109–L113 (citado na página 33).
- [18] Copeland, E. J., Sami, M. e Tsujikawa, S. **Dynamics of dark energy.** *Int. J. Mod. Phys. D* 15 (2006), pp. 1753–1936 (citado nas páginas 34, 38).
- [19] Courteau, S. et al. **Galaxy Masses.** *Rev. Mod. Phys.* 86 (2014), pp. 47–119 (citado na página 32).
- [20] D’Inverno, R. **Introducing Einstein’s Relativity.** Clarendon Press, 1992 (citado na página 4).
- [21] De Felice, A. e Tsujikawa, S. **f(R) theories.** *Living Rev. Rel.* 13 (2010), p. 3 (citado na página 42).
- [22] Dodelson, S. **Modern Cosmology.** Elsevier Science, 2003 (citado na página 8).
- [23] Einstein, A. **Zur Elektrodynamik bewegter Körper.** *Annalen der Physik* 322.10 (1905), pp. 891–921 (citado na página 3).
- [24] Frenk, C. S. e White, S. D. M. **Dark matter and cosmic structure.** *Annalen Phys.* 524 (2012), pp. 507–534 (citado na página 33).
- [25] Friedmann, A. **Über die krümmung des raumes.** *Z. Phys.* 10 (1922), pp. 377–386 (citado na página 26).
- [26] Frieman, J., Turner, M. e Huterer, D. **Dark Energy and the Accelerating Universe.** *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 46 (2008), pp. 385–432 (citado nas páginas 35, 38).
- [27] Gonçalves, T. B., Rosa, J. L. e Lobo, F. S. N. **Cosmological sudden singularities in f(R, T) gravity.** *Eur. Phys. J. C* 82.5 (2022), p. 418 (citado na página 42).
- [28] Hamuy, M., Phillips, M. M., Maza, J. et al. **A Hubble diagram of distant type IA supernovae.** *Astron. J.* 109 (1995), pp. 1–13 (citado na página 34).
- [29] Harko, T. e Lobo, F. S. N. **f(R,  $L_m$ ) gravity.** *Eur. Phys. J. C* 70 (2010), pp. 373–379 (citado na página 42).

- [30] Harko, T., Lobo, F. S. N., Nojiri, S. e Odintsov, S. D.  $f(R, T)$  gravity. *Phys. Rev. D* 84 (2011), p. 024020 (citado na página 42).
- [31] Hernández-Arboleda, A. e Rodrigues, D. **Rotação de galáxias e matéria escura**. *Cadernos de Astronomia* 2 (2021), p. 6 (citado na página 32).
- [32] Horndeski, G. W. **Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space**. *Int. J. Theor. Phys.* 10 (1974), pp. 363–384 (citado na página 41).
- [33] Hubble, E. **A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae**. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 15 (1929), pp. 168–173 (citado na página 19).
- [34] Jensen, J. W. **Supernovae light curves: An Argument for a new distance modulus**. *Annual APS April Meeting*. 2004 (citado na página 34).
- [35] Jimenez, R. e Loeb, A. **Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages**. *Astrophys. J.* 573 (2002), pp. 37–42 (citado na página 49).
- [36] JÚLIO CÉSAR FABRIS JÚNIOR DINIZ TONIATO, H. V. **Gravitação**. Editora Livraria da Física, 2021 (citado nas páginas 29, 36).
- [37] Lelli, F., McGaugh, S. S. e Schombert, J. M. **SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves**. *Astron. J.* 152 (2016), p. 157 (citado na página 32).
- [38] Liddle, A. R. **An introduction to modern cosmology**. 1998 (citado nas páginas 17, 18, 29, 30).
- [39] Lobão, A. S., Rosa, J. L. e Bazeia, D. **Scalar-tensor representation to  $f(R, T)$ -brane with Gauss-Bonnet gravity**. 2023 (citado na página 42).
- [40] Luković, V. V., D'Agostino, R. e Vittorio, N. **Is there a concordance value for  $H_0$ ?** *Astron. Astrophys.* 595 (2016), A109 (citado na página 20).
- [41] Mantz, A. B., Allen, S. W., Morris, R. G. et al. **Cosmology and astrophysics from relaxed galaxy clusters – II. Cosmological constraints**. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 440.3 (2014), pp. 2077–2098 (citado nas páginas 43, 49).
- [42] Moraes, P. H. R. S. e Sahoo, P. K. **The simplest non-minimal matter-geometry coupling in the  $f(R, T)$  cosmology**. *Eur. Phys. J. C* 77.7 (2017), p. 480 (citado nas páginas 56, 57).
- [43] Moraes, P. H. R. S., Sahoo, P. K. e Pacif, S. K. J. **Viability of the  $R + e^T$  cosmology**. *Gen. Rel. Grav.* 52.4 (2020), p. 32 (citado na página 46).
- [44] Nagpal, R., Singh, J. K., Beesham, A. e Shabani, H. **Cosmological aspects of a hyperbolic solution in  $f(R, T)$  gravity**. *Annals Phys.* 405 (2019), pp. 234–255 (citado na página 42).

