

Universidade Federal do Espírito Santo

Correção Logarítmica no Potencial
Newtoniano e sua Aplicação a Galáxias
Espirais

Juliano Pereira Campos

Orientador: Dr. Júlio César Fabris

Vitória - Espírito Santo

2007

JULIANO PEREIRA CAMPOS

CORREÇÃO LOGARÍTMICA NO POTENCIAL NEWTONIANO
E SUA APLICAÇÃO A GALÁXIAS ESPIRAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

VITÓRIA
2007

“CORREÇÃO LOGARÍTMICA NO POTENCIAL NEWTONIANO E SUA APLICAÇÃO A GALÁXIAS ESPIRAIS”

JULIANO PEREIRA CAMPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada em 03 de agosto de 2007

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Laerte Sodré Junior
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Sérgio Vitorino de Borda Gonçalves
Universidade Federal do Espírito Santo

Dedico mais esta conquista de minha vida à
minha amada mãe, Olga e aos meus irmãos,
Cristiano e Pablo.

"... Peço enfaticamente que o que aqui realizei seja lido com indulgência e que meus trabalhos em um assunto tão difícil sejam examinados não tanto com espírito de censura, mas com o de reparar seus defeitos".

Isaac Newton

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem a presença Dele na minha vida, certamente eu não teria realizado mais este sonho.

Agradeço aos meus familiares pois, mesmo sabendo que eu me distanciaria fisicamente deles, nunca deixaram faltar confiança e incentivo.

Agradeço ao professor Júlio César Fabris pela paciência, pelas discussões, pelo companheirismo e pelo exemplo de ser humano.

Agradeço ao professor Rainer Karl Madejsky pelas discussões e sugestões que foram de grande relevância para este trabalho.

Aos amigos Raphael, José André, Hermano, Adriano, Manuel, Deborah, Jardel, Stéphane, Gabriel, André, Fany, Leonídio, Ivan, Alberto, Fábio, Paulo, Alex e a todos os demais colegas de pós-graduação, agradeço por terem proporcionado, durante minha passagem pela UFES, sentimentos tão nobres, tais como: admiração, respeito, amizade e alegria.

Ao amigo Ailton Della Valentina Filho agradeço pela disponibilização do aparato computacional necessário para que esse trabalho tivesse sua redação concluída com relativa tranquilidade.

Agradeço ao CNPq pela bolsa de estudos.

Resumo

Uma caracterização bem elaborada das massas das galáxias é de fundamental importância para entendermos a formação e a evolução das galáxias, assim como o Universo.

A velocidade circular das galáxias espirais é utilizada para estimar a massa das galáxias. Os dados observacionais das curvas de rotação mostram que as velocidades circulares permanecem praticamente constantes, mesmo a grandes distâncias do centro galáctico onde a influência da matéria luminosa é muito atenuada. Com essa constatação observacional, origina-se um dos problemas mais controvertidos das astrofísicas galáctica e extra-galáctica: o que causaria esse fenômeno. Alguns pesquisadores tentam solucionar o problema da planitude das curvas de rotação adicionando uma componente extra de matéria, a matéria escura; outros pesquisadores propõem uma correção no potencial gravitacional Newtoniano.

Apresentamos neste trabalho, uma correção logarítmica no potencial gravitacional Newtoniano como uma alternativa de explicação do problema da planitude das curvas de rotação, sem a necessidade de acrescentar matéria escura. Além disso, a estrutura logarítmica da correção abre possibilidade de conexão com a teoria de cordas cósmicas.

Apesar de utilizarmos uma distribuição simplificada de massa - tipo disco, os resultados analíticos obtidos no presente trabalho mostram uma excelente concordância com os dados observacionais das curvas de rotação da maioria das galáxias LSB analisadas. Esses resultados nos incentivam a investir na sofisticação do modelo.

Abstract

A well elaborated characterization of the masses of the galaxies is of basic importance to understand the formation and the evolution of the galaxies, as well as the Universe.

The circular speed of the spiral galaxies is used to estimate the mass of the galaxies. The observacional data of the rotation curves exactly show that the circular speeds practically remain constant at large distances of the galactic center, where the influence of the luminous mass is very attenuated. With this observacional evidence, originates one of the controvertial problems of astrophysics galactic and the extra-galactic: what it could cause this phenomenon? Some researchers try to solve the problem of the flattenning of the rotation curves adding one extra component of mass, the dark matter; other researchers consider a correction in the Newtonian gravitational potential.

We present in this work, a logarithmic correction in the Newtonian gravitational potential as an alternative for the explanation of the problem of the flattenning of the rotation curves without the necessity to add dark matter. Moreover, the logarithmic structure of the correction opens possibility of connection with the theory of cosmic strings.

Although the use of a simplified disk mass distribution, the obtained analytical results in the present work show to an excellent agreement with the observational data of the curves of rotation of the majority of analyzed galaxies LSB. These results stimulate to invest in the sophistication of the model.

Sumário

1	Introdução	1
2	Aspectos Gerais de Galáxias	7
2.1	Introdução	7
2.2	Morfologia Galáctica	7
2.3	Meio Interestelar	12
2.3.1	Gás interestelar	13
2.3.2	A poeira interestelar	13
2.3.3	Moléculas interestelares	14
2.4	Raios Cósmicos	14
2.5	Populações Estelares	15
2.6	Massas	15
2.6.1	Determinação de massa em galáxias elípticas	16
2.6.2	Determinação de massa em galáxias espirais	17
2.7	A Relação entre Luminosidade e Velocidade para Galáxias Elípticas e Espirais	18
2.8	Luminosidade	18
2.8.1	Brilho superficial	19
2.8.2	Distribuição de brilho superficial	19
3	Teoria de Potencial	21

3.1	Cálculo de Potencial	21
3.2	Cálculo de Potencial de uma Distribuição de Massa Tipo Disco .	26
4	Potencial Newtoniano Modificado para uma Distribuição de Massa Tipo Disco	33
4.1	Cálculo de Potencial Modificado Para o Disco	33
4.2	Análise das Curvas das Velocidades Circulares Modificadas Variando com o Raio	39
4.3	Análise do Comportamento das Curvas das Velocidades Circulares Modificadas Quando o Raio e o Parâmetro α Variam Juntos	41
5	Comparação do Modelo com dados Observacionais	45
5.1	Dados Observacionais	45
5.1.1	Coleta de Dados	45
5.1.2	Probabilidades Bayesianas	46
5.2	Resultados Analíticos X Dados Observacionais	48
6	Considerações Finais	54
6.1	Conclusões	54
6.2	Perspectivas	55
	Apêndice A	56

Capítulo 1

Introdução

Quando Galileo fez suas primeiras observações do céu utilizando um telescópio, em 1610, nossa visão de universo foi drasticamente expandida. Galileo foi o primeiro a considerar que nossa galáxia, denominada simplesmente "Galáxia", era uma vasta coleção de estrelas individuais [2]. Em meados de 1700, para explicar as distribuições circulares que cruzavam o céu, Immanuel Kant (1724-1804) e Thomas Wright (1711-1786) propuseram que a Galáxia deveria ser um disco estelar e que nosso sistema solar seria apenas uma componente dentro desse disco. Então, em 1780, William Herschel produziu um mapa da Galáxia baseado em uma contagem bem grosseira do número de estrelas em algumas regiões do céu. Com esses dados, Herschel concluiu que o Sol deveria estar muito próximo do centro da distribuição e que as dimensões medidas ao longo do plano do disco seriam cinco vezes maiores que a espessura vertical do disco [2]. O modelo da Galáxia de Herschel foi posteriormente confirmado por Jacobus C. Kapteyn (1851-1922).

