

# **ANÁLISE COMPARATIVA DE ALGUMAS ESTRUTURAS DE FILTROS DIGITAIS DE SEGUNDA ORDEM IMUNES A CICLOS LIMITE**

Ana Cristina Staut Simmer

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica-Automação.

Aprovada por:

---

---

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
VITÓRIA, AGOSTO DE 1994

Simmer, Ana Cristina Staut  
Análise Comparativa de Algumas Estruturas de Filtros Digitais de Segunda Ordem  
Imunes a Ciclos Limite. [Vitória] 1994

Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo.

## **Sumário**

## **Lista de Figuras e Tabelas**

## **Resumo**

## **Abstract**

## **Sumário**

### **Capítulo 1**

### **O Trabalho Desenvolvido**

- 1.1- Conceituação de Filtros Digitais
- 1.2- Propriedades Básicas de Filtros Digitais
  - 1.2.1- Linearidade
  - 1.2.2- Causalidade
  - 1.2.3- Invariância ao Deslocamento
- 1.3- Estabilidade de Filtros Digitais
- 1.4- Descrição dos Filtros Digitais
- 1.5- Elementos Básicos de um Filtro Digital
- 1.6- Classificação dos Filtros Digitais
- 1.7- Realização dos Filtros Digitais
- 1.8- O Trabalho Desenvolvido
  - 1.8.1- As Novas Transformações Espectrais
  - 1.8.2- Análise Comparativa do Desempenho

### **Capítulo 2**

### **Ciclos Limite em Filtros Digitais**

- 2.1- Representação Numérica
  - 2.1.1- Representação Numérica em Ponto Fixo
    - A) Sinal Magnitude
    - B) Complemento a Um

- C) Complemento a Dois
- 2.1.2- Representação Numérica em Ponto Flutuante
- 2.1.3- Erros Devido à Palavra de Comprimento Finito
- 2.2- Ciclos Limite
- 2.2.1- Ciclos Limite Granulares
- 2.2.2- Ciclos Limite Devidos a "Overflow"
- 2.3- Técnicas de Eliminação de Ciclos Limite
- 2.3.1- Eliminação de Ciclos Limite à Entrada Zero
- 2.3.2- Eliminação de Ciclos Limite à Entrada Constante
- 2.3.3- Eliminação de Ciclos Limite Devidos a "Overflow"
- 2.4- Conclusões

## **Capítulo 3**

### **Estruturas Digitais no Espaço de Estados de Segunda Ordem Livres de Ciclos Limite**

- 3.1- Descrição das Estruturas no Espaço de Estados
- 3.2- A Estrutura de Segunda Ordem de Mínimo Ruído
- 3.3- Estruturas Livres de Ciclos Limite
- 3.3.1- A Estrutura Quase Ótima
- 3.3.2- Outras Estruturas Imunes a Ciclos Limite
  - A) A Estrutura de Segunda Ordem sem Ciclos Limite Tipo I
  - B) A Estrutura de Segunda Ordem sem Ciclos Limite Tipo III
- 3.4- Comparação da Complexidade Computacional
- 3.5- Conclusões

## **Capítulo 4**

### **Transformações Espectrais para Filtros Digitais**

- 4.1- As Transformações Espectrais sobre Protótipos Passa-Baixas
- 4.1.1- Transformação Passa-Baixas Passa-Baixas
- 4.1.2- Transformação Passa-Baixas Passa-Altas
- 4.1.3- Transformação Passa-Baixas Passa-Banda
- 4.1.4- Transformação Passa-Baixas Rejeita-Banda
- 4.2- Transformações Espectrais em Protótipos Quaisquer
- 4.2.1- Transformação Passa-Altas Passa-Altas
- 4.2.2- Transformação Passa-Banda Passa-Banda
- 4.2.3- Transformação Rejeita-Banda Rejeita-Banda
- 4.3- Conclusões

## **Capítulo 5**

# **Análise Comparativa da Variância Relativa do Ruído na Saída do Filtro Digital**

5.1- Análise Comparativa da Variância Relativa de Ruído

5.1.1- O Caso Passa-Baixas

5.1.2- O Caso Passa-Altas

5.1.3- O Caso Passa-Banda

5.1.4- O Caso Rejeita-Banda

5.2- Análise Comparativa da Variância Relativa de Ruído segundo as Transformações Espectrais de Constantinides

5.3- Conclusões

## **Capítulo 6**

# **Conclusão**

## **Referências Bibliográficas**

# **Lista de Figuras e Tabelas**

## **Capítulo 1** **O Trabalho Desenvolvido**

Figura 1.1a: O atraso.

Figura 1.1b: O multiplicador.

Figura 1.1c: O somador.

Figura 1.2a: O atraso.

Figura 1.2b: O multiplicador.

Figura 1.2c: O somador.

Figura 1.3: O quantizador.

## **Capítulo 2** **Ciclos Limite em Filtros Digitais**

Figura 2.1: Característica de quantização, erro de quantização e distribuição estatística do erro para os casos de arredondamento, truncamento e truncamento em magnitude

Figura 2.2: Filtro digital representado no espaço de estados.

Figura 2.3: Modificação do filtro digital para eliminação de ciclos limite no caso de entrada constante.

Figura 2.4: Escalamento em filtros digitais.

Figura 2.5: Tratamento de "overflow" para garantia de resposta forçada estável.

## **Capítulo 3** **Estruturas Digitais no Espaço de Estados de Segunda Ordem Livres de Ciclos Limite**

Figura 3.1: Estrutura no espaço de estados de ordem 2.

Figura 3.2: A estrutura de mínimo ruído.

Figura 3.3: Estrutura sem ciclos limite genérica.

Figura 3.4: A estrutura quase ótima.

Figura 3.5: Estrutura de segunda ordem sem ciclos limite tipo I.

Figura 3.6: Estrutura de segunda ordem sem ciclos limite tipo II.

Figura 3.7: Estrutura de segunda ordem sem ciclos limite tipo III.

Figura 3.8: Rede sem ciclos limite tipo I escalada.

Tabela 3.1: Implementação de um filtro paralelo de N blocos.

## Capítulo 4

### Transformações Espectrais para Filtros Digitais

Figura 4.1 (a): Protótipo passa-baixas.

Figura 4.1 (b) Filtro passa-baixas obtido pela transformação daquele em (a).

Figura 4.2: Filtro passa-altas obtido a partir do protótipo passa-baixas da Figura 4.1(a).

Figura 4.3: Filtro passa-banda obtido a partir do protótipo passa-baixas da Figura 4.1(a).

Figura 4.4: Filtro rejeita-banda obtido a partir do protótipo passa-baixas da Figura 4.1(a).

Figura 4.5: Estapas da transformação passa-baixas passa-altas.

Figura 4.6: Nova concepção da transformação passa-baixas passa-altas.

Figura 4.7: Aplicação da transformação espectral passa-altas passa-altas.

Figura 4.8: A transformação passa-baixas passa-banda original.

Figura 4.9: Nova transformação passa-baixas passa-banda.

Figura 4.10: Aplicação da transformação espectral passa-banda passa-banda.

Figura 4.11: A transformação passa-baixas rejeita-banda original.

Figura 4.12: Nova transformação passa-baixas rejeita-banda.

Figura 4.13: Aplicação da transformação espectral rejeita-banda rejeita-banda.

Tabela 4.1: Mapeamento da transformação passa-baixas passa-banda.

Tabela 4.2: Mapeamento da transformação passa-baixas rejeita-banda.

Tabela 4.3: Transformações espectrais em protótipos passa-baixas de frequência de corte  $\beta$ .

Tabela 4.4: Mapeamento de frequências para a transformação passa-banda passa-banda.

## Capítulo 5

### Análise Comparativa da Variância Relativa do Ruído na Saída do Filtro Digital

Figura 5.1: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o exemplo passa-baixas.

Figura 5.2: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o caso do filtro passa-altas tipo Chebyshev.

Figura 5.3: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o caso do filtro passa-altas elíptico.

Figura 5.4: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o caso do filtro passa-banda elíptico.

Figura 5.5: Variância relativa do ruído versus largura da banda de rejeição para o caso do filtro rejeita-banda tipo elíptico.

Figura 5.6: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o filtro passa-banda.

Figura 5.7: Variância relativa do ruído versus largura da banda de rejeição para o filtro rejeita-banda.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo comparativo do desempenho, a nível da variância relativa do ruído na saída, em função da largura da banda passante (ou de rejeição), para algumas estruturas de segunda ordem, no espaço de estados, utilizadas na implementação de filtros digitais passa-baixas, passa-altas, passa-banda e rejeita-banda. Tal estudo complementa o trabalho realizado em [23], que aborda apenas o caso de filtros passa-baixas. Em ambos os estudos, somente estruturas no espaço de estados são consideradas, por se tratar de implementação de filtros digitais de banda estreita, casos em que a literatura aponta o bom desempenho de tais estruturas.

A fim de efetuar tal avaliação para todos os espectros, novas transformações espectrais, derivadas das transformações de Constantinides, são obtidas, permitindo variar a largura da banda passante (ou de rejeição) de um filtro digital protótipo, implementado na forma paralela, que é o único caso aqui abordado.

Todo este esforço se justifica pela importância de se conhecer o comportamento das estruturas mais adequadas para uma dada aplicação, o que contribui de forma bastante significativa para o projeto de filtros digitais.

# Abstract

This work is a comparative study of the relative output roundoff noise variance performance for some second-order state-space structures, as a function of the filter bandwidth. The addressed second-order structures are used as building blocks for realizing lowpass, highpass, bandpass and bandreject digital filters. In this sense, this study complements a recent one, which just investigated the lowpass filter case. In both studies only narrow-band digital filters are discussed, regarding the well known good performance of the state-space structures in those cases.

In order to compare the output roundoff noise performance for all spectra, new first-order spectral transformations, derived from the well known transformations due to Constantinides, are developed, for varying the filter bandwidth of a parallel-form prototype filter.

All this effort is justified by the importance of knowing the performance of the structures which are suitable for a desired application, what represents a significative contribution to the problem of designing digital filters.

# Capítulo 1

## O Trabalho Desenvolvido

Nos últimos anos, um significativo progresso tem ocorrido na área de processamento digital de sinais, com o avanço da tecnologia digital. Com o uso extensivo dos computadores digitais de uso genérico e de processadores digitais de uso específico, tornou-se possível realizar funções de transferência equivalentes às realizadas pelos sistemas analógicos, efetivando-se a implementação de sistemas discretos no tempo. Tal implementação tem vantagem de evitar alguns problemas pertinentes à implementação dos sistemas analógicos, tais como confiabilidade, reprodutividade, etc.

Seguindo esta linha de pesquisa, a importante classe de algoritmos denominada filtros digitais teve grande impulso. A implementação desses filtros, principalmente quando de ordem elevada (grande complexidade), normalmente é feita através das realizações em forma paralela ou cascata de blocos de ordem dois. Dentre tais estruturas, tem se sobressaído aquelas em que as estruturas de segunda ordem são descritas no espaço de estados, principalmente por seu desempenho nos casos de filtros de banda estreita, significativamente superior ao de outras estruturas. Assim, muitos vêm sendo os trabalhos publicados [2], [4], [8], [23] que apresentam estruturas de segunda ordem particulares para a implementação de filtros digitais, com vantagens como redução da complexidade computacional, melhoria do desempenho à nível de ruído na saída e imunidade a ciclos limite.

Diante do conhecimento destas estruturas, e da possibilidade de surgimento de outras, torna-se de grande interesse determinar, para um projeto específico de um filtro digital, a estrutura que apresenta melhor desempenho à nível de ruído na saída, dentro da faixa de frequências requerida.

Dentro dessa ótica, o presente trabalho realiza uma análise comparativa do nível de ruído na saída de filtros digitais na forma paralela, para qualquer tipo de espectro, com banda passante de largura variável, usando quatro importantes estruturas de segunda ordem. O objetivo principal é comparar o desempenho das estruturas de segunda ordem em si, razão pela qual apenas a estrutura na forma paralela é utilizada. Um primeiro trabalho neste sentido [23] foi recentemente apresentado, no qual a avaliação limitou-se ao caso de espectros passa-baixas, visto que a variação da largura da banda passante era feita via as transformações espectrais de Constantinides [6], aplicáveis apenas a filtros protótipos passa-baixas. Tal avaliação é agora estendida aos demais espectros (passa-altas, passa-banda e rejeita-banda), e são usadas novas transformações espectrais, aplicáveis a filtros protótipos quaisquer, também aqui desenvolvidas. Desta forma, dado um filtro específico, o objetivo é variar a largura da sua banda passante, através de transformações espectrais adequadas, e então determinar a variância relativa do ruído na saída do filtro, para cada

caso, com vistas a determinar faixas de frequência em que cada uma das estruturas de segunda ordem avaliadas é mais adequada.

Com o propósito de se alcançar uma melhor compreensão deste estudo, será aqui apresentada uma breve abordagem dos filtros digitais, no que diz respeito à sua conceituação, suas propriedades básicas, sua estabilidade, sua descrição, sua classificação e sua realização. Por fim, os demais itens deste Capítulo 1 procuram descrever sucintamente o conteúdo dos capítulos seguintes.

## **1.1- CONCEITUAÇÃO DE FILTROS DIGITAIS [22]**

Um filtro digital é um sistema digital que atua sobre uma sequência de amostras do sinal de entrada  $u[n]$ , gerando uma sequência de amostras de saída  $y(n)$ , sendo caracterizado por

$$y[n] = F[u[n]] \quad (1.1)$$

ou seja, um filtro digital é caracterizado por um mapeamento da sequência de amostras de entrada numa sequência de amostras de saída.

## **1.2- PROPRIEDADES BÁSICAS DE FILTROS DIGITAIS [22]**

Algumas propriedades básicas dos filtros digitais são a seguir caracterizadas.

### **1.2.1- LINEARIDADE**

Um filtro digital é linear se suas respostas

$$y_1[n] = F[x_1[n]] \quad (1.2a)$$

$$y_2[n] = F[x_2[n]] \quad (1.2b)$$

a duas seqüências de entrada  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$  quaisquer são tais que

$$F[ax_1[n] + bx_2[n]] = aF[x_1[n]] + bF[x_2[n]] = ay_1[n] + by_2[n] \quad (1.3)$$

Caso contrário, o filtro digital é dito não linear.

### **1.2.2- CAUSALIDADE**

Um filtro digital é causal quando sua resposta à seqüência de entrada  $x[n]$  em um instante qualquer independe de valores subsequentes desta mesma resposta e da própria entrada. Matematicamente, o filtro digital é causal se, e somente se, para todo par

$$x_1[n] = x_2[n] \quad \text{para} \quad n \leq N \quad (1.4a)$$

$$x_1[n] \neq x_2[n] \quad \text{para} \quad n > N \quad (1.4b)$$

sua resposta é tal que

$$F[x_1[n]] = F[x_2[n]] \quad \text{para} \quad n \leq N \quad (1.5)$$

Caso contrário, o filtro é dito não causal.

### 1.2.3- INVARIÂNCIA AO DESLOCAMENTO

Um filtro digital é invariante ao deslocamento quando sua resposta  $y[n]$  a uma sequência de entrada  $x[n]$  qualquer é tal que se a entrada for atrasada de  $k$  amostras a saída será

$$F[x[n - k]] = y[n - k] \quad (1.6)$$

ou seja, também será atrasada de  $k$  amostras. Caso contrário, o filtro digital é dito variante ao deslocamento.

### 1.3- ESTABILIDADE DE FILTROS DIGITAIS[22]

Na maior parte dos casos, os filtros digitais são lineares, invariantes ao deslocamento e causais. Assim sendo, sua resposta  $y[n]$  a uma excitação  $x[n]$  pode ser escrita como

$$y[n] = F \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k] \right] \quad (1.7)$$

tal que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] \quad (1.8)$$

sendo

$$h[n] = F[\delta[n]] \quad (1.9)$$

a resposta ao impulso unitário.

Dessa forma, um sistema linear e invariante ao deslocamento é complementamente caracterizado por sua resposta  $h[n]$  ao impulso unitário, através da equação (1.8), que é chamada de somatório convolução, e que também pode ser escrita como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot h[k] \quad (1.10)$$

através de uma transformação de variáveis adequada.

Nesse ponto, o importante conceito de estabilidade pode ser abordado: um sistema é dito estável, no sentido BIBO (Bounded Input, Bounded Output), se para toda entrada limitada o sinal resultante na saída é limitado.

Para o filtro digital linear e invariante ao deslocamento pode-se afirmar que

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]| \cdot |h[k]| \quad (1.11)$$

Se a entrada  $x[n]$  for limitada, isto é

$$|x[n]| \leq x_{\max} < \infty \quad \forall n \quad (1.12)$$

resulta que uma condição suficiente para que o filtro digital seja estável, no sentido BIBO, é dada por

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (1.13)$$

já que ela torna  $y[n]$  limitado. Por outro lado, a condição (1.13) também é necessária, uma vez que se o somatório nela contido for infinito é sempre possível achar uma entrada finita da qual resultaria uma saída infinita. Por exemplo, se a entrada for tal que

$$x[n-k] = +1 \quad \text{para} \quad h[n] \geq 0 \quad (1.14a)$$

$$x[n-k] = -1 \quad \text{para} \quad h[n] < 0 \quad (1.14b)$$

resulta que

$$y[n] = |y[n]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad (1.15)$$

e, nesse caso, a saída só será limitada, para a entrada limitada, se (1.13) for satisfeita. A conclusão, portanto, é que a equação (1.13) é condição necessária e suficiente para a estabilidade do filtro digital.

#### 1.4- DESCRIÇÃO DOS FILTROS DIGITAIS [22]

Uma descrição detalhada do filtro digital, em termos da transformação F incluída em (1.1), pode ser feita de várias maneiras, mas a mais comum de todas é a descrição através de equação a diferenças. Isso se deve ao fato de que os filtros assim descritos são suficientemente poderosos para atender a maior parte das aplicações práticas. Tal descrição relaciona a entrada e a saída de um filtro digital através de uma equação do tipo

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] - \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] = 0 \quad (1.16)$$

que é análogo à equação diferencial que descreve os sistemas contínuos. Assim como ocorre com as equações diferenciais, uma equação a diferenças tem uma infinidade de soluções para a saída  $y[n]$ , já que qualquer uma de suas soluções particulares somada à solução da equação diferença homogênea também é uma solução. Por sua vez, tal solução da equação diferença homogênea só é completamente determinada se forem dadas as condições auxiliares, ou seja, os valores de  $y[n_0]$ ,  $y[n_0 - 1]$ , ...,  $y[n_0 - N]$ , onde  $n_0$  é um instante particular em que a condição auxiliar é especificada.

Para que um filtro digital descrito por uma equação a diferenças seja linear é necessário que as condições auxiliares sejam nulas, pois se isso não ocorrer o filtro terá, por exemplo, resposta não nula a uma excitação nula, caracterizando-se a não linearidade. Por outro lado, para garantir a causalidade, o filtro digital deve estar inicialmente relaxado. Isso quer dizer que se

$$x[n] = 0 \quad \text{para } n \leq n_0 \quad (1.17a)$$

então

$$y[n] = 0 \quad \text{para } n \leq n_0 \quad (1.17b)$$

Na prática, apenas a solução  $y[n]$  da equação a diferenças, caracterizada em (1.16), que corresponde ao filtro digital causal e linear é de interesse, o que equivale a considerar o sistema inicialmente relaxado. Nesse caso, pode-se mostrar que a referida solução também é invariante ao deslocamento.

Dessa forma, o filtro digital pode ser descrito pela equação a diferenças

$$y[n] = - \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] + \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (1.18)$$

onde  $a_0 = 1$ , sem perda de generalidade. Por sua vez, usando-se o recurso da transformada z, a expressão (1.18) pode ser dada, no domínio da variável complexa z, por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (1.19)$$

com a região de convergência da transformada  $z$  convenientemente escolhida. A expressão  $H(z)$  assim obtida é referida como a função de transferência do filtro. Tal função de transferência é uma função racional de  $z$ , e se caracteriza por seus pólos e zeros, termos estes que têm a mesma conotação associada aos sistemas contínuos. Em função dos pólos e zeros,  $H(z)$  pode ainda ser descrita como

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = H_0 z^{N-M} \frac{\prod_{l=0}^M (z - z_l)}{\prod_{i=0}^N (z - z_i)} \quad (1.20)$$

onde  $z_l$  representa o  $l$ -ésimo zero e  $z_i$  o  $i$ -ésimo pólo de  $H(z)$ .

### 1.5- ELEMENTOS BÁSICOS DE UM FILTRO DIGITAL [22]

Os filtros digitais são realizados a partir de três elementos básicos: o atraso, o multiplicador e o somador, vistos nas Figuras 1.1a, 1.1b e 1.1c, respectivamente.

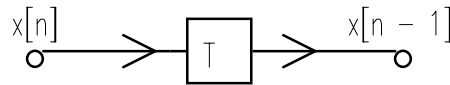


Figura1.1a: O atraso

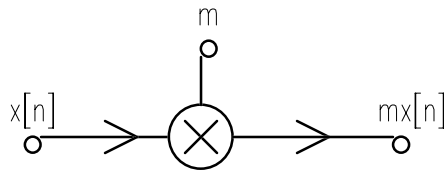


Figura1.1b: O multiplicador

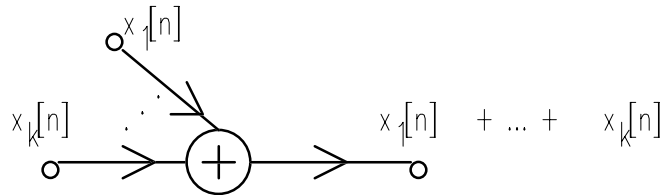


Figura1.1c: O somador

Uma outra alternativa é a representação dos mesmos em forma de grafo, conforme as Figuras 1.2a, 1.2b e 1.2c.

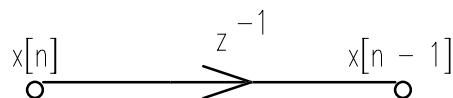


Figura1.2a: O atraso

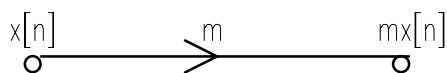


Figura1.2b: O multiplicador

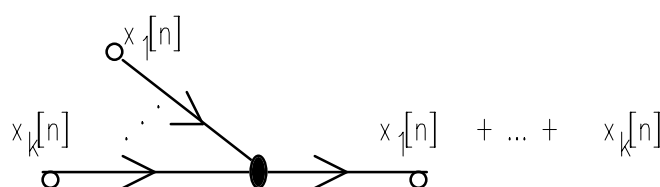


Figura1.2c: O somador

O elemento quantizador, visto na Figura 1.3, representa a operação não-linear de quantização, responsável por acomodar os resultados de soma e multiplicação em um número finito de bits. Tal elemento também é fundamental na realização do filtro digital, e constitui o quarto elemento, básico para a sua realização. A operação de quantização pode ser realizada por truncamento, arredondamento ou truncamento em magnitude. Tais técnicas serão posteriormente abordadas, na Seção 2.1 do Capítulo 2.

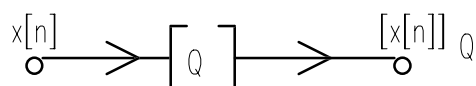


Figura1.3: O quantizador

## 1.6- CLASSIFICAÇÃO DOS FILTROS DIGITAIS [22]

Basicamente, os filtros digitais se subdividem em dois grandes grupos, em termos do comportamento de sua resposta  $h[n]$  ao impulso unitário.

Os filtros de resposta ao impulso finita, ou filtros FIR, são aqueles cujos coeficientes  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , em (1.18) e (1.19) são nulos, o que equivale a dizer que a resposta  $h[n]$  do filtro ao impulso unitário se caracteriza por um número finito de amostras, como se pode concluir de (1.18). Por outro lado, eles também se caracterizam por  $D(z) = z^N$ , como se pode concluir de (1.20), o que equivale a dizer que todos os pólos estão na origem do plano complexo  $z$ .

Já os filtros de resposta ao impulso infinita, ou filtros IIR, são aqueles para os quais os coeficientes  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , em (1.18) e (1.19) são tais que pelo menos um deles é não nulo. Isso faz com que  $D(z)$  seja um polinômio com raízes em qualquer parte do plano complexo  $z$ . Para tais filtros, é estabelecida uma relação de recursividade entre a amostra atual da saída e algumas amostras anteriores da mesma, caracterizando a não limitação do número dessas amostras, razão pela qual o filtro IIR é necessariamente um filtro recursivo.

Para os filtros IIR, a condição adicional de estabilidade tem que ser imposta, como pré-condição para a realização do filtro, o que equivale a restringir seus pólos a se localizarem dentro do círculo de raio unitário, no plano complexo  $z$ , sempre que se tratar de filtros causais [20].

Já em termos dos filtros FIR, não há necessidade de nenhuma restrição adicional, pois eles são sempre estáveis, visto que seus pólos estão todos na origem do círculo unitário.

Outras características diferenciam os filtros FIR dos filtros IIR, mas não serão aqui abordadas, visto que apenas os filtros IIR serão considerados neste trabalho. A favor destes, no entanto, deve ser dito que a ordem da função de transferência  $H(z)$  é bem mais reduzida que no caso dos filtros FIR, pelo menos nos casos usuais de aproximação de filtros, o que explica sua larga utilização.

## 1.7- REALIZAÇÃO DOS FILTROS DIGITAIS

A partir do momento em que um filtro digital IIR linear, invariante ao deslocamento, causal e estável tenha sido definido, sua transferência  $H(z)$  é conhecida. Daí em diante, o projetista de filtros digitais está diante de um novo passo do problema, que é a realização do referido filtro, que consiste em definir a estrutura adequada para computá-lo, ou seja, calcular as amostras de saída  $y[n]$  uma vez dadas as amostras da entrada  $x[n]$ .

A classe das estruturas digitais no espaço de estados, como será visto na Seção 3.1 do Capítulo 3, tem merecido destaque na literatura pelo seu baixo ruído, notadamente nos casos de filtros de banda estreita [22]. Entretanto, dada sua grande complexidade computacional, é normalmente usada uma solução de compromisso, implementando-se estruturas na forma cascata ou paralela com blocos de segunda ordem, sendo o bom desempenho a nível do ruído de quantização na saída o fator determinante da utilização de um dado bloco de segunda ordem. Por outro lado, a implementação de filtros digitais com palavra de comprimento finito também possibilita o surgimento de oscilações parasitas, os ciclos limite, absolutamente indesejáveis. Torna-se, então, bastante importante eliminar tais oscilações que tanto prejudicam o comportamento do filtro digital. Tendo em vista este objetivo, o Capítulo 2 apresenta a descrição das estruturas no espaço de estados, além de uma abordagem sobre a conceituação e a classificação de ciclos limite, culminando com a apresentação de técnicas que possibilitam a sua eliminação.

Os filtros digitais analisados neste trabalho são implementados utilizando-se quatro importantes estruturas de segunda ordem no espaço de estados, descritas com detalhes no Capítulo 3, que se utilizam das técnicas de eliminação de ciclos limite à entrada zero, à entrada constante e devidos à "overflow" vistas nas Seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, respectivamente, do Capítulo 2. A primeira estrutura a ser usada na implementação dos filtros sob análise é a chamada estrutura ótima ou estrutura de mínimo ruído [11]. Suas propriedades particulares são discutidas com detalhes, assim como sua síntese, na Seção 3.2 do Capítulo 3. A nível deste trabalho, as propriedades que merecem destaque são a baixa variância relativa do ruído na sua saída, assim como sua imunidade a ciclos limite nos casos de entrada zero [26] e de "overflow" [12], quando se utiliza a saturação aritmética [5] e a quantização por truncamento em magnitude nas variáveis de estado, que é a situação aqui abordada.

As três outras estruturas adotadas diferem da primeira por serem também imunes a ciclos limite no caso de entrada constante. A comparação do nível de ruído destas três últimas estruturas constitui o objetivo maior deste trabalho, enquanto a estrutura ótima representa um padrão de comparação, devido à sua característica de mínimo ruído. Sob o aspecto da complexidade computacional, o Capítulo 3 também discute o "hardware" necessário para implementar um filtro paralelo (única forma abordada neste trabalho), de ordem  $2N$ , usando as quatro estruturas abordadas.

## **1.8- O TRABALHO DESENVOLVIDO**

Conhecidas então as estruturas, o projetista frequentemente se depara com a necessidade de selecionar, dentre um grupo de blocos básicos de segunda ordem, aquele que será utilizado na implementação do filtro cascata ou paralelo, para um projeto específico. Em tal situação, o ruído de quantização na saída do filtro é um critério essencial para tal seleção, o que confere grande importância a ferramentas que permitam simular o desempenho do filtro, para diversos blocos básicos. Desta forma, deseja-se obter uma comparação à nível da variância relativa do ruído na saída para as quatro estruturas abordadas no Capítulo 3, determinando assim as faixas de frequência em que as estruturas livres de ciclos limite são mais adequadas, lembrando-se que a estrutura ótima é aqui adotada como referência, para fins comparativos.

### **1.8.1- AS NOVAS TRANSFORMAÇÕES ESPECTRAIS**

A fim de se obter tal avaliação para todos os possíveis espectros (passa-baixas, passa-altas, passa-banda e rejeita-banda), torna-se necessário o desenvolvimento de novas transformações espectrais, que mantenham o espectro original, ao mesmo tempo que variem a largura da banda passante. Para isto, é realizado um estudo bastante detalhado, no Capítulo 4, das transformações espectrais em protótipos passa-baixas (de Constantinides) [6], possibilitando, a partir destes resultados já consolidados na literatura, obter transformações espectrais que podem ser aplicadas a quaisquer protótipos de filtros.

Uma grande vantagem inerente a estas novas transformações é o fato de serem todas de primeira ordem, o que faz com que cada bloco quadrático de uma função  $H(z)$  na forma cascata ou paralela de blocos continue sendo quadrático, quando se usa a transformação necessária para variar a largura da banda passante. Ao contrário, o uso das transformações de segunda ordem de Constantinides, no caso de filtro transformado com espectro passa-banda ou rejeita-banda, faz com que cada bloco quadrático torne-se um bloco de quarta ordem. Isto demandaria a fatoração do novo bloco em dois blocos quadráticos, o que tornaria necessário resolver um sistema de equações não lineares, para cada valor de banda passante, como é sugerido no Capítulo 5. Desta forma, o uso das novas transformações propostas no Capítulo 4 se traduz em significativa redução do esforço computacional para a síntese do filtro transformado. Infelizmente, porém, tais transformações apresentam o inconveniente de não manter fixa a frequência central da banda passante (ou de rejeição) do filtro sob estudo.