- [45] Navarro, J. F., Frenk, C. S. e White, S. D. M. **The Structure of cold dark matter halos.** *Astrophys. J.* 462 (1996), pp. 563–575 (citado na página 40).
- [46] Navarro, J. F., Hayashi, E., Power, C. et al. **The Inner structure of Lambda-CDM halos 3: Universality and asymptotic slopes.** *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 349 (2004), p. 1039 (citado na página 33).
- [47] Nojiri, S., Odintsov, S. D. e Oikonomou, V. K. **Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution.** *Phys. Rept.* 692 (2017), pp. 1–104 (citado na página 41).
- [48] Nojiri, S. e Odintsov, S. D. **Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models.** *Phys. Rept.* 505 (2011), pp. 59–144 (citado na página 42).
- [49] Ntelis, P. **The Homogeneity Scale of the universe.** 2016 (citado na página 18).
- [50] Peng, P. **The Pantheon Sample analysis of cosmological constraints under new models** (2023) (citado na página 40).
- [51] Perlmutter, S. et al. **Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high redshift supernovae.** *Astrophys. J.* 517 (1999), pp. 565–586 (citado nas páginas 34, 35, 38).
- [52] Riess, A. G. et al. **A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant.** *Astrophys. J.* 826.1 (2016), p. 56 (citado na página 20).
- [53] Riess, A. G. et al. **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant.** *Astron. J.* 116 (1998), pp. 1009–1038 (citado nas páginas 34, 35, 38).
- [54] Rodrigues, D. C. e Hernández-Arboleda, A. **Rotação de galáxias e matéria escura.** *Cadernos de Astronomia* 2.1 (2021), p. 6 (citado na página 31).
- [55] Sachs, R. K. e Wolfe, A. M. **Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background.** *Astrophys. J.* 147 (1967), pp. 73–90 (citado na página 35).
- [56] Sahoo, P. K., Moraes, P. H. R. S., Sahoo, P. e Bishi, B. K.  **$f(R, T) = f(R) + \lambda T$  gravity models as alternatives to cosmic acceleration.** *Eur. Phys. J. C* 78.9 (2018), p. 736 (citado na página 42).
- [57] Shabani, H. e ziaie, A. H. **Late-time cosmological evolution of a general class of  $f(R, T)$  gravity with minimal curvature-matter coupling.** *Eur. Phys. J. C* 77.8 (2017), p. 507 (citado na página 42).
- [58] Sofue, Y. e Rubin, V. **Rotation curves of spiral galaxies.** *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 39 (2001), pp. 137–174 (citado nas páginas 31, 32).

- [59] Sofuoğlu, D., Tiwari, R. K., Abebe, A., Alfedeel, A. H. A. e Hassan, E. I. **The Cosmology of a Non-Minimally Coupled  $f(R, T)$  Gravitation**. *MDPI Physics* 4.4 (2022), pp. 1348–1358 (citado nas páginas 56, 57).
- [60] Tegmark, M. et al. **Cosmological parameters from SDSS and WMAP**. *Phys. Rev. D* 69 (2004), p. 103501 (citado na página 35).
- [61] **Universo em expansão: centenário do modelo cosmológico de Friedmann**. *Cadernos de Astronomia* 3.1 (2022) (citado na página 26).
- [62] Vagnozzi, S., Loeb, A. e Moresco, M. **Eppur è piatto? The Cosmic Chronometers Take on Spatial Curvature and Cosmic Concordance**. *Astrophys. J.* 908.1 (2021), p. 84 (citado nas páginas 49, 51, 56).
- [63] Valcin, D., Bernal, J. L., Jimenez, R., Verde, L. e Wandelt, B. D. **Inferring the Age of the Universe with Globular Clusters**. *JCAP* 12 (2020), p. 002 (citado nas páginas 43, 48).
- [64] Valcin, D., Jimenez, R., Verde, L., Bernal, J. L. e Wandelt, B. D. **The age of the Universe with globular clusters: reducing systematic uncertainties**. *JCAP* 08 (2021), p. 017 (citado nas páginas 43, 48).
- [65] Velten, H. **Matéria escura e as estruturas cósmicas**. *Cadernos de Astronomia* 2.1 (2021), p. 58 (citado na página 33).
- [66] Velten, H. e Caramês, T. R. P. **Cosmological inviability of  $f(R, T)$  gravity**. *Phys. Rev. D* 95.12 (2017), p. 123536 (citado nas páginas 42, 43, 46–48, 60).
- [67] Weinberg, D. H., Bullock, J. S., Governato, F., Kuzio de Naray, R. e Peter, A. H. G. **Cold dark matter: controversies on small scales**. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 112 (2015), pp. 12249–12255 (citado na página 40).
- [68] Zwicky, F. **Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln**. *Helv. Phys. Acta* 6 (1933), pp. 110–127 (citado na página 31).