A primeira evidência de matéria escura (DM - Dark Matter), ou seja, matéria indetectável, foi apontada pelo astrônomo suíço Fritz Zwicky em 1933 [36]. Na época a lei de Hubble, relacionando distância com velocidade, já tinha sido utilizada para estabelecer uma escala de distância extragaláctica. Além disso, existiam curvas de rotação disponíveis para várias galáxias espirais e essas foram usadas para estimar as razões massa-luminosidade da parte central dessas galáxias.

O trabalho de Zwicky foi baseado em medições das velocidades radiais de 7 galáxias pertencentes ao aglomerado de Coma. Ele verificou que as galáxias individuais tinham

velocidades radiais que diferiam da velocidade média do aglomerado, com uma dispersão RMS (Root Mean Square) de aproximadamente 700km/s. Ele interpretou esta dispersão como uma medida da energia cinemática por unidade de massa das galáxias do aglomerado e fez uma estimativa grosseira do raio do aglomerado sendo capaz de medir a massa total do aglomerado usando o teorema do virial.

Ao examinar o conjunto de galáxias de Coma, Zwicky obteve que a massa média das galáxias dentro do conjunto era de aproximadamente 160 vezes maior do que a esperada devido a sua luminosidade. Ele concluiu que praticamente toda massa do aglomerado estava em forma de matéria invisível ou matéria escura que é indetectável, exceto por meio de força gravitacional [17].

Na literatura, o termo matéria escura denota qualquer forma de matéria cuja existência é inferida somente por seu efeito gravitacional. Não se tem um conhecimento sobre sua constituição. A matéria dominante é considerada matéria escura fria (CDM - Cold Dark Matter), consistindo de partículas se movendo suavemente, de maneira que a densidade de energia CDM é devido, principalmente, à massa de partículas em repouso [2]. Os candidatos mais promissores a matéria escura fria são partículas neutras e que interagem muito fracamente entre si ou com a matéria bariônica, reagindo quase que exclusivamente à gravidade, chamadas WIMPs (weakly interacting massive particles). Os principais candidatos nessa classe são os áxions e os neutralinos. Os áxions surgem no contexto da cromodinâmica quântica (QCD), a teoria que explica as interações fortes em termos dos quarks. Apesar de sua massa muito pequena (10^{-6} - 10^{-4} eV/c²) os áxions teriam sido produzidos em repouso e por isso são considerados matéria escura fria. O neutralino é uma partícula prevista pela chamada extensão supersimétrica (SUSY) do modelo padrão. A supersimetria pode unificar as forças eletrofraca e forte. A descoberta dos neutralinos por sua vez constituiria a primeira evidência empírica para a supersimetria além de explicar a natureza da matéria escura fria, consolidando o modelo de matéria escura fria de formação de estrutura [37]. A matéria bariônica, constituída de prótons e nêutrons, tem uma densidade dada por $\Omega_B^1 \approx 0.03$ (densidade de bárions) que é muito

¹O parâmetro Ω denota a razão entre a densidade de uma dada componente (bárions, radiação, matéria escura) e a densidade total do Universo.

pequena em relação à densidade de matéria do Universo $\Omega_B/\Omega_M \approx 0.1$, onde Ω_M é a densidade de matéria total do Universo, adotando o valor da constante de Hubble dado por $H_0=65\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ ($1\text{pc}=1\text{parsec}=3,086\times 10^{18}\text{cm}$). A densidade total do Universo seria $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, onde Ω_Λ representa a contribuição da energia de vácuo, ou melhor, a contribuição do termo cosmológico Λ [7].

Uma fonte extensa de informações sobre matéria escura são os estudos de galáxias espirais. Embora galáxias espirais exibam uma grande variedade de massas e luminosidades, até o começo da década de 80 não tinham estudos sistemáticos das suas propriedades rotacionais, que foram iniciados por Rubin, Ford e Thonnard (RTF) [32]. No trabalho [33], seus autores discutem sobre massas, luminosidades, e suas relações com as propriedades dinâmicas de galáxias Sc. Também são feitas comparações entre as propriedades de três tipos de galáxias espirais, Sa, Sb e Sc [34], onde os autores concluem que as formas das curvas de rotação de galáxias de diferentes morfologias são similares.

Curvas de rotação de galáxias Sc, como as apresentadas nas referências [32] e [33], mantêm valores aproximadamente constantes para as velocidades rotacionais, mesmo a grandes distâncias do núcleo galáctico, o que não é esperado. Segundo o trabalho [6], esse comportamento é devido à presença significativa de massa não luminosa.

Uma outra possibilidade para explicar a planitude das curvas de rotação é admitida pelo MOND (Modified Newtonian Dynamics). Segundo Milgrom, a evidência de matéria escura é apenas aparente, porque o que se evidencia diretamente é a discrepância na massa de galáxias e de aglomerados. A massa total não fornece gravidade suficiente para explicar as acelerações observadas em tais sistemas utilizando a Física padrão [23]. Se aderirmos à dinâmica padrão, a necessidade de matéria escura é a única solução que podemos conceber. Contudo, é possível que as leis da dinâmica comprovadas em laboratório e no sistema solar, possam simplesmente não serem aplicadas no domínio das galáxias. Dessa forma, pode-se abrir mão completamente da matéria escura se for feita uma modificação apropriada das leis da dinâmica dos parâmetros que são pertinentes aos sistemas galácticos. Na referência [16] são apresentadas implicações da teoria MOND na Relatividade Geral.

O MOND é guiado por dois princípios. O primeiro é que em grandes raios em torno

de uma massa M , a velocidade orbital, em uma órbita circular, torna-se independente do raio. O segundo é que esta velocidade rotacional assintoticamente depende apenas da massa total M . Este é, de acordo ao MOND, o fato básico a ser observado na relação de Tully-Fisher, pelo qual a velocidade rotacional típica, V , em uma galáxia tipo disco é fortemente relacionada com a luminosidade total da galáxia, L , na forma $L \propto V^b$. A potência b está entre 3-4, e depende da banda de comprimento de onda em que é medida L [23].

Apesar do argumento em [6], das curvas de rotação planas serem provas da existência de matéria escura, existem outras interpretações análogas a de Milgrom. No trabalho [27], Sanders ressalta que a planitude das curvas de rotação é apropriada para determinar os parâmetros livres do modelo de halo escuro: modelos que consistem em um disco luminoso mais um halo escuro apresentam, pelo menos, três parâmetros livres que podem ser utilizados para ajustar as curvas de rotação do modelo com as curvas observadas [24].