### **1.8.2- ANÁLISE COMPARATIVA**

De posse desta transformação espectral genérica, pode-se então avaliar, o que é feito no Capítulo 5, o desempenho das estruturas digitais descritas no Capítulo 3, em termos do nível de ruído na saída para diversas larguras da banda passante. Assim sendo, tais estruturas de segunda ordem foram utilizadas na implementação de filtros digitais de oitava ordem na forma paralela, com frequência de amostragem de 10KHz, escalamento em norma quadrática e quantização feita por truncamento em magnitude e saturação aritmética nas variáveis de estado, nos casos de espectros passa-baixas, passa-altas, passa-banda e rejeita-banda.

Assim, para cada banda passante, e para cada uma das quatro estruturas, o filtro é sintetizado e a variância relativa do ruído na saída é calculada, gerando-se os gráficos comparativos vistos na Seção 5.1 do Capítulo 5. Neste Capítulo 5 é também realizada uma abordagem simplificada da transformação de Constantinides para o caso passa-baixas passa-banda e passa-baixas rejeita-banda, levando a filtros passa-banda e rejeita-banda centrados em  $\pi / 2$ . Este estudo, abordado na Seção 5.2, confirma os resultados encontrados na Seção 5.1.

# Capítulo 2

## Ciclos Limite em Filtros Digitais

A implementação de filtros digitais é feita via software em computador de uso geral ou via hardware específico. As operações necessárias são as somas e multiplicações, cujos resultados devem ser armazenados em memória, através de registradores de comprimento de palavra finito. A utilização destes registradores acarreta efeitos tais como [14]:

- mudanças nas características de entrada/saída do filtro devido à quantização dos coeficientes;
- ruído causado pela conversão analógico/digital quando o sinal original é um sinal analógico;
- ruído causado pela quantização dos resultados dos produtos ou somas durante a computação;
- oscilações de overflow devido à faixa dinâmica insuficiente;
- ciclos limite devido aos efeitos não lineares de quantização.

Por quantização entenda-se a operação de reduzir um número representado em uma certa quantidade de bits a outro número, agora representado em uma quantidade menor de bits.

Pelo fato dos ciclos limite serem bastante prejudiciais ao desempenho dos filtros digitais, a estratégia que normalmente se adota é garantir, através da seleção adequada da estrutura algorítmica para a computação do filtro, que tais ciclos limite não ocorrerão [22]. Dentro dessa ótica, o presente capítulo tem como objetivo apresentar técnicas que possibilitem a eliminação de ciclos limite em filtros digitais, especificamente no caso de estruturas digitais descritas no espaço de estados [8], [13], [26], as quais são as únicas abordadas neste trabalho. Para uma discussão sobre ciclos limite em outras estruturas, ver [14] e [15].

### 2.1 - REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

A fim de possibilitar uma melhor compreensão de comentários futuros, esta seção abordará as diversas formas de representação numérica binária, com número finito de bits, antes de se entrar na abordagem de ciclos limite propriamente dita.

#### 2.1.1 - REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA EM PONTO FIXO

Em processamento digital de sinais os números, quando processados em aritmética de ponto fixo, são geralmente representados na forma sinal magnitude, mais eficiente na realização de produtos, ou nas formas complemento a um e complemento a dois, estas mais eficientes na realização de adições.

Assim, são as seguintes as principais representações numéricas:

### a) SINAL MAGNITUDE

Consiste de um bit de sinal ( $b_0$ ) e um número em binário ( $b_1 b_2 \dots b_n$ ) caracterizando o módulo do número representado. Assim,

$$X = b_0 b_1 b_2 b_3 \dots b_n \quad (2.1)$$

onde para números positivos  $b_0 = 0$  e para números negativos  $b_0 = 1$ , sendo  $n + 1$  o número de bits usado na representação.

### b) COMPLEMENTO A UM

Aqui tem-se que

$$X_1 = \begin{cases} X & , \text{ se } b_0 = 0 \\ 2 - 2^{-n} - |X| & , \text{ se } b_0 = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $X$  é como em (2.1) e  $n + 1$  é o número de bits adotado para a representação.

### c) COMPLEMENTO A DOIS

Aqui,

$$X_2 = \begin{cases} X & , \text{ se } b_0 = 0 \\ 2 - |X| & , \text{ se } b_0 = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $X$  é novamente como em (2.1).

Nota-se, assim, que as representações em complemento a um e complemento a dois diferem da representação em sinal magnitude apenas no tratamento de números negativos.

## 2.1.2 - REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA EM PONTO FLUTUANTE

Em caso de aritmética de ponto flutuante, o número pode ser representado por

$$X = X_1 2^c \quad (2.4)$$

onde  $X_1$  é a mantissa e  $c$  é o expoente do número, sendo  $\frac{1}{2} \leq |X_1| < 1$ .

A utilização de ponto flutuante requer que a mantissa seja quantizada no caso de soma e multiplicação, enquanto que em ponto fixo a quantização somente é necessária em caso de multiplicação. Em compensação, a faixa dinâmica dos números em ponto flutuante é maior que em ponto fixo. Na maioria das vezes, entretanto, a representação em ponto fixo é usada, escalando-se o filtro tal que se possa maximizar a faixa dinâmica [22]. No presente

trabalho, apenas o caso de representação em ponto fixo e complemento a dois será considerado.

### 2.1.3 - ERROS DEVIDO À PALAVRA DE COMPRIMENTO FINITO

O erro entre o número real  $r$  e sua representação quantizada  $r_q$ , com um certo número de bits, dada por (2.1), (2.2) ou (2.3), vale

$$e(n) = r - r_q \quad (2.5)$$

sendo  $r_q$  é um múltiplo inteiro do passo de quantização  $q$ , cujo menor valor é  $q = 2^{-b}$ , onde  $b + 1$  é o número de bits usado na quantização.

Os métodos de arredondamento, truncamento e truncamento em magnitude podem ser usados para quantizar os resultados dos produtos realizados na computação do filtro digital, sendo que cada um desses métodos se caracteriza por um valor esperado e uma variância particulares [21]. Tais valores são apresentados a seguir, a partir das definições do valor esperado

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i P(X_i) \quad (2.6)$$

e da variância

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (2.7)$$

considerando uma variável estocástica  $X$  com distribuição que se aproxima daquela do ruído branco [9], [21].

Para o caso de arredondamento tem-se que

$$E[e(n)] = 0 \quad (2.8)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (2.9)$$

enquanto que para o caso de truncamento tem-se que

$$E[e(n)] = -\frac{q}{2} \quad (2.10)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (2.11)$$

e, finalmente, para o caso de truncamento em magnitude tem-se que

$$E[e(n)] = 0 \quad (2.12)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{3} \quad (2.13)$$

onde  $e(n)$  é dado em (2.5).

A Figura 2.1 apresenta a característica de quantização, o erro de quantização e a distribuição estatística deste erro, para cada um dos métodos de quantização acima.

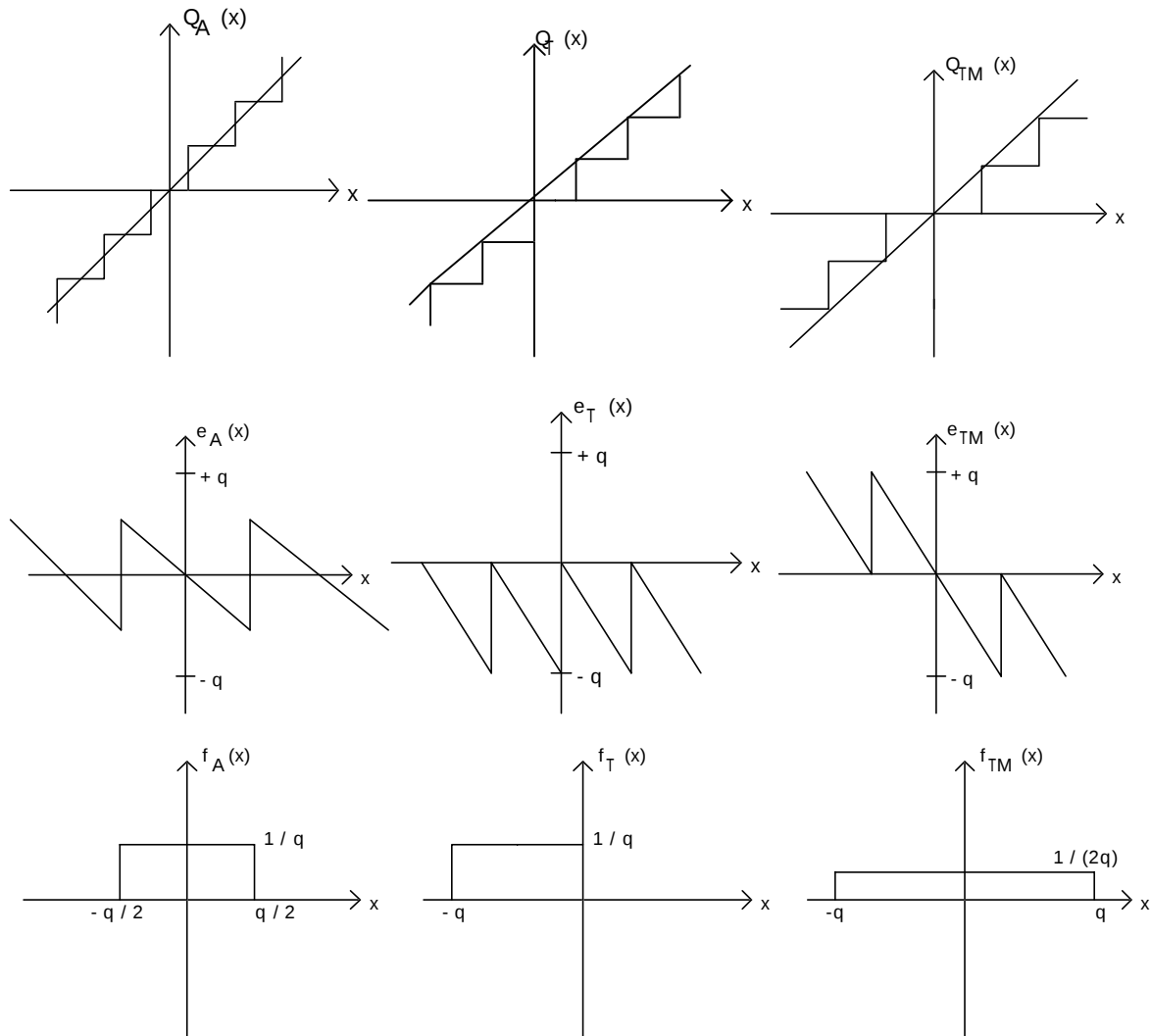


Figura 2.1: Característica de quantização, erro de quantização e distribuição estatística do erro para os casos de arredondamento, truncamento e truncamento em magnitude.

## 2.2 - CICLOS LIMITE

Os ciclos limite são oscilações parasitas que surgem na saída do filtro digital, e que se sustentam mesmo que a excitação seja retirada. Tais ciclos limite estão associados à

realimentação existente nos filtros de resposta ao impulso infinita ou recursivos, e são um dos maiores problemas a serem enfrentados quando de sua realização. Quanto à origem, eles se classificam em ciclos limite granulares e ciclos limite devidos a "overflow".

### 2.2.1- CICLOS LIMITE GRANULARES

Ocorrem em virtude do fato de que a implementação do filtro digital em aritmética de precisão finita exige a presença de quantizadores, o que não permite que sua resposta seja assintoticamente decrescente a partir do instante em que a entrada se torna nula. Com isso, são gerados sinais de ruído que se auto-correlacionam, originando oscilações autônomas denominadas ciclos limite granulares. Estes ciclos limite, de acordo com a entrada, podem ser ciclos limite granulares à entrada zero ou ciclos limite granulares à entrada constante e, são provenientes da quantização nos bits menos significativos dos sinais [9], [14].

### 2.2.2- CICLOS LIMITE DEVIDOS A "OVERFLOW"

Ocorrem quando os módulos dos sinais internos excedem a faixa dinâmica dos registros disponíveis, o que, se ocorrer frequentemente em um curto período de tempo, pode acarretar severas distorções no sinal de saída do filtro, iniciando oscilações auto sustentadas denominadas ciclos limite devidos a "overflow". É interessante mencionar que o fato preocupante não é a ocorrência do "overflow", e sim a garantia de que o tempo de recuperação seja menor que o tempo entre a ocorrência de dois "overflows" [9], [14].

Ao contrário dos ciclos limite granulares, as não-linearidades de "overflow" influenciam os bits mais significativos da representação numérica em ponto fixo.

## 2.3- TÉCNICAS DE ELIMINAÇÃO DE CICLOS LIMITE

Em muitas aplicações a presença de ciclos limite pode ser um sério problema, sendo tática comum garantir-se a sua eliminação. As formas de se garantir tal eliminação serão aqui abordadas, considerando-se filtros digitais caracterizados no espaço de estados, e representação numérica em ponto fixo [8], [13], [26].

Seja então o filtro digital recursivo descrito no espaço de estados por

$$\mathbf{X}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{X}[n] + \mathbf{b}U[n] \quad (2.14)$$

$$Y[n] = \mathbf{c}\mathbf{X}[n] + dU[n] \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $d$  são matrizes de dimensões  $N \times N$ ,  $N \times 1$ ,  $1 \times N$  e  $1 \times 1$ , respectivamente, enquanto  $\mathbf{X}[n]$  é o vetor das  $N$  variáveis de estado,  $U[n]$  a entrada e  $Y[n]$  a saída, estes escalares.

### 2.3.1- ELIMINAÇÃO DE CICLOS LIMITE À ENTRADA ZERO [26]

A Figura 2.2 abaixo mostra um modelo mais realista do filtro digital, incluindo os quantizadores, que são colocados nas variáveis de estado. Estes quantizadores são tais que cada variável de estado é quantizada independentemente das outras.

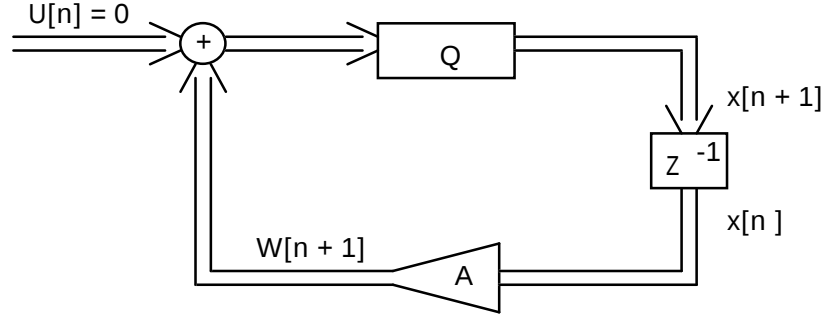


Figura 2.2: Filtro digital representado no espaço de estados.

Para que a estrutura acima seja livre de ciclos limite à entrada zero, quando a não-linearidade  $Q[X]$  realiza truncamento em magnitude, casado com a representação complemento a dois para "overflow", é suficiente que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \leq \mathbf{G} \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes  $N \times N$  com  $\mathbf{A}$  correspondente a um sistema estável em precisão infinita e  $\mathbf{G}$  é uma matriz diagonal definida positiva.

#### Demonstração:

No caso de entrada zero tem-se que  $U[n] = 0$  e

$$\mathbf{W}[n+1] = \mathbf{A} \mathbf{X}[n] \quad (2.17)$$

Além disso, considerando-se a não linearidade representada por  $Q$  na Figura 2.2, vem que

$$\mathbf{X}[n+1] = Q[\mathbf{W}[n+1]] \quad (2.18)$$

Seja a norma de um vetor  $\mathbf{v}$  genérico dada por

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{G} \mathbf{v} \quad (2.19)$$

sendo  $\mathbf{G}$  uma matriz diagonal definida positiva, como acima. Como o quantizador realiza truncamento em magnitude vem que  $|x_k[n+1]| \leq |w_k[n+1]|$  para  $1 \leq k \leq N$ , e desde que  $\mathbf{G}$  é uma matriz diagonal de elementos  $g_k$  positivos, tem-se que

$$\|\mathbf{X}[n + 1]\| \leq \|\mathbf{W}[n + 1]\| \quad \forall n \quad (2.20)$$

Assim, de (2.16) tem-se que

$$\mathbf{X}^T[n] \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{X}[n] \leq \mathbf{X}^T[n] \mathbf{G} \mathbf{X}[n] \quad (2.21)$$

resultando em

$$\|\mathbf{W}[n + 1]\| \leq \|\mathbf{X}[n]\| \quad (2.22)$$

o que leva a

$$\|\mathbf{X}[n + 1]\| \leq \|\mathbf{X}[n]\| \quad (2.23)$$

Agora, considere-se  $N$  iterações consecutivas de (2.17) e (2.18), com  $n$  variando de  $n_0$  a  $n_0 + N - 1$ . Caso ocorra uma quantização neste período, tem-se que

$$\|\mathbf{X}[n + 1]\|^2 \leq \|\mathbf{W}[n + 1]\|^2 - \varepsilon \quad (2.24)$$

para algum  $n$  na faixa citada, onde  $\varepsilon$  é um número positivo fixo, dependendo somente de  $\mathbf{G}$  e do tipo do quantizador. Assim,

$$\|\mathbf{X}[n + 1]\|^2 \leq \|\mathbf{X}[n]\|^2 - \varepsilon \quad (2.25)$$

isto é, a norma decresce quando ocorre a quantização.

Por outro lado, caso não haja quantização durante este período, então

$$\mathbf{W}[n_0 + N] = \mathbf{A}^N \mathbf{X}[n_0] \quad (2.26)$$

$$\|\mathbf{W}[n_0 + N]\|^2 = \mathbf{X}^T[n_0] (\mathbf{A}^T)^N \mathbf{G} \mathbf{A}^N \mathbf{X}[n_0] < \mathbf{X}^T[n_0] \mathbf{G} \mathbf{X}[n_0] = \|\mathbf{X}[n_0]\|^2 \quad (2.27)$$

Dado que o quantizador permite somente valores discretos da norma, eventualmente tem-se

$$\|\mathbf{X}[n_0 + N]\|^2 \leq \|\mathbf{X}[n_0]\|^2 - \varepsilon \quad (2.28)$$

o que garante que durante um intervalo igual a  $N$  unidades de tempo, a norma  $\|\mathbf{X}(n)\|$  necessariamente decresce, ao menos por uma quantia fixa  $\varepsilon > 0$ . Assim, um número finito de amostras após a entrada se tornar zero, a energia interna vai para zero, não sendo possível a sustentação de uma oscilação, o que comprova a eliminação de ciclo limite no caso de entrada zero.

Note-se que a exigência de  $\mathbf{G}$  ser uma matriz diagonal justifica-se pelo processo de quantização extremamente complicado que resultaria se  $\mathbf{G}$  não fosse desta forma.

A seguir é apresentado o significado da condição de eliminação de ciclo limite à entrada zero para estruturas de segunda ordem [8], [16], por serem estas de particular interesse como blocos básicos nas realizações das formas paralela e cascata. Desta forma, a condição em (2.16), para  $\mathbf{G}$  diagonal definida positiva, é satisfeita se e somente se os elementos de  $\mathbf{A}$  satisfazem [16]

$$a_{12}a_{21} \geq 0 \quad (2.29)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12}a_{21} < 0 \\ \text{e} \\ |a_{11} - a_{22}| + \det(\mathbf{A}) \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Observa-se que tal condição é de fácil verificação, já que se relaciona diretamente aos elementos da matriz  $\mathbf{A}$ .

### 2.3.2 - ELIMINAÇÃO DE CICLOS LIMITE À ENTRADA CONSTANTE [13]

Os filtros digitais livres de ciclos limite sob condições de entrada zero não são garantidamente livres de ciclos limite sob condições de entrada constante. A razão é que os efeitos de quantização do filtro sob condições de entrada constante são em geral diferentes daqueles do filtro sob condições de entrada zero. Sob este ponto de vista, a condição para ausência de ciclos limite à entrada constante será obtida por meio de uma equivalência dos efeitos de quantização de filtros com entrada constante com filtros sob condições de entrada zero.

Seja então  $U[n] = U_0$ , que é uma entrada constante. Assim, o estado de equilíbrio  $\mathbf{X}_0$  no filtro digital ideal é dado por

$$\mathbf{X}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U_0 \quad (2.31)$$

donde pode-se obter

$$\mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P} \quad (2.32)$$

o que implica em

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (2.33)$$

sendo  $\mathbf{P}$  uma matriz de dimensão  $N \times 1$  pertencente ao  $\mathbb{R}^n$ , com  $\mathbf{P} \neq 0$ . Desta forma

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{P}\mathbf{U}_0 \quad (2.34)$$

Substituindo a equação (2.32) na formulação de variáveis de estado em (2.14), verifica-se que

$$\mathbf{X}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{X}[n] + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}\mathbf{U}[n] = \mathbf{A}(\mathbf{X}[n] - \mathbf{P}\mathbf{U}[n]) + \mathbf{P}\mathbf{U}[n] \quad (2.35)$$

o que equivale ao sistema representado na Figura 2.3, que é uma versão modificada daquele representado na Figura 2.2, modificação esta correspondente à redefinição das variáveis de estado, como se nota a partir de (2.35).

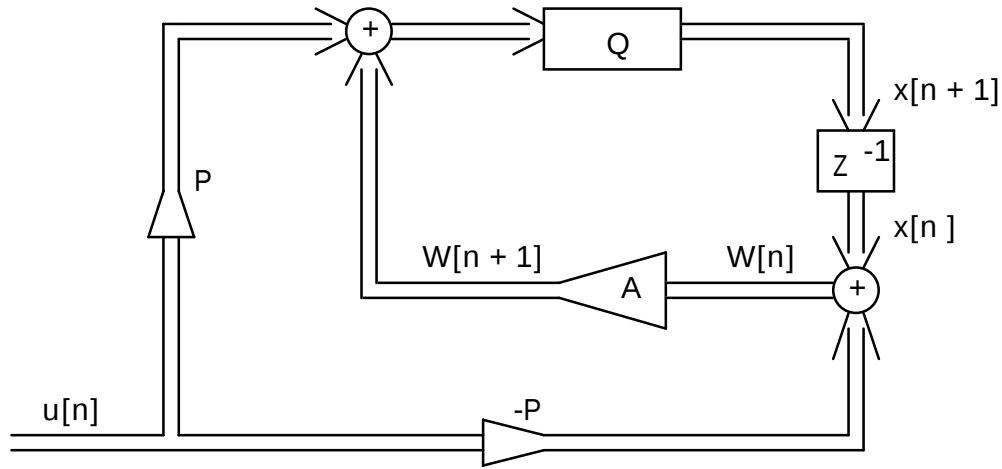


Figura 2.3: Modificação do filtro digital para eliminação de ciclos limite no caso de entrada constante.

A partir de (2.35), tomando-se o novo vetor de variáveis de estado como sendo

$$\mathbf{W}[n] = \mathbf{X}[n] - \mathbf{P}\mathbf{U}_0 \quad (2.36)$$

pode-se escrever

$$\mathbf{W}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{W}[n] \quad (2.37)$$

que equivale à condição de entrada zero para o filtro descrito pelas novas variáveis de estado.

Assim, obtida esta equivalência, a síntese de filtros digitais livres de ciclos limite sob condições de entrada constante se reduz à modificação de um filtro digital livre de ciclos limite no caso de entrada zero, com base em (2.33) e na Figura 2.3.

Outra forma de eliminação de ciclo limite à entrada constante em filtros digitais de segunda ordem é aqui apresentada [8]. Trata-se de um caso bem particular, em que o vetor  $\mathbf{P}$  genérico dado pela equação (2.33) assume valores inteiros, em virtude da restrição

imposta a  $\mathbf{PU}_0$ , que é a de ser representável no comprimento de palavra da máquina (isto é, calculado exatamente). Assim sendo, o vetor coluna  $\mathbf{P}$  pode assumir as seguintes formas, tal que  $\mathbf{PU}_0$  seja representável exatamente

$$\text{Caso I: } \mathbf{P} = [\pm 1, 0]^T \quad (2.38a)$$

$$\text{Caso II: } \mathbf{P} = [0, \pm 1]^T \quad (2.38b)$$

$$\text{Caso III: } \mathbf{P} = [\pm 1, \pm 1]^T \quad (2.38c)$$

onde, para cada caso,  $\mathbf{b}$  pode ser escolhido de forma a assegurar a eliminação de ciclos limite à entrada constante, através da equação (2.32). Assim

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

fornece os seguintes valores para  $b_1$  e  $b_2$

$$\text{Caso I: } b_1 = \pm (1-a_{11}), b_2 = \mp a_{21} \quad (2.40a)$$

$$\text{Caso II: } b_1 = \pm a_{12}, b_2 = \pm (1-a_{22}) \quad (2.40b)$$

$$\text{Caso III: } b_1 = \pm (1-a_{11}) \mp a_{12}, b_2 = \mp a_{21} \pm (1-a_{22}) \quad (2.40c)$$

A introdução do vetor  $\mathbf{P}$  conforme a Figura 2.3 gera diversas estruturas livres de ciclos limite à entrada constante, as quais serão detalhadas no Capítulo 3.

### 2.3.3 - ELIMINAÇÃO DE CICLOS LIMITE DEVIDOS A "OVERFLOW" [5], [9]

Uma técnica utilizada para reduzir a probabilidade de ocorrência de "overflow" a um nível aceitável nos filtros digitais é o procedimento de escalamento dos sinais internos [20]. Desta forma, calcula-se um limite superior da magnitude do sinal  $x_i[n]$  para todas as possíveis entradas  $U[n]$  no filtro, o que permite prevenir o aumento no comprimento de palavra dos filtros digitais. Isto é realizado através da introdução de operações não lineares nos sinais, denominadas não linearidades de "overflow".

O esquema de escalamento do sinal interno é representado através da Figura 2.4. Aqui, deseja-se escalar o sinal de entrada tal que a probabilidade de ocorrer um "overflow" no sinal  $x_i[n]$  seja reduzida.

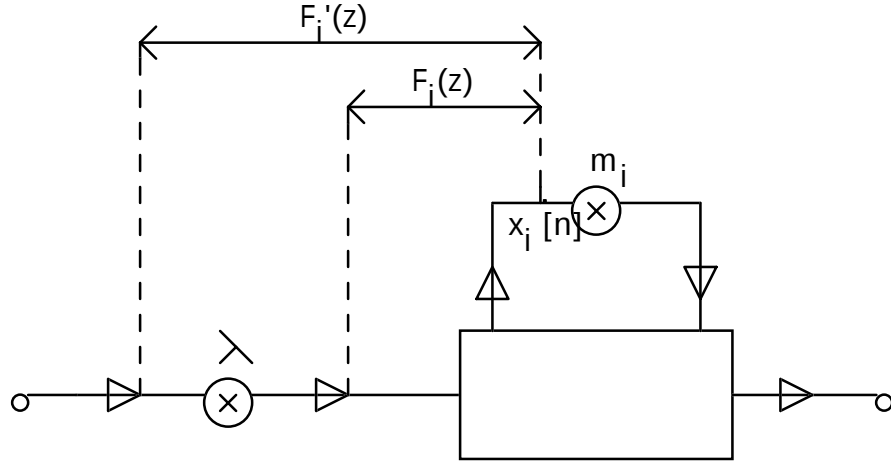


Figura 2.4: Escalamento em filtros digitais.

Considerando-se, então, condições iniciais nulas, tem-se [20]

$$x_i[n] = \sum_{k=0}^{\infty} f_i[k]U[n-k] \quad \forall n \quad (2.41)$$

e se  $U[n]$  for limitado em magnitude por  $U_m$ , para todo  $n$ , chega-se a

$$|x_i[n]| \leq U_m \sum_{k=0}^{\infty} |f_i[k]|. \quad (2.42)$$

Assim, para  $x_i[n]$  limitado por  $U_m$  para todos os tipos de sequências de entrada, o escalamento deverá assegurar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_i[k]| \leq 1 \quad (2.43)$$

A equação (2.43) é uma condição necessária e suficiente para a eliminação definitiva do "overflow" [12]. Porém, por ser uma condição de escalamento excessivamente restritiva, provoca excessiva redução no sinal depois do multiplicador  $\lambda$ , o que é inconveniente [9], [12], [20]. Assim, adota-se a estratégia de garantir não a eliminação do "overflow", mas sim uma resposta forçada estável [5].

Um filtro digital é considerado livre de ciclos limite devidos a "overflow", ou dito ter resposta forçada estável, se o erro que é introduzido após a ocorrência de um overflow decresce com o tempo, de tal maneira que a saída do filtro não linear converge para a saída do filtro linear ideal [5], [9], ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = [0 \dots 0] \quad (2.44)$$

A partir da literatura, tem-se que uma condição suficiente para garantir a estabilidade da resposta forçada, quando ocorre "overflow", em filtros livres de ciclos limite à entrada zero com quantização granular aplicada às variáveis de estado, é executar a quantização conforme mostra a Figura 2.5 abaixo [5], [9], [12].

