

Felipe Nascimento Martins

*Modelagem e Compensação da Dinâmica  
de Robôs Móveis e sua Aplicação em  
Controle de Formação*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica - Automação.

Orientador: Prof. Dr. Mário Sarcinelli Filho.

Coorientadores: Prof. Dr. Teodiano Freire Bastos Filho e Prof. Dr. Ricardo Carelli.

Vitória, ES

2009

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

M386m Martins, Felipe Nascimento, 1975-  
Modelagem e compensação da dinâmica de robôs móveis e  
sua aplicação em controle de formação / Felipe Nascimento  
Martins. – 2009.  
190 f. : i.

Orientador: Mário Sarcinelli Filho.  
Co-Orientador: Teodiano Freire Bastos Filho, Ricardo Carelli.  
Tese (doutorado) – Universidade Federal do Espírito Santo,  
Centro Tecnológico.

1. Robótica. 2. Robôs móveis. 3. Teoria do controle não-  
linear. 4. Controle adaptativo. 5. Dinâmica. 6. Cooperação de  
robôs. I. Sarcinelli Filho, Mário. II. Bastos Filho, Teodiano Freire.  
III. Carelli, Ricardo. IV. Universidade Federal do Espírito Santo.  
Centro Tecnológico. V. Título.

CDU: 621.3

---

*A Cynthia.*

*Aos meus pais, irmãos e toda minha família.*

## Agradecimentos

*“I do not overrate my importance! I dare say I am the most humble droid I know.”*

*(C-3PO, em Star Wars: The New Rebellion)*

Tantas pessoas colaboraram, de diversas maneiras, com a realização deste trabalho, que acho muito difícil escrever um texto de agradecimentos que seja justo. Por isso, antes de tudo, quero agradecer a todos que, de alguma forma, prestaram sua contribuição (técnica, financeira, espiritual, etc.) para que este trabalho fosse realizado e concluído. Menciono, a seguir, algumas delas. Meus sinceros agradecimentos...

A Cynthia, por todo seu apoio, carinho, companhia, compreensão e amor. Sem ela, tudo seria muito mais difícil. Aos meus pais, Ronaldo e Ana, que sempre trabalharam muito para que meus irmãos e eu tivéssemos o melhor possível, sempre nos incentivando com muita atenção e carinho. Aos meus irmãos Paulo e Julia, às minhas avós Helenita e Yvonne, aos meus sogros José Augusto e Liéte, e à toda minha família pelo incentivo, apoio, carinho, suporte e compreensão durante os momentos de falta.

Aos professores Mário Sarcinelli Filho (*My Professor*), Teodiano Freire Bastos Filho e Ricardo Carelli, por sua orientação dedicada e valiosa, pela atenção, pelos conhecimentos compartilhados, pelas revisões detalhadas de todos os artigos e desta tese, e por confiarem que eu poderia realizar este trabalho enquanto seguia como professor. Jamais me esquecerei dos conselhos de *My Professor* para que sempre evoluíssemos como Serguei Bubka<sup>1</sup>, sempre mostrando progresso, pouco a pouco. E dos excelentes passeios turísticos por San Juan guiados pelo professor Carelli, que nos recebeu tão bem no *Instituto de Automática* (INAUT) e nos fez sentir em casa, na Argentina! Agradecimentos especiais a *My Professor* e a Carelli pela ajuda no contato com o *Instituto de Investigaciones Arqueológicas y Museo “Prof. Mariano Gambier”*, da UNSJ, e à Dra. Catalina Teresa Michieli, diretora de tal museu, que recebeu a Cynthia e possibilitou que ela me acompanhasse durante a

---

<sup>1</sup>Serguei Nazarovich Bubka, ucraniano nascido em Voroshilovgrad em 4 de dezembro de 1963, é um ex-campeão olímpico e multirrecordista mundial do salto com vara. É considerado por muitos o maior saltador com vara de todos os tempos. Quebrou o recorde mundial de salto com vara 34 vezes entre 1984 e 1995 (na maioria das vezes, o próprio recorde). Até o presente detém o recorde de 6,15 m (Biography Base, Acesso em: 18/nov/2008).

primeira viagem a San Juan em 2006. Tal fato resultou numa mudança importante em sua vida profissional.

Aos amigos, colegas e companheiros de viagem Alexandre Santos Brandão (Timótiu), Wanderley Cardoso Celeste (Wander), Rafael Leal Silva (Preto) e Vinicius Thiago Lecco Rampinelli (Vicêncio), pela amizade, pelo companheirismo, pelos momentos de diversão (nos *asados*, tomando um bom vinho ou um café, esquiando, assistindo a *Heroes* ou a *The Big Bang Theory*), e pelos muitos momentos de trabalho em equipe que compartilhamos no Lai (Laboratório de Automação Inteligente) e em nossa *Sorprendente y Querida San Juan*. Obrigado, também, pela gentileza em aceitar dividir o quarto com a Cynthia. Espero que possamos trabalhar e tomar muitos outros vinhos e cafés juntos. Vou me lembrar sempre com muita alegria da companhia de vocês, principalmente porque eu fui o campeão no jogo de boliche.

A Raquel Frizera Vassallo, Eliete Maria de Oliveira Caldeira, Christiano Couto Gava, Flávio Garcia Pereira, Lorena Sophia Campos de Oliveira, Alexandre Konzen (*In Memoriam*), Roger Alex de Castro Freitas, André Ferreira, Daniel Cruz Cavalieri, Sandra Mara Torres Müller, Bruno Pandolfi, Lester e todos os colegas do Lai, pela ajuda na programação, manutenção e “cirurgia” de *upgrade* do Pioneer, pela motivação, e pela companhia para bate-papo durante os cafés. A Fernando Auat Cheeín, Flavio Robertti, Lorgio Teodovich, Franco Penizzotto, José Luis Torres, Julián Nantes, Andrés Rosales, Marcos Toibero, Adriana Amicarelli, Natalia López, Fernando di Sciascio, Vicente Mut, Humberto Secchi, Emanuel Slawiński, Flavio Capraro, Santiago Tosetti, Jorge Sarapura, Armando Assandri, Antonio Cunsulo, Rogelio Fullana, Marcelo Martin, Pedro Campillo, Juan Enrique Guell e todos os colegas e professores do INAUT, por nos receberem de forma tão cordial em San Juan e no instituto, e por sempre estarem dispostos a auxiliar em todo o necessário, inclusive em atividades não acadêmicas. Agradecimentos especiais a Celso de la Cruz Casaño pelas pacientes explicações e ajuda na realização de experimentos, e ao Dr. Carlitos Soria, responsável pelo laboratório de robótica do INAUT, pelo auxílio na programação e solução dos problemas dos robôs, e pela companhia nos fins de semana de realização de experimentos no instituto (alguns de muito calor e vento *Zonda*).

Aos professores membros da banca de avaliação Jussara Farias Fardin, Paulo Faria Santos Amaral, Vladimir Dymnikov e Pablo Javier Alsina, pelas observações, críticas e valiosas sugestões no sentido de melhorar o conteúdo e o texto desta tese. A todos os professores do PPGEE/UFES pelos ensinamentos e por toda a atenção, incentivo e ajuda sempre oferecidos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à *Secretaría de Políticas Universitarias* (SPU), Argentina, pelo financiamento do programa de cooperação entre o Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da UFES e o *Instituto de Automática* da UNSJ. Tal programa me permitiu viajar por três vezes para realização de estágios no INAUT, o que ajudou sobremaneira no desenvolvimento deste trabalho. À Fundação de Apoio à Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (FAPES) pelo financiamento do projeto que permitiu a compra de mais um robô Pioneer para o PPGEE.

À UCL - Faculdade do Centro Leste - que, através dos diretores de sua mantenedora Carlos Alberto Souza de Oliveira, Maria Ângela Loyola de Oliveira, Maurício Del Caro e Sandro Madureira Lobato, e de seu Programa de Incentivo à Capacitação de Professores, me ofereceu apoio financeiro e redução de carga horária. Sem tal apoio seria muito complicado realizar o doutorado e as viagens à Argentina. Agradeço a todos os colegas da UCL, vários dos quais assumiram atividades extras e parte de minhas funções, especialmente aos professores Fransérgio Leite da Cunha, Bruno Venturini Loureiro e Rafael Leal Silva. Agradecimento especial ao professor Klinger Marcos Barbosa Alves, diretor acadêmico da UCL, pelo incentivo e total apoio desde o surgimento da oportunidade de realização do doutorado.

Por fim, quero comentar que a ficção-científica teve grande influência em meu interesse pela tecnologia e me fez desejar ir um pouco mais além. Por isso, agradeço também a todos os autores e, principalmente, a Isaac Asimov, que fomentou meu interesse pelos robôs e incentivou-me a querer estudá-los, entendê-los, programá-los e construí-los. Acredito que o mundo seria um lugar melhor se toda criança aprendesse desde cedo, como os robôs, a obedecer às suas *Três Leis*:

1. *Um robô não pode prejudicar um ser humano ou, por omissão, permitir que o ser humano sofra dano.*
2. *Um robô tem de obedecer às ordens recebidas dos seres humanos, a menos que contradigam a Primeira Lei.*
3. *Um robô tem de proteger sua própria existência, desde que essa proteção não entre em conflito com a Primeira ou a Segunda Leis.*

Muito obrigado!

Felipe Nascimento Martins.

“Eu sou mais rápido que você. Sou mais forte que você.  
E, com certeza, vou durar muito mais que você.  
Você pode pensar que eu sou o futuro, mas está errado.  
Você é o futuro!  
Se eu pudesse desejar alguma coisa, desejaria ser humano.  
Pra saber o que significa ter sentimentos,  
ter esperanças, ter angústias, dúvidas... amar.  
Eu posso alcançar a imortalidade, basta não me desgastar.  
Você também pode alcançar a imortalidade.  
Basta fazer apenas uma coisa notável.”

*Andróide da propaganda de Johnnie Walker, 2006.*

# *Resumo*

Uma proposta de modelagem da dinâmica de robôs móveis tipo uniciclo é aqui apresentada e utilizada no projeto de controladores para os referidos robôs, inclusive num contexto de controle de formação. A dinâmica dos robôs móveis é modelada através de uma nova abordagem, baseada em um modelo dinâmico que aceita sinais de velocidades linear e angular como entradas. O novo modelo dinâmico apresentado tem suas propriedades estudadas e posteriormente utilizadas no desenvolvimento de controladores adaptativos, para compensar os efeitos da dinâmica de robôs móveis quando realizam tarefas de seguimento de trajetória, posicionamento e controle de formação. A teoria de Lyapunov é utilizada para analisar a estabilidade do equilíbrio para cada caso, também sendo realizada análise de robustez à variação de parâmetros e à presença de distúrbios não modelados. A influência da compensação da dinâmica é estudada, e sua importância evidenciada através do cálculo de um índice de desempenho obtido em simulações e experimentos. Três estratégias de controle de formação com compensação dinâmica são apresentadas, sendo uma de controle descentralizado tipo líder-seguidor e duas de controle centralizado tipo estruturas virtuais. Uma das estratégias de controle centralizado é aqui proposta, sendo apresentado o desenvolvimento do Esquema de Controle Multicamadas. Tal esquema permite que cada parte do problema de controle de formação seja resolvido por um módulo independente, aumentando sua flexibilidade. É proposto um controlador de formação que posiciona os robôs numa formação que pode ser fixa ou variável, tanto em posição como em forma, sendo possível enfatizar a importância do controle de posicionamento ou de forma da formação. A influência da compensação dinâmica neste controle de formação é analisada e ilustrada através de resultados de simulação e também de experimentos.

# *Abstract*

A new dynamic modeling approach for unicycle-like mobile robots is proposed, which is applied in the design of controllers for this type of robot. The dynamic model thus generated accepts linear and angular velocities as inputs, which is usual in commercial robots. Some of its properties are studied and proved, and are then used in the design of adaptive controllers that compensate for the robot dynamics while tracking a desired trajectory, following a leader or being part of a group in formation control problems. The Lyapunov theory is used on the stability analysis of the equilibrium in every case. A robustness analysis considering possible parameter variation and non-modeled disturbance is also performed. The influence of the dynamic compensation is studied, and its importance is illustrated by a performance index measured for both simulation and experimentation. Three formation control strategies with dynamic compensation are presented: one is a decentralized leader-follower control, and the other two are centralized virtual structure control. A Multi-Layer Scheme for formation control is here presented using one of the centralized formation control strategies. Such scheme is flexible in the sense that each part of the formation control problem is solved by an independent module. The proposed formation controller is capable of making the robots achieve a fixed desired formation, and to follow a desired formation having time-varying position and shape. The influence of the dynamic compensation on this formation control scheme is analyzed and illustrated through both simulation and experimental results.

# *Resumen*

Una propuesta de modelado de la dinámica de robots móviles tipo unicycle es presentada y utilizada en el diseño de controladores para dichos robots, incluso en el contexto de control de formación. La dinámica de los robots móviles es modelada de una nueva manera, basada en un modelo dinámico que acepta señales de velocidades lineal y angular como entradas. El nuevo modelo dinámico presentado tiene sus propiedades estudiadas y posteriormente utilizadas en el desarrollo de controladores adaptables, para compensar los efectos de la dinámica de robots móviles cuando realizan tareas de seguimiento de trayectoria, posicionamiento y control de formación. La teoría de Lyapunov es utilizada para analizar la estabilidad del equilibrio en cada caso, y un análisis de robustez muestra que la estabilidad es garantizada también cuando hay variación de parámetros y perturbaciones no modeladas. La influencia de la compensación dinámica es estudiada, y su importancia evidenciada a través del cálculo de un índice de desempeño obtenido en simulaciones y experimentos. Tres estrategias de control de formación con compensación dinámica son presentadas. Una de ellas es de control descentralizado tipo líder-seguidor y las otras dos son de control centralizado tipo estructuras virtuales. Una de las estrategias de control centralizado es aquí propuesta. También es presentado el desarrollo del Esquema de Control Multi-Capas, que permite que cada parte del problema de control de formación sea solucionado por un módulo independiente, lo que aumenta su flexibilidad. Se propone un controlador de formación que posiciona los robots en una formación fija o variable, en posición o en forma. Dicho controlador permite enfatizar la importancia del control del posicionamiento o de la forma de la estructura virtual. La influencia de la compensación dinámica en dicho sistema es analizada e ilustrada por resultados de simulación y también de experimentos.

# *Lista de Figuras*

1	(a) Robô manipulador industrial ABB (ABB Västerås Sweden, Acesso em: 2/jan/2009); (b) Robô móvel a rodas dotado de um robô manipulador a bordo (KATZ et al., 2006). . . . .	29
2	Robô Ambiental Híbrido desenvolvido pela Petrobras (STEIN et al., 2007).	30
3	Postura de um robô unicycle cujo ponto de interesse está (a) no ponto central do eixo que une as rodas de tração; e (b) a uma distância $a$ desse eixo. . . . .	31
4	Modelo do Robô Unicycle. . . . .	39
5	Robôs cujos parâmetros foram identificados: (a) Robôs Pioneer 2-DX com computador (esquerda) e 3-DX (direita); (b) Cadeira de rodas robótica. . .	48
6	Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros identificados. . . . .	59
7	Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros identificados. . . . .	60
8	Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros identificados. . . . .	60
9	Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros identificados. . . . .	61
10	Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	62
11	Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	62

12	Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	63
13	Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	64
14	Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e ganhos maiores. . . . .	64
15	Diagrama geral do sistema de controle proposto. . . . .	66
16	Diagrama geral do sistema de controle proposto considerando adaptação de parâmetros. . . . .	69
17	Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação. . . . .	75
18	Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação. . . . .	76
19	Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação ativada. . . . .	76
20	Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação ativada. . . . .	77
21	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória circular - primeiro controlador dinâmico. . . . .	78
22	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros exatos. . . . .	79
23	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros exatos. . . . .	79

24	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - primeiro controlador dinâmico. . . . .	80
25	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - primeiro controlador dinâmico. . . . .	80
26	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	82
27	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	82
28	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - primeiro controlador dinâmico. . . . .	83
29	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - primeiro controlador dinâmico. . . . .	83
30	Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação de parâmetros. . . . .	92
31	Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação de parâmetros. . . . .	93
32	Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação de parâmetros. . . . .	95
33	Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação de parâmetros. . . . .	95

34	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória circular - segundo controlador dinâmico. . . . .	96
35	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros exatos.	97
36	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros exatos. . . . .	97
37	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - segundo controlador dinâmico. . . . .	98
38	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - segundo controlador dinâmico. . . . .	98
39	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	99
40	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados. . . . .	100
41	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - segundo controlador dinâmico. . . . .	100
42	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - segundo controlador dinâmico. . . . .	101
43	Robô Pioneer 3-DX com sensor de varredura <i>laser</i> e sistema de visão omnidirecional. . . . .	102
44	Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante experimento sem carga. . . . .	103

45	Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento sem carga. . . . .	104
46	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante o experimento sem carga. . . . .	105
47	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento sem carga. . . . .	106
48	Evolução dos parâmetros estimados durante experimento de seguimento da trajetória em forma de oito sem carga - primeiro controlador dinâmico. . .	106
49	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante experimento com carga. . . . .	107
50	Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento com carga. . . . .	108
51	Evolução dos parâmetros estimados durante experimento de seguimento da trajetória em forma de oito com carga - primeiro controlador dinâmico. . .	108
52	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante experimento com parâmetros identificados. . . . .	109
53	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento com parâmetros identificados. . . . .	110
54	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante experimento com parâmetros incorretos. . . . .	111
55	Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento com parâmetros incorretos. . . . .	111

56	Evolução dos parâmetros estimados durante experimento de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros iniciais incorretos - segundo controlador dinâmico. . . . .	112
57	Erro de distância durante simulação com variação em degrau dos parâmetros dinâmicos. . . . .	117
58	Erros de velocidade durante simulação com variação em degrau dos parâmetros. (a) Durante todo o período de simulação; (b) Detalhe do intervalo em que a variação de parâmetros ocorre. . . . .	118
59	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação com variação em degrau dos parâmetros dinâmicos. . . . .	118
60	Erro de distância durante simulação com variação senoidal dos parâmetros dinâmicos. . . . .	119
61	Erros de velocidade durante simulação com variação senoidal dos parâmetros. (a) Durante todo o período de simulação; (b) Detalhe do intervalo em que a variação de parâmetros é iniciada. . . . .	119
62	Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração com variação senoidal dos parâmetros dinâmicos. . . . .	120
63	<i>IAE</i> para simulações de 250s para os casos (a-d) (ver texto). . . . .	121
64	<i>IAE</i> para experimentos de 75s para os casos (a) e (c) (ver texto). . . . .	122
65	Variáveis de formação e controle. . . . .	135
66	Medidas do sensor de varredura <i>laser</i> utilizado no robô seguidor. . . . .	136
67	(a) Representação dos robôs líder (com o semicilindro no topo) e seguidor num ambiente de simulação. (b) Variáveis de formação e medidas do sensor <i>laser</i> . Fonte: (BRANDÃO, 2008). . . . .	137
68	Perfil das medidas do sensor <i>laser</i> no ambiente e a diferença entre medidas de distância consecutivas. Fonte: (BRANDÃO, 2008). . . . .	138
69	Estrutura de controle de formação líder-seguidor com compensação da dinâmica (robô seguidor). . . . .	139
70	Caminho percorrido pelos robôs líder e seguidor. . . . .	140
71	Evolução das variáveis de formação sem compensação da dinâmica. . . . .	141

72	Formação líder-seguidor - com compensação da dinâmica e adaptação de parâmetros. (a) Variáveis de formação; (b) Parâmetros estimados do robô seguidor. . . . .	141
73	Robôs móveis utilizados nos experimentos de controle de formação líder-seguidor. Fonte: (BRANDÃO, 2008). . . . .	142
74	Experimento de controle de formação líder-seguidor: caminho percorrido pelo robô seguidor e mapa do ambiente obtido através das medições do sensor de varredura <i>laser</i> . . . . .	144
75	Experimento de controle de formação líder-seguidor: evolução das variáveis de formação sem compensação da dinâmica. . . . .	144
76	Experimento de controle de formação líder-seguidor com compensação da dinâmica e adaptação de parâmetros: (a) Variáveis de formação; (b) Parâmetros estimados do robô seguidor. . . . .	145
77	Duas formas de se definir as variáveis de formação (De La CRUZ, 2006). . . . .	146
78	Definição das variáveis de formação (De La CRUZ, 2006). . . . .	150
79	Arquiteturas de controle centralizado de formação: (a) compensação da dinâmica dos robôs realizada pelo agente de controle centralizado; e (b) compensação da dinâmica realizada por cada robô membro da formação. . . . .	152
80	Controle centralizado de formação: (a) trajetória percorrida pelos robôs; e (b) evolução dos erros de formação durante a primeira simulação. . . . .	153
81	Controle centralizado de formação: evolução dos parâmetros dinâmicos dos robôs (a) 1 e (b) 2 durante a primeira simulação. . . . .	154
82	Controle centralizado de formação: (a) trajetória percorrida pelos robôs; e (b) evolução dos erros de formação durante a segunda simulação. . . . .	155
83	Controle centralizado de formação: evolução dos parâmetros dinâmicos dos robôs (a) 1 e (b) 2 durante a segunda simulação. . . . .	155
84	Arquitetura do Esquema Multicamadas proposto. . . . .	157
85	Variáveis de formação. . . . .	159
86	Resultados de Simulação. . . . .	165

87	Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento sem carga, sem compensação da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando. . . . .	168
88	Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento sem carga, sem compensação da dinâmica. . . . .	169
89	Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento sem carga, sem compensação da dinâmica. . . . .	169
90	Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento sem carga, com compensação adaptativa da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando. . . . .	170
91	Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento sem carga, com compensação adaptativa da dinâmica. . . . .	171
92	Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento sem carga, com compensação da dinâmica. . . . .	171
93	Esquema Multicamadas - evolução dos parâmetros dinâmicos estimados durante experimento sem carga, com compensação adaptativa da dinâmica. (a) Robô 1, (b) Robô 2, e (c) Robô 3. . . . .	173
94	Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento com carga, sem compensação da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando. . . . .	174
95	Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento com carga, sem compensação da dinâmica. . . . .	174
96	Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento com carga, sem compensação da dinâmica. . . . .	175
97	Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento com carga, com compensação adaptativa da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando. . . . .	175
98	Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento com carga, com compensação adaptativa da dinâmica. . . . .	176
99	Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento com carga, com compensação da dinâmica. . . . .	176

100	Esquema Multicamadas - evolução dos parâmetros dinâmicos estimados durante experimento com carga, com compensação adaptativa da dinâmica. (a) Robô 1, (b) Robô 2, e (c) Robô 3. . . . .	177
101	Simulação do controle de quatro robôs com escalonamento proposto. As figuras apresentam o deslocamento dos robôs e a formação desejada fixa em três momentos. . . . .	181



# *Lista de Tabelas*

1	IAE para simulações do controle descentralizado tipo líder-seguidor . . . .	141
2	IAE para experimentos do controle descentralizado tipo líder-seguidor . . .	144
3	IAE para simulações do controle centralizado tipo estruturas virtuais . . .	166
4	IAE para experimentos do controle centralizado tipo estruturas virtuais . .	178



# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>27</b>
1.1	Definição do Problema . . . . .	29
1.2	Contribuições . . . . .	33
1.3	Estrutura da Tese . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Modelo Dinâmico do Robô Móvel</b>	<b>37</b>
2.1	Introdução . . . . .	37
2.2	Modelo do Robô Uniciclo . . . . .	38
2.3	Proposta de Representação do Modelo Dinâmico . . . . .	41
2.4	Propriedades do Modelo Dinâmico Proposto . . . . .	44
2.5	Identificação dos Parâmetros Dinâmicos . . . . .	46
2.6	Independência Linear dos Parâmetros . . . . .	51
2.7	Considerações Finais do Capítulo . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Compensação Adaptativa da Dinâmica</b>	<b>53</b>
3.1	Introdução e Trabalhos Relacionados . . . . .	53
3.2	Controlador Cinemático de Seguimento de Trajetória . . . . .	56
3.3	Controladores Dinâmicos . . . . .	65
3.3.1	Primeiro Controlador Dinâmico . . . . .	65
3.3.1.1	Adaptação de Parâmetros . . . . .	68
3.3.1.2	Resultados de Simulação . . . . .	74
3.3.2	Segundo Controlador Dinâmico . . . . .	84
3.3.2.1	Adaptação de Parâmetros . . . . .	87
3.3.2.2	Resultados de Simulação . . . . .	91
3.4	Resultados Experimentais . . . . .	102

3.4.1	Controlador Cinemático . . . . .	103
3.4.2	Primeiro Controlador Dinâmico . . . . .	104
3.4.3	Segundo Controlador Dinâmico . . . . .	109
3.5	Considerações sobre a Robustez . . . . .	112
3.6	Comparação de Desempenho . . . . .	119
3.7	Considerações Finais do Capítulo . . . . .	122
<b>4</b>	<b>Controle de Sistemas Multirrobo com Compensação da Dinâmica</b>	<b>125</b>
4.1	Introdução . . . . .	125
4.2	Trabalhos Relacionados . . . . .	128
4.3	Controle Descentralizado de uma Formação Líder-Seguidor . . . . .	133
4.3.1	Estratégia de Controle . . . . .	133
4.3.2	Compensação da Dinâmica do Robô Seguidor . . . . .	138
4.3.3	Resultados de Simulação . . . . .	139
4.3.4	Resultados Experimentais . . . . .	142
4.4	Primeiro Esquema de Controle Centralizado de Formação . . . . .	145
4.4.1	Modelo Cinemático de um Sistema Multirrobo . . . . .	146
4.4.2	Transformação de coordenadas . . . . .	147
4.4.3	Lei de Controle . . . . .	148
4.4.4	Compensação da Dinâmica dos Robôs da Formação . . . . .	151
4.4.5	Resultados de Simulação . . . . .	153
4.5	Segundo Esquema de Controle Centralizado de Formação . . . . .	156
4.5.1	Esquema Multicamadas . . . . .	156
4.5.2	Cinemática Direta e Inversa de Formação . . . . .	159
4.5.3	Lei de Controle . . . . .	161
4.5.4	Compensação da Dinâmica dos Robôs da Formação . . . . .	162
4.5.5	Resultados de Simulação . . . . .	163

4.5.6	Resultados Experimentais . . . . .	166
4.5.7	Sobre o Escalonamento da Formação . . . . .	178
4.6	Considerações Finais do Capítulo . . . . .	181
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>183</b>
	<b>Referências</b>	<b>187</b>



# 1

## *Introdução*

---

*“I am C-3PO, Human-Cyborg relations. And this is my counterpart, R2-D2.”*

*(C-3PO, em Star Wars Episode IV: A New Hope)*

Robôs são dispositivos capazes de realizar as mais diversas atividades com algum grau de autonomia. Atualmente, existem robôs realizando tarefas em indústrias, em residências e até no espaço (BEKEY; YUH, 2008), muitos deles substituindo o trabalho humano em atividades perigosas, como exploração espacial ou submarina, reparação de satélites, desarmamento de dispositivos explosivos, trabalho em ambientes radioativos, entre outros (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006). Robôs também são utilizados para realização de tarefas repetitivas e que exigem grande precisão, de realização muito difícil ou impossível por seres humanos.

Uma definição oficial para o termo robô é dada pelo *Robot Institute of America* (RIA) (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006): “Um robô é um manipulador reprogramável, multifuncional, projetado para movimentar material, ferramentas ou dispositivos especializados através de movimentos programáveis variados para desenvolver uma variedade de tarefas”. O elemento chave da definição anterior é a reprogramação, que dá ao robô sua característica de adaptabilidade. Tal definição é aplicada a robôs manipuladores, que possuem estrutura mecânica formada por uma série de hastes conectadas por meio de juntas. A realização de uma tarefa requer a movimentação de suas juntas, para que sua extremidade se movimente ao longo de uma trajetória definida, de modo que sua ferramenta possa alcançar os pontos necessários, com a orientação desejada, para realização da tarefa especificada. Usualmente os robôs manipuladores executam tarefas de movimentação de objetos na indústria de manufatura, pintura e soldagem na indústria automobilística, entre outras (BEKEY; YUH, 2008). Atualmente, o mercado de robôs industriais está estimado em cerca de US\$4 bilhões, com uma taxa anual de crescimento

em torno de 4% (BEKEY; YUH, 2008). Um exemplo de robô manipulador é mostrado na Figura 1(a).

Uma classe de robôs que tem aumentado de importância, devido ao número de aplicações, é a de robôs de serviços. Essa classe inclui robôs que realizam serviços de utilidade aos seres humanos ou equipamentos, excluindo-se operações de manufatura. Nela estão os robôs que auxiliam em tarefas como busca e resgate, assistência doméstica (como aspiradores de pó e cortadores de grama), entretenimento (futebol de robôs, robôs que se comportam como animais de estimação) e assistência a pessoas com deficiência (como cadeiras de rodas robóticas e dispositivos de auxílio ao caminhar) (ROMANO, 2002). Levando-se em consideração aplicações profissionais e domésticas, robôs de serviço já formam um mercado de mais de US\$3,5 bilhões (BEKEY; YUH, 2008). A importância do mercado de robôs de serviços é evidenciada quando se verifica que existem cerca de 5,5 milhões de unidades desse tipo de robô em funcionamento no mundo, enquanto a quantidade de robôs industriais é de cerca de 1 milhão (NOGUEIRA, Acesso em: 28/fev/2009).

Muitos robôs de serviço são robôs móveis. Um robô móvel pode se deslocar no solo (através de rodas, esteiras, patas, etc.), no ar (como um helicóptero, avião ou balão), na água (como um navio ou submarino) ou no espaço, e é definido como um veículo capaz de movimentação autônoma, equipado com atuadores controlados por um computador embarcado (CANUDAS de WIT; SICILIANO; BASTIN, 1997). Um robô móvel pode ter a bordo um robô manipulador, como é o caso do robô móvel a rodas desenvolvido na Universidade de Massachusetts Amherst, ilustrado na Figura 1(b).

Um exemplo de robô de serviço é o Robô Ambiental Híbrido, mostrado na Figura 2, que foi desenvolvido pelo CENPES/Petrobras. Tal robô deverá operar ao longo de linhas de gás natural ao longo do Rio Solimões, na região Amazônica, com objetivo de auxiliar na coleta de amostras e dados sobre o ecossistema, de forma a minimizar a necessidade de envio de pessoas a regiões em que existe constante presença de animais selvagens e insetos transmissores de doenças perigosas, além de permitir acesso a lugares inacessíveis ao homem. O robô é capaz de se locomover na água e na terra, possui um manipulador a bordo, para coleta de amostras, e permite o embarque de diversos equipamentos e sensores. O sistema de navegação proposto utiliza fusão de dados obtidos através de um receptor GPS e de sensores inerciais (STEIN et al., 2007).

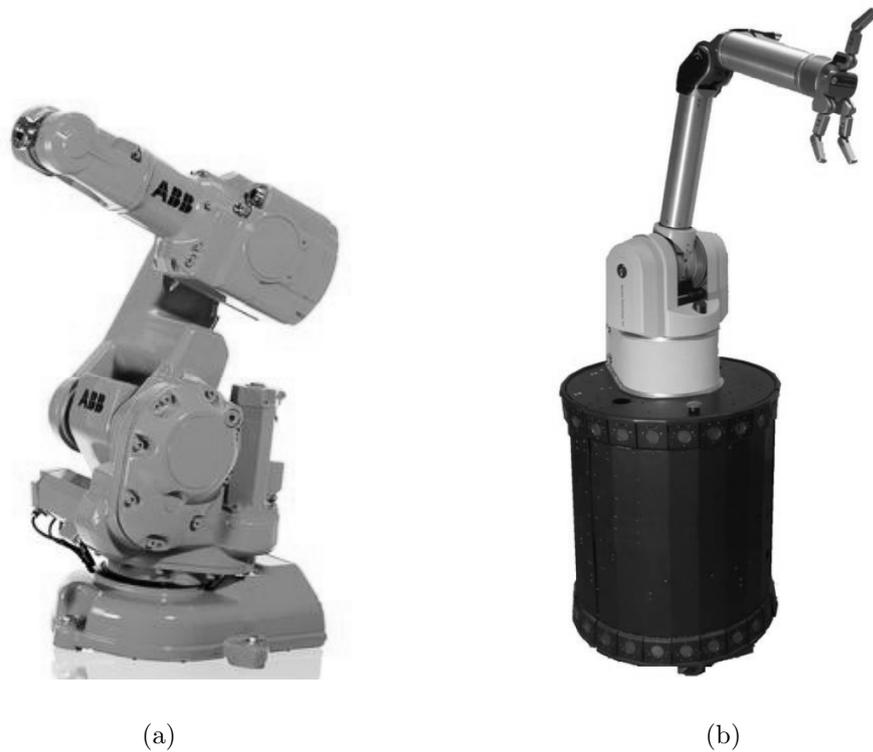


Figura 1: (a) Robô manipulador industrial ABB (ABB Västerås Sweden, Acesso em: 2/jan/2009); (b) Robô móvel a rodas dotado de um robô manipulador a bordo (KATZ et al., 2006).

## 1.1 Definição do Problema

O problema que esta tese pretende resolver trata de robôs móveis a rodas. Dentre as distintas estruturas de robôs móveis, a de tipo uniciclo é frequentemente<sup>1</sup> utilizada em várias tarefas, devido à sua boa mobilidade e configuração simples. Como exemplo, esta estrutura tem sido utilizada em aplicações de vigilância (PATEL; SANYAL; SOBH, 2006), limpeza de pisos (PRASSLER et al., 2000), manutenção e construção de autopistas (FENG; VELINSKY, 1997), cadeiras de rodas robóticas (RAO et al., 2002; FERREIRA et al., 2007; FERREIRA, 2008), navegação em plantações (vinhedos e outras frutas) para diagnóstico das plantas (PENIZZOTTO; PATIÑO; CARELLI, 2008) e transporte de cargas em ambientes industriais (STOUTEN; GRAAF, 2004).

Um robô uniciclo possui duas rodas de tração independentes, fixas e dispostas sobre

---

<sup>1</sup>O texto desta tese foi escrito segundo as normas do Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa, assinado em Lisboa, em 16 de dezembro de 1990, por Portugal, Brasil, Angola, São Tomé e Príncipe, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique e, posteriormente, por Timor Leste. No Brasil, o acordo foi aprovado pelo Decreto Legislativo 54, de 18 de abril de 1995, e suas normas passaram a vigorar em 01/01/2009 (TUFANO, 2008).



Figura 2: Robô Ambiental Híbrido desenvolvido pela Petrobras (STEIN et al., 2007).

um mesmo eixo. Também dispõe de uma roda independente, que gira livremente e serve para equilibrar a estrutura. Assumindo que sua estrutura é rígida e que suas rodas não se deformam e não deslizam, a postura de um robô uniciclo é dada por (CANUDAS de WIT; SICILIANO; BASTIN, 1997)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \psi; \\ \dot{y} &= u \sin \psi; \\ \dot{\psi} &= \omega,\end{aligned}$$

onde  $x$  e  $y$  representam a posição do ponto de interesse  $h$  (nesse caso, localizado no ponto central do eixo virtual que une as rodas de tração),  $\psi$  representa a orientação do robô (ou seja, a direção de  $u$  em relação ao eixo X), e  $u$  e  $\omega$  são suas velocidades linear e angular, respectivamente. A Figura 3(a) ilustra a postura do robô uniciclo para este caso. Tal robô é uma plataforma não-holonômica, pois a quantidade de graus de liberdade é menor do que o número de coordenadas generalizadas e a velocidade linear do ponto de interesse ao longo do eixo que une as rodas de tração é nula.

Para o caso em que o ponto de interesse  $h$  é definido a uma distância  $a$  do eixo que une as rodas de tração, tem-se o modelo cinemático não-holonômico de acessibilidade melhorada, ilustrado na Figura 3(b). Nesse caso, a postura do robô é definida por (ZHANG

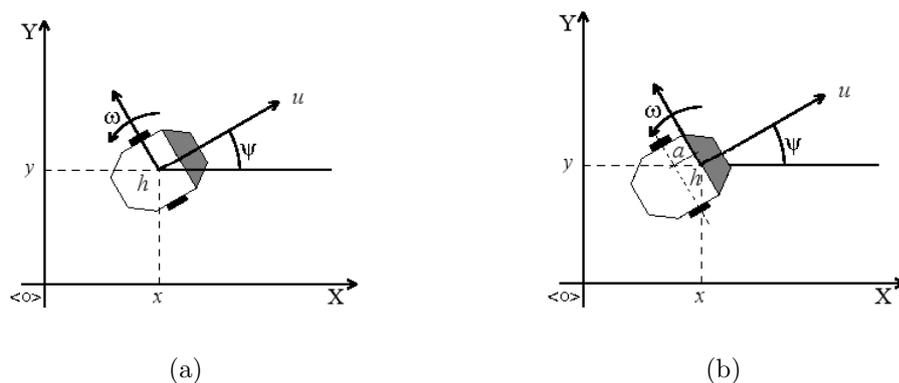


Figura 3: Postura de um robô uniclo cujo ponto de interesse está (a) no ponto central do eixo que une as rodas de tração; e (b) a uma distância  $a$  desse eixo.

et al., 1998)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \psi - a\omega \sin \psi; \\ \dot{y} &= u \sin \psi + a\omega \cos \psi; \\ \dot{\psi} &= \omega.\end{aligned}$$

No modelo não-holonômico de acessibilidade melhorada, o ponto de interesse  $h$  possui menos restrições de movimento no plano, tendo maior alcance. Em qualquer dos casos, a postura do robô, dada pelo vetor  $[x, y, \psi]^T$ , pode assumir qualquer valor, não havendo restrições para o posicionamento do ponto  $h$  no plano. Neste trabalho será adotado o modelo não-holonômico de acessibilidade melhorada, ilustrado na Figura 3(b).

A teoria de controle não-linear tem sido aplicada no estudo do robô móvel uniclo há anos (KANAYAMA et al., 1990; CANUDAS de WIT C.; SORDALEN, 1992). Vários estudos têm tratado do projeto de controladores de seguimento de trajetória, e do problema de geração de trajetórias para estes robôs (FRAGA; SOUSA; PEREIRA, 2003). Alguns controladores foram projetados com base em seu modelo cinemático, como aqueles apresentados em (CARELLI; SECCHI; MUT, 1999) e (WU et al., 1999). No entanto, para execução de tarefas que requerem deslocamento em altas velocidades ou transporte de cargas, é fundamental considerar a dinâmica dos veículos. Por isso, alguns estudos apresentam o projeto de controladores que compensam a dinâmica dos robôs. Por exemplo, Fierro e Lewis (1995) apresentaram uma lei de controle para robôs móveis não-holonômicos que leva em consideração a dinâmica do veículo, e gera sinais de torque como comandos para o robô móvel controlado. Em (KIM; SHIN; LEE, 2000) foi proposto um controlador adaptativo para robôs móveis, dividido em duas partes: a primeira é ba-

seada na cinemática do veículo, e gera sinais de referência para a segunda, que compensa sua dinâmica e gera sinais de torque para comandar o robô. Já em (DAS; KAR, 2006) foi proposto um controlador adaptativo em que a incerteza do sistema era estimada por um sistema baseado em lógica *fuzzy*. O modelo dinâmico usado em tal trabalho inclui a dinâmica dos atuadores, e os sinais de controle gerados são tensões para os motores do robô.

A maior parte dos controladores que realizam a compensação da dinâmica de robôs móveis presentes na literatura geram sinais de torque, como nos trabalhos mencionados anteriormente. No entanto, robôs móveis comerciais usualmente recebem sinais de velocidade como comandos, não torques, como é o caso dos robôs Pioneer da empresa Mobile Robots (Mobile Robots, Acesso em: 30/jun/2008), e dos robôs Khepera da K-Team Corporation (K-Team Corporation, Acesso em: 3/jan/2009). Por isso, um dos problemas que esta tese aborda é o desenvolvimento de controladores que realizem a compensação da dinâmica de robôs móveis, de forma adaptativa, gerando velocidades como sinais de comando para os robôs.

Por outro lado, algumas tarefas são de difícil execução por apenas um robô, ou são executadas de maneira mais eficiente por um grupo de robôs trabalhando de forma coordenada. A utilização de diversos robôs mais simples pode levar à execução de tarefas de forma mais barata, tolerante a falhas e flexível, quando comparada ao uso de um único robô de maior capacidade (CAO; FUKUNAGA; KAHNG, 1997). Alguns exemplos de tais tarefas são busca e resgate de pessoas, vigilância de uma grande área ou busca e seguimento de um perímetro (FEDDEMA; LEWIS; SCHOENWALD, 2002; CLARK; FIERRO, 2005). O posicionamento de sensores e atuadores também pode ser realizado de forma coordenada por um grupo de robôs, de forma que medições de grandezas possam ser efetuadas em grandes áreas de maneira eficiente (BICCHI et al., 2008). Outros exemplos de tarefas que podem ser executadas de forma mais eficiente por um grupo de robôs são deslocamento ou transporte de cargas, mapeamento de grandes áreas, busca e desarmamento de minas terrestres, exploração espacial e algumas tarefas de entretenimento, como futebol de robôs (STILWELL; BISHOP, 2000; AIRES; ALSINA; MEDEIROS, 2001; FEDDEMA; LEWIS; SCHOENWALD, 2002; LAWTON; BEARD; YOUNG, 2003; BRAGANÇA, 2004; SISTO; GU, 2006; WANG; WU; XU, 2006; LIANG; LEE, 2006; De La CRUZ; CARELLI, 2006).

Fierro e Das (2002) argumentam que incertezas na dinâmica do veículo causam degradação no sistema em malha fechada, provocando erros durante o seguimento de uma trajetória, por exemplo. Mencionam, inclusive, que o erro que é tolerado para um único

veículo considerado individualmente pode não ser aceitável quando os robôs necessitam navegar mantendo uma formação. Por exemplo, numa tarefa em que vários robôs devem sustentar uma mesma carga e transladá-la, a manutenção da estrutura de formação é de extrema importância para que o deslocamento da carga ao longo da trajetória desejada seja realizado com sucesso.

Nesse contexto, outro problema abordado por esta tese é o controle coordenado de um grupo de robôs móveis tipo uniciclo, de maneira que eles alcancem e se mantenham numa formação desejada, compensando sua própria dinâmica de forma adaptativa. O grupo de robôs deve percorrer uma trajetória definida por um agente de controle de mais alto nível, ou executar a tarefa de seguimento de líder.

O estado da arte em relação aos temas tratados nesta tese é discutido com mais detalhes nos capítulos seguintes, cada um dos quais trata de um aspecto importante do problema abordado ao longo do trabalho.

## 1.2 Contribuições

No intuito de se resolver os problemas definidos na seção 1.1, diversos trabalhos foram realizados, e resultaram nas contribuições mencionadas a seguir.

A primeira contribuição está relacionada à representação do modelo dinâmico de um robô móvel tipo uniciclo. O modelo dinâmico apresentado por De La CRUZ (2006), que recebe sinais de velocidade linear e angular como entradas, foi reescrito, e suas propriedades foram estudadas. A proposta daí resultante é que a representação do modelo dinâmico do robô móvel seja feita de maneira similar à representação da dinâmica dos robôs manipuladores. A equação resultante teve algumas propriedades estudadas e provadas e estas podem ser utilizadas no projeto e análise de estabilidade de sistemas de controle desenvolvidos com base no modelo proposto.

Outras contribuições estão relacionadas ao desenvolvimento de controladores para robôs móveis. Foram desenvolvidos controladores dinâmicos adaptativos para seguimento de trajetória, sendo um deles baseado no modelo proposto por De La CRUZ (2006) e outro baseado no modelo proposto nesta tese. Foi mostrado que ambos possuem resultados similares, o que valida o modelo aqui proposto. O comportamento dos controladores propostos foi estudado através de simulações e experimentos realizados em robôs comerciais, cujos resultados mostram que os controladores propostos são capazes de fazer o robô seguir uma trajetória determinada, enquanto realizam a compensação adaptativa de sua

dinâmica. Além disso, a estabilidade dos sistemas resultantes foi estudada com base na teoria de Lyapunov<sup>2</sup>, e provou-se que os erros de controle tendem a zero ou a uma região limitada em torno da origem. A robustez do sistema também foi estudada, e mostrou-se que este é capaz de tolerar distúrbios limitados e variações limitadas nos parâmetros dinâmicos dos robôs, mantendo limitados os erros de controle.

Foi mostrado, através de simulações e experimentos, que os controladores adaptativos propostos podem ser aplicados a sistemas multirrobo, tanto em conexão com um sistema de controle centralizado como em conexão com um sistema de controle descentralizado, para realizar a compensação da dinâmica dos veículos membros do grupo. Foi apresentado o Esquema de Controle Multicamadas, que permite que cada parte do problema de controle de formação seja resolvido por um módulo independente, aumentando a flexibilidade do sistema como um todo. Também foi proposto um controlador que posiciona os robôs numa formação que pode ser fixa ou variável, tanto em posição como em forma, sendo possível enfatizar a importância do controle de posicionamento ou de forma da formação. A influência da compensação dinâmica neste controle de formação foi analisada e ilustrada através de resultados de simulação e experimentais.

Artigos sobre partes do trabalho desenvolvido nesta tese foram apresentados e publicados em congressos nacionais e internacionais (MARTINS et al., 2007a, 2007b, 2007c, 2008, 2008a, 2008b, 2008c, 2008d, 2008e, 2009; BRANDÃO et al., 2009a; RAMPINELLI et al., 2009b). Alguns artigos foram enviados para possível apresentação em congressos e estavam sob avaliação no momento do fechamento da versão final desta tese (BRANDÃO et al., 2009b; MARTINS et al., 2009; RAMPINELLI et al., 2009a). Parte deste trabalho também resultou em publicação em revista internacional (MARTINS et al., 2008).

### 1.3 Estrutura da Tese

Esta tese está estruturada como segue: o primeiro capítulo traz uma introdução ao tema pesquisado, citando as contribuições alcançadas. Também são mencionados alguns trabalhos relacionados aos temas principais.

O Capítulo 2, por sua vez, aborda o modelo dinâmico do robô uniciclo e apresenta

---

<sup>2</sup>Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov (6/06/1857 - 03/11/1918), matemático russo nascido em Yaroslavl, foi aluno de Tchebyshev na Universidade de São Petersburgo e deixou uma coleção de estudos de grande importância sobre equilíbrio de líquidos rotativos, probabilidade e estabilidade de sistemas dinâmicos. Desenvolveu seu próprio conceito de estabilidade, que é adotado até o presente em diversos trabalhos na área de controle automático. (University of St Andrews, School of Mathematics and Statistics, Acesso em: 18/nov/2008).

uma proposta para sua representação matemática. São apresentadas e provadas algumas propriedades do modelo proposto, que podem ser úteis no projeto de controladores e na análise de estabilidade dos sistemas projetados com base em tal modelo.

Já no Capítulo 3 são apresentados um controlador cinemático e dois controladores dinâmicos adaptativos, sendo um deles baseado no modelo proposto no Capítulo 2. Algumas das propriedades do modelo proposto são utilizadas no projeto do segundo controlador dinâmico. São realizadas análises de estabilidade dos sistemas em malha fechada, considerando a utilização de cada controlador proposto. A robustez do sistema em relação a distúrbios e variação de parâmetros dinâmicos também é avaliada. Também são apresentados resultados de simulação e resultados experimentais que ilustram o funcionamento do sistema em cada caso.

O Capítulo 4 trata dos sistemas multirrobo, enfatizando o controle de formação com compensação da dinâmica. Os controladores dinâmicos adaptativos desenvolvidos no Capítulo 3 são utilizados para compensação da dinâmica dos robôs da formação, e tal situação é ilustrada em três cenários: um de controle descentralizado tipo líder-seguidor, e dois de controle centralizado tipo estruturas virtuais. Uma das estratégias de controle centralizado é aqui proposta, sendo apresentados o desenvolvimento do Esquema de Controle Multi-Camadas, que permite que cada parte do problema de controle de formação seja resolvido por um módulo independente. É proposto um controlador de formação que posiciona os robôs numa formação que pode ser fixa ou variável, tanto em posição como em forma, sendo possível enfatizar a importância do controle de posicionamento ou de forma. A influência da compensação dinâmica neste controle de formação é analisada e ilustrada através de resultados de simulação e de experimentos.

O estado da arte relacionado com cada um dos temas abordados nos Capítulos 3 e 4 é discutido no capítulo correspondente.

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões e considerações finais.



## 2

# Modelo Dinâmico do Robô Móvel

---

*“I am an obsolete design.”*

*(Exterminador T800 comparando-se ao T-X, em Terminator 3: Rise of the Machines)*

## 2.1 Introdução

A equação clássica para representação da dinâmica de robôs móveis pode ser obtida a partir da formulação Lagrangeana, que resulta na representação do modelo dinâmico como (FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_m(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_m(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  é o vetor das coordenadas generalizadas do sistema com  $n$  graus de liberdade,  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de inércia,  $\mathbf{V}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de forças centrífugas e de Coriolis,  $\mathbf{F}_m(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor que representa o atrito viscoso,  $\mathbf{G}_m(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor de torques gravitacionais,  $\boldsymbol{\tau}_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor que representa as perturbações,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  é o vetor de torques de entrada, sendo  $r$  o número de entradas,  $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$  é a matriz de transformação destas entradas,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  é o vetor que representa as forças de restrição e  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz associada às restrições. Duas das propriedades conhecidas deste modelo são (FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000; DAS; KAR, 2006):

1. A matriz de inércia  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  é simétrica e definida positiva, ou seja  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})^T > 0$ ;
2. A matriz  $(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{V}_m)$  é antissimétrica.

Tais propriedades são comumente utilizadas no desenvolvimento e análise de estabilidade de controladores para robôs móveis, como apresentado em (FIERRO; LEWIS, 1995, 1997; FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000; KIM; SHIN; LEE, 2000; DAS; KAR, 2006).

O presente capítulo apresenta uma nova maneira de modelar a dinâmica de robôs móveis tipo unicycle. O novo modelo resulta de uma modificação feita no modelo desenvolvido por De La CRUZ (2006) e apresentado também em (De La CRUZ; CARELLI, 2006), cujos sinais de entrada são as referências de velocidades linear e angular do robô, e não torques, como no modelo clássico apresentado anteriormente. Diversas propriedades do modelo proposto são estudadas e discutidas, e algumas delas são usadas no projeto de controladores que compensam os efeitos da dinâmica (mostrados no próximo capítulo).

Para tratar desses tópicos, o presente capítulo está assim organizado: na Seção 2.2 é apresentado o modelo dinâmico do robô unicycle desenvolvido em (De La CRUZ; CARELLI, 2006), e a nova proposta de representação do modelo é mostrada na Seção 2.3. Em seguida, na Seção 2.4, propriedades importantes do modelo são apresentadas e discutidas, como sua característica de passividade e a antissimetria de uma de suas matrizes. As Seções 2.5 e 2.6 tratam da identificação dos parâmetros dinâmicos do modelo e de sua característica de independência linear, respectivamente. Considerações finais sobre o modelo proposto são abordadas na Seção 2.7.

## 2.2 Modelo do Robô Unicycle

A Figura 4 mostra a representação do robô móvel tipo unicycle, seus parâmetros e variáveis de interesse. Na figura,  $u$  e  $\omega$  são, respectivamente, as velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô,  $G$  é seu centro de massa,  $C$  é a posição de sua roda castor,  $E$  é a posição de uma ferramenta a bordo do robô (que aqui não é considerada),  $h$  é o ponto de interesse (de coordenadas  $x$  e  $y$  no plano XY),  $\psi$  é a orientação do robô, e  $a$  é a distância entre o ponto de interesse e o ponto central do eixo virtual que conecta as rodas de tração (ponto  $B$ ).

Os modelos dinâmicos desenvolvidos por De La CRUZ (2006) foram baseados no modelo proposto por Zhang et al. (1998), que apresentam como sinais de entrada os valores de torque a serem aplicados às rodas esquerda e direita. No entanto, robôs comerciais geralmente aceitam comandos de velocidades linear e angular, e não de torque para seus motores. Neste contexto, em (De La CRUZ, 2006) foram propostos dois modelos para

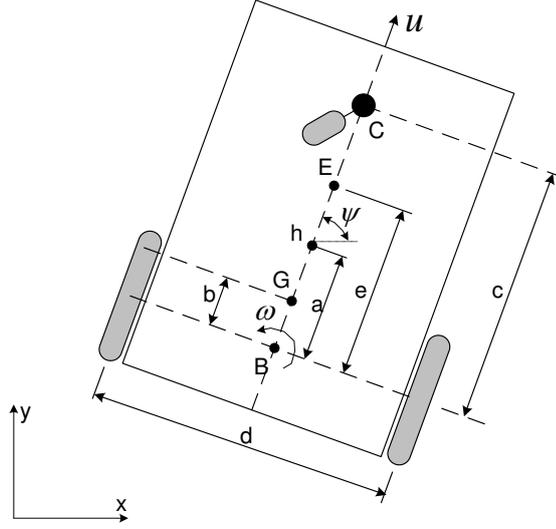


Figura 4: Modelo do Robô Uniciclo.

robôs móveis tipo uniciclo que levam em conta sua cinemática e sua dinâmica. Num deles os sinais de entrada são as tensões aplicadas aos motores das rodas esquerda e direita (considerando um robô com tração diferencial), e no outro são as referências de velocidade linear e angular do robô.

O modelo completo cujos sinais de entrada são as tensões nos motores pode ser escrito como (De La CRUZ, 2006)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a\omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a\omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\theta_3^0}{\theta_1^0} r^2 \omega^2 - 2 \frac{\theta_4^0}{\theta_1^0} u \\ -2 \frac{\theta_3^0}{\theta_2^0} r^2 u \omega - \frac{\theta_4^0}{\theta_2^0} d^2 \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2r}{\theta_1^0} & 0 \\ 0 & \frac{2rd}{\theta_2^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_u \\ \nu_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \overline{\delta_u} \\ \overline{\delta_\omega} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ \overline{\delta_u} \ \overline{\delta_\omega}]^T$  é o vetor de incertezas associado ao robô móvel, em que  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são funções das velocidades de deslizamento e da orientação do robô,  $\overline{\delta_u}$  e  $\overline{\delta_\omega}$  são funções de parâmetros físicos como massa, inércia, diâmetros das rodas e pneus, parâmetros dos motores e servos, forças nas rodas, entre outros,

$$\nu_u = \frac{\nu_l + \nu_r}{2} \quad e \quad \nu_\omega = \frac{\nu_r - \nu_l}{2},$$

sendo  $\nu_l$  e  $\nu_r$  os valores das tensões aplicadas aos motores das rodas esquerda e direita, respectivamente. Os parâmetros do modelo são dados por

$$\theta_1^0 = \frac{R_a}{k_a} (mr^2 + 2I_e),$$

$$\begin{aligned}\theta_2^0 &= \frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2r^2 (I_z + mb^2)), \\ \theta_3^0 &= \frac{R_a}{k_a} mb, \\ \theta_4^0 &= \frac{R_a}{k_a} \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right),\end{aligned}$$

onde  $R_a$  é a resistência elétrica dos motores,  $k_b$  é sua constante eletromotriz,  $k_a$  é sua constante de torque,  $B_e$  é o coeficiente de atrito,  $m$  é a massa do robô,  $I_z$  é seu momento de inércia no ponto  $G$ ,  $I_e$  é o momento de inércia de cada grupo rotor-redução-roda,  $r$  é o raio de suas rodas e  $b$  e  $d$  são as distâncias mostradas na Figura 4.

A equação anterior é útil nos casos em que se pode controlar diretamente as tensões aplicadas em cada motor do robô. No entanto, robôs comerciais geralmente possuem controladores internos que recebem referências de velocidades para cada motor, e não permitem que suas tensões sejam controladas diretamente. Neste contexto, em (De La CRUZ, 2006) foi considerado que os controladores internos são do tipo PD (Proporcional-Derivativo), com ganhos proporcionais  $k_{PT} > 0$  e  $k_{PR} > 0$ , e derivativos  $k_{DT} \geq 0$  e  $k_{DR} \geq 0$ . Vale ressaltar que o tipo de controlador PD considerado é aquele em que apenas o sinal medido é derivado (WADE, 2004; ROMAGNOLI; PALAZOGLU, 2006). Assim, obteve-se a relação

$$\begin{bmatrix} \nu_u \\ \nu_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{PT}(u_{ref} - u) - k_{DT}\dot{u} \\ k_{PR}(\omega_{ref} - \omega) - k_{DR}\dot{\omega} \end{bmatrix},$$

onde

$$u = \frac{1}{2} [r(\omega_r + \omega_l)], \quad \omega = \frac{1}{d} [r(\omega_r - \omega_l)],$$

sendo  $\omega_l$  e  $\omega_r$  as velocidades angulares das rodas esquerda e direita, respectivamente. A partir dessas equações, o modelo foi reescrito como (De La CRUZ; CARELLI, 2006)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a\omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a\omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\theta_3}{\theta_1} \omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1} u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2} u\omega - \frac{\theta_6}{\theta_2} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

onde  $u_{ref}$  e  $\omega_{ref}$  são os sinais de referência de velocidades linear e angular, respectivamente,  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$  é o vetor de parâmetros (identificados) do modelo e  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ \delta_u \ \delta_\omega]^T$  é o vetor de incertezas associado ao modelo do robô móvel. Como

no modelo anteriormente apresentado,  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são funções das velocidades de deslizamento e da orientação do robô, enquanto  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  são funções de parâmetros físicos.

Os parâmetros incluídos no vetor  $\theta$  são funções de alguns parâmetros físicos do robô. As equações que descrevem os parâmetros do modelo são

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \left[ \frac{R_a}{k_a} (mr^2 + 2I_e) + 2rk_{DT} \right] \frac{1}{(2rk_{PT})}, \\ \theta_2 &= \left[ \frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2r^2 (I_z + mb^2)) + 2rdk_{DR} \right] \frac{1}{(2rdk_{PR})}, \\ \theta_3 &= \frac{R_a}{k_a} \frac{mbr}{2k_{PT}}, \\ \theta_4 &= \frac{R_a}{k_a} \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) \frac{1}{rk_{PT}} + 1, \\ \theta_5 &= \frac{R_a}{k_a} \frac{mbr}{dk_{PR}}, \text{ e} \\ \theta_6 &= \frac{R_a}{k_a} \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) \frac{d}{2rk_{PR}} + 1.\end{aligned}$$

Deve ser observado que  $\theta_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 4, 6$ . Os parâmetros  $\theta_3$  e  $\theta_5$ , por outro lado, podem ser negativos e serão nulos se, e somente se, o centro de massa  $G$  estiver exatamente sobre o ponto central do eixo virtual que une as rodas de tração (ponto  $B$ ), i.e.  $b = 0$ . Neste trabalho considera-se que  $b \neq 0$ , de maneira que  $\theta_3$  e  $\theta_5$  são distintos de zero.

**Nota 2.1.** O modelo cujas entradas são velocidades linear e angular inclui a dinâmica dos atuadores e dos servos, o que não ocorre no modelo cujas entradas são torques.

## 2.3 Proposta de Representação do Modelo Dinâmico

O modelo do robô tipo unicycle apresentado em (2.3) pode ser dividido em uma parte cinemática e uma parte dinâmica, como mostrado a seguir. O modelo cinemático do robô é representado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

e seu modelo dinâmico é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1}\omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1}u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2}u\omega - \frac{\theta_6}{\theta_2}\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Os termos foram reagrupados com o objetivo de se determinar e estudar algumas propriedades do modelo que podem ser úteis no desenvolvimento de controladores. Assim, (2.5) foi reescrita como

$$\begin{bmatrix} -\theta_1 & 0 \\ 0 & -\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & \theta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

ou, em uma forma compacta, como

$$\mathbf{\Delta} + \mathbf{H}'\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{v}_r, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{v}_r = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$  é o vetor de referências de velocidades,  $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$  é o vetor que contém as velocidades reais do robô, e as matrizes  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{c}(\mathbf{v})$  e o vetor  $\mathbf{\Delta}$  são dados por

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \theta_4 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & \theta_6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -\theta_1 & 0 \\ 0 & -\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{c}(\mathbf{v})$  pode ser dividida em duas matrizes distintas, ou seja,  $\mathbf{c}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}'(\mathbf{v}) + \mathbf{F}'$ , onde

$$\mathbf{C}'(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix},$$

de forma que a equação (2.6) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Daí, em uma forma compacta o modelo dinâmico pode ser representado por

$$\mathbf{\Delta} + \mathbf{H}'\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}'(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{F}'\mathbf{v} = \mathbf{v}_r. \quad (2.9)$$

É importante salientar que, embora seu significado físico seja diferente, a representação da dinâmica do robô móvel dada por (2.9) possui uma estrutura matemática similar ao formato da equação que descreve a dinâmica de robôs manipuladores (2.1). Isto é, ambas são formadas por uma soma de termos que incluem um vetor de distúrbios, o produto

entre uma matriz de parâmetros do modelo e um vetor de aceleração e o produto entre uma matriz de parâmetros do modelo e um vetor de velocidade. As diferenças entre ambas as equações são que (2.9) não possui termo gravitacional  $\mathbf{G}_m(\mathbf{q})$ , não possui restrições  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ , tem matriz de transformação  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  igual à matriz identidade e, principalmente, apresenta entradas de velocidade, não de torque. Por isso, os produtos das matrizes  $\mathbf{H}'$  por  $\dot{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{C}'(\mathbf{v})$  por  $\mathbf{v}$ , e  $\mathbf{F}'$  por  $\mathbf{v}$  resultam em velocidades, e não em torques, como ocorre em (2.1). Além disso, os parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  não são todos adimensionais, sendo suas unidades dadas por

$$\theta_1 [s], \quad \theta_2 [s], \quad \theta_3 [sm/rad^2], \quad \theta_4 [1], \quad \theta_5 [s/m] \text{ e } \theta_6 [1].$$

Para estudar as propriedades de (2.9), a equação foi reescrita com a adição e subtração de um termo de valor  $I\theta_3 u$ , de forma que seu resultado não fosse alterado, obtendo-se

$$\Delta + \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 \omega \\ \theta_5 \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_6 + (I\theta_3 - I\theta_3)u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

ou, rearranjando os termos,

$$\Delta + \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 \omega \\ \theta_3 \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Iu \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_6 + (\theta_5 - I\theta_3)u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde  $I = 1 \text{ rad}^2/m^2$  é uma constante de valor unitário necessária para compatibilizar as unidades. Definindo-se as matrizes  $\mathbf{C}(\mathbf{v})$  e  $\mathbf{F}''(\mathbf{v})$  como

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 \omega \\ \theta_3 \omega & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{F}''(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_6 + (\theta_5 - I\theta_3)u \end{bmatrix},$$

o modelo dinâmico pode ser escrito, em forma compacta, como

$$\Delta + \mathbf{H}'\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v}' + \mathbf{F}''(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{v}_r, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{v}' = [Iu \quad \omega]^T$  é o vetor de velocidades modificadas. Ou seja,

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Os termos de tal vetor são numericamente iguais aos termos do vetor de velocidades  $\mathbf{v}$ , apenas suas dimensões são distintas. Reescrevendo alguns parâmetros de  $\mathbf{H}'$  e  $\mathbf{F}''(\mathbf{v})$ ,

são definidas as matrizes

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \theta_1/I & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{F}(\mathbf{v}') = \begin{bmatrix} \theta_4/I & 0 \\ 0 & \theta_6 + (\theta_5/I - \theta_3)Iu \end{bmatrix},$$

e o modelo dinâmico pode ser representado por

$$\Delta + \mathbf{H}\dot{\mathbf{v}}' + \mathbf{C}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' + \mathbf{F}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' = \mathbf{v}_r. \quad (2.13)$$

Deve-se notar que  $\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}(\mathbf{v}')$ ,  $\mathbf{H}'\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\dot{\mathbf{v}}'$  e  $\mathbf{F}''(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{v}')\mathbf{v}'$ . Portanto, as dimensões do vetor resultante  $\mathbf{v}_r$  não são alteradas.