É argumentado no trabalho [30], que a planitude observada nas curvas de rotação de galáxias espirais não é uma evidência para existência de halos de matéria escura, mas, até certo ponto, um sinal de fracasso da teoria da Relatividade Geral. Uma sugestão de modificação da Relatividade Geral consiste na substituição do escalar de curvatura, no Lagrangiano da Teoria, por uma função não linear de R do tipo $f(R) = f_0 R^n$. É apresentada na referência [30] uma correção para o potencial Newtoniano, onde a expressão, no limite de baixas energias, para o potencial gravitacional gerado por uma fonte pontual é escrita como $\Phi(r) \propto r^{-1}[1 + (\frac{r}{r_c})^\beta]$, onde β é uma função de n e r_c uma escala de comprimento que depende das propriedades do sistema gravitante.

A proposta de potencial gravitacional modificado do presente trabalho é dada pelo acréscimo de um novo termo no potencial do tipo: $\Psi_c(r) = \alpha \ln\left(\frac{|\vec{x}' - \vec{x}|}{R_0}\right)$, onde α é uma constante real dimensional; R_0 é uma constante introduzida para manter o argumento do logaritmo adimensional. A forma da expressão para a correção foi inspirada em cordas cósmicas e na constância da velocidade circular gerada por um potencial logarítmico. O interesse em cordas cósmicas, vem de uma solução para o espaço-tempo esfericamente simétrico e estático com um boost do tensor momento-energia invariante e com uma

equação de estado constante apresentada na referência [13]; A expressão do potencial é da forma $\phi(r) \propto \frac{\ln(\lambda r)}{r}$, onde λ é uma constante.

O presente trabalho apresenta uma concepção similar a de [30], pois optamos por uma correção no potencial ao invés de assumirmos a DM como solução do problema da planitude das curvas de rotação de galáxias espirais. Utilizaremos um grupo de 9 galáxias extraído da referência [10]. Todas elas são galáxias de baixo brilho superficial (LSB - Low Surface Brightness), sendo que duas delas são galáxias anãs, NGC 3109 e DDO 154. Assim como em [30], estamos interessados em galáxias LSB pois, como argumenta os autores de [35], as galáxias LSB e anãs são dominadas por matéria escura. Se conseguirmos curvas de rotação tais quais a matéria escura seja irrelevante, teremos uma ótima evidência a favor da nossa teoria.

O potencial modificado apresentado por nós tem dois parâmetros livres: α , parâmetro relacionado à correção do potencial, e Σ_0 , densidade superficial de massa. Usamos neste trabalho uma distribuição de massa simplificada, tipo disco. Os valores numéricos de Σ_0 serão comparados com o limite dado pelas observações da referência [8], que estabelece, segundo [31], um valor máximo da densidade superficial estelar $< 100 M_\odot \text{pc}^{-2}$ para as galáxias LSB, onde M_\odot é a massa equivalente a uma massa solar. Apesar que, estimativas apresentadas no trabalho [3], indicam que os discos de galáxias LSB podem ser mais massivos do que se pensa atualmente.

Este trabalho se divide da seguinte maneira: No Capítulo 2 é feita uma rápida abordagem sobre morfologia galáctica, as transição entre os tipos de galáxias e alguns constituintes que as compõem, e ainda luminosidade, brilho superficial, a relação entre a luminosidade e a velocidade para galáxias elípticas e espirais. No Capítulo 3 revisa-se a teoria de potencial gravitacional Newtoniano, chegando-se à expressão da velocidade rotacional, que é uma das grandezas mais importante deste trabalho. São mencionados dois exemplos simples de distribuição de massa, a puntiforme e a derivada da lei de Potência. A um terceiro exemplo, o da distribuição de massa tipo disco, é dedicado um estudo mais aprofundado, no qual utiliza-se funções de Bessel. No Capítulo 4 calcula-se a velocidade rotacional para um potencial Newtoniano modificado aplicado a uma dis-

tribuição de massa tipo disco. Analisam-se as curvas das velocidades rotacionais tanto em uma, quanto em duas dimensões. No Capítulo 5 confrontam-se os resultados analíticos com dados observacionais. Usam-se probabilidades Bayesianas na análise estatística dos resultados. No Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais e no apêndice estão os dados das galáxias utilizadas no presente trabalho.

Capítulo 2

Aspectos Gerais de Galáxias

2.1 Introdução

Apesar de termos um amplo esboço da evolução estelar, não temos um desenho suficientemente claro da sequência de estágios que constitui a evolução galáctica. O Sol está localizado dentro de um tipo de galáxia (uma espiral), e somos capazes de observar parte dessa estrutura e o comportamento de alguns de seus constituintes individuais em detalhes. Infelizmente, apenas uma porção da nossa galáxia é visível por nós. Todavia, temos em nossa volta galáxias externas que completam nosso conhecimento de propriedades em grande escala. Observações da Galáxia e de outras galáxias espirais externas fornecem dados complementares sobre espirais em geral. Os constituintes das galáxias incluem as estrelas e o campo de radiação associados a elas, o meio interestelar, o campo magnético galáctico e os raios cósmicos. A quantidade relativa de cada um dos constituintes depende do tipo de galáxia e da região da galáxia.

2.2 Morfologia Galáctica

Galáxias podem ser encontradas em uma das quatro classes morfológicas gerais ou tipos de Hubble [26], baseadas na distribuição de luminosidade. As classes básicas são: Elípticas (E), Lenticulares (S0), Espirais (S) e Irregulares (I). Cerca de 1% das galáxias observadas não podem ser situadas em nenhuma dessas classes e são designadas como peculiares (P). Cada um dos tipos básicos de Hubble pode ser subdividido, como mostra

a Figura 2.1.

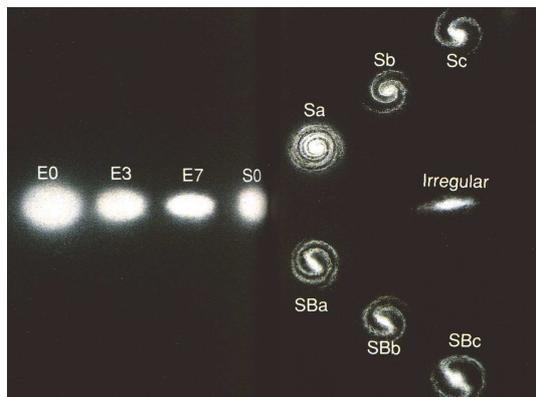


Figura 2.1: Classificação de Hubble.