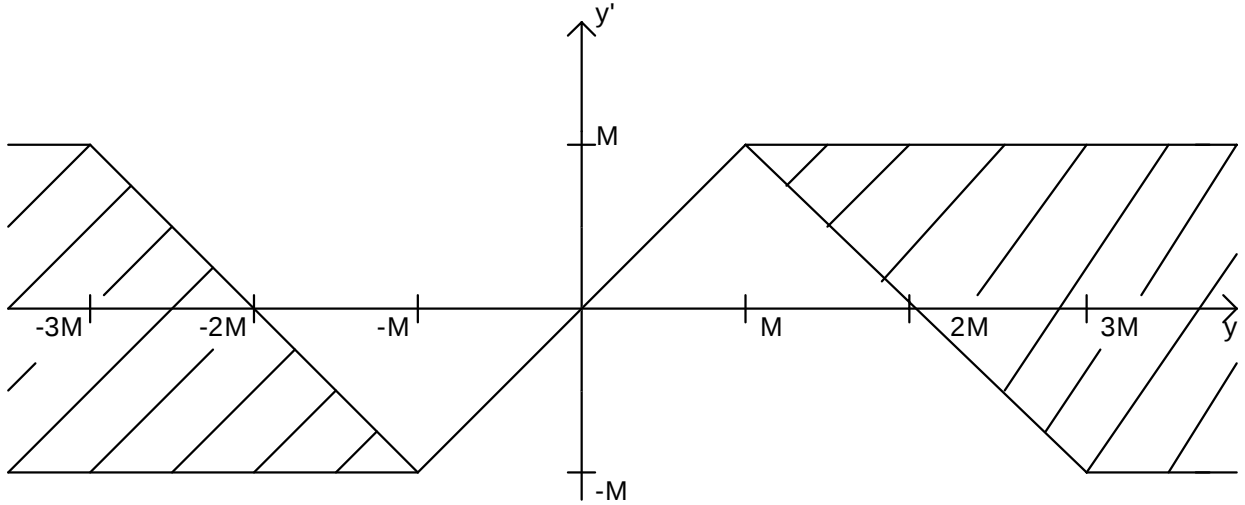


Figura 2.5: Tratamento de "overflow" para garantia de resposta forçada estável.

A forma mais simples de tratamento de "overflow" que garante estabilidade da resposta forçada é a saturação aritmética [9], [12]. Através dela, quando o "overflow" é detectado, o valor máximo substitui o valor do resultado de "overflow", com o sinal apropriado. Isso está ilustrado pelas linhas horizontais, a partir de  $y = M$  e  $y = -M$  da Figura 2.5.

Assim sendo, usa-se um valor  $\lambda$  para o qual a probabilidade de ocorrer "overflow" seja baixa, porém não nula, o que exige o tratamento adicional do sinal sob condição de "overflow". A seleção do valor de  $\lambda$  é tal que o valor da norma  $p$  de cada uma das funções de transferência da entrada para os pontos em que pode haver "overflow" seja menor que um, ou seja

$$\lambda_{i_{\max}} \leq \frac{1}{\|F_i(e^{j\omega})\|_p} \quad (2.45)$$

ou então

$$\|F_i'(e^{j\omega})\|_p \leq 1 \quad (2.46)$$

onde  $F_i(z)$  e  $F_i'(z)$  são como indicado na Figura 2.5. Os valores mais comumente usados para  $p$  são dados por 2 e  $\infty$ . Se  $p = \infty$ , tem-se o escalamento em norma infinita [9], [12], [20], que garante a ausência de "overflow", mas tem a amplitude do sinal por demais reduzida, podendo-se ter problemas na relação sinal/ruído [9]. Quanto ao escalamento em

norma quadrática, o "overflow" poderá ocorrer, porém, com baixa probabilidade, mesmo sob a condição da equação (2.46).

Finalmente, é importante mencionar que a utilização de sistemas tais como complemento a um e a dois estabelecem características particulares interessantes com relação ao "overflow". Quanto à multiplicação, é possível a ocorrência de "overflow" apenas nas saídas dos nós que são entradas de multiplicadores. Daí, a preocupação com "overflow" se restringe às entradas dos multiplicadores. Quanto à soma, é permitida a ocorrência de "overflow" nas saídas dos nós que correspondem a uma soma parcial, desde que a soma total não exceda os limites da faixa dinâmica [20].

## **2.4 - CONCLUSÕES**

Neste capítulo foram inicialmente apontados os efeitos danosos provocados pelo uso de registradores de comprimento de palavra finito na computação do filtro digital, e um estudo das formas de representação binária dos números, e do erro que ocorre em cada representação, foi apresentado.

Posteriormente, um dos principais problemas devidos à utilização de tais registradores, os ciclos limite, foram abordados, desde sua origem até às técnicas para sua eliminação, permitindo a implementação de estruturas para filtros digitais que são imunes à sua ocorrência. Destaque-se que esta é a estratégia mais comumente usada, quando do projeto de filtros digitais. Algumas estruturas, que adotam tal estratégia, serão abordadas no Capítulo 3, as quais pertencem ao grupo particular das estruturas no espaço de estados [9], [12].

## Capítulo 3

### Estruturas Digitais no Espaço de Estados de Segunda Ordem Livres de Ciclos Limite

A implementação de filtros digitais de ordem elevada é normalmente feita através das realizações em forma cascata ou paralela de blocos básicos de ordem dois. As principais vantagens são a redução da sensibilidade da rede, assim como do ruído em sua saída [9], [20]. Entretanto, nos casos de filtros digitais com banda passante estreita, o ruído na saída dos filtros implementados na forma cascata ou paralela de seções diretas de ordem dois é ainda elevado [10]. Em tal situação, destacam-se os filtros digitais implementados sob a forma de estruturas no espaço de estados, para os quais pode-se sintetizar uma estrutura em que a variância relativa do ruído na saída não só é mínima como também é invariante com relação à largura da banda passante [18]-[19]. Porém, dada a grande quantidade de produtos necessários para computar tal estrutura, usa-se estruturas na forma cascata ou paralela em que cada bloco de ordem dois é uma estrutura no espaço de estados de mínimo ruído [11], obtendo-se um bom compromisso entre complexidade computacional e baixo ruído [18].

Sob esta ótica, tem-se desenvolvido grande esforço de pesquisa no sentido da proposição de estruturas de segunda ordem descritas no espaço de estados, que apresentem bom desempenho a nível de ruído na sua saída, além de outras características de interesse, como imunidade a ciclos limite [1], [2], [4], [8], [11], [23].

Neste capítulo, a estrutura de segunda ordem de mínimo ruído [11], a estrutura quase ótima imune a ciclos limite [23] e duas estruturas de segunda ordem imunes a ciclos limite [8] serão descritas, destacando-se sua síntese e sua imunidade a ciclos limite, com vistas a subsidiar o estudo comparativo do seu desempenho, que é feito no Capítulo 5.

Por outro lado, embora a estrutura ótima [11] seja imune apenas a ciclos limite nos casos de entrada zero e "overflow", ao contrário das outras três, que são também imunes a ciclos limite no caso de entrada constante [8], [23], sua abordagem se justifica por se tratar de uma estrutura usada como padrão de comparação, pelo seu baixo ruído.

#### 3.1 - DESCRIÇÃO DAS ESTRUTURAS NO ESPAÇO DE ESTADOS

A descrição de filtros digitais de segunda ordem por variáveis de estado é dada por

$$\mathbf{X}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{X}[n] + \mathbf{b}U[n] \quad (3.1)$$

$$Y[n] = \mathbf{c}\mathbf{X}[n] + dU[n] \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{X}^T[n] = [x_1[n] \ x_2[n]]$  é o vetor de estados,  $U[n]$  é a entrada escalar e  $Y[n]$  é a saída escalar, enquanto  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  são matrizes  $2 \times 2$ ,  $2 \times 1$  e  $1 \times 2$ , respectivamente, e  $d$  é um escalar, representando os coeficientes multiplicadores das estruturas, caracterizados na Figura 3.1.

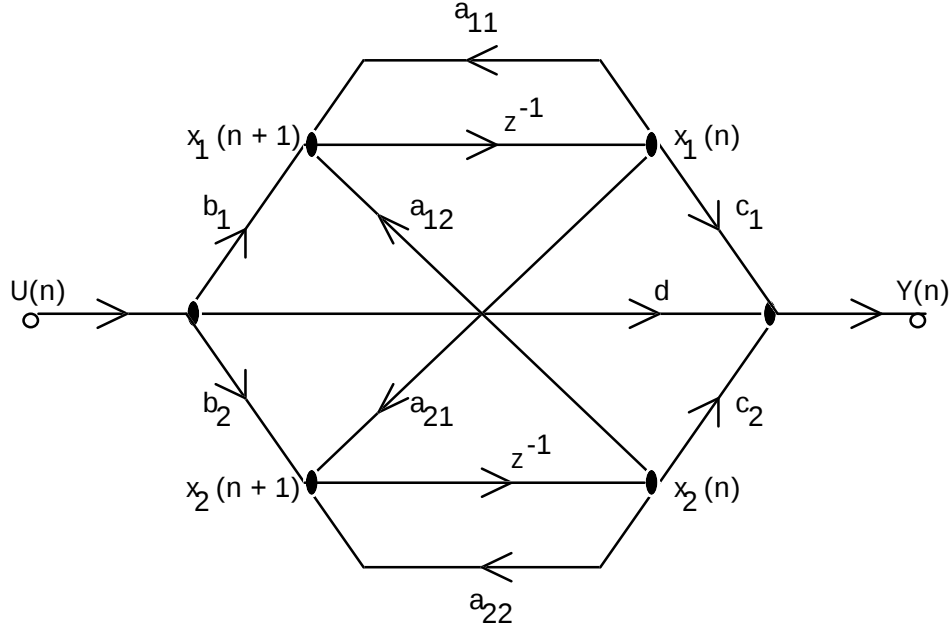


Figura 3.1: Estrutura no espaço de estados de ordem 2.

A função de transferência correspondente, de ordem 2, é

$$H(z) = \mathbf{c}^T [\mathbf{zI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} + d, \quad (3.3)$$

que, desenvolvida, resulta em

$$H(z) = \frac{dz^2 + [b_1c_1 + b_2c_2 - d(a_{11} + a_{22})]z + b_1(c_2a_{21} - c_1a_{22}) + b_2(c_1a_{12} - c_2a_{11}) + d(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})} \quad (3.4)$$

Comparando  $H(z)$  acima com a expressão da função de transferência genérica para um filtro digital de ordem 2, dada por

$$H(z) = \frac{\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2} \quad (3.5)$$

obtém-se que

$$\gamma_0 = d \quad (3.6a)$$

$$\gamma_1 = b_1 c_1 + b_2 c_2 - d(a_{11} + a_{22}) \quad (3.6b)$$

$$\gamma_2 = b_1(c_2 a_{21} - c_1 a_{22}) + b_2(c_1 a_{12} - c_2 a_{11}) + d(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) \quad (3.6c)$$

$$\alpha_1 = -(a_{11} + a_{22}) \quad (3.6d)$$

e

$$\alpha_2 = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (3.6e)$$

Agora, reescrevendo  $H(z)$  na forma  $H(z) = d + H'(z)$  tem-se que

$$H'(z) = \frac{\beta_1 z + \beta_2}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2} \quad (3.7)$$

sendo que

$$\beta_1 = \gamma_1 - \gamma_0 \alpha_1 = b_1 c_1 + b_2 c_2 \quad (3.8a)$$

e

$$\beta_2 = \gamma_2 - \gamma_0 \alpha_2 = b_1(c_2 a_{21} - c_1 a_{22}) + b_2(c_1 a_{12} - c_2 a_{11}) \quad (3.8b)$$

A Figura 3.1 ilustra a referida estrutura, onde os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  caracterizam a matriz  $\mathbf{A}$ , os coeficientes  $b_i$ ,  $i = 1, 2$ , definem o vetor  $\mathbf{b}$  e os coeficientes  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ , definem o vetor  $\mathbf{c}$ .

### 3.2 - A ESTRUTURA DE SEGUNDA ORDEM DE MÍNIMO RUÍDO [11]

Seja a estrutura no espaço de estados de segunda ordem dada pela Figura 3.2, a qual inclui as operações de quantização, realizadas nas variáveis de estado e na saída.

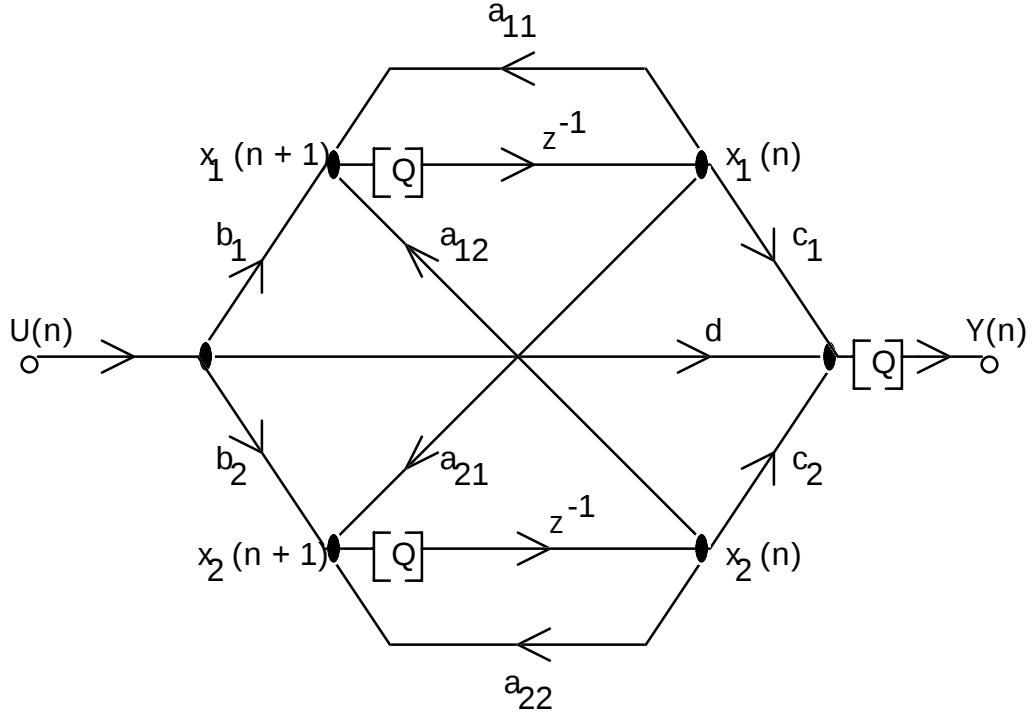


Figura 3.2: A estrutura de mínimo ruído.

A descrição no espaço de estados é agora dada por

$$\mathbf{X}[n + 1] = \mathbf{A}\mathbf{X}[n] + \mathbf{b}U[n] + \mathbf{e}[n] \quad (3.9)$$

$$Y[n] = \mathbf{c}\mathbf{X}[n] + dU[n] + e_3[n] \quad (3.10)$$

onde

$$\mathbf{e}[n] = [e_1[n] \ e_2[n]]^T \quad (3.11)$$

sendo os erros de quantização  $e_j[n]$ ,  $j = 1, 2, 3$ , gerados nos pontos de quantização, não correlacionados em termos de  $n$  e  $j$ .

A variância do ruído na saída da estrutura é dada por

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^3 \|G_j'(z)\|_2^2 \quad (3.12)$$

onde  $\sigma^2$  é a variância do ruído gerado em cada operação de quantização,  $G_j'(z)$  é a função de transferência (escalada) de  $e_j[n]$  para  $Y[n]$  e  $\|\cdot\|_2$  denota a norma  $L_2$ .

O escalamento é realizado de forma tal que

$$\|F_i'(z)\|_p = 1, \quad (3.13)$$

onde  $F_i'(z)$  é a função de transferência (escalada) de  $U[n]$  para  $x_i[n]$ , sendo mais comuns os escalamentos com  $p = 2$  (norma quadrática ou escalamento  $L_2$ ) ou  $p = \infty$  (norma infinita ou escalamento  $L_\infty$ ). Vale ressaltar que o procedimento para obter a estrutura de mínimo ruído só é válido para escalamento  $L_2$ , embora as redes resultantes possam ser prontamente re-escaladas em escalamento  $L_\infty$ , sendo que os resultados assim obtidos, embora não ótimos, são satisfatórios [8], [11].

Dada a realização  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$  do filtro não escalado e com vetores de funções de transferência

$$\mathbf{F}(z) = [F_1(z) \ F_2(z)]^T \quad (3.14a)$$

da entrada para os estados  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ , e

$$\mathbf{G}(z) = [G_1(z) \ G_2(z)]^T \quad (3.14b)$$

dos estados  $x_1[n+1]$  e  $x_2[n+1]$  para a saída, obtém-se a classe de realizações escaladas do filtro, definida por

$$(\mathbf{A}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', d) = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{c}\mathbf{T}, d) \quad (3.15)$$

sendo a  $\mathbf{T}$  uma matriz não singular dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \|F_1\|_p & 0 \\ 0 & \|F_2\|_p \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

que define uma transformação de similaridade que faz o escalamento  $L_p$  do filtro.

Segue-se que os novos vetores de funções de transferência intermediárias tornam-se

$$\mathbf{F}'(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}']^{-1}\mathbf{b}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(z) \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{G}'(z) = [z\mathbf{I} - (\mathbf{A}')^T]^{-1}(\mathbf{c}')^T = \mathbf{T}^T\mathbf{G}(z) \quad (3.18)$$

Particularizando-se os resultados em [18] para o caso de ordem  $N = 2$  obtém-se que as condições necessárias e suficientes para que a variância do ruído  $\sigma_0^2$  na saída do filtro sujeito ao escalamento  $L_2$  seja mínima são

$$\mathbf{W}' = \mathbf{D} \mathbf{K}' \mathbf{D} \quad (3.19a)$$

e

$$K'_{ii} W'_{ii} = K'_{jj} W'_{jj} \quad \forall i, j = 1, 2 \quad (3.19b)$$

onde

$$\mathbf{K}' = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}^k \mathbf{b}') (\mathbf{A}^k \mathbf{b}')^T \quad (3.20)$$

e

$$\mathbf{W}' = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{c}^k \mathbf{A}^k)^T (\mathbf{c}^k \mathbf{A}^k) \quad (3.21)$$

sendo  $\mathbf{D}$  uma matriz diagonal 2 x 2.

As definições acima podem ser expressas no domínio da frequência como

$$\mathbf{K}' = \oint \mathbf{F}'(z) \mathbf{F}'^T(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (3.22)$$

e

$$\mathbf{W}' = \oint \mathbf{G}'(z) \mathbf{G}'^T(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (3.23)$$

e, assim, a restrição de escalamento em (3.13), considerando norma quadrática, implica que

$$K'_{ii} = \|\mathbf{F}'_i(z)\|_2^2 = 1 \quad \forall i \quad (3.24)$$

Portanto, de (3.19), tem-se que

$$W'_{ii} = W'_{jj} \quad \forall i, j \quad (3.25a)$$

ou seja

$$\|\mathbf{G}'_i(z)\|_2^2 = \|\mathbf{G}'_j(z)\|_2^2 \quad \forall i, j \quad (3.25b)$$

Logo, a rede ótima se caracteriza por ter igual contribuição de ruído na saída para cada fonte de erro localizada nas variáveis de estado.

As equações (3.24) e (3.25a) mostram que (3.19) é satisfeita se, e somente se,  $\mathbf{D} = \partial \mathbf{I}$  resultando na condição alternativa

$$\mathbf{W}' = \partial^2 \mathbf{K}' \quad (3.26)$$

Como o filtro é de segunda ordem, observa-se que (3.26) não é modificada quando escrita como

$$\mathbf{W}' = \partial^2 \mathbf{M} \mathbf{K}' \mathbf{M} \quad (3.27)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

pois  $\mathbf{K}'$  e  $\mathbf{W}'$  são matrizes simétricas com elementos iguais na diagonal [11], [18]. De (3.20) e (3.21) é prontamente mostrado que (3.27), e assim (3.26), são satisfeitas por uma rede em que

$$\mathbf{A}'^T = \mathbf{M} \mathbf{A}' \mathbf{M} \quad (3.29a)$$

e

$$\mathbf{c}'^T = \partial \mathbf{M} \mathbf{b}' \quad (3.29b)$$

o que, em termos dos elementos da realização  $(\mathbf{A}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', d)$ , resulta em

$$a'_{11} = a'_{22} \quad (3.30a)$$

e

$$\frac{b'_1}{b'_2} = \frac{c'_2}{c'_1} \quad (3.30b)$$

No que se refere à síntese da estrutura de mínimo ruído, a equação (3.30), juntamente com as equações (3.6d) e (3.6e), permite obter os valores

$$a_{11} = a_{22} = -\frac{\alpha_1}{2} \quad (3.31)$$

$$a_{12} = -\sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{4}} = -a_{21} \quad (3.32)$$

enquanto que a equação (3.30) juntamente com as equações (3.8a) e (3.8b) permite obter

$$b_1 = \sqrt{\frac{(\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1 \beta_2 \alpha_1 + \beta_1^2 \alpha_2} + \beta_2 + a_{11} \beta_1)}{2a_{21}}} \quad (3.33)$$

$$b_2 = \frac{\beta_1}{2b_1} \quad (3.34)$$

$$c_1 = b_2 \quad (3.35)$$

$$c_2 = b_1 \quad (3.36)$$

com  $d$  dado a partir da equação (3.6a).

Com relação à ocorrência de ciclos limite no caso de entrada zero, os resultados em [16] e [26] permitem verificar rapidamente que a estrutura de mínimo ruído é imune a tais ciclos limite, para quantização por truncamento em magnitude realizada nas variáveis de estado. No que se refere à ocorrência de ciclos limite no caso de "overflow", os resultados em [5] permitem verificar rapidamente que se o tratamento de "overflow" for feito por saturação aritmética, que é o tratamento mais comumente adotado, a estrutura de mínimo ruído também é imune a tais ciclos limite.

Agora, já conhecidos os elementos das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e o escalar  $d$ , as equações que estabelecem as funções de transferência internas à rede podem ser obtidas. Assim, as funções de transferência  $F_i(z)$  do nó de entrada  $U[n]$  para as variáveis de estado  $x_i[n]$  são dadas por

$$F_1(z) = \frac{b_1 z + (b_2 a_{12} - b_1 a_{22})}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.37)$$

$$F_2(z) = \frac{b_2 z + (b_1 a_{21} - b_2 a_{11})}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.38)$$

permitindo o escalamento do filtro de acordo com as equações (3.15) e (3.16). Já as funções de transferência dos nós  $x_i[n + 1]$  para a saída da seção são dadas por

$$G_1(z) = \frac{c_1 z + (a_{21}c_2 - a_{22}c_1)}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.39)$$

$$G_2(z) = \frac{c_2 z + (a_{12}c_1 - a_{11}c_2)}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.40)$$

e a partir delas pode-se calcular a densidade espectral relativa do ruído na saída da seção, assim como a sua variância relativa, dadas, respectivamente, por

$$RPSD(\omega) = \sum_{i=1}^2 \left| G_i'(e^{j\omega}) \right|^2 + 1 \quad (3.41)$$

e

$$\sigma_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^2 \left\| G_i'(e^{j\omega}) \right\|_2^2 \quad (3.42)$$

considerando que a quantização é feita nas variáveis de estado e após o somador na saída da rede.

No caso da forma paralela de  $m$  seções, único caso abordado no presente trabalho, a densidade espectral relativa de potência do ruído na saída do filtro, usando como seções a estrutura de mínimo ruído, é dada por

$$RPSD(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 \left| G_{ij}'(e^{j\omega}) \right|^2 \quad (3.43)$$

enquanto a variância relativa do ruído é dada por

$$\sigma_0^2 = 1 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 \left\| G_{ij}'(e^{j\omega}) \right\|_2^2 \quad (3.44)$$

O valor da variância relativa do ruído na saída do filtro na forma paralela, dado pela equação (3.44), é um excelente indicador para um estudo comparativo do desempenho das estruturas de segunda ordem, e será utilizado para tal fim no Capítulo 5.

### 3.3- ESTRUTURAS LIVRES DE CICLOS LIMITE

Como visto no Capítulo 2, uma estrutura digital imune a ciclos limite nos casos de entrada zero e de "overflow" pode ser ligeiramente modificada, na forma em que o sinal de entrada é injetado, tal que ela se torna imune também a ciclos limite no caso de entrada constante [8], [23]. Isso permite que estruturas imunes a ciclos limite em qualquer circunstância sejam sintetizadas, o que é um excelente ponto de partida. Quatro estruturas recentemente propostas, e que apresentam tal característica são a seguir apresentadas, diferindo entre si apenas pelo valor do vetor  $\mathbf{P}$  utilizado (ver equações (2.33) e (2.42)), o que acarreta diferenças no número de multiplicadores por seção de segunda ordem, além de diferenças no que se refere ao ruído na saída do filtro.

#### 3.3.1 - A ESTRUTURA QUASE ÓTIMA [23]

Trata-se de uma estrutura digital derivada da rede ótima, porém imune também a ciclos limite devidos à entrada constante. Seja então a estrutura ótima da Figura 3.2 onde a descrição no espaço de estados, incluindo os quantizadores, é caracterizada por

$$\mathbf{X}[n+1] = Q[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[n] + \mathbf{b}_{op}U[n]] \quad (3.45)$$

$$Y[n] = Q[\mathbf{c}_{op}\mathbf{X}[n] + \mathbf{d}_{op}U[n]] \quad (3.46)$$

onde  $\mathbf{A}_{op}$ ,  $\mathbf{b}_{op}$ ,  $\mathbf{c}_{op}$  e  $d_{op}$  representam a realização da estrutura de mínimo ruído, e são calculados conforme visto na Seção 3.2.

Agora, conforme mostrado no Capítulo 2, aplicando a técnica de eliminação de ciclos limite no caso de entrada constante à estrutura da Figura 3.2, chega-se à estrutura mostrada na Figura 3.3, onde é utilizado o vetor  $\mathbf{P}$  genérico dado por  $\mathbf{P} = [p_1 \ p_2]^T$ . Observe-se que, novamente, os quantizadores realizam truncamento em magnitude e saturação aritmética nas variáveis de estado, o que permite a imunidade a ciclos limite nos casos de entrada zero e "overflow" (ver Capítulo 2).

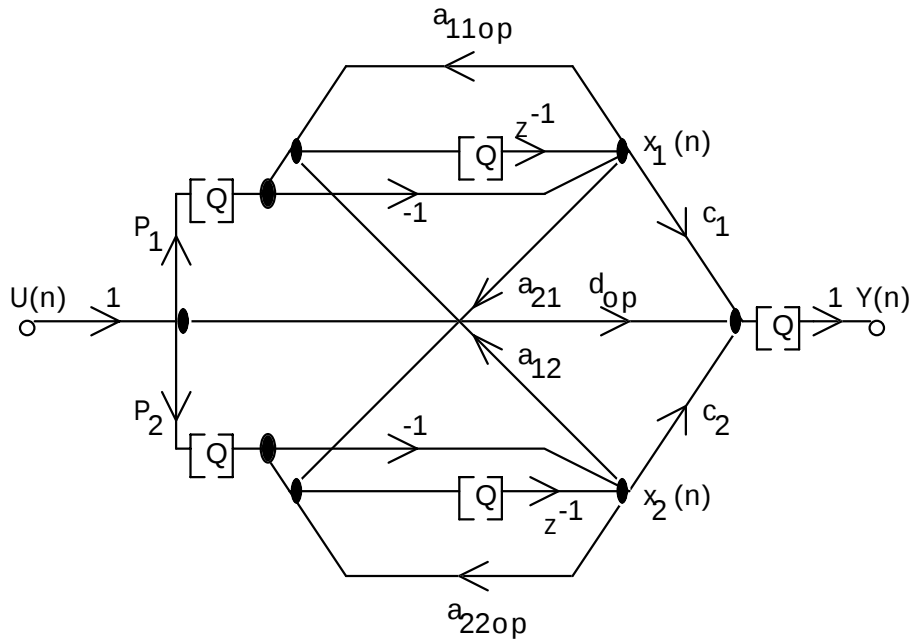


Figura 3.3: Estrutura sem ciclos limite genérica.

Observando-se a Figura 3.3, verifica-se que a estrutura é descrita por

$$\mathbf{X}[n+1] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[n] + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{op})\mathbf{Q}[\mathbf{P}\mathbf{U}[n]]] \quad (3.47)$$

$$\mathbf{Y}[n] = \mathbf{Q}[\mathbf{c}_{op}\mathbf{X}[n] + d_{op}\mathbf{U}[n] - \mathbf{c}_{op}\mathbf{Q}[\mathbf{P}\mathbf{U}[n]]] \quad (3.48)$$

o que faz com que a função de transferência  $H(z)$  obtida a partir de tal figura seja a mesma obtida a partir da Figura 3.2, no caso de precisão infinita, quando se impõe que

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{op})^{-1}\mathbf{b}_{op} \quad (3.49)$$

e

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\text{op}} - \mathbf{c}_{\text{op}} \mathbf{P} \quad (3.50)$$

Logo, a estrutura da Figura 3.3 pode ser vista como sendo uma versão imune a ciclos limite devidos à entrada constante da rede ótima de segunda ordem. Entretanto, a Figura 3.3 será ligeiramente modificada, a fim de evitar a necessidade de correção do coeficiente que estabelece a ligação direta entrada / saída, tal que, agora

$$\mathbf{X}[n+1] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{\text{op}} \mathbf{X}[n] + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{op}}) \mathbf{Q}[\mathbf{P} \mathbf{U}[n]]] \quad (3.51)$$

$$\mathbf{Y}[n] = \mathbf{Q}[\mathbf{c}_{\text{op}} \mathbf{X}[n] + \mathbf{d}_{\text{op}} U[n]] \quad (3.52)$$

correspondendo à estrutura mostrada na Figura 3.4.

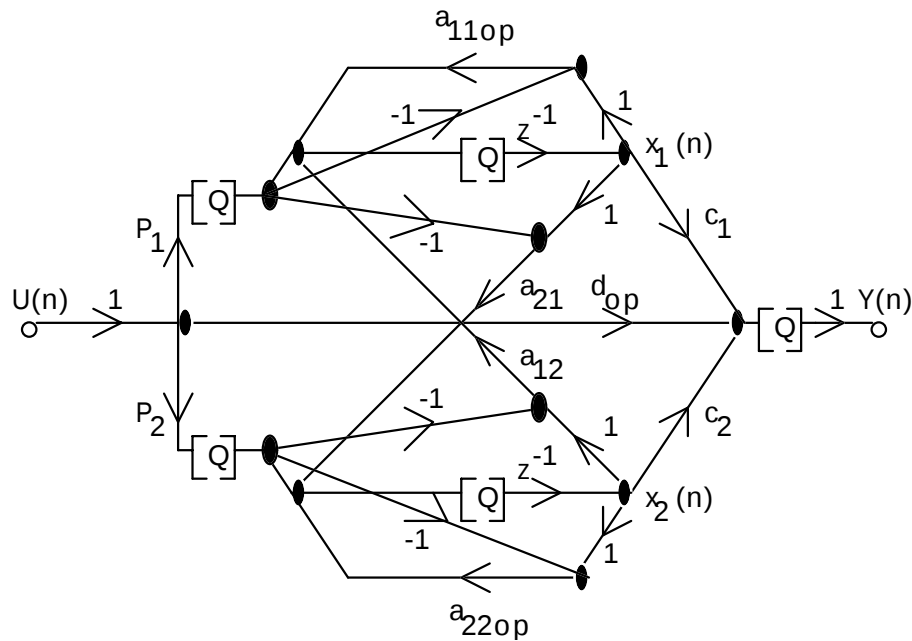


Figura 3.4: A estrutura quase ótima.