**Nota 2.2.** Já que a representação da dinâmica do robô móvel dada por (2.9) possui estrutura matemática similar àquela da equação (2.1) que descreve a dinâmica de robôs manipuladores, técnicas de projeto de controladores aplicadas a manipuladores, como as propostas por Craig e por Slotine e Li (MARTINS, 2001), podem ser adaptadas para projeto de controladores para robôs móveis cujas saídas sejam sinais de velocidade.

## 2.4 Propriedades do Modelo Dinâmico Proposto

Uma característica importante do modelo apresentado é que suas entradas são velocidades linear e angular, não torque e força, como é comum nos modelos presentes na literatura. Desta maneira, o modelo proposto incorpora a dinâmica dos atuadores e de seus servos. De fato, robôs comerciais geralmente aceitam comandos de velocidades linear e angular, como é o caso dos robôs da linha Pioneer, da empresa Mobile Robots, e dos robôs Khepera, da K-Team Corporation. Portanto, o modelo proposto, representado pela equação (2.13), é útil para ser utilizado em conjunto com estes robôs, além de outros. Tal modelo possui algumas propriedades importantes que podem ajudar no projeto de controladores que consideram a dinâmica do robô. Estas propriedades são:

1. As matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}'$  são simétricas e definidas positivas, ou seja  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0$  e  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}'^T > 0$ ;
2. As inversas de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}'$  existem e também são definidas positivas, ou seja  $\exists \mathbf{H}^{-1} > 0$  e  $\exists \mathbf{H}'^{-1} > 0$ ;
3. A matriz  $\mathbf{F}$  é simétrica e definida positiva, ou seja  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T > 0$ , se  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$ ;

4. As matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}'$  são constantes quando não existe variação nos parâmetros dinâmicos;
5. A matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{v}')$  é antissimétrica;
6. A matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{v}')$  pode ser considerada constante se  $\theta_6 \gg |(\theta_5/I - \theta_3)Iu|$  e não existe variação nos parâmetros dinâmicos;
7. O mapeamento  $\mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}'$  é estritamente passivo de saída se  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$  e  $\Delta = \mathbf{0}$ .

As propriedades 1 a 3 podem ser provadas observando-se que  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$  e  $\mathbf{F}$  são diagonais, e que seus termos são todos positivos. A propriedade 4 é verdadeira sob a hipótese de que não existe mudança nos valores dos parâmetros, isto é, a estrutura do robô, sua massa, seu momento de inércia, etc. não se alteram. É importante mencionar que  $\mathbf{H}$  não depende da posição do robô, desde que este se desloque num plano horizontal, já que o deslocamento em um plano inclinado provocaria alteração em sua energia potencial. A validade da propriedade 5 é evidente, já que os termos da diagonal principal de  $\mathbf{C}(\mathbf{v}')$  são nulos e os outros são iguais em módulo, com sinais opostos. Também é possível observar que  $(\dot{\mathbf{H}} - \mathbf{2C})$  é antissimétrica, já que a matriz  $\mathbf{H}$  é constante e, portanto,  $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ .

A validade da propriedade 6 depende do cumprimento da condição  $\theta_6 \gg |(\theta_5/I - \theta_3)Iu|$ . Tal condição foi verificada experimentalmente para quatro robôs tipo unicycle, após identificação de seus parâmetros, resultando que, de fato,  $\theta_6 \gg |(\theta_5/I - \theta_3)Iu|$  e  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$ . O procedimento de identificação de parâmetros é explicado na seção seguinte.

Propriedades de passividade de um sistema podem ser utilizadas no projeto de controladores estáveis para tal sistema (KHALIL, 2002). A propriedade de passividade do modelo proposto é apresentada pelo seguinte teorema.

**Teorema 1.** *Considerando-se  $\Delta = \mathbf{0}$  e  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$ , e assumindo-se que  $\mathbf{v}_r \in L_{2e}$  e  $\mathbf{v}' \in L_{2e}$ , o mapeamento  $\mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}'$  do modelo dinâmico  $\mathbf{H}\dot{\mathbf{v}}' + \mathbf{C}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' + \mathbf{F}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' = \mathbf{v}_r$  é estritamente passivo de saída.*

*Prova.* De acordo com (SCHAFT, 1999), um operador  $P : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$  é estritamente passivo de saída se, e somente se, existem constantes  $\delta \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$\langle Px, x \rangle \geq \beta + \delta \|Px\|_{2,T}^2 \quad \forall x \in L_{2e},$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno.

Para mostrar que o mapeamento  $\mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}'$  é estritamente passivo de saída, considera-se a função definida positiva  $V = \frac{1}{2} \mathbf{v}'^T \mathbf{H} \mathbf{v}'$  e sua primeira derivada temporal  $\dot{V} = \mathbf{v}'^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{v}}'$ , onde aplicou-se a propriedade 4 do modelo. Usando (2.13) e levando-se em conta as propriedades 3 e 5,  $\dot{V}$  pode ser escrita como

$$\dot{V} = \mathbf{v}'^T (\mathbf{v}_r - \mathbf{C} \mathbf{v}' - \mathbf{F} \mathbf{v}') = \mathbf{v}'^T \mathbf{v}_r - \mathbf{v}'^T \mathbf{F} \mathbf{v}'. \quad (2.14)$$

Integrando-se (2.14) resulta a equação

$$\int_0^T \dot{V} dt = \int_0^T \mathbf{v}'^T \mathbf{v}_r dt - \int_0^T \mathbf{v}'^T \mathbf{F} \mathbf{v}' dt,$$

que pode ser escrita como

$$V(T) - V(0) = \int_0^T \mathbf{v}'^T \mathbf{v}_r dt - \int_0^T \mathbf{v}'^T \mathbf{F} \mathbf{v}' dt. \quad (2.15)$$

Desprezando-se o termo positivo  $V(T)$ , tem-se a desigualdade

$$-V(0) \leq \int_0^T \mathbf{v}'^T \mathbf{v}_r dt - \inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F})) \int_0^T \|\mathbf{v}'\|^2 dt,$$

ou

$$\int_0^T \mathbf{v}'^T \mathbf{v}_r dt \geq -V(0) + \inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F})) \|\mathbf{v}'\|_{2,T}^2.$$

Assumindo-se que  $\mathbf{v}_r \in L_{2e}$  e  $\mathbf{v}' \in L_{2e}$ , a equação anterior pode ser escrita como

$$\langle \mathbf{v}', \mathbf{v}_r \rangle \geq -V(0) + \inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F})) \|\mathbf{v}'\|_{2,T}^2, \quad (2.16)$$

onde  $\inf(\lambda_{\min}(\cdot))$  representa o ínfimo do menor autovalor de uma matriz. Já que  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$ , tem-se que  $\mathbf{F} > \mathbf{0}$ . Portanto, baseando-se em (2.16), pode-se concluir que o mapeamento  $\mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}'$  é estritamente passivo de saída.  $\square$

## 2.5 Identificação dos Parâmetros Dinâmicos

Seja um sistema representado por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}\boldsymbol{\theta}, \quad (2.17)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor de parâmetros e  $\mathbf{Y}$  é a saída do sistema. A estimativa de mínimos quadrados para  $\boldsymbol{\theta}$  é dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y},$$

sendo  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  o vetor com os valores estimados de  $\boldsymbol{\theta}$  (PHILLIPS; NAGLE, 1995). Para este sistema, a matriz  $\mathbf{W}$  é chamada de matriz de regressão e a equação (2.17) é chamada de modelo de regressão do sistema.

Desprezando-se as incertezas e rearranjando (2.6), o modelo dinâmico do robô móvel pode ser representado por

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T, \quad (2.18)$$

onde pode-se considerar

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T.$$

Com o objetivo de se obter uma estimativa para os valores de  $\boldsymbol{\theta}$ , cada robô foi excitado com sinais de referência de velocidade enquanto seus valores de velocidade e aceleração eram medidos. Os sinais de excitação consistiam numa soma de seis sinais senoidais com amplitudes distintas. Todos os dados foram armazenados e o modelo de regressão foi montado de forma que o vetor  $\mathbf{Y}$  e a matriz  $\mathbf{W}$  tivessem todos os valores obtidos em cada período de amostragem. Posteriormente, o valor de  $\boldsymbol{\theta}$  para cada robô foi calculado pelo método de mínimos quadrados. Esta estratégia é descrita com mais detalhes em (De La CRUZ, 2006).

Alguns robôs tiveram seus parâmetros dinâmicos identificados pelo método descrito. Três desses robôs são da empresa Mobile Robots, sendo dois Pioneer 2-DX (um deles possui computador de bordo e o outro não o possui) e um Pioneer 3-DX que possui computador de bordo e sensor de varredura *laser*. O quarto robô cujos parâmetros foram identificados é uma cadeira de rodas robótica (FERREIRA et al., 2007; FERREIRA, 2008). Tais robôs possuem diferentes massas e características dinâmicas. Por exemplo, os robôs da linha Pioneer possuem dimensões de  $(44 \times 38)cm$  e altura de  $22cm$  até sua base superior. Suas rodas de tração possuem um diâmetro de  $16,5cm$ , e a massa de cada robô é de  $9kg$  quando descarregado (Mobile Robots, Acesso em: 30/jun/2008). O sensor de varredura *laser* montado na parte dianteira superior do Pioneer 3-DX possui massa

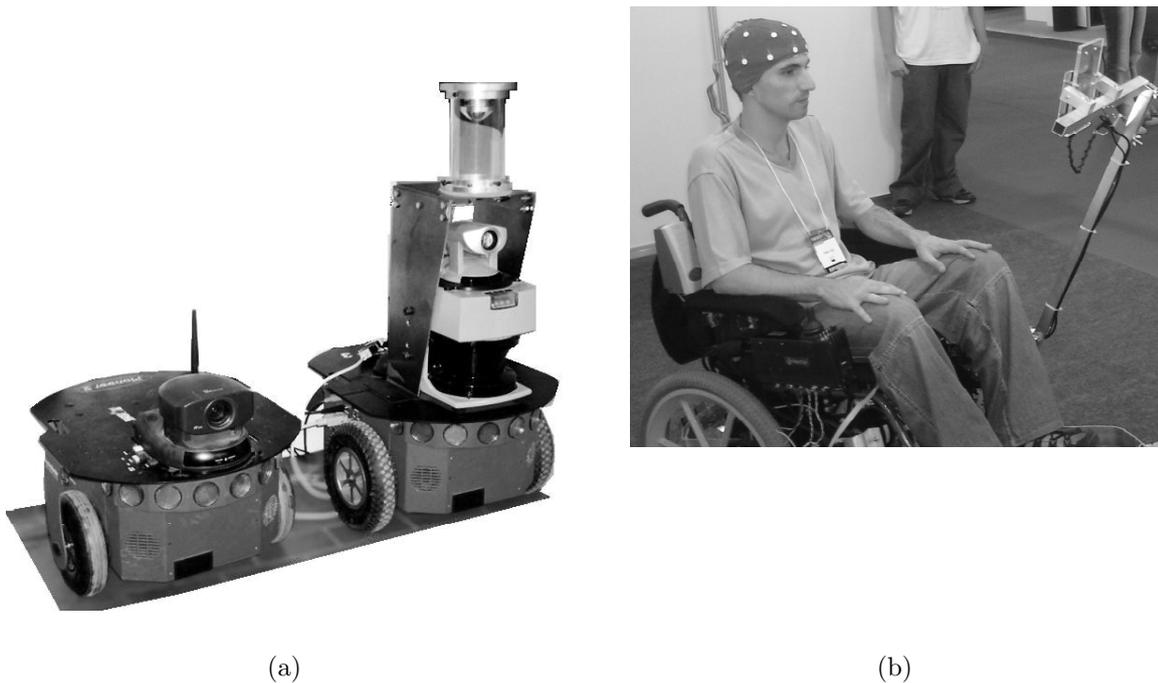


Figura 5: Robôs cujos parâmetros foram identificados: (a) Robôs Pioneer 2-DX com computador (esquerda) e 3-DX (direita); (b) Cadeira de rodas robótica.

de aproximadamente 50% da massa do próprio robô. Ou seja, tal sensor provoca uma mudança importante em sua dinâmica. Por outro lado, a cadeira de rodas robótica possui cerca de  $70\text{kg}$  de massa, incluindo os equipamentos de controle que foram adicionados ao modelo original. Suas dimensões são de  $(64 \times 78)\text{cm}$ , com altura de  $98\text{cm}$ , e suas rodas de tração possuem  $49,5\text{cm}$  de diâmetro. A Figura 5(a) mostra os robôs Pioneer 2-DX com computador de bordo (à esquerda) e Pioneer 3-DX (à direita), cujos parâmetros dinâmicos foram identificados. A cadeira de rodas robótica é ilustrada na Figura 5(b).

A seguir são mostrados os valores dos parâmetros identificados por De La CRUZ (2006) para os três robôs Pioneer mencionados. Os parâmetros identificados para o robô Pioneer 2-DX que não possui computador de bordo são

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= 0,3037 \text{ s}, \\
 \theta_2 &= 0,2768 \text{ s}, \\
 \theta_3 &= -0,000402 \text{ sm/rad}^2, \\
 \theta_4 &= 0,9835, \\
 \theta_5 &= 0,00382 \text{ s/m}, \\
 \theta_6 &= 1,0725,
 \end{aligned}$$

enquanto que para o robô Pioneer 2-DX com computador de bordo eles são

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0,19920 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0,13736 \text{ s}, \\ \theta_3 &= 0,001954 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 0,99070, \\ \theta_5 &= 0,01554 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 0,98660,\end{aligned}$$

e, finalmente, para o robô Pioneer 3-DX eles são

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0,2604 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0,2509 \text{ s}, \\ \theta_3 &= -0,000499 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 0,9965, \\ \theta_5 &= 0,00263 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 1,0768.\end{aligned}$$

O procedimento de identificação de parâmetros do robô Pioneer 3-DX foi repetido com a remoção do sensor de varredura *laser*, o que representa uma redução significativa em sua massa. Para este caso, os valores obtidos foram

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0,5338 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0,2168 \text{ s}, \\ \theta_3 &= -0,0134 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 0,9560, \\ \theta_5 &= -0,0843 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 1,0590.\end{aligned}$$

Pode-se notar que, para todos os casos, as condições  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$  e  $\theta_6 \gg |(\theta_5/I - \theta_3)Iu|$  são verdadeiras para os três robôs Pioneer considerados desde que o valor de velocidade linear  $u$  seja suficientemente pequeno. Como a velocidade linear nos robôs Pioneer é de, no máximo,  $1,2\text{m/s}$  (Mobile Robots, Acesso em: 30/jun/2008), eles sempre trabalharão numa faixa de velocidade que mantém válidas as condições anteriores.

A cadeira de rodas robótica foi projetada para operar transportando uma pessoa,

cuja massa pode ser de até  $130kg$ . Por isso, a identificação de seus parâmetros dinâmicos foi realizada considerando diversas situações de carga, sendo que o resultado de duas delas é relatado a seguir. Uma pessoa de  $55kg$  e outra de  $125kg$  auxiliaram na realização da identificação de parâmetros da cadeira de rodas. Os parâmetros identificados para a cadeira de rodas robótica enquanto transportava uma pessoa de  $55kg$  de massa são

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0,3759 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0,0188 \text{ s}, \\ \theta_3 &= 0,0128 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 1,0027, \\ \theta_5 &= -0,0015 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 0,9808,\end{aligned}$$

enquanto os parâmetros para o caso do transporte de uma pessoa de  $125kg$  são

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0,4263 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0,0289 \text{ s}, \\ \theta_3 &= 0,0058 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 0,9883, \\ \theta_5 &= 0,0134 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 0,9931.\end{aligned}$$

Pode-se notar que, para todos os casos, as condições  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$  e  $\theta_6 \gg |(\theta_5/I - \theta_3)Iu|$  são verdadeiras para a cadeira de rodas robótica desde que o valor de velocidade linear  $u$  seja suficientemente pequeno. Como a velocidade linear de tal cadeira é de, no máximo,  $2m/s$ , tais condições são sempre verificadas. Portanto, o modelo dinâmico dos robôs mencionados anteriormente pode ser representado por (2.13), considerando todas as propriedades apresentadas anteriormente.

É importante que se mencione que, em todos os casos experimentados, a identificação dos parâmetros dinâmicos da cadeira de rodas robótica resultou em valores tais que a condição  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$  é cumprida, validando a propriedade 3. No entanto, em algumas situações em que a carga estava deslocada, e quando se considera que a cadeira de rodas se desloca à sua máxima velocidade linear  $u$ , observou-se que o valor de  $\theta_6$  ficou apenas entre três e cinco vezes superior a  $|(\theta_5/I - \theta_3)Iu|$ , fato que prejudica o cumprimento da condição de  $\theta_6 \gg |(\theta_5/I - \theta_3)Iu|$ . Portanto, em alguns casos não é uma

boa aproximação considerar a matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{v}')$  constante.

**Nota 2.3.** O procedimento de identificação dos parâmetros resulta em valores aqui chamados de *parâmetros identificados*. Tais valores representam os *parâmetros reais* ou *verdadeiros*, cujos valores dependem das características físicas do robô. No Capítulo 3 são apresentados controladores adaptativos que modificam os valores dos parâmetros utilizados em suas equações. Nesse caso, o conjunto de valores passa a ser chamado de *parâmetros estimados*.

**Nota 2.4.** O modelo e os parâmetros identificados foram validados através de simulações e experimentos em que ambos receberam os mesmos sinais de comando  $\mathbf{v}_r = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ . As velocidades linear  $u$  e angular  $\omega$  resultantes do experimento com o robô e da simulação com o modelo correspondente foram muito similares, o que confirma que o modelo e os parâmetros identificados representam o robô real. Mais detalhes sobre o procedimento de validação do modelo são apresentados em (De La CRUZ, 2006).

## 2.6 Independência Linear dos Parâmetros

É importante que se verifique se os parâmetros  $\theta_1$  a  $\theta_6$  do modelo (2.18) são linearmente independentes. Se há parâmetros linearmente dependentes, o modelo pode ser simplificado de maneira a ser escrito com um número menor de parâmetros.

Para verificar a independência linear dos parâmetros, primeiro analisou-se as equações que os definem analiticamente. Tais equações, apresentadas na seção 2.2, mostram claramente que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são independentes entre si e dos demais. No entanto, as equações que definem os demais parâmetros  $\theta$  dependem de algumas variáveis físicas que estão presentes em mais de uma delas, o que faz com que a independência linear entre tais parâmetros não seja evidente. Por isso, os valores dos seis parâmetros  $\theta$  foram calculados utilizando o *software* MATLAB com base nas equações que os definem analiticamente. Os valores das variáveis físicas ( $R_a$ ,  $I_e$ ,  $B_e$ ,  $m$ ,  $r$ , etc.) foram gerados aleatoriamente, e os valores de  $\theta_{1..6}$  foram calculados, obtendo-se, assim, parâmetros também aleatórios. Este procedimento foi repetido um número  $K$  de vezes, e montou-se uma matriz com os resultados, da forma

$$\begin{bmatrix} \theta_1(1) & \theta_2(1) & \theta_3(1) & \theta_4(1) & \theta_5(1) & \theta_6(1) \\ \theta_1(2) & \theta_2(2) & \theta_3(2) & \theta_4(2) & \theta_5(2) & \theta_6(2) \\ \theta_1(3) & \theta_2(3) & \theta_3(3) & \theta_4(3) & \theta_5(3) & \theta_6(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_1(K) & \theta_2(K) & \theta_3(K) & \theta_4(K) & \theta_5(K) & \theta_6(K) \end{bmatrix}.$$

Tal matriz possui 6 colunas e  $K$  linhas, onde  $K$  é o número de amostras aleatórias obtidas. Seu posto é igual a 6, o que indica que ela possui 6 colunas independentes, ou seja, indica que todos os parâmetros são linearmente independentes. Tal procedimento foi repetido diversas vezes para  $K = 1000$  e  $K = 5000$ , resultando sempre em valor 6 para o posto.

Na tentativa de evitar a indicação de uma falsa independência entre os parâmetros, cada coluna da matriz foi normalizada, dividindo todos os seus valores pelo valor máximo da coluna. Então, antes de se calcular o posto da matriz, todos os seus valores foram truncados de forma que tivessem um número fixo de casas decimais. Para truncamento com 4, 3 e 2 casas decimais, o posto da matriz resultou igual a 6 em todos os casos testados, indicando que os parâmetros continuavam linearmente independentes.

Em seguida foi realizada análise dos valores obtidos experimentalmente durante os procedimentos de identificação realizado nos robôs. Em todos os conjuntos de dados obtidos, a matriz  $(\mathbf{W}^T\mathbf{W})$  é inversível, o que também indica independência linear entre os parâmetros.

Portanto, concluiu-se que todos os parâmetros incluídos no vetor  $\boldsymbol{\theta}$  são linearmente independentes, o que significa que (2.18) representa o modelo dinâmico do robô uniclo com o número mínimo de parâmetros.

## 2.7 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo, o modelo completo para representação de robôs móveis proposto em (De La CRUZ; CARELLI, 2006) foi apresentado, e uma nova abordagem para representação de sua parte dinâmica foi proposta. Uma vantagem de tal modelo é o fato deste aceitar sinais de velocidade linear e angular como referência, o que é usual em robôs móveis comerciais, mas não na literatura. Além disso, inclui a dinâmica dos atuadores e servos do robô. Propriedades importantes da representação proposta, úteis no projeto de controladores e na análise de estabilidade do sistema em malha fechada, foram listadas e provadas. Os parâmetros dinâmicos de quatro robôs móveis distintos foram identificados, e seus valores foram apresentados, ilustrando que as propriedades apresentadas são válidas para robôs com características bastante distintas. O próximo capítulo mostra o desenvolvimento de controladores baseados no modelo proposto, em que se faz uso de algumas das propriedades listadas. Resultados de simulação e experimentais apresentados em tal capítulo mostram que o modelo proposto é efetivamente válido.

## 3

# *Compensação Adaptativa da Dinâmica*

---

*“You must be aware I am programmed to evolve. To better myself.”*

*(Lieutenant Commander Data, em Star Trek: First Contact)*

## 3.1 Introdução e Trabalhos Relacionados

Grande parte dos controladores presentes na literatura para o controle não-linear de robôs móveis e AGVs considera apenas seu modelo cinemático, como é o caso dos trabalhos apresentados em (KANAYAMA et al., 1990; CANUDAS de WIT C.; SORDALEN, 1992; CARELLI; SECCHI; MUT, 1999; WU et al., 1999; FREIRE; CARELLI, 2003; FERREIRA, 2004; KÜHNE; JR; LAGES, 2005; GAVA, 2007; TEODOVICH; CARELLI, 2008; PENIZZOTTO; PATIÑO; CARELLI, 2008; GARCÍA; AGAMENNONI; FIGUEROA, 2008). No entanto, para execução de tarefas que exigem movimentos em altas velocidades ou transporte de cargas, a consideração do modelo dinâmico dos robôs se torna essencial (FIERRO; LEWIS, 1997; FIERRO; DAS, 2002).

Assim, alguns trabalhos disponíveis na literatura já apresentam controladores que compensam a dinâmica dos robôs. Como exemplo, Fierro e Lewis (1995) propuseram uma lei de controle para robôs móveis não-holonômicos que leva em conta a dinâmica modelada do robô. Os sinais de comando gerados pelo controlador apresentado são torques que, em geral, precisam ser convertidos para sinais de referência de velocidade para serem aplicados a robôs comerciais. Além disso, somente resultados de simulação foram apresentados. Os mesmos autores propuseram um controlador robusto adaptativo baseado em redes neurais para lidar com distúrbios e dinâmica não modelada (FIERRO; LEWIS, 1997). Porém,

uma vez mais, resultados experimentais não foram apresentados.

Outros exemplos de controladores que levam em conta a dinâmica dos robôs móveis e geram sinais de torque como comandos foram apresentados em (DONG; HUO, 1999; FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000; LIU et al., 2004; DONG; GUO, 2005), mas apenas resultados de simulação foram mostrados. Em (CORRADINI; ORLANDO, 2002) são apresentados resultados experimentais, mas os sinais gerados pelo controlador proposto ainda são torques.

Alguns trabalhos propuseram controladores que levam em conta a dinâmica do robô e geram sinais de comando que não são torques. Por exemplo, em (DAS; KAR, 2006) é proposto um controlador adaptativo baseado em lógica *fuzzy*, em que as incertezas são estimadas e os parâmetros do controlador são ajustados durante sua execução. Nesse trabalho, o modelo dinâmico do sistema inclui a dinâmica dos atuadores, e os comandos gerados pelo controlador são tensões para alimentação dos motores. Já em (ANTONINI; IPPOLITI; LONGHI, 2006) foi proposto um controlador chaveado, com aprendizado *on-line* e arquitetura hierárquica, que usa metodologias baseadas em redes neurais para compensar os efeitos de fenômenos não-modelados. Redes neurais são utilizadas para identificação e controle, e os sinais de comando gerados são velocidades lineares e angulares de referência para o robô. No entanto, a implementação em tempo-real da solução proposta requer uma arquitetura computacional de alto desempenho, baseada em um sistema multiprocessado.

Por outro lado, em (De La CRUZ, 2006; De La CRUZ; CARELLI, 2006) foi proposto um modelo dinâmico que aceita sinais de referência de velocidades linear e angular como entradas (mostrado no Capítulo 2), e apresentado o projeto de um controlador dinâmico para seguimento de trajetória baseado em tal modelo. Uma grande vantagem do controlador ali apresentado é a geração de sinais de velocidade linear e angular como comandos, já que robôs comerciais usualmente possuem controladores internos e aceitam sinais de referência de velocidade, e não de torque ou tensão para seus motores. Além disso, o cálculo dos sinais de comando pode ser realizado *on-line* por computadores de bordo comumente presentes em robôs móveis comerciais. No entanto, se os parâmetros do robô não forem corretamente identificados, ou forem alterados entre uma tarefa e outra (por exemplo, no caso de transporte de cargas), o desempenho do controlador proposto pode ser severamente afetado.

Para reduzir a degradação de desempenho em aplicações em que os parâmetros dinâmicos do robô podem variar, a adaptação de parâmetros *on-line* se torna bastante importante. Neste capítulo são apresentados os projetos de dois controladores cujo objetivo é realizar

a compensação da dinâmica dos robôs móveis de forma adaptativa. O primeiro é baseado no modelo apresentado em (De La CRUZ; CARELLI, 2006), e é aqui denominado primeiro controlador dinâmico. O outro é baseado no novo modelo proposto no Capítulo 2 e denominado segundo controlador dinâmico.

Rossomando et al. (2007) propuseram uma modificação na estrutura do primeiro controlador dinâmico, que foi inicialmente apresentado em (MARTINS et al., 2007c), resultando numa arquitetura em que uma rede neural opera em paralelo com o controlador dinâmico. Os controladores cinemático e de compensação dinâmica ali utilizados são praticamente idênticos àqueles aqui propostos, com a diferença que o controlador dinâmico não é adaptativo. O algoritmo de aprendizado permite que a rede neural realize a compensação de dinâmicas não-modeladas de forma adaptativa, reduzindo o erro de seguimento de trajetória. Resultados experimentais apresentados em (ROSSOMANDO et al., 2007) mostram que o sistema possui desempenho similar àquele obtido usando o primeiro controlador dinâmico aqui proposto. Embora tenha a vantagem de poder compensar dinâmicas não modeladas, o aprendizado da rede neural pode, em alguns casos, levar muito mais tempo que a adaptação de parâmetros realizada pelo primeiro controlador dinâmico. Além disso, a implementação do sistema é mais complexa, e seu custo computacional é maior pois, além do controlador não-linear de compensação da dinâmica, devem ser implementados a rede neural e seu algoritmo de aprendizagem.

Em (JORDÁN et al., 2008) os autores apresentam a comparação entre dois tipos de controladores adaptativos que realizam a compensação da dinâmica de robôs móveis tipo uniclo. Ambos são projetados com base no modelo dinâmico proposto em (De La CRUZ; CARELLI, 2006). Um dos controladores é não-linear, projetado para levar os erros de seguimento de posição e velocidade a zero através da minimização de uma função custo. O outro controlador é baseado em aproximações algébricas e interpolação de ordem variável. Os autores realizaram comparação de desempenho entre os controladores com base em simulações de seguimento de uma trajetória senoidal a velocidades classificadas como moderada e alta, considerando o modelo dinâmico do robô Pioneer 3-DX. Em todos os casos simulados o controlador não-linear apresentou melhor desempenho que o controlador baseado em interpolação. Para velocidades moderadas a diferença é pequena, mas ela fica bastante evidente para velocidades mais elevadas. Além disso, os sinais de controle também são mais suaves com o controlador não-linear. Os autores comentam que nenhum dos dois controladores requer conhecimento prévio dos valores dos parâmetros dinâmicos do robô, embora o controlador adaptativo requeira maior informação estrutural para seu projeto. Esta é a principal justificativa dos autores para explicar o melhor desempenho

apresentado pelo controlador não-linear.

Este capítulo apresenta os projetos dos chamados primeiro e segundo controladores dinâmicos, além da análise de estabilidade dos sistemas em malha fechada, para cada caso, com base na Teoria de Lyapunov. Os controladores são projetados com base no modelo dinâmico do robô, que incorpora toda a informação estrutural disponível sobre o sistema. A importância da compensação adaptativa da dinâmica é ilustrada através da comparação de desempenho entre os sistemas com e sem sua realização. Considerações quanto à robustez em relação a distúrbios e variação de parâmetros também são apresentadas. Resultados de simulações demonstram a validade e o funcionamento dos controladores propostos, enquanto resultados experimentais ilustram o desempenho de tais controladores quando aplicados a um robô móvel comercial.

## 3.2 Controlador Cinemático de Seguimento de Trajetória

Esta seção apresenta o projeto de um controlador de seguimento de trajetória para robôs móveis tipo unicycle, e a análise de estabilidade do sistema em malha fechada resultante. O controlador é baseado no modelo cinemático do robô, dado por (2.4). Tal modelo foi apresentado no Capítulo 2, e é aqui reproduzido por conveniência:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Desprezando-se as incertezas  $\delta_x$  e  $\delta_y$  e considerando-se as coordenadas do ponto de interesse  $\mathbf{h} = [x \ y]^T$ , a equação cinemática pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

e sua inversa é dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Logo, a cinemática inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

e a lei de controle proposta é

$$\begin{bmatrix} u_{ref}^c \\ \omega_{ref}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d + l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \dot{y}_d + l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde  $a > 0$ ,  $\mathbf{v}_d = [u_{ref}^c \ \omega_{ref}^c]^T$  é a saída do controlador cinemático,  $\tilde{x} = x_d - x$  e  $\tilde{y} = y_d - y$  são os erros de posição nos eixos X e Y, respectivamente,  $k_x > 0$  e  $k_y > 0$  são os ganhos do controlador,  $l_x \in \mathbb{R}$ , e  $l_y \in \mathbb{R}$  são constantes de saturação, e  $(x, y)$  e  $(x_d, y_d)$  são as coordenadas atual e desejada do ponto de interesse, respectivamente.

Para a análise de estabilidade se supõe conhecimento do valor exato da distância  $a$  e seguimento perfeito de velocidade, ou seja, se considera que  $u \equiv u_{ref}^c$  e  $\omega \equiv \omega_{ref}^c$ , o que significa que os efeitos da dinâmica do robô são ignorados. A equação do sistema em malha fechada é

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Definindo o vetor de erro de saída como  $\tilde{\mathbf{h}} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ , a equação (3.6) pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} = - \begin{bmatrix} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) & 0 \\ 0 & l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{h}}, \quad (3.7)$$

que possui um único ponto de equilíbrio na origem. Para a análise de estabilidade deste equilíbrio, considera-se a função candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0$ , que é definida positiva. Sua primeira derivada temporal é

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = -\tilde{x} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) - \tilde{y} l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right),$$

que é definida negativa. Portanto, pode-se concluir que o equilíbrio (na origem) é assintoticamente estável, o que significa que  $\tilde{x} \rightarrow 0$  e  $\tilde{y} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  (KHALIL, 2002).

**Nota 3.1.** Na Seção 3.3, a hipótese de seguimento perfeito de velocidade será relaxada, e a estabilidade do equilíbrio será analisada para o sistema completo, depois da adição de um controlador dinâmico.

**Nota 3.2.** Considerando que a referência é um ponto fixo, tem-se  $\dot{x}_d = 0$  e  $\dot{y}_d = 0$ . Nesse caso, o robô tende a atingir o ponto de referência  $(x_d, y_d)$ , pois foi provado que  $\tilde{x} \rightarrow 0$  e  $\tilde{y} \rightarrow 0$ . Como a lei de controle proposta garante que  $\omega_{ref}^c \rightarrow 0$ , supondo seguimento perfeito de velocidade, conclui-se que  $\omega \rightarrow 0$ .

**Nota 3.3.** A conclusão anterior mostra que o controlador cinemático projetado pode ser utilizado em um problema de posicionamento, além de seguimento de trajetória, como foi mostrado em (MARTINS et al., 2007c). No entanto, o posicionamento realizado somente com a utilização deste controlador não leva em conta a orientação final do robô. Caso seja desejável controlá-la, pode-se realizar o chaveamento entre controladores de forma que, após atingir o ponto final, o controlador de seguimento seja desativado e um controlador de orientação final seja habilitado. Exemplos desse tipo de utilização podem ser encontrados em (TOIBERO et al., 2006; BRANDÃO et al., 2007a).

**Nota 3.4.** Supondo que a trajetória desejada seja suave e limitando-se os valores de  $\dot{x}_d$  e  $\dot{y}_d$ , pode-se obter constantes  $l_x$  e  $l_y$  tais que os termos  $l_x \tanh(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x})$  e  $l_y \tanh(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y})$ , presentes na lei de controle, limitem os sinais de controle a valores aceitáveis para o robô. Assim, mesmo na presença de erros muito grandes, o controlador proposto não vai provocar saturação dos atuadores do robô.

Para ilustrar o funcionamento do controlador cinemático representado pela equação (3.5), foram realizadas simulações considerando o modelo completo do robô representado pela equação (2.13) com os parâmetros identificados do robô Pioneer 3-DX, apresentados na Seção 2.4. O modelo completo do sistema foi construído e simulado utilizando a plataforma MATLAB/Simulink. Foi inserido ruído branco nos sinais de posição e de velocidade, de forma a simular o ruído existente na leitura dos sinais disponibilizados pelo robô. A potência do ruído inserido foi definida experimentalmente de forma que os sinais simulados possuíssem aspecto semelhante ao daqueles obtidos através da odometria dos robôs Pioneer. O mesmo tipo de ruído, com a mesma potência, está presente em todas as simulações apresentadas neste capítulo.

Na primeira simulação, o controlador foi utilizado para fazer o robô seguir uma trajetória circular cujo raio varia bruscamente entre  $0,8\text{ m}$  e  $0,7\text{ m}$ , a cada  $60\text{ s}$ , a partir de  $t = 50\text{ s}$ . Seus ganhos foram ajustados experimentalmente de forma que o robô apresentasse desempenho satisfatório para a tarefa em questão. Dessa forma, considerou-se  $k_x = 0,2$  e  $k_y = 0,2$ .

A Figura 6(a) mostra parte da trajetória percorrida pelo robô, enquanto a Figura 6(b)

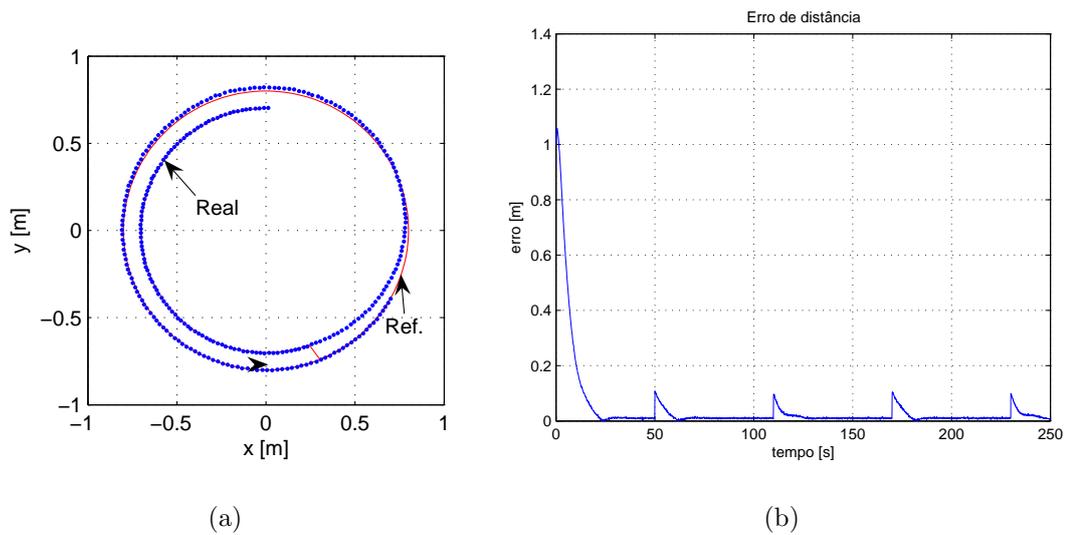


Figura 6: Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros identificados.

ilustra a evolução do erro de distância durante a simulação considerada. O erro de distância é definido como a distância instantânea entre as posições atual e desejada. O grande valor inicial do erro se deve ao fato de que a posição inicial do robô é  $(0, 2; -0, 8) m$ , enquanto a trajetória de referência se inicia em  $(0, 8; 0, 0) m$ . Nota-se que a cada  $60 s$  há um acréscimo instantâneo no valor do erro, que ocorre devido à súbita mudança no raio da trajetória de referência. Em todos os casos, o controlador projetado é capaz de fazer o robô seguir a trajetória circular, sempre levando o erro para um valor próximo a zero.

A Figura 7(a) apresenta os valores de velocidade linear e angular enviados pelo controlador cinemático e desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória circular em questão, enquanto a Figura 7(b) mostra a diferença entre esses valores, definido como erro de velocidade. Pode-se notar que o erro de seguimento de velocidade é muito próximo de zero para o caso simulado, o que faz com que as linhas que indicam as velocidades reais e de referência estejam praticamente sobrepostas na Figura 7(a).

O resultado da simulação anteriormente descrita mostra que o controlador cinemático representado pela equação (3.5) é capaz de fazer o robô seguir uma trajetória de referência com pequeno erro, considerando que seus ganhos sejam corretamente ajustados. No entanto, se a trajetória é modificada e os ganhos do controlador são mantidos, o desempenho do controlador pode ser prejudicado. Para ilustrar esse fato, foi realizada outra simulação com os mesmos parâmetros do robô e do controlador, mas com uma trajetória em forma de oito, com a finalidade de excitar ainda mais a dinâmica do robô. As figuras 8(a) e

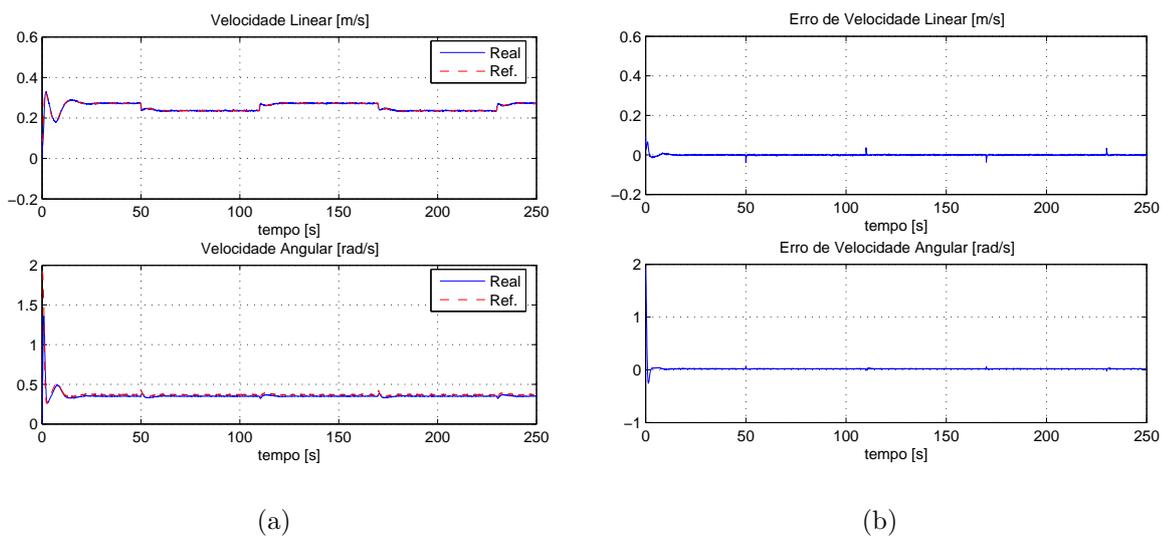


Figura 7: Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros identificados.

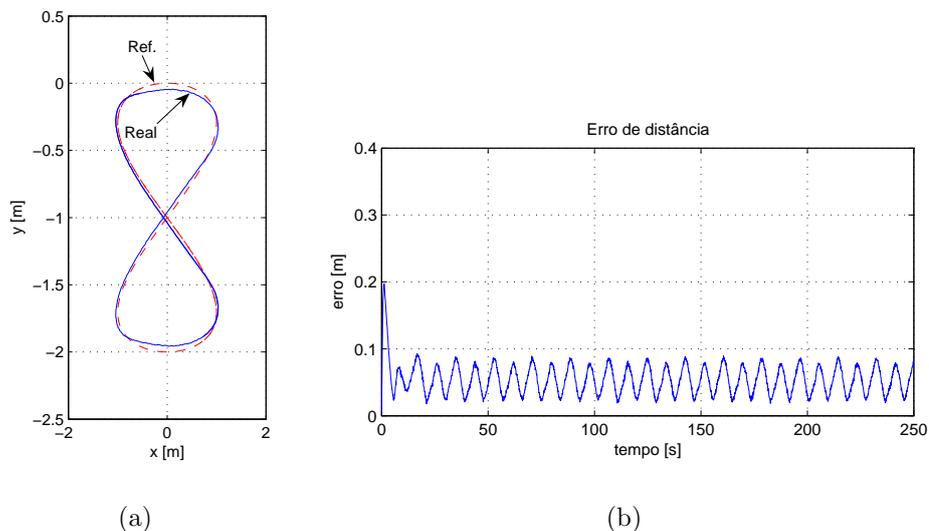


Figura 8: Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros identificados.

8(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. O controlador é capaz de fazer o robô seguir a trajetória em forma de oito, mas pode-se perceber que o valor médio do erro de distância é maior se comparado com o resultado obtido na simulação anterior.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da

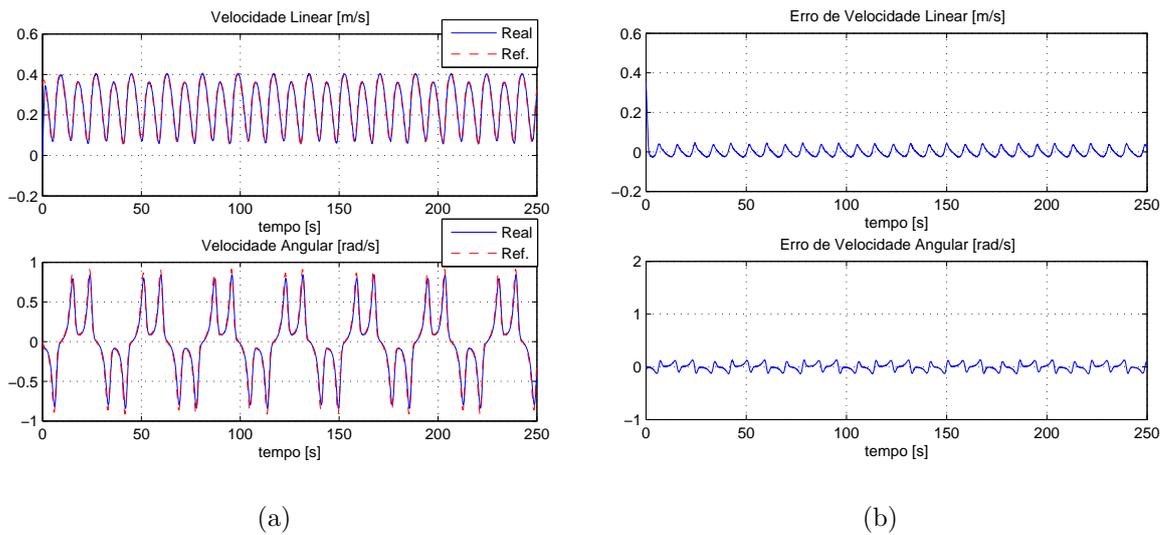


Figura 9: Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros identificados.

trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 9(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 9(b). Nota-se que os valores de erro de seguimento de velocidade são maiores nesse caso, o que indica a necessidade de algum tipo de ajuste nos ganhos do controlador.

As simulações para seguimento das trajetórias circular e em forma de oito foram repetidas considerando que o robô teve sua dinâmica alterada, representada por um aumento de 25% nos valores de seus parâmetros dinâmicos  $\theta$ . As demais condições, como os ganhos do controlador e velocidades de referência da trajetória, foram mantidas, e as simulações anteriormente descritas foram repetidas.

A Figura 10(a) mostra parte da trajetória circular percorrida pelo robô na simulação em que os parâmetros dinâmicos foram alterados, enquanto a Figura 10(b) ilustra a evolução do erro de distância nesse caso. Pode-se notar que houve grande degradação no desempenho do controlador cinemático, com aumento significativo do erro de distância, quando comparado com a situação anterior, para a qual os ganhos do controlador cinemático foram inicialmente ajustados.

A Figura 11(a) mostra os valores das velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô, assim como seus valores de referência enviados pelo controlador cinemático. Pode-se notar que a modificação na dinâmica do robô provocou aumento na diferença entre os valores desejados e reais de velocidade, fato ilustrado pela figura 11(b), que apresenta os

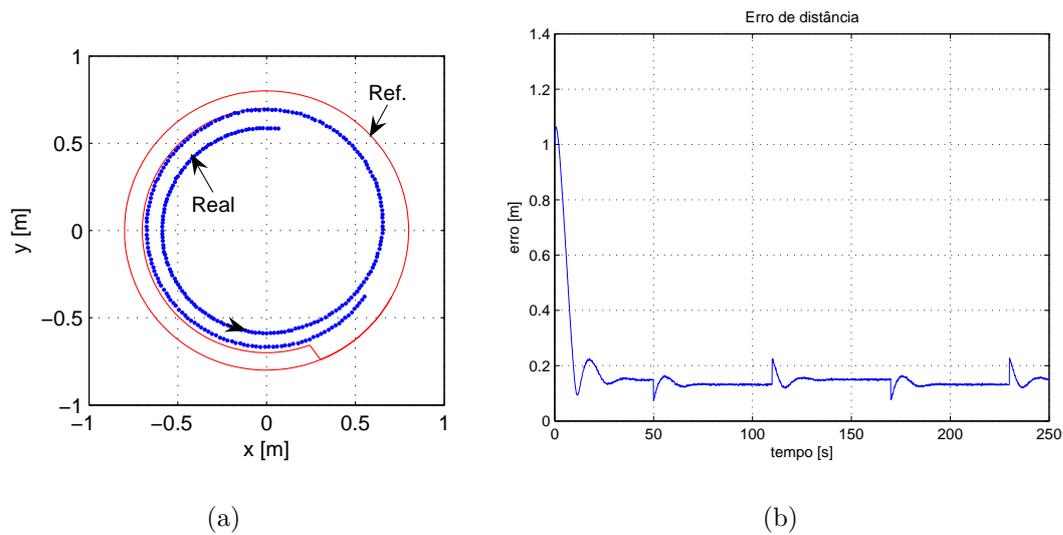


Figura 10: Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados.

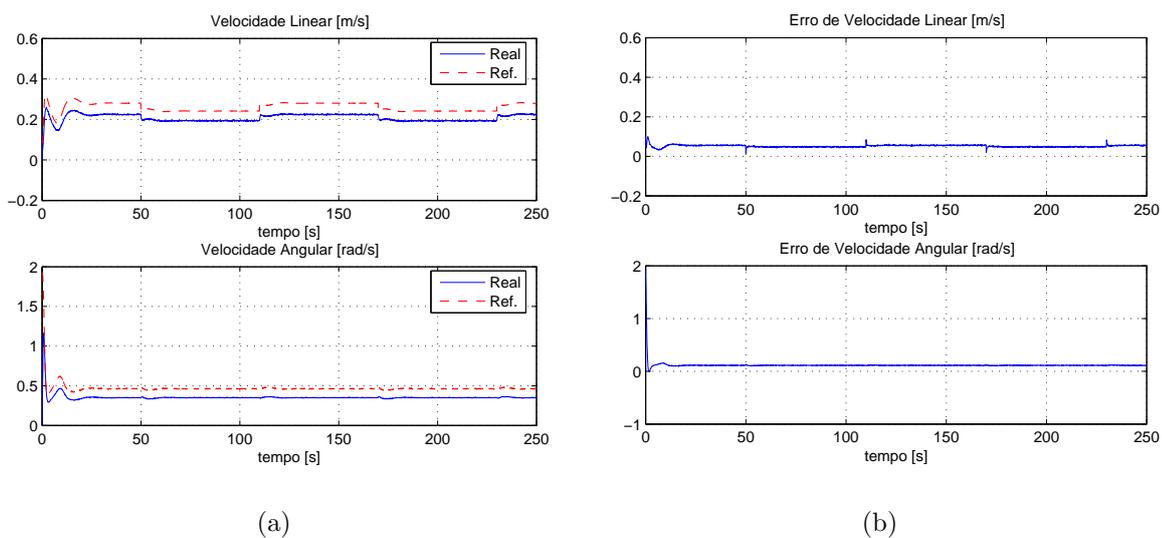


Figura 11: Controlador cinemático: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados.

valores dos erros de seguimento de velocidade para esta simulação.

Para o caso do seguimento da trajetória em forma de oito, a Figura 12(a) mostra parte da trajetória percorrida pelo robô, enquanto a Figura 12(b) ilustra a evolução do erro de distância durante a simulação em que o robô teve seus parâmetros dinâmicos alterados. Também nesta simulação, os valores dos ganhos do controlador cinemático são os mesmos daqueles usados na primeira simulação, situação para a qual foram ajustados.

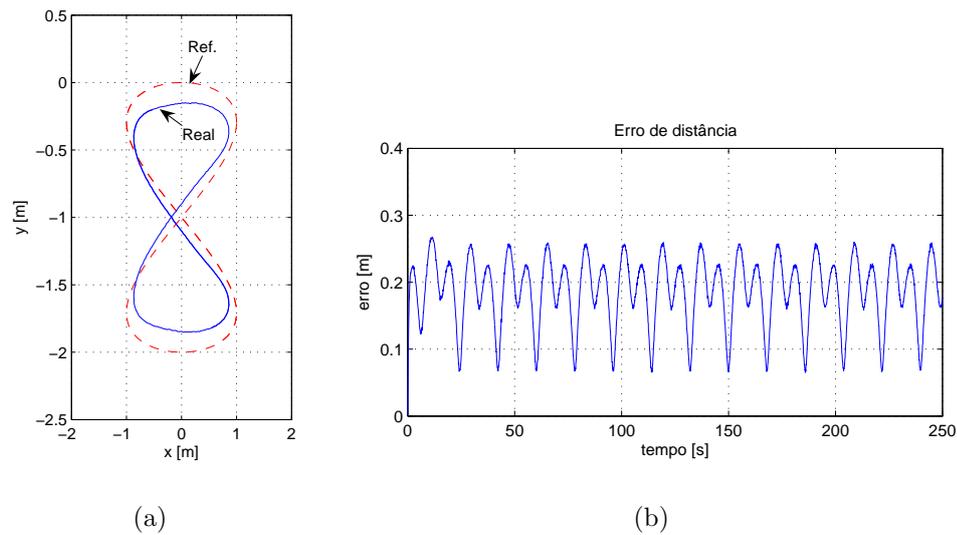


Figura 12: Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados.

Pode-se notar que a degradação no desempenho do controlador neste caso foi ainda maior, com grande aumento no valor médio do erro de distância durante todo o seguimento da trajetória.

A Figura 13(a) mostra os valores das velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô, assim como seus valores de referência enviados pelo controlador cinemático. Pode-se notar que a modificação na dinâmica do robô provocou aumento na diferença entre os valores desejados e reais de velocidade, quando comparado com o resultado obtido para a simulação anterior. A Figura 13(b) apresenta os valores dos erros de seguimento de velocidade para esta simulação, que ilustram o fato recém mencionado.

É importante mencionar que é possível se obter melhora no desempenho do controlador cinemático através do ajuste de seus ganhos. Por exemplo, um aumento nos valores de  $k_x$  e  $k_y$  provoca redução nos valores de erro apresentados na Figura 12(b). A melhora no desempenho é ilustrada pelas Figuras 14(a) e 14(b) que mostram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô e seu erro de seguimento para as mesmas condições de simulação, apenas com aumento nos valores dos ganhos  $k_x$  e  $k_y$ . Nesse caso, os valores dos ganhos foram aumentados em cinco vezes. Na Seção 3.6 são apresentados outros resultados que ilustram a redução no erro de distância com o aumento dos ganhos do controlador cinemático. Deve-se notar, no entanto, que o erro de velocidade continua a existir, pois seu valor não depende dos valores de  $k_x$  e  $k_y$ .

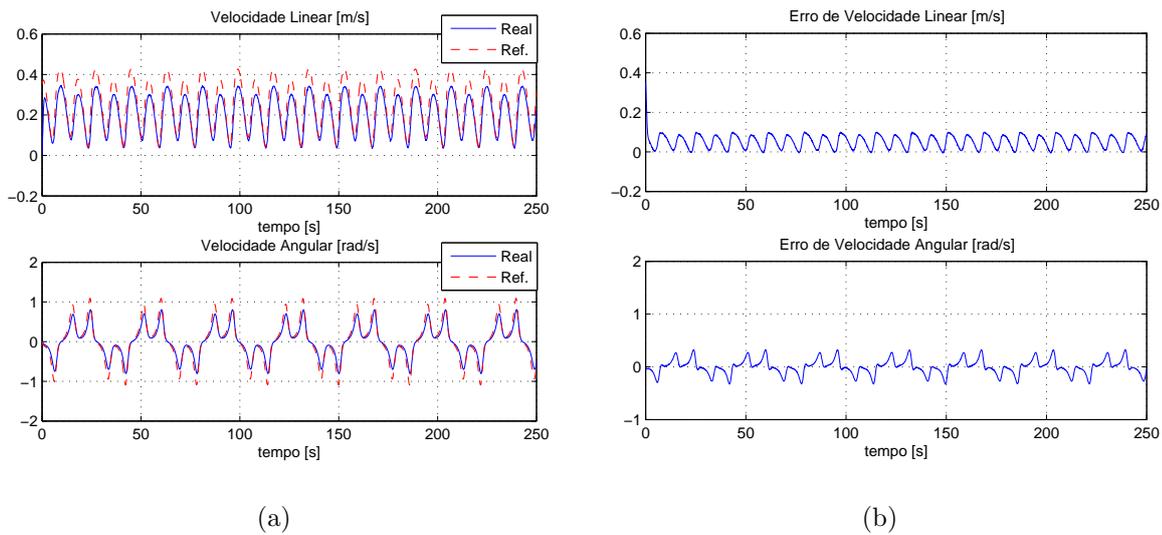


Figura 13: Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados.

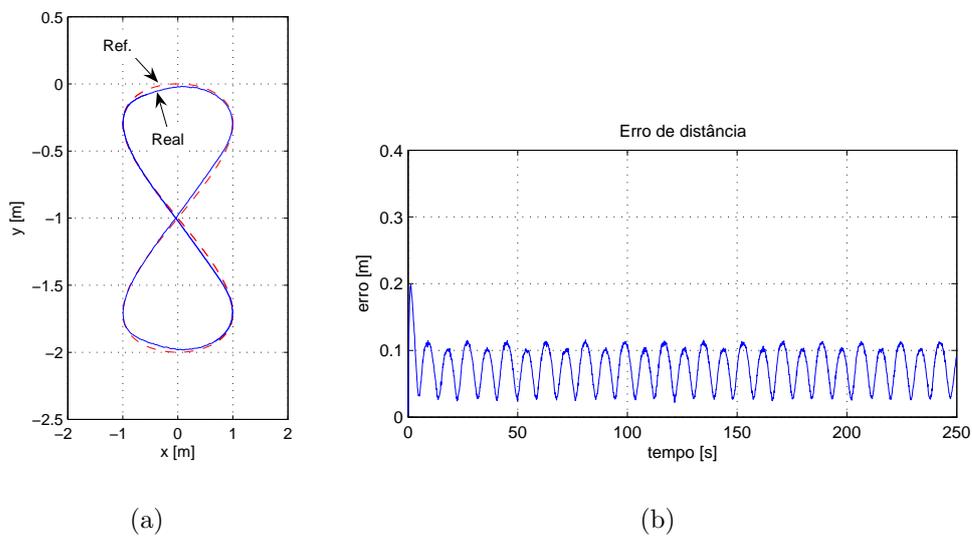


Figura 14: Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e ganhos maiores.

Os resultados apresentados ilustram que, uma vez ajustados seus ganhos, o controlador cinemático pode ter seu desempenho severamente afetado por variações na trajetória e nos parâmetros dinâmicos do robô. Tal fato motiva o projeto de controladores que consideram o modelo dinâmico completo do robô, que são apresentados na próxima seção.

## 3.3 Controladores Dinâmicos

Esta seção apresenta o projeto e análise de estabilidade de controladores cujo objetivo é compensar a dinâmica dos robôs móveis. O sistema de controle proposto consiste na inserção de um controlador para compensar os efeitos da dinâmica do robô, denominado de controlador dinâmico. Este recebe do controlador cinemático as referências de velocidades linear e angular, e envia ao robô sinais de comando compensados, de forma que o robô execute as velocidades de referência geradas pelo controlador cinemático com o menor erro possível.

Em relação ao controlador dinâmico proposto em (De La CRUZ; CARELLI, 2006), a abordagem aqui proposta apresenta como vantagem o fato de que, uma vez projetado para um dado robô, o mesmo controlador dinâmico pode ser utilizado em conjunto com outros controladores cinemáticos com funções diferentes, como seguimento de caminhos (CELESTE et al., 2008), posicionamento num dado ponto (MARTINS et al., 2007c), ou controle de formação (MARTINS et al., 2008; BRANDÃO et al., 2009a), por exemplo. Tal fato é ilustrado no Capítulo 4, que apresenta a utilização dos controladores dinâmicos aqui propostos em conjunto com controladores cinemáticos, cujos objetivos são manter a formação numa estrutura líder-seguidor e manter e seguir uma formação numa estrutura virtual.

Nas subseções seguintes serão apresentados dois controladores dinâmicos adaptativos, sendo um projetado com base no modelo representado por (2.3), denominado *primeiro controlador dinâmico*, e o outro projetado com base no modelo representado por (2.13), denominado *segundo controlador dinâmico*.

### 3.3.1 Primeiro Controlador Dinâmico

O primeiro controlador dinâmico proposto foi projetado com base no modelo dinâmico representado por (2.3). Em (De La CRUZ, 2006) já havia sido proposto um controlador dinâmico com base neste modelo. Porém, o controlador lá apresentado foi projetado com base em linearização do modelo completo por realimentação de entrada-saída, e a equação de controle resultante depende das características cinemáticas e dinâmicas do robô. Aqui, o controlador completo também depende das características cinemáticas e dinâmicas do robô, mas seu projeto é dividido em duas partes (cinemática e dinâmica), sendo a parte cinemática aquela apresentada na Seção 3.2.

O sistema completo é ilustrado no diagrama da Figura 15. A figura mostra que o

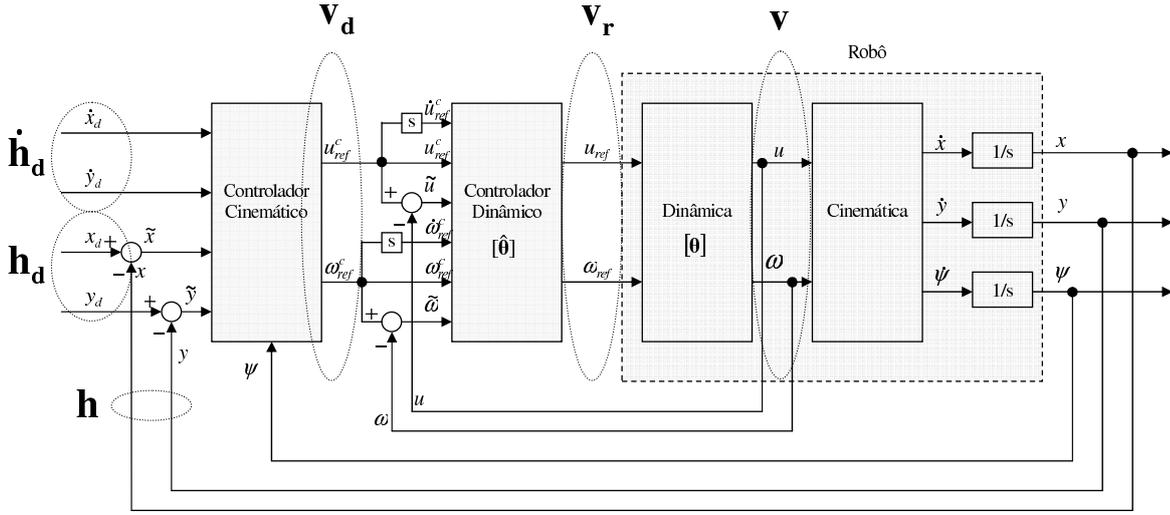


Figura 15: Diagrama geral do sistema de controle proposto.

controlador cinemático recebe os valores desejados de posição  $(x_d, y_d)$  e velocidade  $(\dot{x}_d, \dot{y}_d)$  no referencial cartesiano, e gera os valores desejados de velocidade linear  $u_{ref}^c$  e angular  $\omega_{ref}^c$  com base nas informações de posição  $(x, y)$  e orientação  $\psi$  fornecidas pelo robô. Ao invés de serem diretamente enviados ao robô (como foi feito nas simulações realizadas na Seção 3.2), os sinais  $u_{ref}^c$  e  $\omega_{ref}^c$  são enviados ao controlador dinâmico, que gera outro par de sinais de referência de velocidade  $u_{ref}$  e  $\omega_{ref}$  para serem enviados ao robô, compensando a dinâmica do veículo.