Galáxias elípticas têm forma de sistema esférico achatado. Uma vez que elípticas não contêm um plano equatorial, suas orientações absolutas não são conhecidas. O que aparece nos dados observacionais é uma imagem projetada. É geralmente assumido que dois dos três eixos ortogonais das galáxias elípticas são iguais. Todavia, a maioria das galáxias elípticas apresenta uma estrutura triaxial. Ignoraremos esta possibilidade e assumiremos que todas elípticas são de fato esferóides achatados. Denotaremos os semi-eixos maior e menor do elipsóide projetado por a e b , respectivamente. Assim, o valor de n mais próximo de um número inteiro obtido por $n = 10(1 - b/a)$, descreve uma seqüência iniciada em (E0), sendo que, com o aumento de n aumenta-se também a elipticidade da galáxia. Na prática este esquema de classificação deve ser modificado, pois a elipticidade das galáxias não é estritamente constante com o raio: convencionalmente o valor designado corresponde ao máximo valor isofotal que é geralmente grande para isofota (curvas de brilho superficial constante) próximas do centro galáctico. Galáxias elípticas não mostram sinais de estrutura de disco, e exibem distribuições de luminosidade que variam suavemente em direção a uma região nuclear compacta. As elípticas mais achatadas têm a razão $b/a \approx 0.3$ e são denotadas por E7. No total são 8 subclasses En . Galáxias do tipo E0, Figura 2.2, são chamadas galáxias esféricas, mas lembrando que estas aparecem nas imagens como galáxias esféricas podendo ser qualquer uma das En vista de frente. Essa probabilidade pode ser estimada estatisticamente assumindo que todas elípticas são

aleatoriamente orientadas. Elípticas normais não mostram estruturas espirais aparentes.



Figura 2.2: Galáxia Elíptica M 89, tipo E0.

Para as galáxias lenticulares a razão $b/a \leq 0.3$ e as imagens desse tipo de galáxia mostram a existência de um plano equatorial normal ao eixo maior. Atualmente não há evidência de estrutura espiral. Todavia as distribuições de luminosidade observadas em galáxias espirais são similares às das lenticulares.



Figura 2.3: Galáxia Lenticular M 86, tipo S0.

Sistemas tendo um plano equatorial, porém sem estruturas espirais observadas, são chamadas Lenticulares. Quando olhamos próximo das bordas, elas parecem uma lente convexa fina contendo um núcleo e a lente é cercada por um envelope estendido. Lenticulares ordinárias são denotadas por S0, Figura 2.3. Imagens de algumas lenticulares

mostram uma estrutura formada por barra, que consiste de estrelas, muita poeira e gás embebidos no plano equatorial. Essas são lenticulares barradas, e são denominadas por SB0.



Figura 2.4: Galáxia Irregular NGC 6822.

Galáxias espirais apresentam um disco fino contendo poeira e gás. A estrutura espiral, ou braços, pode ser originada próximo ao núcleo (espirais ordinárias, denotadas por S) ou elas podem iniciar no fim de uma barra formada por uma concentração de estrelas, poeira e gás (espirais barradas denotadas por SB).



Figura 2.5: Galáxia Espiral M 101, tipo Sc.

Cada uma das duas famílias S e SB tem uma subdivisão adicional, os tipos a, b e c. A transição do tipo b para o tipo c, Figura 2.5, é caracterizada por um decréscimo proeminente do núcleo, e braços espirais bem menos enrolados. A estrutura espiral em

sistemas SB inicia-se nas extremidades da barra. Em sistemas, como galáxias SB0, a barra encontra-se no plano do disco e é concêntrica ao disco. Os tipos básicos de galáxias - E, S0, S e SB são ilustrados pelo diagrama bifurcado de Hubble, Figura 2.1.

Fotometrias detalhadas revelam mais estruturas que aquelas sugeridas pela classificação de Hubble, particularmente para lenticulares e espirais. Em algumas espirais ordinárias os braços aparecem “rastejando” diretamente para o núcleo; em outras eles se originam tangencialmente a um anel brilhante em volta do núcleo. Fenômeno similar ocorre em espirais barradas. Em NGC 1300, Figura 2.6, os braços arrastam-se pelo fim da barra, todavia em sistemas tais como NGC 2523, Figura 2.7, as barras terminam em um anel, do qual os braços parecem se originar.



Figura 2.6: Galáxia Espiral Barrada NGC 1300, tipo SBb.

Acredita-se que muitas galáxias originalmente não contêm estruturas reconhecíveis, e por isso são chamadas irregulares tendo uma fraca característica espiral. A grande Nuvem de Magalhães (LMC - Large Magellanic Cloud) contém fraca estrutura espiral e uma barra. A pequena Nuvem de Magalhães (SMC - Small Magellanic Cloud) é um protótipo de muitos sistemas irregulares, conhecidos como irregulares de Magalhães, que podem ser denotadas por IM ou IBM. A transição das espirais barradas para irregulares de Magalhães LMC é representada por SBM, e de S para IM é denotada por SM. O restante das irregulares pode ser classificado como irregulares ordinárias, IO. Finalmente, a transição de um tipo de Hubble para outro ($E \rightarrow S0$; $S0 \rightarrow S$; $S \rightarrow SB$, etc) é, em caso geral, regular e suave.

Esses esquemas de classificação são baseados, principalmente, na morfologia aparente das galáxias e refletem propriedades fundamentais que parecem percorrer, continuamente,

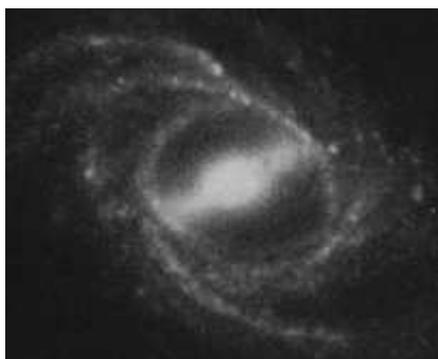


Figura 2.7: Galáxia Espiral Barrada NGC 2523, tipo SB(r).

de um tipo a outro de galáxia. Observações de galáxias são feitas através de estudos fotométricos da distribuição de luz emitida por radiação de hidrogênio neutro em 21cm, cálculo de massa por meio do teorema do virial ou pelo estudo detalhado da curva de rotação em espirais e pelo espectro integrado. Cada um deles fornece informações valiosas sobre estrutura, dinâmica e evolução galáctica.

Como foi mencionado no início deste capítulo, as estrelas e os campos de radiação associados a elas, o meio interestelar, o campo magnético galáctico e os raios cósmicos compõem as galáxias. A seguir, discorreremos sobre alguns constituintes das galáxias baseados na referência [20].

2.3 Meio Interestelar

Embora a maior parte da massa da Galáxia esteja concentrada em estrelas, o meio interestelar não é completamente vazio. Principalmente no disco da Galáxia, o meio interestelar contém *gás e poeira* distribuídos na forma de nuvens individuais, e também em um meio difuso. A densidade típica do meio interestelar é de um átomo de hidrogênio por centímetro cúbico e, aproximadamente, 100 grãos de poeira por quilômetro cúbico. O gás interestelar constitui, aproximadamente, 10% da massa da Via Láctea, ao passo que a poeira agrupa menos de 1% da massa de gás. Raios cósmicos, que são partículas altamente energéticas, estão misturadas com o gás e a poeira, e existe ainda um campo magnético galáctico, fraco ($\approx 10\mu\text{G}$, $\text{G}=\text{Gauss}$).