Para realizar a síntese da estrutura da Figura 3.4, dada a rede da Figura 3.2, apenas é necessário calcular  $\mathbf{P}$ , além de escalar a rede tal que não haja overflow nos nós de soma correspondentes a  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{op})Q[\mathbf{P}\mathbf{U}[n]]$ . Para tanto, usam-se as equações (3.15) e (3.16), agora considerando as funções de transferência da entrada  $\mathbf{U}[n]$  para os referidos nós de soma. Daqui para a frente, portanto, a estrutura da Figura 3.4, e não mais a da Figura 3.3, será considerada, pela sua maior similaridade com a estrutura da Figura 3.2.

Dado que a estrutura recursiva da Figura 3.4 é a mesma da Figura 3.2, a menos de escalamento, a sua imunidade a ciclos limite, no caso de entrada zero, está garantida pela imunidade a ciclos limite no caso de entrada zero da rede ótima [26]. A mesma afirmação vale para o caso de ciclos limite devidos a "overflow" [5].

No que se refere ao caso de entrada constante, seja  $U[n] = U_0$ , tal que

$$\mathbf{X}[n+1] = Q[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[n] + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{op})Q[\mathbf{P}U_0]] \quad (3.53)$$

Daí obtém-se que

$$\mathbf{X}[n+1] = Q[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[n] - \mathbf{A}_{op}Q[\mathbf{P}U_0] + Q[\mathbf{P}U_0]] \quad (3.54)$$

e finalmente que

$$\mathbf{X}[n+1] - Q[\mathbf{P}U_0] = Q[\mathbf{A}_{op}(\mathbf{X}[n] - \mathbf{P}U_0)] \quad (3.55)$$

que corresponde à estrutura ótima, com entrada zero, em que os novos estados são dados por

$$\mathbf{V}[n] = \mathbf{X}[n] - Q[\mathbf{P}U_0] \quad (3.56)$$

para quem a imunidade a ciclos limite está garantida. Assim sendo, a estrutura proposta na Figura 3.4 é imune a todo tipo de ciclos limite, além de se aproximar bastante da rede ótima proposta em [11], o que justifica que se espere que a mesma apresente bom desempenho, em termos de ruído de quantização na saída.

Finalmente, observa-se que a presença do quantizador logo após o produto  $\mathbf{P}U[n]$  é necessária para garantir a passagem da equação (3.54) para a equação (3.55), e equivale à exigência de que  $\mathbf{P}U_0$  seja representado exatamente, no caso das estruturas propostas em [8].

Em termos de projeto de filtros na forma paralela, usando a estrutura quase ótima, os seguintes passos devem ser adotados:

1) faça a síntese da estrutura ótima da Figura 3.2, devidamente escalada, como realizado na Seção 3.2 para cada bloco da estrutura paralela;

2) calcule o vetor  $\mathbf{P}$  através da equação (3.49), introduzindo-o na estrutura, como na Figura 3.4, para cada bloco da estrutura paralela;

3) re-escala a estrutura resultante através da transformação de similaridade descrita pela matriz  $\mathbf{T}$  dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \|F_a(z)\|_P & 0 \\ 0 & \|F_b(z)\|_P \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

onde  $F_a(z)$  e  $F_b(z)$  são as transferências da entrada da rede para os nós correspondentes a  $x_1[n] - Q[p_1 u[n]]$  e  $x_2[n] - Q[p_2 u[n]]$ , respectivamente, para cada bloco da estrutura paralela.

As transferências referidas no passo 3 acima são dadas por

$$F_a(z) = \frac{-p_1 z^2 + [p_1(1 + a_{22}) - p_2 a_{12}]z + p_2 a_{12} - p_1 a_{22}}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.58a)$$

$$F_b(z) = \frac{-p_2 z^2 + [p_2(1 + a_{11}) - p_1 a_{21}]z + p_1 a_{21} - p_2 a_{11}}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.58b)$$

e sua norma quadrática pode ser calculada através do método proposto em [17], quando for o caso de escalamento em norma  $p = 2$ . Já para o caso de escalamento em norma  $p = \infty$ , o cálculo da norma infinita de  $F_a(z)$  e  $F_b(z)$  pode ser feito usando os resultados expressos em [24].

Finalmente, para determinar o ruído de quantização na saída do filtro na forma paralela, as transferências necessárias são  $G_1(z)$  e  $G_2(z)$ , definidas como as transferências dos nós correspondentes a  $x_1(n+1)$  e  $x_2(n+1)$  para a saída da rede, além das transferências  $L_1(z)$  e  $L_2(z)$  dos nós de saída dos multiplicadores  $p_1$  e  $p_2$  para a saída da rede. Tais transferências são dadas por

$$G_1(z) = \frac{c_1 z + c_2 a_{21} - c_1 a_{22}}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.59a)$$

$$G_2(z) = \frac{c_2 z + c_1 a_{12} - c_2 a_{11}}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.59b)$$

$$L_1(z) = \frac{z(c_2 a_{21} - c_1 a_{11} + c_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})) + c_1(1 - a_{11}) - c_2 a_{21}}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.60a)$$

$$L_2(z) = \frac{z(c_1 a_{12} - c_2 a_{22} + c_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})) + c_2(1 - a_{22}) - c_1 a_{12}}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3.60b)$$

A densidade espectral relativa do ruído na saída do filtro é, então, dada por

$$RPSD(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 \left[ |G_{ij}(e^{j\omega})|^2 + |L_{ij}(e^{j\omega})|^2 \right] \quad (3.61)$$

sendo  $m$  o número de seções de ordem 2, enquanto a variância relativa é dada por

$$\sigma_0^2 = 1 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 \left[ \|G_{ij}(z)\|_2^2 + \|L_{ij}(z)\|_2^2 \right] \quad (3.62)$$

onde as normas quadráticas são novamente calculadas como em [17].

### 3.3.2 - OUTRAS ESTRUTURAS IMUNES A CICLOS LIMITE [8]

A matriz **A** correspondente a um filtro digital de segunda ordem escalado, descrito no espaço de estados, é definida como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -\frac{\xi}{\sigma} \\ \xi\sigma & a \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

e corresponde a um par de pólos complexos conjugados dados por  $p_i = a \pm j\xi$ ,  $i = 1, 2$ . Observa-se que a constante real  $\sigma$  só depende do escalamento, e é, portanto, usada para a finalidade de redução do ruído na saída da estrutura.

Então, utilizando a condição de otimalidade (3.30a) e as equações (3.6d) e (3.6e), os seguintes multiplicadores são obtidos

$$a_{11} = a_{22} = a \quad (3.64)$$

$$a_{12} = -\frac{\xi}{\sigma} \quad (3.65)$$

$$a_{21} = \sigma\xi \quad (3.66)$$

onde

$$a = -\frac{\alpha_1}{2} \quad (3.67)$$

$$\xi = \sqrt{\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{4}\right)} \quad (3.68)$$

e  $\sigma$  será determinado posteriormente.

Dada a matriz **A** na equação (3.63), é fácil verificar que ela é imune a ciclos limite no caso de entrada zero, assim como no caso de "overflow", sob condição de saturação aritmética. Assim, ela pode ter seu vetor **b** modificado, de acordo com a equação (2.32), onde o valor do vetor **P** a ser usado está na equação (2.42). Assim, são obtidas as três estruturas das Figuras 3.5, 3.6 e 3.7.

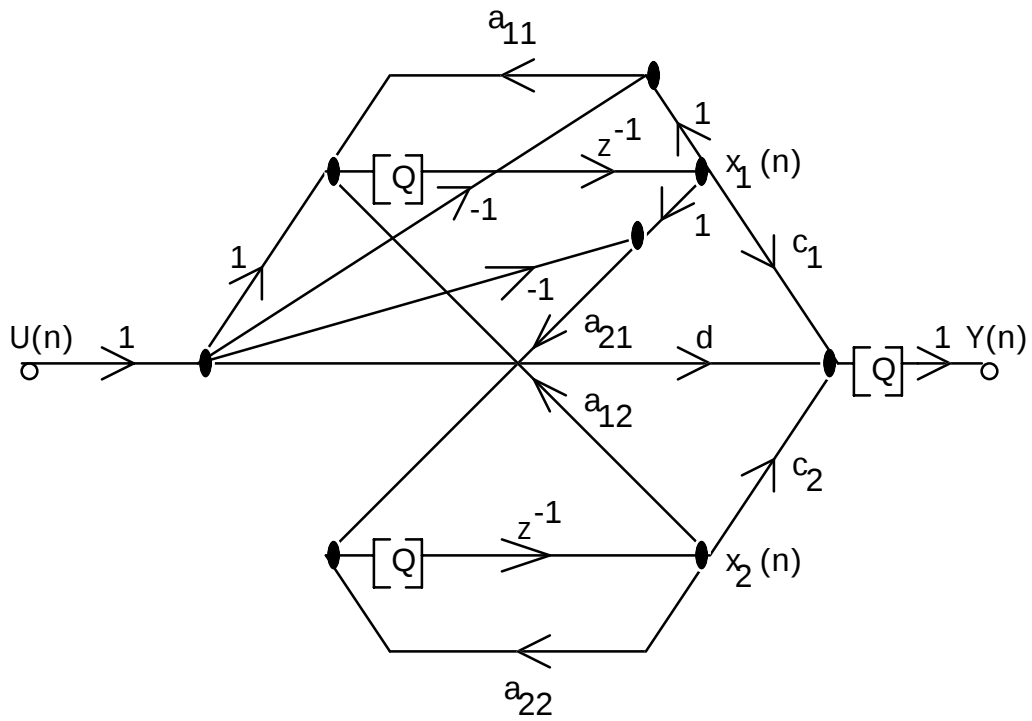


Figura 3.5: Estrutura de segunda ordem sem ciclos limite tipo I.

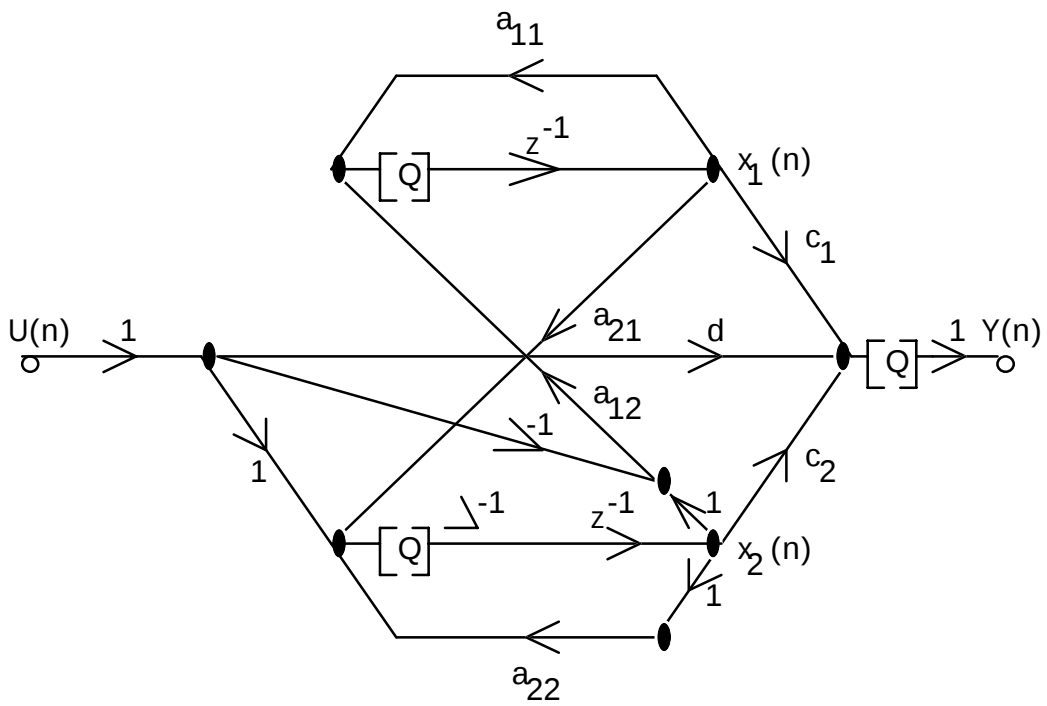


Figura 3.6: Estrutura de segunda ordem sem ciclos limite tipo II.

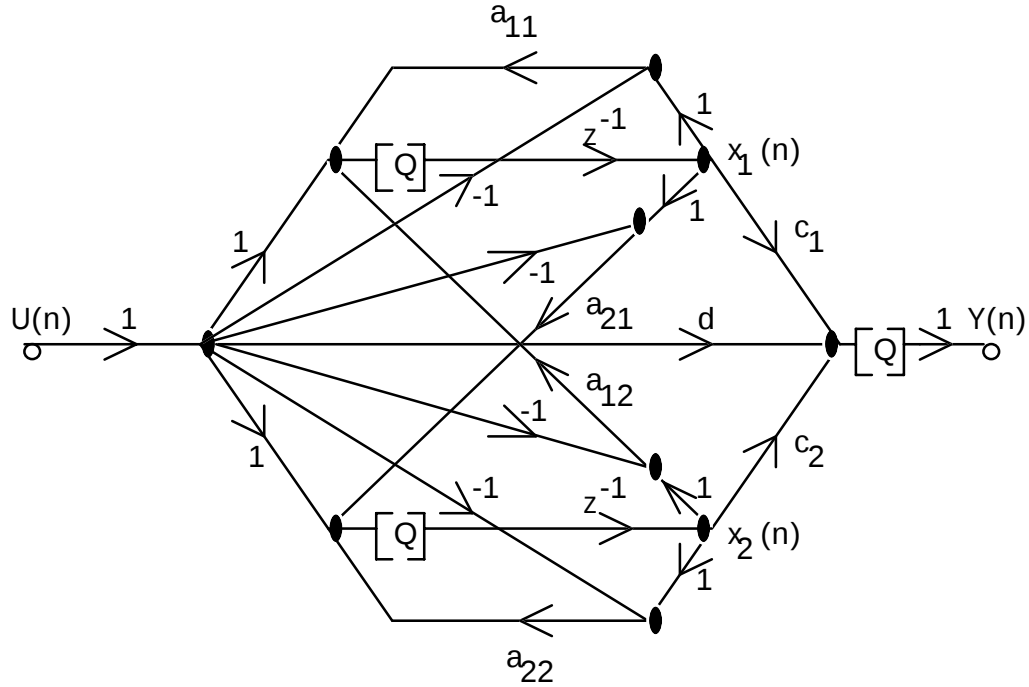


Figura 3.7: Estrutura de segunda ordem sem ciclos limite tipo III.

Os valores de  $\mathbf{b}$  para tais estruturas são dados por

$$\text{Estrutura I: } b_1 = \pm(1 - a_{11}), \quad b_2 = \mp a_{21} \quad (3.69a)$$

$$\text{Estrutura II: } b_1 = \mp a_{12}, \quad b_2 = \pm(1 - a_{22}) \quad (3.69b)$$

$$\text{Estrutura III: } b_1 = \pm(1 - a_{11}) \mp a_{12}, \quad b_2 = \mp a_{21} \pm(1 - a_{22}) \quad (3.69c)$$

onde se observa que os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  são formados sem a necessidade de novos multiplicadores e, como consequência, as estruturas geradas são computacionalmente menos complexas que a rede de mínimo ruído.

A seguir, o procedimento de síntese das estruturas tipo I e III das Figura 3.5 e 3.7 será abordado (a estrutura tipo II é idêntica à estrutura tipo I), já considerando as equações (3.63) até (3.68), que são válidas para todos os casos.

#### A) A ESTRUTURA DE SEGUNDA ORDEM SEM CICLOS LIMITE TIPO I

Conhecidos os valores de  $b_1$  e  $b_2$ , pode-se, então, obter os coeficientes do vetor  $\mathbf{c}$ , dados por

$$c_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} \quad (3.70)$$

$$c_2 = \frac{-(\alpha_1 + 2\alpha_2)\beta_1 + (2 + \alpha_1)\beta_2}{2\sigma\xi(1 + \alpha_1 + \alpha_2)} \quad (3.71)$$

A fim de eliminar também a possibilidade de "overflow", seja o sinal de entrada escalado pelo multiplicador de escalamento  $\lambda$  conforme mostra a Figura 3.8.

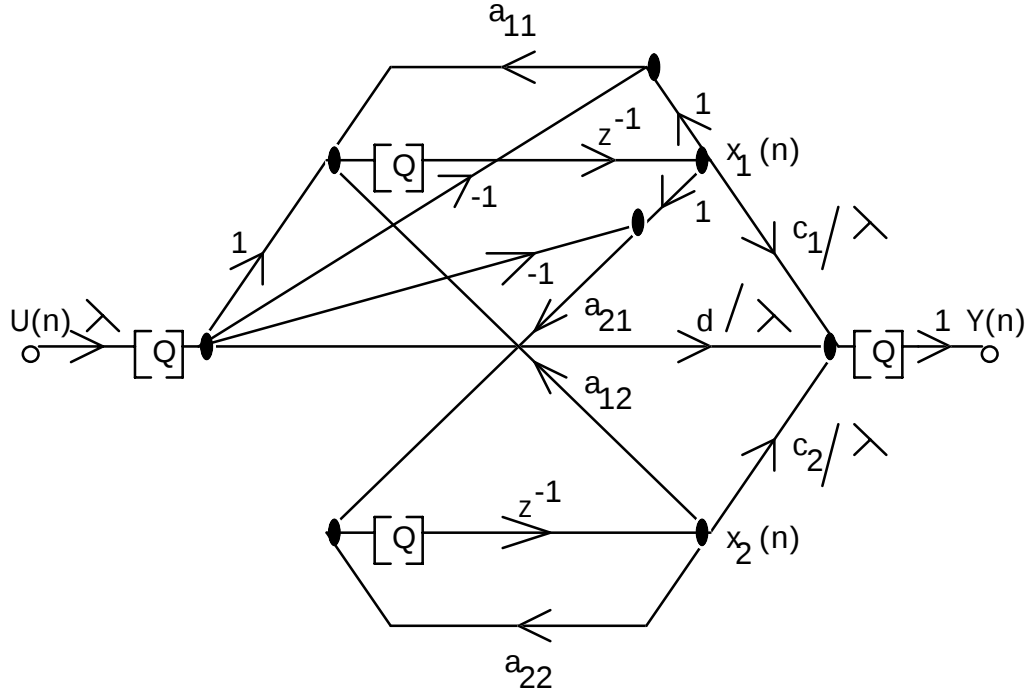


Figura 3.8: Rede sem ciclos limite tipo I escalada.

Pode-se agora determinar o parâmetro  $\sigma$ , através da equalização dos máximos níveis de sinal na entrada dos multiplicadores, a fim de aumentar a faixa dinâmica e, conseqüentemente, a relação sinal-ruído (observe-se que  $\|F_1(z)\|_p = \|F_2(z)\|_p$  é uma condição para a redução do ruído [8], [11]).

Assim, as funções de transferência do nó de entrada  $U[k]$  para os nós das variáveis de estado  $x_i[k]$  são prontamente obtidas, sendo

$$F_1(z) = \frac{(1-a)z + (\xi^2 - a + a^2)}{z^2 - 2az + a^2 + \xi^2} \quad (3.72)$$

e

$$F_2(z) = \sigma F_1'(z) \quad (3.73)$$

onde

$$F_2'(z) = \frac{-\xi z + \xi}{z^2 - 2az + a^2 + \xi^2} \quad (3.74)$$

corresponde à estrutura não escalada ( $\sigma = 1$ ).

Da mesma forma, as funções de transferência dos nós das variáveis de estado  $x_1[n + 1]$  para a saída da rede são dadas por

$$G_1(z) = \frac{c_1(z - a) + c_2\xi\sigma}{z^2 - 2az + a^2 + \xi^2} \quad (3.75)$$

e

$$G_2(z) = \frac{c_2(z - a) - c_1\frac{\xi}{\sigma}}{z^2 - 2az + a^2 + \xi^2} \quad (3.76)$$

O máximo nível de sinal na entrada dos quantizadores pode ser equalizado fazendo

$$\|F_1(z)\|_p = \|\sigma F_2'(z)\|_p \quad (3.77)$$

Assim sendo, pode-se obter

$$\sigma = \frac{\|F_1(z)\|_p}{\|F_2'(z)\|_p} \quad (3.78)$$

Para completar a síntese da estrutura, deve-se calcular o valor do parâmetro  $\lambda$  de escalamento, o qual é dado por

$$\lambda = \frac{1}{\|F_a(z)\|_p} \quad (3.79)$$

onde  $F_a(z)$  é a transferência da entrada da rede para o nó correspondente a  $x_1[n] - u[n]$ .

O próximo passo é verificar a otimalidade da estrutura com relação ao ruído, o que é feito a partir da verificação da equação (3.30b). Assim,

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-(2 + \alpha_1)}{2\sigma\xi} \quad (3.80)$$

e

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{-(\alpha_1 + 2\alpha_2)\beta_1 + (2 + \alpha_1)\beta_2}{2\sigma\xi(\beta_1 + \beta_2)} \quad (3.81)$$

resultando em

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 + 2}{\alpha_2 - 1} \quad (3.82)$$

Esta condição é normalmente violada, mostrando que os filtros imunes a ciclos limite no caso de entrada constante não são ótimos em termos de ruído. Porém, para filtros com zeros de  $H(z)$  localizados em  $z = 1$ , como filtros Butterworth, Chebyshev e Bessel passa-altas, os valores de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são dados por

$$\beta_1 = -\gamma_0(2 + \alpha_1) \quad (3.83a)$$

$$\beta_2 = \gamma_0(1 - \alpha_2) \quad (3.83b)$$

assegurando que, nesses casos, a estrutura tipo I é ótima com respeito ao ruído na saída. Em outros casos, porém, o ruído se aproxima daquele da estrutura ótima, embora não seja o valor ótimo.

No caso do projeto de filtros na forma paralela usando como seções as estruturas da Figura 3.8, adota-se a seguinte sistemática, para a síntese do filtro:

1) expresse a função de transferência do filtro como

$$T(z) = d + \sum_{i=1}^m H_i'(z) \quad (3.84)$$

onde cada  $H_i'(z)$  é da forma dada por (3.7);

2) compute  $a$  e  $\xi$  para cada  $H_i'(z)$  usando (3.67) e (3.68);

3) compute  $\sigma$  para cada seção de acordo com (3.78). Se o escalamento for em norma quadrática tome

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2 + \alpha_1)^2[(1 + \alpha_2)(1 + \mu^2) - 2\alpha_1\mu]}{8\xi^2(1 + \alpha_1 + \alpha_2)}} \quad (3.85)$$

onde

$$\mu = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1 + 2} \quad (3.86)$$

Se o escalamento for em norma infinita tome

$$\sigma = \frac{2 + \alpha_1}{2\xi} \sqrt{\frac{1 + f^2 + 2f \cos \omega_0}{2(1 - \cos \omega_0)}} \quad (3.87)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência do par de pólos e

$$f = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{2\xi^2}{2 + \alpha_1} \quad (3.88)$$

4) compute **A** e **c** para cada seção usando as equações (3.64), (3.65), (3.66), (3.70) e (3.71);

5) compute a constante de escalamento  $\lambda$  para cada seção, como na equação (3.79). Se  $p = 2$ , então

$$\lambda = \sqrt{\frac{(1 - \alpha_1 + \alpha_2)(1 - \alpha_2)}{2\sigma^2\xi^2}} \quad (3.89)$$

e se  $p = \infty$ , então

$$\lambda = \frac{1 - r}{\sigma\xi} \sqrt{\frac{1 + r^2 - 2r \cos 2\omega_0}{2(1 - \cos \omega_0)}} \quad (3.90)$$

onde  $r$  é o raio do par de pólos.

6) a fim de restaurar o nível do sinal na saída de cada seção, substitua  $c_1$  e  $c_2$  por  $c_1'$  e  $c_2'$ , respectivamente, onde

$$c_1' = c_1/\lambda \quad (3.91a)$$

e

$$c_2' = c_2/\lambda \quad (3.91b)$$

Finalmente, no que se refere ao cálculo da densidade espectral relativa da potência do ruído na saída do filtro, e da sua variância relativa, sempre considerando um filtro digital na forma paralela, pode-se escrever, para os quantizadores nas variáveis de estado,

$$RPSD(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^2 |G_{ij}(e^{j\omega})|^2 + |H_j'(e^{j\omega})|^2 / \lambda^2 \right\} \quad (3.92)$$

e

$$\sigma_0^2 = 1 + \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^2 \|G_{ij}(z)\|_2^2 + \|H_j'(z)\|_2^2 / \lambda^2 \right\} \quad (3.93)$$

onde  $m$  é o número de seções de segunda ordem,  $G_{ij}$  é a função de transferência do nó  $x_i[n+1]$  para a saída da rede e  $H_j'(z)$  é a função de transferência da saída do multiplicador  $\lambda$  da  $j$ -ésima seção para a sua saída.

### B) A ESTRUTURA DE SEGUNDA ORDEM SEM CICLOS LIMITE TIPO III

Da mesma forma, conhecidos os valores de  $b_1$  e  $b_2$ , pode-se, então, obter os coeficientes do vetor  $\mathbf{c}$ , dados por

$$c_1 = \frac{\beta_1(2\xi\sigma + 2\alpha_2 + \alpha_1) - \beta_2(2 + \alpha_1 - 2\xi\sigma)}{2(1 + \alpha_1 + \alpha_2)\left(\xi\sigma + \frac{\xi}{\sigma}\right)} \quad (3.94)$$

$$c_2 = \frac{\beta_1(2\xi - 2\sigma\alpha_2 - \alpha_1\sigma) + \beta_2(2\sigma + \alpha_1\sigma + 2\xi)}{2\sigma(1 + \alpha_1 + \alpha_2)\left(\xi\sigma + \frac{\xi}{\sigma}\right)} \quad (3.95)$$

Conhecidos tais coeficientes, pode-se, então, dizer que esta estrutura é um caso particular da estrutura quase ótima, em que o vetor  $\mathbf{P}$  utilizado para modificar o sinal de entrada possui o valor pré-estabelecido de  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 1$ . Desta forma, seu procedimento de síntese, escalamento e análise de ruído de quantização são obtidos conforme visto na Seção 3.3.1, particularizando-se os valores de  $p_1$  e  $p_2$  lá utilizados para  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 1$ .

### 3.4 - COMPARAÇÃO DA COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

A complexidade computacional inerente às estruturas de segunda ordem de mínimo ruído, quase ótima e sem ciclos limite dos tipos I e III é aqui abordada, para fins comparativos.

Do ponto de vista de "hardware", a estrutura da Figura 3.4 difere daquela da Figura 3.2 pela necessidade de dois quantizadores para o produto  $\mathbf{PU}[n]$ . Isso aumenta o ruído na saída da rede, como caracterizado por  $L_1(z)$  e  $L_2(z)$  nas equações (3.61) e (3.62). Já quando comparada com as estruturas das Figuras 3.5 e 3.7, a estrutura da Figura 3.4 tem os dois quantizadores na saída dos multiplicadores  $p_1$  e  $p_2$  a mais, além desses dois multiplicadores. Embora as estruturas das Figuras 3.5 e 3.7 tenham o multiplicador genérico  $\lambda$ , e consequentemente um quantizador para o produto  $\lambda U[n]$ , quando tais blocos são usados como seções de uma estrutura paralela um único  $\lambda$  pode ser usado, tal que prevalece o número de sete multiplicadores genéricos por cada seção como as das Figuras

3.5 e 3.7, e nove por cada seção como as das Figuras 3.2 e 3.4. O "hardware" necessário para implementar uma estrutura paralela de N blocos como os das Figuras 3.2, 3.4, 3.5 e 3.7 é indicado na Tabela 3.1.

**TABELA 3.1: Implementação de um filtro paralelo de N blocos.**

| Bloco da figura | Somadores de duas entradas | Multiplicadores genéricos | Quantizadores |
|-----------------|----------------------------|---------------------------|---------------|
| 3.2             | $6N$                       | $8N + 1$                  | $2N + 1$      |
| 3.4             | $10N$                      | $8N + 1$                  | $4N + 1$      |
| 3.5             | $7N$                       | $6N + 2$                  | $2N + 2$      |
| 3.7             | $10N$                      | $6N + 2$                  | $2N + 2$      |

### 3.5 - CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentadas algumas estruturas de segunda ordem importantes para a implementação de filtros digitais, devido às suas boas características com relação a ruído e a sua imunidade a ciclos limite. Tais estruturas são a estrutura ótima [11], a estrutura quase ótima [23] e as estruturas livres de ciclos limite tipos I e III [8].

Vistas as particularidades de cada estrutura, o procedimento para sua síntese foi descrito, assim como o cálculo da densidade espectral relativa de ruído (RPSD) e da variância relativa do ruído na saída, para um filtro na forma paralela de N blocos de segunda ordem. Também foi apresentada uma comparação da complexidade computacional exigida por cada uma das estruturas abordadas, em se tratando do filtro na forma paralela de N blocos.

## Capítulo 4

### Transformações Espectrais para Filtros Digitais

As transformações espectrais para filtros digitais no domínio da frequência mais utilizadas são transformações aplicadas sobre um protótipo passa-baixas, levando a outros tipos de espectro com características passa-baixas, passa-altas, passa-banda ou rejeita-banda [6], [25]. Tais transformações são normalmente utilizadas na etapa de aproximação das características desejadas do filtro que se quer projetar. Através delas, a função de transferência  $H(z)$  do protótipo passa-baixas é transformada em  $H(z)$  do filtro desejado através do mapeamento  $z^{-1} \rightarrow G(z^{-1})$  [6], [25].