1

O projeto do primeiro controlador dinâmico é baseado no modelo dinâmico parametrizado do robô móvel. Desprezando os termos  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$ , que representam distúrbios, a parte que representa a dinâmica do modelo dado por (2.3) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1} \omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1} u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2} u \omega - \frac{\theta_6}{\theta_2} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix},$$

Rearranjando os termos, a parametrização linear da equação dinâmica resulta em

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T, \quad (3.8)$$

que também pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T,$$

ou, numa forma compacta,

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{H}'\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{v}_r = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ,  $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$ ,  $\mathbf{H}' = \text{diag}(\theta_1, \theta_2)$  e

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T.$$

Baseado na dinâmica inversa, a lei de controle proposta é

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T,$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{H}'\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta}, \quad (3.10)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2]^T = \dot{\mathbf{v}}_d + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}$ , onde  $\mathbf{K} = \text{diag}(k_u, k_\omega) > 0$  é uma matriz de ganhos diagonal e definida positiva,  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}$  é o vetor de erro de velocidade e  $\mathbf{v}_d = [u_{ref}^c \ \omega_{ref}^c]^T$ .

Ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \dot{u}_{ref}^c + k_u \tilde{u}, & k_u &> 0, \\ \sigma_2 &= \dot{\omega}_{ref}^c + k_\omega \tilde{\omega}, & k_\omega &> 0. \end{aligned}$$

Os erros de velocidade são definidos como  $\tilde{u} = u_{ref}^c - u$  e  $\tilde{\omega} = \omega_{ref}^c - \omega$ . A equação (3.10) também pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{G}(\sigma_1, \sigma_2, u, \omega)\boldsymbol{\theta}, \quad (3.11)$$

onde  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$  e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix}.$$

O desenvolvimento anterior considera que os parâmetros dinâmicos do robô são conhecidos de forma exata, ou seja, que o vetor  $\boldsymbol{\theta}$  contém os valores verdadeiros dos parâmetros. No entanto, caso haja incerteza nos valores dos parâmetros, a lei de controle

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{H}'\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.12)$$

deve ser considerada, ao invés de (3.11), onde  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  são os vetores de parâmetros reais

(verdadeiros) e estimados do robô, respectivamente, sendo  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$  o vetor de erro paramétrico.

Para análise de estabilidade do sistema em malha fechada, iguala-se as equações do modelo (3.9) e do controlador (3.12), que resulta em

$$\mathbf{H}'\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}'\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}},$$

que é equivalente a

$$\mathbf{H}'(\boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{v}}) = -\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.13)$$

Pode-se concluir que  $\boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{v}} = \dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}$ , e a equação (3.13) pode ser escrita como

$$\mathbf{H}'(\dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}) = -\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

ou

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\mathbf{H}'^{-1}\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}, \quad (3.14)$$

que representa a equação do erro do sistema. Agora, é considerada a função candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}^T\mathbf{H}'\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\gamma}\tilde{\boldsymbol{\theta}} > 0, \quad (3.15)$$

sendo  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  uma matriz diagonal definida positiva e  $\mathbf{H}' > \mathbf{0}$ , como pode ser visto na Seção 2.2. Considerando que os parâmetros do robô não se alteram durante a execução de uma tarefa, o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  é constante. Assim, já que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ , conclui-se que  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ , e a primeira derivada temporal da função candidata de Lyapunov (3.15) é

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T\mathbf{H}'\mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\gamma}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (3.16)$$

### 3.3.1.1 Adaptação de Parâmetros

Com a inclusão da lei de adaptação de parâmetros, o diagrama geral do sistema de controle proposto tem o aspecto ilustrado na Figura 16. A figura mostra que o sistema tem o mesmo aspecto daquele apresentado pela Figura 15, com a inclusão de um bloco que executa o ajuste dos valores dos parâmetros estimados  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Esse bloco recebe os valores de velocidades de referência enviados pelo controlador cinemático e os valores das velocidades reais do robô, e calcula a variação que cada parâmetro deve ter em função do erro de velocidade, como detalhado a seguir.

Serão consideradas duas leis de adaptação de parâmetros para o controlador proposto.

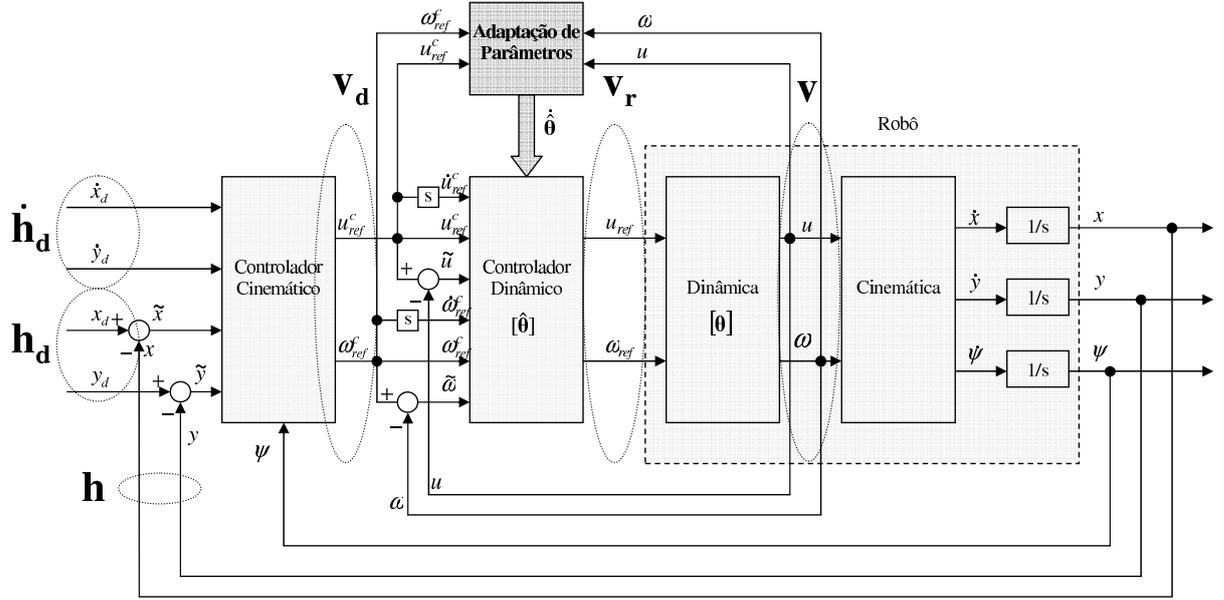


Figura 16: Diagrama geral do sistema de controle proposto considerando adaptação de parâmetros.

A primeira delas é dada por

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}}. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.16) tem-se que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}' \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}}, \quad (3.18)$$

que é semidefinida negativa, pois o sinal de erro  $\hat{\theta}$  não está presente. Isso permite verificar a estabilidade do equilíbrio (mas não estabilidade assintótica) para o sistema descrito por (3.14) com a utilização da lei de adaptação de parâmetros (3.17). Ou seja, pode-se afirmar que  $\tilde{\mathbf{v}}$  e  $\tilde{\theta}$  são sinais limitados, i.e.,  $\tilde{\mathbf{v}} \in L_\infty$  e  $\tilde{\theta} \in L_\infty$ .

Integrando a equação (3.18), tem-se que

$$V(T) - V(0) = - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}' \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} dt,$$

e desprezando-se o termo positivo  $V(T)$ , tem-se a desigualdade

$$-V(0) \leq - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}' \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} dt \quad \text{ou} \quad V(0) \geq \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}' \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} dt. \quad (3.19)$$

Como  $\mathbf{H}' \mathbf{K}$  é uma matriz simétrica e definida positiva, a desigualdade

$$\lambda_{\min}(\mathbf{H}' \mathbf{K}) \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 \leq \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}' \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}' \mathbf{K}) \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 \quad (3.20)$$

é verificada, onde  $\lambda_{min}(\cdot)$  e  $\lambda_{max}(\cdot)$  representam os autovalores mínimo e máximo da matriz, respectivamente. Assim, usando a condição (3.20) na equação (3.19) verifica-se que

$$\int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 dt \leq \frac{V(0)}{\lambda_{min}(\mathbf{H}'\mathbf{K})}. \quad (3.21)$$

Além disso, como o termo  $\frac{V(0)}{\lambda_{min}(\mathbf{H}'\mathbf{K})}$  não depende do tempo, a condição expressa por (3.21) é válida para todo  $T$ , ou seja, pode-se concluir que  $\tilde{\mathbf{v}}$  é um sinal quadrado integrável, i.e.,  $\tilde{\mathbf{v}} \in L_2$ .

Considerando-se o caso em que os sinais de referência de aceleração  $\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}} = [\dot{u}_{ref}^c \quad \dot{\omega}_{ref}^c]^T$  gerados pelo controlador cinemático são limitados (seguimento de uma trajetória suave, por exemplo), tem-se que  $\mathbf{G} \in L_\infty$ . Observando-se que  $\tilde{\mathbf{v}} \in L_\infty$  e  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in L_\infty$ , da equação (3.14) pode-se verificar que  $\dot{\tilde{\mathbf{v}}} \in L_\infty$ . Portanto, de acordo com o Lema de Barbalat (ASTROM; WITTENMARK, 1994) pode-se concluir que  $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o que garante a convergência assintótica dos erros de controle para zero.

A lei de adaptação de parâmetros representada por (3.17) funciona como um integrador e, portanto, pode provocar problemas de robustez na presença de ruídos, distúrbios ou erros na medição dos sinais. Uma possível maneira de se evitar a deriva paramétrica é através do desligamento da adaptação de parâmetros quando o valor de erro atinge determinado limite mínimo, como ilustrado em (MARTINS et al., 2007c). Outra forma conhecida de se evitar a deriva paramétrica é a modificação da lei de adaptação de parâmetros através da introdução de um termo de *modificação- $\sigma$* , também conhecido como “Termo de Fuga”, ou “*Leakage Term*” (KAUFMAN; SOBEL, 1998; BOYD; SASTRY, 1989). Com a introdução desse termo, ao invés de (3.17), a lei de adaptação de parâmetros

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \gamma^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}} - \gamma^{-1} \mathbf{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.22)$$

deve ser considerada, onde  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é uma matriz de ganhos diagonal definida positiva. A equação (3.22) pode ser reescrita como

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \gamma^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}} - \gamma^{-1} \mathbf{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \gamma^{-1} \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\theta}. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) em (3.16), a primeira derivada temporal da função candidata de Lyapunov (3.15) resulta em

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}'\mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\theta}. \quad (3.24)$$

Em (NASISI; CARELLI, 2003) os autores analisam a estabilidade do equilíbrio de um sistema de controle servo-visual para robôs manipuladores. A análise realizada a seguir é baseada nas ideias ali apresentadas. Definindo as constantes  $\mu_\Gamma = \chi(\mathbf{\Gamma})$ ,  $\mu_{HK} = \chi(\mathbf{H}'\mathbf{K})$  e  $\vartheta_\Gamma = \kappa_{max}(\mathbf{\Gamma})$ , onde  $\chi(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{min}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})}$  é o valor singular mínimo de  $\mathbf{Z}$ ,  $\kappa_{max}(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})}$  denota o valor singular máximo de  $\mathbf{Z}$  e  $\lambda_{min}(\cdot)$  e  $\lambda_{max}(\cdot)$  são funções para obtenção do menor e do maior autovalor de uma matriz, respectivamente,  $\dot{V}$  pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq -\mu_{HK}\|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \mu_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\|. \quad (3.25)$$

Considerando  $\xi \in \mathbb{R}^+$  e a diferença quadrada

$$\left(\frac{1}{\xi}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi\|\boldsymbol{\theta}\|\right)^2 = \frac{1}{\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - 2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| + \xi^2\|\boldsymbol{\theta}\|^2,$$

que pode ser escrita como

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| = \frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi\|\boldsymbol{\theta}\|\right)^2,$$

e desprezando o termo negativo, a inequação

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| \leq \frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2 \quad (3.26)$$

é obtida. Substituindo (3.26) em (3.25), resulta

$$\dot{V} \leq -\mu_{HK}\|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \mu_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma\left(\frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2\right),$$

ou, de forma equivalente,

$$\dot{V} \leq -\mu_{HK}\|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \mu_\Gamma\left(1 - \frac{\vartheta_\Gamma}{\mu_\Gamma}\frac{1}{2\xi^2}\right)\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma\frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2. \quad (3.27)$$

Em seguida, os parâmetros  $\alpha_1 = \mu_{HK} > 0$  e  $\alpha_2 = \mu_\Gamma\left(1 - \frac{\vartheta_\Gamma}{\mu_\Gamma}\frac{1}{2\xi^2}\right) > 0$  são definidos, com  $\xi$  selecionado de maneira conveniente. Logo, (3.27) pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq -\alpha_1\|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \alpha_2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \rho, \quad (3.28)$$

onde  $\rho = \vartheta_\Gamma\frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2$ . Agora, a função candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}^T\mathbf{H}'\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$

pode ser escrita como

$$V \leq \beta_1 \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 + \beta_2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2, \quad (3.29)$$

onde  $\beta_1 = \frac{1}{2}\vartheta_H$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2}\vartheta_\gamma$ ,  $\vartheta_H = \kappa_{max}(\mathbf{H}')$ ,  $\vartheta_\gamma = \kappa_{max}(\boldsymbol{\gamma})$ , com  $\kappa_{max}(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})}$  denotando o máximo valor singular de  $\mathbf{Z}$ . Então,

$$\dot{V} \leq -\Lambda V + \rho, \quad (3.30)$$

com  $\Lambda = \min \left\{ \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right\}$ . Já que  $\rho$  é limitado, (3.30) implica que  $\tilde{\mathbf{v}}$  e  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  são finalmente limitados. Portanto, a modificação- $\sigma$  torna a lei de adaptação mais robusta, mas aumenta o limite de erro. Como  $\rho$  é função do valor singular mínimo da matriz de ganho  $\boldsymbol{\Gamma}$ , e seus valores são arbitrários, a fronteira limite do erro pode ser feita pequena. No limite, se  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0}$ , então  $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , como foi mostrado anteriormente.

Agora, o comportamento do erro de seguimento  $\tilde{\mathbf{h}}$  é analisado novamente, relaxando-se a condição de seguimento perfeito de velocidade assumida na seção 3.2. Quando não existe seguimento perfeito de velocidade, a equação (3.6) deve ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde o vetor de erro  $[\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$  pode também ser escrito como  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}$ , sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix},$$

como definida na seção 3.2. Pode-se escrever a equação (3.31) como  $\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}$ , onde

$$\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}.$$

Considera-se a mesma função candidata de Lyapunov utilizada na análise feita na seção 3.2, ou seja,  $V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0$ . Sua primeira derivada temporal é agora escrita como

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = \tilde{\mathbf{h}}^T (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}})),$$

e uma condição suficiente para  $\dot{V} < 0$  é  $\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) > |\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}|$ . Para valores pequenos do erro

de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$ , pode-se escrever  $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) \approx \mathbf{K}_{xy}\tilde{\mathbf{h}}$ , onde

$$\mathbf{K}_{xy} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}.$$

Portanto, uma condição suficiente para estabilidade assintótica é

$$\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{K}_{xy} \tilde{\mathbf{h}} > |\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}|,$$

$$\min(k_x, k_y) \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2 > \|\tilde{\mathbf{h}}\| \|\mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}\|,$$

ou

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\| > \frac{\|\mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}\|}{\min(k_x, k_y)}. \quad (3.32)$$

Por outro lado, se os valores do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$  são muito grandes, o termo  $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}})$  satura. Seu valor de saturação  $\mathbf{L}_{\text{SAT}}(\tilde{\mathbf{h}})$  é dado por

$$\mathbf{L}_{\text{SAT}}(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} l_x \operatorname{sign}(\tanh(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x})) \\ l_y \operatorname{sign}(\tanh(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y})) \end{bmatrix},$$

onde  $\operatorname{sign}(\cdot)$  representa o sinal do argumento. Nesse caso, uma condição suficiente para estabilidade assintótica é

$$|\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L}_{\text{SAT}}(\tilde{\mathbf{h}})| > |\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}|,$$

$$|\min(l_x, l_y)| \|\tilde{\mathbf{h}}\| > \|\tilde{\mathbf{h}}\| \|\mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}\|,$$

ou

$$|\min(l_x, l_y)| > \|\mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}\|. \quad (3.33)$$

Para o caso em que se utiliza a lei de adaptação de parâmetros dada por (3.17), foi provado que  $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$ , o que implica que as condições (3.32) e (3.33) são assintoticamente verificadas para qualquer valor de  $\tilde{\mathbf{h}}$ . Conseqüentemente, o erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ , o que está de acordo com o objetivo de controle.

Por outro lado, considerando a lei de adaptação mais robusta, que inclui o termo de modificação- $\sigma$ , representada pela equação (3.22), foi provado que  $\tilde{\mathbf{v}}$  é finalmente limitado, o que significa que existe um limite  $R$  numa norma do sinal. Logo, para valores pequenos do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$ , a partir de (3.32) conclui-se que o erro de seguimento  $\tilde{\mathbf{h}}$  também será finalmente limitado por  $R\|\mathbf{A}\|/\min(k_x, k_y)$  numa norma do erro de controle. Já para valores grandes do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$ , a estabilidade está garantida com erros de controle finalmente limitados se for cumprida a condição dada por (3.33). Assim, as constantes  $l_x$  e

$l_y$  podem ser escolhidas de maneira que  $|\min(l_x, l_y)| > R\|\mathbf{A}\|$ , o que garante a estabilidade do equilíbrio com erros finalmente limitados para qualquer valor de  $\tilde{\mathbf{h}}$ .

**Nota 3.5.** Deve-se notar que o controlador proposto não garante que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{0}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, os parâmetros estimados podem convergir para valores diferentes dos verdadeiros. Isso não significa um problema, já que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{0}$  não é um requisito para que  $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$ , ou para que  $\tilde{\mathbf{v}}$  seja finalmente limitado.

**Nota 3.6.** É importante salientar que uma plataforma não-holonômica restringe a direção de velocidade linear que pode ser desenvolvida pelo robô. Um robô móvel não-holonômico deve estar orientado tangente ao caminho da trajetória, para segui-la com erro pequeno. Se esse não for o caso, os erros de distância irão crescer. O fato de que os erros de controle convergem para valores limitados mostra que a orientação do robô não precisa ser controlada de forma explícita.

**Nota 3.7.** As leis de adaptação de parâmetros (3.17) e (3.22) realizam ajuste nos valores dos parâmetros estimados sempre que o erro de velocidade é diferente de zero. Isso significa que, neste sistema, considera-se que todo o erro de seguimento de velocidade é causado por erro nos valores estimados dos parâmetros dinâmicos. Tais leis, portanto, não realizam a identificação dos parâmetros, mas uma adaptação em seus valores estimados de modo a reduzir o erro de seguimento de velocidade  $\tilde{\mathbf{v}}$ .

### 3.3.1.2 Resultados de Simulação

Para ilustrar o funcionamento do primeiro controlador dinâmico proposto, representado pela equação (3.10), foram realizadas simulações nos mesmos moldes daquelas apresentadas na seção 3.2, ou seja, foi considerado o modelo completo do robô, representado pela equação (2.13), com os parâmetros identificados do robô Pioneer 3-DX apresentados na Seção 2.4. No controlador cinemático foram mantidos os mesmos ganhos utilizados nas simulações anteriores, quais sejam  $k_x = 0,2$  e  $k_y = 0,2$ . Os ganhos do controlador dinâmico foram ajustados empiricamente, resultando em  $k_u = 4$  e  $k_\omega = 4$ .

Na primeira simulação, o controlador foi utilizado para fazer o robô seguir uma trajetória circular cujo raio varia bruscamente entre  $0,8\text{ m}$  e  $0,7\text{ m}$  a cada  $60\text{ s}$ , a partir de  $t = 50\text{ s}$ . Os parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  utilizados no controlador dinâmico possuem valores 25% maiores em relação aos parâmetros utilizados no modelo do robô. Neste primeiro caso, a adaptação de parâmetros foi mantida desativada.

A Figura 17(a) mostra parte da trajetória percorrida pelo robô, enquanto a Fi-

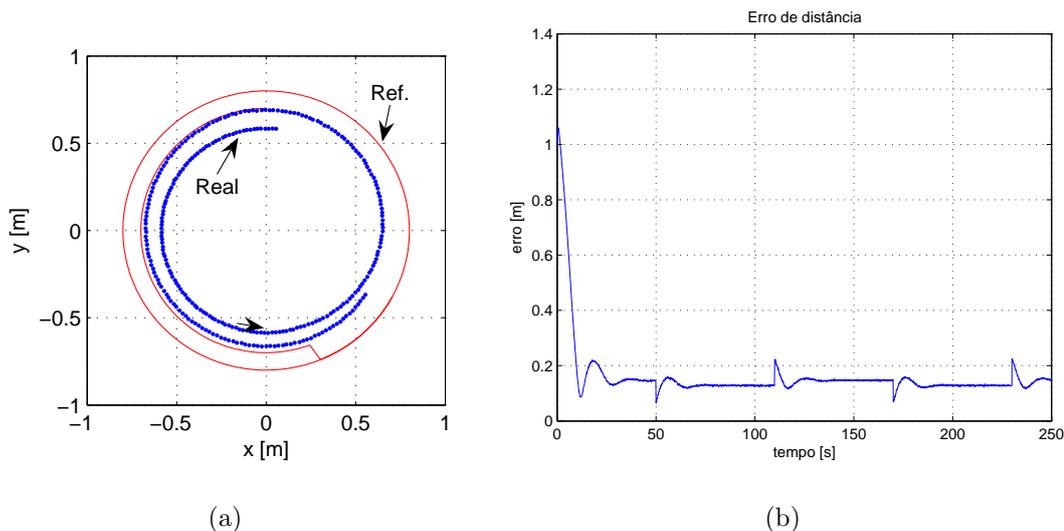


Figura 17: Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação.

Figura 17(b) ilustra a evolução do erro de distância durante a simulação considerada. O grande valor inicial do erro se deve ao fato de que a posição inicial do robô é  $(0, 2; -0, 8) m$ , enquanto a trajetória de referência se inicia em  $(0, 8; 0, 0) m$ . Nota-se que a cada  $60 s$  há um acréscimo instantâneo no valor do erro, que ocorre devido à súbita mudança no raio da trajetória de referência. A figura 17(b) também mostra que o erro não tende a zero em regime permanente, o que ocorre devido ao erro paramétrico existente, mas permanece limitado.

A Figura 18(a) apresenta os valores de velocidade linear e angular enviadas pelo controlador cinemático e desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória circular em questão, enquanto a Figura 18(b) mostra a diferença entre esses valores. Pode-se notar que o erro de velocidade apresenta um valor significativo em regime, o que é causado pela diferença entre os parâmetros dinâmicos do modelo do robô e aqueles considerados no controlador. Com essa diferença, a compensação da dinâmica do robô não é feita corretamente pelo controlador dinâmico.

A mesma simulação foi repetida, mas com a adaptação de parâmetros ativada. Considerou-se a lei de adaptação de parâmetros dada por (3.22), que inclui a modificação- $\sigma$ .

A Figura 19(a) mostra parte da trajetória percorrida pelo robô, enquanto a Figura 19(b) ilustra a evolução do erro de distância durante a simulação considerada. O grande valor inicial do erro se deve ao fato de que a posição inicial do robô é  $(0, 2; -0, 8) m$ ,

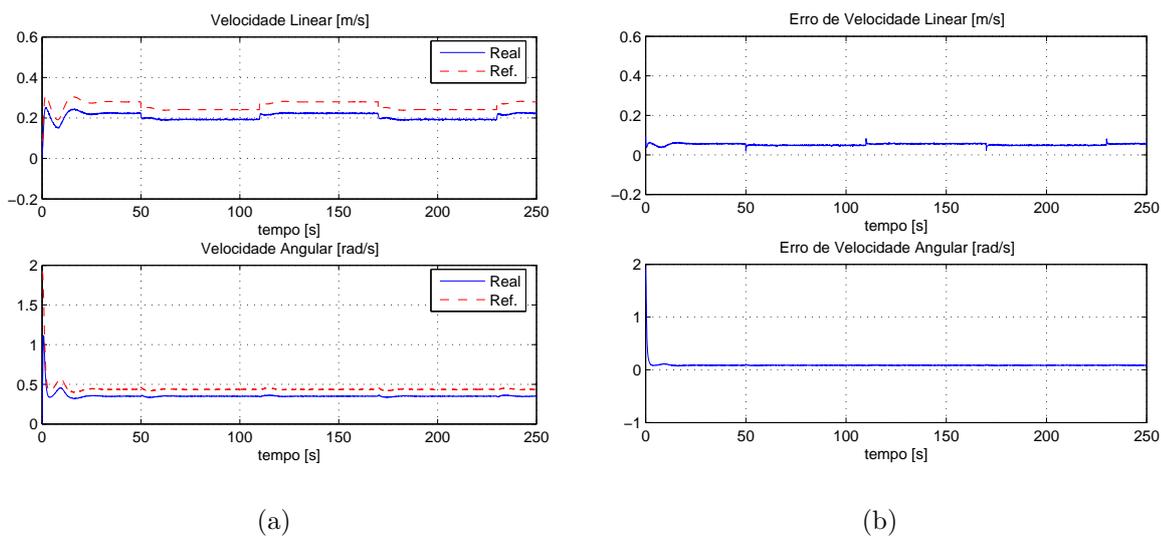


Figura 18: Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação.

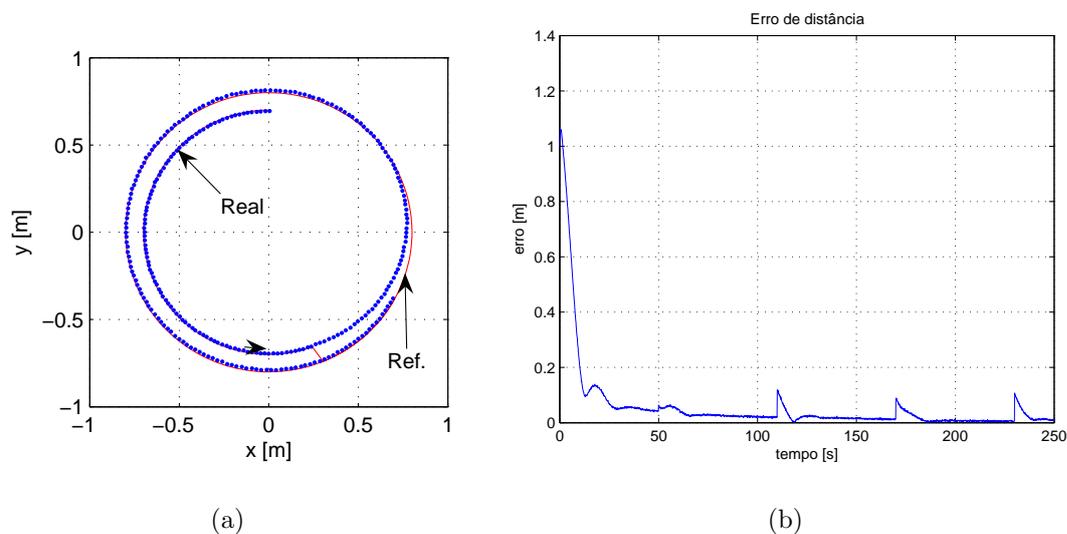


Figura 19: Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação ativada.

enquanto a trajetória de referência se inicia em  $(0, 8; 0, 0)$  m. Nota-se que o erro de distância diminui ao longo do tempo, na medida em que a adaptação de parâmetros é realizada. A cada 60 s há um acréscimo instantâneo no valor do erro, que ocorre devido à súbita mudança no raio da trajetória de referência.

A Figura 20(a) apresenta os valores de velocidade linear e angular enviadas pelo con-

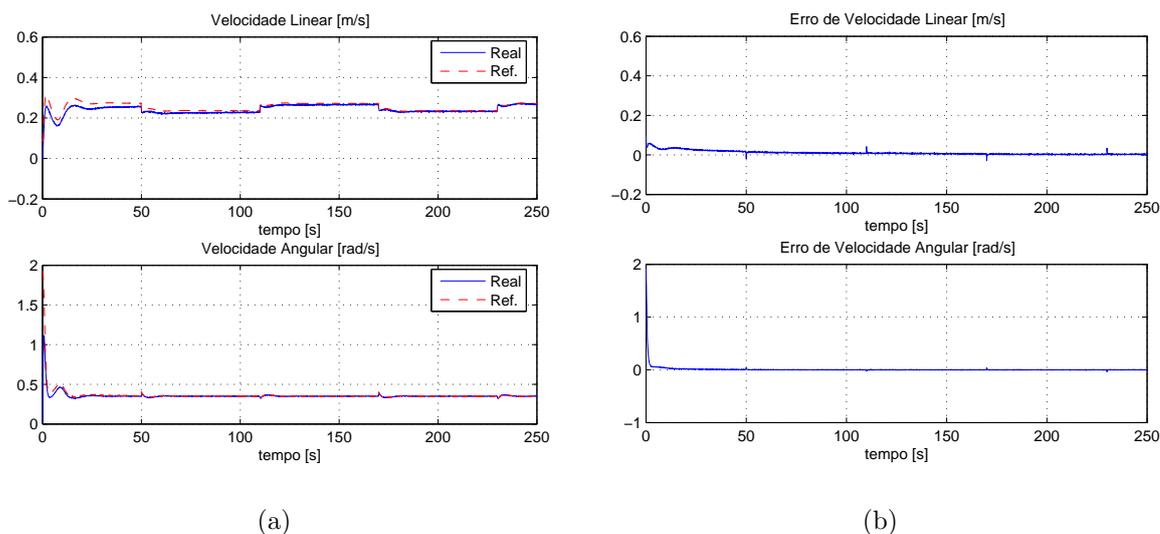


Figura 20: Primeiro controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação ativada.

trolador cinemático e desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória circular em questão, enquanto a Figura 20(b) mostra a diferença entre esses valores. Pode-se perceber que o erro de velocidade apresenta um valor diferente de zero no início da simulação, o que é causado pela diferença entre os parâmetros dinâmicos do modelo do robô e aqueles considerados no controlador, mas esta diferença diminui ao longo do tempo. Ou seja, na medida em que os parâmetros  $\theta$  do controlador são ajustados com base na lei de adaptação, o erro de compensação dinâmica diminui, o que provoca redução no erro de velocidade e a conseqüente redução no erro de seguimento.

A evolução dos parâmetros estimados durante esta simulação é mostrada na Figura 21. Conforme mencionado na *Nota 3.5*, a convergência para os valores verdadeiros não é garantida pela lei de adaptação utilizada.

Foi realizada uma terceira simulação para ilustrar o desempenho do controlador no caso em que os parâmetros usados no controlador são os parâmetros reais (verdadeiros) do robô, ou seja, considerando o caso ideal para a compensação dinâmica. Simulou-se o caso em que o robô deve seguir a trajetória em forma de oito anteriormente apresentada, mantendo inalteradas as características como a trajetória de referência, sua velocidade, os parâmetros do robô, etc. Na presente simulação, a adaptação de parâmetros do controlador dinâmico é feita com base na lei de ajuste (3.22), que possui o termo de modificação- $\sigma$ . No início da simulação a adaptação está desativada, assim permanecendo até  $t = 50s$ . A partir desse instante, a adaptação de parâmetros é ativada, e assim permanece até o

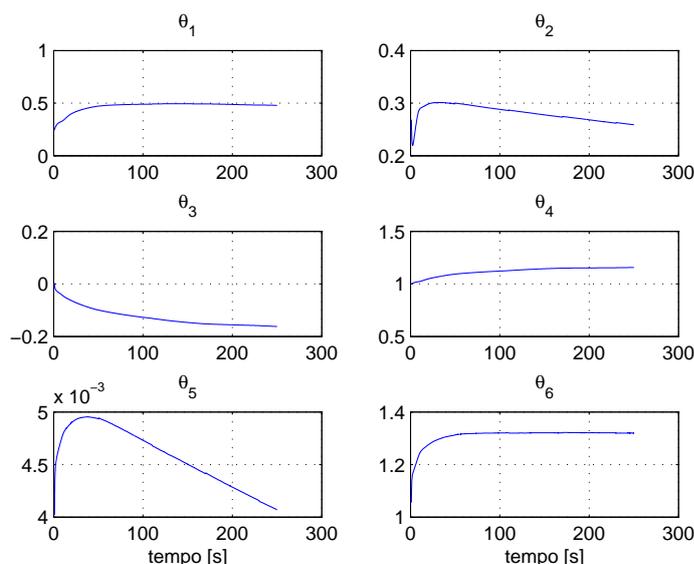


Figura 21: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória circular - primeiro controlador dinâmico.

término da simulação.

As Figuras 22(a), 22(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô antes e depois da adaptação de parâmetros, e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Pode-se notar que, após atingir a trajetória, o controlador é capaz de fazer o robô segui-la com erro muito próximo a zero, mesmo antes de a adaptação de parâmetros ser ativada. Após a adaptação de parâmetros (em  $t = 50s$ ) o erro se mantém praticamente no mesmo valor e a trajetória percorrida pelo robô também não é visivelmente alterada.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 23(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 23(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade são muito próximos a zero já que, nesse caso, considerou-se que a dinâmica do robô é exatamente compensada.

A evolução dos parâmetros estimados durante esta simulação é mostrada na Figura 24. Nota-se que os valores dos parâmetros apresentam variação muito pequena, o que era esperado, já que os parâmetros estimados iniciam com os valores iguais aos do modelo. É importante ressaltar que, de acordo com a equação de adaptação  $\dot{\hat{\theta}} = \gamma^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}}$ , os parâmetros somente devem ter seus valores alterados se o erro de velocidade  $\tilde{\mathbf{v}}$  é diferente de zero. No presente caso, como foi inserido ruído nos sinais de medição de posição

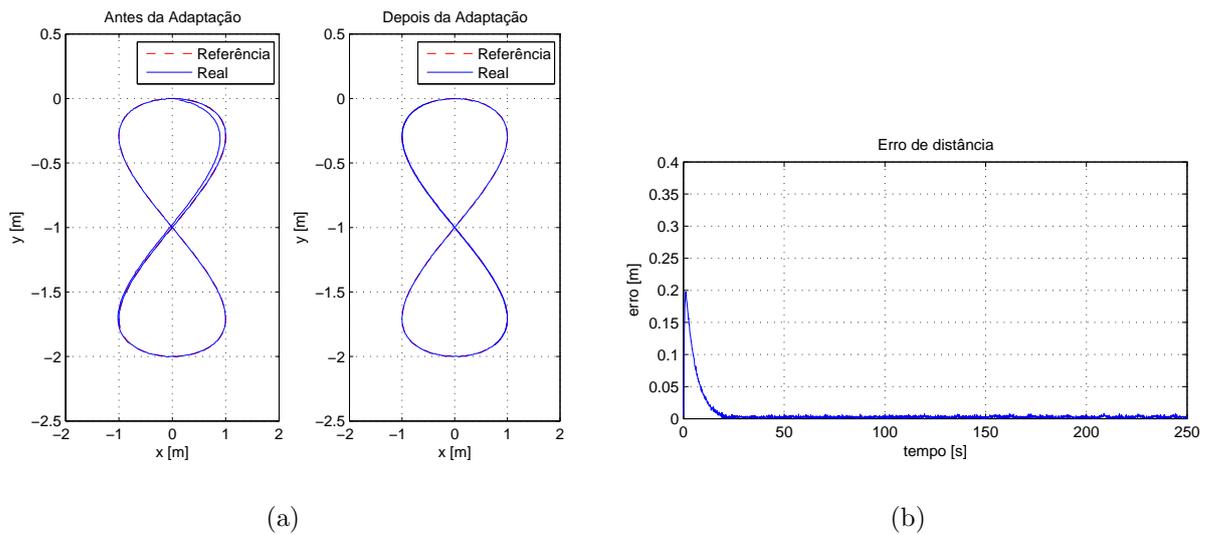


Figura 22: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros exatos.

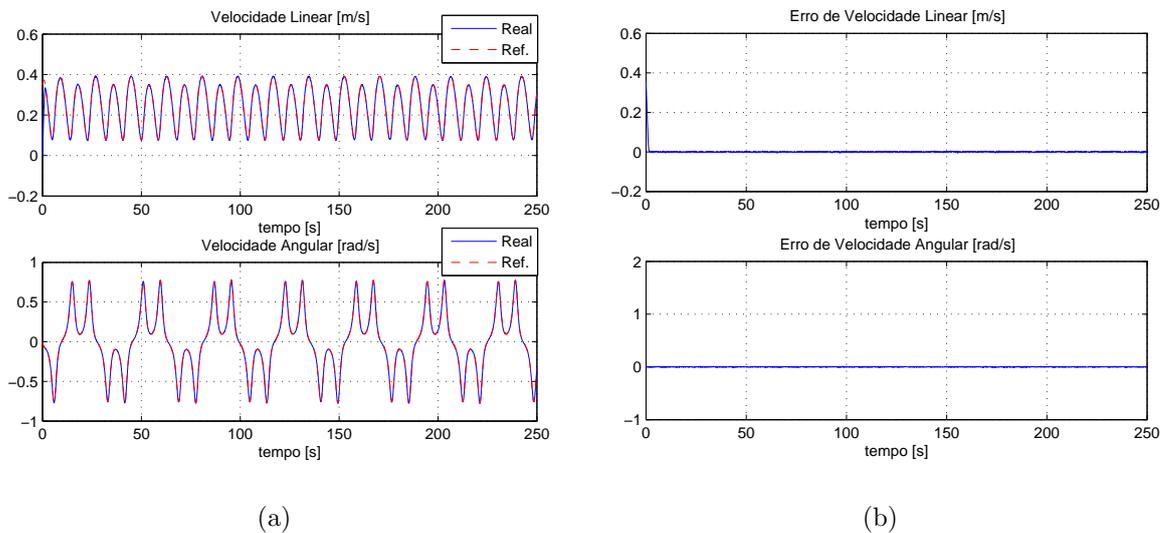


Figura 23: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros exatos.

e de velocidade, existe um pequeno erro entre a velocidade desenvolvida pelo robô e o valor recebido pelo controlador, ainda que a velocidade real do robô seja exatamente igual à velocidade de referência gerada pelo controlador cinemático. Isso faz com que o erro de velocidade seja distinto de zero, provocando pequenas variações nos valores dos parâmetros. Além disso, a lei de adaptação utilizada inclui a modificação- $\sigma$ , ou seja,

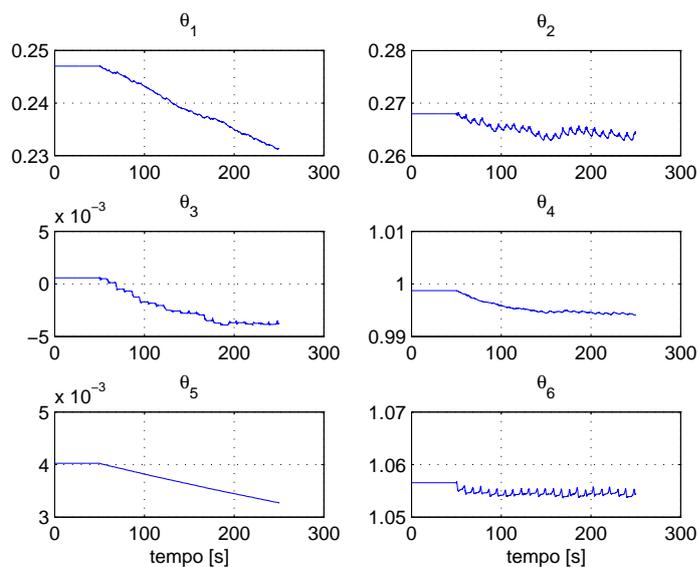


Figura 24: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - primeiro controlador dinâmico.

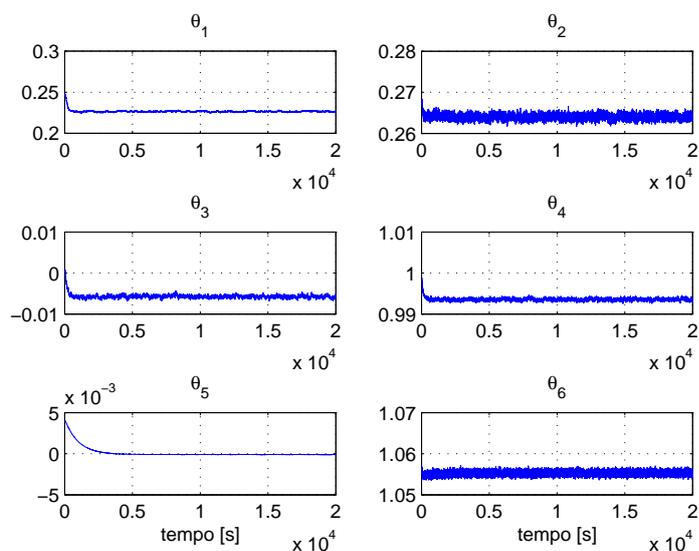


Figura 25: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - primeiro controlador dinâmico.

$\dot{\hat{\theta}} = \gamma^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}} - \gamma^{-1} \mathbf{\Gamma} \hat{\theta}$ . Nesse caso, ainda que o erro de velocidade  $\tilde{\mathbf{v}}$  seja nulo, haverá pequena modificação no valor dos parâmetros, como ilustra a Figura 24.

A mesma simulação foi repetida por um período muito mais longo, de 20.000s. Na Figura 25, que ilustra a evolução dos parâmetros estimados nesse caso, pode-se notar que não ocorre divergência em seus valores.

Ao se comparar os resultados mostrados pelas figuras 22(b) e 23(b), em que o controlador dinâmico está presente, com aqueles das figuras 8(b) e 9(b), em que apenas o controlador cinemático estava presente, percebe-se que a inserção do controlador dinâmico produz uma melhora substancial no desempenho do sistema. Ou seja, a inserção do controlador dinâmico produziu redução no valor do erro de velocidade e, por conseguinte, diminuição no valor do erro de seguimento.

Para ilustrar a utilidade da adaptação de parâmetros quando o robô tem sua dinâmica alterada, repetiu-se a simulação de seguimento da trajetória em forma de oito para o caso em que os parâmetros do robô foram alterados para valores 25% maiores do que os valores carregados no controlador dinâmico. A adaptação de parâmetros do controlador dinâmico também é feita com base na lei de ajuste (3.22), que possui o termo de modificação- $\sigma$ . No início da simulação a adaptação está desativada, assim permanecendo até  $t = 50s$ . A partir desse instante, a adaptação de parâmetros é ativada, assim permanecendo até o término da simulação.

As figuras 26(a) e 26(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô antes e depois da adaptação de parâmetros, e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Pode-se notar que o controlador é capaz de fazer o robô seguir a trajetória de referência, porém com erro grande, antes da adaptação de parâmetros ser ativada. Após sua ativação, em  $t = 50s$ , o erro começa a ser reduzido e se mantém próximo a zero após  $t = 200s$ .

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 27(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 27(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade são grandes antes de  $t = 50s$ , já que a dinâmica do robô não está sendo compensada corretamente. Após o início da adaptação de parâmetros, o erro de velocidade é reduzido gradualmente, apresentando tendência a se manter próximo a zero.

A evolução dos parâmetros estimados durante esta simulação é mostrada na Figura 28. Nota-se que os valores dos parâmetros apresentam variação após a ativação da adaptação, em  $t = 50s$ . A convergência dos parâmetros é ilustrada na Figura 29, obtida com a repetição da simulação anterior, mantendo-se as mesmas condições, mas por um período muito mais longo. Pode-se notar que não há divergência em nenhum de seus valores.

Ao se comparar os resultados mostrados pelas figuras 26(b) e 27(b), tendo o controlador dinâmico presente e adaptação de parâmetros ativa, com aqueles das figuras 12(b) e

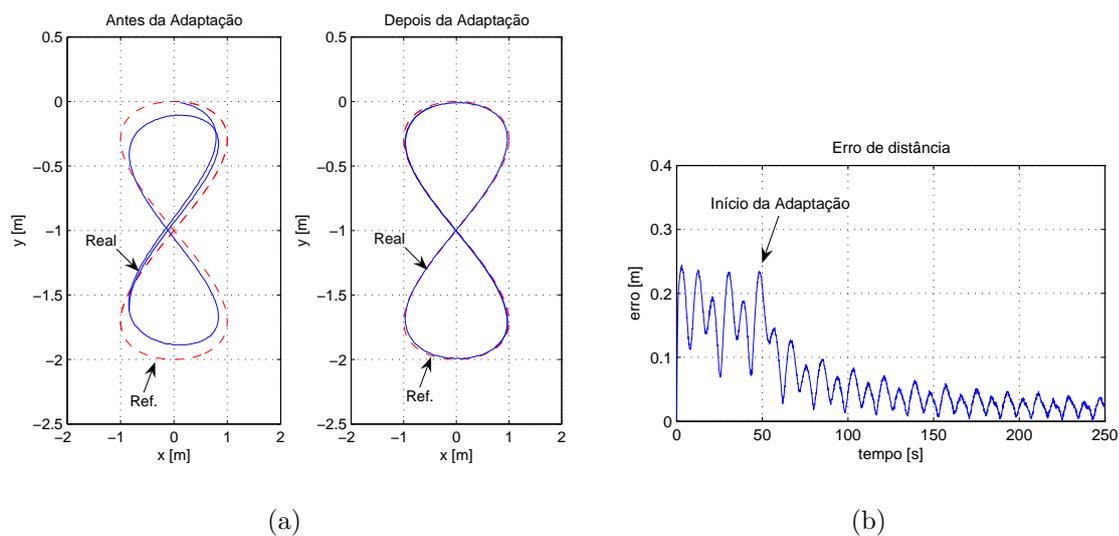


Figura 26: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados.

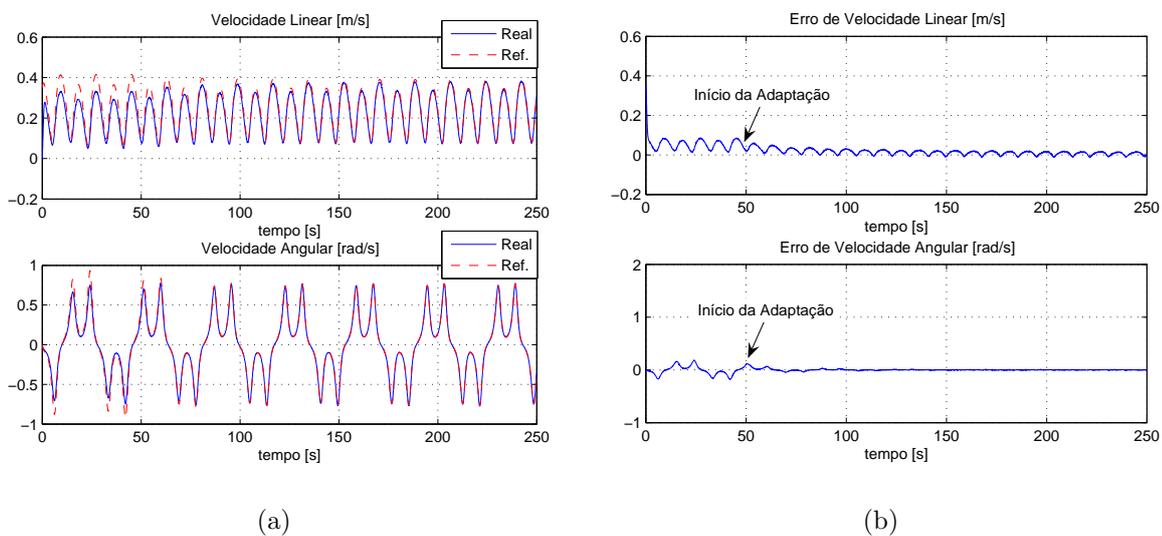


Figura 27: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados.

13(b), em que apenas o controlador cinemático estava presente, percebe-se que a inserção do controlador dinâmico produz uma melhora expressiva no desempenho do sistema após o início da adaptação de parâmetros. Após  $t = 50$ s, quando a adaptação é iniciada, o valor do erro de velocidade é reduzido e, conseqüentemente, ocorre importante diminuição no valor do erro de seguimento.

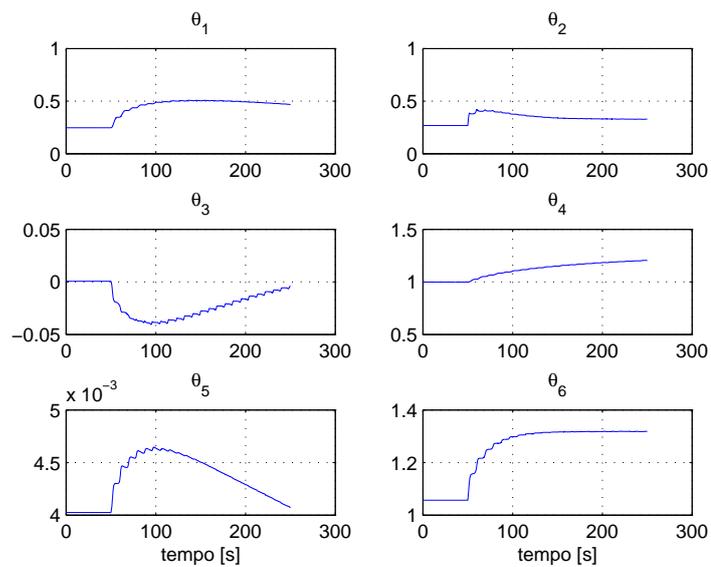


Figura 28: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - primeiro controlador dinâmico.

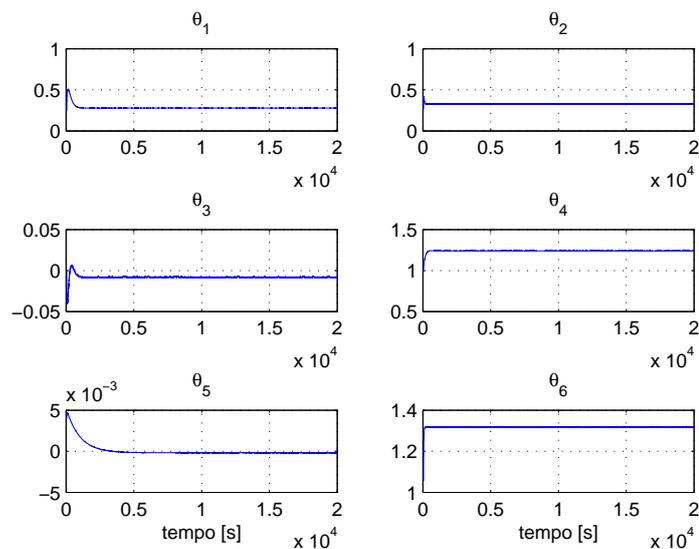


Figura 29: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - primeiro controlador dinâmico.

**Nota 3.8.** Considerando a adaptação dos parâmetros estimados, seu tempo de convergência pode ser reduzido com o aumento dos valores da matriz de ganhos de adaptação  $\gamma^{-1}$ , o que também provocaria redução mais rápida nos erros de controle. No entanto, observou-se em simulações e experimentos que na presença de distúrbios ou ruídos na medição, ganhos de adaptação elevados podem causar oscilação no sistema, prejudicando seu desempenho.

### 3.3.2 Segundo Controlador Dinâmico

O projeto do segundo controlador dinâmico foi realizado com base na equação (2.13), proposta para representar o modelo dinâmico do robô móvel uniciclo. Tal equação é aqui reproduzida por conveniência:

$$\Delta + \mathbf{H}\dot{\mathbf{v}}' + \mathbf{C}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' + \mathbf{F}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' = \mathbf{v}_r. \quad (3.34)$$

Assim como o primeiro controlador dinâmico, este também recebe as referências de velocidade linear  $u_{ref}^c$  e angular  $\omega_{ref}^c$  geradas pelo controlador cinemático, realiza a compensação da dinâmica do veículo, e gera comandos de velocidades linear  $u_{ref}$  e angular  $\omega_{ref}$  que são enviados ao robô. A estrutura do controlador é aquela representada pela Figura 15, que ilustra que  $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$ ,  $\mathbf{v}_d = [u_{ref}^c \ \omega_{ref}^c]^T$  e  $\mathbf{v}_r = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ . Para facilitar a leitura, os componentes do vetor  $\mathbf{v}_d$  serão, a partir de agora, chamados de  $u_d$  e  $\omega_d$ , ou seja,  $\mathbf{v}_d = [u_d \ \omega_d]^T = [u_{ref}^c \ \omega_{ref}^c]^T$ .

O vetor de velocidades desejadas modificadas  $\mathbf{v}'_d$  é definido como

$$\mathbf{v}'_d = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ \omega_d \end{bmatrix}.$$

Assim, o vetor de erro de velocidade é dado por  $\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{v}'_d - \mathbf{v}'$ .

Foi proposta a lei de controle

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{H}(\dot{\mathbf{v}}'_d + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')) + \mathbf{C}\mathbf{v}'_d + \mathbf{F}\mathbf{v}'_d, \quad (3.35)$$

O vetor  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')$  é dado por

$$\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') = \begin{bmatrix} l_u & 0 \\ 0 & l_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh(\frac{k_u}{l_u} I \tilde{u}) \\ \tanh(\frac{k_\omega}{l_\omega} \tilde{\omega}) \end{bmatrix},$$

onde  $k_u > 0$  e  $k_\omega > 0$  são ganhos constantes e  $l_u \in \mathbb{R}$  e  $l_\omega \in \mathbb{R}$  são constantes de saturação. O termo  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')$  provoca saturação para garantir que os sinais de comando enviados ao robô estejam dentro dos limites aceitos pelo veículo, o que evita a saturação de seus atuadores desde que  $\mathbf{v}'_d$  e  $\dot{\mathbf{v}}'_d$  sejam limitados a valores apropriados.

Considerando a lei de controle (3.35), a equação de malha fechada é

$$\mathbf{H}\dot{\tilde{\mathbf{v}}}' = -\mathbf{H}\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}' - \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}' + \Delta. \quad (3.36)$$

Para a análise de estabilidade, considera-se a função candidata de Lyapunov definida positiva  $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{v}}'$ . Sua primeira derivada temporal é  $\dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}'$ , onde considerou-se que os parâmetros dinâmicos do robô são constantes e, portanto,  $\mathbf{H}$  é constante. Usando a equação (3.36) e considerando nulo o vetor de distúrbios  $\mathbf{\Delta}$ , a primeira derivada pode ser escrita como

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}' - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}'.$$

Considerando a propriedade 5 do modelo, de antissimetria da matriz  $\mathbf{C}$ , pode-se escrever que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}'.$$

A propriedade 1 afirma que  $\mathbf{H}$  é uma matriz simétrica e definida positiva. Os termos do vetor  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')$  possuem o mesmo sinal dos termos de  $\tilde{\mathbf{v}}'$ . A propriedade 3 afirma que a matriz  $\mathbf{F}$  é simétrica e definida positiva se  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$ . Portanto, considerando que  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$ , pode-se concluir que  $\dot{V} < 0$ , ou seja,  $\tilde{\mathbf{v}}' \in L_\infty$  e  $\tilde{\mathbf{v}}' \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$  e, portanto,  $\tilde{\mathbf{v}} \in L_\infty$  e  $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$ , o que mostra que o objetivo de controle é cumprido. Como foi discutido na seção 2.4, os robôs que tiveram seus parâmetros identificados (Pioneer 2 e Pioneer 3-DX, da empresa Mobile Robots, e a cadeira de rodas robótica) cumprem a condição anterior.

Na seção 3.5 a análise de estabilidade deste controlador é retomada considerando-se que o vetor de distúrbios é não nulo, ou seja,  $\mathbf{\Delta} \neq \mathbf{0}$ .

Uma propriedade adicional do sinal de erro  $\tilde{\mathbf{v}}'$  é o fato de ser quadrado integrável, como se mostra a seguir. Integrando  $\dot{V}$ , resulta em

$$V(T) - V(0) = - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') dt - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}' dt.$$

Desprezando o termo positivo  $V(T)$ ,

$$-V(0) \leq - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') dt - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}' dt.$$

Considerando que  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$  e aplicando a propriedade 3, pode-se escrever que

$$V(0) \geq \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') dt + \inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F})) \int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 dt,$$

onde  $\inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F}))$  representa o ínfimo do menor autovalor de  $\mathbf{F}$ . A desigualdade anterior

mostra que os termos estão todos limitados e, portanto, pode ser escrita como

$$V(0) \geq \inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F})) \int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 dt + \alpha,$$

onde  $\alpha = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') dt$ . Logo,

$$\int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 dt \leq \frac{V(0) - \alpha}{\inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F}))} \Rightarrow \int_0^\infty \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 dt \leq \frac{V(0) - \alpha}{\inf(\lambda_{\min}(\mathbf{F}))}, \quad (3.37)$$

o que permite concluir que  $\tilde{\mathbf{v}}'$  é quadrado integrável, i.e.,  $\tilde{\mathbf{v}}' \in L_2$ .

Agora é realizada uma análise equivalente à que foi feita na seção 3.3.1, considerando-se que não há seguimento perfeito de velocidade. Ou seja, considera-se que  $\tilde{\mathbf{v}}' \neq \mathbf{0}$  e, portanto,  $\tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ . Como foi visto, pode-se escrever a equação de erro (3.6) como

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}, \quad (3.38)$$

onde

$$\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}) \\ \tanh(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}) \end{bmatrix},$$

e o vetor  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}$  representa o erro de seguimento de velocidade  $[\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$ , sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Considerando-se a função candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0$ , cuja primeira derivada temporal é

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = \tilde{\mathbf{h}}^T (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}})),$$

verifica-se que uma condição suficiente para  $\dot{V} < 0$  é  $\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) > |\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}|$ . Para valores pequenos do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$ , pode-se escrever que  $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) \approx \mathbf{K}_{xy} \tilde{\mathbf{h}}$ , onde

$$\mathbf{K}_{xy} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}.$$

Portanto, uma condição suficiente para estabilidade assintótica é que

$$\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{K}_{xy} \tilde{\mathbf{h}} > |\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}|,$$

$$\min(k_x, k_y) \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2 > \|\tilde{\mathbf{h}}\| \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}\|,$$

ou

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\| > \frac{\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}\|}{\min(k_x, k_y)}. \quad (3.39)$$

Por outro lado, se os valores do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$  são muito grandes, o termo  $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}})$  satura. Nesse caso, como já mostrado na subseção 3.3.1.1, uma condição suficiente para estabilidade assintótica é

$$|\min(l_x, l_y)| > \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}\|. \quad (3.40)$$

Foi provado que  $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$ . Logo, as condições (3.39) e (3.40) são assintoticamente verificadas para qualquer valor de  $\tilde{\mathbf{h}}$ . Consequentemente, o erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ , o que está de acordo com o objetivo de controle.

### 3.3.2.1 Adaptação de Parâmetros

Na seção 3.3.2 considerou-se que a dinâmica do robô é exatamente conhecida. Aqui, a adaptação dos parâmetros usados no controlador é considerada, levando-se em conta que os parâmetros dinâmicos podem não ser corretamente identificados, ou podem variar de uma tarefa a outra. A equação (3.34) pode ser escrita, em seu formato de parametrização linear, como

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{G}'\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}. \quad (3.41)$$

Considerando a incerteza paramétrica, a lei de controle (3.35) deve ser escrita como

$$\mathbf{v}_r = \hat{\mathbf{H}}(\dot{\mathbf{v}}'_d + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')) + \hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}'_d + \hat{\mathbf{F}}\mathbf{v}'_d, \quad (3.42)$$

onde  $\hat{\mathbf{H}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$ , e  $\hat{\mathbf{F}}$  são estimativas de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{C}$ , e  $\mathbf{F}$ , respectivamente. Para projetar a lei de adaptação, a equação da lei de controle (3.42) é reescrita em seu formato de parametrização linear, ou seja

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & -\omega_d\omega & u_d & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & (Iu_d\omega - Iu\omega_d) & 0 & u\omega_d & \omega_d \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.43)$$

onde  $\sigma_1 = \dot{u}_d + l_u \tanh(\frac{k_u}{l_u}\tilde{u})$  e  $\sigma_2 = \dot{\omega}_d + l_\omega \tanh(\frac{k_\omega}{l_\omega}\tilde{\omega})$ . O vetor de erro paramétrico é definido como  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ , onde  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é o vetor de estimativa de parâmetros. Assim, (3.43) pode ser escrita como  $\mathbf{v}_r = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ , ou

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}\mathbf{v}'_d + \mathbf{F}\mathbf{v}'_d + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.44)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{v}}'_d + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')$ . Recordando que  $\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{v}'_d - \mathbf{v}'$ , pode-se concluir que  $\dot{\mathbf{v}}'_d = \dot{\tilde{\mathbf{v}}}' + \dot{\mathbf{v}}'$ . Portanto,  $\boldsymbol{\sigma} = \dot{\tilde{\mathbf{v}}}' + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') + \dot{\mathbf{v}}'$ . Substituindo este termo na equação (3.44), a equação do sistema em malha fechada torna-se

$$-\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{H}(\dot{\tilde{\mathbf{v}}}' + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')) + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}' + \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}'. \quad (3.45)$$

Seja

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}' + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}} > 0$$

a função candidata de Lyapunov. Sua primeira derivada temporal, considerando que os parâmetros  $\theta_i$  são constantes, é

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H}\dot{\tilde{\mathbf{v}}}' + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}.$$

Usando (3.45), resulta que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^T (\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}' + \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}') - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H}\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (3.46)$$

Considerando que os valores dos parâmetros não se alteram durante a execução de uma tarefa, i.e.,  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ , pode-se escrever que  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ . Escolhendo a lei de ajuste de parâmetros como

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}}', \quad (3.47)$$

e usando a propriedade 5 do modelo, de antissimetria de  $\mathbf{C}$ , a equação (3.46) resulta em

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}' - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H}\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}'),$$

que é semidefinida negativa. Assim, pode-se concluir que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in L_\infty$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}' \in L_\infty$  e, portanto,  $\tilde{\mathbf{v}} \in L_\infty$ .