2.3.1 Gás interestelar

O gás interestelar é constituído, na maior parte, por hidrogênio neutro (HI), que não é luminoso. Mas, perto das estrelas muito quentes e massivas, o hidrogênio é ionizado pela radiação ultravioleta provinda das estrelas e brilha por fluorescência. Se existe suficiente hidrogênio ao redor dessas estrelas, ele será visível como uma nebulosa gasosa de emissão, brilhante, chamada região HII, ou nebulosa de emissão. Um exemplo desse tipo de nebulosa é a Nebulosa de Órion, que se encontra a 1500 anos-luz da Terra (1ano-luz $\approx 0,307\text{pc}$). O hidrogênio neutro emite uma linha espectral no comprimento de onda de 21cm, que é usada para mapear a distribuição desse gás e que teve um papel chave na determinação da estrutura espiral da Galáxia.

2.3.2 A poeira interestelar

A poeira interestelar é composta principalmente de grafite, silicatos e gelo de água, em grãos de vários tamanhos, mas muito menores ($\approx 1\mu\text{m}=10^{-6}\text{m}$) do que a poeira aqui na Terra. A poeira circundando estrelas reflete a luz formando uma *nebulosa de reflexão*, de cor azulada. O espectro dessas nebulosas é o mesmo da estrela que a ilumina.

As partículas de poeira, com tamanhos de 0,1 a 1 μm , são suficientemente pequenas para espalharem (desviar a direção, sem absorver) a luz de menor comprimento de onda (luz azul, $\lambda \leq 0,4\mu\text{m}$) mais eficientemente do que as de maior comprimento de onda (luz vermelha, $\lambda \geq 0,7\mu\text{m}$). De fato, fótons azuis são desviados cerca de 10 vezes mais eficientemente do que os fótons vermelhos. Quando um fóton é desviado, sua direção muda aleatoriamente. Dessa maneira, o espalhamento reduz o número de fótons azuis em relação ao número de fótons vermelhos do feixe de luz que vem em nossa direção. Como resultado, a poeira interestelar faz as estrelas parecerem mais vermelhas do que realmente são. Esse efeito, chamado avermelhamento interestelar, é similar ao que ocorre na atmosfera da Terra, onde as moléculas de oxigênio, de poluição e a poeira desviam preferencialmente a luz azul do Sol, tornando-o vermelho ao pôr-do-sol.

2.3.3 Moléculas interestelares

As primeiras *moléculas interestelares* foram descobertas em 1937-1938, na forma de *metilidina* CH, CH⁺ e cianogênio CN, aparentes nos espectros de algumas estrelas, mas causadas por absorção interestelar. Hidrogênio molecular H₂ foi descoberto no início dos anos 1970, junto com o monóxido de carbono CO. Muitos outros tipos de moléculas têm sido encontradas desde então, desde amônia NH₃, até as mais complexas como etanol C₂H₅OH.

Baseado principalmente nas observações de CO, nota-se que as moléculas estão concentradas em nuvens moleculares, com massas de poucas vezes até um milhão de massas solares, e se estendem de alguns até cerca de 600 anos-luz. As estrelas se formam nas partes mais densas destas nuvens moleculares. Embora o hidrogênio molecular produza linhas no ultravioleta, o gás e poeira existentes nas nuvens moleculares torna a extinção ultravioleta muito grande, dificultando a medida do H₂. Mas existem evidências de correlação entre a quantidade de H₂ e a de CO, que pode ser medido em linhas de emissão de rádio em 2,6mm e 1,3mm.

2.4 Raios Cósmicos

O físico austríaco Victor Franz Hess (1883-1964) descobriu, entre 1911 e 1912, que partículas carregadas, principalmente prótons, altamente energéticas, atingiam a Terra vindas do espaço e eram produzidas de alguma forma pelos processos mais energéticos no Universo, com energias trilhões de vezes maiores do que se pode obter em nossos laboratórios e mesmo muito maiores do que as estrelas podem gerar. Essas partículas foram chamadas de raios cósmicos. As partículas que constituem os ventos estelares, que dão origem às auroras na Terra, têm energia muito menor do que os raios cósmicos. A origem dos raios cósmicos ainda não é conhecida.

2.5 Populações Estelares

Walter Baade (1893-1960), estudando a galáxia Andrômeda, notou que podia distinguir claramente as estrelas azuis nos braços espirais da galáxia, e propôs o termo População I para estas estrelas dos braços, e População II para as estrelas vermelhas visíveis no núcleo da galáxia. Atualmente, utiliza-se essa nomenclatura mesmo para estrelas da nossa galáxia e sabemos que as estrelas de População I são estrelas jovens, como o Sol, com menos de 5 bilhões de anos, ricas em metais¹, isto é, com conteúdo metálico de cerca de 3%, enquanto que a População II corresponde a estrelas velhas, com cerca de 10 bilhões de anos, e pobres em metais, ou seja, com menos de 1% em metais. Existem as estrelas de População III que são, por definição, as primeiras estrelas formadas na galáxia.

2.6 Massas

A massa de uma galáxia tem um papel crucial, não apenas em sua evolução como sistemas individuais, mas na evolução do próprio universo.

A melhor maneira de medir a massa é a partir das velocidades das estrelas devido à atração gravitacional entre elas. Em galáxias elípticas, as velocidades medidas são velocidades médias, pois os movimentos das estrelas nesses sistemas têm componentes de mesma magnitude nas três direções, e todas seguem órbitas bastante elípticas.

As galáxias espirais têm grande parte das estrelas confinadas ao plano do disco, com órbitas quase circulares, e velocidades que dependem da distância ao centro ($v(R)$). Para uma galáxia que é vista com o disco inclinado, as estrelas e o gás de um lado estarão se movendo no sentido contrário ao do observador, causando deslocamento Doppler para o vermelho; o material do outro lado estará se movendo no sentido de se aproximar, e a luz vinda dele estará deslocando Doppler para o azul. As velocidades de rotação em cada ponto são obtidas medindo os deslocamentos Doppler das linhas espectrais.

¹A porcentagem de metal existente nas estrelas é dada pela metalicidade; que é definida como a razão entre ferro e hidrogênio na atmosfera de uma estrela comparada com a do Sol. Essa relação é expressa por: $[Fe/H] \equiv \log_{10} \left(\frac{N_{Fe}}{N_H} \right) - \log_{10} \left(\frac{N_{Fe}}{N_H} \right)_{\odot}$.

Tabela 2.1: Principais características dos diferentes tipos de galáxias.

Propriedade	Espirais	Elípticas	Irregulares
Massa (M_{\odot})	10^9 a 10^{12}	10^5 a 10^{13}	10^8 a 10^{11}
Diâmetro (10^3pc)	5-30	1-1000	1-10
Luminosidade (L_{\odot})	10^8 a 10^{11}	10^6 a 10^{12}	10^7 a 2×10^9
População estelar	velha e jovem	velha	velha e jovem
Tipo espectral	A a K	G a K	A a F
Gás	bastante	muito pouco	bastante
Poeira	bastante	muito pouca	varia
Cor	azulada no disco amarelada no bojo	amarelada	azulada
Estrelas mais velhas	10^{10} anos	10^{10} anos	10^{10} anos
Estrelas mais jovens	recentes	10^{10} anos	recentes

2.6.1 Determinação de massa em galáxias elípticas

As massas das galáxias elípticas podem ser determinadas a partir do *Teorema do Virial*, segundo o qual num sistema estacionário (cujas propriedades não variam no tempo), a soma da energia potencial gravitacional das partículas e o dobro de sua energia cinética, é nula, ou seja:

$$E_G + 2E_C = 0,$$

onde E_G é a energia potencial gravitacional e E_C é a energia cinética.