No presente capítulo, ao contrário, transformações espectrais serão aplicadas sobre um filtro potótipo com espectro qualquer, com o objetivo de transformá-lo em um filtro com as mesmas caracterísiticas espectrais, porém com banda passante de larguras diversas, no intuito de estudar o desempenho de diversas estruturas usadas para a implementação de filtros digitais, a nível da variância do ruído na sua saída [23]. Desta forma, as transformações espectrais propostas por Constantinides [6] serão estudadas, principalmente em termos da sua composição através de transformações parciais, com o objetivo encontrar novas transformações que possibilitem partir de um filtro digital de característica qualquer e, variando apenas sua largura de banda, obter outro filtro com mesma característica. Assim, deseja-se encontrar transformações passa-altas para passa-altas, passa-banda para passa-banda e rejeita-banda para rejeita-banda, além da transformação passa-baixas para passa-baixas já proposta na literatura [6].

#### 4.1 - AS TRANSFORMAÇÕES ESPECTRAIS SOBRE PROTÓTIPOS PASSA-BAIXAS [6]

Estas transformações consistem em um mapeamento do tipo  $z^{-1} \rightarrow G(z^{-1})$  em que as regiões de estabilidade e instabilidade são preservadas, ou seja, o interior e o exterior do círculo unitário são mapeados, respectivamente, no interior e no exterior do círculo unitário de um novo plano complexo caracterizado por uma nova variável complexa. Para  $z^{-1} = e^{-j\omega}$  tem-se

$$G(z^{-1}) = P(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (4.1)$$

onde  $P(\omega)$  é a amplitude e  $\phi(\omega)$  é a fase de  $G(z^{-1})$ . Como as regiões de estabilidade são preservadas, tem-se que

$$|z^{-1}| > 1 \quad \Rightarrow \quad |G(z^{-1})| > 1 \quad (4.2a)$$

$$|z^{-1}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |G(z^{-1})| < 1 \quad (4.2b)$$

e, conseqüentemente,  $P(\omega)=1$ , o que significa que o círculo unitário é mapeado sobre ele próprio.

Dada a função de transferência inicial, real e racional em  $z^{-1}$ , de um filtro digital passa-baixas, uma função de transferência resultante, real e racional em  $z^{-1}$ , é obtida quando aplicado o seguinte mapeamento

$$G(z^{-1}) = e^{j\theta} \prod_{i=1}^n \frac{z^{-1} - \alpha_i}{1 - \alpha_i^* z^{-1}} \quad (4.3)$$

caracterizado por uma função passa-tudo, também real e racional em  $z^{-1}$ , onde  $|\alpha_i| < 1$  e  $\alpha_i^*$  é o complexo conjugado de  $\alpha_i$ . Além do mais, a condição de  $G(z^{-1})$  real faz com que os zeros  $\alpha_i$  ocorram em pares complexos conjugados, e que  $\exp(j\theta) = \pm 1$ , implicando em que o ângulo  $\theta$  de rotação sobre o círculo unitário seja múltiplo de  $\pi$ . Entretanto, para filtros digitais com coeficientes complexos, tais restrições sobre  $\alpha_i$  e  $\theta$  são eliminadas [7].

A transformação espectral para filtros digitais com coeficientes reais, em sua forma geral, é dada por

$$G(z^{-1}) = \pm \prod_{i=1}^n \frac{z^{-1} - \alpha_i}{1 - \alpha_i^* z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_i z^{-1}} \quad (4.4)$$

onde a ordem é agora  $2n$ , e os  $\alpha_i$  não são necessariamente todos complexos.

Vistas todas estas condições, as seguintes transformações, que preservam a característica de amplitude do filtro digital original, são apresentadas: passa-baixas passa-baixas, passa-baixas passa-altas, passa-baixas passa-banda e passa-baixas rejeita-banda.

#### 4.1.1 - TRANSFORMAÇÃO PASSA-BAIXAS — PASSA-BAIXAS

Para este tipo de transformação, o círculo unitário é mapeado nele próprio, em uma correspondência um a um, com os pontos  $\omega = 0$  e  $\omega = \pi$  da Figura 4.1 invariantes.

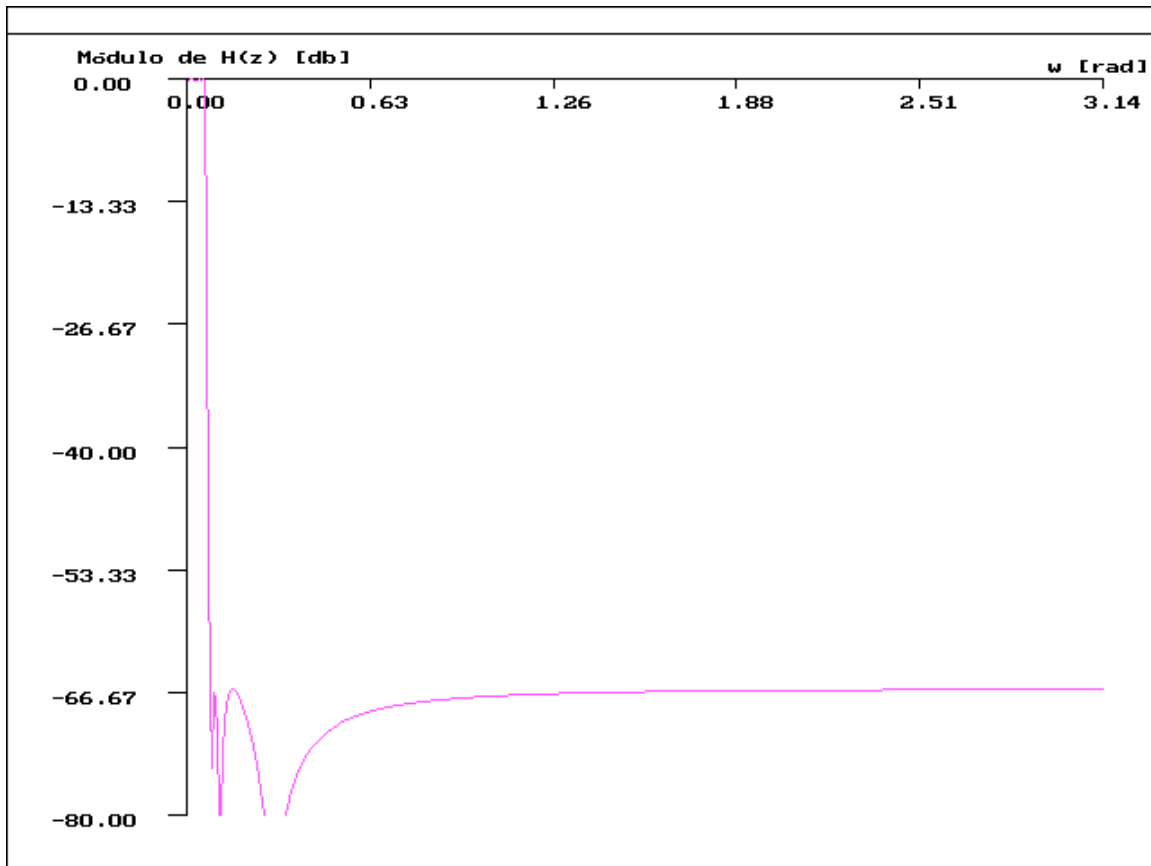


Figura 4.1: (a) Protótipo passa-baixas.

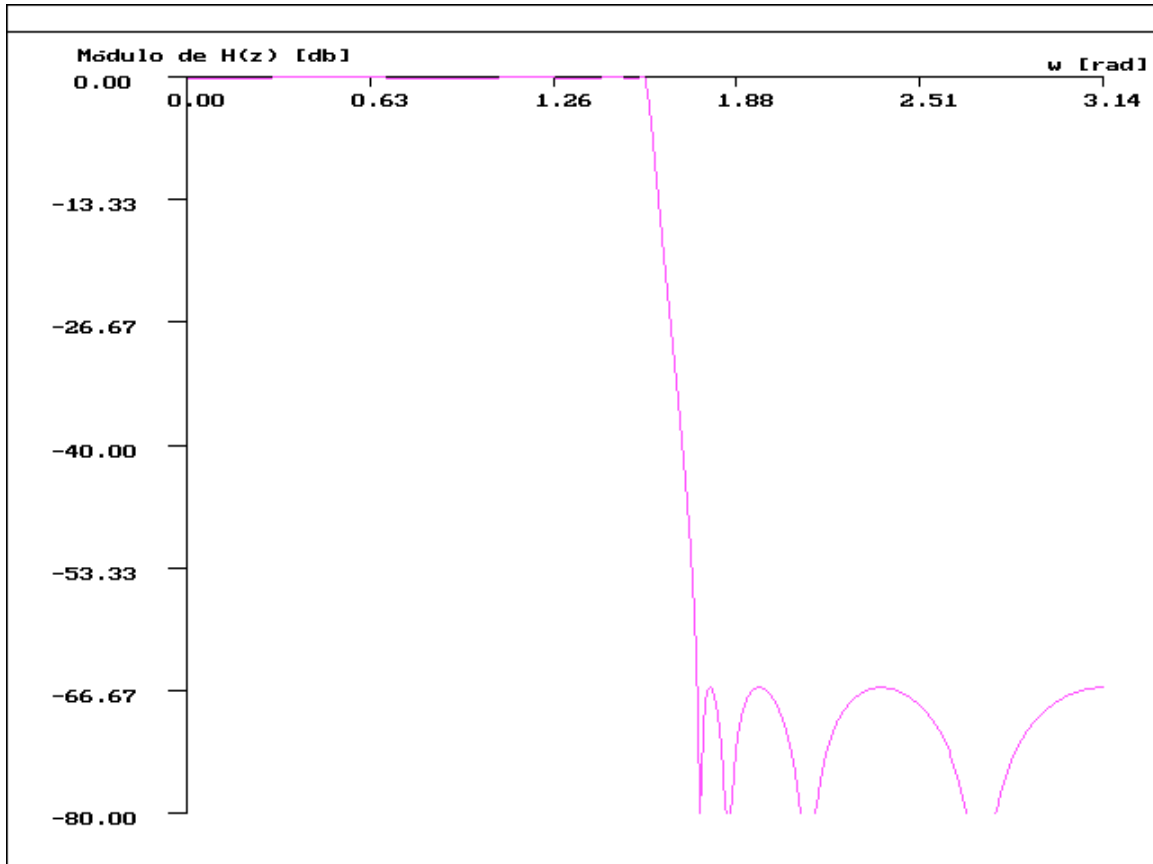


Figura 4.1: (b) Filtro passa-baixas obtido pela transformação daquele em (a).

Assim, para  $\omega = 0$  vem que

$$G(z^{-1}) = G(e^{-j0}) = G(1) = e^{-j\theta} = e^{-j0} = 1 \quad (4.5)$$

e para  $\omega = \pi$

$$G(z^{-1}) = G(e^{-j\pi}) = G(-1) = e^{-j\theta} = e^{-j\pi} = -1 \quad (4.6)$$

o que leva a  $\theta = 0$  e

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (4.7)$$

o que equivale a equação (4.3) com  $n = 1$ ,  $|\alpha| < 1$  e  $\alpha$  real.

Para uma frequência de corte do filtro protótipo passa-baixas de  $\beta$  radianos e a do filtro passa-baixas resultante de  $\omega_c$  radianos obtém-se

$$e^{-j\omega_c} = \frac{e^{-j\beta} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\beta}} \quad (4.8)$$

o que resulta em

$$\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)} \quad (4.9)$$

A Figura 4.1 ilustra tal transformação, usando  $\beta = 0.02\pi$  radianos e  $\omega_c = 0.5\pi$  radianos.

#### 4.1.2 - TRANSFORMAÇÃO PASSA-BAIXAS — PASSA-ALTAS

Para este tipo de transformação, o ponto  $\omega = 0$  da Figura 4.1(a) é levado para o ponto  $\omega = \pi$  da Figura 4.2 abaixo, enquanto o ponto  $\omega = \pi$  da figura 4.1(a) é levado ao ponto  $\omega = 0$  da Figura 4.2.

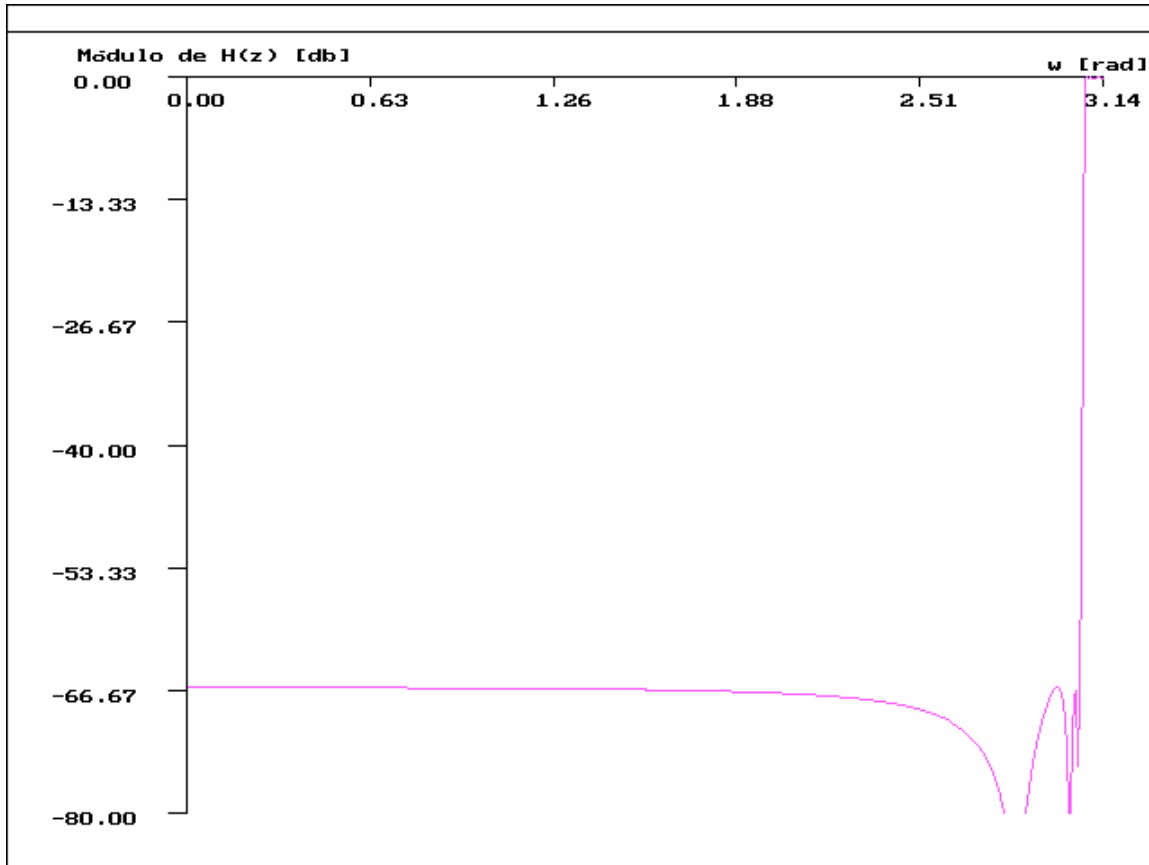


Figura 4.2: Filtro passa-altas obtido a partir do protótipo passa-baixas da Figura 4.1(a).

Desta forma, para uma correspondência um a um entre o filtro original passa-baixas e o filtro passa-altas resultante, torna-se necessário um ângulo de rotação  $\theta = 180^\circ$ , o que leva a

$$G(z^{-1}) = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \quad (4.10)$$

Para a frequência de corte do filtro protótipo passa-baixas de  $\beta$  radianos e a do filtro passa-altas resultante de  $\omega_c$  radianos obtém-se

$$e^{-j\omega_c} = -\frac{e^{-j\beta} + \alpha}{1 + \alpha e^{-j\beta}} \quad (4.11)$$

o que resulta em

$$\alpha = -\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\cos \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)} \quad (4.12)$$

A Figura 4.2 ilustra tal transformação, usando  $\beta = 0.02\pi$  radianos e  $\omega_c = 0.98\pi$  radianos.

#### 4.1.3 - TRANSFORMAÇÃO PASSA-BAIXAS — PASSA-BANDA

Para este tipo de transformação, o filtro passa-baixas original da Figura 4.1(a) é transformado naquele da Figura 4.3 abaixo.

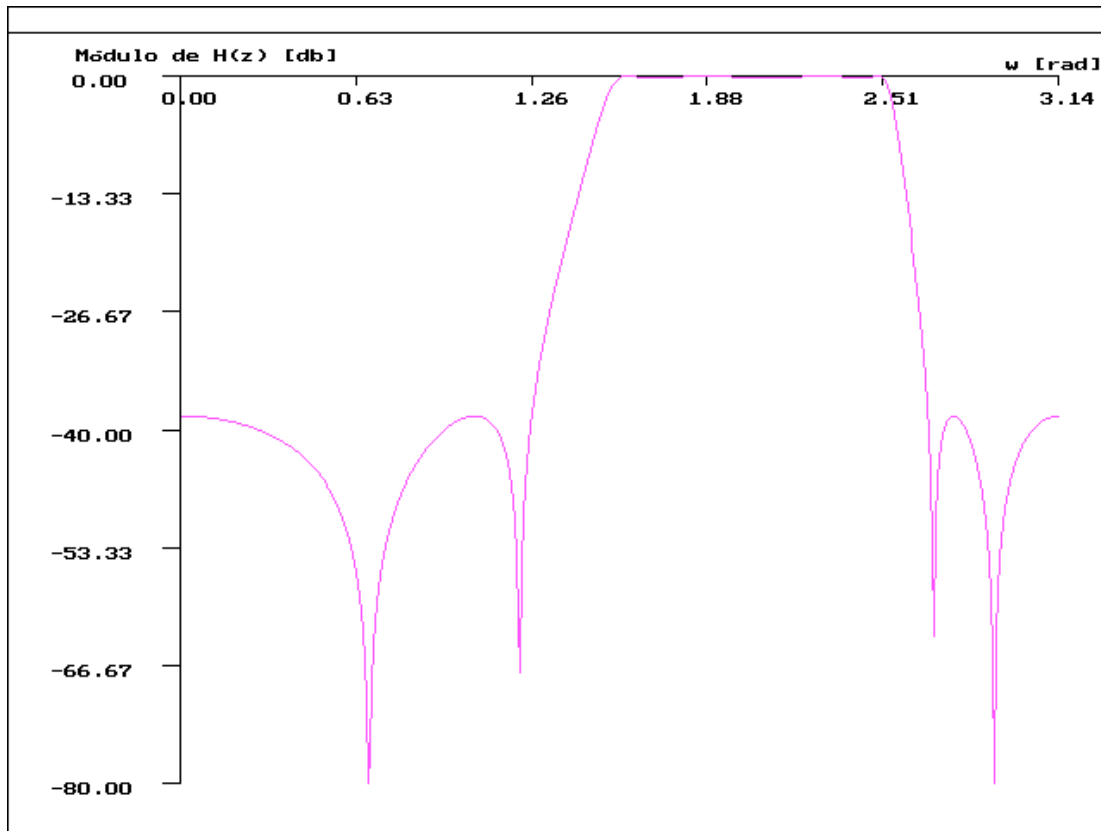


Figura 4.3: Filtro passa-banda obtido a partir do protótipo passa-baixas da Figura 4.1(a).

Assim, pode-se estabelecer a Tabela 4.1, que dá as características principais do mapeamento do filtro protótipo passa-baixas para um filtro passa-banda, sendo  $\beta$  a frequência de corte do filtro protótipo passa-baixas e  $\omega_1$  e  $\omega_2$  as frequências de corte do filtro passa-banda resultante. Nela,  $\pi$  radianos corresponde à metade da frequência de amostragem.

**TABELA 4.1: Mapeamento da transformação passa-baixas passa-banda.**

| Protótipo Passa-Baixas |                               | Filtro Passa-Banda |                        |
|------------------------|-------------------------------|--------------------|------------------------|
| Frequência (rad)       | Variável $z^{-1}$             | Frequência (rad)   | Nova Variável $z^{-1}$ |
| 0                      | $e^{-j 0} = 1$                | $\omega_0$         | $e^{-j \omega_0}$      |
| $-\beta$               | $e^{-(-j\beta)} = e^{j\beta}$ | $\omega_1$         | $e^{-j \omega_1}$      |
| $\beta$                | $e^{-j \beta}$                | $\omega_2$         | $e^{-j \omega_2}$      |
| $\pi$                  | -1                            | $\pi$              | -1                     |
|                        |                               | 0                  | +1                     |

Como o filtro passa-banda tem duas frequências de corte, que limitam sua banda passante, a função  $G(z^{-1})$  é de segunda ordem, e é dada por

$$G(z^{-1}) = e^{j\theta} \frac{z^{-2} + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2}{\gamma_2 z^{-2} + \gamma_1 z^{-1} + 1} \quad (4.13)$$

Considerando-se a Tabela 4.1, tem-se que

$$G(1) = -1 \quad (4.14)$$

donde  $e^{j\theta} = -1$ , ou seja,  $\theta = \pi$ , o que equivale a dizer que o ângulo de rotação pode tomar qualquer valor múltiplo ímpar de  $\pi$ .

Ainda da Tabela 4.1, obtém-se que  $G(e^{-j\omega_0}) = 1$ , ou seja

$$- \frac{e^{-j2\omega_0} + \gamma_1 e^{-j\omega_0} + \gamma_2}{\gamma_2 e^{-j2\omega_0} + \gamma_1 e^{-j\omega_0} + 1} = 1 \quad (4.15)$$

e daí

$$(\gamma_2 + 1) \cdot (1 + e^{-j2\omega_0}) + 2\gamma_1 e^{-j\omega_0} = 0 \quad (4.16)$$

ou seja,

$$(\gamma_2 + 1)\cos \omega_0 + \gamma_1 = 0 \quad (4.17)$$

Fazendo  $\alpha = \cos \omega_0$  vem que

$$\gamma_1 = -\alpha(1 + \gamma_2), \quad (4.18)$$

e finalmente

$$G(z^{-1}) = - \frac{z^{-2} - \alpha(1 + \gamma_2)z^{-1} + \gamma_2}{\gamma_2 z^{-2} - \alpha(1 + \gamma_2)z^{-1} + 1} \quad (4.19)$$

Seja, agora,  $\gamma_2 = \gamma$ , o que leva a

$$G(z^{-1}) = - \frac{z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) + \gamma}{1 + \gamma z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right)} \quad (4.20)$$

e, como  $\alpha = \cos \omega_0$ ,  $|\alpha| \leq 1$ , logo  $z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right)$  é também uma função passa-tudo.

Além do mais,  $|\gamma| \leq 1$ , já que esta quantidade representa o produto de dois zeros da função

passa-tudo, os quais estão no interior do círculo unitário. Logo,  $-\left(\frac{z^{-1} + \gamma}{1 + \gamma z^{-1}}\right)$  é também uma função passa-tudo. Se estas funções passa-tudo forem nomeadas como

$$E_1 = -\frac{z^{-1} + \gamma}{1 + \gamma z^{-1}} \quad (4.21)$$

e

$$E_2 = z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) \quad (4.22)$$

pode-se escrever que

$$G(z^{-1}) = E_1(E_2) \quad (4.23)$$

Fazendo agora

$$\frac{1 - G(z^{-1})}{1 + G(z^{-1})} = \frac{1 - \left[ -\left( \frac{E_2 + \gamma}{1 + \gamma E_2} \right) \right]}{1 + \left[ -\left( \frac{E_2 + \gamma}{1 + \gamma E_2} \right) \right]} = \frac{(1 + E_2)(1 + \gamma)}{(1 - E_2)(1 - \gamma)} \quad (4.24)$$

e substituindo o valor de  $E_2$  tem-se que

$$\frac{1 - G(z^{-1})}{1 + G(z^{-1})} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{z^{-2} - 2\alpha z^{-1} + 1}{1 - z^{-2}} \quad (4.25)$$

Desenvolvendo a equação acima em termos das frequências de corte do filtro passa-baixas original  $\beta$  e  $-\beta$ , e suas respectivas frequências correspondentes do filtro passa-banda, vistas na Tabela 4.1, encontra-se que, para  $\omega = -\beta$

$$\frac{1 - e^{j\beta}}{1 + e^{j\beta}} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{e^{-j2\omega_1} - 2\alpha e^{-j\omega_1} + 1}{1 - e^{-j2\omega_1}} \quad (4.26)$$

Multiplicando o primeiro membro de tal igualdade por  $e^{-j\beta/2}/e^{-j\beta/2}$  e o segundo membro por  $e^{j\omega_1}/e^{j\omega_1}$  chega-se a:

$$\frac{e^{-j\beta/2} - e^{j\beta/2}}{e^{-j\beta/2} + e^{j\beta/2}} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{e^{-j\omega_1} - 2\alpha + e^{j\omega_1}}{e^{j\omega_1} - e^{-j\omega_1}} \quad (4.27)$$

Escrevendo, agora, tal equação em termos das identidades trigonométricas

$$\text{sen } A = \frac{e^{jA} - e^{-jA}}{2j} \quad (4.28a)$$

e

$$\cos A = \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2} \quad (4.28b)$$

tem-se que

$$-\frac{j \text{sen}(\beta/2)}{\cos(\beta/2)} = \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{\cos \omega_1 - \alpha}{j \text{sen} \omega_1} \quad (4.29)$$

ou seja

$$-\text{tg}(\beta/2) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{\cos \omega_1 - \alpha}{\text{sen} \omega_1} \quad (4.30)$$

Usando-se a equação (4.25) agora com  $\omega = \beta$  vem que

$$\frac{1 - e^{-j\beta}}{1 + e^{-j\beta}} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{e^{-j2\omega_2} - 2\alpha e^{-j\omega_2} + 1}{1 - e^{-j2\omega_2}} \quad (4.31)$$

e, desenvolvendo-se de forma semelhante àquela para  $\omega = -\beta$ , chega-se a

$$\text{tg}(\beta/2) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{\cos \omega_2 - \alpha}{\text{sen} \omega_2} \quad (4.32)$$

Igualando as equações (4.30) e (4.32) obtém-se que

$$-\frac{\cos \omega_1 - \alpha}{\text{sen} \omega_1} = \frac{\cos \omega_2 - \alpha}{\text{sen} \omega_2} \quad (4.33)$$

de onde se tira

$$\alpha = \frac{\text{sen}(\omega_2 + \omega_1)}{\text{sen} \omega_2 + \text{sen} \omega_1} \quad (4.34)$$

A partir daí, usando-se as identidades trigonométricas

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen} \theta \cos \theta \quad (4.35)$$

e

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A \pm B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A \mp B) \quad (4.36)$$

obtem-se que

$$\alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \cdot \cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{2 \sin \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \cdot \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)} \quad (4.37)$$

ou, finalmente,

$$\alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)} = \cos \omega_0 \quad (4.38)$$

O valor de  $\gamma$  é encontrado adotando-se

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = -K \quad (4.39)$$

e levando tal valor na equação (4.30), para se obter

$$K = \operatorname{tg}(\beta/2) \cdot \frac{\sin \omega_1}{\cos \omega_1 - \alpha} \quad (4.40)$$

ou seja

$$K = \operatorname{tg}(\beta/2) \cdot \frac{\sin \omega_2 + \sin \omega_1}{\cos \omega_1 - \cos \omega_2} \quad (4.41)$$

Usando as identidades trigonométricas em (4.36) e

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(B + A) \sin \frac{1}{2}(B - A) \quad (4.42)$$

obtem-se que

$$K = \cotg \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \cdot \operatorname{tg}(\beta/2) \quad (4.43)$$

Assim,  $\gamma$  é calculado a partir da equação (4.39) como

$$\gamma = \frac{K - 1}{K + 1} \quad (4.44)$$

e a transformação  $G(z^{-1})$  é reescrita como

$$G(z^{-1}) = - \frac{z^{-2} - \left(\frac{2\alpha K}{K+1}\right)z^{-1} + \left(\frac{K-1}{K+1}\right)}{\left(\frac{K-1}{K+1}\right)z^{-2} - \left(\frac{2\alpha K}{K+1}\right)z^{-1} + 1} \quad (4.45)$$

A Figura 4.3 ilustra tal transformação, usando  $\beta = 0.02\pi$  radianos,  $\omega_0 = 0.65\pi$  radianos,  $\omega_1 = 0.5\pi$  radianos e  $\omega_2 = 0.8\pi$  radianos.

A transformação  $G(z^{-1})$  pode tomar diferentes formas dependendo dos valores de  $\alpha$  e  $K$ . Sejam, então, os seguintes casos:

**Caso 1:**  $K = 1$

Neste caso, a transformação em (4.45) reduz-se a

$$G(z^{-1}) = - \frac{z^{-1}(z^{-1} - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (4.46)$$

e

$$\omega_2 - \omega_1 = \beta \quad (4.47)$$

o que torna a aplicação de  $G(z^{-1})$  restrita, visto que a largura da banda passante do filtro passa-banda resultante é sempre igual à frequência de corte  $\beta$  do filtro protótipo passa-baixas.

**Caso 2:**  $\alpha = 0$  e  $K = 1$

Neste caso, a transformação em (4.45) reduz-se a

$$G(z^{-1}) = -z^{-2} \quad (4.48)$$

e

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \quad (4.49a)$$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \quad (4.49b)$$

com

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \quad (4.49c)$$

o que torna a aplicação de  $G(z^{-1})$  muito particular, visto que resulta em um filtro digital passa-banda com características de amplitude simétricas em relação à frequência central dada por  $\pi/2$  radianos.

#### 4.1.4 - TRANSFORMAÇÃO PASSA-BAIXAS — REJEITA-BANDA

Para este tipo de transformação, o filtro passa-baixas original da Figura 4.1(a) é transformado no filtro rejeita-banda da Figura 4.4.