Integrando  $\dot{V}$ , tem-se que

$$V(T) - V(0) = -\int_0^T \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H}\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') dt - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}' dt.$$

Desprezando-se o termo positivo  $V(T)$ , e usando o mesmo raciocínio adotado na subseção 3.3.1.2, pode-se concluir que

$$\int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 dt \leq \frac{V(0) - \alpha}{\lambda_{\min}(\mathbf{F})} \Rightarrow \int_0^\infty \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 dt \leq \frac{V(0) - \alpha}{\lambda_{\min}(\mathbf{F})}, \quad (3.48)$$

onde

$$\alpha = \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') dt.$$

Ou seja,  $\tilde{\mathbf{v}}'$  é um sinal quadrado integrável, i.e.,  $\tilde{\mathbf{v}}' \in L_2$  e, portanto,  $\tilde{\mathbf{v}} \in L_2$ .

Já que  $\tilde{\mathbf{v}}'$  e  $\mathbf{v}'_d$  são limitados, como  $\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{v}'_d - \mathbf{v}'$ , pode-se notar que  $\mathbf{v}'$  também é limitado. Logo, como  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{F}$  são limitadas, e considerando-se que  $\dot{\mathbf{v}}'_d$  também é limitado, pode-se afirmar que  $\mathbf{G}$  é limitada. A propriedade 4 do modelo garante que  $\mathbf{H}$  é constante, e sabe-se que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}'$  e  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')$  são limitados. Então, da equação (3.45) pode-se verificar que  $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}'$  é limitado, i.e.,  $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}' \in L_{\infty}$ . Como  $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}' \in L_{\infty}$  e  $\tilde{\mathbf{v}}' \in L_2$ , o Lema de Barbalat garante que  $\tilde{\mathbf{v}}'(t) \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$ . Logo,  $\tilde{\mathbf{v}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$ , o que prova que o objetivo de controle é cumprido.

A lei de adaptação (3.47) funciona como um integrador e, por isso, pode provocar problemas de robustez em caso de erros nas medições, ruído ou perturbações. Como já mencionado na seção 3.3.1.1, uma possível maneira de se evitar a deriva paramétrica é através do desligamento da adaptação de parâmetros quando o valor de erro atinge determinado limite mínimo, como ilustrado em (MARTINS et al., 2007c). Outra forma conhecida de se evitar a deriva paramétrica é a modificação da lei de adaptação de parâmetros através da introdução de um termo de modificação- $\sigma$  (ou *Leakage Term*) (KAUFMAN; SOBEL, 1998; BOYD; SASTRY, 1989). Com a introdução desse termo, ao invés de (3.47), a lei de adaptação de parâmetros

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \gamma \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}}' - \gamma \Gamma \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.49)$$

é utilizada, onde  $\Gamma \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é uma matriz diagonal de ganhos positivos. Para analisar a estabilidade do equilíbrio do sistema em malha fechada considerando a lei de ajuste (3.49), será adotado o mesmo raciocínio apresentado na seção 3.3.1.1. Inicialmente, (3.49) será reescrita como

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \gamma \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}}' - \gamma \Gamma \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \gamma \Gamma \boldsymbol{\theta}.$$

Substituindo a equação anterior em (3.46), resulta que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}' - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma \boldsymbol{\theta}.$$

Considerando valores pequenos de  $\tilde{\mathbf{v}}'$ , tem-se que  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') \approx \mathbf{K}_v \tilde{\mathbf{v}}'$ . São definidas as seguintes constantes:  $\vartheta_{\Gamma} = \kappa_{max}(\Gamma)$ ,  $\mu_F = \chi(\mathbf{F})$ ,  $\mu_{\Gamma} = \chi(\Gamma)$ ,  $\mu_{HK} = \chi(\mathbf{H} \mathbf{K}_v)$ ,  $\mu_{FHK} = \mu_F + \mu_{HK}$ , onde  $\chi(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{min}(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})}$  é o valor singular mínimo de  $\mathbf{Z}$ ,  $\kappa_{max}(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})}$  denota o valor singular máximo de  $\mathbf{Z}$ , e  $\lambda_{min}(\cdot)$  e  $\lambda_{max}(\cdot)$  são funções para obtenção do

menor e do maior autovalor de uma matriz, respectivamente.

Assim,  $\dot{V}$  pode ser escrita como

$$\dot{V} \leq -\mu_{FHK}\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \mu_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\|, \quad (3.50)$$

Considerando a diferença quadrada

$$\left(\frac{1}{\xi}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi\|\boldsymbol{\theta}\|\right)^2 = \frac{1}{\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - 2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| + \xi^2\|\boldsymbol{\theta}\|^2,$$

e rearranjando seus termos, tem-se que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| = \frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi\|\boldsymbol{\theta}\|\right)^2,$$

sendo  $\xi \in \mathbb{R}^+$ . Desprezando-se o termo negativo, a desigualdade

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| \leq \frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2 \quad (3.51)$$

é obtida. Substituindo (3.51) em (3.50), resulta em

$$\dot{V} \leq -\mu_{FHK}\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \mu_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma\left(\frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2\right),$$

ou, de forma equivalente,

$$\dot{V} \leq -\mu_{FHK}\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \mu_\Gamma\left(1 - \frac{\vartheta_\Gamma}{\mu_\Gamma}\frac{1}{2\xi^2}\right)\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma\frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2. \quad (3.52)$$

Em seguida, os parâmetros  $\alpha_1 = \mu_{FHK} > 0$  e  $\alpha_2 = \mu_\Gamma\left(1 - \frac{\vartheta_\Gamma}{\mu_\Gamma}\frac{1}{2\xi^2}\right) > 0$  são definidos, com  $\xi$  convenientemente selecionado. Logo, (3.52) pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq -\alpha_1\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \alpha_2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \rho, \quad (3.53)$$

onde

$$\rho = \vartheta_\Gamma\frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2.$$

Agora, a função candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}'^T\mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}' + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  pode ser escrita como

$$V \leq \beta_1\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 + \beta_2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2, \quad (3.54)$$

onde  $\beta_1 = \frac{1}{2}\vartheta_H$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2}\vartheta_\gamma$ ,  $\vartheta_H = \kappa_{max}(\mathbf{H})$ ,  $\vartheta_\gamma = \kappa_{max}(\boldsymbol{\gamma})$ , com  $\kappa_{max}(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})}$  denotando o maior valor singular de  $\mathbf{Z}$ . Então,

$$\dot{V} \leq -\Lambda V + \rho, \quad (3.55)$$

com  $\Lambda = \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}$ . Já que  $\rho$  é limitado, (3.55) implica que  $\tilde{\mathbf{v}}'$  e  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  são finalmente limitados. Logo,  $\tilde{\mathbf{v}}$  também é finalmente limitado. Portanto, considerando-se valores pequenos do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$  e uma cota  $R$  em uma norma do sinal  $\tilde{\mathbf{v}}$ , recordando (3.39) pode-se concluir que o erro de seguimento  $\tilde{\mathbf{h}}$  também será finalmente limitado por  $\frac{R\|\mathbf{A}\|}{\min(k_x, k_y)}$  numa norma do erro de controle.

Por outro lado, se os valores do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$  são muito grandes, o termo  $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}})$  satura. Nesse caso, como já mostrado na subseção 3.3.1.1, uma condição suficiente para estabilidade assintótica é

$$|\min(l_x, l_y)| > \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}\|. \quad (3.56)$$

Para o caso em que se utiliza a lei de adaptação de parâmetros dada por (3.47), foi provado que  $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$ , o que implica que as condições (3.39) e (3.56) são assintoticamente verificadas para qualquer valor de  $\tilde{\mathbf{h}}$ . Consequentemente, o erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ , o que está de acordo com o objetivo de controle.

Por outro lado, considerando a lei de adaptação mais robusta, que inclui o termo de modificação- $\sigma$ , representada pela equação (3.49), foi provado que  $\tilde{\mathbf{v}}$  é finalmente limitado, o que significa que existe um limite  $R$  numa norma do sinal. Logo, para valores pequenos do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$ , a partir de (3.39) conclui-se que o erro de seguimento  $\tilde{\mathbf{h}}$  também será finalmente limitado por  $R\|\mathbf{A}\|/\min(k_x, k_y)$  numa norma do erro de controle. Já para valores grandes do erro de controle  $\tilde{\mathbf{h}}$ , a estabilidade está garantida com erros de controle finalmente limitados se for cumprida a condição dada por (3.56). Assim, as constantes  $l_x$  e  $l_y$  podem ser escolhidas de maneira que  $|\min(l_x, l_y)| > R\|\mathbf{A}\|$ , o que garante a estabilidade do equilíbrio com erros finalmente limitados para qualquer valor de  $\tilde{\mathbf{h}}$ .

### 3.3.2.2 Resultados de Simulação

Para ilustrar o funcionamento do segundo controlador dinâmico proposto, representado pela equação (3.42), foram realizadas simulações equivalentes às aquelas apresentadas na seção 3.3.1.2, ou seja, foi considerado o modelo completo do robô representado pela equação (2.13) com os parâmetros identificados do robô Pioneer 3-DX apresentados na Seção 2.4. Para que pudesse ser feita uma comparação entre resultados, foram usados

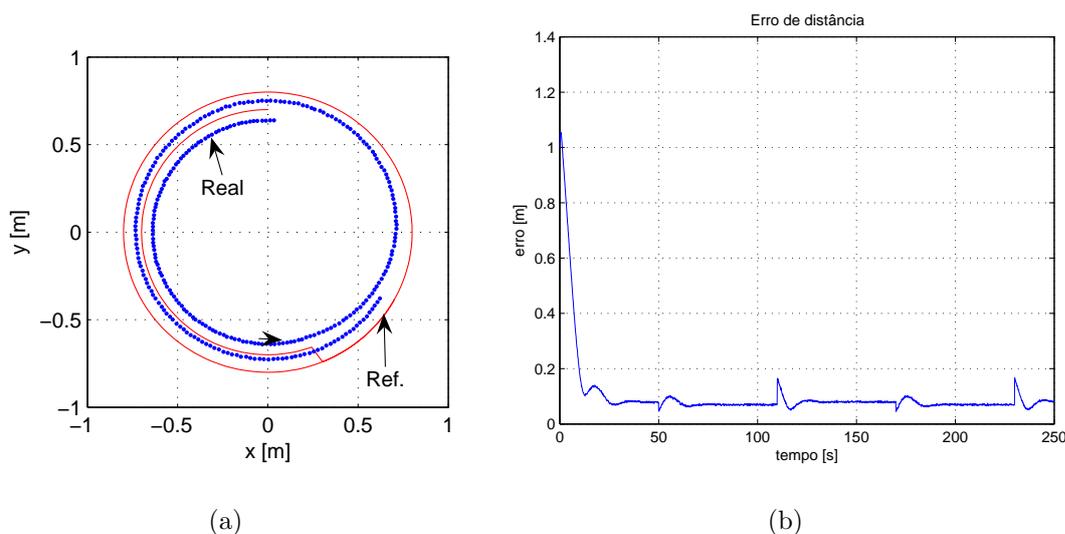


Figura 30: Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação de parâmetros.

os mesmos valores de ganhos utilizados nas simulações da seção 3.3.1.2, quais sejam,  $k_x = 0,2$ ,  $k_y = 0,2$ ,  $k_u = 4$  e  $k_\omega = 4$ .

Na primeira simulação, o controlador foi utilizado para fazer o robô seguir uma trajetória circular cujo raio varia bruscamente entre  $0,8\text{ m}$  e  $0,7\text{ m}$  a cada  $60\text{ s}$ , a partir de  $t = 50\text{ s}$ . Os parâmetros  $\theta$  utilizados no controlador dinâmico possuem valores 25% maiores em relação aos parâmetros utilizados no modelo do robô. Neste primeiro caso, a adaptação de parâmetros foi mantida desativada.

A Figura 30(a) mostra parte da trajetória percorrida pelo robô, enquanto a Figura 30(b) ilustra a evolução do erro de distância durante a simulação considerada. O grande valor inicial do erro se deve ao fato de que a posição inicial do robô é  $(0,2; -0,8)\text{ m}$ , enquanto a trajetória de referência se inicia em  $(0,8; 0,0)\text{ m}$ . Nota-se que a cada  $60\text{ s}$  há um acréscimo instantâneo no valor do erro, que ocorre devido à mudança no raio da trajetória de referência. A figura 30(b) também mostra que o erro não tende a zero em regime permanente, o que ocorre devido ao erro paramétrico existente, mas permanece limitado.

A Figura 31(a) apresenta os valores de velocidade linear e angular enviadas pelo controlador cinemático e desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória circular em questão, enquanto a Figura 31(b) mostra a diferença entre esses valores. Pode-se notar que o erro de velocidade apresenta um valor de regime diferente de zero, o que é causado

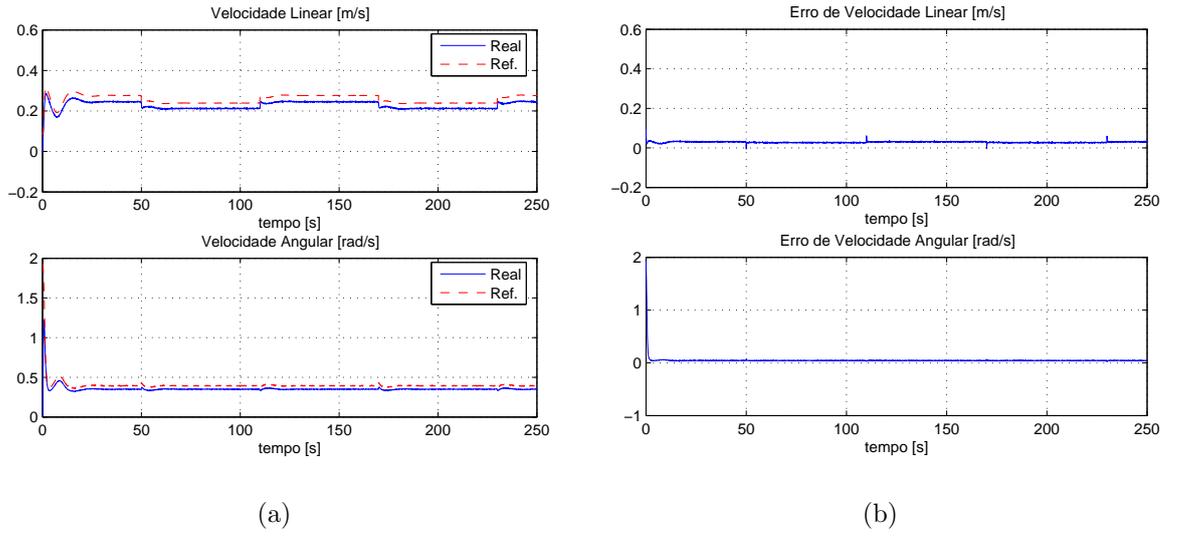


Figura 31: Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e sem adaptação de parâmetros.

pela diferença entre os parâmetros dinâmicos do modelo do robô e aqueles considerados no controlador. Com essa diferença, a compensação da dinâmica do robô não é feita corretamente pelo controlador dinâmico. No entanto, quando se faz uma comparação entre as figuras 18(b) e 31(b), nota-se que o erro de velocidade obtido na simulação em que se usou o segundo controlador dinâmico é menor do que aquele obtido quando se usou o primeiro controlador dinâmico. Essa diferença pode ser entendida pela análise das equações dos controladores, que são repetidas aqui por conveniência. O primeiro controlador dinâmico é representado pela equação

$$\mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} \dot{u}_d + k_u \tilde{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega}_d + k_\omega \tilde{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

e o segundo controlador dinâmico é dado por

$$\mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} \dot{u}_d + l_u \tanh\left(\frac{k_u}{l_u} \tilde{u}\right) & 0 & -\omega_d \omega & u_d & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega}_d + l_\omega \tanh\left(\frac{k_\omega}{l_\omega} \tilde{\omega}\right) & (I u_d \omega - I u \omega_d) & 0 & u \omega_d & \omega_d \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Nota-se que o segundo controlador apresenta termos de saturação do sinal de erro que não existem no primeiro controlador. Além disso, o segundo controlador utiliza sinais de velocidade e aceleração desejados (gerados pelo controlador cinemático) e velocidades reais no cálculo de  $\mathbf{v}_r$ , enquanto o primeiro controlador utiliza apenas os valores desejados de aceleração e de velocidades reais desenvolvidas pelo robô. De acordo com as figuras

31(a) e 18(a), durante o seguimento da trajetória circular, as velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô são um pouco menores do que os valores de referência gerados pelo controlador cinemático. Como o segundo controlador usa os valores desejados de velocidade (fornecidos pelo controlador cinemático e, neste caso, maiores em módulo do que os valores reais) na geração dos sinais de controle, estes apresentam valores mais elevados, o que proporciona menor erro de velocidade para este caso específico. A diferença entre os controladores dinâmicos se reflete no erro de seguimento de trajetória. Comparando-se as figuras 17(b) e 30(b), referentes à simulação da trajetória circular quando o robô está carregado e não há adaptação de parâmetros, percebe-se que, em regime permanente, o erro de seguimento foi cerca de  $0,125m$  quando se usou o primeiro controlador dinâmico, e de  $0,08m$  quando se usou o segundo controlador. Ou seja, a diferença entre os valores de erro de regime ficou em torno de 60%. Como será visto a seguir, o erro de seguimento apresentado por ambos os controladores é equivalente quando a adaptação de parâmetros está ativada.

A mesma simulação foi repetida, mas com a adaptação de parâmetros ativada. Foi considerada a lei de adaptação de parâmetros dada por (3.49), que inclui a modificação- $\sigma$ . A Figura 32(a) mostra parte da trajetória percorrida pelo robô, enquanto a Figura 32(b) ilustra a evolução do erro de distância durante a simulação considerada. Nota-se que o erro de distância diminui ao longo do tempo, na medida em que a adaptação de parâmetros é realizada. A cada 60 s há um acréscimo instantâneo no valor do erro, que ocorre devido à mudança no raio da trajetória de referência.

A Figura 33(a) apresenta os valores de velocidade linear e angular enviadas pelo controlador cinemático e desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória circular em questão, enquanto a Figura 33(b) mostra a diferença entre esses valores. Pode-se perceber que o erro de velocidade apresenta um valor diferente de zero no início da simulação, o que é causado pela diferença de 25% entre os parâmetros dinâmicos do modelo do robô e aqueles considerados no controlador, mas esta diferença diminui ao longo do tempo. Ou seja, na medida em que os parâmetros  $\theta$  do controlador são ajustados com base na lei de adaptação, o erro de compensação dinâmica diminui, o que provoca redução no erro de velocidade e, conseqüentemente, redução no erro de seguimento.

Ao se comparar as figuras 19(b) e 20(b) com as figuras 32(b) e 33(b), nota-se que os valores de erro de seguimento e de velocidade em regime permanente são muito similares quando a adaptação de parâmetros está ativada, considerando ambos os controladores propostos. A evolução dos parâmetros estimados durante esta simulação é mostrada na Figura 34.

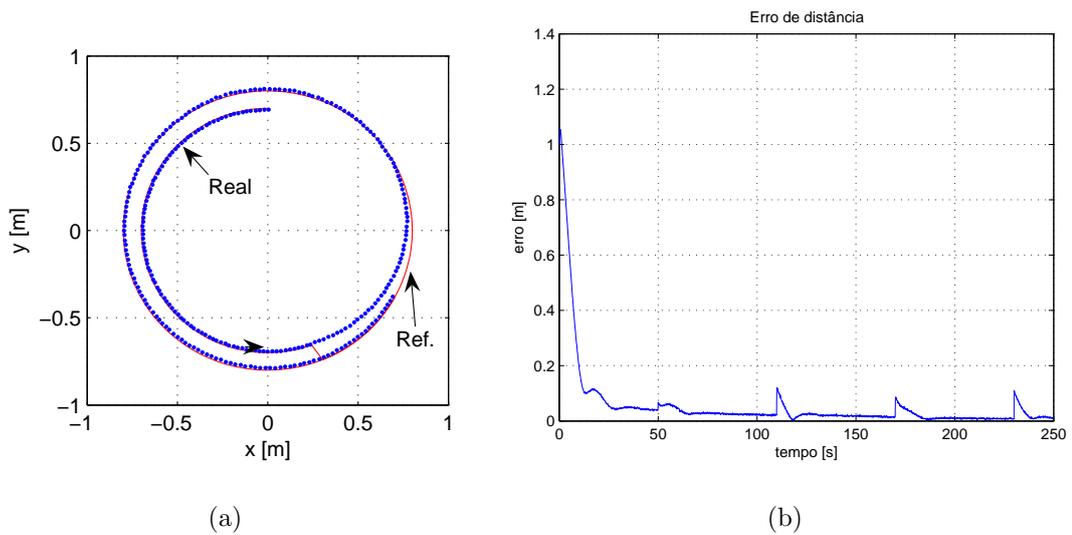


Figura 32: Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) Erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação de parâmetros.

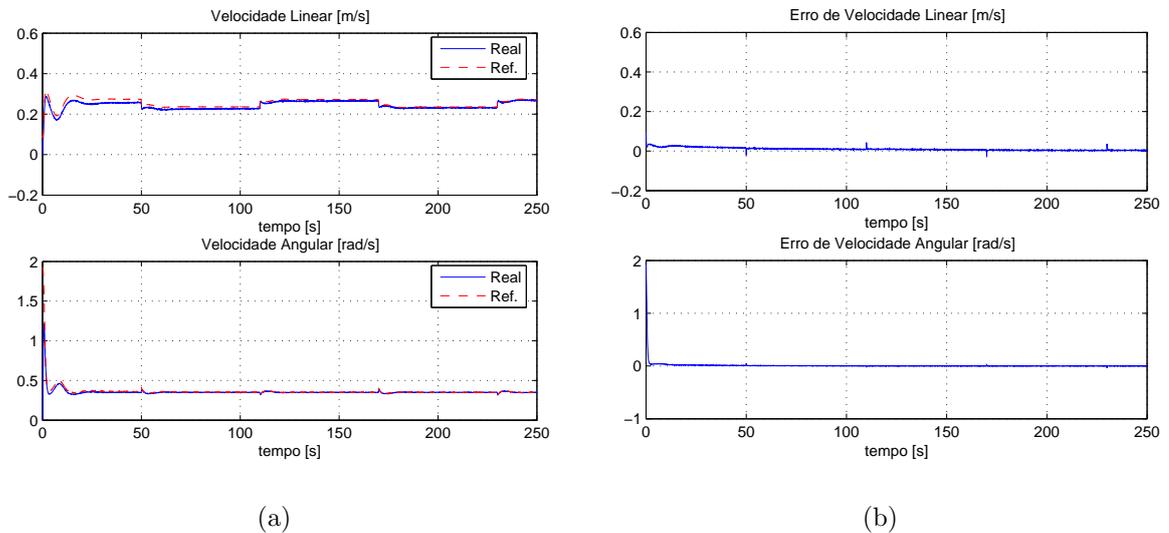


Figura 33: Segundo controlador dinâmico: trajetória circular. (a) Velocidades linear e angular enviadas e desenvolvidas pelo robô; (b) erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados e com adaptação de parâmetros.

Uma terceira simulação ilustra o desempenho do controlador no caso em que os parâmetros usados no controlador são os parâmetros reais do robô, ou seja, considerando o caso ideal para a compensação dinâmica. Simulou-se o caso em que o robô deve seguir a trajetória em forma de oito anteriormente apresentada, mantendo inalteradas as características como a trajetória de referência, sua velocidade, os parâmetros do robô, etc.

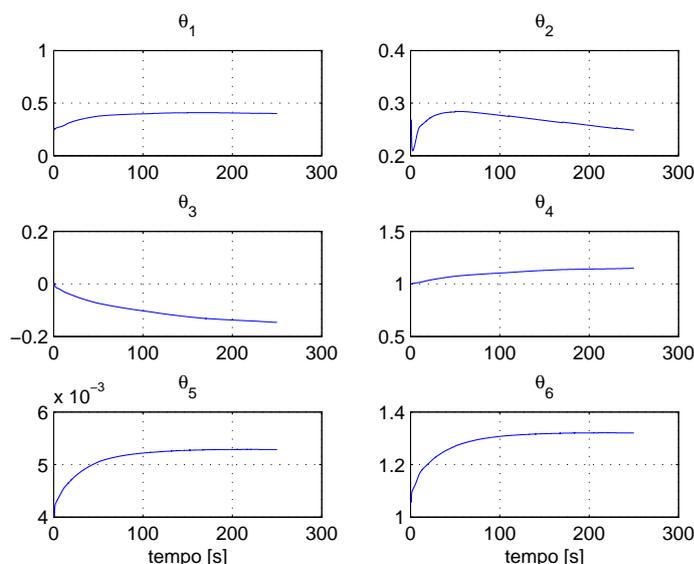


Figura 34: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória circular - segundo controlador dinâmico.

Na presente simulação, a adaptação de parâmetros do controlador dinâmico é feita com base na lei de ajuste (3.49), que inclui o termo de modificação- $\sigma$ . No início da simulação a adaptação está desativada, assim permanecendo até  $t = 50s$ . A partir desse instante, a adaptação de parâmetros é ativada, assim permanecendo até o término da simulação.

As Figuras 35(a) e 35(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô antes e depois da adaptação de parâmetros, e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Pode-se notar que, após atingir a trajetória, o controlador é capaz de fazer o robô segui-la com erro muito próximo a zero, mesmo antes de a adaptação de parâmetros ser ativada. Após a adaptação de parâmetros (em  $t = 50s$ ) o erro se mantém praticamente no mesmo valor e a trajetória percorrida pelo robô também não é visivelmente alterada. Comparando-se estes resultados com aqueles apresentados pelas figuras 22(a) e 22(b), nota-se que o desempenho de ambos os controladores dinâmicos propostos é equivalente para este caso, em que se considera os valores exatos dos parâmetros  $\theta$  nas equações dos controladores.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 36(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 36(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade são muito próximos de zero já que, nesse caso, considerou-se que a dinâmica do robô é exatamente compensada. Este resultado também é equivalente àquele ilustrado pelas figuras 23(a) e 23(b), obtido com

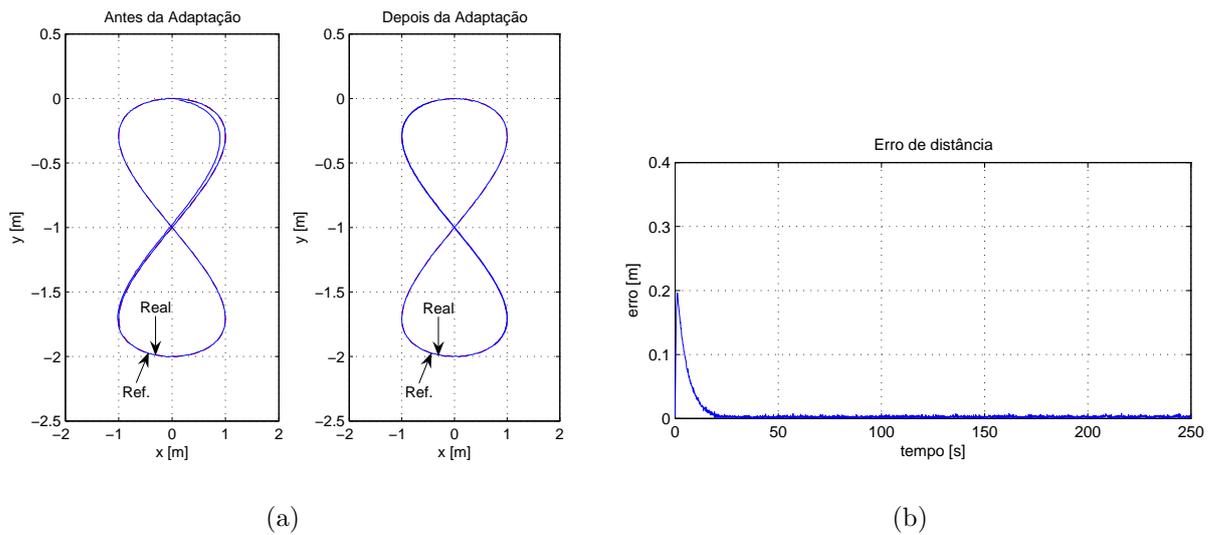


Figura 35: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros exatos.

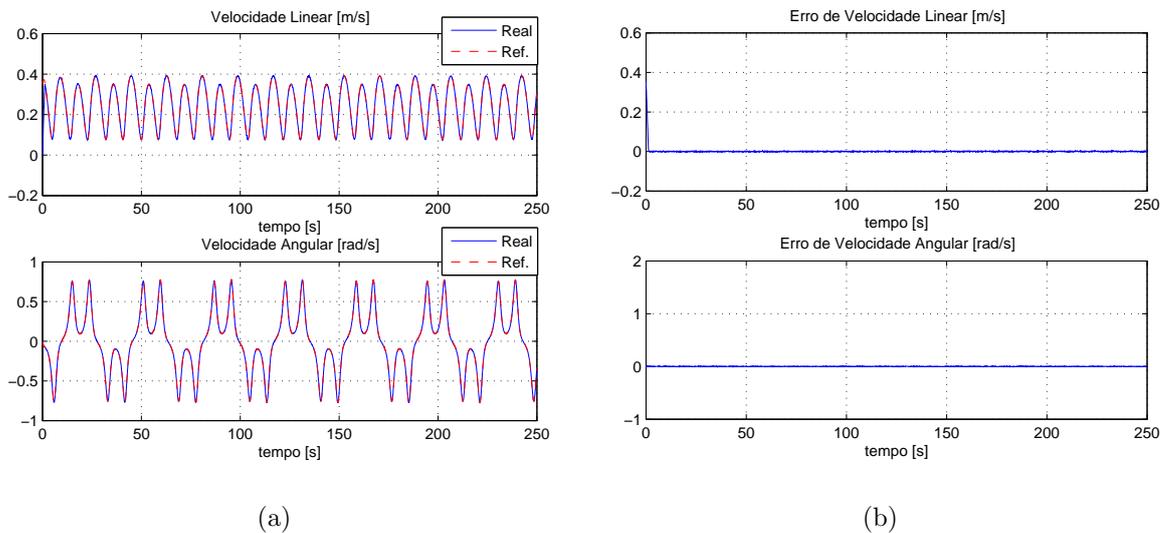


Figura 36: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros exatos.

o uso do primeiro controlador dinâmico.

A evolução dos parâmetros estimados durante esta simulação é mostrada na Figura 37. Nota-se que os valores dos parâmetros apresentam variação muito pequena, o que era esperado, já que os parâmetros estimados iniciam com os valores iguais aos do modelo. A convergência dos parâmetros é ilustrada na Figura 38, obtida com a repetição da simulação

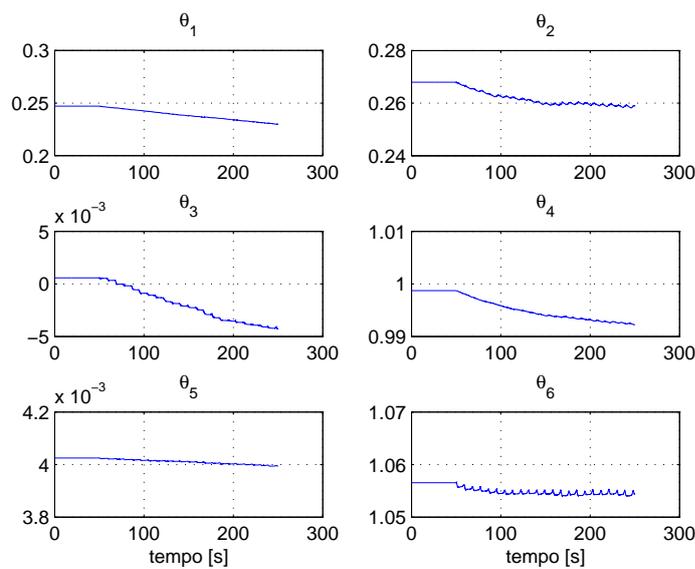


Figura 37: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - segundo controlador dinâmico.

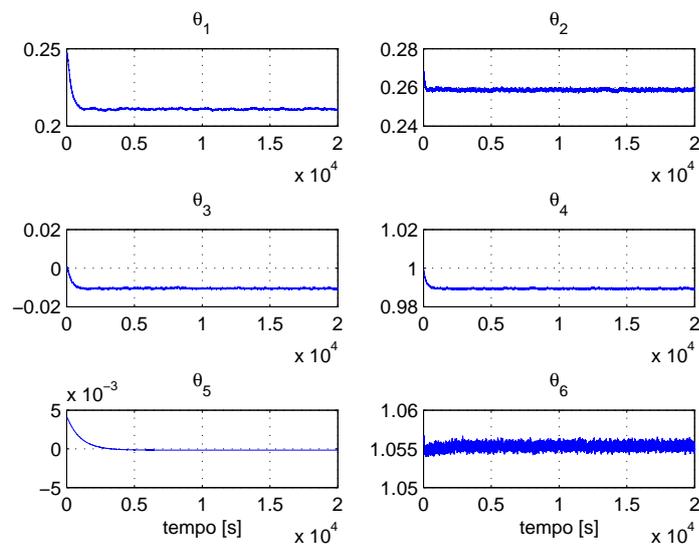


Figura 38: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros exatos - segundo controlador dinâmico.

anterior, mantendo-se as mesmas condições, por um período muito mais longo. Pode-se notar que não há divergência paramétrica.

Ao se comparar os resultados mostrados pelas Figuras 35(b) e 36(b), em que o segundo controlador dinâmico está presente, com aqueles das Figuras 8(b) e 9(b), em que apenas o controlador cinemático estava presente, percebe-se que a inserção do controlador dinâmico

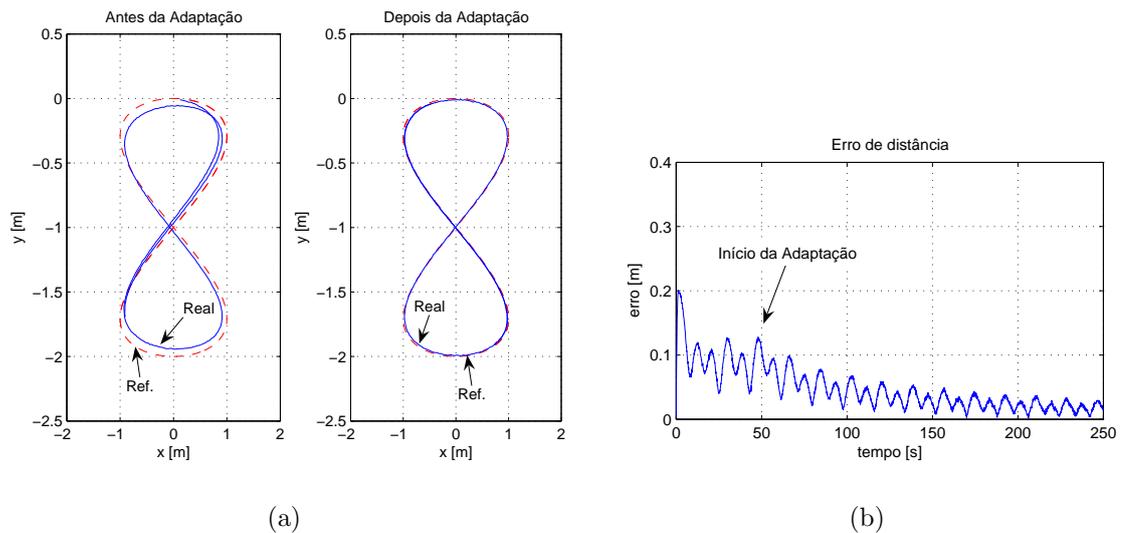


Figura 39: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante a simulação com parâmetros alterados.

produz uma melhora no desempenho do sistema. Ou seja, a inserção do controlador dinâmico produziu redução no valor do erro de velocidade e, por conseguinte, diminuição no valor do erro de seguimento. Este resultado é equivalente ao que foi obtido com o uso do primeiro controlador dinâmico.

Para ilustrar a utilidade da adaptação de parâmetros quando o robô tem sua dinâmica alterada, repetiu-se a simulação de seguimento da trajetória em forma de oito para o caso em que os parâmetros do robô são 25% maiores que os valores carregados no controlador dinâmico. A adaptação de parâmetros do controlador dinâmico também é feita com base na lei de ajuste (3.49), que inclui o termo de modificação- $\sigma$ . No início da simulação a adaptação está desativada, assim permanecendo até  $t = 50s$ . A partir desse instante, a adaptação de parâmetros é ativada, e assim permanece até o término da simulação.

As Figuras 39(a) e 39(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô antes e depois da adaptação de parâmetros, e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Pode-se notar que o controlador é capaz de fazer o robô seguir a trajetória de referência com erro grande antes da adaptação de parâmetros ser ativada. Após sua ativação, em  $t = 50s$ , o erro começa a ser reduzido, e se mantém próximo a zero após  $t = 200s$ .

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 40(a), assim como seus sinais de

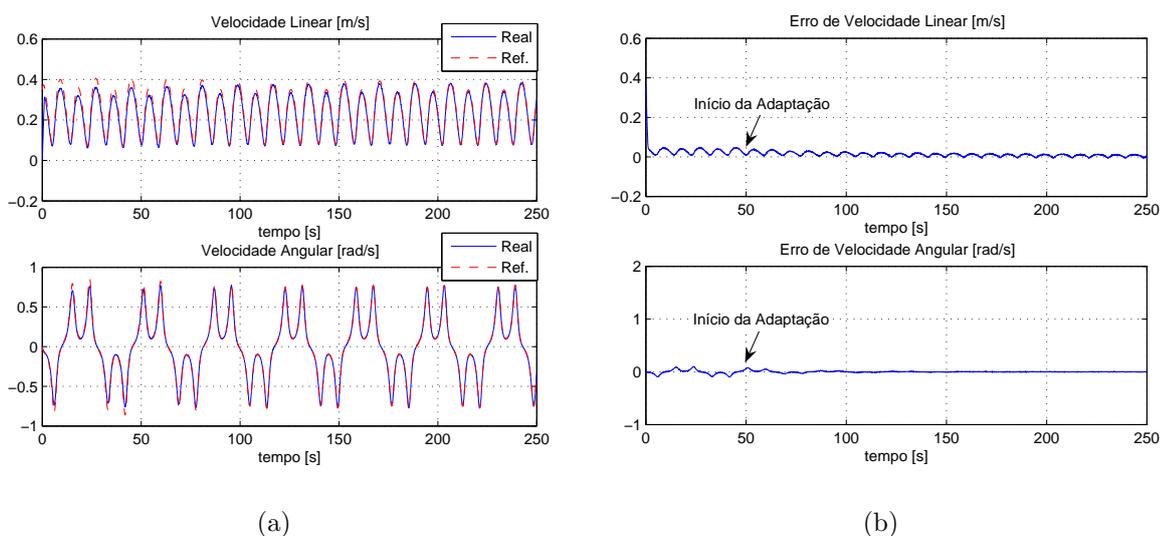


Figura 40: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante a simulação com parâmetros alterados.

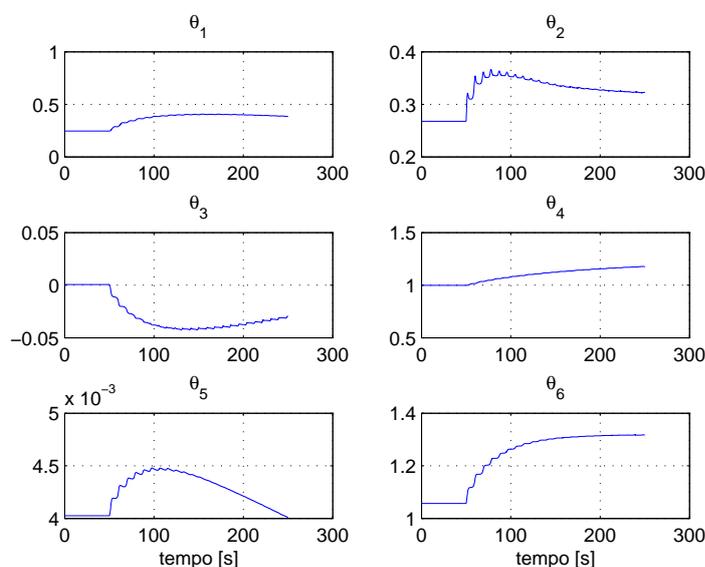


Figura 41: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - segundo controlador dinâmico.

referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 40(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade são grandes antes de  $t = 50$  s, já que a dinâmica do robô não está sendo compensada corretamente. Após o início da adaptação de parâmetros, o erro de velocidade é reduzido gradualmente, apresentando tendência a se manter próximo a zero.

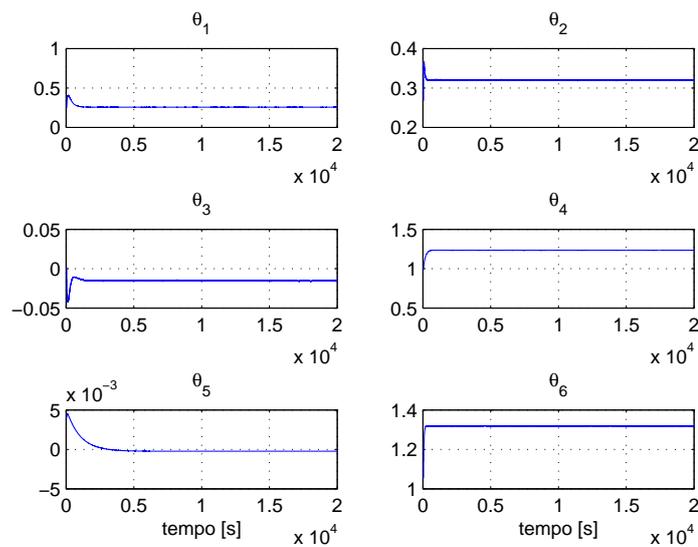


Figura 42: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração para trajetória em forma de oito com parâmetros alterados - segundo controlador dinâmico.

A evolução dos parâmetros estimados durante esta simulação é mostrada na Figura 41. Nota-se que os valores dos parâmetros apresentam variação após a ativação da adaptação, em  $t = 50s$ . A Figura 42, obtida com a repetição da simulação anterior por um período muito mais longo, sem alteração de nenhuma outra condição, ilustra que não há divergência nos valores dos parâmetros estimados.

Ao se comparar os resultados das simulações mostrados pelas Figuras 39(b) e 40(b), tendo o segundo controlador dinâmico presente e adaptação de parâmetros ativada, com aqueles das Figuras 12(b) e 13(b), em que apenas o controlador cinemático estava presente, percebe-se que a inserção do controlador dinâmico produz uma melhora muito significativa no desempenho do sistema após o início da adaptação de parâmetros. Após  $t = 50s$ , quando a adaptação é iniciada, o valor do erro de velocidade é reduzido e, consequentemente, ocorre diminuição no valor do erro de seguimento. Embora os valores iniciais de erro de seguimento e de velocidade tenham sido menores com o uso do segundo controlador dinâmico, após a adaptação de parâmetros estes são equivalentes aos que foram obtidos quando se utilizou o primeiro controlador dinâmico proposto, cujos resultados são apresentados nas figuras 26(b) e 27(b).



Figura 43: Robô Pioneer 3-DX com sensor de varredura *laser* e sistema de visão omnidirecional.

### 3.4 Resultados Experimentais

Para comprovar o funcionamento dos controladores projetados, foram realizados experimentos com um robô Pioneer 3-DX, que é um robô móvel uniclo fabricado pela empresa Mobile Robots, o qual é mostrado na Figura 43. Tal robô possui um sensor de varredura *laser* e um sistema de visão omnidirecional montados em sua base superior. A identificação dos parâmetros dinâmicos de tal robô gerou os valores dos parâmetros apresentados na seção 2.4.

Foram realizados experimentos usando os controladores cinemático e dinâmicos apresentados nas seções anteriores, sempre aplicados ao mesmo robô, de forma que este seguisse a mesma trajetória em forma de oito que foi simulada nas seções anteriores. O desempenho do sistema foi calculado com base no índice *IAE* (Integral do valor Absoluto do Erro), sendo

$$IAE = \int_{T_1}^{T_2} |E(t)| dt, \quad E(t) = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2},$$

onde  $E(t)$  denota o valor instantâneo do erro de seguimento e  $T_1$  e  $T_2$  representam os limites do intervalo de tempo considerado para cálculo do índice. A equação anterior mostra que o índice *IAE* representa o acúmulo do valor absoluto do erro durante o período considerado, crescendo de forma proporcional ao aumento do erro. Ou seja, quanto maior for o índice *IAE*, maior é o valor médio do erro no intervalo em questão.

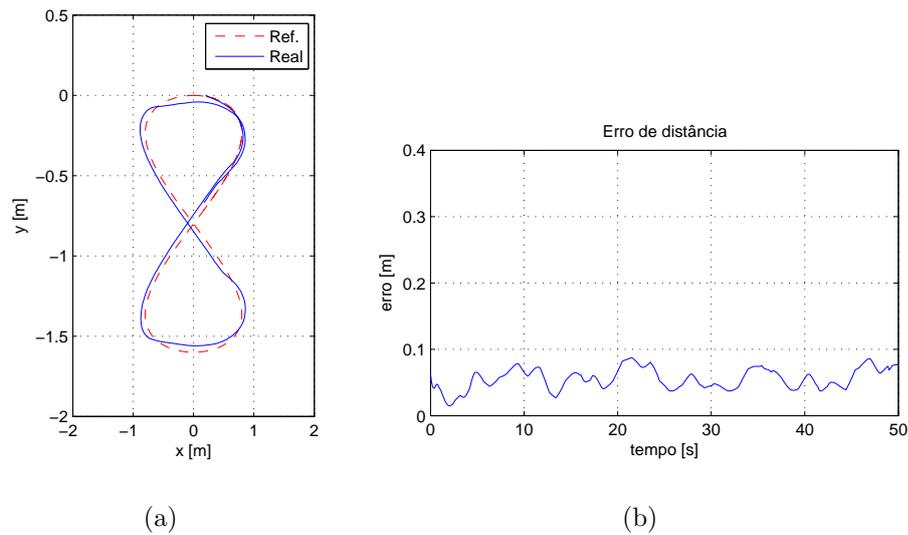


Figura 44: Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante experimento sem carga.

### 3.4.1 Controlador Cinemático

Neste experimento, o controlador cinemático representado pela equação (3.5) foi programado no robô Pioneer 3-DX. As Figuras 44(a) e 44(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Como se pode verificar, o controlador é capaz de fazer o robô seguir a trajetória em forma de oito, com erro diferente de zero. O índice  $IAE$  foi calculado considerando um intervalo de 15 segundos da parte final do experimento (entre 35s e 50s), de forma a enfatizar o erro médio em regime permanente. Seu valor foi de 9,06.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 45(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 45(b). O de erro de velocidade apresentado faz com que o robô não consiga seguir exatamente a trajetória de referência.

O experimento realizado mostra que o controlador cinemático projetado tem um comportamento real muito similar àquele previsto nas simulações apresentadas na seção 3.2. Deve-se notar que o desempenho do sistema pode ser melhorado com aumento dos ganhos do controlador. No entanto, um aumento grande pode fazer com que o sistema fique oscilatório e apresente problemas de estabilidade. Por isso, a utilização de um controlador que realize a compensação da dinâmica do robô móvel é interessante.

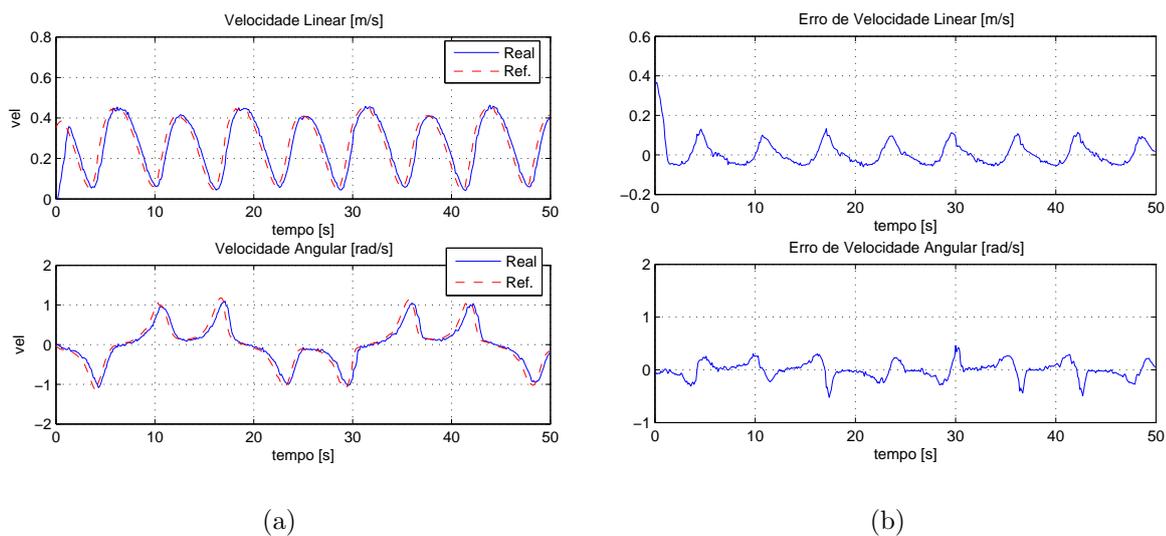


Figura 45: Controlador cinemático: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento sem carga.

### 3.4.2 Primeiro Controlador Dinâmico

O mesmo robô foi programado com o primeiro controlador dinâmico, representado pela equação (3.10), adicionado ao controlador cinemático experimentado na seção 3.4.1. Os valores de ganhos usados no controlador cinemático no experimento anterior foram mantidos. Foi utilizada a adaptação dos parâmetros que inclui o termo de modificação- $\sigma$ , dada por (3.22), que é ativada a partir de  $t = 50s$ .

Para ilustrar o funcionamento do controlador numa aplicação de transporte de cargas, tipicamente realizada por robôs móveis na indústria, foram realizados dois experimentos. Em ambos o robô deve seguir a mesma trajetória em forma de oito, mas em um deles o robô está descarregado e, no outro, carrega uma carga de cerca de  $23kg$ . Esta equivale a pouco mais de 100% da massa total do robô quando descarregado.

As Figuras 46(a) e 46(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô antes e depois da adaptação de parâmetros, e a evolução do erro de distância durante o seguimento da trajetória quando o robô estava descarregado. Neste experimento os valores dos parâmetros  $\theta$  usados no controlador dinâmico são aqueles identificados para o caso do robô descarregado, apresentados na Seção 2.4. Pode-se notar que, mesmo com o robô descarregado, existe erro de seguimento antes da adaptação de parâmetros ser acionada. Após a adaptação de parâmetros (em  $t = 50s$ ) o erro decresce e a trajetória seguida se aproxima mais da trajetória de referência.

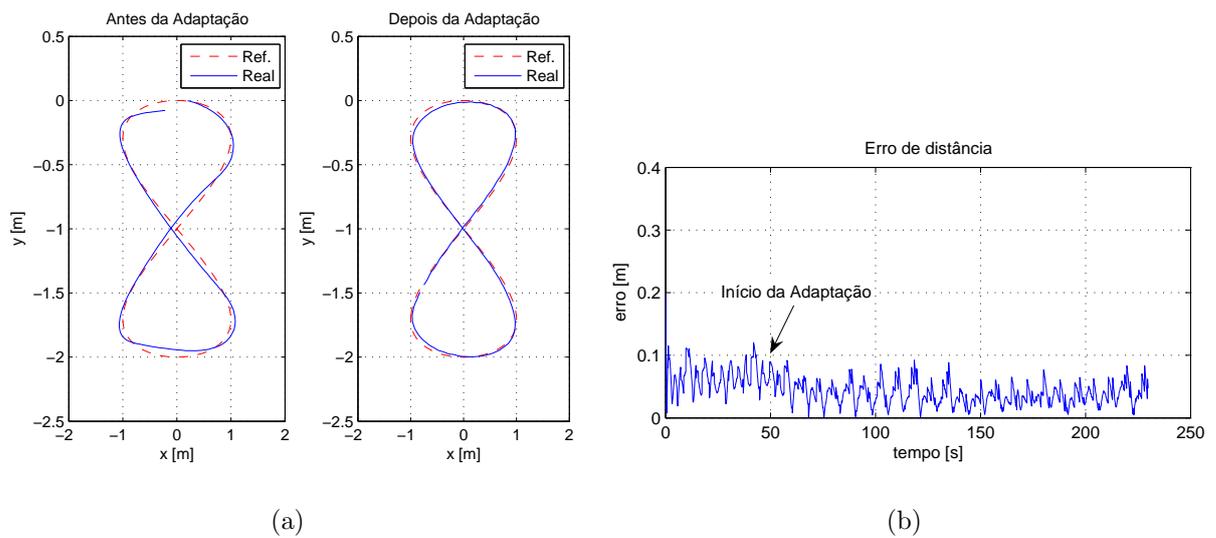


Figura 46: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante o experimento sem carga.

O índice  $IAE$  para este caso foi calculado considerando dois intervalos de 15 segundos, sendo um antes da adaptação de parâmetros ser acionada (entre 35s e 50s), e outro após o seu acionamento (entre 185s e 200s). Antes da adaptação de parâmetros o valor obtido foi  $IAE = 10,67$ ; depois da adaptação de parâmetros ter sido iniciada obteve-se  $IAE = 6,06$ , o que mostra que a adaptação de parâmetros promoveu redução no valor médio do erro de seguimento.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 47(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 47(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade diminuem bastante após o início da adaptação de parâmetros.

A evolução dos parâmetros estimados durante este experimento é mostrada na Figura 48. Nota-se que existe certa variação no valor dos parâmetros, e que esta é responsável pela melhora na compensação da dinâmica do robô. Ou seja, a inserção do controlador dinâmico produziu redução no valor do erro de velocidade e, por conseguinte, diminuição no valor do erro de seguimento, mesmo no caso do robô não estar carregado.

Apesar de serem usados os parâmetros identificados do robô, estes podem não corresponder exatamente aos valores verdadeiros. Por isso, mesmo quando se utiliza no controlador os valores identificados dos parâmetros, pode existir erro na compensação

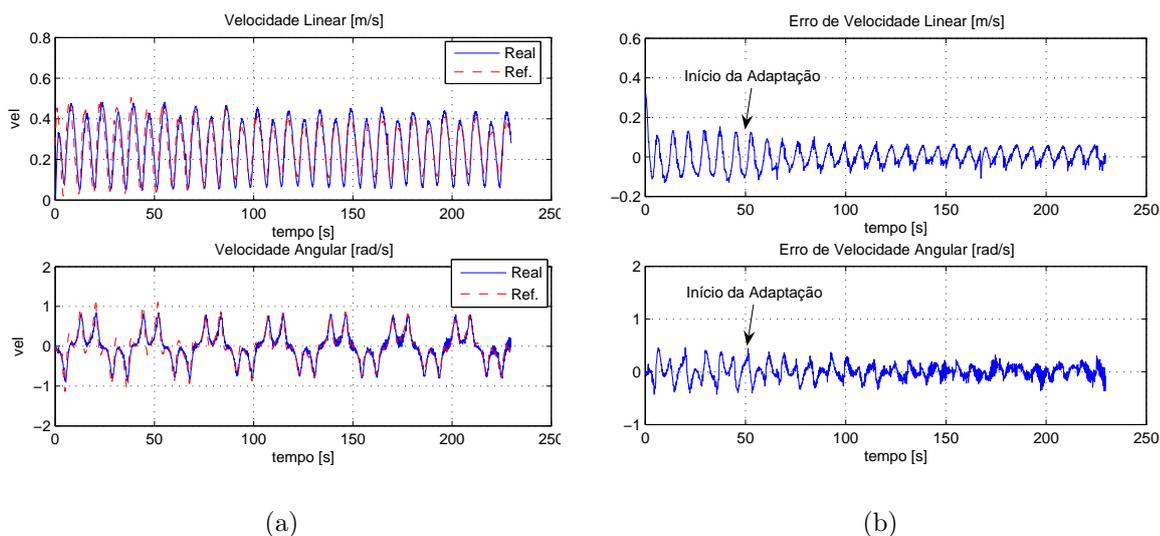


Figura 47: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento sem carga.

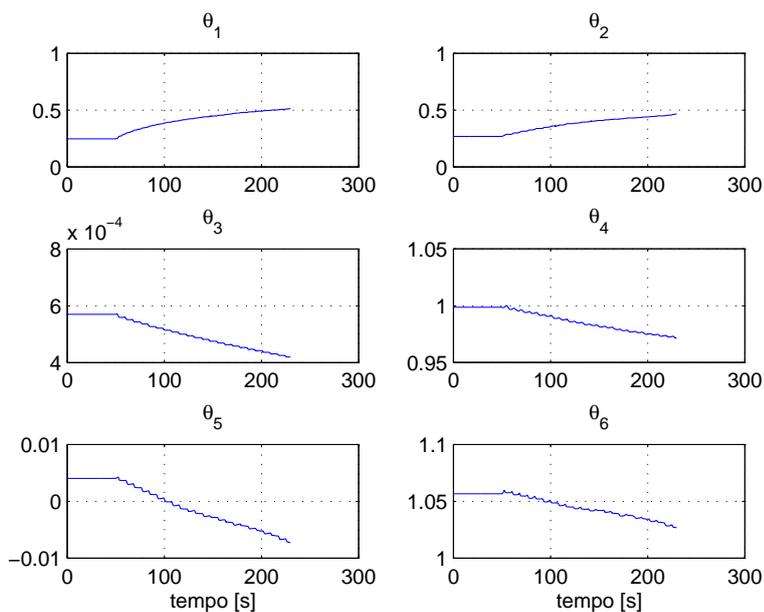


Figura 48: Evolução dos parâmetros estimados durante experimento de seguimento da trajetória em forma de oito sem carga - primeiro controlador dinâmico.

dinâmica, conforme pode-se notar nos resultados apresentados.

Para ilustrar a utilidade da adaptação de parâmetros quando o robô tem sua dinâmica alterada, repetiu-se o experimento para o caso em que o robô está carregando uma massa de  $23kg$ . A adaptação de parâmetros do controlador dinâmico é feita com base na lei de ajuste (3.22), que possui o termo de modificação- $\sigma$ . No início do experimento a adaptação

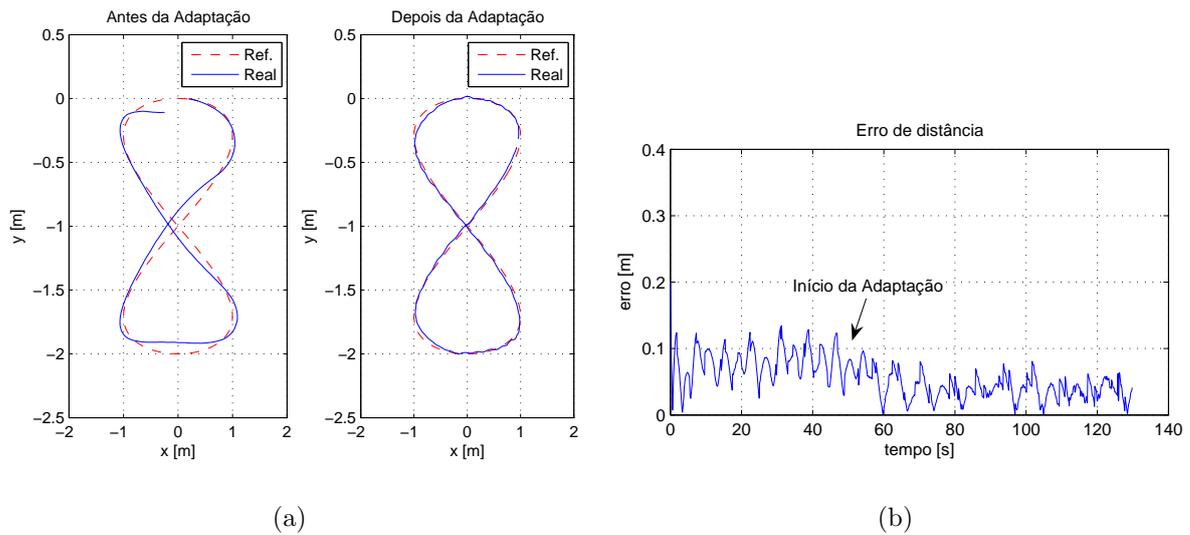


Figura 49: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô antes e depois de iniciada a adaptação de parâmetros; (b) erro de distância durante experimento com carga.

está desativada, assim permanecendo até  $t = 50s$ , quando é ativada.

As Figuras 49(a) e 49(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô antes e depois da adaptação de parâmetros, e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Pode-se notar que o erro de seguimento, nesse caso, é maior que aquele obtido no experimento em que o robô estava descarregado. As figuras mostram, ainda, que o controlador é capaz de fazer o robô seguir a trajetória de referência com erro grande antes da adaptação de parâmetros ser ativada mas, após sua ativação, o erro é reduzido e o desempenho do sistema melhora de forma bastante significativa.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 50(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 50(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade são grandes antes de  $t = 50s$ , já que a dinâmica do robô não está sendo compensada corretamente. Após o início da adaptação de parâmetros, o erro de velocidade é reduzido gradualmente, melhorando a compensação da dinâmica e provocando redução no erro de seguimento.

A evolução dos parâmetros estimados durante o experimento descrito é mostrada na Figura 51. Nota-se que os valores dos parâmetros apresentam variação após a ativação da adaptação, em  $t = 50s$ , enquanto o erro é reduzido. Neste experimento o índice  $IAE$  foi calculado considerando dois intervalos de 15 segundos, sendo um antes da adaptação de

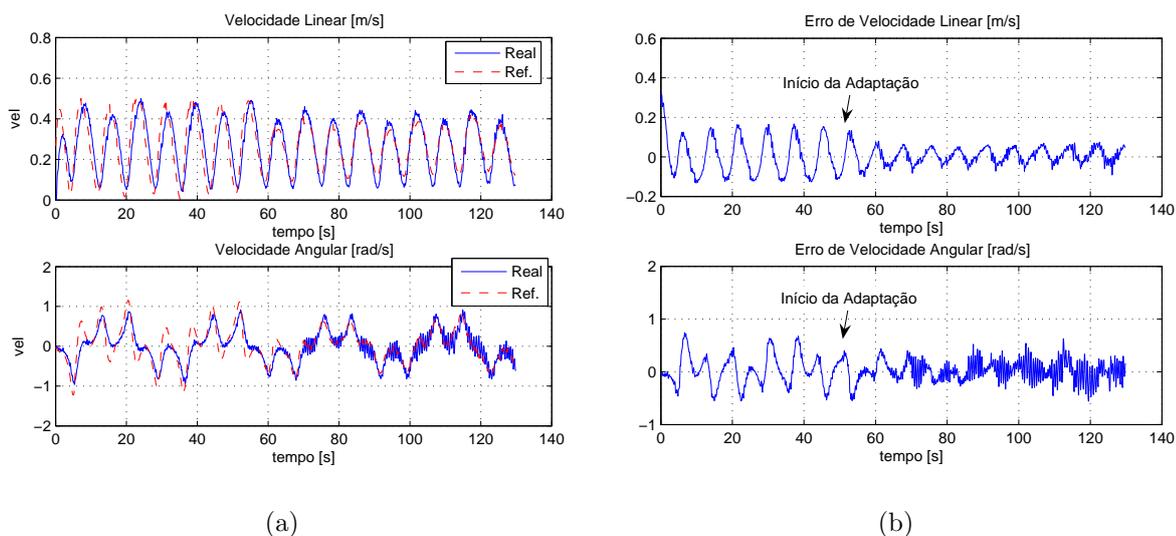


Figura 50: Primeiro controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento com carga.