Podemos considerar uma galáxia como um sistema estacionário (pois ela não está nem se contraindo nem se expandindo), cujas partículas seriam as estrelas.

A energia cinética das estrelas na galáxia pode ser escrita como:

$$E_C = \frac{MV^2}{2}$$

onde M é a massa total da galáxia e V é a dispersão de velocidades das estrelas, medida pelo alargamento das linhas espectrais.

A energia potencial gravitacional é

$$E_G = -\frac{GM^2}{R}$$

onde R é um raio médio da galáxia que pode ser estimado a partir da distribuição de luz. Combinando as três equações anteriores achamos que

$$M^{elip} = \frac{V^2 R}{G}$$

Esse mesmo método pode ser usado também para calcular as massas de aglomerados de galáxias, assumindo que eles são estacionários. Nesse caso, considera-se cada galáxia como uma partícula do sistema. A energia cinética pode ser calculada pelos alargamentos das linhas espectrais, e a energia potencial gravitacional pela separação média das galáxias do aglomerado.

2.6.2 Determinação de massa em galáxias espirais

Em galáxias espirais, nas quais o movimento circular das estrelas no disco é dominante sobre o movimento desordenado das estrelas do bojo, a massa pode ser determinada através da *curva de rotação*, $v(R)$ x R , que é um gráfico da velocidade de rotação em função da distância galactocêntrica.

Assumindo que a maior parte da massa da galáxia está no bojo interno e que, portanto, o movimento rotacional das estrelas no disco é determinado pela massa do bojo, podemos determinar essa massa através da terceira lei de Kepler. Chamando $M(R)$ a massa interna ao raio R , temos que

$$M^{esp} = \frac{Rv(R)^2}{G}.$$

Nas partes externas de muitas espirais $V(R)$ não depende mais de R , ou seja, $v(R)$ permanece constante, de forma que, quanto maior o raio R , maior a massa $M(R)$ interna a ele. Como as partes externas das galáxias contêm menos matéria luminosa, a partir

de um certo valor de R a luminosidade não aumenta mais, mas de acordo com a curva de rotação a massa continua crescendo. Esse problema é conhecido como o *problema da matéria escura*.

2.7 A Relação entre Luminosidade e Velocidade para Galáxias Elípticas e Espirais

Sandra Moore Faber e Robert E. Jackson, em 1976, mostraram que a luminosidade das galáxias elípticas é proporcional à velocidade média (V) das estrelas elevada na quarta potência:

$$L \propto V^4.$$

R. Brent Tully e J. Richard Fisher encontraram uma relação para as espirais: galáxias mais luminosas têm, em média, maiores velocidades de rotação, significando que são galáxias mais massivas. A velocidade de rotação cresce com a luminosidade numa proporção dada por:

$$L \propto v^4.$$

A proporcionalidade entre a luminosidade e velocidade na quarta potência é chamada relação Faber-Jackson, no caso das elípticas, e relação de Tully-Fisher, no caso das espirais. Essas relações dependem da banda fotométrica considerada. Como a velocidade de rotação das espirais pode ser obtida de maneira relativamente fácil através de observações em 21cm, a relação de Tully-Fisher pode ser usada para estimar as distâncias de galáxias espirais remotas.

2.8 Luminosidade

A luminosidade de uma galáxia proporciona informações sobre a quantidade e tipo de estrelas nela presentes. A luminosidade total se refere ao fluxo integrado de toda a galáxia,

e é muito difícil de medir com precisão, pois as bordas das galáxias não são bem definidas, e se fundem com o brilho do céu. Em geral se mede o fluxo integrado dentro de uma área estabelecida, que pode ser um círculo de determinado raio, ou uma determinada isofota. Se a isofota for suficientemente fraca, a magnitude integrada assim obtida se aproxima bastante da magnitude total, e se a distância da galáxia for conhecida pode-se estimar sua magnitude total absoluta. Tipicamente, galáxias elípticas têm magnitudes totais absolutas, na banda V^2 , $-10 \leq M_V \leq -22$, espirais e lenticulares têm $-15 \leq M_V \leq -22$, e irregulares têm $-12 \leq M_V \leq -18$.

2.8.1 Brilho superficial

O brilho superficial é o fluxo por unidade de área que sai da galáxia. Na Terra, o medimos como fluxo por unidade de ângulo sólido que chega ao observador. Geralmente é representado pela letra I , e a magnitude superficial correspondente pela letra μ :

$$\mu = -2.5 \log I + \text{constante}.$$

O brilho superficial tem as mesmas dimensões de intensidade específica, e portanto não varia com a distância: o fluxo por unidade de área que sai da galáxia é igual ao fluxo por unidade de ângulo sólido que chega à Terra, independentemente da distância, pois se o fluxo diminui com o inverso do quadrado da distância, o ângulo sólido diminui seguindo a mesma lei, de maneira que a razão entre elas permanece constante. A distribuição de brilho superficial dá informações importantes sobre a estrutura interna da galáxia.

2.8.2 Distribuição de brilho superficial

A distribuição de brilho superficial mostra como varia o fluxo por unidade de área ao longo da galáxia. Geralmente ele é medido em uma determinada banda fotométrica (B, V, R, etc).

²A luz proveniente das estrelas pode ser observada em várias faixas de frequências do espectro eletromagnético, ou cores. No sistema padrão essas cores são representadas por UBV (U-*ultraviolet*, B-*blue* e V-*visual*) [2].

* Elípticas

As galáxias elípticas têm isofotas com formas de elipses as quais se tornam muito próximas entre si à medida que se aproximam do centro, refletindo a concentração da luz nessa direção.

Os perfis radiais geralmente podem ser descritos, pela lei de de Vaucouleurs, proposta em 1948 por Gérard de Vaucouleurs(1918-1995):

$$\log\left(\frac{I(r)}{I_e}\right) = -3,33\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/4} - 1\right].$$

Na expressão acima, que também é chamada lei $r^{1/4}$, r_e é o raio efetivo, que contém metade da luminosidade total da galáxia, e I_e é o brilho superficial isofota efetiva, correspondente ao raio r_e . Com essa definição, brilho superficial central é $I(r = 0) \approx 2140I_e$.

* Espirais

As galáxias espirais apresentam duas componentes, o bojo e o disco, com distribuições de brilho superficial diferentes. Os bojões são muito parecidos com galáxias elípticas, e seus perfis radiais geralmente têm a forma $\log \frac{I}{I_e} \propto r^{1/4}$ como essas galáxias.

Os discos geralmente têm um perfil radial exponencial:

$$I(r) = I_0 e^{-\frac{r}{r_d}} \tag{2.1}$$

onde I_0 é o brilho superficial central extrapolado, e r_d é o comprimento de escala do disco, que significa a distância entre o centro e o ponto do disco onde o brilho decai por um fator de $1/e$.