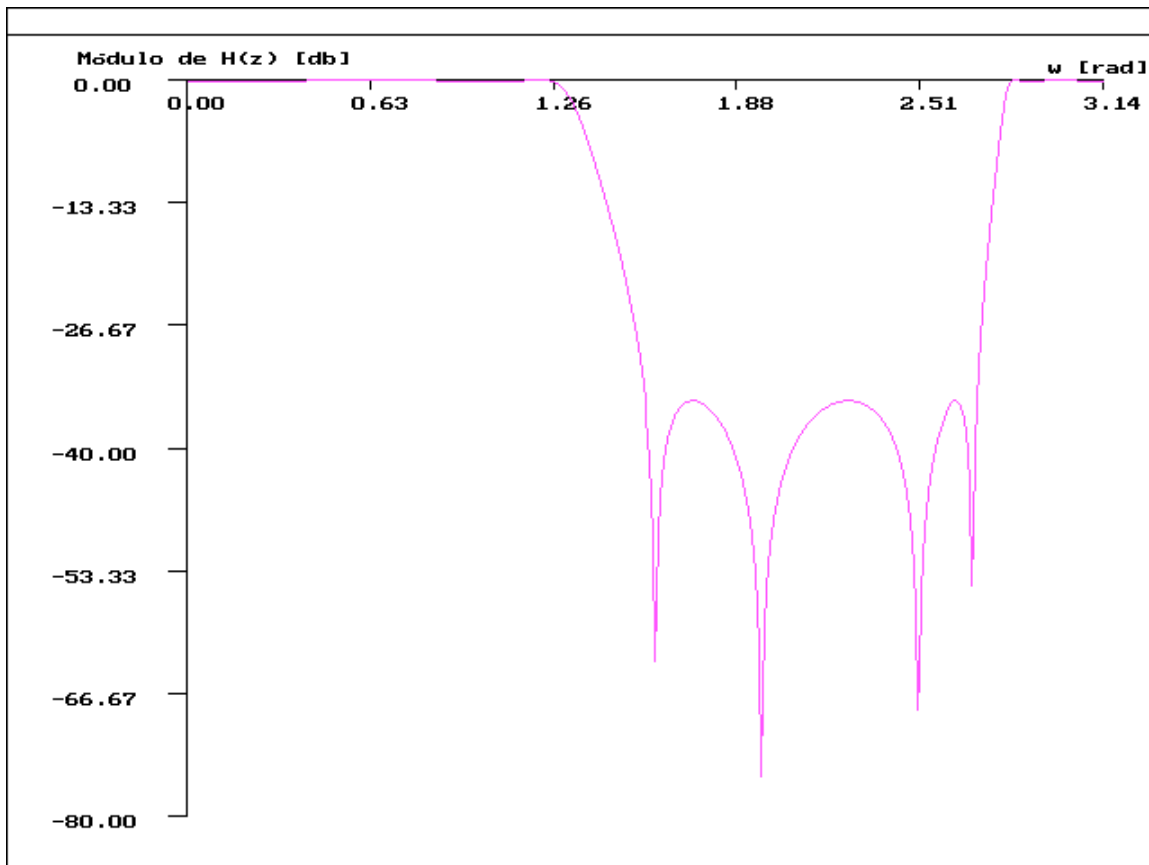


Figura 4.4: Filtro rejeita-banda obtido a partir do protótipo passa-baixas da Figura 4.1(a).

A Tabela 4.2 ilustra tal mapeamento, sendo  $\beta$  radianos a frequência de corte do filtro protótipo passa-baixas,  $\omega_1$  radianos e  $\omega_2$  radianos as frequências de corte do filtro rejeita-banda, enquanto  $\pi$  radianos corresponde à metade da frequência de amostragem.

**TABELA 4.2: Mapeamento da transformação passa-baixas rejeita-banda.**

| Protótipo Passa-Baixas |                                 | Filtro Rejeita-Banda |                        |
|------------------------|---------------------------------|----------------------|------------------------|
| Frequência (rad)       | Variável $z^{-1}$               | Frequência (rad)     | Nova Variável $z^{-1}$ |
| 0                      | $e^{-j 0} = 1$                  | 0                    | +1                     |
| $-\beta$               | $e^{-(-j \beta)} = e^{j \beta}$ | $\pi$                | -1                     |
| $\beta$                | $e^{-j \beta}$                  | $\omega_2$           | $e^{-j \omega_2}$      |
| $\pi$                  | -1                              | $\omega_1$           | $e^{-j \omega_1}$      |
|                        |                                 | $\omega_0$           | $e^{-j \omega_0}$      |

Um estudo similar àquele realizado para a transformação passa-baixas passa-banda leva a

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-2} - \alpha(1 + \gamma_2)z^{-1} + \gamma_2}{\gamma_2 z^{-2} - \alpha(1 + \gamma_2)z^{-1} + 1} \quad (4.50)$$

o que, tomando-se  $\gamma_2 = \gamma$ , conduz a

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) + \gamma}{1 + \gamma z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right)} \quad (4.51)$$

ou seja

$$G(z^{-1}) = E_1(E_2) \quad (4.52)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são funções passa-tudo dadas por

$$E_1 = \frac{z^{-1} + \gamma}{1 + \gamma z^{-1}} \quad (4.53)$$

e

$$E_2 = z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) \quad (4.54)$$

De forma similar ao desenvolvimento da Seção 4.1.3, obtém-se que

$$\alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)} = \cos \omega_0 \quad (4.55)$$

e

$$K = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) \cdot \operatorname{tg} (\beta/2) \quad (4.56)$$

com  $\gamma$  calculado como

$$\gamma = \frac{1 - K}{1 + K} \quad (4.57)$$

e a transformação  $G(z^{-1})$  reescrita como

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-2} - \left( \frac{2\alpha}{1+K} \right) z^{-1} + \left( \frac{1-K}{1+K} \right)}{\left( \frac{1-K}{1+K} \right) z^{-2} - \left( \frac{2\alpha}{1+K} \right) z^{-1} + 1} \quad (4.58)$$

A Figura 4.4 ilustra tal transformação, usando  $\beta = 0.02\pi$  radianos,  $\omega_0 = 0.65\pi$  radianos,  $\omega_1 = 0.5\pi$  radianos e  $\omega_2 = 0.8\pi$  radianos.

Aqui também, a transformação  $G(z^{-1})$  pode tomar diferentes formas dependendo dos valores de  $\alpha$  e  $K$ , conforme os casos abaixo:

**Caso 1:**  $K = 1$

Neste caso, a transformação em (4.58) se reduz a

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}(z^{-1} - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (4.59)$$

com

$$\omega_2 - \omega_1 = \pi - \beta \quad (4.60)$$

o que torna a aplicação de  $G(z^{-1})$  restrita ao caso particular em que a largura da banda de rejeição do filtro rejeita-banda resultante tem necessariamente o valor dado na equação (4.60).

**Caso 2:**  $\alpha = 0$  e  $K = 1$

Neste caso, a transformação em (4.58) se reduz a

$$G(z^{-1}) = z^{-2} \quad (4.61)$$

e

$$\omega_1 = \frac{\beta}{2} \quad (4.62a)$$

$$\omega_2 = \pi - \frac{\beta}{2} \quad (4.62b)$$

com

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \quad (4.62c)$$

o que também torna a aplicação de  $G(z^{-1})$  restrita ao caso particular de um filtro digital rejeita-banda com características de amplitude simétricas em relação à frequência central de  $\pi/2$  radianos.

Como um resumo, todas as transformações espectrais aplicadas a protótipos passa-baixas de frequência de corte  $\beta$  são agrupadas na Tabela 4.3. Observe-se que o estudo aqui realizado de tais transformações, já consolidadas na literatura, é importante pelo entendimento da composição de  $G(z^{-1})$ , nos casos passa-banda e rejeita-banda, usando transformações espectrais parciais, como fica claro nas equações (4.20), (4.21), (4.22), (4.51) e (4.52). A importância de tal composição surgirá no desenvolvimento das transformações espectrais da próxima seção.

**TABELA 4.3: Transformações Espectrais em Protótipos Passa-Baixas de Frequência de corte  $\beta$  [6].**

| Tipo de Filtro Resultante | Transformação                                                                                                                                                                             | Parâmetros                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Passa-Baixas              | $G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$                                                                                                                                   | $\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)}$                                                                                                                    |
| Passa-Altas               | $G(z^{-1}) = -\left( \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \right)$                                                                                                                   | $\alpha = -\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\cos \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)}$                                                                                                                   |
| Passa-Banda               | $G(z^{-1}) = -\frac{z^{-2} - \left(\frac{2\alpha K}{K+1}\right)z^{-1} + \left(\frac{K-1}{K+1}\right)}{\left(\frac{K-1}{K+1}\right)z^{-2} - \left(\frac{2\alpha K}{K+1}\right)z^{-1} + 1}$ | $\alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)} = \cos \omega_0$<br>$K = \cot g \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \cdot \operatorname{tg}(\beta/2)$            |
| Rejeita-Banda             | $G(z^{-1}) = \frac{z^{-2} - \left(\frac{2\alpha}{1+K}\right)z^{-1} + \left(\frac{1-K}{1+K}\right)}{\left(\frac{1-K}{1+K}\right)z^{-2} - \left(\frac{2\alpha}{1+K}\right)z^{-1} + 1}$      | $\alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)} = \cos \omega_0$<br>$K = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \cdot \operatorname{tg}(\beta/2)$ |

## 4.2 - TRANSFORMAÇÕES ESPECTRAIS EM PROTÓTIPOS QUAISQUER

A partir do conhecimento mais detalhado das transformações de Constantinides [6], são desenvolvidas novas transformações espectrais, a saber, transformações passa-altas passa-altas, passa-banda passa-banda e rejeita-banda rejeita-banda.

Como forma de obtê-las, o seguinte procedimento, que se utiliza dos resultados já conhecidos para filtros protótipos passa-baixas, é adotado:

**Passo 1:** Desmembrar as transformações encontradas para protótipos passa-baixas em duas,  $G_1(z^{-1})$  e  $G_2(z^{-1})$ , que possibilitem controlar a largura de banda e modificar o tipo de espectro do filtro, respectivamente. As transformações em protótipos passa-baixas são dadas por uma composição destas duas transformações parciais, da forma  $G(z^{-1}) = G_1(G_2(z^{-1}))$ .

**Passo 2:** Alterar a ordem das duas transformações obtidas acima, ou seja, primeiramente aplicar a transformação  $G_2(z^{-1})$  responsável por modificar o tipo de espectro do filtro, seguida de uma transformação  $G_3(z^{-1})$  responsável por controlar a largura da banda passante. Assim, as novas transformações poderiam ser dadas pela composição destas duas transformações, da forma  $G(z^{-1}) = G_2(G_3(z^{-1}))$ .

**Passo 3:** Comparar  $G_1(G_2(z^{-1}))$  com  $G_2(G_3(z^{-1}))$ , de forma a obter as transformações espectrais  $G_3(z^{-1})$  aplicáveis em protótipos quaisquer.

A seguir, cada uma das transformações acima é abordada, seguindo-se tal procedimento.

### 4.2.1 - TRANSFORMAÇÃO PASSA-ALTAS PASSA-ALTAS

Seguindo o passo 1 acima, a transformação passa-baixas passa-altas caracterizada pelas equações

$$G(z^{-1}) = - \frac{z^{-1} + \alpha_{PA}}{1 + \alpha_{PA} z^{-1}} \quad (4.63)$$

e

$$\alpha_{PA} = - \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\cos \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)} \quad (4.64)$$

pode ser desmembrada em duas transformações  $G_1(z^{-1})$  e  $G_2(z^{-1})$ , tal que  $G_1(z^{-1})$  realiza uma transformação passa-baixas passa-baixas e  $G_2(z^{-1})$  realiza uma transformação passa-baixas passa-altas, como indicado no diagrama da Figura 4.5.

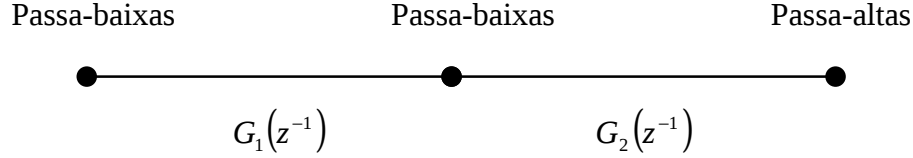


Figura 4.5: Etapas da transformação passa-baixas passa-altas [6].

Portanto, a transformação

$$G_1(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha_{PB}}{1 - \alpha_{PB} z^{-1}} \quad (4.65)$$

com

$$\alpha_{PB} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)} \quad (4.66)$$

ajusta a largura de banda passante do filtro passa-baixas e

$$G_2(z^{-1}) = -z^{-1} \quad (4.67)$$

leva ao espectro passa-altas. Desta forma, a transformação genérica passa-baixas passa-altas pode ser interpretada como

$$G_1(G_2(z^{-1})) = - \frac{z^{-1} + \alpha_{PB}}{1 + \alpha_{PB} z^{-1}} \quad (4.68)$$

A aplicação do passo 2 acima, por sua vez, corresponde a alterar a ordem das transformações parciais, da maneira indicada no diagrama da Figura 4.6.

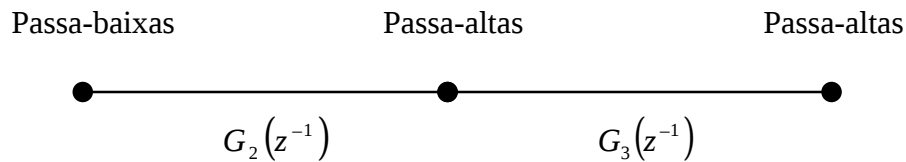


Figura 4.6: Nova concepção da transformação passa-baixas passa-altas.

Isto equivale a usar  $G_2(z^{-1})$ , dada por (4.67), para modificar o tipo de espectro do filtro e uma transformação passa-altas passa-altas  $G_3(z^{-1})$  para variar a largura da banda passante, dada por

$$G_3(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + a_3}{1 + a_3 z^{-1}} \quad (4.69)$$

ou seja, uma função passa-tudo de ordem 1, gerando-se a transformação passa-baixas passa-altas global dada por

$$G_2(G_3(z^{-1})) = - \frac{z^{-1} + a_3}{1 + a_3 z^{-1}} \quad (4.70)$$

Aplicando o passo 3 acima, compara-se agora  $G_1(G_2(z^{-1}))$  com  $G_2(G_3(z^{-1}))$ , concluindo-se que

$$a_3 = \alpha_{PB} \quad (4.71)$$

ou seja, a transformação passa-altas passa-altas é dada por:

$$G_3(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + \alpha_{PB}}{1 + \alpha_{PB} z^{-1}} \quad (4.72)$$

Este resultado encontrado para  $a_3$  significa que o mesmo é calculado em termos de frequências para filtros passa-baixas, como sendo

$$\alpha_{PB} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)} \quad (4.73)$$

onde  $\beta$  e  $\omega_c$  são frequências de corte dos filtros passa-baixas original e desejado, respectivamente, em uma transformação passa-baixas passa-baixas. Assim, precisa-se encontrar uma analogia entre  $\omega_1$  e  $\beta$ ,  $\omega'_1$  e  $\omega_c$ , onde  $\omega_1$  e  $\omega'_1$  são as frequências de corte dos filtros passa-altas original e desejado, respectivamente. Com isso, pode-se usar apenas  $G_3(z^{-1})$ , partindo-se de um protótipo passa-altas.

Tal relação é dada por

$$\begin{cases} \beta = \pi - \omega_1 \\ \omega_c = \pi - \omega'_1 \end{cases} \quad (4.74)$$

que introduzida na equação (4.73) leva a

$$a_3 = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\omega'_1 - \omega_1)}{\text{sen } \frac{1}{2}(\omega'_1 + \omega_1)} \quad (4.75)$$

Consequentemente, a transformação espectral necessária para levar um filtro passa-altas de frequência de corte  $\omega_1$  a outro passa-altas de frequência de corte  $\omega'_1$  é

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \quad (4.76)$$

com

$$\alpha = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\omega'_1 - \omega_1)}{\text{sen } \frac{1}{2}(\omega'_1 + \omega_1)} \quad (4.77)$$

A Figura 4.7 mostra o resultado da aplicação de tal transformação ao filtro protótipo passa-altas elíptico, de oitava ordem, com frequência de corte inicial em 4900 Hz, que é transformado num outro filtro passa-altas, agora com frequência de corte de 2500 Hz, com frequência de amostragem de 10 KHz.

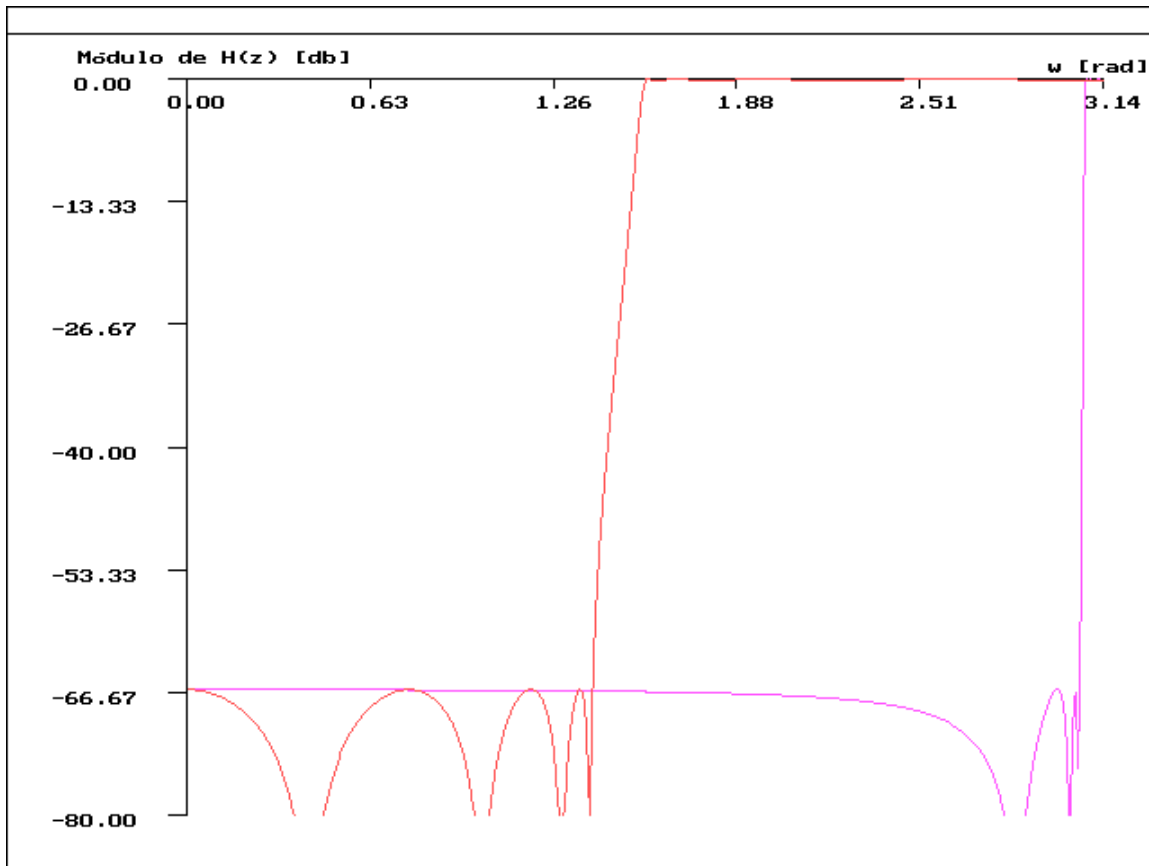


Figura 4.7: Aplicação da transformação espectral passa-altas passa-altas.

#### 4.2.2 - TRANSFORMAÇÃO PASSA-BANDA PASSA-BANDA

Novamente busca-se o desdobramento da transformação passa-baixas passa-banda, dada por

$$G(z^{-1}) = - \frac{z^{-2} - \alpha_{PBda} (1 + \gamma) z^{-1} + \gamma}{\gamma z^{-2} - \alpha_{PBda} (1 + \gamma) z^{-1} + 1} \quad (4.78)$$

com

$$\alpha_{PBda} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)} = \cos \omega_0 \quad (4.79)$$

sendo  $\omega_1$  radianos e  $\omega_2$  radianos as frequências de corte e  $\omega_0$  radianos a frequência central da banda passante, em duas transformações do tipo passa-tudo  $G_1(z^{-1})$  e  $G_2(z^{-1})$ . O diagrama da Figura 4.8 ilustra tal desmembramento.

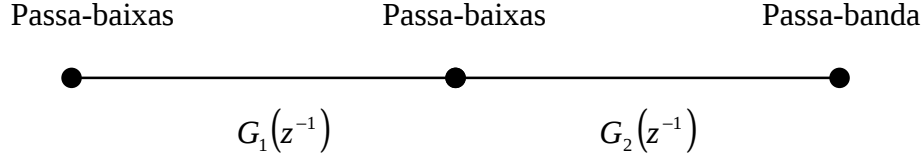


Figura 4.8: A transformação passa-baixas passa-banda original [6].

Aqui, é fácil ver que, novamente

$$G_1(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha_{PB}}{1 - \alpha_{PB} z^{-1}} \quad (4.80)$$

com

$$\alpha_{PB} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \omega_c)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \omega_c)} \quad (4.81)$$

é uma transformação passa-baixas passa-baixas para ajustar a largura da banda passante do filtro protótipo, e que, como ocorre alteração na ordem do filtro,  $G_2(z^{-1})$  é de ordem 2. Por outro lado,  $G_2(z^{-1})$  é uma transformação passa-baixas passa-banda sem alteração da banda passante, ou seja [6], [25]

$$G_2(z^{-1}) = -z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha_{PBda}}{1 - \alpha_{PBda} z^{-1}} \right) \quad (4.82)$$

Daí vem que

$$\begin{aligned} G_1(G_2(z^{-1})) &= \frac{-z^{-1} \left( \frac{z^{-2} - \alpha_{PBda} z^{-1}}{1 - \alpha_{PBda} z^{-1}} \right) - \alpha_{PB}}{1 + \alpha_{PB} \left( \frac{z^{-2} - \alpha_{PBda} z^{-1}}{1 - \alpha_{PBda} z^{-1}} \right)} \\ &= - \frac{z^{-2} - \alpha_{PBda} (1 + \alpha_{PB}) z^{-1} + \alpha_{PB}}{\alpha_{PB} z^{-2} - \alpha_{PBda} (1 + \alpha_{PB}) z^{-1} + 1} \end{aligned} \quad (4.83)$$

de forma que  $G_1(G_2(z^{-1}))$  expressa a transformação passa-baixas passa-banda.

A aplicação do passo 2, ou seja, a alteração da ordem das transformações parciais, é indicada no diagrama da Figura 4.9.

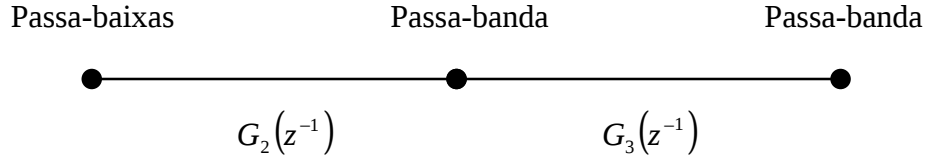


Figura 4.9: Nova transformação passa-baixas passa-banda.

Em tal figura,  $G_2(z^{-1})$  é usada para modificar o tipo de espectro do filtro e  $G_3(z^{-1})$  para variar a largura da banda passante, sendo  $G_2(z^{-1})$  como acima. Agora,  $G_3(z^{-1})$  é uma função passa-tudo de ordem 1, visto que  $G_2(z^{-1})$  já é de ordem 2, dada por

$$G_3(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + a_3}{1 + a_3 z^{-1}} \quad (4.84)$$

Observe-se, neste ponto, que partindo-se de um filtro protótipo passa-banda pode-se obter um outro filtro passa-banda através da transformação  $G_3(z^{-1})$  mostrada na equação (4.84), a qual difere da transformação passa-baixas passa-banda tradicional, mostrada na equação (4.78), pelo fato de ser de primeira ordem. Como vantagem, uma função  $H(z)$  descrita na forma cascata ou paralela de blocos quadráticos se transformaria, através de  $G_3(z^{-1})$ , em outra função  $H(z)$  ainda na forma cascata ou paralela de blocos de ordem 2, enquanto que cada bloco de ordem 2 se transformaria em um bloco de ordem 4, no caso da transformação usual da equação (4.78), o que tornaria imprescindível o uso de um procedimento computacional para fatorar cada bloco de quarta ordem em dois de segunda ordem. Observe-se que tal procedimento prejudicaria em demasia a análise do desempenho do filtro passa-banda obtido a partir de um protótipo passa-baixas, pois demandaria uma fatoração para cada valor de largura da banda passante analisado.

Assim sendo, é interessante efetuar uma análise detalhada do mapeamento de frequências para a transformação passa-banda passa-banda, possibilitando definir completamente a transformação em (4.84). Seja, então, a Tabela 4.4, que dá o mapeamento passa-banda passa-banda desejado.

**TABELA 4.4: Mapeamento de frequências para a transformação passa-banda passa-banda.**

| FILTRO PROTÓTIPO |                   | FILTRO DESEJADO  |                   |
|------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| Frequência (rad) | Variável $z^{-1}$ | Frequência (rad) | Variável $z^{-1}$ |
| 0                | $e^{-j0} = 1$     | 0                | $e^{-j0} = 1$     |
| $\pi$            | $e^{-j\pi} = -1$  | $\pi$            | $e^{-j\pi} = -1$  |
| $\omega_0$       | $e^{-j\omega_0}$  | $\omega_0$       | $e^{-j\omega_0}$  |
| $\omega_1$       | $e^{-j\omega_1}$  | $\omega_1'$      | $e^{-j\omega_1'}$ |
| $\omega_2$       | $e^{-j\omega_2}$  | $\omega_2'$      | $e^{-j\omega_2'}$ |

Aplicando a transformação genérica  $G_3(z^{-1})$ , necessária para mapear as frequências da coluna 1 nas frequências da coluna 3 da Tabela 4.4, as seguintes equivalências são obtidas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 0 \\ G(e^{-j0}) = e^{-j0} = 1 \end{aligned} \rightarrow \frac{1 + a_3}{1 - a_3} = 1 \quad (4.85a)$$

a qual ocorre para qualquer valor de  $a_3$ ,

$$\begin{aligned} \pi \rightarrow \pi \\ G(e^{-j\pi}) = e^{-j\pi} \end{aligned} \rightarrow \frac{-1 + a_3}{1 - a_3} = -1 \quad (4.85b)$$

que também ocorre para qualquer valor de  $a_3$ ,

$$\begin{aligned} \omega_0 \rightarrow \omega_0 \\ G(e^{-j\omega_0}) = e^{-j\omega_0} \end{aligned} \rightarrow \frac{e^{-j\omega_0} + a_3}{1 + a_3 e^{-j\omega_0}} = e^{-j\omega_0} \quad (4.85c)$$

além de

$$\begin{aligned} \omega_1 \rightarrow \omega_1' \\ G(e^{-j\omega_1'}) = e^{-j\omega_1} \end{aligned} \rightarrow \frac{e^{-j\omega_1'} + a_3}{1 + a_3 e^{-j\omega_1'}} = e^{-j\omega_1} \quad (4.85d)$$

e de

$$\begin{aligned} \omega_2 \rightarrow \omega_2' \\ G(e^{-j\omega_2'}) = e^{-j\omega_2} \end{aligned} \rightarrow \frac{e^{-j\omega_2'} + a_3}{1 + a_3 e^{-j\omega_2'}} = e^{-j\omega_2} \quad (4.85e)$$

Da equivalência em (4.85c) obtém-se que

$$a_3(e^{-j2\omega_0} - 1) = 0 \quad (4.86)$$

que leva a

$$e^{-j2\omega_0} = 1 \quad (4.87)$$

pois  $a_3 \neq 0$ , uma vez que para  $a_3 = 0$  não haveria transformação, como se pode concluir a partir de (4.84). Desenvolvendo  $e^{-j2\omega_0} = 1$  tem-se a solução

$$2\omega_0 = 2k\pi \quad (4.88)$$

ou seja

$$\omega_0 = k\pi \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.89)$$

o que permite concluir que a frequência central do filtro passa-banda somente é mapeada nela mesma, como desejado, quando a transformação passa-banda passa-banda recai nas transformações particulares passa-baixas passa-baixas ( $\omega_0 = 2n\pi$ , para  $n$  inteiro) ou passa-altas passa-altas ( $\omega_0 = (2n+1)\pi$ , para  $n$  inteiro). Consequentemente, a transformação espectral passa-banda passa-banda obtida caracteriza-se por ser um mapeamento que não preserva a frequência central, isto é, um filtro passa-banda com frequência central  $\omega_0$  radianos é mapeado em outro passa-banda, porém com frequência central  $\omega'_0$  radianos, diferente de  $\omega_0$ .

Tal transformação passa-banda passa-banda pode, agora, ser perfeitamente definida, a partir de (4.85d), donde se obtém  $a_3$  a partir do  $\omega'_1$  desejado. Desenvolvendo tal equação, chega-se a

$$e^{-j\omega'_1} - e^{-j\omega_1} = a_3 [e^{-j(\omega_1 + \omega'_1)} - 1] \quad (4.90)$$

e daí

$$\frac{e^{-j\omega'_1} - e^{-j\omega_1}}{e^{-j\frac{(\omega_1 + \omega'_1)}{2}}} = a_3 \left[ e^{-j\frac{(\omega_1 + \omega'_1)}{2}} - e^{j\frac{(\omega_1 + \omega'_1)}{2}} \right] \quad (4.91)$$

ou seja,

$$e^{j\frac{(\omega'_1 - \omega_1)}{2}} - e^{-j\frac{(\omega'_1 - \omega_1)}{2}} = a_3 \left[ e^{j\frac{(\omega_1 + \omega'_1)}{2}} - e^{-j\frac{(\omega_1 + \omega'_1)}{2}} \right] \quad (4.92)$$

Usando a identidade trigonométrica vista em (4.28a) tem-se então

$$a_3 = \frac{\sin\left(\frac{\omega'_1 - \omega_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega'_1 + \omega_1}{2}\right)} \quad (4.93)$$

Analogamente, a equação (4.85e) leva a

$$a_3 = \frac{\sin\left(\frac{\omega'_2 - \omega_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega'_2 + \omega_2}{2}\right)} \quad (4.94)$$

Agora, igualando as equações (4.93) e (4.94) e usando as identidades trigonométricas em (4.36), chega-se a

$$\sin\frac{\omega_1}{2} \cdot \cos\frac{\omega'_1}{2} \cdot \sin\frac{\omega'_2}{2} \cdot \cos\frac{\omega_2}{2} = \sin\frac{\omega'_1}{2} \cdot \cos\frac{\omega_1}{2} \cdot \sin\frac{\omega_2}{2} \cdot \cos\frac{\omega'_2}{2} \quad (4.95)$$

o que permite obter

$$\omega'_2 = 2\arctg\left(\frac{\tg\frac{\omega'_1}{2} \cdot \tg\frac{\omega_2}{2}}{\tg\frac{\omega_1}{2}}\right) \quad (4.96)$$

e conseqüentemente, a nova largura da banda passante pode ser obtida através de

$$B = \omega'_2 - \omega'_1 \quad (4.97)$$

Conclui-se assim que a transformação passa-banda passa-banda é definida pela equação (4.93), sendo  $\omega_1$  a frequência de corte inferior do filtro original e  $\omega'_1$  a frequência de corte inferior desejada para o novo filtro, sendo a nova largura da banda passante dada pela equação (4.97).