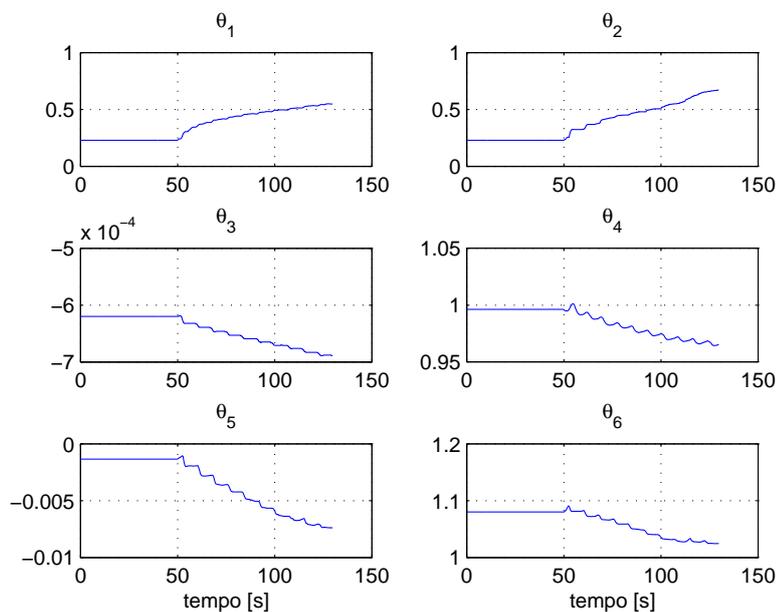


Figura 51: Evolução dos parâmetros estimados durante experimento de seguimento da trajetória em forma de oito com carga - primeiro controlador dinâmico.

parâmetros ser acionada (entre 45s e 60s), resultando em  $IAE = 12,28$ , e outro após o seu acionamento (entre 105s e 120s), resultando em  $IAE = 5,39$ . Tais valores evidenciam que a adaptação de parâmetros promoveu redução bastante significativa no valor médio do erro de seguimento.

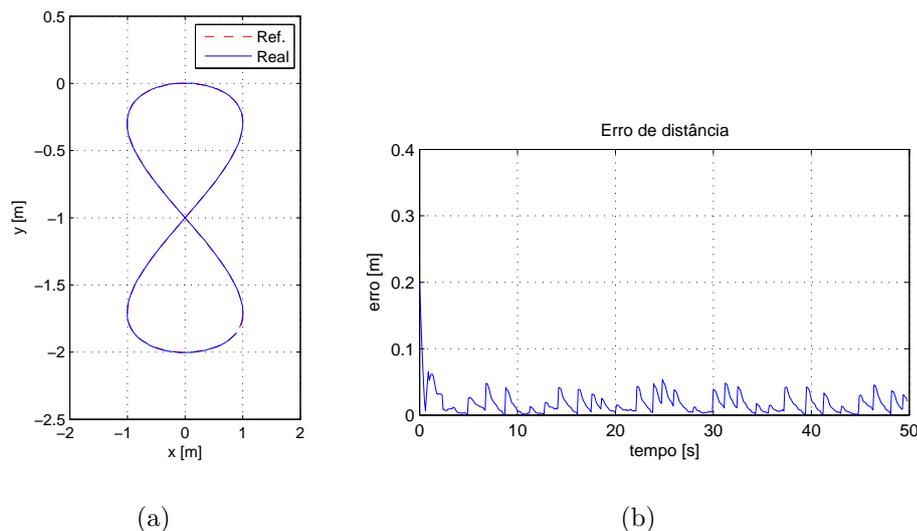


Figura 52: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante experimento com parâmetros identificados.

### 3.4.3 Segundo Controlador Dinâmico

Foram realizados dois experimentos usando o segundo controlador dinâmico proposto, representado pela equação (3.42). Em ambos o robô estava descarregado.

No primeiro experimento considerou-se o caso em que os parâmetros dinâmicos do robô foram identificados com pequeno erro e foram utilizados no controlador dinâmico. A adaptação de parâmetros foi mantida desativada. O robô deveria seguir a trajetória em forma de oito que foi utilizada nos experimentos anteriores. As Figuras 52(a) e 52(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Pode-se notar que o controlador é capaz de fazer o robô seguir a trajetória com erro próximo a zero, já que os parâmetros identificados são usados no controlador.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 53(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 53(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade são próximos a zero, já que, nesse caso, os parâmetros identificados do robô foram usados no controlador.

O índice  $IAE$  obtido para o intervalo de 15 segundos entre 35s e 50s foi de 8,93.

Para ilustrar a utilidade da adaptação de parâmetros quando os parâmetros usados

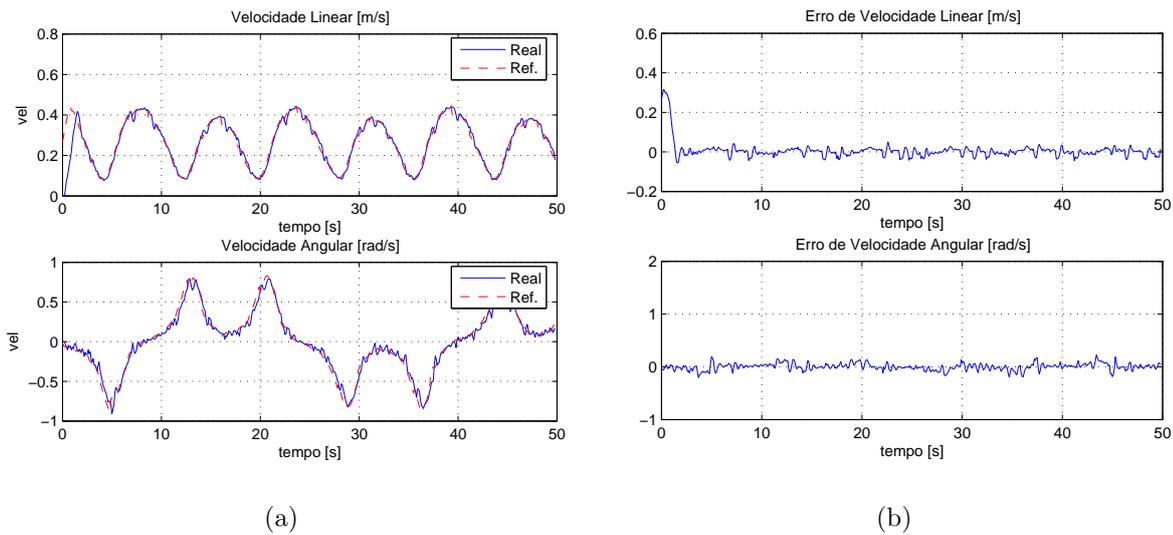


Figura 53: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento com parâmetros identificados.

não são aqueles identificados, ou quando os parâmetros sofrem alteração, por exemplo numa tarefa de transporte de carga, foi realizado outro experimento de seguimento da trajetória em forma de oito. Nesse caso, foram carregados parâmetros incorretos no controlador dinâmico (25% de erro em relação aos valores obtidos no procedimento de identificação) e a adaptação de parâmetros foi ativada a partir de  $t = 30s$ . A adaptação de parâmetros do controlador dinâmico é feita com base na lei de ajuste (3.49), que possui o termo de modificação- $\sigma$ .

As Figuras 54(a) e 54(b) ilustram, respectivamente, a trajetória percorrida pelo robô antes e depois da adaptação de parâmetros, e a evolução do erro de distância durante a execução da tarefa. Pode-se notar que o controlador é capaz de fazer o robô seguir a trajetória de referência com erro grande antes da adaptação de parâmetros ser ativada. Após sua ativação, em  $t = 30s$ , o erro é reduzido. Tal fato é evidenciado pela redução no valor do índice  $IAE$  obtido antes e depois da ativação da adaptação de parâmetros. Para o intervalo entre 15s e 30s o valor obtido de  $IAE$  foi de 14,38. Já para o intervalo entre 45s e 60s o valor desse índice foi de 6,55.

As velocidades linear e angular desenvolvidas pelo robô durante o seguimento da trajetória em forma de oito são apresentadas na Figura 55(a), assim como seus sinais de referência enviados pelo controlador cinemático. Os erros de velocidade são apresentados na Figura 55(b). Nota-se que os valores de erro de velocidade diminuem após o início da adaptação de parâmetros. No entanto, o desempenho do controlador foi prejudicado pelo

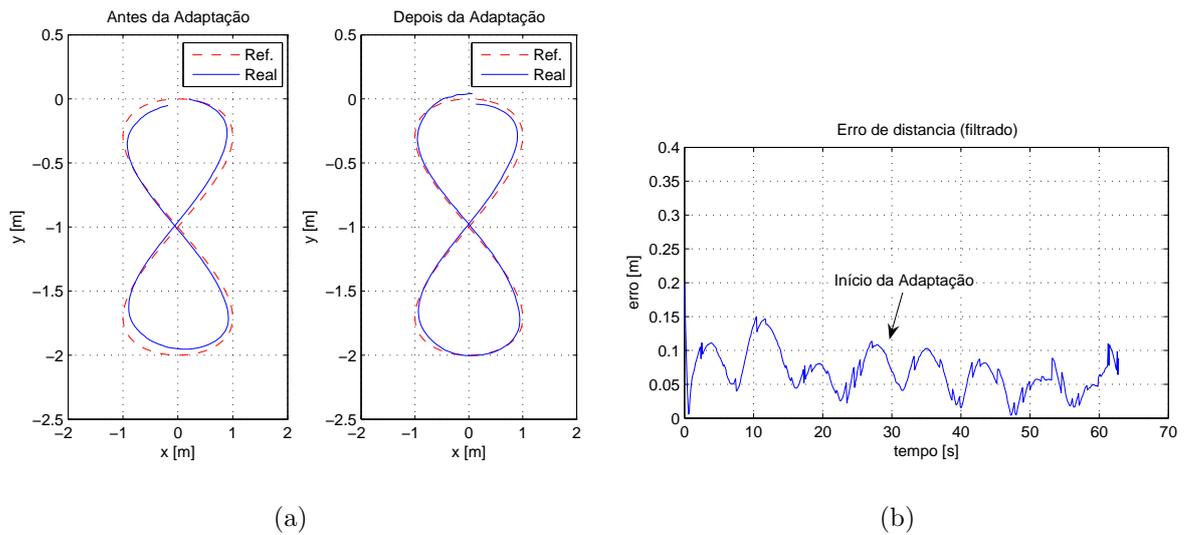


Figura 54: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Parte da trajetória percorrida pelo robô; (b) erro de distância durante experimento com parâmetros incorretos.

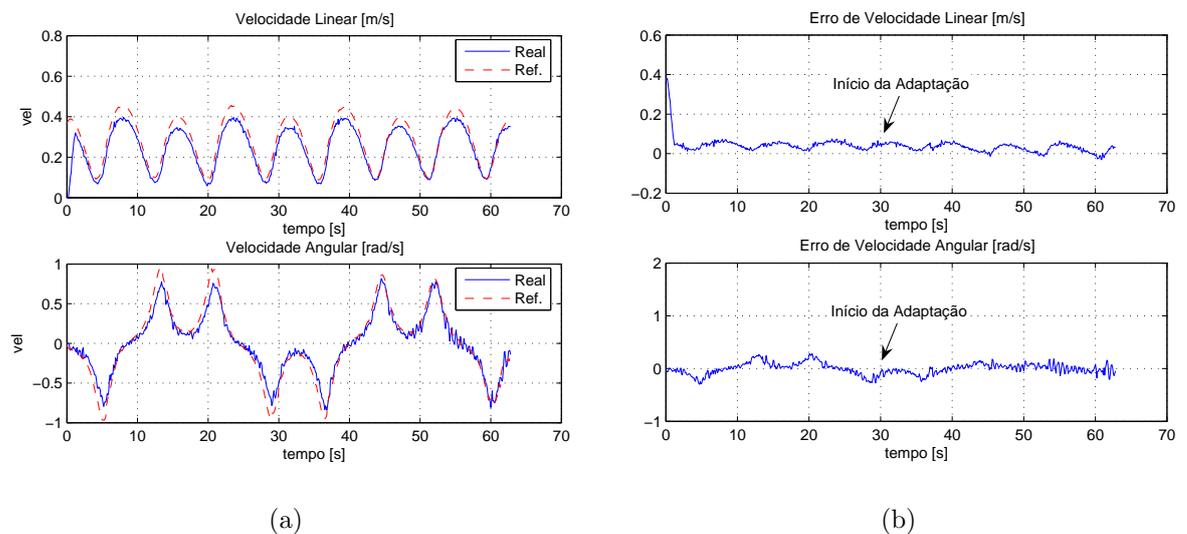


Figura 55: Segundo controlador dinâmico: trajetória em forma de oito. (a) Velocidades linear e angular de referência e desenvolvidas pelo robô; (b) Erros de velocidade durante experimento com parâmetros incorretos.

nível de ruído observado nos sinais de medição de posição e velocidade.

A evolução dos parâmetros estimados durante o experimento descrito é mostrada na Figura 56. Nota-se que os valores dos parâmetros apresentam variação após a ativação da adaptação, em  $t = 30s$ , o que provoca gradual diminuição no erro de seguimento de velocidade.

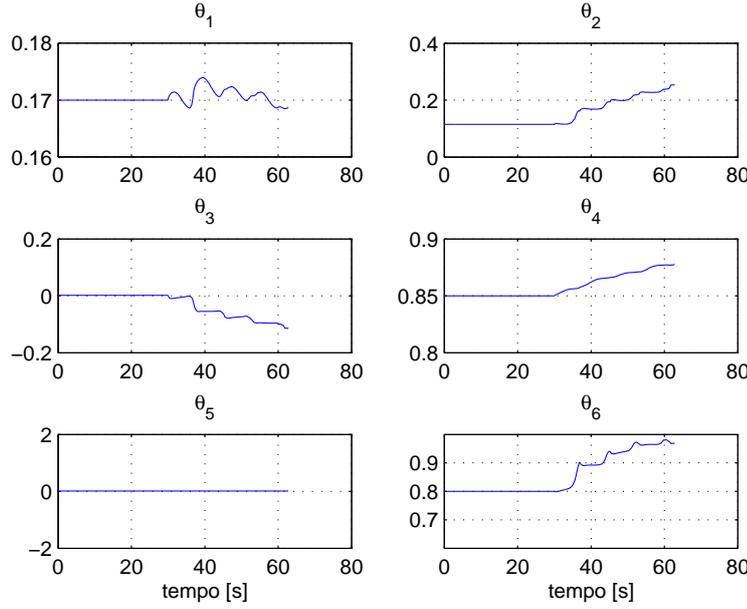


Figura 56: Evolução dos parâmetros estimados durante experimento de seguimento da trajetória em forma de oito com parâmetros iniciais incorretos - segundo controlador dinâmico.

### 3.5 Considerações sobre a Robustez

No projeto do segundo controlador dinâmico realizado com base na equação (2.13), desprezou-se o vetor de incertezas e perturbações durante a análise de estabilidade do sistema resultante. A partir de agora, considerar-se-á a existência de perturbações  $\Delta$  no modelo dado por (2.13), reproduzido aqui por conveniência:

$$\Delta + \mathbf{H}\dot{\mathbf{v}}' + \mathbf{C}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' + \mathbf{F}(\mathbf{v}')\mathbf{v}' = \mathbf{v}_r. \quad (3.57)$$

Considerando-se a lei de controle

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{H}(\dot{\mathbf{v}}'_d + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')) + \mathbf{C}\mathbf{v}'_d + \mathbf{F}\mathbf{v}'_d, \quad (3.58)$$

a equação de malha fechada do sistema é

$$\mathbf{H}\dot{\tilde{\mathbf{v}}}' = -\mathbf{HT}(\tilde{\mathbf{v}}') - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}' - \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}' + \Delta. \quad (3.59)$$

Para a análise de estabilidade, considera-se a função candidata de Lyapunov definida positiva  $V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}'^T\mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}'$ . Sua primeira derivada temporal é  $\dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}'^T\mathbf{H}\dot{\tilde{\mathbf{v}}}'$ , onde se levou em conta que os parâmetros dinâmicos do robô não se alteram. Usando a equação (3.59), a

primeira derivada pode ser escrita como

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}' - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}' + \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{\Delta}.$$

Considerando a propriedade 5 do modelo, de antissimetria da matriz  $\mathbf{C}$ , pode-se escrever que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') - \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}' + \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{\Delta}.$$

Sabendo que  $\mathbf{H}$  é uma matriz simétrica e definida positiva (propriedade 1) e considerando que a matriz  $\mathbf{F}$  é simétrica e definida positiva (ou seja, assumindo  $\theta_6 > -(\theta_5/I - \theta_3)Iu$ , o que valida a propriedade 3), pode-se concluir que  $\dot{V} < 0$  sempre que  $\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') + \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}' > \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{\Delta}$ .

Considerando valores grandes de  $\tilde{\mathbf{v}}'$  o termo  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')$  satura e a condição anterior é assegurada se  $\|\tilde{\mathbf{v}}'\| \min(\theta_1 l_u, \theta_2 l_\omega) + \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{F}) > \|\tilde{\mathbf{v}}'\| \|\mathbf{\Delta}\|$ . Ou seja, para este caso o erro de velocidade converge, em um tempo finito, a uma região limitada de tamanho

$$\|\tilde{\mathbf{v}}'\| < \frac{\|\mathbf{\Delta}\| - \min(\theta_1 l_u, \theta_2 l_\omega)}{\lambda_{\min}(\mathbf{F})}. \quad (3.60)$$

Já para pequenos valores de  $\tilde{\mathbf{v}}'$ , a condição  $\tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') + \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}' > \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{\Delta}$  é satisfeita se  $\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{H} \mathbf{K}_v) + \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{F}) > \|\tilde{\mathbf{v}}'\| \|\mathbf{\Delta}\|$ , onde  $\mathbf{K}_v = \text{diag}(k_u, k_\omega)$ . Ou seja, considerando as perturbações  $\mathbf{\Delta}$  o erro de velocidade converge, em um tempo finito, a uma região limitada de tamanho

$$\|\tilde{\mathbf{v}}'\| < \frac{\|\mathbf{\Delta}\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{H} \mathbf{K}_v) + \lambda_{\min}(\mathbf{F})}. \quad (3.61)$$

Em outras palavras, conclui-se que  $\tilde{\mathbf{v}}'(t)$  decresce (e, portanto,  $\tilde{\mathbf{v}}(t)$  também decresce) enquanto sua norma for maior que um determinado valor que depende da amplitude das perturbações, o que leva os erros de controle a uma região limitada  $R_v$ . Se não há perturbações,  $\mathbf{\Delta} = \mathbf{0}$  e  $\tilde{\mathbf{v}}'(t) \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$  (logo  $\tilde{\mathbf{v}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$ ), que é a mesma conclusão obtida anteriormente.

Foi provado que  $\tilde{\mathbf{v}}$  é finalmente limitado a uma região  $R_v$  considerando-se perturbações  $\mathbf{\Delta}$  limitadas. Dessa forma, o erro de seguimento  $\tilde{\mathbf{h}}(t)$ , será finalmente limitado por

$$\frac{\|\mathbf{A}\| R_v}{\min(k_x, k_y)}.$$

Quando se considera, também, as incertezas paramétricas, a equação de malha fechada

do sistema deve ser escrita como

$$\Delta - \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{H}(\dot{\tilde{\mathbf{v}}}' + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')) + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}' + \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}'. \quad (3.62)$$

Considerando-se

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}'^{\mathbf{T}}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}' + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}} > 0$$

como função candidata de Lyapunov, e assumindo-se que não há variação nos parâmetros dinâmicos do robô, sua primeira derivada temporal é

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^{\mathbf{T}}(\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}' + \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}') - \tilde{\mathbf{v}}'^{\mathbf{T}}\mathbf{H}\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \tilde{\mathbf{v}}'^{\mathbf{T}}\Delta. \quad (3.63)$$

Será considerada a lei de adaptação robusta

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{v}}' - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.64)$$

onde  $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é uma matriz de ganhos diagonal definida positiva. Reescrevendo (3.64), tem-se  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{v}}' - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\theta}$ . A partir de agora, considerar-se-á que os parâmetros dinâmicos do sistema podem variar, ou seja,  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(t)$  e  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}$ . Para este caso, (3.63) deve ser reescrita como

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}'^{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}' + \mathbf{H}\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}')) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}'^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{v}}' + \tilde{\mathbf{v}}'^{\mathbf{T}}\Delta, \quad (3.65)$$

onde aplicou-se a propriedade de antissimetria da matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ .

Em (NASISI; CARELLI, 2003) os autores analisam a estabilidade de um sistema de controle servo-visual adaptativo para robôs manipuladores. A análise realizada a seguir utiliza técnica similar à aplicada no trabalho mencionado, mas aqui considera-se o caso mais geral em que os parâmetros dinâmicos  $\boldsymbol{\theta}$  podem variar durante a execução de uma tarefa. Inicialmente considera-se que  $\Delta = \mathbf{0}$ .

Considerando valores pequenos de  $\tilde{\mathbf{v}}'$ , tem-se que  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}') \approx \mathbf{K}_{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}'$ . São definidas as seguintes constantes:  $\vartheta_{\boldsymbol{\Gamma}} = \kappa_{\max}(\boldsymbol{\Gamma})$ ,  $\vartheta_{\boldsymbol{\gamma}} = \kappa_{\max}(\boldsymbol{\gamma}^{-1})$ ,  $\vartheta_{\dot{\mathbf{H}}} = \kappa_{\max}(\dot{\mathbf{H}})$ ,  $\mu_{\mathbf{F}} = \chi(\mathbf{F})$ ,  $\mu_{\boldsymbol{\Gamma}} = \chi(\boldsymbol{\Gamma})$ ,  $\mu_{\mathbf{HK}} = \chi(\mathbf{HK}_{\mathbf{v}})$ ,  $\mu_{\mathbf{FHK}} = \mu_{\mathbf{F}} + \mu_{\mathbf{HK}} - \vartheta_{\dot{\mathbf{H}}}$ , onde  $\chi(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z})}$  é o valor singular mínimo de  $\mathbf{Z}$ ,  $\kappa_{\max}(\mathbf{Z}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z})}$  denota o valor singular máximo de  $\mathbf{Z}$ , e  $\lambda_{\min}(\cdot)$  e  $\lambda_{\max}(\cdot)$  são funções para obtenção do menor e do maior autovalor de uma matriz, respectivamente.

Considera-se que a variação dos parâmetros dinâmicos é limitada, de tal forma que  $\mu_{\mathbf{F}} + \mu_{\mathbf{HK}} > \vartheta_{\dot{\mathbf{H}}}$ , i.e.,  $\mu_{\mathbf{FHK}} > 0$ . Deve-se notar que quanto maiores são os valores dos

ganhos  $k_u$  e  $k_w$ , mais forte é a hipótese anterior. Logo,  $\dot{V}$  pode ser escrita como

$$\dot{V} \leq -\mu_{FHK}\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \mu_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| + \vartheta_\gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|, \quad (3.66)$$

Considerando-se a diferença quadrada

$$\left(\frac{1}{\xi}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi\|\boldsymbol{\theta}\|\right)^2 = \frac{1}{\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - 2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| + \xi^2\|\boldsymbol{\theta}\|^2,$$

pode-se concluir que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| \leq \frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2, \quad (3.67)$$

sendo  $\xi \in \mathbb{R}^+$ . Aplicando um raciocínio equivalente é possível mostrar que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\| \leq \frac{1}{2\eta^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\eta^2}{2}\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2, \quad (3.68)$$

onde  $\eta \in \mathbb{R}^+$ . Substituindo (3.67) e (3.68) em (3.66), resulta em

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mu_{FHK}\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \mu_\Gamma\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \vartheta_\Gamma \left( \frac{1}{2\xi^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2 \right) + \\ & \vartheta_\gamma \left( \frac{1}{2\eta^2}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\eta^2}{2}\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \right), \end{aligned}$$

ou, rearranjando os termos,

$$\dot{V} \leq -\alpha_1\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \alpha_2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \rho, \quad (3.69)$$

onde  $\alpha_1 = \mu_{FHK} > 0$ ,  $\alpha_2 = \left(\mu_\Gamma - \frac{\vartheta_\Gamma}{2\xi^2} - \frac{\vartheta_\gamma}{2\eta^2}\right) > 0$ , e  $\rho = \vartheta_\Gamma\frac{\xi^2}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2 + \vartheta_\gamma\frac{\eta^2}{2}\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2$ , com  $\xi$  e  $\eta$  convenientemente selecionados. Agora, a partir da candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}'^T\mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}' + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  pode-se escrever

$$V \leq \beta_1\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 + \beta_2\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2, \quad (3.70)$$

onde  $\beta_1 = \frac{1}{2}\vartheta_H$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2}\vartheta_\gamma$ ,  $\vartheta_H = \kappa_{max}(\mathbf{H})$ ,  $\vartheta_\gamma = \kappa_{max}(\boldsymbol{\gamma})$ . Logo,

$$\dot{V} \leq -\Lambda V + \rho, \quad (3.71)$$

com  $\Lambda = \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}$ . Se não existe variação de parâmetros reais, ou quando a variação cessa,  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$  e  $\rho$  é limitado. Portanto, (3.71) implica que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}'$  (e, logo,  $\tilde{\mathbf{v}}$ ) são finalmente limitados. Por outro lado, se há variação nos valores dos parâmetros dinâmicos do robô,  $\dot{\boldsymbol{\theta}} \neq \mathbf{0}$  e  $\rho$  será limitado se  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  for limitado. Nesse caso, a fronteira que limita os erros

de controle cresce, mas estes continuam limitados. Em qualquer dos casos, um limite conservador para  $\tilde{\mathbf{v}}'$  é tal que  $\|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 \leq \frac{\rho}{\alpha_1}$ .

Agora, considerando que  $\mathbf{\Delta} \neq \mathbf{0}$ , a equação (3.69) deve ser reescrita como

$$\dot{V} \leq -\alpha_1 \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 - \alpha_2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \rho + \|\tilde{\mathbf{v}}'\| \|\mathbf{\Delta}\|. \quad (3.72)$$

Uma condição suficiente para que  $\dot{V} < 0$  é  $\alpha_1 \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 + \alpha_2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 > \rho + \|\tilde{\mathbf{v}}'\| \|\mathbf{\Delta}\|$ . Uma condição ainda mais restritiva é  $\alpha_1 \|\tilde{\mathbf{v}}'\|^2 > \rho + \|\tilde{\mathbf{v}}'\| \|\mathbf{\Delta}\|$ . Considerando que  $\|\tilde{\mathbf{v}}'\| \neq 0$ , tal condição pode ser expressada como

$$\|\mathbf{\Delta}\| < \alpha_1 \|\tilde{\mathbf{v}}'\| - \frac{\rho}{\|\tilde{\mathbf{v}}'\|}.$$

A condição anterior mostra que a estabilidade do equilíbrio está garantida se os distúrbios estão limitados, e que a intensidade máxima dos distúrbios que mantém a garantia de estabilidade depende do valor do erro de velocidade. Ou seja, a robustez aos distúrbios é reduzida na medida em que o erro de velocidade diminui. Isso significa que quando o erro de velocidade é muito pequeno, um distúrbio de pequena intensidade faz com que a condição não seja cumprida, elevando o valor do erro. Tal fato leva à conclusão de que, na prática,  $\tilde{\mathbf{v}}'$  não será nulo e, portanto, sempre existirá algum valor de erro de velocidade  $\tilde{\mathbf{v}}$  não nulo, ainda que sua amplitude seja pequena. Vale ressaltar que um aumento nos ganhos  $k_u$  e  $k_\omega$  provoca aumento no valor da constante  $\alpha_1$ , aumentando a robustez a distúrbios.

Recordando (3.32), e considerando um limite  $R$  numa norma do sinal  $\tilde{\mathbf{v}}$ , pode-se concluir que o erro de seguimento  $\tilde{\mathbf{h}}$  será finalmente limitado por  $\frac{R\|\mathbf{A}\|}{\min(k_x, k_y)}$  numa norma do erro de controle.

**Nota 3.9.** Através de análise muito similar à apresentada nesta seção, pode-se chegar à mesma conclusão quando se considera o uso do primeiro controlador dinâmico, ou seja, a estabilidade continua garantida sob variação limitada de parâmetros, com crescimento do limite de convergência dos erros de controle.

Dois simulações foram realizadas para ilustrar que a estabilidade do equilíbrio é mantida sob variação nos parâmetros dinâmicos. As simulações descritas a seguir foram realizadas com as mesmas condições daquelas descritas anteriormente, ou seja, foi considerado o modelo completo do robô representado pela equação (2.13) com os parâmetros identificados do robô Pioneer 3-DX apresentados na Seção 2.4. Foram usados os mesmos valores de ganhos utilizados nas simulações anteriores, utilizando o segundo controlador dinâmico

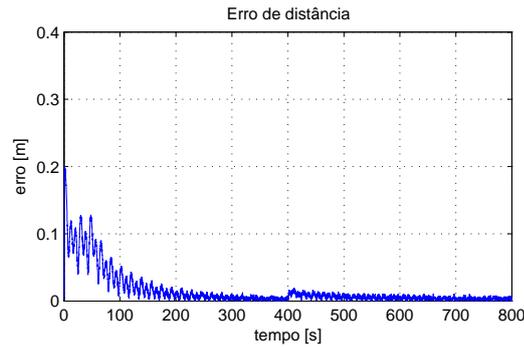


Figura 57: Erro de distância durante simulação com variação em degrau dos parâmetros dinâmicos.

com adaptação de parâmetros ativada, para que o robô seguisse uma trajetória em forma de oito.

Primeiro, simulou-se uma variação em degrau nos valores reais de todos os parâmetros dinâmicos. Ou seja, simulou-se uma variação súbita nos parâmetros dinâmicos do robô móvel. O período total de simulação foi de  $800s$ , e em  $t = 400s$  todos os parâmetros  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , subitamente dobram de valor. A Figura 57 mostra o erro de distância durante esta simulação. Pode-se notar que existe um aumento do erro em  $t = 400s$ , quando ocorre o degrau de variação dos parâmetros, mas seu valor volta a decrescer e atinge o patamar estabelecido antes da ocorrência da variação, conforme esperado.

A Figura 58(a) ilustra os erros de velocidade para a simulação em questão. Nota-se que há um aumento em tais valores quando ocorre a variação dos parâmetros, fato que é evidenciado na Figura 58(b), mas os erros retornam ao patamar anterior na medida em que os parâmetros estimados são ajustados. A evolução dos parâmetros estimados durante esta simulação é apresentada na Figura 59. Pode-se notar que os valores estimados se modificam a partir de  $t = 400s$ , mas não necessariamente vão aos valores verdadeiros, conforme discutido anteriormente.

A segunda simulação considera uma variação senoidal em todos os parâmetros, com uma amplitude de 25% e período de  $180s$ . A simulação é realizada por um período mais longo, de  $8.000s$ , sendo que a variação nos valores dos parâmetros é iniciada na metade desse tempo. A Figura 60 ilustra a evolução do erro de distância, e as Figuras 61(a) e 61(b) apresentam os erros de velocidade para este caso. Pode-se notar que a partir do início da variação dos parâmetros a faixa de variação dos erros cresce um pouco, como previsto na análise apresentada anteriormente. Como a variação dos parâmetros não cessa até o final da simulação, o intervalo de permanência dos valores de erro não mais diminui.

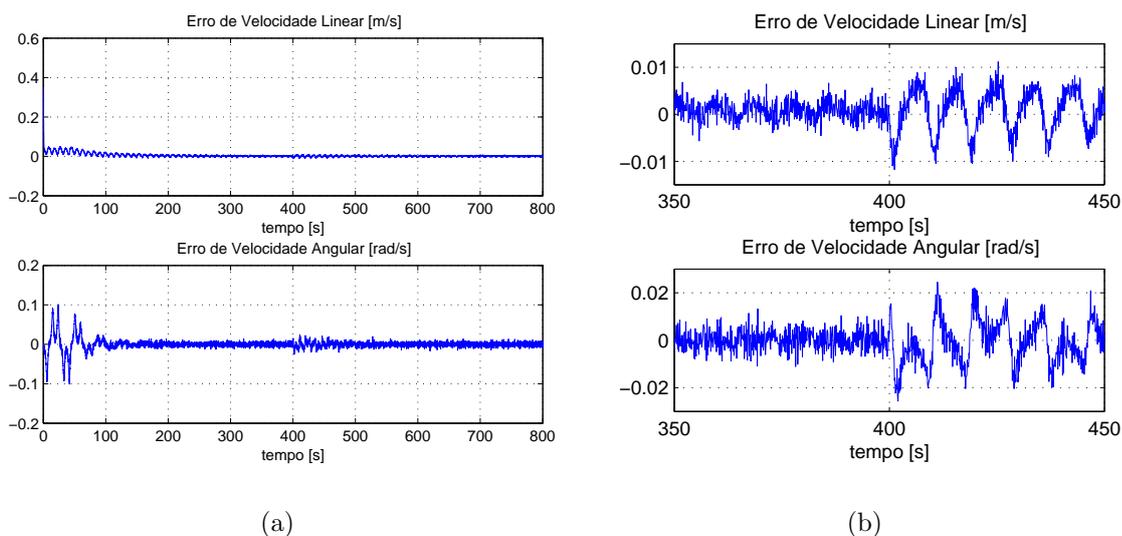


Figura 58: Erros de velocidade durante simulação com variação em degrau dos parâmetros. (a) Durante todo o período de simulação; (b) Detalhe do intervalo em que a variação de parâmetros ocorre.

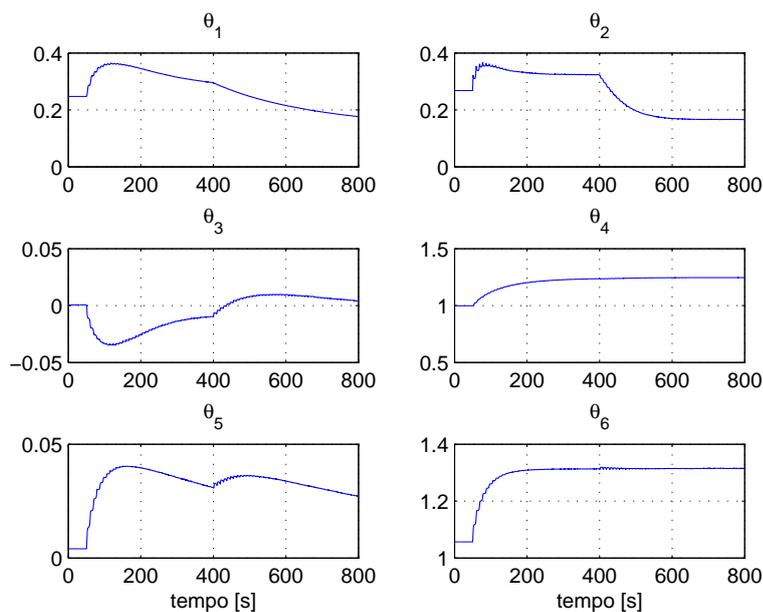


Figura 59: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação com variação em degrau dos parâmetros dinâmicos.

A evolução dos parâmetros estimados durante a segunda simulação é apresentada na Figura 62. Pode-se notar que os valores estimados se modificam a partir de  $t = 4.000s$ , e se mantêm variando até o final da simulação. Isso ocorre porque os valores dos parâmetros dinâmicos do robô também não param de variar.

As simulações apresentadas ilustram claramente que o equilíbrio do sistema conti-

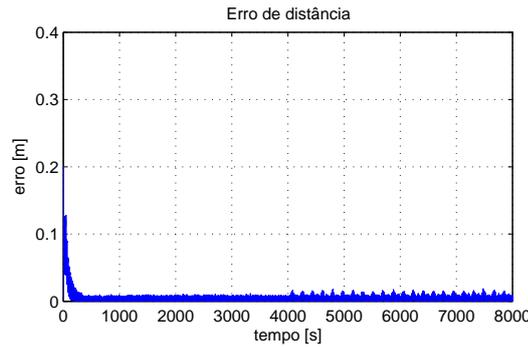


Figura 60: Erro de distância durante simulação com variação senoidal dos parâmetros dinâmicos.

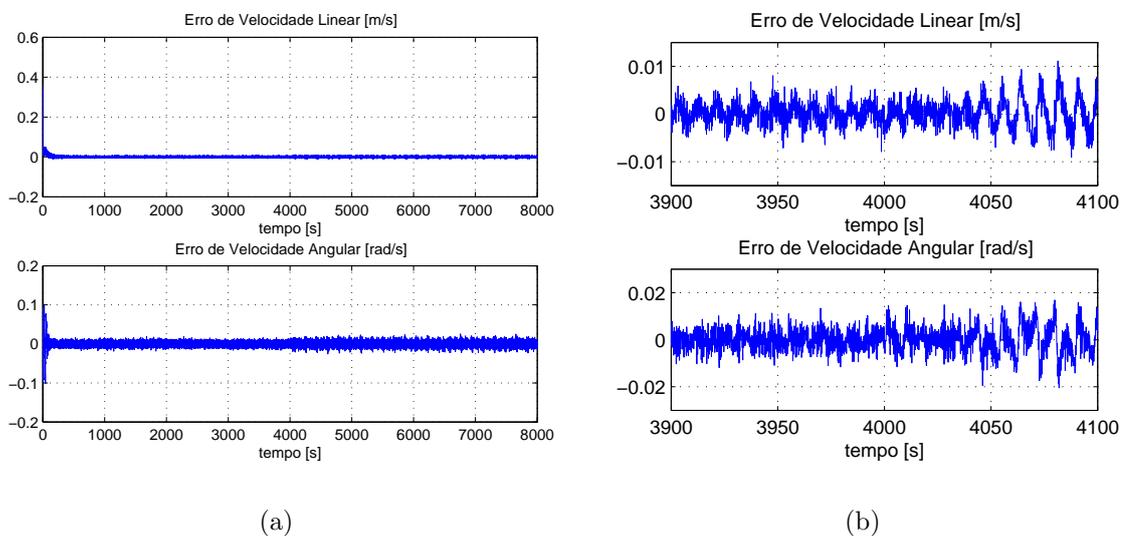


Figura 61: Erros de velocidade durante simulação com variação senoidal dos parâmetros. (a) Durante todo o período de simulação; (b) Detalhe do intervalo em que a variação de parâmetros é iniciada.

nua estável sob variação paramétrica limitada em degrau e senoidal. É válido comentar que também foram realizadas algumas simulações com variações de maior amplitude nos parâmetros, que resultaram em perda da condição de estabilidade.

### 3.6 Comparação de Desempenho

Para avaliar a importância da compensação dinâmica, foram realizadas simulações para comparar o desempenho do sistema com e sem a compensação dinâmica. O desempenho do sistema foi calculado com base no índice  $IAE$ , como explicado na Seção 3.4.

Nas simulações foi considerado o modelo completo do robô móvel Pioneer-3DX, in-

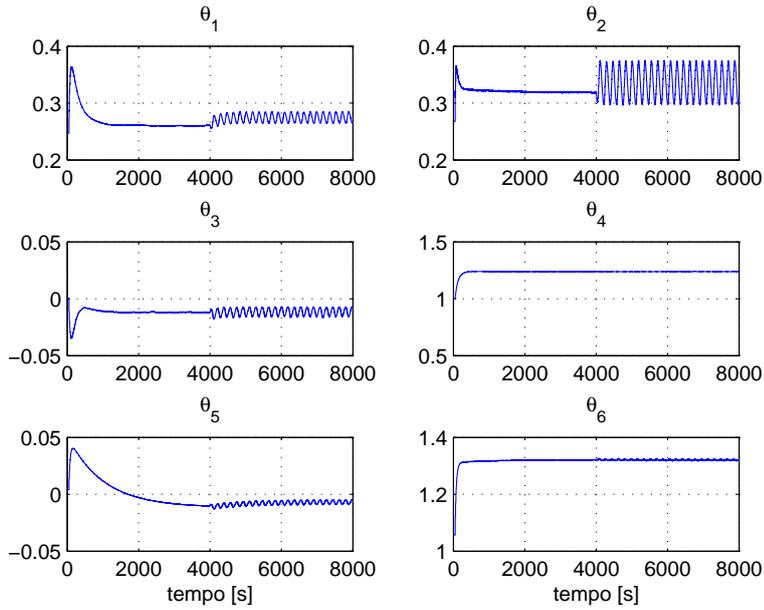


Figura 62: Evolução dos parâmetros estimados durante simulação de longa duração com variação senoidal dos parâmetros dinâmicos.

cluindo limites máximos de velocidade e aceleração, com adição de ruído branco aos sinais de posição e velocidade enviados aos controladores.

O índice  $IAE$  foi calculado para cada simulação de  $T = 250s$  em que o robô deveria seguir uma trajetória de referência em forma de 8. Em cada uma das simulações, os ganhos do controlador cinemático ( $k_x = k_y$ ) foram fixados em um valor distinto variando entre 0,5 e 35,0 enquanto todos os ganhos do controlador dinâmico foram mantidos inalterados. O objetivo era verificar o valor do índice  $IAE$  antes e depois da ativação da compensação dinâmica para cada conjunto de valores de ganhos do controlador cinemático. Para isso, foram simuladas quatro situações, quais sejam:

- (a) Somente o controlador cinemático habilitado, isto é, o robô recebe como comandos os sinais de velocidade desejada  $\mathbf{v}_d$  diretamente do controlador cinemático. Equivale ao esquema clássico em que o controlador não considera a dinâmica do veículo;
- (b) Com compensação dinâmica ativada considerando parâmetros estimados com um erro de 10%, sem adaptação de parâmetros;
- (c) Com compensação dinâmica ativada considerando parâmetros estimados iniciais com um erro de 10%, com adaptação de parâmetros ativada a partir de  $t = 0s$ ; e
- (d) Com compensação dinâmica ativada considerando parâmetros estimados exatos

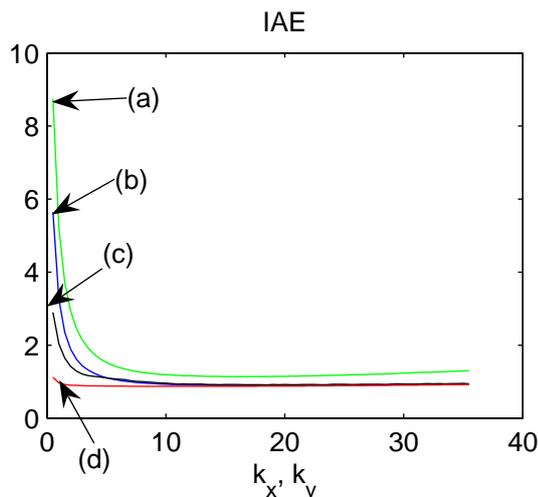


Figura 63:  $IAE$  para simulações de 250s para os casos (a-d) (ver texto).

(caso ideal), sem adaptação de parâmetros.

A Figura 63 mostra os valores do índice  $IAE$  obtidos para diversas simulações dos casos mencionados anteriormente. Pode-se observar que quando a compensação dinâmica está ativada (casos  $b-d$ ), os valores dos índices  $IAE$  obtidos são menores, o que indica melhor desempenho. Como esperado, os menores erros foram obtidos durante as simulações do caso ideal ( $d$ ).

É válido ressaltar que os valores resultantes do índice  $IAE$  para os casos ( $b$ ) e ( $c$ ) são menores do que aqueles obtidos para o caso ( $a$ ), ainda que as condições de compensação dinâmica não sejam favoráveis devido ao erro nos valores dos parâmetros estimados. Outra observação importante é que a compensação dinâmica permitiu a obtenção de desempenho melhor do que o melhor desempenho obtido com uso apenas do controlador cinemático, considerando a faixa de variação de ganhos adotada nas simulações. O menor valor de  $IAE$  obtido com o controlador cinemático foi 1,2 para  $k_x = k_y = 17$ . Ganhos maiores provocaram pequeno aumento do índice devido ao aumento da oscilação do robô. Considerando os mesmos valores de  $k_x = k_y$ , a ativação da compensação dinâmica provocou redução do valor de  $IAE$  para cerca de 1,0, o que representa uma melhora de aproximadamente 20%. Para valores menores de ganhos do controlador cinemático a melhora no desempenho com a compensação dinâmica é muito mais expressiva. Por exemplo, pode-se observar na Figura 63 que para  $k_x = k_y = 3$ , o índice  $IAE$  obtido para o caso da compensação dinâmica ativada com adaptação de parâmetros (caso  $c$ ) tem aproximadamente o mesmo valor do menor índice obtido com apenas o controlador cinemático, ou seja,  $IAE = 1,2$ . Sem a compensação dinâmica, o índice nesse caso seria maior que 2,0. Tal

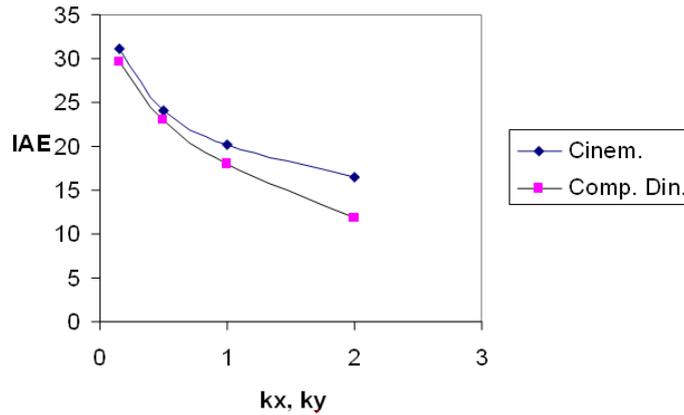


Figura 64:  $IAE$  para experimentos de 75s para os casos (a) e (c) (ver texto).

fato ilustra que a ativação da compensação dinâmica permitiu obtenção de desempenho equivalente ao do controlador cinemático, mas com ganhos menores.

A Figura 64 mostra os valores do índice  $IAE$  obtidos para alguns experimentos dos casos (a) e (c) mencionados anteriormente. Pode-se observar que para o caso em que  $k_x = k_y = 2,0$ , o índice  $IAE$  sofre uma redução de cerca de 30% após a ativação da compensação dinâmica. Assim como mostraram os resultados de simulação, durante os experimentos a compensação da dinâmica também provocou melhora no desempenho do sistema.

### 3.7 Considerações Finais do Capítulo

Este capítulo apresentou o desenvolvimento de um controlador cinemático de seguimento de trajetórias e de dois controladores dinâmicos adaptativos. Estes têm a função de compensar os efeitos da dinâmica do robô, fazendo com que o veículo desenvolva as velocidades de referência geradas pelo controlador cinemático com o menor erro possível. Os controladores dinâmicos foram desenvolvidos com base nos modelos dinâmicos apresentados no capítulo 2, e geram sinais de velocidade linear e angular como comandos para o robô.

Foi apresentada análise de estabilidade do sistema considerando a utilização de cada controlador, e foi demonstrado que todos fazem com que o equilíbrio do sistema em malha fechada seja estável, de modo que os sinais de erro sejam limitados ou tendam a zero. A análise de robustez a distúrbios e à variação limitada de parâmetros dinâmicos durante a execução de uma tarefa demonstrou que a estabilidade do equilíbrio é garantida se os distúrbios e a variação dos parâmetros são limitados.

Diversas simulações foram realizadas e seus resultados ilustram o bom desempenho dos controladores propostos para os casos de seguimento de trajetórias. Nas simulações foram considerados casos com diferentes valores de parâmetros no modelo dinâmico do robô, e os resultados foram comparados e comentados. Os resultados de simulação atestam o funcionamento dos controladores e mostram que a adaptação de parâmetros pode promover melhoria significativa no desempenho do sistema, principalmente quando os parâmetros dinâmicos não foram corretamente identificados ou podem sofrer alteração, por exemplo, devido ao transporte de cargas. O cálculo de um índice de desempenho através de simulações e experimentos mostrou que a compensação adaptativa da dinâmica é capaz de melhorar o desempenho do sistema quando comparado ao desempenho obtido apenas com o controlador cinemático de ganhos variáveis.

Alguns resultados experimentais também foram apresentados, e mostram que os controladores propostos funcionam de maneira adequada. No entanto, cabe observar que os resultados não foram tão bons quanto previsto em simulação. Pode-se citar três fatores que contribuem para a diferença entre os resultados obtidos em simulação e em experimentos:

1. Os sinais de medição de posição e velocidade do robô móvel Pioneer usado nos experimentos apresentam ruído, o que pode provocar degradação no desempenho dos controladores, já que todos utilizam essas informações no cálculo das ações de controle. Tal fato também foi reportado em (GAVA et al., 2007). A análise de robustez mostrou que um aumento na amplitude das perturbações provoca aumento da região de convergência dos erros de controle. De fato, durante a realização das simulações comprovou-se que um aumento na amplitude do ruído provoca degradação no desempenho do sistema;
2. Pequenas ondulações no piso e deslizamento das rodas podem provocar distúrbios que não foram considerados durante as simulações, já que quando o vetor  $\delta$  de incertezas paramétricas, que modela efeitos como o deslizamento das rodas e forças e torques exercidos na roda independente, não é nulo, o limite de erro aumenta. De fato, o piso do laboratório onde os experimentos descritos neste capítulo foram realizados é formado por blocos de cerâmica lisa. Observou-se que, em alguns casos, há deslizamento das rodas do robô, por vezes bastante significativo. Além disso, quando a roda independente passa na junção entre os blocos de cerâmica, nota-se uma variação em sua direção. Tais fatos não foram levados em conta nas simulações realizadas.

3. Devido aos sinais de medição ruidosos e aos demais distúrbios presentes durante os experimentos, os valores dos ganhos de adaptação de parâmetros foram alterados em relação àqueles utilizados durante as simulações.

É válido ressaltar que, em relação ao controlador dinâmico apresentado por De La CRUZ (2006), os controladores aqui propostos apresentam duas vantagens principais: adaptação de parâmetros e possibilidade de conexão com outros controladores cinemáticos. Isso torna o sistema mais flexível, pois permite a troca de controladores cinemáticos para execução de tarefas distintas, como seguimento de caminhos, posicionamento ou controle de formação (MARTINS et al., 2008; BRANDÃO et al., 2009a). Também torna o sistema mais robusto, já que a adaptação de parâmetros, realizada *on-line*, permite que o sistema se adapte a variações paramétricas que podem ocorrer de tarefa a tarefa, como em transporte de cargas, por exemplo (MARTINS et al., 2008).

Finalmente, em sistemas práticos o desempenho global pode ser melhorado durante a execução de uma tarefa se for possível a aplicação da seguinte estratégia: estando o robô nas condições em que deve realizar a tarefa, e antes de sua execução, fazê-lo percorrer uma trajetória que garanta a completa excitação de sua dinâmica, enquanto os valores dos parâmetros estimados são adaptados com ganhos baixos. Após a convergência dos parâmetros, ou de determinado tempo, desativa-se a adaptação de parâmetros e envia-se o robô para execução da tarefa. Dessa forma, durante a realização da tarefa, a compensação da dinâmica é realizada com valores fixos de parâmetros, previamente adaptados. Uma estratégia muito similar foi proposta em (JORDÁN; BUSTAMANTE, 2008) para ajuste automático de ganhos de um controlador adaptativo aplicado a robôs submarinos. Vale ressaltar que tal estratégia não é conveniente para aplicação em casos em que os parâmetros dinâmicos do robô podem variar diversas vezes de tarefa a tarefa, como em casos de transporte de várias cargas.

## 4

# *Controle de Sistemas Multirroboês com Compensação da Dinâmica*

---

*“They all look like me. But none of them are me.”*

*(Sonny, sobre os outros robôs NS-5, em I Robot)*

## 4.1 Introdução

Sistemas multirroboês permitem que algumas tarefas, como busca e resgate, transporte ou deslocamento de cargas e mapeamento de grandes áreas, sejam realizadas de forma mais barata, tolerante a falhas e flexível do que com a utilização de um único robô de maior capacidade. De acordo com Cao, Fukunaga e Kahng (1997), um sistema multirroboês é considerado cooperativo quando apresenta, devido a um mecanismo de interligação, um comportamento tal que sua utilidade aumenta para dada tarefa. Portanto, comportamento cooperativo implica em ganho de desempenho do sistema em termos da tarefa que deve ser cumprida.

Do ponto de vista de controle, a arquitetura do sistema multirroboês pode ser centralizada ou descentralizada. Ainda de acordo com Cao, Fukunaga e Kahng (1997), a arquitetura centralizada é caracterizada pela existência de um único agente de controle, enquanto a arquitetura descentralizada não possui tal agente. Um exemplo típico de controle centralizado de robôs móveis é abordado em (AIRES; ALSINA; MEDEIROS, 2001), que apresenta um sistema de visão global para realização de controle centralizado de um time de futebol de robôs. Na aplicação abordada, o controle centralizado é apropriado, pois pode ser feito num computador externo de grande capacidade de processamento, enquanto os robôs podem ter eletrônica mais simples, com pouca capacidade de proces-

samento a bordo. Além disso, a informação de posição e orientação de todos os robôs é obtida com a utilização de um só sensor, o que é possível pois a área de atuação de todos os robôs é limitada. Isso permite que todo o grupo atue como um único agente, e que algoritmos complexos possam ser executados para seu controle.

Na arquitetura de controle descentralizada, cada robô possui seu próprio sistema de controle e o mínimo de sensores necessários para obter as informações que necessita do ambiente e dos demais robôs do grupo. Cada agente é capaz de determinar seus próprios sinais de controle para que a tarefa desejada seja executada, como manter uma formação, por exemplo (De La CRUZ; CARELLI, 2006). É importante ressaltar que o controle descentralizado não implica em falta de comunicação entre os robôs membros do grupo (WANG; TAN; GOLDSMITH, 2005; DONG; GUO; FARRELL, 2006). Pode haver troca de informações entre os robôs sem que algum deles tenha que, necessariamente, centralizar todas elas. Porém, cada robô deve ter a capacidade de gerar suas próprias ações de controle, com base na tarefa que deve ser realizada. A arquitetura descentralizada pode, ainda, ser caracterizada como distribuída, em que todos os agentes são equivalentes do ponto de vista de controle, ou hierárquicas, que são localmente centralizadas (CAO; FUKUNAGA; KAHNG, 1997).

Uma importante diferença entre os paradigmas de controle centralizado e descentralizado diz respeito à robustez do sistema: no controle centralizado, a ocorrência de uma falha no agente centralizador provoca uma falha em todo o sistema. Sistemas descentralizados tendem a ser mais robustos, exatamente por não dependerem de um único agente. Por outro lado, num sistema centralizado o agente centralizador do controle (e da informação) pode ser capaz de verificar se uma dada solução é ótima, enquanto num sistema descentralizado encontrar a solução ótima global pode não ser trivial (ANDERSON; BARTHOLDI-III, 2000).

Tanto a arquitetura centralizada como a descentralizada podem ser aplicadas na realização de controle de formação, que consiste no problema de se controlar a posição relativa e a orientação dos robôs em um grupo que se movimenta como um todo. Em geral, o controle de formação de robôs pode ser classificado em uma das três categorias: controle baseado em comportamentos, método de estruturas virtuais ou método de seguimento de líderes (CONSOLINI et al., 2007), explicados a seguir.

No controle baseado em comportamentos, vários comportamentos desejados são programados nos robôs (como evitar colisões, manter formação, seguir até um alvo, etc.). A ação de controle final é obtida a partir de uma média ponderada da ação definida por cada

comportamento, com pesos determinados por sua importância num dado instante. A formalização teórica e análise matemática desta abordagem é difícil e, portanto, não é trivial de se garantir que a formação irá convergir para uma configuração desejada (CONSOLINI et al., 2007).

O método de estruturas virtuais consiste em considerar todo o grupo de robôs como uma única estrutura. A trajetória planejada é transmitida à formação como um todo, e não a cada um dos robôs individualmente. Nesse caso, é possível prever o comportamento de cada robô e do grupo, e é necessário que exista comunicação entre os robôs (CONSOLINI et al., 2007).

No método de seguimento de líder, um dos robôs é designado como tal e percorre a trajetória desejada, enquanto os demais robôs (seguidores) devem se manter a uma determinada distância e ângulo desse. As principais críticas a este tipo de abordagem são o fato de que uma falha no robô líder prejudica todo o sistema, e que o conjunto possui baixa tolerância a distúrbios (CONSOLINI et al., 2007). No entanto, esta abordagem é de mais fácil implementação que a de estruturas virtuais, e permite escalonamento direto, como mostrado em (BRANDÃO, 2008).

Este capítulo aborda as arquiteturas de controle de formação centralizado e descentralizado para sistemas multirrobôs. O sistema de controle descentralizado aqui abordado é do tipo líder-seguidores, distribuído, em que o robô líder executa a tarefa que lhe é designada, enquanto o(s) seguidor(es) deve(m) atuar de maneira a manter(em) a formação desejada. O robô aqui designado como líder não envia sinais de comando a nenhum outro membro do grupo. Cada agente membro do grupo é responsável por processar a informação sensorial própria (ou compartilhada) e executar o algoritmo de controle que gera seus próprios sinais de referência. Dessa forma, o líder não precisa conhecer o modelo dos demais membros da formação, e a compensação da dinâmica, quando existir, deve ser feita pelos controladores presentes em cada um dos robôs.

No controle centralizado abordado, o agente centralizador recebe toda a informação sensorial e executa o algoritmo de controle de formação. Então, envia a todos os robôs sinais de referência de velocidade linear e angular para que a formação desejada seja atingida e mantida. Tal sistema é classificado como controle baseado em estruturas virtuais. O agente centralizador (que pode ser um dos robôs) precisa ter informação de posição e velocidade de cada robô membro da formação, além de conhecer o modelo cinemático de cada um deles, para ser capaz de gerar os sinais de referência correspondentes. Apesar de cada robô possuir controladores internos que garantem o seguimento da velocidade de

referência recebida, este sistema é caracterizado como controle centralizado pois o controle das variáveis de formação é feito de forma centralizada. É importante que se note que a compensação da dinâmica de cada robô, quando realizada, pode ser feita pelo próprio robô, ou pelo agente centralizador do controle que, nesse caso, deve conhecer o modelo e os parâmetros dinâmicos de cada agente membro do grupo.

## 4.2 Trabalhos Relacionados

Diversos trabalhos tratam de controle de sistemas multirrobo. Há trabalhos que consideram a cooperação entre robôs móveis subaquáticos (SARIEL; BALCH; ERDOGAN, 2008), entre robôs aéreos (BETHKE; VALENTI; HOW, 2008), e até entre robôs aéreos e terrestres (MICHAEL; FINK; KUMAR, 2007). No entanto, nesta seção são discutidos brevemente apenas alguns estudos que tratam de cooperação entre veículos terrestres.

O trabalho relatado em (FEDDEMA; LEWIS; SCHOENWALD, 2002) aborda o controle de múltiplos veículos usando técnicas de controle descentralizado, analisando em que situações um grande grupo de robôs é controlável e observável. Segundo os autores, a maioria dos trabalhos que tratam de controle de múltiplos veículos não inclui o desenvolvimento formal do sistema de controle, do ponto de vista de estabilidade. A técnica ali proposta permite garantir a estabilidade do sistema mesmo sob perturbações estruturais, como falhas de comunicação e variação de parâmetros. Os autores mostram que o grau de interação entre os robôs, dado pela influência da posição dos robôs vizinhos na geração dos sinais de controle de um dado robô, influencia na estabilidade do sistema como um todo. Concluem que o número de veículos também influencia na estabilidade, já que impõe restrições na faixa do ganho de interação. Observam, ainda, que um *overshoot* no sinal de controle de um dos veículos pode levar todo o sistema à instabilidade, ainda que este seja estável individualmente. É mostrado um experimento que ilustra o controle de formação para deslocamento de um grupo de oito robôs, cada um dotado de sensores individuais (como GPS diferencial) e comunicação por rádio.

Um sistema para controle cooperativo de um grupo de robôs que usam como sensor apenas uma câmera omnidirecional (uma para cada robô) é apresentado em (DAS et al., 2002). Tal sistema permite que o controle seja feito de modo centralizado ou descentralizado, baseado em três métodos de navegação: (1) um robô do grupo pode seguir um líder a uma distância e ângulo determinados; (2) um robô do grupo pode seguir dois outros a uma distância determinada de cada um; ou (3) cada robô pode navegar de forma autônoma. O modo de seguimento permite variação da formação (de triângulo para linha,

por exemplo), através do chaveamento de controladores, para uma situação de desvio de obstáculos. O sistema com chaveamento de controladores é provado ser estável com uso de uma função de Lyapunov comum a todos os controladores. A determinação das velocidades dos robôs da formação é feita por observadores de estado. São mostrados resultados de simulação com até seis robôs, e experimentos com três, todos sendo controlados por um computador remoto (controle centralizado).

Em (MONTEIRO; VAZ; BICHO, 2004) é apresentada uma estratégia de controle de formação que gera comportamentos baseados em uma série temporal de estados assintoticamente estáveis. A geometria da formação é determinada através de uma matriz cujos parâmetros indicam qual é o robô líder de cada membro da formação, e a que distância e ângulo os robôs seguidores devem se posicionar em relação a ele. O controle é feito de forma centralizada, e pode ocorrer relaxamento da geometria da formação no caso de desvio de obstáculos. Tal fato é ilustrado por resultados experimentais apresentados com um grupo de três robôs.

Pereira, Campos e Kumar (2004) abordam a tarefa de deslocamento de cargas por robôs móveis que a empurram e a guiam até o alvo. A estratégia de cooperação adotada é de controle descentralizado de formação, porém os autores não consideraram a dinâmica dos robôs. São apresentados resultados experimentais usando a plataforma descrita em (MICHAEL; FINK; KUMAR, 2008).

Um sistema de controle descentralizado baseado em comportamentos inspirados biologicamente é apresentado em (CLARK; FIERRO, 2005). Cada controlador é composto por máquinas de estado, assumindo que os robôs possuem seus próprios sensores e podem comunicar-se entre si. O objetivo do sistema é localizar e seguir um perímetro. Quando qualquer membro do grupo localiza o perímetro, envia informação aos demais. Os comportamentos são baseados em três controladores: (1) cobertura aleatória, que faz com que os robôs realizem movimentação aleatória numa área buscando o perímetro e evitando colisões; (2) movimentação rápida até o perímetro, assim que o mesmo é localizado; e (3) seguimento do perímetro, evitando colisões.