Capítulo 3

Teoria de Potencial

3.1 Cálculo de Potencial

Computar o potencial de uma coleção grande de estrelas seria, em princípio, simplesmente adicionar potenciais de massas pontuais de todas as estrelas juntas. Certamente não é praticável para 10^{11} estrelas em uma galáxia típica, e para a maior parte dos objetos é suficiente modelar o potencial sugerindo uma densidade suavizada, isto é, em todo lugar proporcional à densidade local de estrelas [17].

A nossa meta é calcular a força $\vec{F}(\vec{x})$ por unidade de massa na posição \vec{x} que é gerada pela atração gravitacional de uma distribuição de massa $\rho(\vec{x})$. De acordo com a teoria gravitacional Newtoniana, a força $\vec{F}(\vec{x})$ pode ser obtida pela soma de pequenas contribuições:

$$\delta\vec{F}(\vec{x}) = G \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \delta m(\vec{x}') = G \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') \delta^3 \vec{x}' \quad (3.1)$$

para a força total para cada pequeno elemento de volume $\delta^3 \vec{x}'$ localizada em \vec{x}' . Então,

$$\vec{F}(\vec{x}) = G \int \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}'. \quad (3.2)$$

Se definirmos o potencial gravitacional $\Phi(\vec{x}')$ por:

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d\vec{x}', \quad (3.3)$$

e sabendo que:

$$\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \right) = \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3}, \quad (3.4)$$

podemos escrever a força como,

$$\vec{F}(\vec{x}) = G \vec{\nabla}_x \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3 \vec{x}' = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}). \quad (3.5)$$

Vemos pela equação (3.5) que a força é dada pelo gradiente do potencial, como consequência a força gravitacional é conservativa. Podemos calcular a força, de maneira mais fácil, achando o potencial escalar $\Phi(\vec{x})$, e depois efetuando a aplicação do gradiente sobre o mesmo.

Tomando a divergência da equação (3.5) temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = G \int \vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}'. \quad (3.6)$$

Quando $\vec{x}' - \vec{x} \neq 0$, temos $\vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) = 0$. Por isso, qualquer contribuição para a integral na equação (3.6) deve vir do ponto $\vec{x}' = \vec{x}$, e devemos restringir o volume de integração para uma pequena esfera de raio h centrada neste ponto. Desde que tenhamos um h suficientemente pequeno, a densidade será quase constante dentro deste volume, e podemos tirar $\rho(\vec{x}')$ para fora da integral. O termo que sobra no integrando pode ser

rearranjado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) &= G\rho(\vec{x}) \int_{|\vec{x}' - \vec{x}| \leq h} \vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) d^3\vec{x}' \\
&= -G\rho(\vec{x}) \int_{|\vec{x}' - \vec{x}| \leq h} \vec{\nabla}'_x \cdot \left(\frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) d^3\vec{x}' \\
&= -G\rho(\vec{x}) \int_{|\vec{x}' - \vec{x}| = h} \frac{(\vec{x}' - \vec{x}) \cdot d^2\vec{S}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

No último passo usamos o teorema da divergência para converter a integral de volume em uma integral de superfície. Com $|\vec{x}' - \vec{x}| = h$ na esfera, temos $d^2\vec{S}' = (\vec{x}' - \vec{x})h d^2\Omega$, onde $d^2\Omega$ é um pequeno elemento de ângulo sólido. Então a equação (3.7) fica,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = -G\rho(\vec{x}) \int d^2\Omega = -4\pi G\rho(\vec{x}). \tag{3.8}$$

Assim, se substituirmos a equação (3.5) na anterior, teremos a conhecida equação de Poisson que relaciona o potencial Φ com a densidade ρ ,

$$\vec{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\rho. \tag{3.9}$$

Os potenciais gravitacionais Newtonianos de diferentes cascas esféricas adicionam-se linearmente. Assim podemos calcular o potencial gravitacional em \vec{r} gerado por uma distribuição de densidade arbitrária com simetria esférica $\rho(\vec{r}')$ em duas partes pela adição das contribuições para o potencial produzido por cascas (i) $r' < r$, e (ii) $r' > r$. Neste sentido obtemos,

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r')r' dr' \right]. \tag{3.10}$$

Para uma distribuição de densidade esférica $\rho(\vec{r}')$ de uma massa teste unitária de raio r , a atração gravitacional é inteiramente determinada pela massa no interior de r :

$$\vec{F}(r) = -G \frac{M(r)}{r^2} \hat{e}_r, \tag{3.11}$$

onde \hat{e}_r é um vetor unitário com sentido positivo do centro da distribuição para fora dela e $M(r)$ é,

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (3.12)$$

Uma propriedade muito importante de uma distribuição de massa é sua velocidade circular, $v_c(r)$. Definida como sendo a velocidade de uma partícula teste em uma órbita circular de raio r , e é dada por,

$$v_c^2 = r \frac{d\Phi}{dr} = G \frac{M(r)}{r}. \quad (3.13)$$

Com a equação acima podemos estimar a massa de galáxias, aglomerados e distribuição de gases, entre outras.

Analisaremos dois casos simples aplicando a equação (3.13) e traçaremos seus respectivos gráficos da velocidade circular. São eles:

1. massa puntiforme;
2. distribuição de massa dada pela lei de potência.

O potencial gravitacional e a velocidade circular para uma massa puntiforme são dados por:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (3.14)$$

Sua curva de rotação é mostrada na Figura 3.1.

Para a lei de Potência a expressão do perfil de densidade é dada por:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^a, \quad (3.15)$$

onde $3 > a > 2$. Para valores de $a < 3$ a massa em função de r diverge para grandes raios, e quando $a > 2$ a diferença de potencial entre um ponto em r e outro no infinito, é finito.

Aplicando a equação de Poisson em (3.15) para achar a expressão do potencial e depois

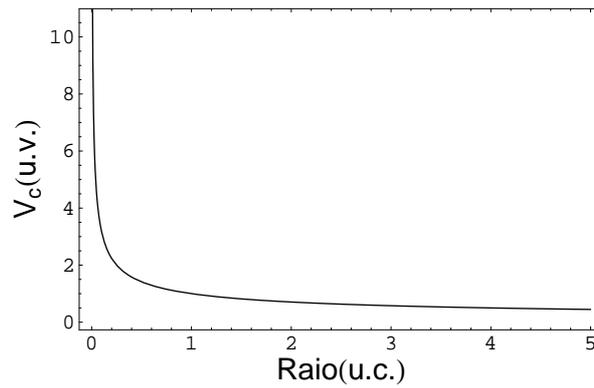


Figura 3.1: Curva da velocidade circular para uma massa puntiforme, geralmente denominada de curva Kepleriana.

substituindo em (3.13), temos

$$v_c^2 = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^a}{3-a} r^{2-a}. \quad (3.16)$$

No trabalho [18] testou-se valores de a , entre eles $a=1.9$ que proporciona uma curva da velocidade circular semelhante às curvas observadas em galáxias espirais. Aqui utilizaremos dois valores para a , 2.5 e 1.9. Podemos notar, Figura 3.2, que para o valor 2.5 o gráfico da velocidade circular é similar o da curva Kepleriana, enquanto que para o valor de 1.9, como já dissemos, a forma se assemelha às de curvas de rotação observadas em galáxias espirais.