A Figura 4.10 comprova tal resultado para o filtro protótipo passa-banda elíptico de oitava ordem com frequências de corte inferior e superior em 2500 Hz e 4000 Hz, respectivamente, levado a outro filtro passa-banda com frequência de corte inferior em 500 Hz.

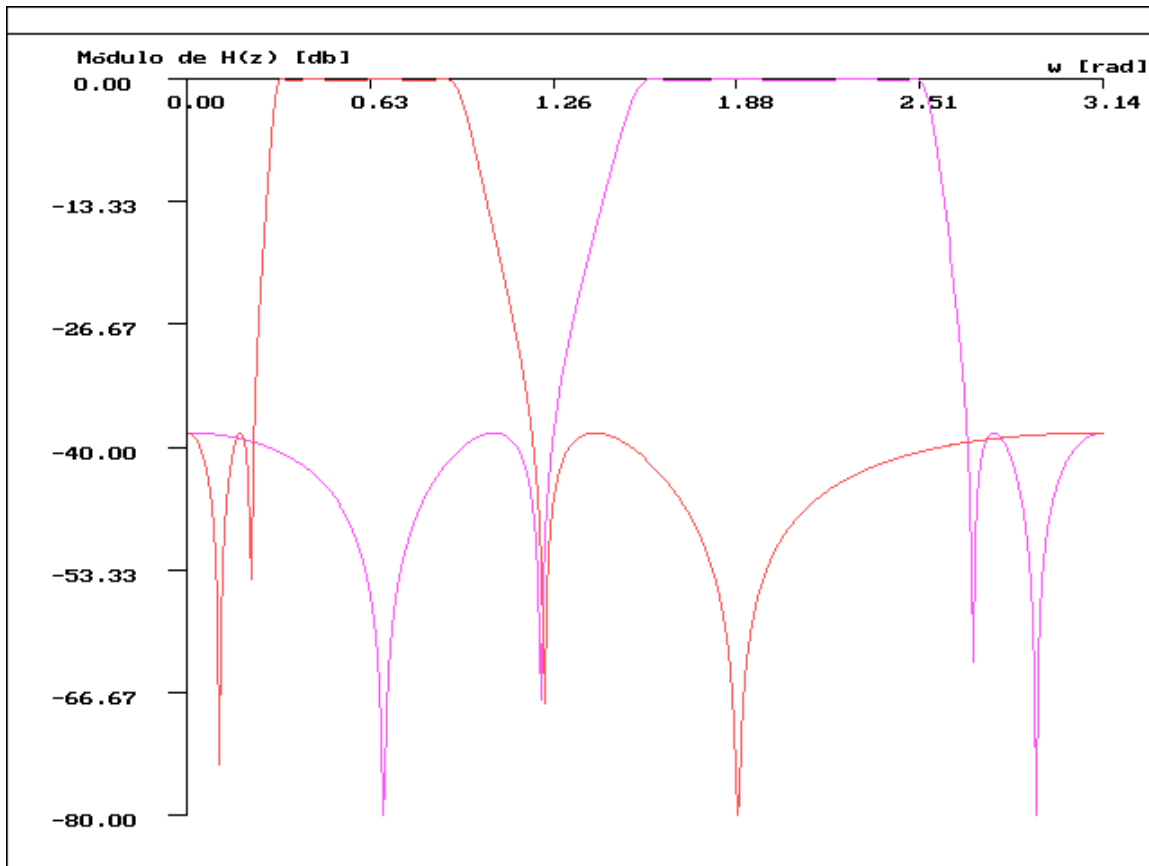


Figura 4.10: Aplicação da transformação espectral passa-banda passa-banda.

### 4.2.3 - TRANSFORMAÇÃO REJEITA-BANDA REJEITA-BANDA

Novamente busca-se o desdobramento da transformação passa-baixas rejeita-banda, dada por

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-2} - \alpha_{RBda} (1 + \gamma) z^{-1} + \gamma}{\gamma z^{-2} - \alpha_{RBda} (1 + \gamma) z^{-1} + 1} \quad (4.98)$$

com

$$\alpha_{RBda} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)} = \cos \omega_0 \quad (4.99)$$

sendo  $\omega_1$  radianos e  $\omega_2$  radianos as frequências de corte e  $\omega_0$  radianos a frequência central da banda de rejeição, em duas transformações do tipo passa-tudo  $G_1(z^{-1})$  e  $G_2(z^{-1})$ . O diagrama da Figura 4.11 ilustra tal desmembramento.

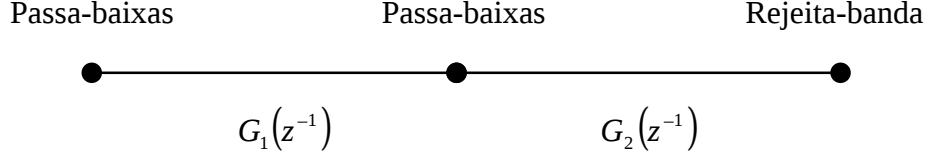


Figura 4.11: A transformação passa-baixas rejeita-banda original.

Aqui, pode-se ver que

$$G_1(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha_{PB}}{1 - \alpha_{PB} z^{-1}} \quad (4.100)$$

com

$$\alpha_{PB} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta - \omega_c)}{\sin \frac{1}{2} (\beta + \omega_c)} \quad (4.101)$$

é uma transformação passa-baixas passa-baixas para ajustar a largura de banda passante do filtro passa-baixas, e que, como ocorre alteração na ordem do filtro,  $G_2(z^{-1})$  é de ordem 2. Por outro lado,  $G_2(z^{-1})$  é uma transformação passa-baixas rejeita-banda sem alteração da largura da banda de rejeição [6], [25], ou seja,

$$G_2(z^{-1}) = z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha_{RBda}}{1 - \alpha_{RBda} z^{-1}} \right) \quad (4.102)$$

Daí vem que

$$\begin{aligned} G_1(G_2(z^{-1})) &= \frac{z^{-1} \left( \frac{z^{-2} - \alpha_{RBda} z^{-1}}{1 - \alpha_{RBda} z^{-1}} \right) - \alpha_{PB}}{1 - \alpha_{PB} \left( \frac{z^{-2} - \alpha_{RBda} z^{-1}}{1 - \alpha_{RBda} z^{-1}} \right)} \\ &= \frac{z^{-2} - \alpha_{RBda} (1 - \alpha_{PB}) z^{-1} - \alpha_{PB}}{-\alpha_{PB} z^{-2} - \alpha_{RBda} (1 - \alpha_{PB}) z^{-1} + 1} \end{aligned} \quad (4.103)$$

de forma que  $G_1(G_2(z^{-1}))$  expressa a transformação passa-baixas rejeita-banda.

A aplicação do passo 2, ou seja, a alteração da ordem das transformações parciais, é indicada no diagrama da Figura 4.12.

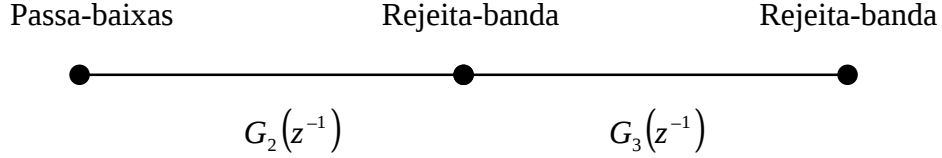


Figura 4.12: Nova transformação passa-baixas rejeita-banda.

Em tal figura  $G_2(z^{-1})$  é usada para modificar o tipo de espectro do filtro e  $G_3(z^{-1})$  para variar a largura da banda de rejeição, sendo  $G_2(z^{-1})$  como em (4.102). Agora,  $G_3(z^{-1})$  é uma função passa-tudo de ordem 1, visto que  $G_2(z^{-1})$  já é de ordem 2, dada por

$$G_3(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + a_3}{1 + a_3 z^{-1}} \quad (4.104)$$

Observe-se, neste ponto, que partindo-se de um filtro protótipo rejeita-banda pode-se obter um outro filtro rejeita-banda através da transformação  $G_3(z^{-1})$  mostrada na equação (4.104), a qual difere da transformação passa-baixas rejeita-banda tradicional [6], [25], mostrada na equação (4.98) pelo fato de ser de primeira ordem. Tem-se, portanto, a mesma vantagem vista para a transformação passa-banda passa-banda, isto é, uma função  $H(z)$  descrita na forma cascata ou paralela de blocos quadráticos se transformaria, através de  $G_3(z^{-1})$ , em outra função  $H(z)$ , ainda na forma cascata ou paralela de blocos de ordem 2, enquanto que cada bloco de ordem 2 se transformaria em um bloco de ordem 4 no caso da transformação usual da equação (4.98), o que também tornaria imprescindível o uso de um procedimento computacional para fatorar cada bloco de quarta ordem em dois de segunda ordem.

Torna-se interessante mencionar que a transformação rejeita-banda rejeita-banda, assim como a transformação passa-banda passa-banda, é também caracterizada por ser um mapeamento que não preserva a frequência central, isto é, um filtro rejeita-banda com frequência central  $\omega_0$  radianos é mapeado em outro rejeita-banda, porém com frequência central  $\omega'_0$  radianos, diferente de  $\omega_0$ . Desta forma, a frequência central do filtro rejeita-banda somente é mapeada nela mesma, como desejado, quando a transformação rejeita-banda rejeita-banda recai nas transformações particulares passa-baixas passa-baixas ou passa-altas passa-altas da mesma forma que no caso passa-banda.

Conclui-se, assim, que a transformação rejeita-banda rejeita-banda, em virtude de se desejar o mesmo mapeamento mostrado na Tabela 4.4, também tem o parâmetro  $a_3$  definido pela equação (4.93), sendo  $\omega_1$  a frequência de corte inferior do filtro original e  $\omega'_1$  a frequência de corte inferior do filtro transformado, cuja largura da banda de rejeição também é definida pelas equações (4.94) e (4.95).

A Figura 4.13 comprova tal resultado para o filtro protótipo rejeita-banda elíptico de oitava ordem com frequências de corte inferior e superior em 2500 Hz e 4000 Hz, respectivamente, levado a outro filtro rejeita-banda com frequência de corte inferior em 500 Hz, sempre com frequência de amostragem de 10 KHz.

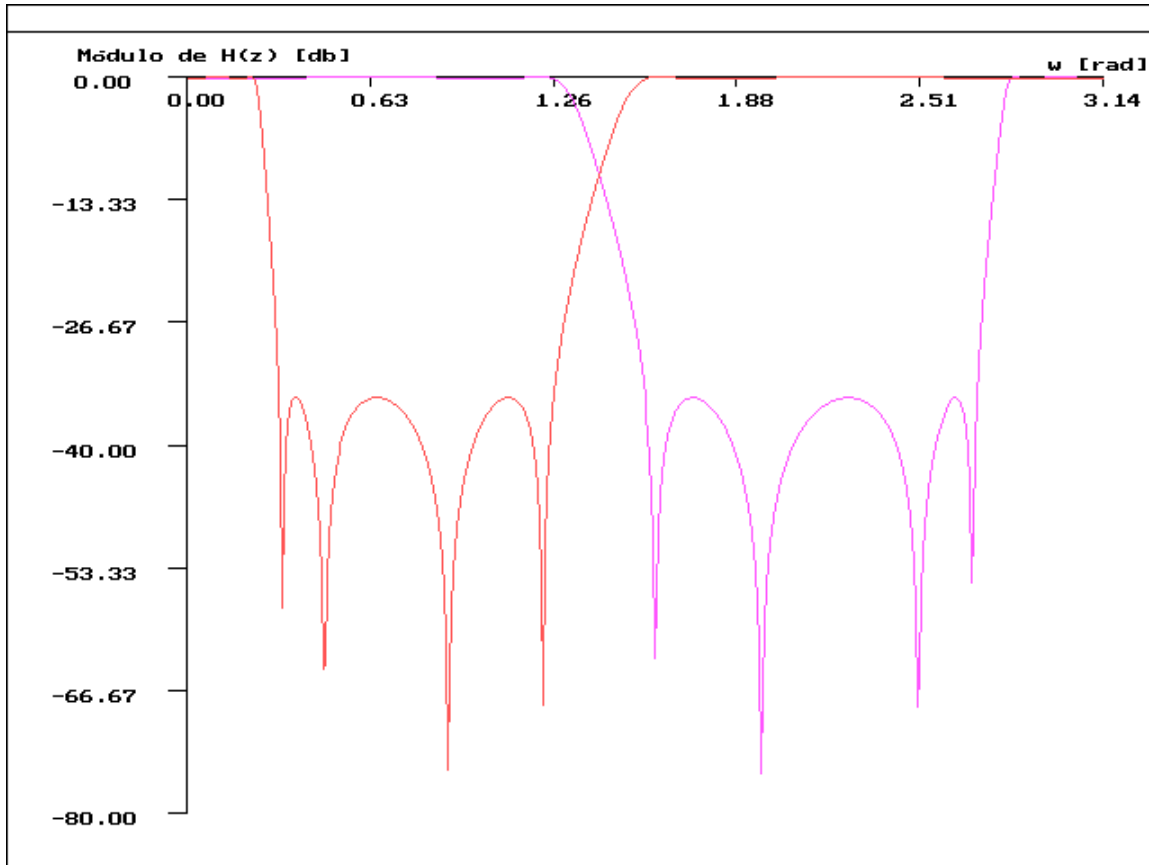


Figura 4.13: Aplicação da transformação espectral rejeita-banda rejeita-banda.

Em resumo, pode-se dizer que todas as transformações espectrais aplicadas a protótipos quaisquer são dadas por

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \quad (4.105)$$

com

$$\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega'_1 - \omega_1)}{\sin \frac{1}{2}(\omega'_1 + \omega_1)} \quad (4.106)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_1'$  são as frequências de corte do filtro original e desejado, respectivamente, sabendo-se que nos casos passa-banda e rejeita-banda estas são frequências de corte inferior, e que nestes casos a frequência de corte superior é calculada como

$$\omega_2' = 2 \arctg \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega_1'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2}} \right) \quad (4.107)$$

sendo  $\omega_2$  a frequência de corte superior do filtro protótipo original.

### 4.3 - CONCLUSÕES

Inicialmente, na Seção 4.1, foram desenvolvidas as transformações espectrais aplicadas em protótipos passa-baixas, já consolidadas na literatura [6], [25], permitindo obter outros filtros de características passa-baixas, passa-altas, passa-banda ou rejeita-banda.

Na Seção 4.2 procurou-se encontrar novas transformações espectrais que, aplicadas sobre protótipos quaisquer, pudessem gerar filtros resultantes de mesmas características. Tais transformações foram encontradas, apresentando grande vantagem por serem de primeira ordem. A vantagem inerente de tais transformações está no fato de que cada bloco quadrático de uma função  $H(z)$  na forma cascata ou paralela de blocos continua sendo um bloco quadrático quando se usa tais transformações para variar a largura da banda passante (ou de rejeição). Isto se traduz em significativa redução do esforço computacional para a síntese do filtro transformado, quando se deseja avaliar o desempenho de uma dada estrutura digital quando a banda passante varia, como é objetivo deste trabalho. Porém, tais transformações têm o inconveniente de não manter a frequência central do filtro original, exceto para as transformações passa-baixas passa-baixas e passa-altas passa-altas.

## **Capítulo 5**

# **Análise Comparativa da Variância Relativa de Ruído na Saída do Filtro Digital**

Após a descrição, no Capítulo 3, das estruturas de segunda ordem utilizadas na implementação do filtro digital na forma paralela, e após a definição, no Capítulo 4, das novas transformações espectrais adotadas, pode-se finalmente alcançar o objetivo deste trabalho, ou seja, a avaliação do comportamento da variância relativa do ruído na saída de filtros digitais para os espectros passa-baixas, passa-altas, passa-banda e rejeita-banda, para uma larga faixa de frequências, selecionando-se assim a estrutura de desempenho mais adequado para uma certa aplicação.

### **5.1- ANÁLISE COMPARATIVA DA VARIÂNCIA RELATIVA DO RUÍDO**

O estudo aqui efetuado complementa aquele realizado em [23], que aborda apenas o caso de espectro passa-baixas, no sentido de que ele abrange os demais espectros. Adicionalmente, é acrescentada a estrutura de segunda ordem sem ciclos limite do tipo III, proposta em [8]. Em todos os casos, o interesse maior é por filtros de banda estreita, caso em que as estruturas no espaço de estados são mais adequadas.

#### **5.1.1- O CASO PASSA-BAIXAS**

Seja um filtro protótipo passa-baixas elíptico, de oitava ordem, com máxima atenuação na banda passante de 0.25 dB, com largura de banda passante 100 Hz, início da banda de rejeição em 120 Hz e frequência de amostragem 10000 Hz, transformado sucessivamente em vários outros filtros passa-baixas, até aquele com frequência de corte de 2500 Hz, com variação de 100Hz em 100 Hz.

Para este exemplo, a Figura 5.1 apresenta uma comparação do nível de ruído em função da largura da banda passante, quando o filtro é implementado através das estruturas de segunda ordem de mínimo ruído, vista na Figura 3.2, estrutura quase ótima, da Figura 3.4, e as estruturas sem ciclos limite tipos I e III, das Figuras 3.5 e 3.7, respectivamente.

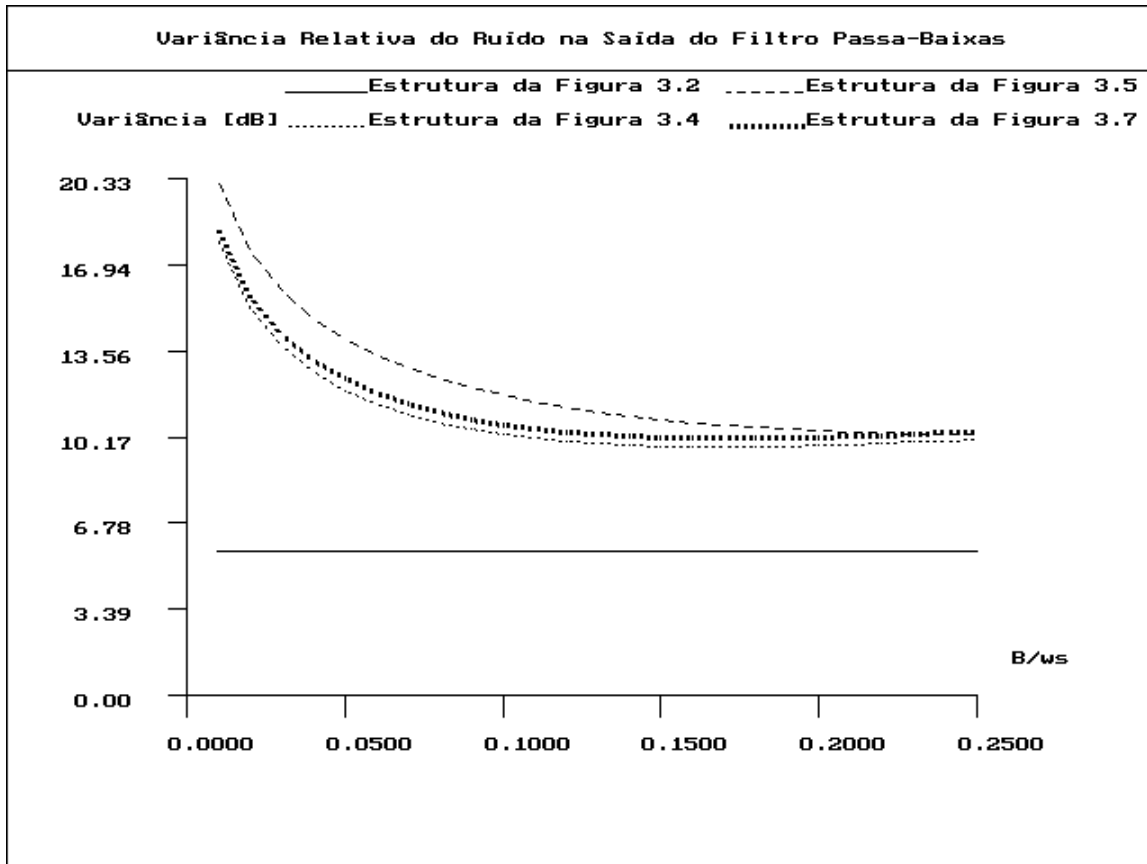


Figura 5.1: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o exemplo passa-baixas.

Por este exemplo, verifica-se um desempenho muito próximo, para as estruturas das Figuras 3.4 e 3.7, o qual é bem superior ao da estrutura da Figura 3.5. Entretanto, a estrutura da Figura 3.7 é mais vantajosa, devido à sua menor complexidade computacional (ver Tabela 3.1). Destaque-se também, que todas as estruturas imunes a ciclos limite também no caso de entrada constante são mais ruidosas, o que é característica do procedimento de eliminação de ciclos limite no caso de entrada constante [22], [23]. Sob este aspecto, observe-se que a estrutura da Figura 3.2 é usada apenas como referência para comparação, já que ao contrário das demais, não é imune a ciclos limite no caso de entrada constante.

### 5.1.2- O CASO PASSA-ALTAS

Seja agora um filtro protótipo passa-altas, de oitava ordem, com frequência de corte inicial em 4900 Hz e frequência de amostragem 10000 Hz, transformado em outros filtros passa-altas, até a frequência de corte de 2500 Hz. Aqui também tem-se a máxima atenuação na banda passante de 0.25 dB.

A análise da variância relativa do ruído na saída é realizada para os filtros do tipo elíptico e Chebyshev, através das Figura 5.2 e 5.3, respectivamente.

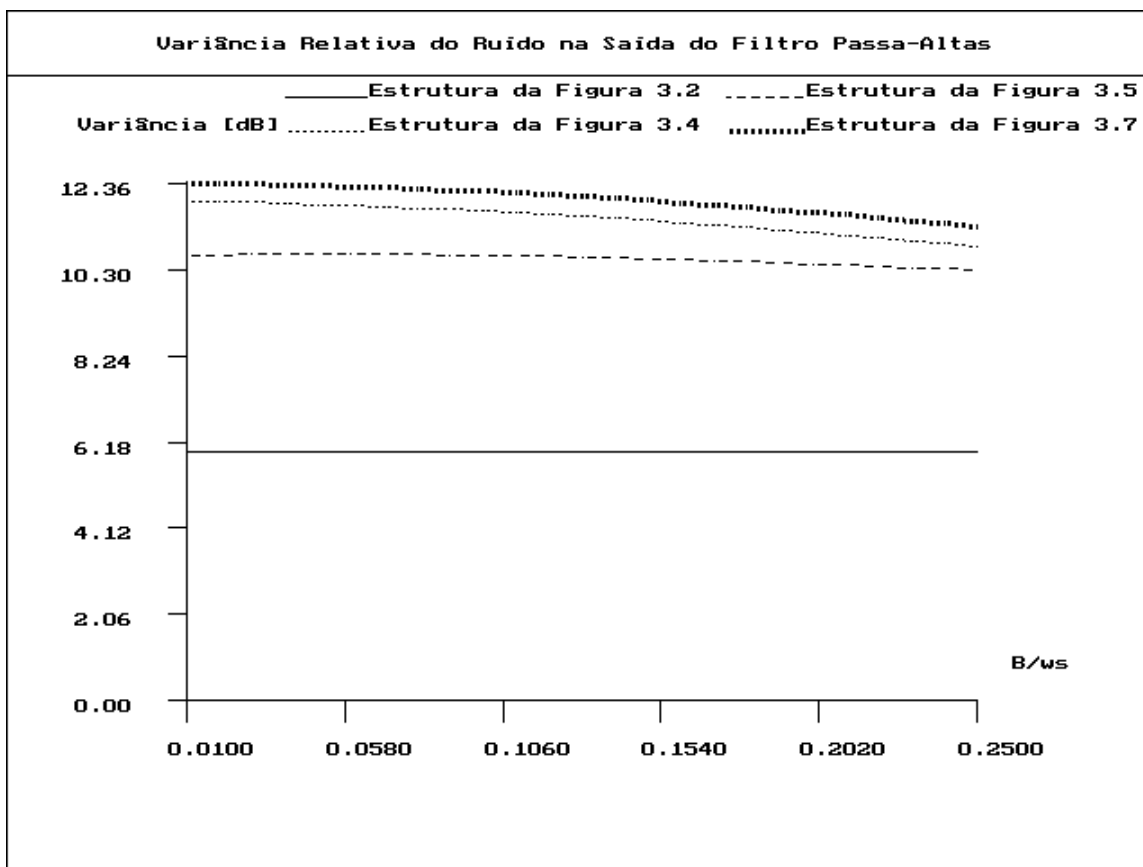


Figura 5.2: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o caso do filtro passa-altas tipo Chebyshev.

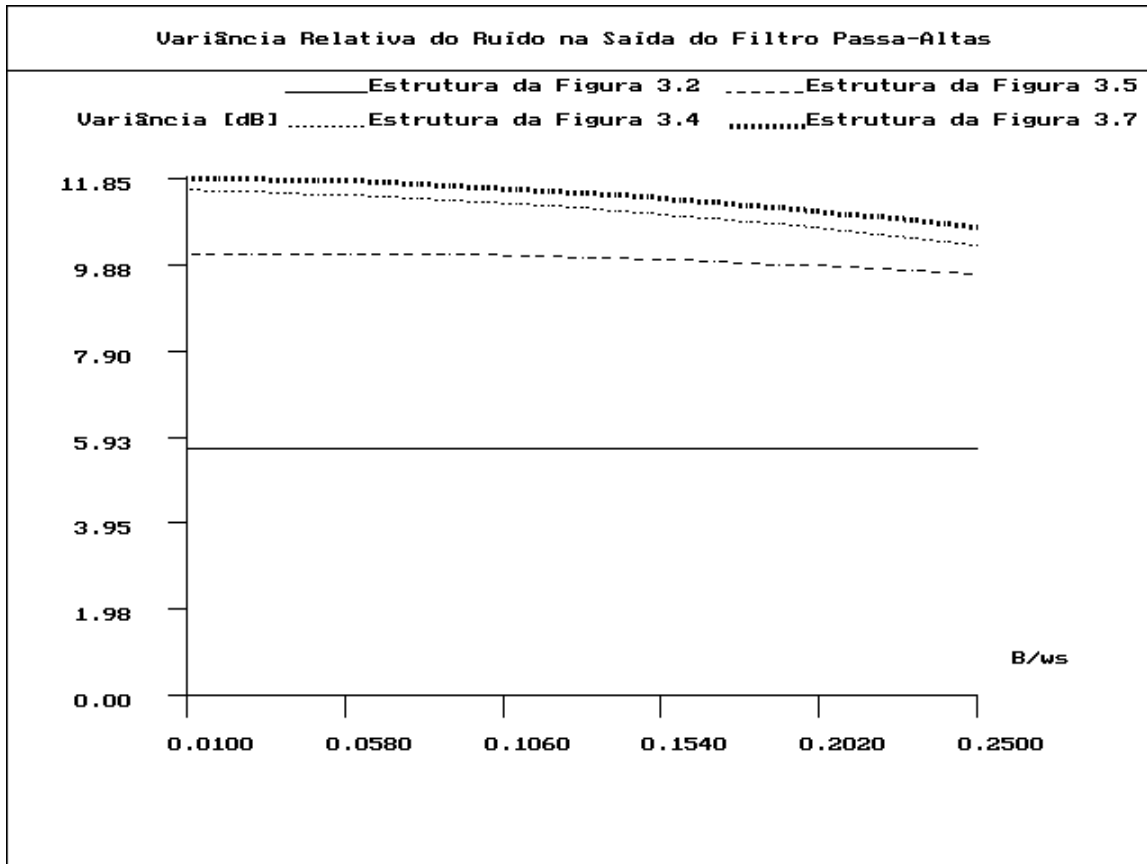


Figura 5.3: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o caso do filtro passa-altas elíptico.

Analisando a Figura 5.2 nota-se o melhor desempenho da estrutura da Figura 3.5, seguida da estrutura da Figura 3.7, o que já era esperado, a partir dos resultados em [8], que garantem a otimalidade da estrutura da Figura 3.5. No que se refere à Figura 5.3, os resultados também são similares, salientando-se, novamente, o excelente desempenho da estrutura da Figura 3.5.

### 5.1.3- O CASO PASSA-BANDA

De forma análoga, seja um filtro protótipo passa-banda elíptico de oitava ordem, de máxima atenuação na banda passante 0.25 dB, com frequências de corte inferior e superior de 2500 Hz e 4000 Hz, respectivamente, e frequência de amostragem 10000 Hz. Tal filtro é sucessivamente transformado em outros filtros passa-banda, até o valor da frequência de corte inferior de 500 Hz, o que provoca estreitamento da banda passante, através do deslocamento dos seus pólos em direção ao ângulo zero graus. Tal deslocamento é consequência da transformação passa-banda passa-banda do Capítulo 4.

Seu comportamento a nível de ruído na saída do filtro, para tal caso, é apresentado na Figura 5.4, na qual também se verifica o excelente desempenho da estrutura da Figura 3.4, quando os pólos do filtro se aproximam de  $z=1$ , o que também é seguido bem

proximamente pela estrutura da Figura 3.7, para a qual tem-se uma menor complexidade computacional.