Uma estratégia de controle descentralizado de formação tipo líder-seguidores em que não há troca de informações entre os robôs é apresentada em (BRANDÃO et al., 2007b). Em tal trabalho é estudado o uso de um sensor de varredura *laser* para determinação da posição e orientação do robô líder da formação. Os robôs seguidores determinam a posição e orientação e estimam a velocidade do robô líder, posicionando-se em relação a este, de acordo com a distância e ângulo de formação desejados. São apresentados resultados

experimentais usando dois robôs e simulações para casos de formações mais complexas.

Outra estratégia de controle de formação tipo líder-seguidores é apresentada em (CONSOLINI et al., 2007). Ali, a posição do seguidor pode variar dentro de certos limites (um cone) em relação ao líder, sendo o ângulo entre o líder e o seguidor medido no referencial deste, e não daquele. Um resultado interessante apresentado pelos autores é que a geometria da formação impõe um limite máximo à curvatura da trajetória a ser percorrida pelo líder e à velocidade dos seguidores. Somente resultados de simulação são apresentados.

Em (KRESS-GAZIT et al., 2008), os autores apresentam uma técnica de controle descentralizado baseada em políticas locais de controle (equivalentes a comportamentos) para ser aplicada em veículos autônomos. Tais políticas locais garantem a execução da tarefa num dado entorno, garantindo que o estado do veículo, ao final da execução de uma delas, estará dentro da área de abrangência da política que será executada em seguida. Cada política de controle obedece a especificações de alto nível, como “dirigir até encontrar uma vaga e, então, estacionar”, ou “deixar o quarteirão obedecendo as leis de trânsito”. A execução da tarefa por parte de cada veículo depende do estado dos veículos ao seu redor, percebido por seus sensores. São apresentados resultados de simulação envolvendo as tarefas de estacionamento e movimentação obedecendo as leis de trânsito.

Uma técnica de controle centralizado de formação baseado em estruturas virtuais, chamada de *Cluster Space Control*, foi apresentada por Mas, Petrovic e Kitts (2008). Os autores propõem uma estrutura de controle para um grupo de três robôs uniciclo, em que o controle para seu deslocamento é feito com base em seu centróide. Mencionam que os controladores adotados são do tipo PID, mas não explicam como foram projetados e não apresentam análise de estabilidade do sistema. São apresentados resultados experimentais com robôs AmigoBot (da empresa Mobile Robots), mas os erros são muito grandes, oscilando a picos de mais de um metro de distância.

Em (ANTONELLI; ARRICHIELLO; CHIAVERINI, 2008) é proposto um sistema multirrobo que tem o propósito de posicionar os veículos em formação em torno de um alvo (cujo movimento é inicialmente desconhecido) e escoltá-lo ou acompanhá-lo, mantendo a formação. A ideia é que os robôs se mantenham em torno do alvo para evitar sua fuga ou para protegê-lo de outros agentes externos. Cada um dos  $n$  robôs se posiciona num dos vértices de um polígono de ordem  $n$  em torno do alvo, de forma a minimizar as janelas de possível fuga ou penetração na região interna. Os autores usam uma lei de controle centralizado que leva em conta a ordem de prioridade das subtarefas a serem

executadas: (1) o centróide da formação deve coincidir com a posição do alvo; (2) os robôs devem se mover seguindo uma circunferência em torno do alvo; (3) os robôs devem se distribuir adequadamente ao longo da circunferência; e (4) os robôs devem evitar colisão com obstáculos e entre si. Cada subtarefa é tratada como um comportamento, e gera um comando de velocidade para cada robô. Os comandos de velocidade são, então, fusionados de forma que os sinais de comando enviados a cada robô sejam uma combinação de cada comportamento, de acordo com sua prioridade e ativação. São apresentadas simulações que evidenciam diferentes resultados para diferentes ordens de prioridade de cada tarefa, e diferentes ganhos de cada controlador. Também são mostrados experimentos com seis robôs de tipo unicycle Khepera II (da empresa K-Team), em que a informação de posição do alvo e dos demais robôs é obtida a partir de duas câmeras posicionadas no teto. Os resultados mostram que o sistema é capaz de se posicionar em torno de uma bola de tênis e segui-la.

Nos trabalhos mencionados anteriormente a dinâmica dos veículos não é considerada na geração dos sinais de controle. Por outro lado, existem alguns trabalhos que tratam do controle de sistemas multirrobôs considerando seus modelos dinâmicos. Por exemplo, em sistemas em que se deseja executar deslocamento de cargas ou controle de formação, a compensação da dinâmica de cada robô do grupo pode levar a uma melhora de desempenho, já que cada robô pode seguir seus sinais de comando com menor erro.

Neste contexto, Fierro e Das (2002) apresentam uma arquitetura dividida em quatro camadas para coordenar um time de robôs móveis para que estes atinjam uma posição desejada com uma formação determinada. Sensores permitem que os robôs se organizem numa rede e definam seus líderes e seus vizinhos. A camada 4 (superior) é responsável por planejar a trajetória a ser seguida pelo robô líder e, portanto, pelo grupo de robôs. A camada 3 possui um algoritmo para realizar o controle de formação, cuja forma é determinada pelas medidas de distância de um a dois outros robôs, ou pela distância e ângulo entre dois robôs. Tal estratégia é classificada como líder-seguidores pois cada robô deve seguir outro (ou dois outros), e é muito similar àquela apresentada em (FIERRO et al., 2001). A camada 2 realiza o controle cinemático de cada robô, enquanto a camada 1 é responsável pelo controle adaptativo de torque, que leva em consideração a dinâmica de cada veículo. Os autores também mostram que o sistema em malha fechada é estável com base na teoria de Lyapunov. São apresentados apenas resultados de simulação para um grupo de dois robôs.

Uma abordagem de controle descentralizado de formação que considera os modelos dinâmicos dos robôs do grupo é apresentada em (LAWTON; BEARD; YOUNG, 2003).

Tal trabalho apresenta uma abordagem baseada em comportamentos para controlar manobras de grupos de robôs entre padrões de formação. Os autores desenvolvem uma estratégia baseada em dois objetivos que competem entre si: (1) movimentar os robôs até o ponto de destino e (2) manter a formação durante o movimento. Para lidar com esses objetivos, foi proposta uma função de erro que leva em conta o erro de posição de cada robô e o erro de formação do grupo, com pesos que podem ser ajustados. A estratégia de controle proposta, chamada de dinâmica acoplada, prevê que cada robô saiba as posições relativas e desejadas de pelo menos dois outros robôs integrantes da formação, além de conhecer ou estimar suas velocidades. A convergência dos erros de controle a valores limitados é provada com base na teoria de Lyapunov.

Estratégias para deslocamento de cargas através da cooperação entre dois robôs móveis de tipo unicycle são propostas e estudadas em (BRAGANÇA, 2004). Para projeto do controlador, cujas saídas são tensões para os motores, é utilizado um modelo dinâmico simplificado dos robôs móveis, que considera que o ponto de interesse e o centro de massa do robô coincidem com o ponto central do eixo virtual que une as rodas de tração, e que não há variação na dinâmica do robô. A eficácia do sistema de controle e das estratégias propostas para deslocamento das cargas é ilustrada por resultados de experimentos, mas um estudo formal de estabilidade do sistema não é apresentado.

Em (De La CRUZ, 2006; De La CRUZ; CARELLI, 2006) foi proposta uma arquitetura de controle centralizado de formação de robôs móveis que leva em conta os modelos dinâmicos dos veículos da formação. Foram desenvolvidos dois modelos cinemáticos do sistema multirrobo, denominados de modelo cinemático de primeira ordem e modelo cinemático de segunda ordem. O primeiro leva em conta apenas os modelos cinemáticos dos robôs da formação, enquanto o segundo leva em consideração seus modelos dinâmicos, compensando os efeitos da dinâmica de cada robô para geração dos sinais de controle. Neste sistema, o controlador de formação deve conhecer o modelo dinâmico de cada robô do grupo, cujos parâmetros são supostos constantes. Resultados experimentais são apresentados usando um grupo de três robôs Pioneer.

Neste contexto, este capítulo aborda as arquiteturas de controle descentralizado e centralizado de formação, sempre com realização da compensação da dinâmica de um ou mais robôs membros do grupo. Primeiro, na seção 4.3, é apresentado o caso do controle descentralizado de formação, em que foi utilizada a estratégia proposta em (BRANDÃO, 2008), que trata do controle de uma estrutura líder-seguidor. O sistema original considera apenas os modelos cinemáticos dos robôs. Então, o segundo controlador dinâmico, proposto na subseção 3.3.2, é aqui agregado para realizar a compensação da dinâmica do robô

seguidor. Resultados de simulação e de experimentos são apresentados para ilustrarem a influência da compensação da dinâmica na redução dos erros de formação, considerando o esquema de controle de formação descentralizado tipo líder-seguidor.

Em seguida, duas arquiteturas são apresentadas para ilustrar o controle centralizado de formação. A primeira, apresentada na seção 4.4, é baseada no modelo cinemático de primeira ordem proposto em (De La CRUZ; CARELLI, 2006) que, originalmente, não leva em conta os modelos dinâmicos dos robôs membros da formação. A tal sistema foi agregado o primeiro controlador dinâmico, apresentado na subseção 3.3.1, de forma a realizar a compensação da dinâmica dos robôs sem que fosse necessário alterar a estrutura de controle de formação. Resultados de simulação são mostrados. A segunda arquitetura, apresentada na seção 4.5, é baseada no controle do centróide de uma estrutura virtual, como proposto em (MAS; PETROVIC; KITTS, 2008). A estratégia de controle proposta naquele trabalho é baseada em controladores PID e não leva em conta a dinâmica dos robôs da formação. Aqui, propõe-se um controlador não-linear de formação compatível com tal estratégia, e apresenta-se a análise de sua estabilidade. O segundo controlador dinâmico, apresentado na subseção 3.3.2, é utilizado para realizar a compensação da dinâmica de todos os robôs, e sua influência na redução dos erros de controle de formação é ilustrada. Resultados de simulação e de experimentos são apresentados para este caso, e ilustram a influência da compensação da dinâmica considerando o esquema de controle centralizado de formação tipo estruturas virtuais.

## 4.3 Controle Descentralizado de uma Formação Líder-Seguidor

Esta seção aborda a estratégia de controle descentralizado de formação tipo líder-seguidor desenvolvida em (BRANDÃO et al., 2007b; BRANDÃO, 2008), em que não há troca de informação entre os robôs, e mostra um exemplo de utilização do segundo controlador dinâmico aqui proposto para compensar a dinâmica do veículo seguidor.

### 4.3.1 Estratégia de Controle

Nesta estratégia, o robô líder segue uma trajetória pré-definida, enquanto o robô seguidor deve se manter em uma posição fixa em relação ao primeiro. A identificação da posição e da orientação do robô líder é feita através da utilização de um sensor de varredura *laser* (montado no seguidor) e de um padrão a ser identificado (montado no líder). As

medidas de distância obtidas pelo robô seguidor são suficientes para determinação das variáveis de formação, conforme enunciado em (BRANDÃO, 2008). No mesmo trabalho foi proposta para o robô seguidor uma lei de controle de formação baseada na cinemática inversa do sistema. A este sistema foi agregada a compensação da dinâmica do robô, através da utilização do segundo controlador dinâmico aqui proposto, apresentado na subseção 3.3.2 (MARTINS et al., 2008).

O desenvolvimento do controlador de formação em questão foi apresentado inicialmente em (BRANDÃO et al., 2007b), e será reproduzido de forma resumida a seguir.

As variáveis de formação  $[\rho_{LF} \ \beta_{LF} \ \theta_{LF}]^T$ , que constituem o controle descentralizado de formação, são apresentadas na Figura 65. Tais variáveis representam a distância entre os robôs ( $\rho_{LF} \in \mathbb{R}^+$ ), o ângulo do robô líder em relação ao seguidor ( $\beta_{LF} \in (0^\circ, 180^\circ)$ ), e o erro de orientação entre os robôs ( $\theta_{LF} \in [-90^\circ, 90^\circ]$ ).

Conforme desenvolvido em (BRANDÃO, 2008), as equações de estado do robô seguidor, baseadas nas variáveis de formação, são dadas por

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{LF} = u_L \sin(\beta_{LF} - \theta_{LF}) - u_F \sin \beta_{LF} \\ \dot{\beta}_{LF} = \frac{u_L \cos(\beta_{LF} - \theta_{LF}) - u_F \cos \beta_{LF}}{\rho_{LF}} - \omega_F \\ \dot{\theta}_{LF} = \omega_L - \omega_F, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $u_L$  e  $u_F$  são as velocidades lineares e  $\omega_L$  e  $\omega_F$  são as velocidades angulares do robô líder (L) e do seguidor (F). Assim como em (CONSOLINI et al., 2007), o sistema de coordenadas do robô seguidor é adotado como referência para o controle da estrutura líder-seguidor.

Para o projeto do controlador cinemático de formação foi considerada a cinemática inversa do sistema. Assim, tem-se que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\rho}_{LF} \\ \dot{\beta}_{LF} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \beta_{LF} & 0 \\ -\frac{\cos \beta_{LF}}{\rho_{LF}} & -1 \end{bmatrix}}_{g(\mathbf{x})} \underbrace{\begin{bmatrix} u_F \\ \omega_F \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_d} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_L \sin(\beta_{LF} - \theta_{LF}) \\ \frac{u_L \cos(\beta_{LF} - \theta_{LF})}{\rho_{LF}} \end{bmatrix}}_{q(\mathbf{x})}, \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{x} = [\rho_{LF} \ \beta_{LF}]^T$  representa as variáveis de formação controláveis e  $\mathbf{v}_d$  representa os sinais de controle. Com o objetivo de estabelecer uma lei de controle que faça  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d$  para  $t \rightarrow \infty$ , e supondo que  $g(\mathbf{x})$  seja uma matriz inversível, foi proposto que

$$\mathbf{v}_d = g^{-1}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{q}(x)), \quad \text{para } \boldsymbol{\eta} = \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}f(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (4.3)$$

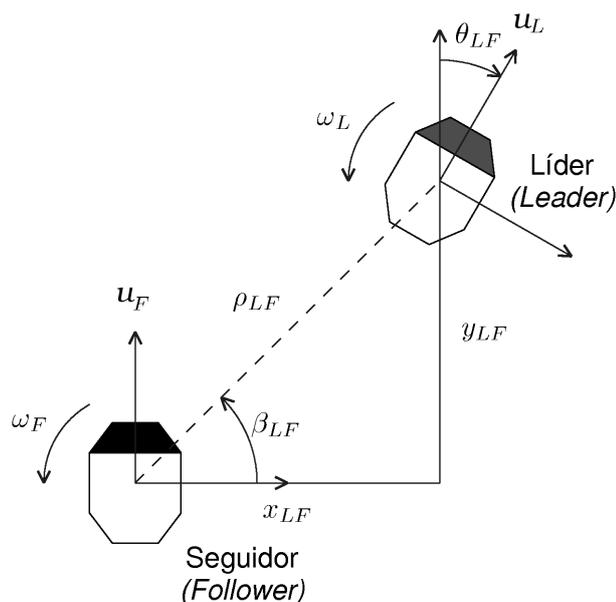


Figura 65: Variáveis de formação e controle.

onde  $\mathbf{K}$  é uma matriz de ganhos definida positiva e  $f(\tilde{\mathbf{x}})$  é uma função de saturação. Por fim, em malha fechada se obtém que  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}f(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ , onde  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$  é o vetor de erro de formação. Vale salientar que  $g(\mathbf{x})$  é inversível se  $\rho_{LF} > 0$  e  $\beta_{LF} \in (0, 180^\circ)$ . Como  $\rho_{LF}$  é a distância entre os robôs, a condição de singularidade nunca ocorrerá para  $\rho_{LF} = 0$ . No entanto, se o ângulo  $\beta_{LF}$  de formação entre os robôs for igual a zero ou a  $180^\circ$ , outra condição de singularidade ocorre. Isso significa que o controlador proposto não permite que os robôs naveguem lado-a-lado. Tal fato não chega a ser um fator de limitação adicional, já que a detecção do robô líder é feita pelo sensor de varredura *laser*, que está a bordo do robô seguidor e é capaz de medir distâncias a objetos localizados apenas à frente do robô, com um ângulo de abertura de  $180^\circ$ . Isso significa que o padrão a ser detectado e, portanto, o robô líder, não podem estar exatamente ao lado nem atrás do robô seguidor.

A análise da estabilidade foi feita com uso da função candidata de Lyapunov  $V(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T\tilde{\mathbf{x}} > 0$ , cuja derivada temporal é dada por  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = -\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{K}f(\tilde{\mathbf{x}})$ .

Assumindo  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \tanh \tilde{\rho}_{LF} \\ \tanh \tilde{\beta}_{LF} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ , sendo  $k_1 > 0$  e  $k_2 > 0$ , é possível afirmar que

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = -\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{K}f(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, \quad (4.4)$$

isto é,  $\dot{V}$  é definida negativa. Logo,  $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}$  para  $t \rightarrow \infty$ , ou, ainda,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d$  com  $t \rightarrow \infty$ .

Para a estratégia de controle de formação abordada,  $\mathbf{x}_d = [\rho_{LFd} \ \beta_{LFd}]^T$  é uma matriz

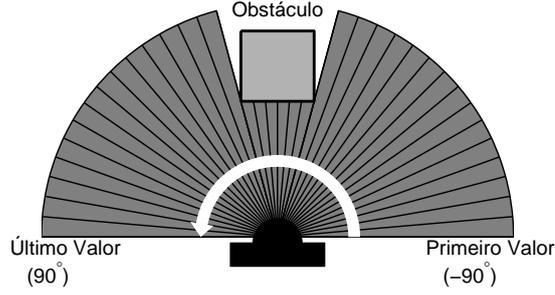


Figura 66: Medidas do sensor de varredura *laser* utilizado no robô seguidor.

constante, o que implica em  $\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{d}} = [0 \ 0]^T$ . Logo, os sinais de controle de (4.3) tornam-se

$$\begin{bmatrix} u_F \\ \omega_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_L \operatorname{sen}(\beta_{LF} - \theta_{LF}) - k_1 \tanh \rho_{LF}}{\operatorname{sen} \beta_{LF}} \\ \frac{u_L \operatorname{sen} \theta_{LF} + k_1 \tanh \tilde{\rho}_{LF} \cos \beta_{LF}}{\rho_{LF} \operatorname{sen} \beta_{LF}} - k_2 \tanh \tilde{\beta}_{LF} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde  $\tilde{\rho}_{LF} = \rho_{LFd} - \rho_{LF}$  e  $\tilde{\beta}_{LF} = \beta_{LFd} - \beta_{LF}$  são os erros das variáveis de formação. Assume-se que  $\beta_{LF} \in (0^\circ, 180^\circ)$  e, portanto, pode-se verificar que  $\mathbf{v}_{\mathbf{d}} \in L_\infty$ . Também se assume que  $\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{d}} \in L_\infty$ , já que as acelerações do robô líder são limitadas.

Os valores das variáveis de formação  $[\rho_{LF} \ \beta_{LF} \ \theta_{LF}]^T$  são estimados a partir das medidas da varredura do sensor *laser* instalado a bordo do robô seguidor, sendo a velocidade do líder estimada através de um Filtro de Kalman<sup>1</sup>. Tal sensor informa ao robô 181 medidas de distância a obstáculos localizados adiante do robô, obtidas a cada grau, conforme ilustra a Figura 66.

Sobre o robô líder da formação foi montado um semicilindro de diâmetro igual a 200mm para sua identificação no ambiente, como ilustra a Figura 67(a). A Figura 67(b) ilustra as variáveis de formação  $\rho_{LF}$  e  $\beta_{LF}$ , cujos valores devem ser estimados a partir das medidas das distâncias  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , as quais são tomadas, respectivamente, nos ângulos  $\beta_1$  e  $\beta_2$  da varredura *laser*. Em (BRANDÃO, 2008) foi proposto um modelo simplificado para determinar os valores de  $\beta_{LF}$  e  $\theta_{LF}$ , dado por

$$\beta_{LF} \approx \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad (4.6)$$

$$\theta_{LF} \approx \gamma_2, \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>Rudolf Emil Kalman nasceu em Budapeste, Hungria, em 19 de maio de 1930. Graduou-se em Engenharia Elétrica pelo MIT, onde também obteve o título de Mestre. É doutor pela Columbia University, atuou como engenheiro da IBM e hoje é professor emérito do Instituto Federal Suíço de Tecnologia. Alcançou fama por sua coívenção de uma técnica matemática intensamente utilizada no campo da Engenharia de Controle, conhecida como Filtro de Kalman (IEEE, Acesso em: 30/dez/2008).

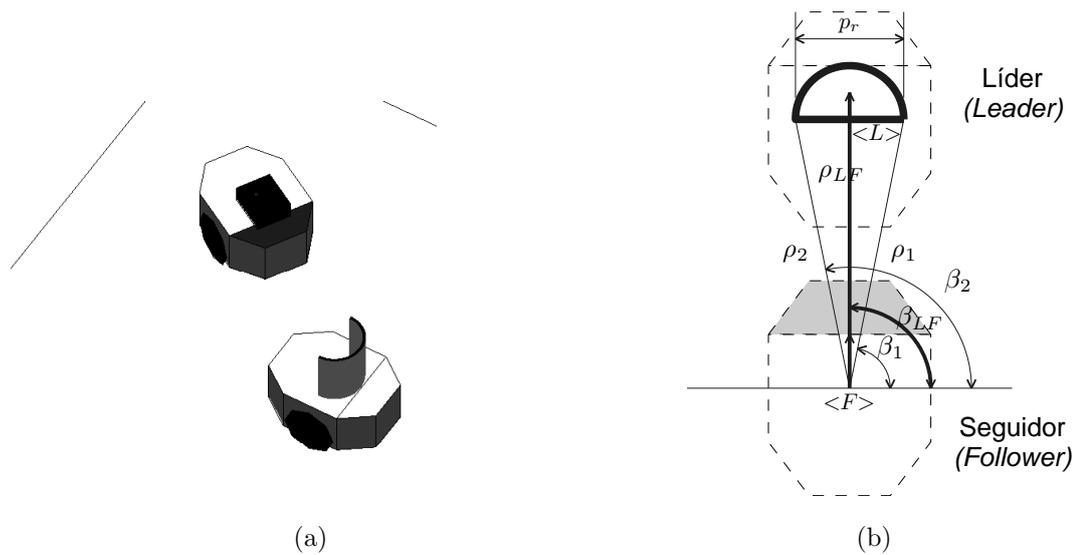


Figura 67: (a) Representação dos robôs líder (com o semicilindro no topo) e seguidor num ambiente de simulação. (b) Variáveis de formação e medidas do sensor *laser*.

Fonte: (BRANDÃO, 2008).

onde  $\gamma_2$  é o ângulo de rotação aparente do padrão, conforme este é “visto” pelo sensor *laser*. O valor de  $\gamma_2$  pode ser obtido a partir de

$$\tan \gamma_2 = \frac{\rho_1 \sin \beta_1 - \rho_2 \sin \beta_2}{\rho_1 \cos \beta_1 - \rho_2 \cos \beta_2}. \quad (4.8)$$

Com base nos valores aproximados de  $\theta_{LF}$  e  $\beta_{LF}$ , o valor de  $\rho_{LF}$  pode ser aproximado por

$$\rho_{LF} \approx \mathbf{M} \angle \beta_{LF}, \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{M}$  é o vetor de medidas de distância fornecidas pelo sensor *laser*. Ou seja,  $\rho_{LF}$  é aproximadamente a medida de distância obtida na posição angular  $\beta_{LF}$  do vetor  $\mathbf{M}$ .

A Figura 68 ilustra as medidas do vetor  $\mathbf{M}$  em função do ângulo de resolução do sensor durante a navegação de uma formação linear com  $\rho_{LF} = 1m$  e  $\beta_{LF} = 90^\circ$ . Na parte inferior da Figura 68 é apresentada a diferença entre medidas angulares sucessivas do perfil, destacando suas descontinuidades. A detecção do padrão se dá através da identificação de um pico negativo seguido de outro positivo (dentro de limiares assumidos), levando-se em consideração a dimensão real do padrão, que é conhecida. Uma explicação mais detalhada pode ser encontrada em (BRANDÃO, 2008).

**Nota 4.1.** A conclusão da análise de estabilidade apresentada para o controlador de formação mostra que a lei de controle dada por (4.3) é capaz de fazer com que o robô

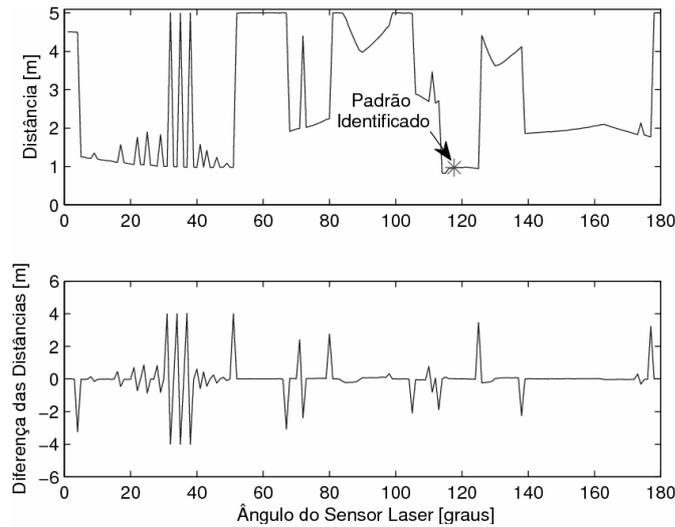


Figura 68: Perfil das medidas do sensor *laser* no ambiente e a diferença entre medidas de distância consecutivas. Fonte: (BRANDÃO, 2008).

seguidor siga o robô líder a uma distância e ângulo desejados. É importante que se note que tal conclusão é válida para  $\mathbf{x}_d$  constante ou variante no tempo, ou seja,  $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_d(t)$ . Isso significa que, se as equações que geram os sinais de controle forem definidas considerando  $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_d(t)$ , a distância e ângulo desejados de formação podem variar durante a realização da operação de seguimento.

**Nota 4.2.** Foi observado em (BRANDÃO, 2008) que ruídos nas medidas da varredura *laser* podem introduzir erros no cálculo da dimensão do padrão. Também foi notado que, como o sensor de varredura *laser* faz medidas de distância a intervalos discretos (a cada  $1^\circ$ ), nos casos em que a distância entre os robôs é muito maior que a dimensão do padrão, o erro no valor estimado pelo seguidor para a dimensão do padrão é grande, o que provoca degradação no desempenho do sistema de controle de formação.

### 4.3.2 Compensação da Dinâmica do Robô Seguidor

O controlador proposto em (BRANDÃO, 2008) para uma formação líder-seguidor, e apresentado de maneira sucinta na subseção 4.3.1, aborda somente o comportamento cinemático dos robôs que constituem a formação. No caso da formação líder-seguidor tratada, o controlador do robô seguidor gera comandos de forma a mantê-lo em formação com o líder, enquanto este executa um deslocamento desconhecido *a priori*. Conforme discutido e ilustrado no capítulo 3, uma variação nos valores dos parâmetros dinâmicos do robô pode provocar degradação em seu desempenho. Neste contexto, foi adicionado ao robô seguidor um controlador para compensar os efeitos de possível variação em sua dinâmica.

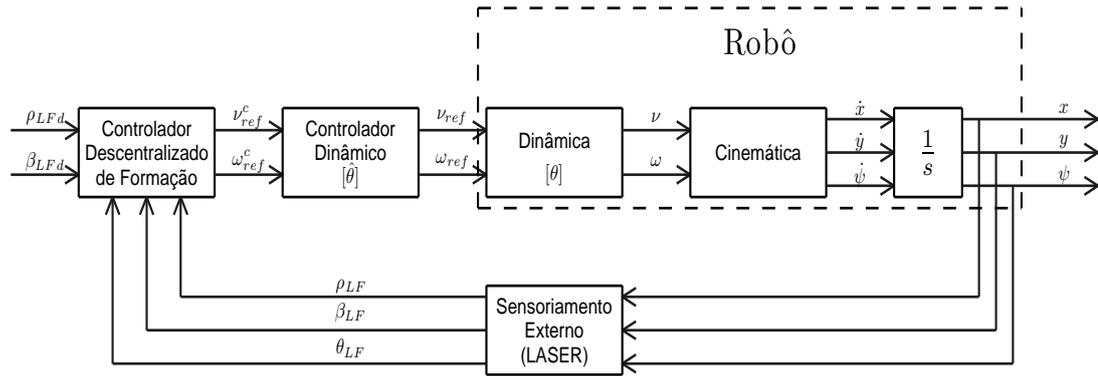


Figura 69: Estrutura de controle de formação líder-seguidor com compensação da dinâmica (robô seguidor).

A Figura 69 apresenta a estrutura de controle de formação descentralizado implementada no robô seguidor. Ao sistema apresentado na subseção anterior foi acrescentado um controlador para realizar a compensação da dinâmica do veículo. Foi utilizado o segundo controlador dinâmico, apresentado na subseção 3.3.2, que recebe os sinais de velocidades desejadas gerados pelo controlador cinemático de formação, realiza a compensação da dinâmica, e envia os sinais de comando para o robô seguidor.

### 4.3.3 Resultados de Simulação

Foram realizadas simulações para verificar o desempenho do sistema de controle descentralizado de formação líder-seguidor com compensação da dinâmica do robô seguidor. O sistema foi simulado com uso da plataforma de simulação **MRSiM**, descrita em (BRANDÃO et al., 2008). Além de simular os modelos dos robôs e seu comportamento, tal plataforma permite a simulação do ambiente (inclusive com obstáculos) e da interação entre os robôs.

Nas simulações realizadas foram utilizados dois robôs, sendo um líder e um seguidor. Na base superior do robô líder foi colocada uma estrutura semicilíndrica de dimensões conhecidas, como mostrado na Figura 67(a). O robô seguidor deve identificar a posição e orientação do robô líder através das medidas realizadas por seu sensor de varredura *laser*, como explicado na subseção 4.3.1, e estimar sua velocidade. Com base nesses dados, executa o controle de formação, de forma a obter  $\rho_{LFd} = 1m$  e  $\beta_{LFd} = 90^\circ$ . O robô líder, por sua vez, se movimenta comandado por um controlador de posicionamento sem orientação final. Devido a características do controlador adotado, sua velocidade varia conforme se desloca, diminuindo ao se aproximar do ponto de destino. Quando alcança o ponto de destino, outro ponto é automaticamente designado, de forma que o robô líder se

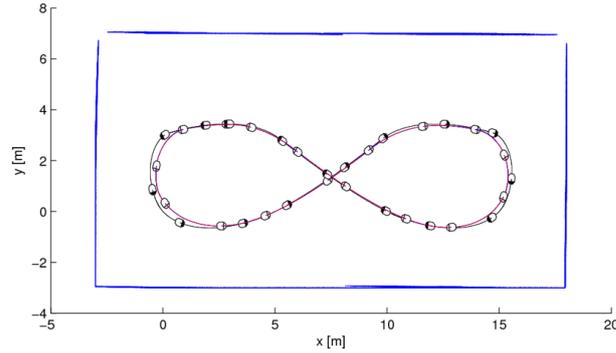


Figura 70: Caminho percorrido pelos robôs líder e seguidor.

mantém em marcha constantemente. Nas simulações executadas, o robô líder partiu do ponto  $(0, 0)m$  e foram definidos como destinos, nesta ordem, os pontos  $(5; 0)m$ ,  $(10; 3)m$ ,  $(15; 3)m$ ,  $(15; 0)m$ ,  $(10; 0)m$ ,  $(5; 3)m$ ,  $(0; 3)m$  e  $(0; 0)m$ . O caminho percorrido pelos robôs líder e seguidor é ilustrado na Figura 70.

Para verificar o desempenho do sistema, os valores dos parâmetros  $\theta$  utilizados no controlador dinâmico eram diferentes daqueles utilizados no modelo do robô, que corresponderam aos parâmetros do robô Pioneer 3-DX listados na seção 2.4. Os valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e  $\theta_5$  utilizados no controlador correspondiam a um quinto daqueles usados no modelo, enquanto  $\theta_4$  e  $\theta_6$  tinham os mesmos valores no controlador e no modelo do robô. Duas simulações foram realizadas mantendo-se as mesmas condições, inclusive os ganhos do controlador cinemático de formação, apenas alterando o comportamento do controlador dinâmico utilizado. Em ambas, a sequência de pontos de referência enviada ao robô líder foi repetida três vezes.

Na primeira simulação, o controlador dinâmico estava desativado, não sendo feita compensação da dinâmica do robô seguidor. A evolução das variáveis de formação, para este caso, é apresentada na Figura 71. Na segunda, o controlador dinâmico estava ativado, com adaptação dos parâmetros através da lei de adaptação com modificação- $\sigma$ , dada por (3.49). Nas Figuras 72(a) e 72(b) são apresentadas as variáveis de formação e a evolução dos parâmetros estimados do robô seguidor para este caso.

Os resultados apresentados nas figuras 71 e 72(a) são similares, já que as variáveis de formação permanecem variando durante todo o percurso simulado. Para efetuar a comparação entre os dois casos, foram calculados os índices de desempenho  $IAE$  - Integral do valor Absoluto do Erro, para os erros de formação entre os robôs líder e seguidor:  $IAE_\rho$  para o erro de distância  $\tilde{\rho}_{LF}$ , e  $IAE_\beta$  para o erro de ângulo de formação  $\tilde{\beta}_{LF}$ . Ambas as simulações tiveram a mesma duração de, aproximadamente, 750s. Os valores de  $IAE$

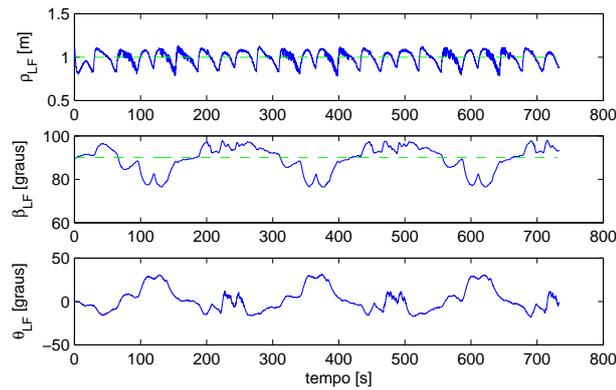


Figura 71: Evolução das variáveis de formação sem compensação da dinâmica.

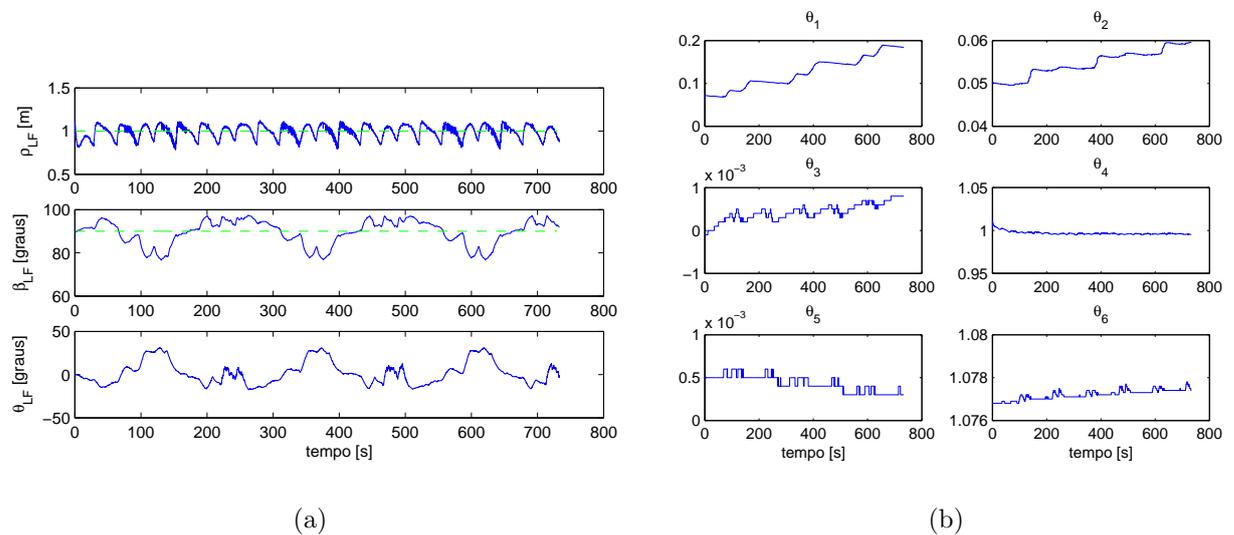


Figura 72: Formação líder-seguidor - com compensação da dinâmica e adaptação de parâmetros. (a) Variáveis de formação; (b) Parâmetros estimados do robô seguidor.

obtidos em ambas simulações são mostrados na tabela 1.

Tabela 1: IAE para simulações do controle descentralizado tipo líder-seguidor

	$IAE_{\rho}$	$IAE_{\beta}$
Sem compensação da dinâmica	49,0	62,2
Com compensação adaptativa da dinâmica	47,2	59,6

Pode-se notar que a ativação do controlador dinâmico com adaptação de parâmetros provocou uma diminuição nos índices  $IAE_{\rho}$  e  $IAE_{\beta}$ , o que indica melhor desempenho. Em outras palavras, a compensação da dinâmica do robô seguidor com adaptação dos parâmetros estimados levou a menores erros de distância e de ângulo de formação, em média.



Figura 73: Robôs móveis utilizados nos experimentos de controle de formação líder-seguidor. Fonte: (BRANDÃO, 2008).

A redução nos valores de  $IAE$  para o caso considerado foi de cerca de 4%. Esta não é uma melhora tão expressiva quanto se poderia esperar, tendo em vista a redução de 20 a 30% nos valores do índice  $IAE$  relatada na seção 3.6. Por isso, é importante ressaltar que os erros considerados naquela e nesta seções são diferentes. O esquema de controle de formação líder-seguidor aqui apresentado possui outras fontes de erro que não estavam presentes na análise apresentada na seção 3.6, como erros de medição de posição e orientação do líder, erros de estimação de sua velocidade e atraso provocado pelo filtro de Kalman, por exemplo. Como mencionado na *Nota 4.2*, quando a distância entre os robôs é muito maior que as dimensões do padrão (200mm), o erro de medição pode ser bastante grande. Tais fontes de erro fizeram com que a compensação da dinâmica, neste caso, tivesse um impacto pequeno na redução do valor do erro de formação.

#### 4.3.4 Resultados Experimentais

O desempenho do sistema de controle descentralizado de formação líder-seguidor, com e sem compensação da dinâmica, também foi comparado através de experimentos. Foram utilizados dois robôs, sendo um robô Pioneer 2-DX, como líder, e um Pioneer 3-DX com sensor de varredura *laser*, como seguidor. Na base superior do robô líder foi colocada uma estrutura semicilíndrica de dimensões conhecidas. Os robôs utilizados nos experimentos são mostrados na Figura 73.

Nos experimentos, o robô seguidor deve identificar a posição e a orientação do robô líder através das medidas realizadas por seu sensor de varredura *laser*, como explicado na subseção 4.3.1, e estimar sua velocidade. Com base nesses dados, deve executar o controle de formação para obter  $\rho_{LFd} = 0,7m$  e  $\beta_{LFd} = 60^\circ$ . O robô líder, por sua vez, se movimenta comandado por um controlador de posicionamento sem orientação final, que realiza desvio de obstáculos através da técnica de *desvio tangencial modificado* (BRANDÃO et al., 2007a). Devido às características do controlador utilizado, sua velocidade varia conforme se desloca, diminuindo ao se aproximar de um obstáculo e do ponto de destino. Vale ressaltar que o algoritmo de desvio de obstáculos é executado somente pelo robô líder, que é capaz de detectá-los através de seus sensores ultrassônicos.

Foram realizados dois experimentos no mesmo ambiente, com a presença de obstáculos. Em ambos os experimentos, a posição inicial do robô líder é  $(0, 0; -0, 7)m$ , e a do seguidor é  $(-0, 7; -0, 375)m$ . O robô líder deve chegar à posição  $(6, 5; -4, 0)m$ . A diferença entre os dois experimentos é que, no primeiro, foi utilizado apenas o controlador cinemático de formação, sendo que a compensação adaptativa da dinâmica foi ativada somente no segundo.

A Figura 74 mostra o caminho percorrido pelo robô seguidor e o mapa do ambiente obtido através das medições do sensor de varredura *laser*. Os círculos azuis indicam a posição instantânea do robô seguidor a cada 5 segundos de experimento, enquanto os círculos negros indicam a posição do líder (detectada pelo seguidor) nos mesmos instantes. Para deslocar-se da posição inicial à posição final, o robô seguidor realiza desvio dos obstáculos existentes entre elas, como pode ser visto na figura.

No primeiro experimento, o controlador dinâmico estava desativado, não sendo feita compensação da dinâmica do robô seguidor. A evolução das variáveis de formação, para este caso, é apresentada na Figura 75. No segundo, o controlador dinâmico estava ativado, com adaptação dos parâmetros através da lei de adaptação com modificação- $\sigma$ , dada por (3.49). Nas Figuras 76(a) e 76(b) são apresentadas as variáveis de formação e a evolução dos parâmetros estimados do robô seguidor para este caso. É válido ressaltar que os parâmetros utilizados no controlador dinâmico iniciam com os valores identificados para o robô Pioneer 3DX.

Como ocorreu nas simulações, os resultados apresentados nas figuras 75 e 76(a) são similares, já que as variáveis de formação permanecem variando durante todo o percurso. Para efetuar a comparação entre os dois casos, foram calculados os índices de desempenho  $IAE_\rho$  para o erro de distância  $\tilde{\rho}_{LF}$ , e  $IAE_\beta$  para o erro de ângulo de formação  $\tilde{\beta}_{LF}$ . Os

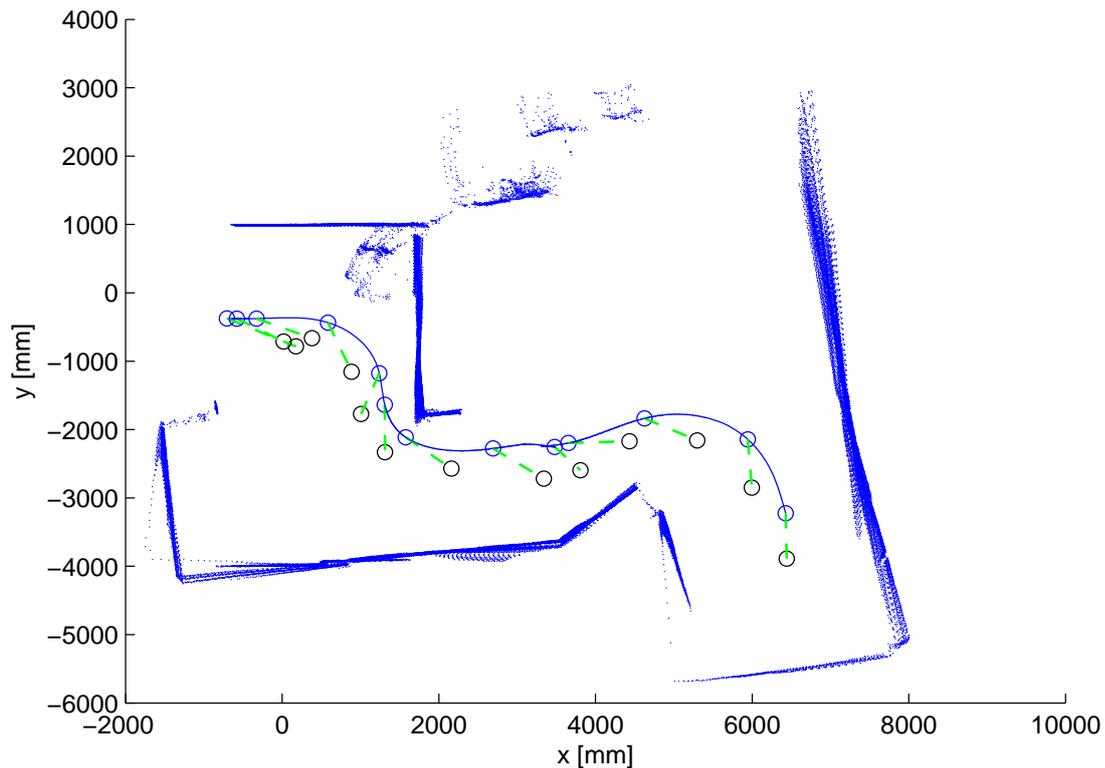


Figura 74: Experimento de controle de formação líder-seguidor: caminho percorrido pelo robô seguidor e mapa do ambiente obtido através das medições do sensor de varredura *laser*.

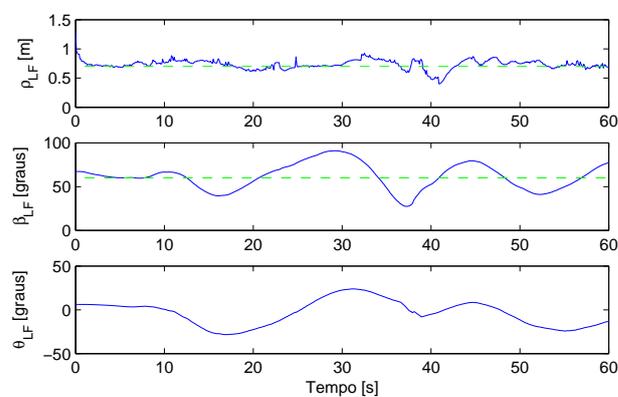


Figura 75: Experimento de controle de formação líder-seguidor: evolução das variáveis de formação sem compensação da dinâmica.

valores de  $IAE$  obtidos em ambos os experimentos são mostrados na tabela 2.

Tabela 2:  $IAE$  para experimentos do controle descentralizado tipo líder-seguidor

	$IAE_{\rho}$	$IAE_{\beta}$
Sem compensação da dinâmica	3,98	12,71
Com compensação adaptativa da dinâmica	4,39	8,85

Pode-se notar que, nos experimentos realizados, a ativação do controlador dinâmico

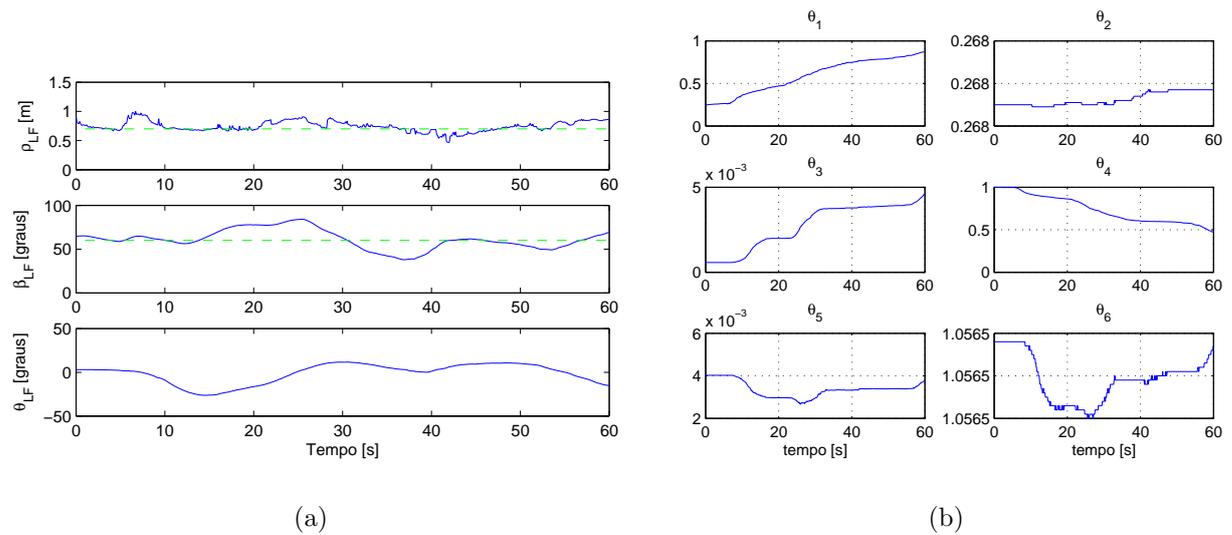


Figura 76: Experimento de controle de formação líder-seguidor com compensação da dinâmica e adaptação de parâmetros: (a) Variáveis de formação; (b) Parâmetros estimados do robô seguidor.

com adaptação de parâmetros provocou diminuição de cerca de 30% no índice  $IAE_{\beta}$ , mas houve um aumento de 10% no índice  $IAE_{\rho}$ . Ou seja, considerando-se os erros de formação como um todo, já que a redução no erro de orientação foi maior do que o aumento do erro de distância, pode-se concluir que a compensação da dinâmica do robô seguidor levou a menores erros de formação, em média. Como comentado na subseção 4.3.3, o erro de formação do esquema líder-seguidor aqui apresentado é influenciado por várias fontes de erro. Por isso, a compensação da dinâmica, neste caso, teve um impacto pequeno na redução do erro de formação.

## 4.4 Primeiro Esquema de Controle Centralizado de Formação

Os controladores centralizados de formação propostos por De La CRUZ (2006) foram desenvolvidos com base nos modelos cinemáticos de primeira ordem e de segunda ordem do sistema multirrobôs, apresentados no mesmo trabalho. Tais modelos são explicados nas seções seguintes.

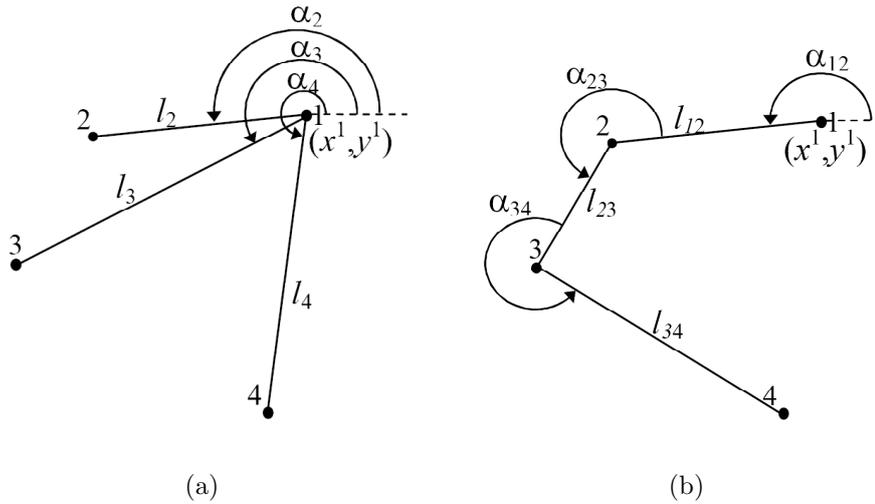


Figura 77: Duas formas de se definir as variáveis de formação (De La CRUZ, 2006).

#### 4.4.1 Modelo Cinemático de um Sistema Multirrobo

Os modelos cinemáticos de primeira e de segunda ordens propostos em (De La CRUZ, 2006) descrevem a variação da formação dos robôs no tempo. Foram definidos os vetores  $\mathbf{z}^1$ , que contém um conjunto de variáveis que descrevem o aspecto, a posição e a orientação da formação, e  $\mathbf{z}^2 = \dot{\mathbf{z}}^1$ . Essas variáveis que definem a formação e suas derivadas são denominadas de variáveis de formação.

O vetor  $\mathbf{z}^1$  pode ser definido de várias formas. Dois exemplos de definição para tal vetor são  $\mathbf{z}^1 = [x^1, y^1, l_2, \alpha_2, l_3, \alpha_3, l_4, \alpha_4]^T$ , que representa a formação apresentada na Figura 77(a), e  $\mathbf{z}^1 = [x^1, y^1, l_{12}, \alpha_{12}, l_{23}, \alpha_{23}, l_{34}, \alpha_{34}]^T$ , que representa a formação apresentada na Figura 77(b). Outras definições, que levam em conta a posição do centróide da formação, são apresentadas em (De La CRUZ, 2006). Como pode ser visto nas figuras,  $x^1$  e  $y^1$  definem a posição do robô 1 no plano cartesiano, em ambos os casos. Na formação mostrada na Figura 77(a), as posições dos demais robôs são dadas pelas variáveis  $l_i$  e  $\alpha_i$ , que definem a posição do  $i$ -ésimo robô em relação ao robô 1. Na formação mostrada na Figura 77(b), a posição de cada robô na formação é definida em relação à posição do robô anterior, como ilustrado. Logo, para ambos os casos pode-se considerar que a posição da formação é dada por  $x^1$  e  $y^1$ , enquanto as demais variáveis definem seu aspecto.

No modelo de primeira ordem do sistema multirrobo, o vetor de estados de formação  $\mathbf{z}$  pode ser dado por  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^1$ . Definiu-se um vetor  $\boldsymbol{\xi}$  de estados de formação trivial como sendo um vetor que contém a posição de cada robô da formação no plano cartesiano, ou seja,  $\boldsymbol{\xi} = [x^1, y^1, x^2, y^2, \dots, x^n, y^n]^T$ . Seja  $\mathbf{h}^i = [x^i, y^i]^T$  o vetor que determina a

posição do  $i$ -ésimo robô da formação. Portanto, o modelo cinemático de primeira ordem do sistema multirrobôs é dado por (De La CRUZ, 2006)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Pi}, \quad (4.10)$$

onde  $\boldsymbol{\xi} = [(\mathbf{h}^1)^T \dots (\mathbf{h}^n)^T]^T$  é o vetor de estados de formação trivial,  $\boldsymbol{\mu} = [(\dot{\mathbf{h}}_r^1)^T \dots (\dot{\mathbf{h}}_r^n)^T]^T$  é a entrada do sistema, dada pelas velocidades de referência de cada robô, e  $\boldsymbol{\Pi}$  é um vetor de perturbação que contém as diferenças entre as velocidades real e de referência de cada robô.

No modelo de segunda ordem, o vetor de estados de formação  $\mathbf{z}$  pode ser dado por  $\mathbf{z} = [\mathbf{z}^1 \mathbf{z}^2]^T$ . Nesse caso, o modelo é expresso em termos dos modelos dinâmicos linearizados por realimentação entrada-saída de cada robô, sendo o do  $i$ -ésimo robô dado por  $\ddot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{v}^i + \boldsymbol{\eta}^i$ , onde  $\mathbf{v}^i$  é a entrada de seu modelo linearizado (função da aceleração desejada e dos erros de posição e de velocidade) e  $\boldsymbol{\eta}^i$  é um vetor de perturbação. Logo, este modelo tem implícitas as características dinâmicas de cada robô membro da formação. O modelo cinemático de segunda ordem do sistema multirrobôs é

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\Pi}_2, \quad (4.11)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}_2 = [(\mathbf{v}^1)^T \dots (\mathbf{v}^n)^T]^T$  é a entrada do sistema,  $\boldsymbol{\Pi}_2 = [(\boldsymbol{\eta}^1)^T \dots (\boldsymbol{\eta}^n)^T]^T$  é o vetor de perturbação e  $\boldsymbol{\xi} = [(\mathbf{h}^1)^T \dots (\mathbf{h}^n)^T]^T$ . O vetor de estados de formação trivial para este modelo é dado por  $[(\boldsymbol{\xi})^T (\dot{\boldsymbol{\xi}})^T]^T$ .

Mais informações sobre o modelo cinemático de segunda ordem são apresentadas em (De La CRUZ, 2006). O desenvolvimento apresentado a seguir faz uso do modelo cinemático de primeira ordem, já que a compensação da dinâmica de cada robô será realizada localmente, e não pelo controlador centralizado.

#### 4.4.2 Transformação de coordenadas

Para expressar o modelo do sistema multirrobôs em termos do vetor de estados de formação  $\mathbf{z}$ , é realizada uma transformação de coordenadas através de um mapeamento suave  $\phi_1$  de  $\boldsymbol{\xi}$  a  $\mathbf{z}^1$ , tal que a inversa  $\phi_1^{-1}$  exista e seja suave. Ou seja,

$$\mathbf{z} = \phi_1(\boldsymbol{\xi}) = \phi(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.12)$$

onde  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^1$ . O mapeamento  $\phi$  define um difeomorfismo, já que  $\phi_1^{-1}$  existe e é suave.

Portanto,

$$\boldsymbol{\xi} = \phi_1^{-1}(\mathbf{z}^1) = \phi^{-1}(\mathbf{z}), \quad (4.13)$$

Derivando-se a equação (4.13), tem-se que

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z}^1)\dot{\mathbf{z}}^1 = \frac{\partial \phi_1^{-1}(\mathbf{z}^1)}{\partial \mathbf{z}^1} \dot{\mathbf{z}}^1, \quad (4.14)$$

onde  $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z}^1)$  é a matriz Jacobiana<sup>2</sup>.

Substituindo a equação (4.10), do modelo cinemático de primeira ordem, na equação (4.14), e supondo que  $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1}$  existe, obtém-se o modelo cinemático de primeira ordem em função das novas coordenadas, ou seja,

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1}\boldsymbol{\mu} + \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1}\boldsymbol{\Pi}, \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{z}$  é o vetor de estados da formação.

A transformação de coordenadas para o modelo cinemático de segunda ordem é apresentada em (De La CRUZ, 2006), que também mostra um exemplo de aplicação.

### 4.4.3 Lei de Controle

A lei de controle de formação

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z}) (K(\tilde{\mathbf{z}}) + \dot{\tilde{\mathbf{z}}}) \quad (4.16)$$

foi proposta por De La CRUZ (2006), baseada no modelo cinemático de primeira ordem do sistema multirrobo. Nela,  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^1$  é o vetor de estados de formação,  $\mathbf{z}_d = \mathbf{z}_d^1$  é o vetor de estados que caracteriza a formação desejada,  $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_d - \mathbf{z}$  é o vetor de erro de formação,  $\boldsymbol{\mu} = [(\dot{\mathbf{h}}_r^1)^T \dots (\dot{\mathbf{h}}_r^n)^T]^T$  é a entrada do sistema multirrobo, dada por velocidades de referência, e  $K(\cdot)$  é uma função de saturação projetada de maneira que  $\mathbf{x}^T K(\mathbf{x})$  seja definida positiva globalmente, com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Substituindo a lei de controle (4.16) na equação do modelo (4.15) obtém-se a equação do sistema em malha fechada, dada por

$$-\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1}\boldsymbol{\Pi} = K(\tilde{\mathbf{z}}) + \dot{\tilde{\mathbf{z}}}. \quad (4.17)$$

---

<sup>2</sup>A matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial é denominada de Matriz Jacobiana em homenagem ao matemático alemão Karl Gustav Jacob Jacobi (10/12/1804 - 18/02/1851), em reconhecimento ao seu trabalho em prol do desenvolvimento da matemática analítica (Biography Base, Acesso em: 16/jan/2009).

Considerou-se  $K(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{z}}$ , sendo

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \frac{k_{G1}}{a_G + |e_{z1}|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{k_{G2}}{a_G + |e_{z2}|} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_{G(2n)}}{a_G + |e_{z(2n)}|} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

onde  $e_{zi}$  é o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\tilde{\mathbf{z}}$ ,  $a_G > 0$  e  $k_{Gi} > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . Considerando-se a função candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}}$ , sua derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{\Pi}. \quad (4.19)$$

Uma condição suficiente para que (4.19) seja definida negativa é que

$$\frac{\min_j(k_{Gj})}{a_G + \|\tilde{\mathbf{z}}\|} \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 > \|\tilde{\mathbf{z}}\| \|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{\Pi}\|,$$

ou

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| > \frac{a_G \|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{\Pi}\|}{\min_j(k_{Gj}) - \|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{\Pi}\|}. \quad (4.20)$$

A equação (4.20) é válida se  $\min_j(k_{Gj}) > \|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{\Pi}\|$ , ou se tal condição é verificada num tempo finito (De La CRUZ, 2006). Considerando-se o vetor de perturbação  $\mathbf{\Pi}$  limitado, verifica-se que existe um entorno da origem, limitado, dentro do qual se manterá o vetor de erros de formação  $\tilde{\mathbf{z}}$ . Se o vetor de perturbação é considerado nulo, então verifica-se que  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$  com  $t \rightarrow \infty$ .

É válido enfatizar que o controlador dado pela equação (4.16) é capaz de seguir uma formação desejada continuamente variante no tempo.

Para realizar o controlador de formação foi utilizado o mapeamento  $\phi_1$  escalonável proposto em (De La CRUZ, 2006), apresentado a seguir. O vetor de estados de formação trivial  $\boldsymbol{\xi}$  é dado por

$$\boldsymbol{\xi} = \left[ (\mathbf{h}^1)^T \quad (\mathbf{h}^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{h}^n)^T \right]^T = [x^1 \ y^1 \ x^2 \ y^2 \ \dots \ x^n \ y^n]^T. \quad (4.21)$$

Define-se as variáveis de formação da maneira ilustrada na Figura 78, obtendo-se o mapeamento dado por

$$\mathbf{z}^1 = \phi_1(\boldsymbol{\xi}) = [x^1 \ y^1 \ l_2 \ \alpha_2 \ \dots \ l_n \ \alpha_n]^T, \quad (4.22)$$

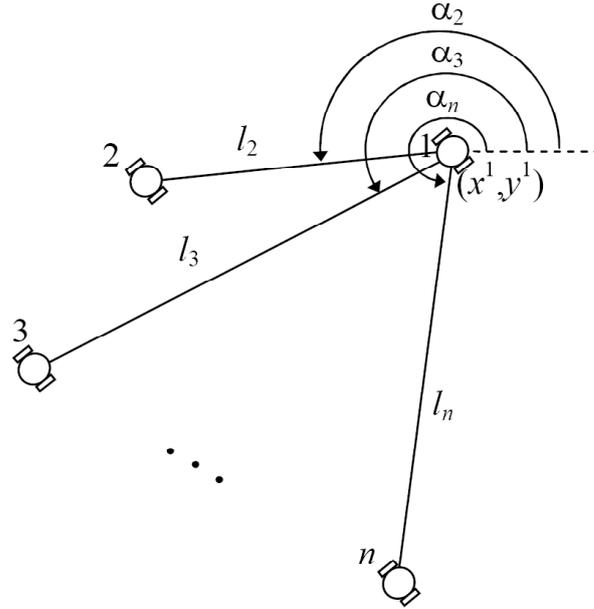


Figura 78: Definição das variáveis de formação (De La CRUZ, 2006).

onde

$$l_i = \sqrt{(x^i - x^1)^2 + (y^i - y^1)^2}$$

$$\alpha_i = f_{\zeta_i}(x^i - x^1, y^i - y^1),$$

sendo  $f_{\zeta_i}(x, y)$  uma função para calcular o ângulo do vetor  $(x, y)$ , e  $i = 2, 3, \dots, n$ .