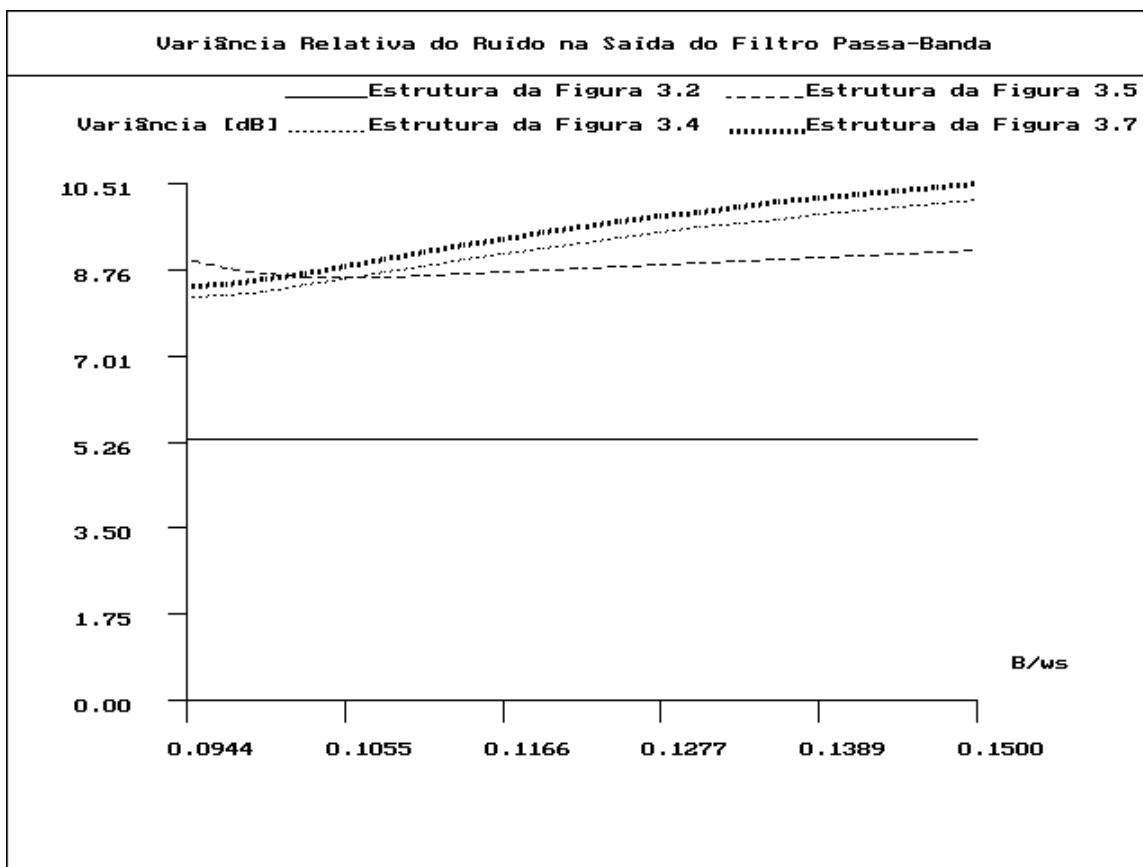


Figura 5.4: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o caso do filtro passa-banda elíptico.

#### 5.1.4- O CASO REJEITA-BANDA

Para esta análise, é utilizado um filtro protótipo rejeita-banda elíptico, com máxima atenuação nas bandas passantes de 0.25 dB, de oitava ordem, com frequências de corte inferior e superior 2500 Hz e 4000 Hz, respectivamente, e frequência de amostragem 10000 Hz. Tal filtro também é sucessivamente transformado em outros filtros rejeita-banda, até o valor da frequência de corte inferior de 500 Hz, o que provoca o estreitamento da banda de rejeição, à medida que os pólos se deslocam em direção a • EMBED Equation • • , em decorrência da transformação rejeita-banda rejeita-banda do Capítulo 4. O resultado da simulação da variância relativa do ruído na saída do filtro está na Figura 5.5, onde novamente se destacam os excelentes desempenhos das estruturas das Figuras 3.4 e 3.7, neste caso coincidentes.

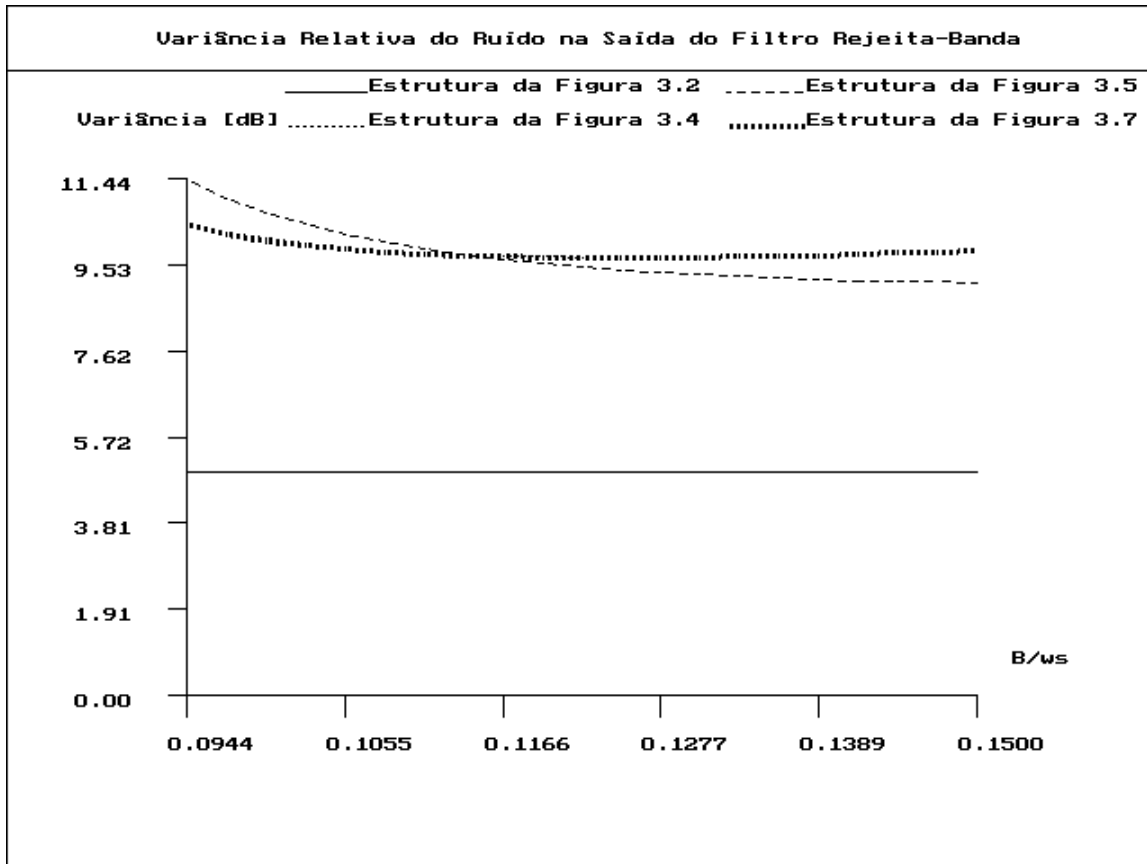


Figura 5.5: Variância relativa do ruído versus largura da banda de rejeição para o caso do filtro rejeita-banda tipo elíptico.

Entretanto, dado que as transformações espectrais aplicadas aos espectros passa-banda e rejeita-banda não conservam a frequência central da banda passante e de rejeição do filtro, respectivamente, surgiu a dúvida se os resultados se manteriam numa situação em que a frequência central  $\omega_0$  fosse mantida constante. Assim, é realizado, na Seção 5.2 um estudo comparativo das mesmas estruturas de segunda ordem descritas no Capítulo 3, porém, agora, através da variação da largura da banda do filtro pelas já consolidadas transformações espectrais de Constantinides do tipo passa-baixas passa-banda e passa-baixas rejeita-banda, com  $\omega_0$  constante, nos dois casos.

## 5.2- ANÁLISE COMPARATIVA DA VARIÂNCIA RELATIVA DE RUÍDO SEGUNDO AS TRANSFORMAÇÕES ESPECTRAIS DE CONSTANTINIDES

No Capítulo 4, novas transformações espectrais de primeira ordem foram desenvolvidas, a fim de evitar a dificuldade imposta pelas transformações de Constantinides [6], nos casos passa-baixas passa-banda e passa-baixas rejeita-banda. Como visto, dada uma função de transferência de segunda ordem, a aplicação das transformações de Constantinides, de segunda ordem, eleva para quatro a ordem da função de transferência transformada, implicando em um maior nível de complexidade computacional para a

fatoração em novos blocos de segunda ordem, principalmente se for considerado o fato de que tal fatoração é necessária para cada transformação realizada. Assim, apenas as versões simplificadas das transformações de Constantinides para os casos passa-baixas passa-banda e passa-baixas rejeita-banda, dadas por  $G(z^{-1}) = -z^{-2}$  e  $G(z^{-1}) = z^{-2}$ , respectivamente, serão aqui adotadas. Elas levam a frequência central para o valor fixo de  $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ , conforme pode ser verificado através das equações (4.49) e (4.62).

Seja, então, a função de transferência do tipo passa-baixas dada por

$$H(z) = k \prod_{i=1}^N \frac{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad (5.1)$$

A aplicação  $G(z^{-1}) = -z^{-2}$  na equação (5.1) resulta na função de transferência passa-banda transformada

$$H_T(z) = k \prod_{i=1}^N \frac{z^4 - a_{1i}z^2 + a_{2i}}{z^4 - b_{1i}z^2 + b_{2i}} \quad (5.2)$$

Reescrevendo a equação (5.2), em termos de blocos de segunda ordem, tem-se

$$H_T(z) = k \prod_{i=1}^N \frac{(z^2 + a'_{1i}z + a'_{2i})(z^2 + a''_{1i}z + a''_{2i})}{(z^2 + b'_{1i}z + b'_{2i})(z^2 + b''_{1i}z + b''_{2i})} \quad (5.3)$$

a qual, trabalhada e por fim comparada com a equação (5.1), permite adotar como solução para os coeficientes de  $H_T(z)$

$$a'_{2i} = a''_{2i} = \sqrt{a_{2i}} \quad (5.4a)$$

$$a'_{1i} = \sqrt{2\sqrt{a_{2i}} + a_{1i}} \quad (5.4b)$$

$$a'_{1i} = -a''_{1i} \quad (5.4c)$$

$$b'_{2i} = b''_{2i} = \sqrt{b_{2i}} \quad (5.4d)$$

$$b'_{1i} = \sqrt{2\sqrt{b_{2i}} + b_{1i}} \quad (5.4e)$$

$$b'_{1i} = -b''_{1i} \quad (5.4f)$$

e assim, realizar a operação de expansão em frações parciais. O procedimento seguinte é análogo aos já realizados anteriormente, isto é, a síntese e escalamento das redes e o cálculo

da variância relativa do ruído, para a análise das estruturas, exceto pelo fato de que agora se trabalha com o dobro do número de seções, comparado com a ordem do filtro protótipo passa-baixas. Desta forma, tomando-se o mesmo filtro protótipo passa-baixas descrito na Seção 5.1 e usando os resultados em (5.4), obtém-se o gráfico da variância relativa de ruído visto na Figura 5.6.

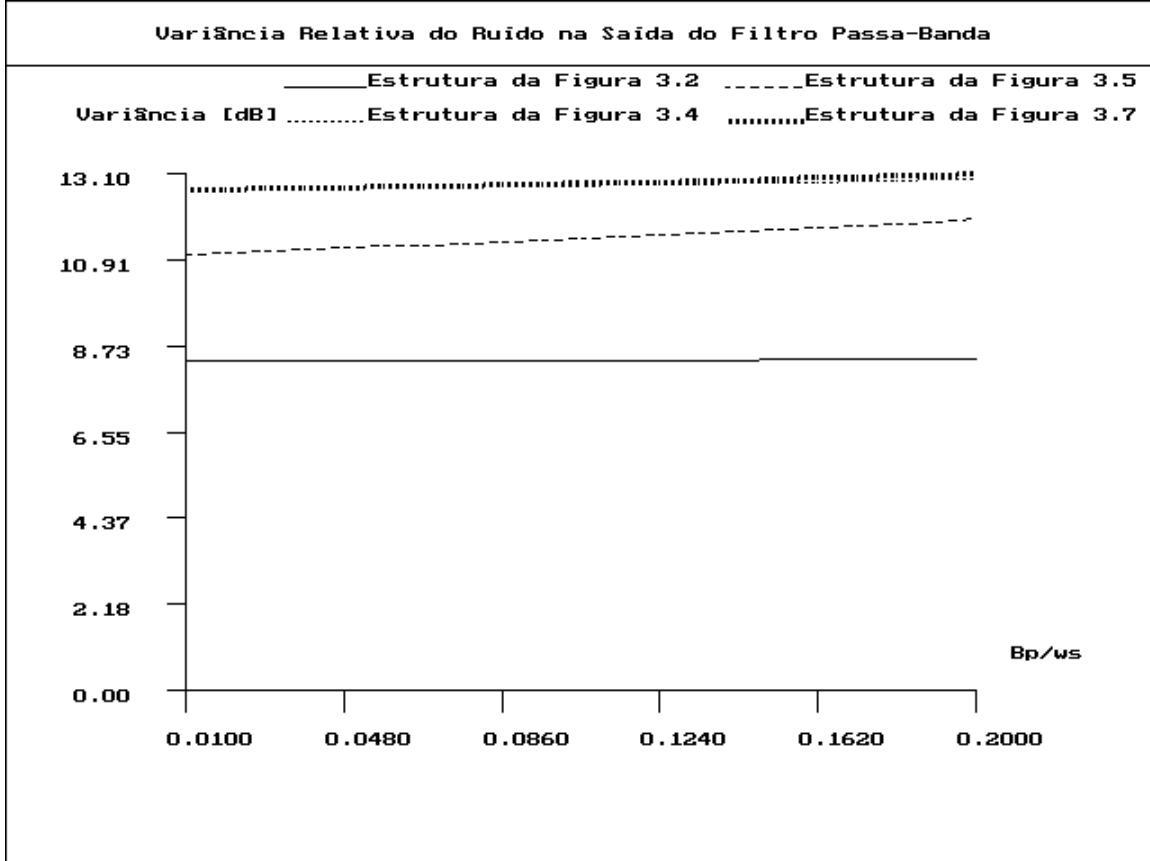


Figura 5.6: Variância relativa do ruído versus largura da banda passante para o filtro passa-banda.

Aqui, o gráfico de variância relativa do ruído versus largura de banda passante, permite concluir que a estrutura mais adequada é aquela da Figura 3.5, para os caso de pólos distantes de  $z = 1$ . Quando os pólos se aproximam de  $z = 1$ , as estruturas das Figura 3.4 e 3.7 tornam-se as mais adequadas, o que está de acordo com os resultados da Seção 5.1.

De forma análoga, para o caso da transformação passa-baixas rejeita-banda a aplicação da equação (4.62) em (5.1) leva aos coeficientes

$$a'_{2i} = a''_{2i} = \sqrt{a_{2i}} \quad (5.5a)$$

$$a'_{1i} = \sqrt{2\sqrt{a_{2i}} - a_{1i}} \quad (5.5b)$$

$$a'_{1i} = -a''_{1i} \quad (5.5c)$$

$$b'_{2i} = b''_{2i} = \sqrt{b_{2i}} \quad (5.5d)$$

$$b'_{1i} = \sqrt{2\sqrt{b_{2i}} - b_{1i}} \quad (5.5e)$$

$$b'_{1i} = -b''_{1i} \quad (5.5f)$$

adotados como uma solução de  $H_T(z)$ , de tal forma que também se pode expandir em frações parciais e, em seguida, adotar o mesmo procedimento para síntese e escalamento das estruturas, e cálculo da variância relativa do ruído. O gráfico resultante pode ser observado na Figura 5.7, considerando, ainda, o protótipo passa-baixas da Seção 5.1.

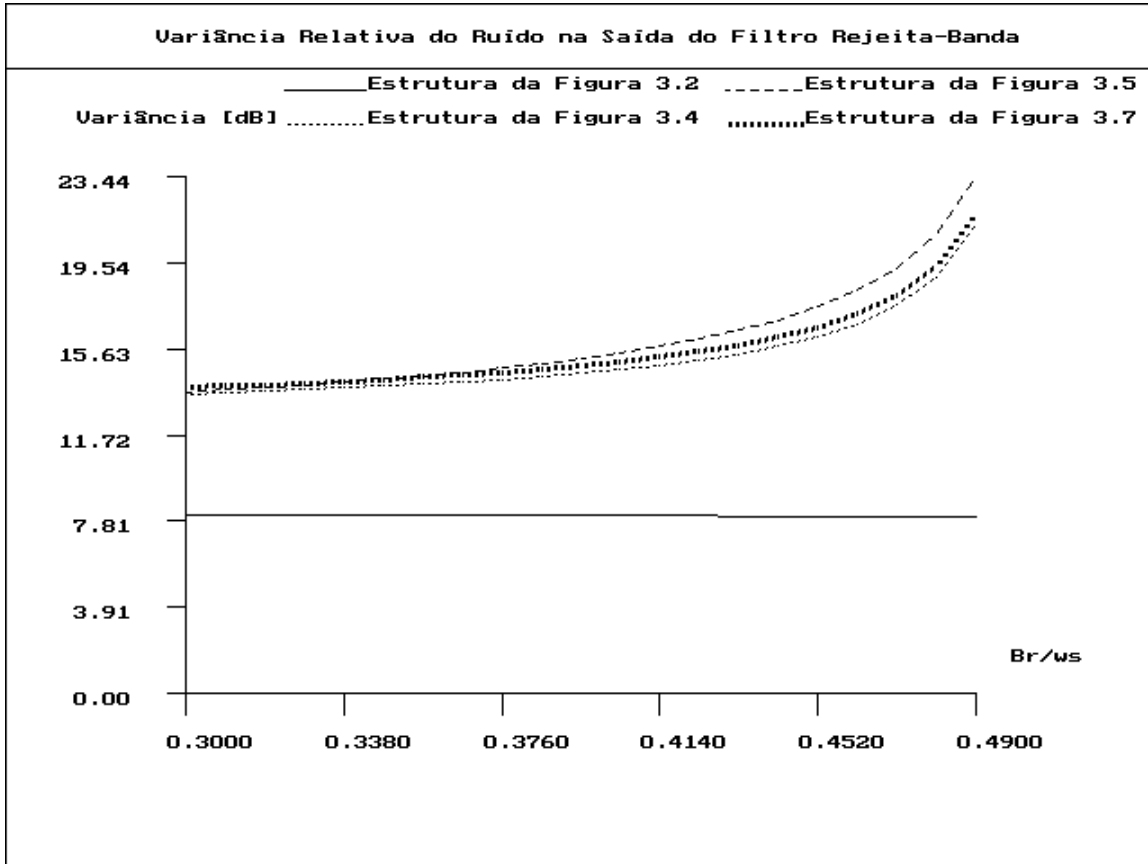


Figura 5.7: Variância relativa do ruído versus largura da banda de rejeição para o filtro rejeita-banda.

Aqui, o gráfico de variância relativa do ruído versus largura de banda de rejeição mostra mais uma vez, que as estruturas das Figuras 3.4 e 3.7 são as de melhor desempenho, quando os pólos se aproximam de  $z = 1$ , o que está de acordo com os resultados da Seção 5.1.

O estudo comparativo destas estruturas de segunda ordem para os casos de filtros passa-banda e rejeita-banda, quando a frequência central da banda passante ou de rejeição é um quarto da frequência de amostragem, mostra resultados idênticos àqueles obtidos com a utilização das transformações espectrais de primeira ordem desenvolvidas no Capítulo 4, validando assim sua utilização.

### 5.3- CONCLUSÃO

Neste Capítulo foram mostrados exemplos de filtros passa-baixas, passa-altas, passa-banda e rejeita-banda onde se pode analisar o desempenho do filtro em termos da variância relativa do ruído na sua saída, de forma a complementar o trabalho anteriormente apresentado em [23], que apenas considera espectros passa-baixas. Tal complementação se deu através da análise a nível do ruído na saída para qualquer tipo de espectro, assim como pela introdução de mais uma estrutura para avaliação de desempenho.

Este estudo se tornou viável em virtude do estabelecimento das novas transformações espectrais, as quais evitaram a maior complexidade computacional antes exigida para as transformações de Constantinides. Além do mais, qualquer que seja o protótipo, pode-se agora analisar seu comportamento, não necessitando realizar a operação inversa, isto é, do filtro desejado retornar ao espectro passa-baixas e, assim, aplicar as transformações de Constantinides.

Como principal conclusão deste estudo comparativo do desempenho em termos da variância relativa do ruído na saída do filtro, tem-se que as estruturas das Figuras 3.4 e 3.7 são as de melhor desempenho. Merece destaque, também, o fato de que tais estruturas têm simetria estrutural, traduzida através de caminhos similares desde a entrada de sinal na rede até os estados, o que não ocorre com a estrutura da Figura 3.5. Adicionalmente, deve-se mencionar que a estrutura da Figura 3.7, apesar de ligeiramente mais ruidosa, tem a vantagem de ser menos complexa, computacionalmente falando, que aquela da Figura 3.4.

# Capítulo 6

## Conclusão

Algumas estruturas de segunda ordem, no espaço de estados, têm sido sugeridas para a implementação de filtros digitais, conforme se observa em [2], [4], [8], [11], [18] e [23], sendo necessário, portanto, uma avaliação do desempenho das mesmas e, assim, saber qual estrutura é mais adequada em uma dada aplicação. Um primeiro trabalho, neste sentido, foi realizado em [23], onde compara-se o comportamento a nível da variância relativa de ruído na saída versus largura de banda passante, para uma larga faixa de frequências, para as estruturas das Figuras 3.2, 3.4 e 3.5 descritas no Capítulo 3.

Entretanto, o resultado encontrado em [23] não é suficiente: torna-se importante conhecer o desempenho de tais estruturas para os demais tipos de espectro. Diante disto, algumas dificuldades iniciais surgem. As transformações espectrais, consolidadas na literatura, são somente aplicadas em filtros protótipos passa-baixas, fazendo-se necessário o estabelecimento de novas transformações espectrais, as quais possam ser também aplicadas em filtros protótipos passa-altas, passa-banda e rejeita-banda. Um estudo detalhado das transformações de Constantinides é realizado, permitindo descrever as novas transformações, de primeira ordem, conforme visto na Seção 4.2 do Capítulo 4.

Validadas estas novas transformações, verifica-se teórica e graficamente o inconveniente da variação da frequência central, juntamente com a variação da largura da banda passante ou de rejeição, nos casos passa-banda ou rejeita-banda, respectivamente. A princípio, a não aceitação deste fato fez com que se buscassem outras possíveis transformações que mantivessem a frequência central fixa, sendo um esforço em vão. Diante de tal confirmação, retornou-se a meta deste estudo, ou seja, a avaliação de desempenho das estruturas a nível de ruído para todos os espectros, inicialmente para as estruturas de segunda ordem das Figuras 3.2, 3.4 e 3.5. Complementado o trabalho em [23], inicia-se um processo de investigação do desempenho da estrutura da Figura 3.7. A preocupação com esta estrutura surge diante do fato de que ela é um caso particular da estrutura da Figura 3.4, onde o vetor  $\mathbf{P}$  de modificação do sinal de entrada para eliminação de ciclos limite a entrada constante assume o valor  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

No Capítulo 5 é analisado o desempenho a nível de ruído para o filtro digital na forma paralela, implementado com as estruturas de segunda ordem das Figuras 3.2, 3.4, 3.5 e 3.7, usando-se vários exemplos, os quais evidenciam a superioridade das estruturas das Figuras 3.4 e 3.7, para os filtros de banda estreita, nos diversos espectros, exceto para o espectro passa-altas, no qual a estrutura da Figura 3.5 quando do tipo passa-altas Chebyshev apresenta melhores resultados, como já era esperado a partir dos resultados em [8].

Verifica-se que o desempenho da estrutura da Figura 3.7 é, em algumas situações, bem próximo ao da estrutura da Figura 3.4, o que pode vir a trazer significativas vantagens em certas aplicações, em virtude de sua menor complexidade computacional exigida, conforme retrata a Tabela 3.1 no Capítulo 3.

Posteriormente, ainda não esclarecidas todas as indagações a respeito da veracidade de tais resultados, retornam-se as transformações espectrais de Constantinides, agora para um estudo comparativo do nível de ruído para as estruturas de segunda ordem mencionadas, através da aplicação de tais transformações para geração de filtros passa-banda e rejeita-banda. Este novo estudo é realizado, principalmente, para verificar se os resultados obtidos nos casos passa-banda e rejeita-banda, em que a frequência central varia com a largura da banda pasante ou de rejeição, são os mesmos para os casos em que a frequência central se mantém fixa. Diante da dificuldade encontrada na utilização destas transformações, já que a ordem da função de transferência é elevada e com isso também a complexidade computacional, utilizam-se as transformações espectrais reduzidas passa-baixas passa-banda e passa-baixas rejeita-banda, conforme visto na seção 5.2 do Capítulo 5, para a confirmação dos resultados. Observe-se que os resultados obtidos estão em acordo com aqueles obtidos com as novas transformações espectrais do Capítulo 4.

Como conclusão final deste trabalho, foi apontado o bom desempenho, dentre as estruturas de segunda ordem no espaço de estados imunes a ciclos limite, daquelas estruturas da Figuras 3.4 e 3.7. Nesse aspecto, é necessário chamar a atenção para o fato de que tais estruturas se caracterizam por uma simetria estrutural, no que se refere aos caminhos entre a entrada de sinal e os estados de tais estruturas. Outro aspecto a ser realçado é o fato de que a estrutura da Figura 3.7, embora ligeiramente mais ruidosa, é bem menos complexa, computacionalmente falando, que aquela da estrutura da Figura 3.4, o que justifica, dado o seu desempenho, dedicar-lhe maior atenção.

## Referências Bibliográficas

- [1] Barnes, C. W., (1985). "A Parametric Approach to the Realization of Second-Order Digital Filter Sections", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-32: 530-539.
- [2] Bomar, B. W., (1985). "New Second-Order State-Space Structures for Realizing Low Roundoff Noise Digital Filters", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-33: 106-110.
- [3] Bomar, B. W. e Joseph, R. D., (1987). "Calculation of  $L_\infty$  Norms for Scaling Second-Order State-Space Digital Filter Sections", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-34: 983-984.
- [4] Bomar, B. W., (1989). "On the Design of Second-Order State-Space Digital Filter Sections", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-36: 542-552.
- [5] Claasen, T. A. C. M., Mecklenbrauker, W. F. e Peek, J. B., (1975). "On the Stability of the Forced Response of Digital Filters with Overflow Nonlinearities", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-22: 692-696.
- [6] Constantinides, A. G., (1970). "Spectral Transformations for Digital Filters", IEE Proceedings, vol. 117: 1585-1590.
- [7] Crystal, T. H., (1968). "The Design and Applications of Digital Filters with Complex Coefficients", IEEE Trans. on Audio and Electro-acoustics, vol. AU-16: 330-335.
- [8] Diniz, P. S. R. e Antoniou, A., (1986). "More Economical State-Space Digital-Filter Structures Which Are Free of Constant-Input Limit Cycles", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-34: 807-815.
- [9] Diniz, P. S. R., (1987). "Projeto de Filtros Digitais", manuscrito, COPPE/UFRJ.
- [10] Jackson, L. B., (1970). "Roundoff-Noise Analysis for Fixed Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form", IEEE Trans. on Audio and Electro-acoustics, vol. AU-18: 107-122.
- [11] Jackson, L. B., Lindgren, A. e Kim, Y., (1979). "Optimal Synthesis of Second-Order State-Space Structures for Digital Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-26: 149-153.
- [12] Jackson, L. B., (1987). "Digital Filters and Signal Processing", Kluwer Academic Publishers, USA.

- [13] Kawamata, M. e Higuchi, T. (1983). "A Systematic Approach to Synthesis of Limit Cycle-Free Digital Filters", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-31: 212-214.
- [14] Langinmaa, A., (1987). "Limit Cycles in Digital Filters", Dissertação de Mestrado, Helsinki University of Technology, Finlândia.
- [15] Macedo Jr., T. C., (1990). "Modelagem do Erro Adaptativa Para Redução dos Efeitos de Quantização em Filtros Digitais", Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Brasil.
- [16] Mills, W. L., Mullis, C. T. e Roberts, R. A., (1978). "Digital Filter Realizations Without Overflow Oscillations", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-26: 334-338.
- [17] Mitra, S. K., Hirano, K. e Sakaguchi, H., (1974). "A Simple Method of Computing the Input Quantization and Multiplication Roundoff Errors in a Digital Filter", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-22: 326-329.
- [18] Mullis, C. T. e Roberts, R. A., (1976). "Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-23: 551-562.
- [19] Mullis, C. T. e Roberts, R. A. (1976). "Roundoff Noise in Digital Filters: Frequency Transformations and Invariants", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-24: 538-550.
- [20] Oppenheim, A. V. e Schaffer, R. W., (1989). "Discrete-Time Signal Processing", Prentice-Hall, USA.
- [21] Papoulis, A., (1984). "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", McGraw-Hill, USA.
- [22] Sarcinelli Filho, M., (1990). "Síntese de Filtros Digitais Recursivos sem Ciclos Limite", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Brasil.
- [23] Sarcinelli Filho, M., Cruz, C. P. da e Simmer, A. C. S., (1992). "Estrutura Digital de Segunda Ordem Quase Ótima Livre de Ciclos Limite", Anais do 9º CBA, vol. 1: 40-44.
- [24] Sarcinelli Filho, M., Simmer, A. C. S. e Cruz, C. P. da, (1992). "Sobre o Escalamento em Norma Infinita de Filtros Digitais de Segunda Ordem sem Ciclos Limite", manuscrito submetido à Revista Controle e Automação, da SBA.
- [25] Schüsler, W., (1970). "Variable Digital Filters", Arch. Elek. Übertragung, vol. 24: 524-525.

- [26] Vaidyanathan, P. P. e Liu, V., (1987). "An Improved Sufficient Condition for Absence of Limit Cycles in Digital Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-34: 319-322.