O mapeamento inverso  $\xi = \phi_1^{-1}(\mathbf{z}^1)$  é dado por

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1 \\ y^1 &= y^1 \\ x^i &= x^1 + l_i \cos(\alpha_i), \quad i = 2, 3, \dots, n \\ y^i &= y^1 + l_i \sin(\alpha_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

De acordo com a equação (4.14), a matriz  $\bar{J}(\mathbf{z}^1)$  resulta em

$$\bar{J}(\mathbf{z}^1) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I_{2 \times 2} & \bar{J}_{S2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I_{2 \times 2} & 0 & \bar{J}_{S3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_{2 \times 2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{J}_{Sn} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

onde  $I_{2 \times 2}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e

$$\bar{J}_{Si} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -l_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & l_i \cos \alpha_i \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (4.24)$$

As variáveis de formação atuais  $\mathbf{z}_i^1$  e desejadas  $\mathbf{z}_{id}^1$  para o  $i$ -ésimo robô são definidas como

$$\mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{1d}^1 = \begin{bmatrix} x_d^1 \\ y_d^1 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{z}_i^1 = \begin{bmatrix} l_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{id}^1 = \begin{bmatrix} l_{id} \\ \alpha_{id} \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (4.26)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_i^1 = \mathbf{z}_{id}^1 - \mathbf{z}_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.27)$$

onde  $\tilde{\mathbf{z}}_i^1$  representa o erro de formação para o  $i$ -ésimo robô. Considerando-se a função de saturação (4.18), a lei de controle de formação baseada no modelo cinemático de primeira ordem (4.16) pode ser expressa como

$$\dot{\mathbf{h}}_r^i = \begin{cases} \mathbf{S}_1, & i = 1 \\ \mathbf{S}_1 + \bar{J}_{Si} \mathbf{S}_i, & i = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (4.28)$$

sendo

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{K}_{ci} \tilde{\mathbf{z}}_i^1 + \dot{\mathbf{z}}_{id}^1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{K}_{ci}$  é uma submatriz da matriz  $\mathbf{K}_c$ , definida como

$$\mathbf{K}_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{k_{G(2i-1)}}{a_G + |e_{z(2i-1)}|} & 0 \\ 0 & \frac{k_{G(2i)}}{a_G + |e_{z(2i)}|} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Vale mencionar que o mapeamento  $\phi_1$  selecionado resulta em expressões da matriz Jacobiana que permitem que a lei de controle seja facilmente modificada caso o número de robôs da formação varie (De La CRUZ, 2006).

#### 4.4.4 Compensação da Dinâmica dos Robôs da Formação

No sistema proposto em (De La CRUZ, 2006), e apresentado de forma resumida nesta seção, é necessário usar o controlador baseado no modelo cinemático de segunda ordem do sistema multirrobôs, que tem implícita a dinâmica de cada robô, para se efetuar a compensação da dinâmica dos robôs membros da formação. No entanto, a aplicação

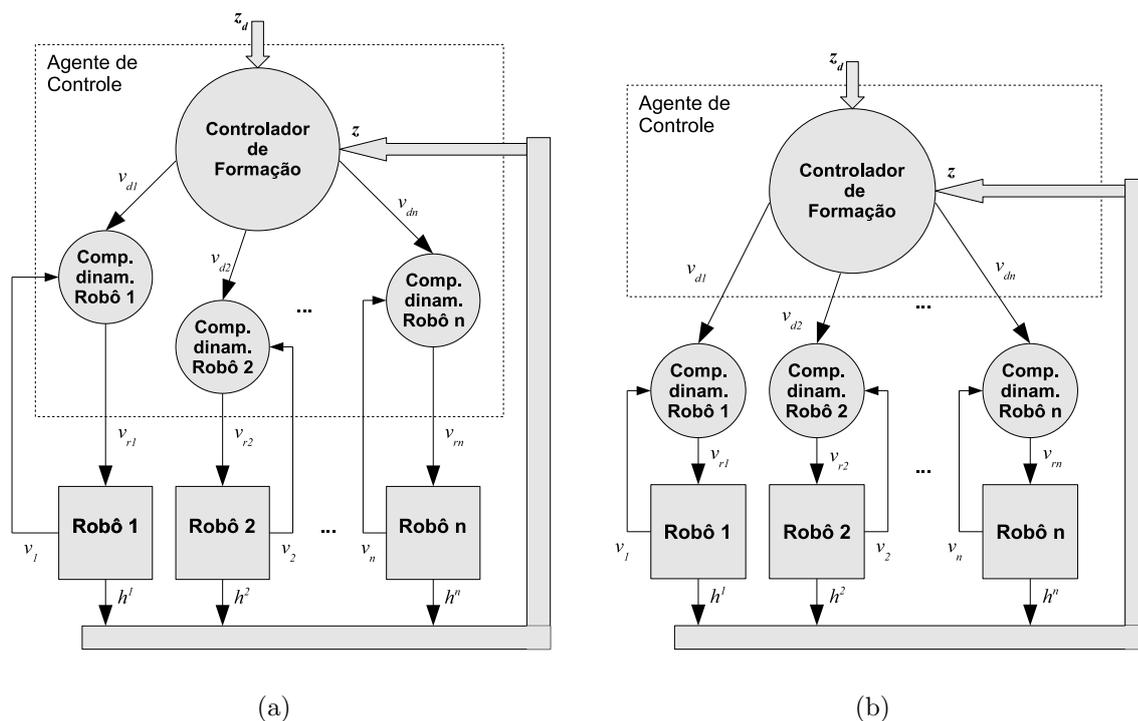


Figura 79: Arquiteturas de controle centralizado de formação: (a) compensação da dinâmica dos robôs realizada pelo agente de controle centralizado; e (b) compensação da dinâmica realizada por cada robô membro da formação.

dos controladores dinâmicos desenvolvidos no Capítulo 3 permite que a compensação da dinâmica dos robôs seja realizada por cada robô, e que seja aplicado o controlador de formação baseado no modelo cinemático de primeira ordem, que é mais simples. Isso significa que o controlador de formação, neste caso, não precisa ter conhecimento do modelo dinâmico de cada robô, como é o caso do controlador proposto em (De La CRUZ, 2006). De fato, a aplicação dos controladores dinâmicos apresentados no Capítulo 3 permite que a compensação da dinâmica de cada robô seja realizada pelo mesmo agente que realiza o controle da formação, como ilustrado na Figura 79(a), ou por cada robô de forma independente, como mostra a Figura 79(b), o que deixa o sistema mais flexível.

Vale ressaltar que a aplicação dos controladores dinâmicos apresentados na seção 3.3 permite que os parâmetros identificados tenham seus valores ajustados com base em uma das leis de adaptação propostas nas subseções 3.3.1.1 e 3.3.2.1. Esta característica garante adaptação a modificações na dinâmica dos robôs membros da formação, causadas, por exemplo, por execução de uma tarefa de transporte de carga de forma compartilhada, em que ocorre variação de massa de cada robô quando ele está carregado ou descarregado.

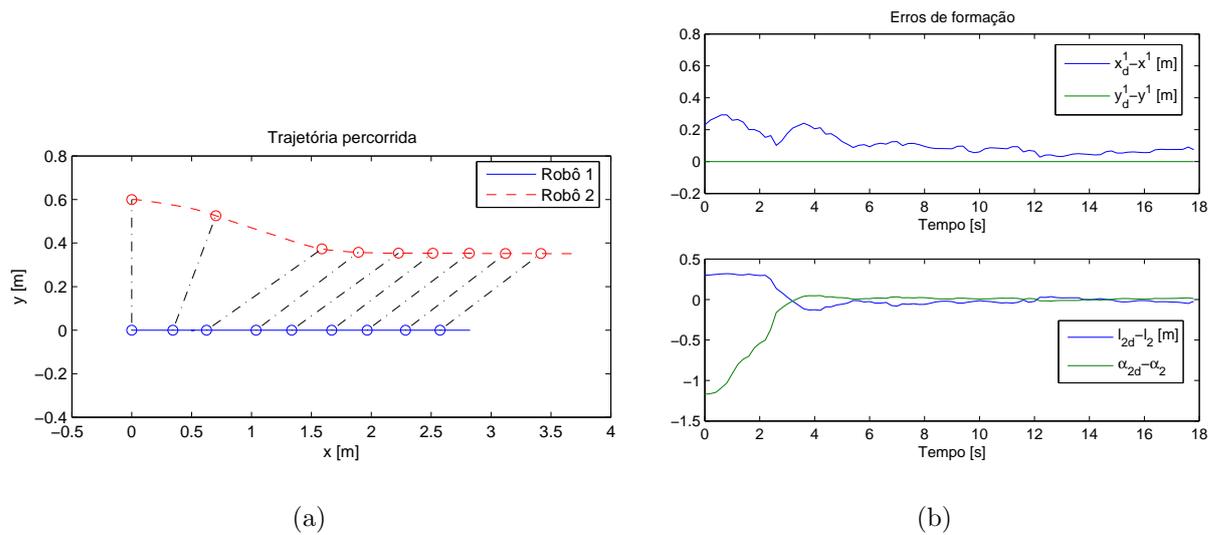


Figura 80: Controle centralizado de formação: (a) trajetória percorrida pelos robôs; e (b) evolução dos erros de formação durante a primeira simulação.

#### 4.4.5 Resultados de Simulação

Foram realizadas duas simulações do sistema utilizando o controlador centralizado de formação baseado no modelo cinemático de primeira ordem do sistema multirrobo, dado pela equação (4.28), incluindo a compensação da dinâmica dos robôs. Nestas simulações a compensação da dinâmica foi realizada com uso do primeiro controlador dinâmico, proposto na subseção 3.3.1.

Duas simulações foram executadas, sempre com dois robôs. Na primeira delas, um dos robôs (denominado de robô 1) parte da posição  $(0, 0; 0, 0)m$ , enquanto o outro (robô 2) parte do ponto  $(0, 0; 0, 6)m$ . Ambos devem se deslocar em linha reta, paralela ao eixo X, sendo a formação desejada caracterizada por  $l_{2d} = 1m$  e  $\alpha_{2d} = 23^\circ$ . A Figura 80(a) ilustra a trajetória percorrida por ambos os robôs. Nesta figura, o caminho percorrido pelo robô 1 é representado por uma linha contínua, enquanto o caminho percorrido pelo robô 2 é representado por uma linha tracejada. A cada dois segundos as posições instantâneas dos robôs são marcadas por um círculo. Pode-se notar que o robô 2 é, inicialmente, acelerado de forma que a formação desejada seja atingida. Em seguida, ambos os robôs passam a se deslocar com a mesma velocidade, mantendo a formação.

Na Figura 80(b) são apresentados os valores de erro de formação dos robôs 1 (figura superior) e 2 (figura inferior) durante a primeira simulação. A figura mostra que os erros decrescem e permanecem próximos a zero durante o deslocamento dos robôs. A evolução no tempo dos valores estimados dos parâmetros dinâmicos dos robôs 1 e 2 é mostrada nas

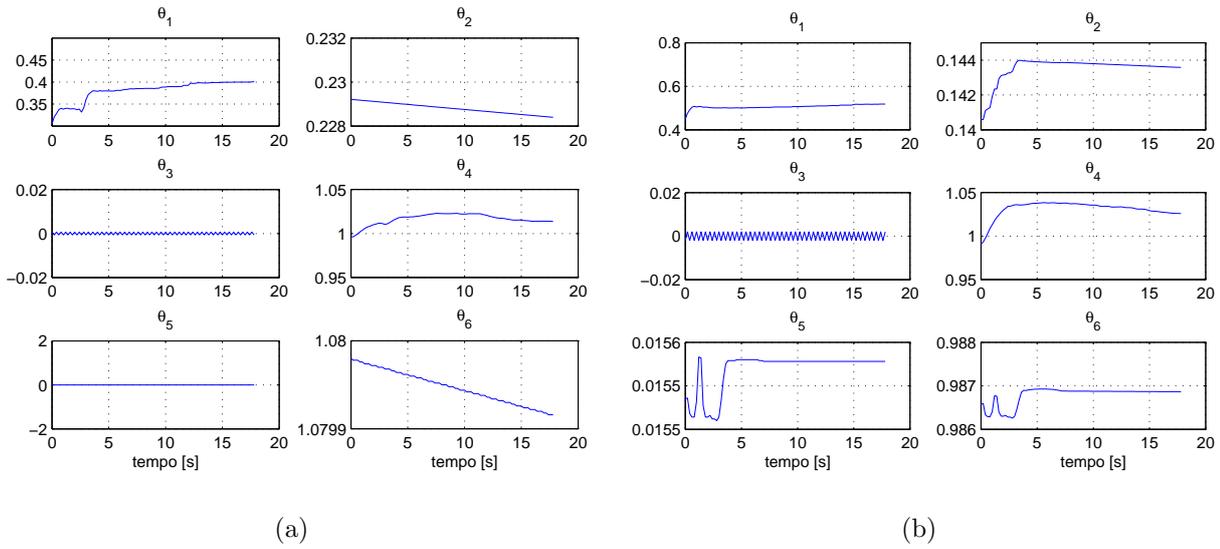


Figura 81: Controle centralizado de formação: evolução dos parâmetros dinâmicos dos robôs (a) 1 e (b) 2 durante a primeira simulação.

figuras 81(a) e 81(b).

Na segunda simulação, os robôs partem das mesmas posições iniciais anteriores, ou seja,  $(0, 0; 0, 0)m$  para o robô 1 e  $(0, 0; 0, 6)m$  para o robô 2. Ambos devem seguir uma trajetória que descreve, inicialmente, um arco no sentido anti-horário e, em seguida, uma linha reta paralela ao eixo Y. A formação desejada é caracterizada por  $l_{2d} = 1m$  e  $\alpha_{2d} = 23^\circ + \psi_1$ , onde  $\psi_1$  representa a orientação do robô 1 em relação ao sistema fixo de coordenadas. A Figura 82(a) ilustra a trajetória percorrida por ambos os robôs. O caminho percorrido pelo robô 1 é representado por uma linha contínua, enquanto o caminho percorrido pelo robô 2 é representado por uma linha tracejada. A cada dois segundos as posições instantâneas dos robôs são marcadas por um círculo. Pode-se notar que o robô 2 é, inicialmente, acelerado de forma que a formação desejada seja atingida. Em seguida, ambos os robôs passam a descrever o arco, sendo que a formação desejada é mantida pelo controlador centralizado, fazendo com que ambos os robôs se desloquem com a mesma velocidade.

Na Figura 82(b) são apresentados os valores de erro de formação dos robôs 1 (figura superior) e 2 (figura inferior) durante a segunda simulação. A figura mostra que os erros decrescem e permanecem próximos a zero durante o deslocamento dos robôs, mesmo durante a descrição do arco. A evolução no tempo dos valores estimados dos parâmetros dinâmicos dos robôs 1 e 2 são mostrados nas figuras 83(a) e 83(b).

Os resultados de ambas as simulações ilustram que o primeiro controlador dinâmico,

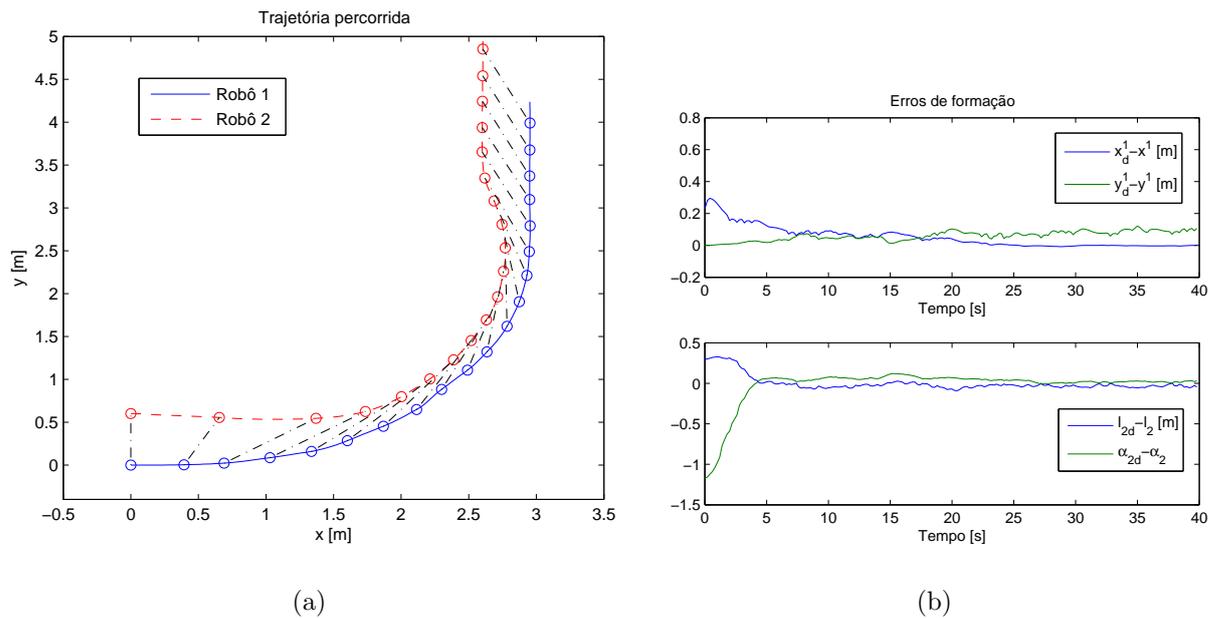


Figura 82: Controle centralizado de formação: (a) trajetória percorrida pelos robôs; e (b) evolução dos erros de formação durante a segunda simulação.

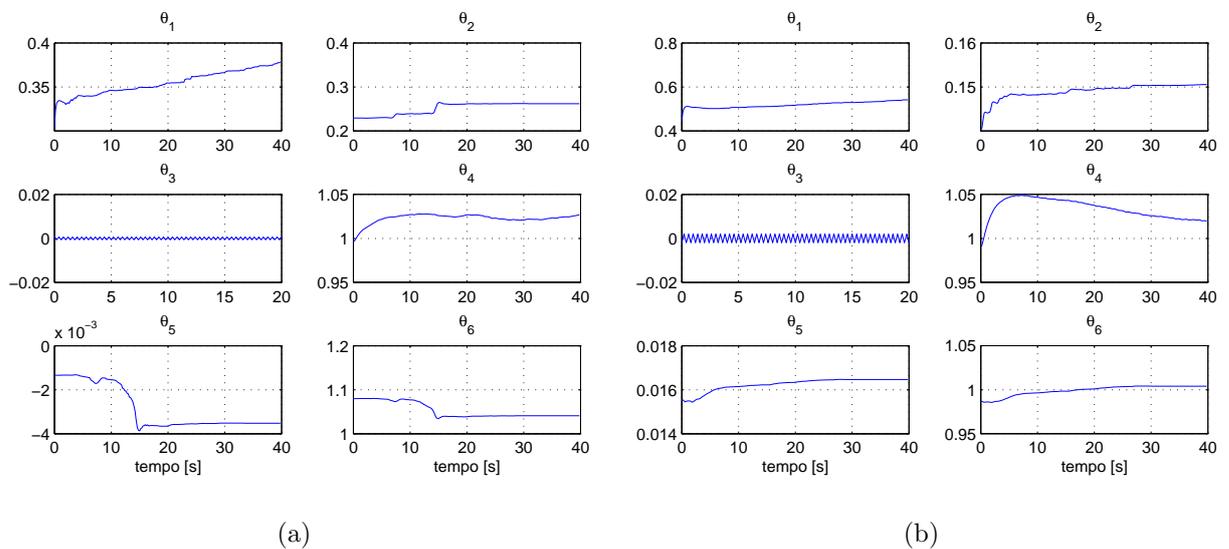


Figura 83: Controle centralizado de formação: evolução dos parâmetros dinâmicos dos robôs (a) 1 e (b) 2 durante a segunda simulação.

desenvolvido na subseção 3.3.1, pode ser utilizado para compensar a dinâmica de robôs membros de um grupo sob controle centralizado de formação baseado no modelo cinemático de primeira ordem. Por serem adaptativos, os controladores dinâmicos promovem, ainda, ajuste nos valores dos parâmetros estimados de forma a compensarem possíveis mudanças na dinâmica dos robôs, o que não é realizado pelo controlador de

formação baseado no modelo cinemático de segunda ordem proposto em (De La CRUZ; CARELLI, 2006).

## 4.5 Segundo Esquema de Controle Centralizado de Formação

A abordagem proposta por De La CRUZ (2006) para realização de controle de formação com compensação da dinâmica envolve o modelo cinemático de segunda ordem do sistema multirrobo. Na seção 4.4 foi mostrado que é possível realizar a compensação da dinâmica dos robôs da formação utilizando um dos controladores dinâmicos apresentados no Capítulo 3 em conjunto com o modelo cinemático de primeira ordem do sistema multirrobo, que é mais simples. Esta seção apresenta outro esquema de controle centralizado de formação baseado em estruturas virtuais, que também permite o uso de um dos controladores dinâmicos apresentados no Capítulo 3. Tal esquema é similar ao que foi proposto em (FIERRO; DAS, 2002), em que cada camada funciona como um módulo independente que lida com uma parte específica do problema de controle de formação de robôs. A seção também mostra o projeto e análise de estabilidade de um controlador de formação, além de resultados de simulação e de experimentos.

### 4.5.1 Esquema Multicamadas

Com o intuito de modularizar o sistema e aumentar sua flexibilidade, nesta seção é introduzido o Esquema Multicamadas, proposto em (BRANDÃO et al., 2009a) e ilustrado na Figura 84. Suas principais características são:

- Camadas de Planejamento *Off-line* e Planejamento *On-line*: a primeira é responsável pelas condições iniciais, geração da trajetória a ser seguida e definição da forma desejada para a estrutura virtual (formação dos robôs). A segunda tem como objetivo alterar os sinais de referência gerados pela primeira, realizando um ajuste momentâneo de maneira que o robô, ou a formação, reajam de acordo com a informação obtida por seus sensores sobre o ambiente, por exemplo realizando desvio de obstáculos.
- Camada de Controle: responsável pela geração dos sinais de controle a serem enviados ao robô ou aos robôs da formação, de modo que sejam atingidas as referências enviadas pelas Camadas de Planejamento.

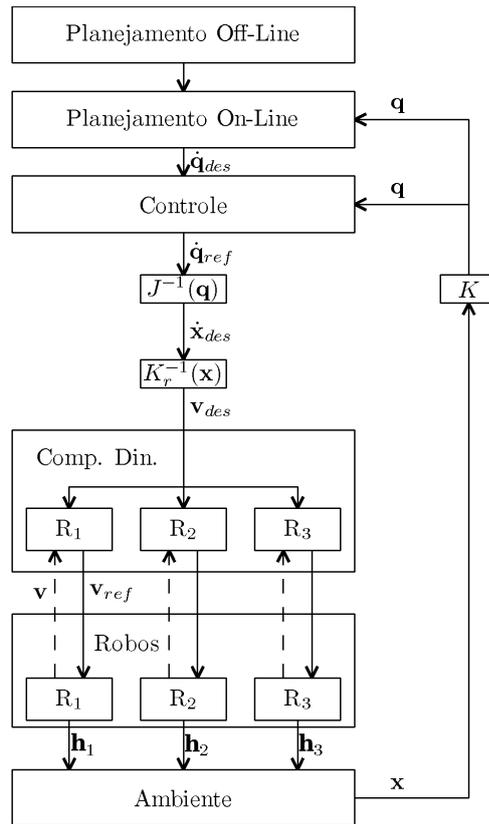


Figura 84: Arquitetura do Esquema Multicamadas proposto.

- Camada de Compensação Dinâmica: realiza a compensação adaptativa da dinâmica de cada robô de forma que estes sejam capazes de seguir as velocidades de referência enviadas pela Camada de Controle com o menor erro possível.
- Camada do Robô: representa o robô ou os robôs da formação a ser controlada.
- Ambiente: representa o meio que cerca o robô ou a formação, incluindo a interação com os demais robôs, obstáculos, etc.

Uma importante característica do esquema de controle proposto é a independência de cada camada, o que significa que modificações em uma camada específica não provocam mudanças estruturais nas demais camadas. Como exemplo, diferentes controladores de formação ou de compensação dinâmica podem ser testados sem que as demais camadas sejam modificadas. Além disso, a estrutura básica do esquema proposto pode ser alterada, por exemplo, através da retirada de camadas que não sejam necessárias a determinada aplicação. Por exemplo, a Camada de Planejamento *On-line* pode ser descartada caso não existam obstáculos no ambiente em que os robôs irão navegar, caso em que a referência gerada pela Camada de Planejamento *Off-line* deve ser enviada diretamente à Camada

de Controle.

Considerando o controle de formação, alguns blocos foram adicionados aos já explicados para completar o esquema proposto: a matriz Jacobiana inversa  $J^{-1}(\cdot)$ , que relaciona as velocidades desejadas no espaço da formação com as velocidades no espaço dos robôs; a matriz que descreve a cinemática inversa dos robôs a serem controlados  $\mathbf{K}_{\mathbf{r}}^{-1}$ ; e a transformação cinemática direta da formação  $K$ . Tais blocos permitem que o controlador de formação trabalhe no espaço da formação, facilitando seu projeto e a análise de estabilidade do sistema resultante.

No sistema aqui apresentado, foi implementado um controlador de formação para três robôs móveis tipo unicyclo, com compensação da dinâmica, em que a Camada de Planejamento *On-line* foi desconsiderada. A Camada de Planejamento *Off-line* gera referências para a Camada de Controle, que possui o controlador responsável por controlar a forma, a posição e a orientação da formação. As variáveis de formação foram definidas da maneira proposta por (MAS; PETROVIC; KITTS, 2008), e o controlador desenvolvido permite que se controle a posição do centróide e a forma da estrutura virtual dando maior ênfase a um ou a outro, conforme a tarefa a ser realizada.

Considerou-se o uso de três robôs móveis de tipo unicyclo, cujo modelo cinemático é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\psi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -a_i \sin \psi_i \\ \sin \psi_i & a_i \cos \psi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

onde  $a_i > 0$  representa a distância entre o ponto de interesse e o ponto central do eixo virtual que une as rodas de tração,  $u_i$  e  $\omega_i$  são, respectivamente, as velocidades linear e angular,  $\mathbf{h}_i = [x_i \ y_i]^T$  é o vetor que contém as coordenadas do ponto de interesse e  $\psi_i$  é a orientação do  $i$ -ésimo robô.

Considerando somente as coordenadas do ponto de interesse  $\mathbf{h}_i$ , as equações de cinemática direta e inversa são

$$\dot{\mathbf{h}}_i = \mathbf{K}_{\mathbf{r}i} \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{K}_{\mathbf{r}i}^{-1} \dot{\mathbf{h}}_i, \quad (4.32)$$

onde  $\mathbf{v}_i = [u_i \ \omega_i]^T$ ,

$$\mathbf{K}_{\mathbf{r}i} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -a_i \sin \psi_i \\ \sin \psi_i & a_i \cos \psi_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{\mathbf{r}i}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i \\ -\frac{1}{a_i} \sin \psi_i & \frac{1}{a_i} \cos \psi_i \end{bmatrix}.$$

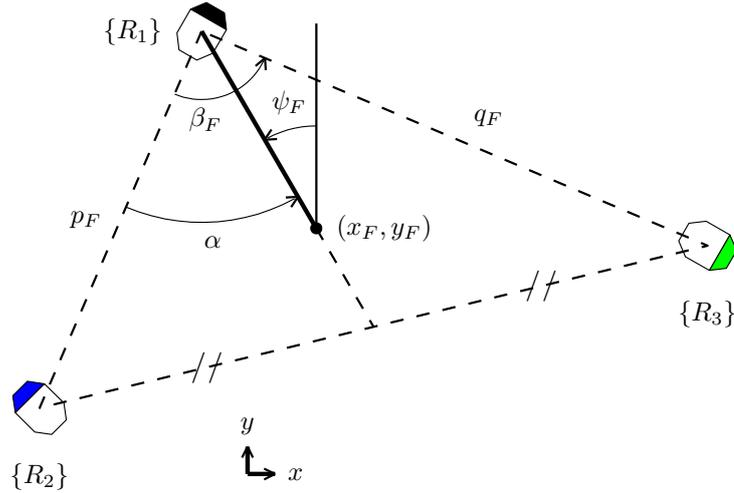


Figura 85: Variáveis de formação.

Considerando a formação de três robôs uniciclo, as matrizes que determinam a cinemática direta  $\mathbf{K}_r$  e inversa  $\mathbf{K}_r^{-1}$  da estrutura são

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{r2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{r3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r1}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{r2}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{r3}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Robôs com diferentes modelos cinemáticos podem ser utilizados numa mesma formação. Caso o  $i$ -ésimo robô seja substituído por outro com cinemática diferente, basta substituir a matriz  $\mathbf{K}_{ri}$  pela correspondente ao seu modelo cinemático. Nesse caso, se for realizada compensação da dinâmica, esta deve ser adequada ao modelo dinâmico do novo robô.

### 4.5.2 Cinemática Direta e Inversa de Formação

As variáveis de estado utilizadas para representação da estrutura virtual são mostradas na Figura 85, e foram inicialmente propostas por Mas, Petrovic e Kitts (2008). Aqui, realiza-se uma divisão da representação da formação em dois vetores: sua pose é definida por  $\mathbf{P}_F = [x_F \ y_F \ \psi_F]$ , onde  $(x_F, y_F)$  representa a posição do centróide da formação e  $\psi_F$  representa sua orientação, e sua forma é definida por  $\mathbf{S}_F = [p_F \ q_F \ \beta_F]$ , onde  $p_F$ ,  $q_F$  e  $\beta_F$  representam a distância entre os robôs  $R_1$  e  $R_2$ , a distância entre os robôs  $R_1$  e  $R_3$ , e o ângulo  $R_2\widehat{R}_1R_3$ , respectivamente. É válido mencionar que a estrutura utiliza um sistema global de referências  $xy$ .

Daqui em diante as variáveis de formação serão representadas por  $\mathbf{q} = [\mathbf{P}_F \ \mathbf{S}_F]^T$ , e as posições dos robôs por  $\mathbf{x} = [(\mathbf{h}_1)^T \ (\mathbf{h}_2)^T \ (\mathbf{h}_3)^T]^T$ . É importante salientar que a

orientação dos robôs não é considerada na presente proposta. A relação entre as variáveis de formação e as posições de cada um dos robôs é dada pela transformação de cinemática direta ( $K$ ), que é representada pelas equações

$$\mathbf{P}_F = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ \arctan \frac{\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}(x_2 + x_3)}{\frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}(y_2 + y_3)} \end{bmatrix}^T, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{S}_F = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ \arccos \frac{p_F^2 + q_F^2 - r_F^2}{2p_F q_F} \end{bmatrix}^T, \quad (4.34)$$

onde  $r_F = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$ .

A transformação de cinemática inversa ( $K^{-1}$ ) é dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_F + \frac{2}{3}h_F \sin \psi_F \\ y_F + \frac{2}{3}h_F \cos \psi_F \\ x_F + \frac{2}{3}h_F \sin \psi_F - p_F \sin(\alpha + \psi_F) \\ y_F + \frac{2}{3}h_F \cos \psi_F - p_F \cos(\alpha + \psi_F) \\ x_F + \frac{2}{3}h_F \sin \psi_F + q_F \sin(\beta_F - \alpha - \psi_F) \\ y_F + \frac{2}{3}h_F \cos \psi_F - q_F \cos(\beta_F - \alpha - \psi_F) \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

onde

$$h_F = \sqrt{\frac{1}{2} \left( p_F^2 + q_F^2 - \frac{1}{2}r_F^2 \right)}, \quad \alpha = \arccos \frac{p_F^2 + h_F^2 - \frac{1}{4}r_F^2}{2p_F h_F},$$

$$\text{e} \quad r_F = \sqrt{p_F^2 + q_F^2 - 2p_F q_F \cos(\beta_F)},$$

sendo  $h_F$  a distância entre  $\{R_1\}$  e o ponto central do segmento  $\overline{\{R_2\}\{R_3\}}$ , passando por  $(x_F, y_F)$ .

A partir das derivadas das transformações de cinemática inversa e direta é possível obter-se a relação entre os vetores de velocidades  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ , dada por

$$\dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}},$$

onde  $J(\mathbf{x})$  representa a matriz Jacobiana. Tal matriz e sua inversa são dadas por

$$J(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{q}_{n \times 1}}{\partial \mathbf{x}_{m \times 1}} \quad \text{e} \quad J^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}_{m \times 1}}{\partial \mathbf{q}_{n \times 1}},$$

para  $m, n = 1, 2, \dots, 6$ .

### 4.5.3 Lei de Controle

A Camada de Controle recebe da camada superior a pose e a forma desejada para a estrutura virtual formada pelos robôs, ou seja  $\mathbf{q}_{\text{des}} = [\mathbf{P}_{Fd} \ \mathbf{S}_{Fd}]^T$ , assim como a variação desejada  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} = [\dot{\mathbf{P}}_{Fd} \ \dot{\mathbf{S}}_{Fd}]^T$ . O controlador de formação gera, então, os valores de referência para pose e forma  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{ref}} = [\dot{\mathbf{P}}_{Fr} \ \dot{\mathbf{S}}_{Fr}]^T$ , onde os índices  $d$  e  $r$  representam os sinais desejado e de referência, respectivamente. Definindo o erro de formação como  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{\text{des}} - \mathbf{q}$ , a lei de controle de formação proposta é

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{ref}} = \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \boldsymbol{\kappa} \tilde{\mathbf{q}}, \quad (4.36)$$

onde  $\boldsymbol{\kappa}$  é uma matriz de ganhos diagonal definida positiva.

Considera-se que existe uma diferença  $\boldsymbol{\delta}_v$  entre os valores desejados e reais das variáveis de formação, tal que  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_{\text{ref}} + \boldsymbol{\delta}_v$ . Assim, a equação do sistema em malha fechada pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\kappa} \tilde{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\delta}_v. \quad (4.37)$$

Considerando a função candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{q}} > 0$ , sua primeira derivada temporal é

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\kappa} \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\delta}_v.$$

Assumindo seguimento perfeito de velocidade, ou seja, considerando-se  $\boldsymbol{\delta}_v = \mathbf{0}$ , pode-se concluir que  $\dot{V}$  é definida negativa, o que significa que o equilíbrio do sistema (a origem) é globalmente assintoticamente estável, i.e.,  $\tilde{\mathbf{q}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, quando se considera a existência de um erro de seguimento de velocidade  $\boldsymbol{\delta}_v \neq \mathbf{0}$ , pode-se concluir que o equilíbrio será atrativo se  $\tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\kappa} \tilde{\mathbf{q}} > |\tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\delta}_v|$ . Uma condição suficiente para que se cumpra a desigualdade anterior é

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\kappa}) \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 > \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\delta}_v\|,$$

ou

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| > \frac{\|\delta_{\mathbf{v}}\|}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\kappa})}, \quad (4.38)$$

onde  $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\kappa})$  representa o menor autovalor de  $\boldsymbol{\kappa}$ . Isso significa que os erros de formação  $\tilde{\mathbf{q}}$  são finalmente limitados, e que seu limite depende diretamente do erro de seguimento de velocidade  $\delta_{\mathbf{v}}$  e dos ganhos  $\boldsymbol{\kappa}$  do controlador de formação. A equação (4.38) mostra que uma redução nos erros de seguimento de velocidade de cada robô provoca diminuição no limite de erro de formação. Na seção 3.6 foi mostrado que, para um robô, a compensação da dinâmica provoca redução no erro de seguimento de velocidade, o que motiva a utilização da compensação dinâmica em conjunto com o controlador de formação aqui proposto.

**Nota 4.4.** O controlador proposto é capaz de fazer com que os robôs atinjam uma formação desejada, que pode ser variante ou invariante no tempo, tanto em forma como em posição e orientação. Ou seja, usando o mesmo controlador, é possível fazer com que os robôs se posicionem numa estrutura virtual desejada que se mantém fixa, ou que sigam uma estrutura que pode variar de pose e de forma ao longo do tempo.

**Nota 4.5.** Os ganhos do controlador são independentes para cada variável de formação. Assim, é possível fazer ajustes de ganhos de tal maneira a priorizar a manutenção da forma ou da pose da formação, de acordo com a tarefa a ser realizada.

#### 4.5.4 Compensação da Dinâmica dos Robôs da Formação

A função da Camada de Compensação Dinâmica é modificar os sinais de referência enviados pela Camada de Controle com o objetivo de reduzir o erro de seguimento de velocidade. Para isso, a compensação da dinâmica de cada robô é realizada de maneira independente.

Esta camada recebe da Camada de Controle, depois da conversão apropriada, os valores desejados de velocidade linear e angular para cada robô  $\mathbf{v}_{\text{des}} = [(\mathbf{v}_{\text{d1}})^T (\mathbf{v}_{\text{d2}})^T (\mathbf{v}_{\text{d3}})^T]^T$ , e gera sinais de referência de velocidade  $\mathbf{v}_{\text{ref}} = [(\mathbf{v}_{\text{r1}})^T (\mathbf{v}_{\text{r2}})^T (\mathbf{v}_{\text{r3}})^T]^T$  que são enviados à Camada dos Robôs. Aqui,  $\mathbf{v}_{\text{di}} = [u_{di} \ \omega_{di}]^T$  são as velocidades linear e angular desejadas e  $\mathbf{v}_{\text{ri}} = [u_{refi} \ \omega_{refi}]^T$  são os sinais de referência de velocidade linear e angular correspondentes ao  $i$ -ésimo robô. Tem-se ainda que  $\mathbf{v}'_i = [Iu_i \ \omega_i]^T$  e  $\mathbf{v}_{\text{di}}' = [Iu_{di} \ \omega_{di}]^T$ .

O controlador utilizado para realizar a compensação dinâmica é aquele representado por (3.42), ou seja,

$$\mathbf{v}_{\text{ri}} = \hat{\mathbf{H}}_i(\dot{\mathbf{v}}'_{\text{di}} + \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}'_i)) + \hat{\mathbf{C}}_i\mathbf{v}'_{\text{di}} + \hat{\mathbf{F}}_i\mathbf{v}'_{\text{di}},$$

onde o subscrito  $i$  indica que as variáveis correspondem ao  $i$ -ésimo robô. Para adaptação dos parâmetros estimados utiliza-se a lei de adaptação robusta (3.49), que inclui a modificação- $\sigma$ , ou seja,

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \mathbf{G}_i^T \tilde{\mathbf{v}}_i' - \gamma_i \Gamma_i \hat{\theta}_i.$$

Considerando  $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_i'^T \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{v}}_i' + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i > 0$  como função candidata de Lyapunov, foi mostrado que  $\tilde{\theta}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_i'$  e, portanto,  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  são finalmente limitados, ainda que existam distúrbios limitados e variações suaves e limitadas nos parâmetros dinâmicos. Na ausência de distúrbios, variações de parâmetros e erro paramétrico, foi mostrado que  $\tilde{\mathbf{v}}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$  com  $t \rightarrow \infty$ .

O erro de velocidade  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  para os robôs da formação está relacionado com o erro de velocidade da formação  $\delta_v$  através de

$$\delta_v = \begin{bmatrix} \delta_{v1} \\ \delta_{v2} \\ \delta_{v3} \end{bmatrix} = J(\mathbf{x}) \mathbf{K}_r(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_1 \\ \tilde{\mathbf{v}}_2 \\ \tilde{\mathbf{v}}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Já foi mostrado que o controlador de compensação dinâmica é capaz de reduzir o erro de seguimento de velocidade  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  para um robô, de forma que  $\delta_v$  também é reduzido. Portanto, de acordo com esta conclusão, (4.39) mostra que a Camada de Compensação Dinâmica pode reduzir os erros de formação  $\tilde{\mathbf{q}}$ .

#### 4.5.5 Resultados de Simulação

Para avaliar a validade e o desempenho do esquema proposto, diversas simulações foram realizadas utilizando a plataforma **MRSiM**, apresentada em (BRANDÃO et al., 2008). Em todas as simulações, considerou-se o modelo dinâmico dos robôs Pioneer 3-DX, da empresa Mobile Robots. A pose inicial de cada robô, suas características dinâmicas, a trajetória e a forma desejadas para a formação foram os mesmos para as três simulações aqui relatadas. A diferença entre cada uma das três simulações é:

- Na primeira, a compensação dinâmica está desativada;
- Na segunda, a compensação dinâmica está ativada sem adaptação de parâmetros, e os valores estimados diferem cerca de 40% daqueles usados nos modelos dos robôs;
- Na terceira, a compensação dinâmica está ativada com adaptação de parâmetros, cujos valores iniciais estimados diferem cerca de 40% daqueles usados nos modelos

dos robôs.

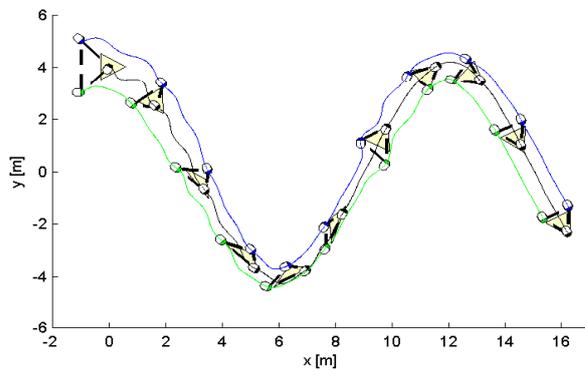
Em todas, os robôs devem atingir e seguir uma formação desejada, que varia sua posição e forma ao longo do tempo. A trajetória desejada para a formação é dada por

$$\begin{aligned} x_{Fd} &= 0, 2t \\ y_{Fd} &= 4 \cos(\pi t/30), \quad \text{onde} \quad \theta = \arctan \left( \frac{\frac{dy_{Fd}}{dt}}{\frac{dx_{Fd}}{dt}} \right), \\ \psi_{Fd} &= \pi/2 - \theta \end{aligned}$$

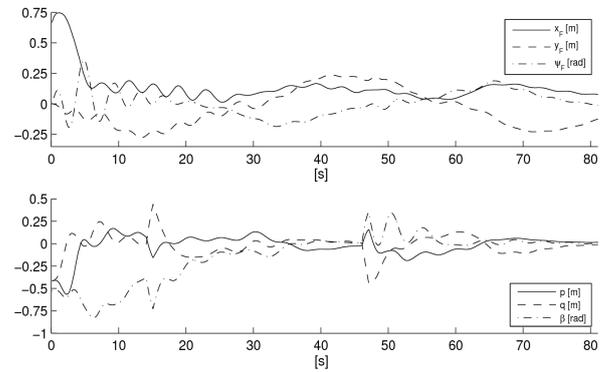
o que significa que a estrutura virtual deve se mover descrevendo uma trajetória senoidal, alterando sua orientação de maneira que sempre o mesmo robô se localize à frente da formação. É importante mencionar que tal trajetória foi escolhida para tentar excitar a dinâmica dos robôs através de mudanças em suas acelerações. Os valores da matriz de ganhos  $\kappa$  foram ajustados com a compensação dinâmica desativada, de maneira que o sistema apresentasse um desempenho considerado aceitável. Nesse caso, valores mais elevados de ganhos provocam aumento das oscilações, enquanto valores menores fazem com que exista um atraso grande no seguimento da formação, degradando o desempenho. Os mesmos valores de ganhos  $\kappa$  ajustados para este caso foram utilizados nas três simulações. As velocidades dos robôs durante tais simulações variaram entre  $0,1 \leq u \leq 0,7 \text{ m/s}$  e  $-1,0 \leq \omega \leq 1,0 \text{ rad/s}$ .

As Figuras 86 (a), (c) e (e) mostram a trajetória percorrida pelos robôs da formação durante as três simulações. Os triângulos sombreado e tracejado indicam, respectivamente, a formação desejada e real para a estrutura virtual a cada intervalo de  $8s$ . As formas inicial e final desejadas são dadas por  $\mathbf{S}_{Fd} = [1m, 1m, \pi/3rad]$ , mas no intervalo  $14s < t < 46s$  a forma desejada é alterada para  $\mathbf{S}_{Fd} = [0,75m, 1,5m, \pi/6rad]$ , para simular uma situação de desvio de obstáculos, por exemplo. Os erros para cada um dos casos são apresentados nas Figuras 86 (b), (d) e (f). Em tais figuras, é possível notar que o sistema apresenta grande oscilação quando não há compensação da dinâmica. Com a habilitação desta, mantendo-se os mesmos ganhos  $\kappa$ , as oscilações diminuem de maneira bastante significativa. Também verifica-se que o comportamento do sistema melhora de maneira considerável com ativação da compensação dinâmica, obtendo-se erros menores.

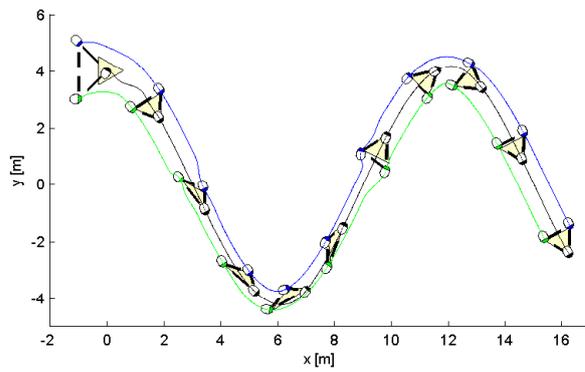
Nos casos em que a compensação dinâmica estava habilitada (com e sem adaptação), o comportamento do sistema foi muito semelhante, sendo difícil fazer uma avaliação de seu desempenho apenas com base nos gráficos apresentados. Por isso, índices  $IAE$  foram calculados considerando a pose  $\mathbf{P}_F$  e a forma  $\mathbf{S}_F$  da estrutura virtual para comparação do desempenho alcançado em cada caso. Os resultados são apresentados na Tabela 3. Pode-



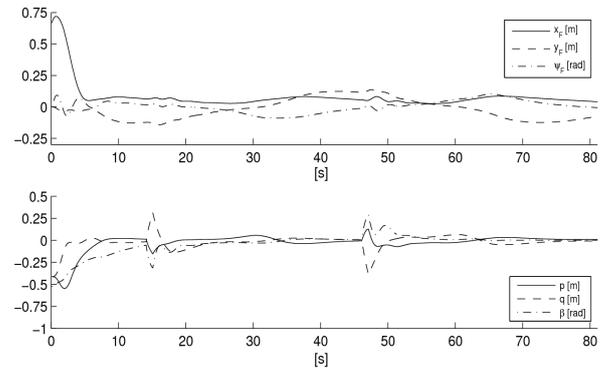
(a) Trajetória percorrida - sem compensação dinâmica.



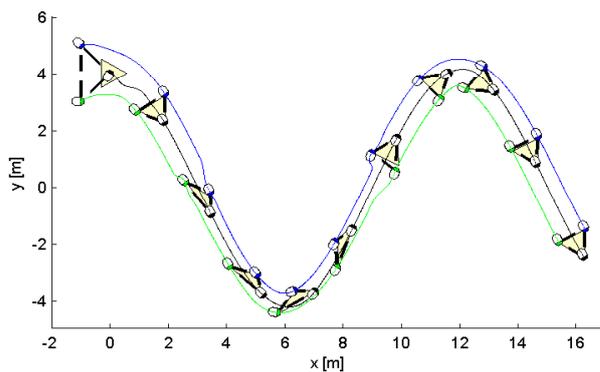
(b) Evolução dos erros de formação - sem compensação dinâmica.



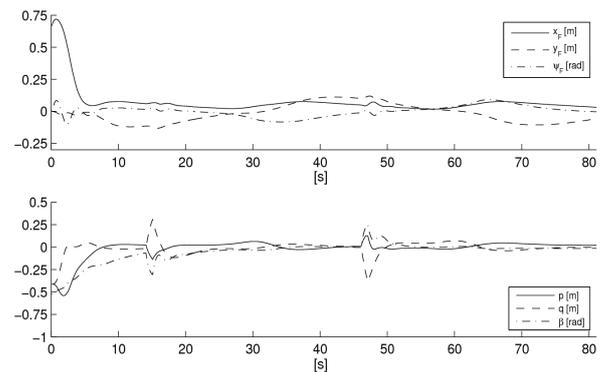
(c) Trajetória percorrida - com compensação dinâmica sem adaptação.



(d) Evolução dos erros de formação - com compensação dinâmica sem adaptação.



(e) Trajetória percorrida - com compensação adaptativa da dinâmica.



(f) Evolução dos erros de formação - com compensação adaptativa da dinâmica.

Figura 86: Resultados de Simulação.

se verificar que o melhor desempenho foi obtido na terceira simulação, quando foi ativada a compensação dinâmica com adaptação de parâmetros, situação em que os índices  $IAE$  ficaram cerca de 50% menores quando comparados àqueles obtidos na primeira simulação.

Tabela 3:  $IAE$  para simulações do controle centralizado tipo estruturas virtuais

	IAE	
	$P_F$	$S_F$
Sem compensação dinâmica	37,17	28,55
Com compensação dinâmica sem adaptação	17,96	13,51
Com compensação adaptativa da dinâmica	16,79	13,33

Os resultados das simulações aqui descritas ilustram que a aplicação da compensação dinâmica, no contexto de controle de formação aqui proposto, promove melhora no desempenho do sistema e reduz os erros de formação, evidenciando sua importância.

#### 4.5.6 Resultados Experimentais

Foram realizados experimentos de controle de formação com três robôs uniciclo considerando o esquema e os controladores aqui propostos. Os três robôs utilizados foram dois robôs Pioneer 2-DX (sendo um com computador e outro sem computador de bordo), e um Pioneer 3-DX, todos da empresa Mobile Robots. Os três robôs possuem dinâmicas distintas, mas todos são do tipo uniciclo e, portanto, possuem a mesma cinemática. Resultados de quatro desses experimentos são aqui apresentados. Durante os experimentos, os robôs partem de posições diferentes da formação inicial desejada, que se mantém fixa durante os primeiros 30s. Assim, durante os primeiros 30s, os robôs devem se posicionar de maneira a formarem a estrutura virtual desejada, na posição desejada. Após esse intervalo, a formação desejada se desloca e gira ao mesmo tempo, até  $t = 52s$ , quando o experimento é encerrado.

Para evidenciar a importância da adaptação de parâmetros, em dois dos experimentos os robôs realizam transporte de cargas, caso em que cada robô transporta em sua base superior uma massa de cerca de 10kg. Devido às diferenças entre eles, tal acréscimo de massa representa um aumento entre 50% e 100% na massa total de cada robô, o que significa uma importante modificação em sua dinâmica.

Nos quatro experimentos são usados os mesmos robôs partindo da mesma condição inicial com a mesma formação desejada. Os ganhos de todos os controladores também são mantidos iguais em todos os experimentos. As diferenças entre eles são:

- No primeiro, os robôs estão descarregados e a compensação dinâmica está desabilitada;
- No segundo, os robôs estão descarregados e a compensação adaptativa da dinâmica está habilitada;
- No terceiro, os robôs estão carregados e a compensação dinâmica está desabilitada;
- No quarto, os robôs estão carregados e a compensação adaptativa da dinâmica está habilitada.

É válido ressaltar que, nos casos em que a compensação dinâmica é realizada, os valores iniciais dos parâmetros dinâmicos estimados são iguais àqueles identificados para cada robô quando descarregado.

O esquema de controle aqui empregado é do tipo centralizado, em que a compensação da dinâmica de todos os robôs é realizada pelo agente de controle, como ilustra a Figura 79(a). As informações de posição e velocidades de cada robô são obtidas com base em sua própria odometria, e enviadas ao agente de controle, que, nesse caso, é um dos próprios robôs da formação. Nos experimentos realizados, os computadores de controle dos robôs estavam conectados via rede sem fio. O robô que não possui computador de bordo foi controlado por um computador de mesa, com sinais enviados via rádio-modem.

As posições iniciais dos robôs durante os experimentos são:  $R_1 = (-3, 0; 3, 0)m$ ,  $R_2 = (-3, 0; 2, 0)m$ ,  $R_3 = (-2, 0; 2, 0)m$ . A formação desejada durante os primeiros 30s é caracterizada por  $\mathbf{P}_{Fd} = [-2, 233 \quad 2, 500 \quad 0, 437]$ ,  $\mathbf{S}_{Fd} = [0, 86 \quad 1, 00 \quad 0, 95]$ ,  $\dot{\mathbf{P}}_{Fd} = [0 \ 0 \ 0]$  e  $\dot{\mathbf{S}}_{Fd} = [0 \ 0 \ 0]$ , o que significa que os robôs devem atingir as posições  $R_1 = (-2, 0; 3, 0)m$ ,  $R_2 = (-2, 7; 2, 5)m$  e  $R_3 = (-2, 0; 2, 0)m$ , e pararem ali. Após  $t = 30s$  a formação desejada varia de acordo com  $\dot{\mathbf{P}}_{Fd} = [-0, 04(t - 30) \quad -0, 02(t - 30) \quad 0, 04(t - 30)]$  e  $\dot{\mathbf{S}}_{Fd} = [0 \ 0 \ 0]$ , o que significa que ela se desloca no sentido contrário ao deslocamento inicial dos robôs, girando no sentido horário, sem alteração em sua forma inicial.

Os valores dos ganhos utilizados em todos os experimentos foram  $k_u = 0, 5$  e  $k_w = 0, 3$  para o segundo controlador dinâmico, e  $\kappa = \text{diag}(0, 5; 0, 5; 0, 75; 1, 0; 1, 0; 0, 75)$  para o controlador de formação. Com tais valores na matriz de ganhos  $\kappa$ , a ideia é que o controle de forma tenha maior importância que o controle de posicionamento do centróide da formação.

Em todas as figuras apresentadas a seguir que mostram as trajetórias percorridas pelos robôs, convencionou-se que o robô  $R_1$  é representado pelo círculo azul, o robô  $R_2$ , pelo

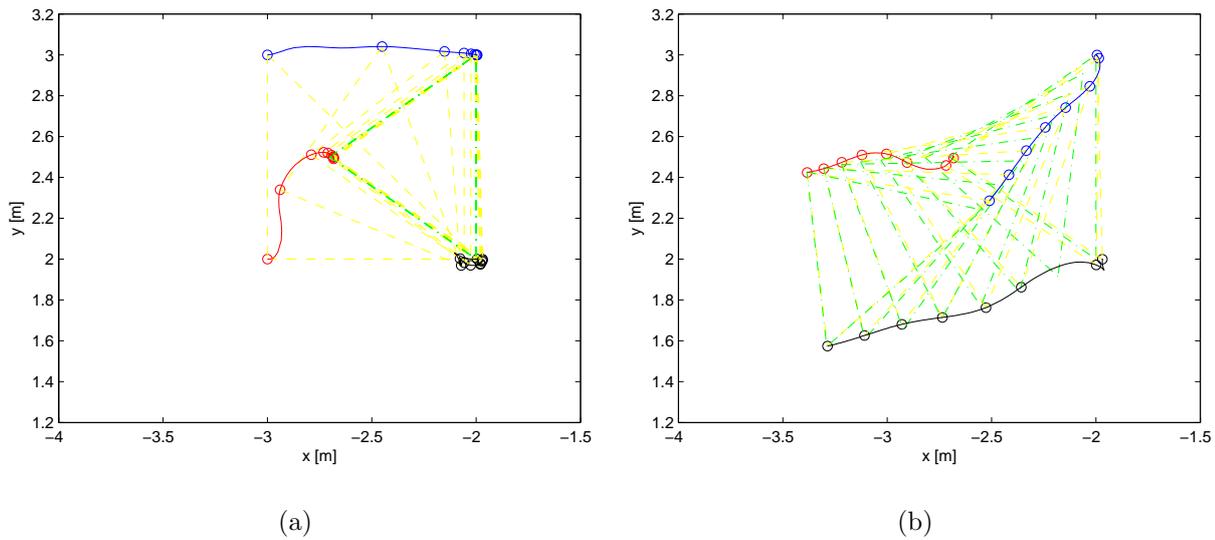


Figura 87: Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento sem carga, sem compensação da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando.

círculo vermelho, e o robô  $R_3$ , pelo círculo negro. As linhas contínuas de mesma cor que os robôs representam o caminho percorrido por cada um deles. Os círculos representam as posições dos robôs a cada 3s de experimento, sendo a formação instantânea nestes momentos representada pela linha tracejada amarela. A linha verde com traço-ponto representa a formação desejada, também a cada intervalo de 3s.

As Figuras 87(a) e 87(b) ilustram as trajetórias percorridas pelos três robôs durante o primeiro experimento, em que os robôs estão descarregados e a compensação dinâmica está desabilitada. A Figura 87(a) mostra as trajetórias para o intervalo  $0 \leq t \leq 30s$ , em que a formação desejada é fixa, enquanto a Figura 87(b) apresenta as trajetórias para o intervalo  $30s \leq t \leq 52s$ , quando a formação desejada se desloca e gira de maneira simultânea. Pode-se notar que, no início do experimento, os robôs se deslocam rapidamente às posições que correspondem à formação desejada, acompanhando-a quando ela começa a se deslocar.

A evolução dos erros de formação para o primeiro experimento é mostrada na Figura 88. Pode-se notar que, durante os primeiros 30s, intervalo em que a formação desejada é fixa, todos os sinais de erro convergem a valores próximos a zero. Em  $t = 30s$  há um aumento no módulo de todos os valores de erro, causado pelo início do deslocamento da formação desejada. Após alguma oscilação, os erros tendem novamente a valores próximos a zero enquanto a formação desejada se desloca e gira. É interessante ressaltar que o controlador de formação proposto não realiza controle de orientação de cada robô

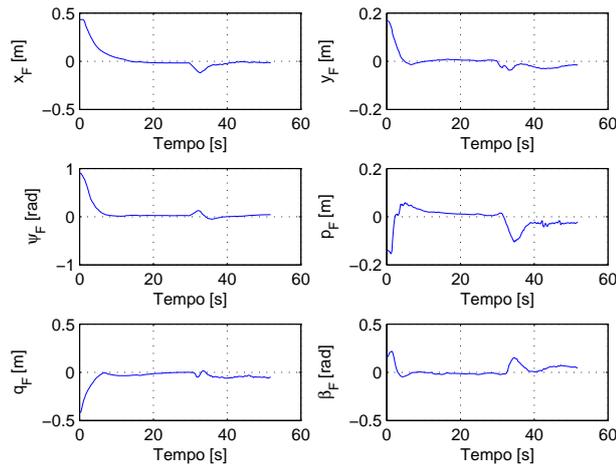


Figura 88: Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento sem carga, sem compensação da dinâmica.

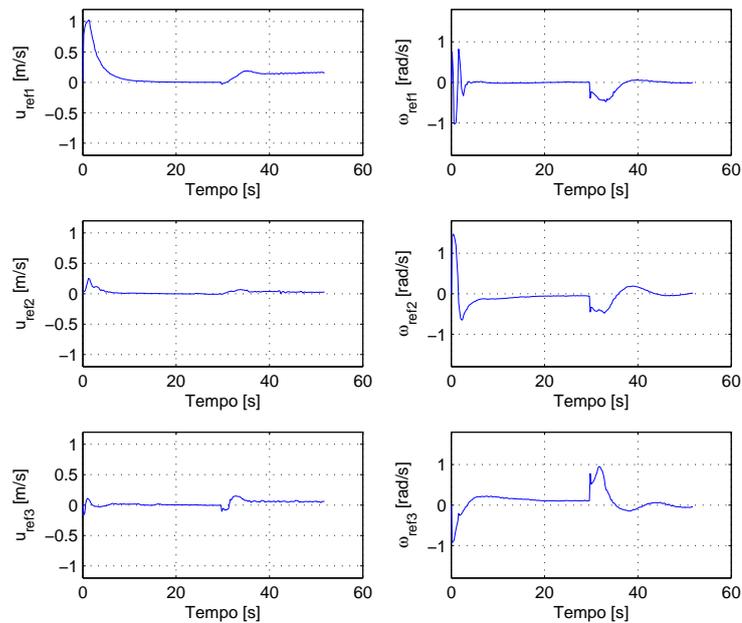


Figura 89: Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento sem carga, sem compensação da dinâmica.

da formação. Por isso, quando a formação desejada começa a se movimentar em  $t = 30s$ , os robôs podem estar orientados para qualquer direção, inclusive na direção oposta ao seu deslocamento. Tal fato pode fazer com que os robôs precisem executar manobras de orientação para poderem seguir a formação, o que também pode provocar aumento momentâneo nos valores dos erros.

As ações de controle enviadas a cada robô da formação são mostradas na Figura 89. Ali, na primeira coluna são mostrados os sinais de referência de velocidade linear, enquanto na segunda coluna são apresentados os sinais de referência de velocidade angular para os

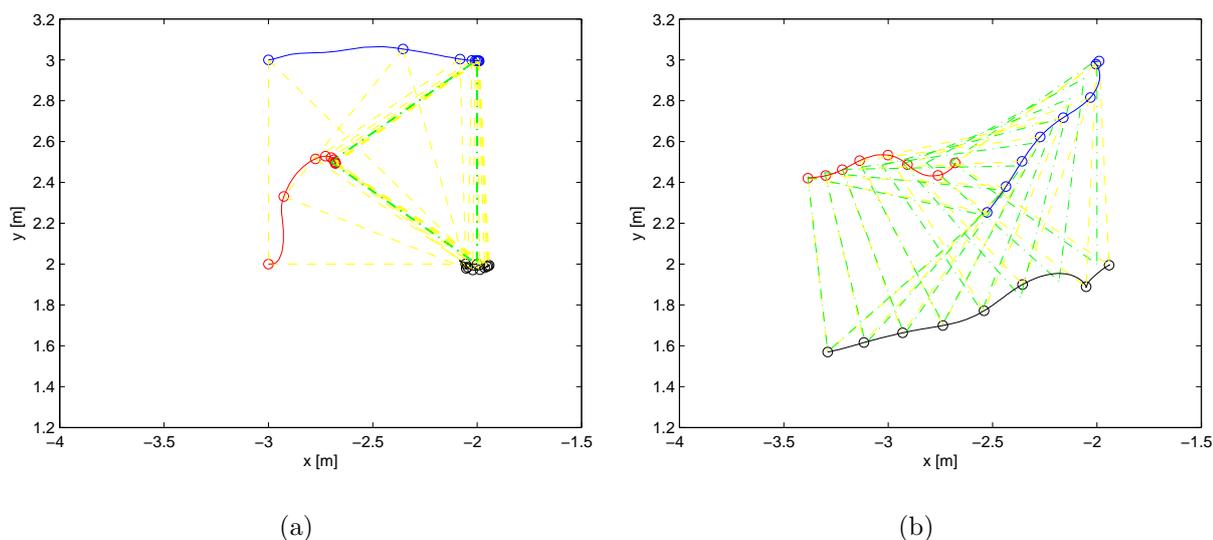


Figura 90: Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento sem carga, com compensação adaptativa da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando.

três robôs da formação. Pode-se notar que a variação em tais sinais não ocorre de maneira abrupta, sendo a maior variação observada no início do experimento, quando existe um erro grande na forma e na posição da estrutura virtual. Outra variação importante ocorre em  $t = 30s$ , quando a formação desejada começa a se deslocar. A partir de tal instante, as referências de velocidade linear permanecem diferentes de zero, já que a estrutura se mantém em movimento. Deve-se notar que as velocidades de deslocamento de cada robô são diferentes pois a estrutura se desloca e gira simultaneamente. Por isso, a velocidade de cada robô depende de sua posição instantânea.

O resultado anterior ilustra que o controlador de formação proposto é capaz de fazer com que os robôs sigam uma formação desejada, fixa ou variável. O mesmo experimento foi repetido com habilitação da compensação adaptativa da dinâmica de cada robô. As Figuras 90(a) e 90(b) ilustram as trajetórias percorridas pelos três robôs para o caso em que os robôs estão descarregados e a compensação adaptativa da dinâmica está habilitada. A Figura 90(a) mostra as trajetórias para o intervalo  $0 \leq t \leq 30s$ , em que a formação desejada é fixa, enquanto a Figura 90(b) apresenta as trajetórias para o intervalo  $30s \leq t \leq 52s$ , quando a formação desejada se desloca e gira de maneira simultânea. Pode-se notar que, no início do experimento, os robôs se deslocam rapidamente às posições que correspondem à formação desejada, acompanhando-a quando ela começa a se deslocar. Todos os robôs apresentam um comportamento muito semelhante àquele observado no primeiro experimento.

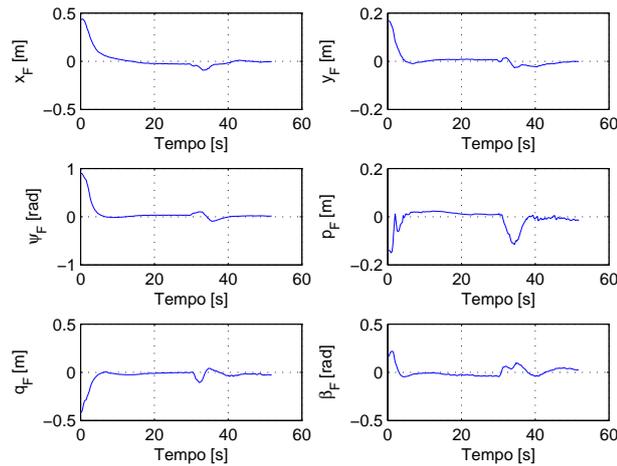


Figura 91: Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento sem carga, com compensação adaptativa da dinâmica.

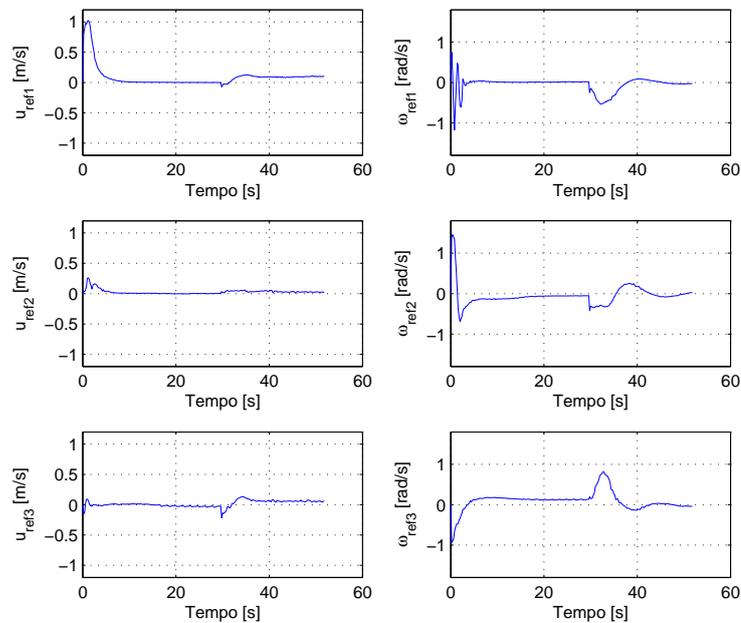


Figura 92: Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento sem carga, com compensação da dinâmica.

A evolução dos erros de formação para o segundo experimento é mostrada na Figura 91. Pode-se notar que, durante os primeiros 30s, intervalo em que a formação desejada é fixa, todos os sinais de erro convergem a valores próximos a zero. Em  $t = 30s$  há um aumento no módulo de todos os valores de erro, causado pelo início do deslocamento da formação desejada. Após alguma oscilação, os erros tendem novamente a valores próximos a zero enquanto a formação desejada se desloca e gira. Em comparação com o primeiro experimento, aqui os erros tendem a convergir um pouco mais rápido, principalmente após o deslocamento da formação em  $t = 30s$ . Uma comparação mais

criteriosa de seu desempenho pode ser feita com índices *IAE*. Os valores de tal índice foram calculados para cada experimento e uma comparação entre eles é apresentada no final desta seção.

As ações de controle enviadas a cada robô da formação são mostradas na Figura 92. Ali, na primeira coluna são mostrados os sinais de referência de velocidade linear, enquanto na segunda coluna são apresentados os sinais de referência de velocidade angular para os três robôs da formação. Pode-se notar que a variação em tais sinais não ocorre de maneira abrupta; resultado similar ao obtido no primeiro experimento.

As Figuras 93(a), 93(b) e 93(c) apresentam a evolução dos parâmetros estimados de cada robô para o segundo experimento.

Nos dois experimentos seguintes cada robô está transportando uma carga adicional de cerca de  $10kg$ , posicionada em sua base superior. Tais experimentos foram realizados para verificar a influência da alteração da dinâmica dos robôs nos erros de formação. No terceiro experimento, os robôs estão carregados e a compensação dinâmica está desabilitada. As Figuras 94(a) e 94(b) ilustram as trajetórias percorridas pelos três robôs durante o terceiro experimento. A Figura 94(a) mostra as trajetórias para o intervalo  $0 \leq t \leq 30s$ , em que a formação desejada é fixa, enquanto a Figura 94(b) apresenta as trajetórias para o intervalo  $30s \leq t \leq 52s$ , quando a formação desejada se desloca e gira de maneira simultânea. Pode-se notar que, no início do experimento, os robôs se deslocam para as posições que correspondem à formação desejada, acompanhando-a quando ela começa a se deslocar. No entanto, o comportamento é pior do que aquele observado durante o primeiro experimento, em que os robôs estavam descarregados e a compensação dinâmica, como neste caso, não estava habilitada.

A evolução dos erros de formação para o terceiro experimento é mostrada na Figura 95. Pode-se notar que os erros tendem a valores próximos a zero, mas sua evolução ilustra um desempenho pior do que aquele observado durante o primeiro experimento.

As ações de controle enviadas a cada robô da formação são mostradas na Figura 96. Ali, na primeira coluna são mostrados os sinais de referência de velocidade linear, enquanto na segunda coluna são apresentados os sinais de referência de velocidade angular para os três robôs da formação. Pode-se notar que o comportamento de tais sinais é similar àqueles obtidos nos experimentos anteriores.

O mesmo experimento foi repetido com habilitação da compensação adaptativa da dinâmica de cada robô, mantendo os robôs carregados. As Figuras 97(a) e 97(b) ilustram as trajetórias percorridas pelos três robôs para o caso em que todos os robôs estão carre-

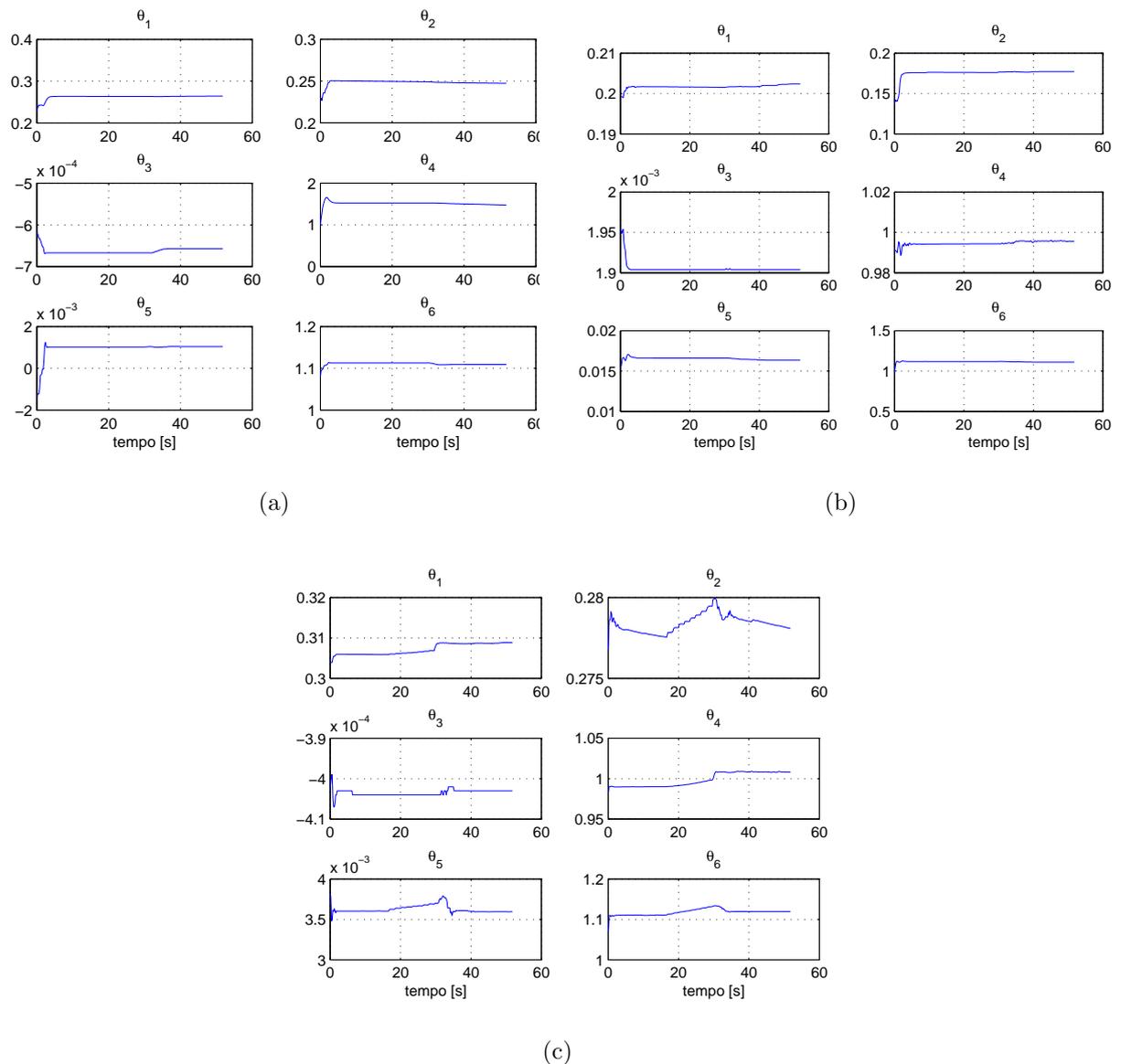


Figura 93: Esquema Multicamadas - evolução dos parâmetros dinâmicos estimados durante experimento sem carga, com compensação adaptativa da dinâmica. (a) Robô 1, (b) Robô 2, e (c) Robô 3.

gados e a compensação adaptativa da dinâmica está habilitada. A Figura 97(a) mostra as trajetórias para o intervalo  $0 \leq t \leq 30s$ , em que a formação desejada é fixa, enquanto a Figura 97(b) apresenta as trajetórias para o intervalo  $30s \leq t \leq 52s$ , quando a formação desejada se desloca e gira de maneira simultânea. A evolução dos erros de formação é mostrada na Figura 98. Pode-se notar que os erros tendem a valores próximos a zero, e sua evolução é mais suave do que aquela observada para o experimento anterior, o que indica uma melhora no comportamento do sistema após a habilitação da compensação dinâmica.

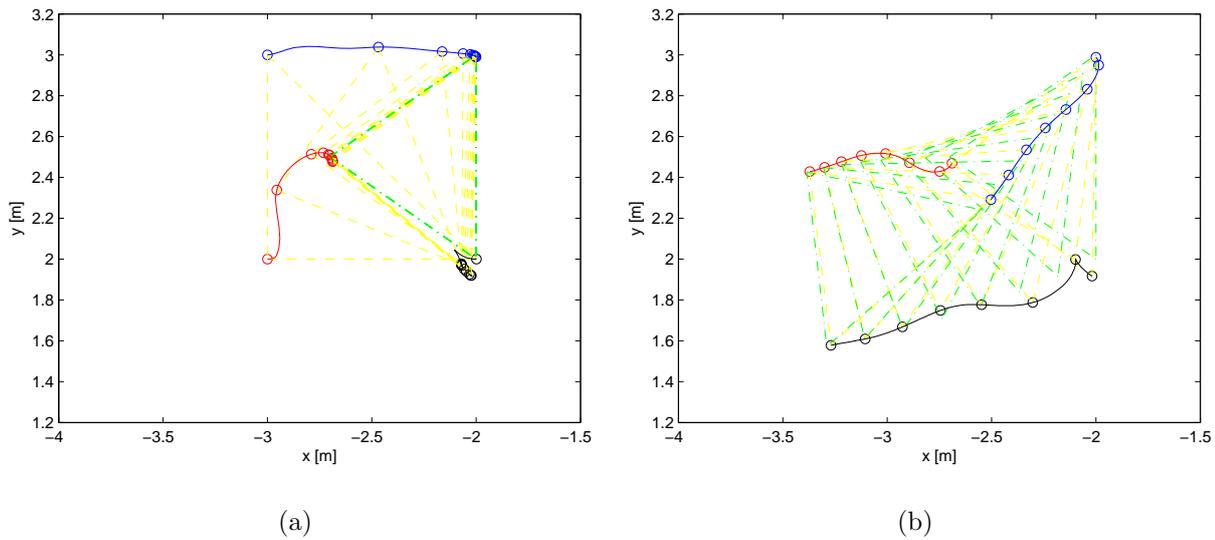


Figura 94: Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento com carga, sem compensação da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando.

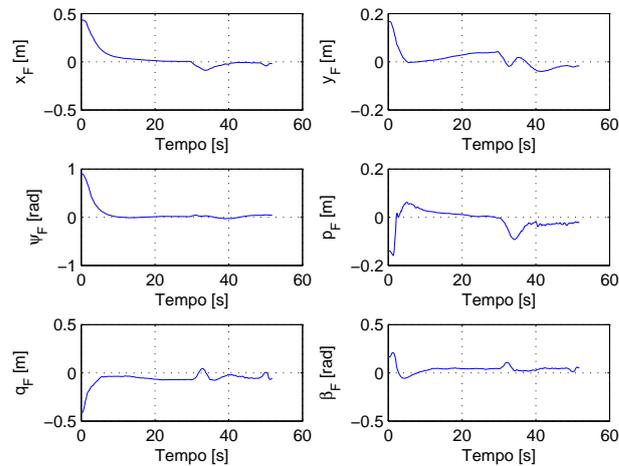


Figura 95: Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento com carga, sem compensação da dinâmica.

As ações de controle enviadas a cada robô da formação são mostradas na Figura 99. Ali, na primeira coluna são mostrados os sinais de referência de velocidade linear, enquanto na segunda coluna são apresentados os sinais de referência de velocidade angular para os três robôs da formação. Pode-se notar que o comportamento de tais sinais é similar àqueles obtidos nos experimentos anteriores.

As Figuras 100(a), 100(b) e 100(c) apresentam a evolução dos parâmetros estimados de cada robô durante o quarto experimento.

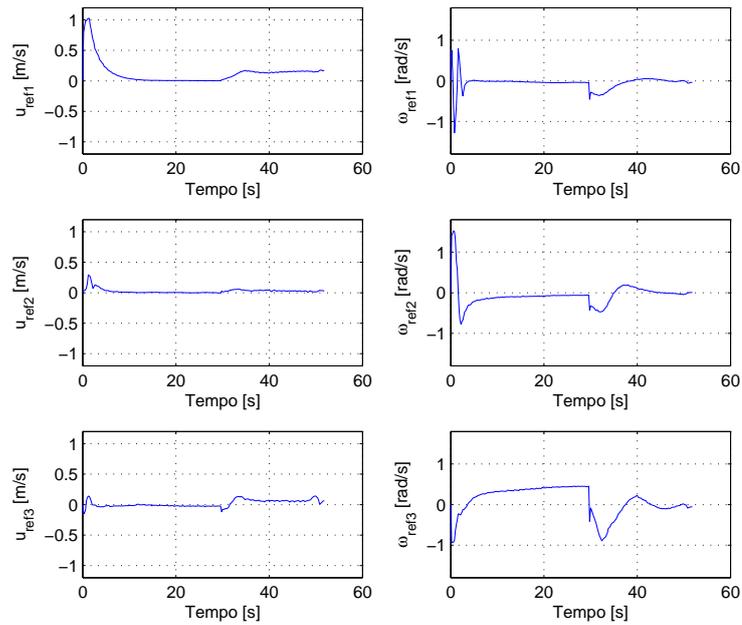


Figura 96: Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento com carga, sem compensação da dinâmica.

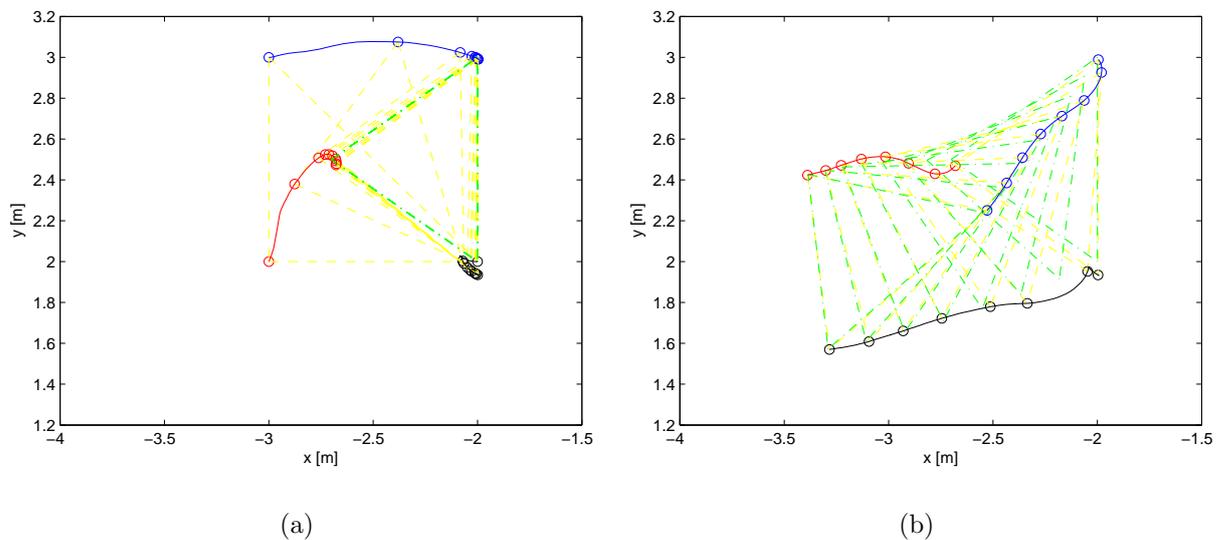


Figura 97: Esquema Multicamadas - trajetórias percorridas durante experimento com carga, com compensação adaptativa da dinâmica: (a) formação desejada fixa, e (b) formação desejada variando.

O comportamento do robô  $R_3$  na primeira parte dos experimentos descritos é digno de nota. Nas Figuras 87(a), 90(a), 94(a) e 97(a), pode-se observar que o robô  $R_3$  se desloca em torno da posição  $(-2, 0; 2, 0)m$ , quando se poderia esperar que ele permanecesse parado, já que no início dos experimentos ele está posicionado no ponto que corresponde à sua posição desejada até  $t = 30s$ . Tal deslocamento ocorre porque o controlador de

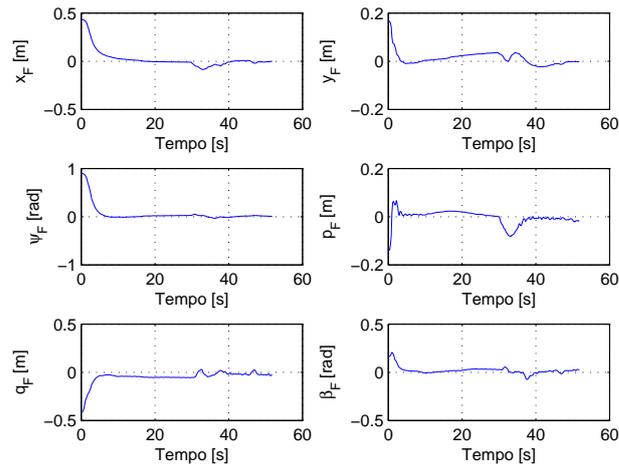


Figura 98: Esquema Multicamadas - erros de formação durante experimento com carga, com compensação adaptativa da dinâmica.

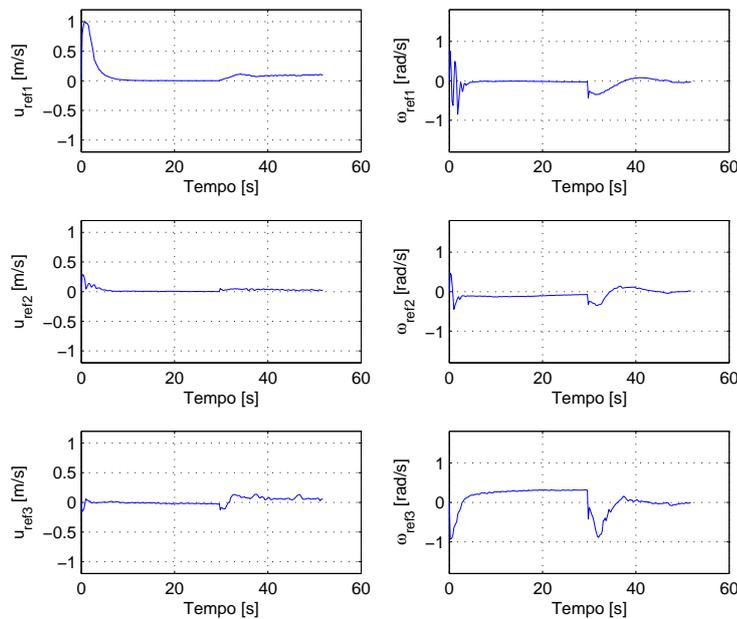


Figura 99: Esquema Multicamadas - ações de controle enviadas aos robôs durante experimento com carga, com compensação da dinâmica.

formação gera as ações de controle para os três robôs com base nos erros de formação: posicionamento de seu centróide, sua orientação e sua forma. Por isso, o controlador gera os sinais de comando para  $R_3$  (e para os demais robôs) de maneira a tentar minimizar, também, o erro de forma, o que leva tal robô a deixar momentaneamente a posição  $(-2, 0; 2, 0)m$ . Em todos os casos, depois que a formação desejada se desloca, verifica-se que  $R_3$  e os demais robôs seguem caminhos de maneira a acompanhar tal deslocamento, o que ilustra que o sistema funciona como esperado.

Para comparar o desempenho entre os quatro casos experimentados, calculou-se o

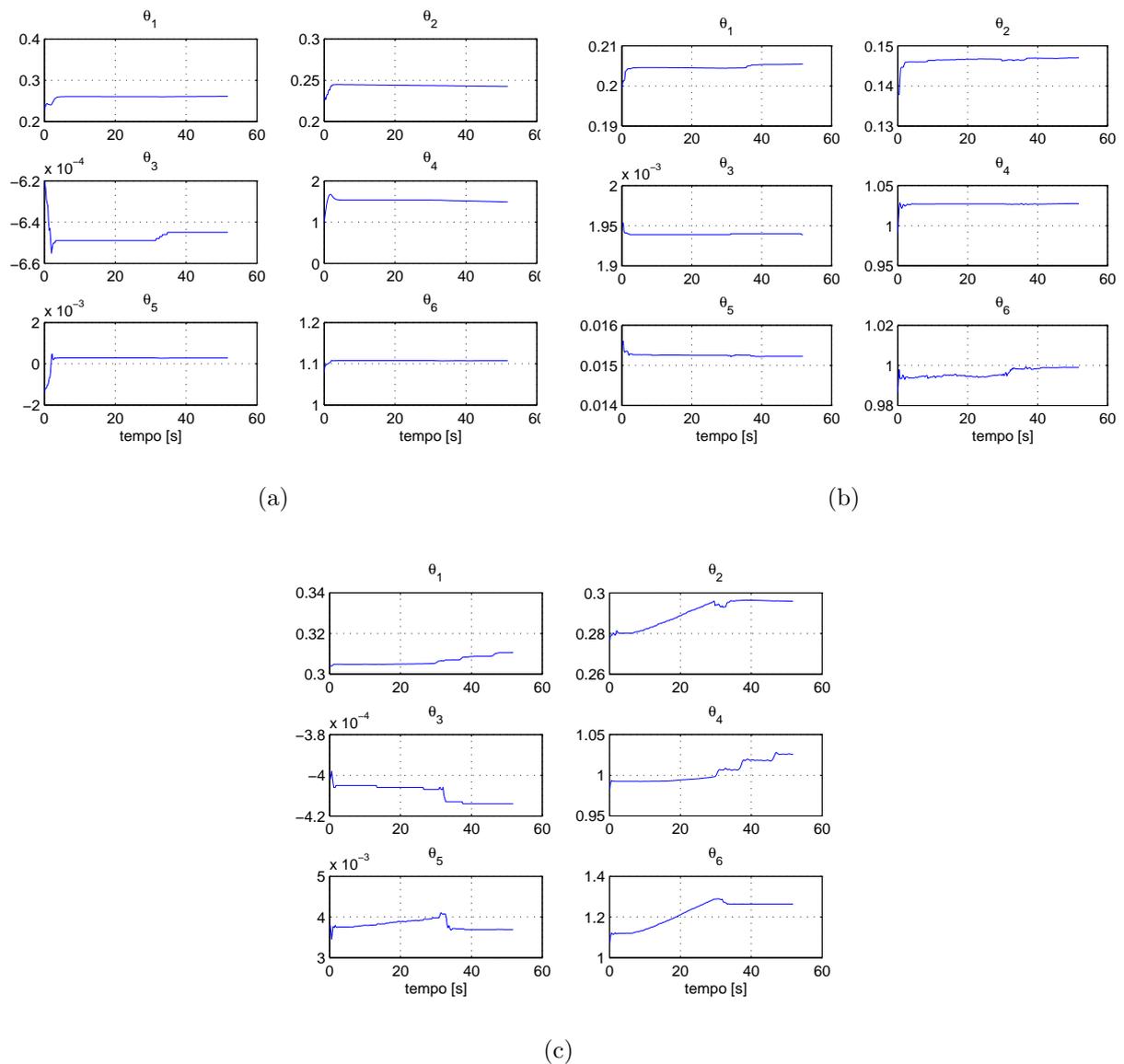


Figura 100: Esquema Multicamadas - evolução dos parâmetros dinâmicos estimados durante experimento com carga, com compensação adaptativa da dinâmica. (a) Robô 1, (b) Robô 2, e (c) Robô 3.

índice  $IAE$  considerando-se o período de 52s de duração de cada um. Os resultados são apresentados na Tabela 4, e mostram que o desempenho do sistema é expressivamente melhor quando a compensação dinâmica está ativada, tanto para o caso em que os robôs se deslocam descarregados como para o caso em que levam cargas.

Analisando os dados mostrados na Tabela 4 verifica-se que, com os robôs descarregados, a ativação da compensação dinâmica promoveu uma redução de 11% no erro de pose e de 14% no erro de forma da estrutura virtual. A colocação das cargas nos robôs provocou um aumento importante no erro de forma, mas praticamente não alterou o erro

Tabela 4: IAE para experimentos do controle centralizado tipo estruturas virtuais

	IAE	
	$\mathbf{P}_F$	$\mathbf{S}_F$
Sem carga, sem compensação dinâmica	8,13	5,94
Sem carga, com compensação adaptativa da dinâmica	7,20	5,11
Com carga, sem compensação dinâmica	8,17	7,33
Com carga, com compensação adaptativa da dinâmica	6,86	5,02

de pose da estrutura. Para este caso, a ativação da compensação dinâmica se mostrou ainda mais interessante pois promoveu uma redução de cerca de 16% no erro de pose e de 31% no erro de forma da estrutura.

Considerando a arquitetura aqui proposta, o percentual de redução dos índices *IAE* obtidos nos experimentos revela que os efeitos dinâmicos são importantes na geração dos erros de formação. Portanto, a compensação adaptativa da dinâmica, para este caso, se mostra bastante interessante, principalmente para a situação de transporte de cargas.

**Nota 4.6.** O sistema aqui proposto possui algumas diferenças em relação ao sistema multicamadas apresentado por Fierro e Das (2002): (1) o controlador aqui proposto gera sinais de referência de velocidade, não de torque; (2) aqui considera-se o controle de uma estrutura virtual, enquanto em (FIERRO; DAS, 2002) é apresentado um controle tipo líder-seguidores; (3) o controle da forma ou da posição da formação pode ser enfatizado pelo controlador aqui proposto através do ajuste dos ganhos da matriz  $\kappa$ , em que cada valor relaciona-se com o controle de uma variável de formação específica; e (4) aqui a adaptação dos parâmetros dinâmicos é feita através de uma lei de adaptação robusta, que evita a deriva paramétrica. Além disso, aqui o desempenho do sistema foi avaliado e comparado para os casos em que a compensação dinâmica está operando ou não. Em relação aos resultados, em (FIERRO; DAS, 2002) foram apresentados apenas resultados de simulação com dois robôs, enquanto aqui apresentou-se resultados de simulação e de experimentos para um grupo de três robôs.

#### 4.5.7 Sobre o Escalonamento da Formação

O esquema de controle de formação apresentado nesta seção foi projetado para controlar um grupo de três robôs móveis unicycle. Como mostrado na seção 4.5.1, para controlar robôs com diferentes modelos cinemáticos basta que a matriz  $\mathbf{K}_r$  seja modificada de maneira apropriada.

No entanto, se o número de robôs a ser controlado varia, outras modificações são

necessárias. Adicionar ou retirar um robô à formação exige que seja feita uma redefinição das variáveis de formação. Com a adição de um robô ao grupo, por exemplo, o vetor  $\mathbf{P}_F$ , que define a pose da formação, pode ser mantido inalterado, mas o vetor  $\mathbf{S}_F$ , que define sua forma, deve ser modificado de maneira a incluir variáveis que englobem a posição desse novo robô em relação aos demais. Isso significa que as equações que definem a cinemática direta ( $K$ ) e inversa ( $K^{-1}$ ) da formação devem ser modificadas, o que exige o cálculo de uma nova matriz Jacobiana  $J(\mathbf{x})$  para o sistema, além de uma modificação em sua lei de controle (4.36). A estrutura virtual a ser alcançada é formada por um novo polígono, sendo a posição de seu centróide, sua orientação e sua forma controlados por um único controlador.

O problema recém discutido ilustra que modificar o número de robôs da formação não é tarefa trivial. No entanto, a adição de um ou mais robôs à formação também pode ser feita sem a necessidade de tais modificações na estrutura do sistema. A alternativa descrita a seguir aumenta a flexibilidade do sistema como um todo e permite que sua arquitetura de controle seja centralizada (como mostrado), ou descentralizada hierárquica (que é localmente centralizada).

Considera-se que o número de robôs a serem controlados é maior ou igual a três. Caso o sistema seja composto por três robôs, a arquitetura descrita nesta seção pode ser utilizada de maneira direta para seu controle. Caso o sistema multirobôs seja formado por mais de três veículos, ele pode ser organizado de maneira que cada veículo adicional forme uma nova estrutura triangular, em conjunto com dois veículos da estrutura anterior. Assim, sendo  $n$  o número de veículos a serem controlados, o número de estruturas virtuais seria de  $(n - 2)$ .

Para ilustrar a organização do sistema, um exemplo de arquitetura de controle para quatro robôs é descrito a seguir:

- Três dos veículos, denominados de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , formam uma estrutura virtual (triângulo) da maneira como foi descrito nas subseções 4.5.1 e 4.5.2. Esses veículos são controlados pela lei de controle (4.36), para que seu centróide siga a trajetória enviada pelas camadas de planejamento;
- O quarto veículo, denominado de  $R_4$ , forma outra estrutura virtual em conjunto com os robôs  $R_2$  e  $R_3$ , por exemplo. Esta nova estrutura é controlada por outro controlador, que também usa a lei de controle (4.36), mas com o objetivo de manter sua forma, de tal maneira que  $R_4$  se posicione corretamente em relação aos dois outros robôs.

A lei de controle (4.36) gera sinais de comando para três robôs. Portanto, da forma como foi descrito, os controladores da primeira e da segunda estruturas geram sinais de comando para os robôs  $R_2$  e  $R_3$ . Com base nisso, propõe-se duas estratégias para que o controle da formação seja realizado:

1. Apenas os sinais de comando gerados pelo controlador da primeira estrutura são aproveitados e enviados para os robôs  $R_2$  e  $R_3$ . Nesse caso, parte dos sinais de comando gerados pelo controlador da segunda estrutura são desprezados, sendo aproveitados apenas os sinais gerados para controle do robô  $R_4$ . Assim, a primeira estrutura funciona de maneira independente, e o robô  $R_4$  atua como um seguidor;
2. Os robôs  $R_2$  e  $R_3$  recebem comandos que são resultado da fusão dos sinais de controle gerados para cada um deles pelos controladores da primeira e da segunda estruturas. A fusão de sinais gerados por diferentes controladores foi estudada e apresentada em (FREIRE, 2002) para controle de um robô móvel. Tal trabalho mostra que a fusão dos sinais de controle permite que controladores com diferentes objetivos trabalhem em paralelo, gerando sinais de comando que são fusionados antes de serem enviados ao robô. A mesma ideia pode ser aplicada aqui. Nesse caso, as estruturas não mais operam de maneira independente uma da outra, pois os sinais de comando recebidos por  $R_2$  e  $R_3$  são influenciados pelas posições de  $R_1$  e de  $R_4$ .

É válido ressaltar que mais robôs podem ser acrescentados à formação, sendo que uma nova estrutura virtual deve ser criada para cada robô adicional. A organização descrita permite a descentralização do sistema de controle, já que os robôs adicionais têm seus próprios controladores funcionando de maneira independente daqueles das demais estruturas. No caso (1) descrito anteriormente, a descentralização é mais natural, já que os robôs adicionais funcionam como seguidores, e os sinais de controle de cada robô são gerados somente pelo controlador de uma estrutura. Para o caso (2), no entanto, descentralizar o sistema de controle exige comunicação entre os robôs, de maneira que os sinais de controle possam ser fusionados. Em ambos os casos, os robôs adicionais devem possuir sensores para medirem ou estimarem as posições dos demais, ou devem receber tais informações pelo canal de comunicação. Além disso, caso seja necessário alterar a forma da estrutura, tal modificação deve ser informada a todos os controladores.

Para verificar o funcionamento desta proposta de escalonamento, foi realizada uma simulação para controle de quatro robôs no ambiente **MRSiM** com aplicação da estratégia (1), em que os robôs  $R_2$  e  $R_3$  recebem sinais de comando apenas do controlador da primeira estrutura. A Figura 101(a) mostra os caminhos percorridos pelos quatro robôs.

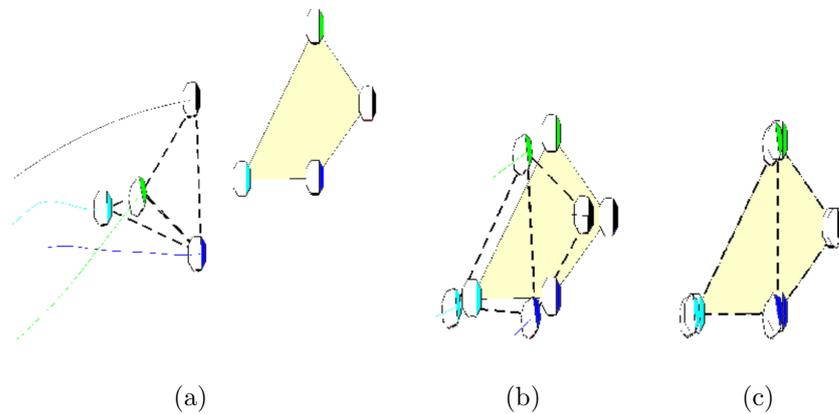


Figura 101: Simulação do controle de quatro robôs com escalonamento proposto. As figuras apresentam o deslocamento dos robôs e a formação desejada fixa em três momentos.

Na parte esquerda da figura, as posições dos robôs são mostradas num dado instante da simulação. Na parte direita, encontra-se a formação que deve ser alcançada pelos robôs, formada pelas duas estruturas virtuais. Nesta simulação, a formação desejada é fixa. As Figuras 101(b) e 101(c) mostram a mesma simulação, em dois momentos posteriores àquele da Figura 101(a). Pode-se observar que todos os robôs alcançam suas posições desejadas na formação, o que confirma o funcionamento da proposta de escalonamento. Mais detalhes sobre escalonamento da formação são apresentados em (BRANDÃO et al., 2009b).

## 4.6 Considerações Finais do Capítulo

Este capítulo abordou o controle de sistemas multirrobo com compensação adaptativa da dinâmica através do paradigma de controle de formação. Os controladores dinâmicos adaptativos desenvolvidos no Capítulo 3 foram usados para compensar a dinâmica de robôs que fazem parte de uma formação, tanto em controle centralizado tipo estruturas virtuais, como em controle descentralizado tipo líder-seguidores. Devido ao fato de aceitarem referências de velocidade linear e angular como sinais de entrada, os controladores dinâmicos podem ser incluídos em sistemas multirrobo já desenvolvidos com base nos modelos cinemáticos desses veículos, como apresentado neste capítulo e ilustrado com resultados de simulações e de experimentos.

Além disso, foi apresentado o desenvolvimento de um esquema multicamadas para controlar a formação de um grupo de robôs com compensação da dinâmica. Para este esquema, uma lei de controle de formação foi proposta, a estabilidade do equilíbrio foi

analisada através da teoria de Lyapunov e a influência da compensação da dinâmica de cada robô nos erros de formação foi ilustrada, com resultados de simulações e de experimentos com robôs comerciais.

Finalmente, observou-se que a influência da compensação dinâmica na redução dos erros de formação depende das características da arquitetura implementada. Considerando as arquiteturas aqui abordadas, a melhora de desempenho obtida com a compensação adaptativa da dinâmica foi muito mais significativa para a arquitetura centralizada tipo estruturas virtuais aplicada ao Esquema Multicamadas, do que para a arquitetura descentralizada tipo líder-seguidores, conforme ilustrado através de resultados de simulações e de experimentos.

# 5

## *Conclusões*

---

*“One is glad to be of service.”*

*(Andrew Martin, em Bicentennial Man)*

Esta tese propõe soluções para os problemas expostos na seção 1.1, quais sejam:

1. Desenvolvimento de controladores que realizem a compensação da dinâmica de robôs móveis, de forma adaptativa, gerando velocidades como sinais de comando para os robôs; e
2. Controle coordenado de um grupo de robôs móveis tipo unicycle, de maneira que eles alcancem e se mantenham numa formação desejada, compensando sua própria dinâmica de forma adaptativa.

Para solucionar o problema (1), inicialmente, no Capítulo 2, foi proposta uma nova abordagem para representação do modelo dinâmico de robôs móveis unicycle, baseada no modelo proposto por De La CRUZ (2006), que aceita sinais de velocidades linear e angular como entradas. Propriedades de tal modelo foram listadas e analisadas, as quais são úteis no projeto de controladores e na análise de estabilidade do sistema em malha fechada. Uma de tais propriedades é apresentada sob a forma de um teorema que trata da característica de passividade do modelo. Um estudo sobre a dependência linear entre os parâmetros de tal modelo mostrou que eles são linearmente independentes entre si, o que significa que a quantidade de parâmetros do modelo proposto é mínima.

O Capítulo 3 apresentou o desenvolvimento de um controlador de seguimento de trajetória, que também pode ser usado em problemas de posicionamento, cujo projeto foi baseado no modelo cinemático do robô unicycle. Para resolver o problema (1), dois controladores foram projetados para a realização da compensação adaptativa da dinâmica de

robôs móveis. Um deles é baseado no modelo proposto no Capítulo 2, cujas propriedades foram utilizadas no projeto e análise da estabilidade do sistema em malha fechada. Os dois controladores dinâmicos propostos recebem sinais de referência de velocidades linear e angular, realizam a compensação da dinâmica do veículo, e geram outro par de sinais de velocidades linear e angular, que são enviados como comandos ao robô. A compensação da dinâmica é feita de forma adaptativa, o que auxilia nos casos em que os parâmetros dinâmicos dos robôs podem variar de tarefa a tarefa, como em transporte de cargas. A análise de estabilidade dos sistemas foi realizada com base na teoria de Lyapunov, e o resultado mostrou que os controladores propostos estabilizam o sistema, mesmo sob ação de perturbações e variações limitadas nos parâmetros dinâmicos. Diversos resultados de simulação e de experimentos com robôs comerciais mostraram que os controladores propostos são capazes de realizar a compensação adaptativa da dinâmica de tais veículos. Ilustraram, ainda, que o desempenho do sistema com a compensação da dinâmica, para uma tarefa de seguimento de trajetórias, supera o desempenho alcançado quando apenas o controlador cinemático é utilizado.

A solução para o problema (2) foi apresentada no Capítulo 4. Os controladores adaptativos desenvolvidos no Capítulo 3 foram usados para compensar a dinâmica de robôs que fazem parte de uma formação, tanto em controle centralizado tipo estruturas virtuais, como em controle descentralizado tipo líder-seguidores. Também foi apresentado o desenvolvimento de um esquema multicamadas para controlar a formação de um grupo de robôs com compensação da dinâmica, incluindo proposta de uma lei de controle de formação, análise de estabilidade do equilíbrio através da teoria de Lyapunov e estudo da influência da compensação dinâmica de cada robô nos erros de formação.

Resultados de simulações e de experimentos realizados com robôs comerciais, tanto para a arquitetura descentralizada tipo líder-seguidor como para a arquitetura centralizada tipo estruturas virtuais, ilustraram a influência da compensação dinâmica nos erros de formação. Para a arquitetura centralizada foram comparados resultados considerando, inclusive, uma tarefa de transporte de cargas, que comprovaram o funcionamento do esquema proposto e ilustraram que a compensação dinâmica provoca melhora importante no desempenho do sistema, reduzindo os erros de formação.

Em suma, destaca-se como contribuições desta tese:

1. Proposta de representação do modelo dinâmico de robôs móveis tipo unicycle que possuem entradas de velocidade linear e angular;
2. Estudo e apresentação das propriedades de tal modelo;

3. Desenvolvimento de dois controladores para realização da compensação adaptativa da dinâmica de robôs móveis, com uso de lei de adaptação robusta;
4. Análise de estabilidade do equilíbrio do sistema com uso dos controladores propostos, considerando, inclusive, distúrbios e variação nos parâmetros dinâmicos dos veículos durante a realização das tarefas;
5. Realização de experimentos com robôs comerciais que validam e ilustram o funcionamento dos controladores propostos;
6. Aplicação dos controladores propostos em robôs que são parte de uma formação;
7. Apresentação de resultados de simulações e de experimentos com robôs comerciais, que mostram que o erro de formação pode ser reduzido com a compensação da dinâmica dos veículos que formam o sistema multirrobôs.

Como trabalhos futuros, propõe-se estudar uma técnica de ajuste automático de ganhos do sistema, já que estes são em grande número e seu ajuste manual exige a realização de sucessivas provas. Uma técnica de ajuste automático pode levar a valores de ganhos que promovam melhora no desempenho do sistema experimental, incluindo considerações para minimização da energia necessária ao cumprimento das tarefas. Também propõe-se estudo de filtros para os sinais de velocidade e aceleração dos robôs, já que ruídos em tais sinais degradam o desempenho da compensação dinâmica. Trabalhos futuros também podem abordar o controle de uma estrutura virtual com número variável de robôs, o desenvolvimento de técnicas para determinar como as estruturas virtuais adicionais podem ser definidas de forma automática por robôs adicionados à formação, o estudo de estratégias para modificação da forma da estrutura virtual para realização de desvio de obstáculos, e o transporte de uma carga comum a vários robôs. Alguns dos temas citados já estavam em desenvolvimento no momento do fechamento da versão final desta tese (BRANDÃO et al., 2009a; RAMPINELLI et al., 2009a, 2009b).



# Referências

- ABB Västerås Sweden. *IRB 140 Industrial Robot*. Acesso em: 2/jan/2009. Disponível em: <<http://www.abb.com/ProductGuide/>>.
- AIRES, K.; ALSINA, P.; MEDEIROS, A. A global vision system for mobile mini-robots. In: *SBAI-Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Gramado, RS, Brasil: [s.n.], 2001.
- ANDERSON, C.; BARTHOLDI-III, J. J. Centralized versus decentralized control in manufacturing: lessons from social insects. In: *Complexity and Complex Systems in Industry*. University of Warkick: [s.n.], 2000. p. 92–105. ISBN 0902683500.
- ANTONELLI, G.; ARRICHELLO, F.; CHIAVERINI, S. The Entrapment/Escorting Mission. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, v. 15, n. 1, p. 22–29, 2008.
- ANTONINI, P.; IPPOLITI, G.; LONGHI, S. Learning control of mobile robots using a multiprocessor system. *Control Engineering Practice*, n. 14, p. 1279–1295, 2006.
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptive Control*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1994. ISBN 0201558661.
- BEKEY, G.; YUH, J. The Status of Robotics. Report on the WTEC International Study: Part II. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, v. 15, n. 1, p. 80–86, 2008.
- BETHKE, B.; VALENTI, M.; HOW, J. UAV Task Assignment. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, v. 15, n. 1, p. 39–44, 2008.
- BICCHI, A. et al. Heterogeneous Wireless Multirobot System. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, v. 15, n. 1, p. 62–70, 2008.
- Biography Base. *Carl Gustav Jakob Jacobi Biography*. Acesso em: 16/jan/2009. Disponível em: <[http://www.biographybase.com/biography/Jacobi\\_Carl\\_Gustav\\_Jakob.html](http://www.biographybase.com/biography/Jacobi_Carl_Gustav_Jakob.html)>.
- Biography Base. *Sergey Bubka Biography*. Acesso em: 18/nov/2008. Disponível em: <[http://www.biographybase.com/biography/Bubka\\_Sergey.html](http://www.biographybase.com/biography/Bubka_Sergey.html)>.
- BOYD, S.; SASTRY, S. *Adaptive control: stability, convergence, and robustness*. [S.l.]: Prentice Hall, USA, 1989. 253 p. ISBN 0-13-004326-5.
- BRAGANÇA, J. d. O. *Estratégia para Deslocamento de Cargas Através de Cooperação Entre Robôs Móveis à Rodas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Dezembro 2004.
- BRANDÃO, A. S. *Controle Descentralizado com Desvio de Obstáculos para uma Formação Líder-Seguidor de Robôs Móveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Março 2008.
- BRANDÃO, A. S. et al. MRSiM: Un Ambiente Gráfico para Simulación de Navegación de Robots Móviles. In: *Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*. Bahía Blanca, Argentina: [s.n.], 2008.

- BRANDÃO, A. S. et al. A Multi-Layer Control Scheme for Multi-Robot Formations with Adaptive Dynamic Compensation. *5th IEEE International Conference on Mechatronics*, Málaga, Espanha, 2009.
- BRANDÃO, A. S. et al. Um Esquema de Controle Multicamadas Aplicado a uma Formação Multirrobo com Desvio de Obstáculos. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI'09*. Brasília: [s.n.], 2009. Manuscrito sob avaliação.
- BRANDÃO, A. S. et al. Navegação de robôs móveis com desvio de obstáculos: Implementação do desvio tangencial modificado. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI'07*. Florianópolis: [s.n.], 2007.
- BRANDÃO, A. S. et al. Controlling a mobile robot to keep a line formation using a laser scanner. In: *XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC*. Río Gallegos, Argentina: UNPA, 2007.
- CANUDAS de WIT, C.; SICILIANO, B.; BASTIN, G. *Theory of Robot Control*. [S.l.]: Springer, 1997.
- CANUDAS de WIT C.; SORDALEN, O. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 11, p. 1791–1797, 1992. ISSN 0018-9286.
- CAO, Y. U.; FUKUNAGA, A. S.; KAHNG, A. B. Cooperative mobile robotics: Antecedents and directions. *Autonomous Robots*, n. 4, p. 1–23, 1997.
- CARELLI, R.; SECCHI, H.; MUT, V. Algorithms for Stable Control of Mobile Robots with Obstacle Avoidance. *Latin American Applied Research*, v. 29, n. 3/4, p. 191–196, 1999.
- CELESTE, W. C. et al. Controlador dinâmico para seguimento de caminho baseado em trailer virtual entre robôs móveis. In: *Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2008*. Juiz de Fora, Brasil: [s.n.], 2008.
- CLARK, J.; FIERRO, R. Cooperative hybrid control of robotic sensors for perimeter detection and tracking. In: *American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 3500–3505.
- CONSOLINI, L. et al. A Geometric Characterization of Leader-Follower Formation Control. *IEEE International Conference on Robotics and Automation - ICRA*, Roma, Italy, p. 2397–2402, 2007.
- CORRADINI, M. L.; ORLANDO, G. Control of mobile robots with uncertainties in the dynamic model: A discrete time sliding mode approach with experimental results. *Control Engineering Practice*, n. 10, p. 23–34, 2002.
- DAS, A. et al. A vision-based formation control framework. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 18, n. 5, p. 813–825, 2002.
- DAS, T.; KAR, I. Design and implementation of an adaptive fuzzy logic-based controller for wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 14, n. 3, p. 501–510, 2006.

- De La CRUZ, C. *Control de Formación de Robots Móviles*. Tese (Doutorado) — Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina, Dezembro 2006.
- De La CRUZ, C.; CARELLI, R. Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots. In: *32nd IEEE Conference on Industrial Electronics*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 3880–3885.
- DONG, W.; GUO, Y. Dynamic tracking control of uncertain nonholonomic mobile robots. *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 2774–2779, 2005.
- DONG, W.; GUO, Y.; FARRELL, J. Formation control of nonholonomic mobile robots. In: *American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2006.
- DONG, W.; HUO, W. Tracking control of wheeled mobile robots with unknown dynamics. *IEEE International Conference on Robotics and Automation - ICRA*, v. 4, 1999.
- FEDDEMA, J.; LEWIS, C.; SCHOENWALD, D. Decentralized control of cooperative robotic vehicles: Theory and application. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 8, n. 5, p. 852–864, Outubro 2002.
- FENG, X.; VELINSKY, S. Development of a distributed multiple mobile robot control system for automatic highway maintenance and construction. *The 40th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, v. 1, p. 489–492, 1997.
- FERREIRA, A. *Desvio Tangencial de Obstáculos para um Robô Móvel Navegando em Ambientes Semi-Estruturados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Junho 2004.
- FERREIRA, A. *Uma Proposta de Interface Cérebro-Computador para Comando de Cadeiras de Rodas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Dezembro 2008.
- FERREIRA, A. et al. Human-machine interface based on muscular and brain signals applied to a robotic wheelchair. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 90, p. 012094 (8pp), 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1742-6596/90/012094>>.
- FIERRO, R.; DAS, A. A modular architecture for formation control. In: *Third International Workshop on Robot Motion and Control, RoMoCo'02*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 285–290.
- FIERRO, R. et al. Hybrid control of formations of robots. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation - ICRA*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1, p. 157–162.
- FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. In: *The 34th Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 3805–3810.
- FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. *Journal of Robotic Systems*, v. 14, n. 3, p. 149–163, 1997.

- FRAGA, S.; SOUSA, J.; PEREIRA, F. Geração de Trajetórias para Sistemas Diferencialmente Planos. *III Festival Nacional de Robótica - ROBOTICA2003*, Lisboa, Portugal, 2003.
- FREIRE, E.; CARELLI, R. Corridor navigation and wall-following stable control for sonar-based mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, n. 45, p. 235–247, 2003.
- FREIRE, E. O. *Controle de Robôs Móveis por Fusão de Sinais de Controle Usando Filtro de Informação Descentralizado*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Agosto 2002.
- FUKAO, T.; NAKAGAWA, H.; ADACHI, N. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 16, n. 5, p. 609–615, 2000.
- GARCÍA, A. G.; AGAMENNONI, O. E.; FIGUEROA, J. Closed-Form Solutions for Stable Trajectories of the Unicycle using Smooth Controllers. *V Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- GAVA, C. et al. Nonlinear control techniques and omnidirectional vision for team formation on cooperative robotics. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 2409–2414.
- GAVA, C. C. *Controle de Formação de Robôs Móveis Baseado em Visão Omnidirecional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Agosto 2007.
- IEEE. *IEEE History Center - Biographies*. EUA: [s.n.], Acesso em: 30/dez/2008. Disponível em: <[http://www.ieee.org/web/aboutus/history\\_center/biography/kalman.html](http://www.ieee.org/web/aboutus/history_center/biography/kalman.html)>.
- JORDÁN, M. A.; BUSTAMANTE, J. L. Performance-Related Optimal Autotuning in Adaptively Guided Subaquatic Vehicles. *V Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- JORDÁN, M. A. et al. Adaptive Control Applied to a Wheeled Mobile Robot - A Case Study. *V Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- K-Team Corporation. *Khepera III - Robot Base Specifications*. Acesso em: 3/jan/2009. Disponível em: <<http://www.k-team.com>>.
- KANAYAMA, Y. et al. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 384–389, 1990.
- KATZ, D. et al. The UMass Mobile Manipulator UMan: An Experimental Platform for Autonomous Mobile Manipulation. In: *Workshop on Manipulation in Human Environments at Robotics: Science and Systems*. [S.l.: s.n.], 2006.
- KAUFMAN, H.; SOBEL, K. *Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer, 1998. 182–184 p. ISBN 9780387948843.
- KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, NJ, 2002.

- KIM, M.; SHIN, J.; LEE, J. Design of a robust adaptive controller for a mobile robot. *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, v. 3, p. 1816–1821, 2000.
- KRESS-GAZIT, H. et al. Courteous Cars. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, v. 15, n. 1, p. 30–38, 2008.
- KÜHNE, F.; JR, J. da S.; LAGES, W. Mobile Robot Trajectory Tracking using Model Predictive Control. *II IEEE Latin-American Robotics Symposium*, São Luis, Brazil, 2005.
- LAWTON, J. R. T.; BEARD, R. W.; YOUNG, B. J. A decentralized approach to formation maneuvers. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 19, n. 6, p. 933–941.
- LIANG, Y.; LEE, H.-H. Decentralized formation control and obstacle avoidance for multiple robots with nonholonomic constraints. In: *American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 6pp.
- LIU, S. et al. Dynamic control of a mobile robot using an adaptive neurodynamics and sliding mode strategy. In: *The 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 6, p. 5007–5011.
- MARTINS, F. N. et al. Control Descentralizado de una Formación Líder-Seguidor con Compensación de la Dinámica. *V Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- MARTINS, F. N. et al. A Multi-Layer Control Scheme for Multi-Robot Formations with Adaptive Dynamic Compensation. In: *XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC*. Rosario, Argentina: [s.n.], 2009. Manuscrito sob avaliação.
- MARTINS, F. N. et al. A Dynamic Model and a Tracking Controller for Unicycle-like Mobile Robots. *XVII Congresso Brasileiro de Automatica CBA2008*, Juiz de Fora, Brasil, 2008.
- MARTINS, F. N. et al. Adaptive Dynamic Controller for Unicycle-like Mobile Robots. *XVII Congresso Brasileiro de Automatica CBA2008*, Juiz de Fora, Brasil, 2008.
- MARTINS, F. N. et al. Dynamic Modeling and Trajectory Tracking Control for Unicycle-Like Mobile Robots. *The 3rd International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics - MuSME 2008*, San Juan, Argentina, 2008.
- MARTINS, F. N. et al. Modelo Dinámico y Controlador de Seguimiento para Robots Móviles Tipo Uniciclo. *V Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- MARTINS, F. N. et al. Un Controlador Dinámico Adaptable de Seguimiento para Robots Móviles tipo Uniciclo. *V Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- MARTINS, F. N. et al. Controlador Dinámico Adaptable para Seguimiento de Trayectoria con Robots Móviles. *XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC*, Río Gallegos, Argentina, October 2007.

- MARTINS, F. N. et al. Controlador Dinâmico Adaptativo de Seguimento de Trajetória para Robôs Móveis. *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*, Florianópolis, Brasil, Outubro 2007.
- MARTINS, F. N. et al. Kinematic and Adaptive Dynamic Trajectory Tracking Controller for Mobile Robots. *3rd International Conference on Advances in Vehicle Control and Safety - AVCS07*, Buenos Aires, Argentina, 2007.
- MARTINS, F. N. et al. An Adaptive Dynamic Controller for Autonomous Mobile Robot Trajectory Tracking. *Control Engineering Practice*, v. 16, p. 1354–1363, 2008.
- MARTINS, F. N. et al. Dynamic Modeling and Adaptive Dynamic Compensation for Unicycle-Like Mobile Robots. *14th International Conference on Advanced Robotics - ICAR 2009*, Munique, Alemanha, 22 a 26 de Junho 2009.
- MARTINS, N. A. Estudo comparativo de estratégias de controle de robôs manipuladores no espaço de juntas. *Acta Scientiarum Maringá*, v. 23, n. 6, p. 1469–1480, 2001.
- MAS, I.; PETROVIC, O.; KITTS, C. Cluster space specification and control of a 3-robot mobile system. *IEEE International Conference on Robotics and Automation - ICRA*, p. 3763–3768, 2008.
- MICHAEL, N.; FINK, J.; KUMAR, V. Controlling a team of ground robots via an aerial robot. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems - IROS*, p. 965–970, 2007.
- MICHAEL, N.; FINK, J.; KUMAR, V. Experimental Testbed for Large Multirobot Teams. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, v. 15, n. 1, p. 53–61, 2008.
- Mobile Robots. *Research Robot Bases - Specifications by Model*. Acesso em: 30/jun/2008. Disponível em: <<http://www.activrobots.com/ROBOTS/specs.html>>.
- MONTEIRO, S.; VAZ, M.; BICHO, E. Attractor dynamics generates robot formations: from theory to implementation. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation - ICRA*. New Orleans, USA: [s.n.], 2004. p. 2582–2587.
- NASISI, O.; CARELLI, R. Adaptive servo visual robot control. *Robotics and Autonomous Systems*, Elsevier, v. 43, n. 1, p. 51–78, 2003.
- NOGUEIRA, S. Legislação Robótica. *Revista Galileu*, Editora Globo, Acesso em: 28/fev/2009. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com>>.
- PATEL, S.; SANYAL, R.; SOBH, T. RISCBOT: A WWW-Enabled Mobile Surveillance and Identification Robot. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, Springer, v. 45, n. 1, p. 15–30, 2006.
- PENIZZOTTO, F.; PATIÑO, D.; CARELLI, R. Sistema de Control Basado en Fusión de Láser y Odometría para la Navegación Autónoma de Vehículos en Plantaciones de Viñedos y Frutales. *Jornadas Argentinas de Robótica - JAR 2008*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- PEREIRA, G.; CAMPOS, M.; KUMAR, V. Decentralized Algorithms for Multi-Robot Manipulation via Caging. *International Journal of Robotics Research*, Springer, v. 23, n. 7/8, p. 783–796, 2004.

- PHILLIPS, C. L.; NAGLE, H. T. *Digital Control System Analysis and Design*. New Jersey, EUA: Prentice Hall, 1995. 406 p. ISBN 0-13-309832-X.
- PRASSLER, E. et al. A Short History of Cleaning Robots. *Autonomous Robots*, Springer, v. 9, n. 3, p. 211–226, 2000.
- RAMPINELLI, V. T. L. et al. A Multi-Layer Control Scheme for Multi-Robot Formations with Obstacle Avoidance. In: *XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC*. Rosario, Argentina: [s.n.], 2009. Manuscrito sob avaliação.
- RAMPINELLI, V. T. L. et al. A Multi-Layer Control Scheme for Multi-Robot Formations with Obstacle Avoidance. *14th International Conference on Advanced Robotics - ICAR 2009*, Munique, Alemanha, 22 a 26 de Junho 2009.
- RAO, R. et al. Human robot interaction: application to smart wheelchairs. *IEEE International Conference on Robotics and Automation - ICRA*, v. 4, p. 3583–3588, 2002.
- ROMAGNOLI, J. A.; PALAZOGLU, A. *Introduction to Process Control*. [S.l.]: CRC Press, 2006. 206–207 p. ISBN 9780849334962.
- ROMANO, V. F. *Robótica Industrial: Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processos*. [S.l.]: Edgard Blucher Ltda, 2002. ISBN 85-212-0315-2.
- ROSSOMANDO, F. G. et al. Neural network adaptive trajectory tracking controller for mobile robots. In: *XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC*. Río Gallegos, Argentina: UNPA, 2007.
- SARIEL, S.; BALCH, T.; ERDOGAN, N. Naval Mine Countermeasure Missions. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, v. 15, n. 1, p. 45–52, 2008.
- SCHAFT, A. J. v. d. *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. [S.l.]: Springer, 1999. 17 p. ISBN 1-85233-073-2.
- SISTO, M.; GU, D. A fuzzy leader-follower approach to formation control of multiple mobile robots. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 2515–2520.
- SPONG, M.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. *Robot Modeling and Control*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2006.
- STEIN, P. et al. Sistema integrado de navegação para o Robô Ambiental Híbrido na Floresta Amazônica. *XIII Simpósio Brasileiro de Sensoreamento Remoto*, Florianópolis, p. 7103–7105, 2007.
- STILWELL, D.; BISHOP, B. A strategy for controlling autonomous robot platoons. In: *The 39th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 4, p. 3483–3488.
- STOUTEN, B.; GRAAF, A. de. Cooperative transportation of a large object-development of an industrial application. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation - ICRA*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 3, p. 2450–2455.

TEODOVICH, L. J.; CARELLI, R. Control Híbrido para Posicionamiento de un Robot tipo Ackerman. *V Jornadas Argentinas de Robótica - JAR08*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.

TOIBERO, J. M. et al. Switching controllers for navigation with obstacles in unknown environments. In: *Anais da IV Jornadas Argentinas de Robótica - JAR06*. Córdoba, Argentina: [s.n.], 2006.

TUFANO, D. *Guia Prático da Nova Ortografia*. São Paulo, SP: Editora Melhoramentos Ltda., 2008. ISBN 978-85-06-05464-2.

University of St Andrews, School of Mathematics and Statistics. *Lyapunov Biography*. Scotland: [s.n.], Acesso em: 18/nov/2008. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lyapunov.html>>.

WADE, H. *Basic and Advanced Regulatory Control: System Design and Application*. [S.l.]: ISA, 2004. 80–82 p. ISBN 9781556178733.

WANG, J.; WU, X.-B.; XU, Z.-L. Decentralized formation control and obstacles avoidance based on potential field method. In: *The 5th International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Dalian: [s.n.], 2006. p. 803–808.

WANG, Z.; TAN, D.; GOLDSMITH, P. Formation control of robotic vehicles. In: *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics - ROBIO*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 57–60.

WU, W. et al. Adaptive exponential stabilization of mobile robots with uncertainties. *The 38th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 3484–3489, 1999.

ZHANG, Y. et al. Dynamic model based robust tracking control of a differentially steered wheeled mobile robot. *American Control Conference*, v. 2, 1998.