Existem outras distribuições de massa que representam melhor galáxias espirais, como a distribuição de massa tipo disco que será estudada na próxima seção mais enfaticamente.

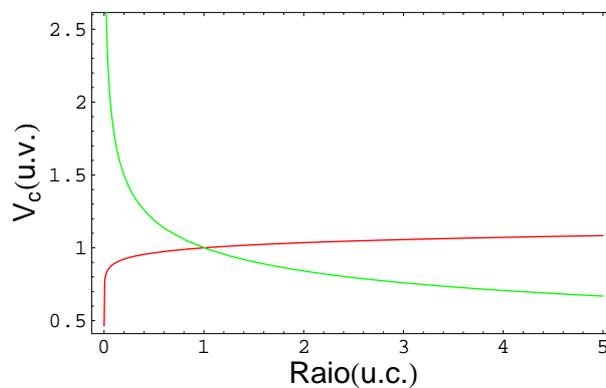


Figura 3.2: Curva da velocidade circular para lei de Potência, com $a = 2.5$, em verde, e $a = 1.9$, em vermelho.

3.2 Cálculo de Potencial de uma Distribuição de Massa Tipo Disco

As galáxias espirais com bojo mais proeminentes têm as maiores razões de luminosidade entre o bojo e o disco dadas por, $L_{bojo}/L_{disco} \approx 0.3$, enquanto galáxias Sc têm as menores razões de luminosidade $L_{bojo}/L_{disco} \approx 0.05$ [2]. Assim, a maior parte da luz emitida por uma galáxia típica espiral vem de um disco fino. Se a massa de uma galáxia é igualmente concentrada dentro de um disco, é uma questão que pode apenas ser resolvida por um estudo dinâmico. Porém, podemos antecipar que uma fração substancial da massa luminosa da galáxia está concentrada no disco e é, portanto, útil calcular campo gravitacional gerado por um disco idealizado de espessura nula [17].

Dessa forma, é muito importante o cálculo do potencial gravitacional de galáxias devido ao disco. Podemos calcular o potencial gravitacional de um disco através de algumas técnicas, como por exemplo: Integrais Elípticas, Esferóide Aplanado ou Funções de Bessel. A técnica que utilizaremos aqui para realizar o cálculo de potencial gerado por um disco, será a das Funções de Bessel, pelo fato da teoria das funções de Bessel ser bem conhecida e por maior simplicidade no desenvolvimento das contas.

Consideraremos um disco infinitamente fino e de simetria axial. Uma expressão alternativa para o potencial gravitacional, $\Phi(R, z)$, foi dada por Toomre (1962), resolvendo a equação de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ sujeita às condições de contorno apropriadas no disco e no infinito. Em coordenadas cilíndricas a equação de Laplace fica:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0. \quad (3.17)$$

Aplicando o método de separação de variáveis, escrevendo $\Phi(R, Z) = J(R)Z(z)$ e fazendo algumas considerações a respeito das condições de contorno, temos:

$$\frac{1}{J(R)R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dJ}{dR} \right) = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 \quad (3.18)$$

onde k é um número arbitrário real ou complexo. Assim,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dJ}{dR} \right) + k^2 J(R) = 0. \quad (3.20)$$

A equação (3.19) pode ser imediatamente integrada,

$$Z(z) = S \exp(\pm kz), \quad (3.21)$$

onde S é uma constante. A equação (3.20) é simplificada se fizermos a substituição $u = kR$,

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left(u \frac{dJ}{du} \right) + J(u) = 0. \quad (3.22)$$

A solução da equação (3.22) é de interesse, pois permanece finita em $u = 0$ e vai a zero para valores grandes de u . Essa solução é comumente escrita como $J_0(u) = J_0(kR)$ e é chamada de função cilíndrica de Bessel de ordem zero. Utilizando esses resultados, temos que as funções

$$\Phi_{\pm}(R, z) = \exp(\pm kz) J_0(kR) \quad (3.23)$$

são soluções de $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$.

Consideremos agora a função:

$$\Phi_k(R, z) = \exp(-k|z|) J_0(kR), \quad (3.24)$$

onde k é real e positiva. $\Phi_k \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$, e além disso $\Phi_k \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ e $J_0(u) \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow \infty$. Assim Φ_k satisfaz todas as condições requeridas pelo potencial gerado por uma distribuição de densidade isolada: Φ_k é solução $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$ tanto para $z > 0$

como para $z < 0$. Encontramos uma dificuldade em $z = 0$, pois o gradiente sofre uma descontinuidade, não satisfazendo a equação de Laplace. Todavia, podemos contornar este problema utilizando o teorema de Gauss para avaliar a densidade superficial $\Sigma_k(R)$, da fina camada de distribuição de densidade, que produz esta descontinuidade. Se integrarmos ambos os lados da equação de Poisson sobre um volume arbitrário contendo uma massa M , e então aplicarmos o teorema da divergência, obteremos

$$\int \vec{\nabla}^2 \Phi d^3 \vec{x} = \int \vec{\nabla} \Phi \cdot d^2 \vec{S} = 4\pi G \int \rho d^3 \vec{x} = 4\pi G M. \quad (3.25)$$

$$\int \vec{\nabla} \Phi \cdot d^2 \vec{S} = \int \left(\frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z \rightarrow +} - \frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z \rightarrow -} \right) \vec{k} \cdot \vec{k} dS = 4\pi G \int \rho dS dz = 4\pi G \int \Sigma(R) dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z \rightarrow +0} - \frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z \rightarrow -0} = -kJ_0(kR) - kJ_0(kR) = 4\pi G \Sigma(R),$$

ou seja,

$$\Sigma_k(R) = \frac{-kJ_0(kR)}{2\pi G}, \quad (3.26)$$

que representa a densidade superficial. Agora utilizaremos as equações (3.21) e (3.24) para achar o potencial gerado por um disco de densidade superficial arbitrária $\Sigma(R)$. Se pudermos achar uma função $S(k)$, tal que:

$$\Sigma(R) = \int_0^\infty S(k) \Sigma_k(R) dk = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty k J_0(kR) S(k) dk, \quad (3.27)$$

então teremos

$$\Phi(R, z) = \int_0^\infty S(k) \Phi_k(R, z) dk = \int_0^\infty S(k) J_0(kR) e^{-k|z|} dk. \quad (3.28)$$

A equação (3.28) mostra que $S(R)$ é a transformada de Hankel de $(-2\pi G \Sigma)$, ver 1C-47b [17]. Transformadas de Hankel têm propriedades que são muito similares às familiares

transformadas de Fourier. Em particular, elas podem ser invertidas como mostram as equações abaixo,

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^{\infty} f(r) J_{\nu}(kr) r dr \\ f(r) &= \int_0^{\infty} g(k) J_{\nu}(kr) k dk, \end{aligned} \quad (3.29)$$

assim, podemos escrever $S(R)$ como

$$S(k) = -2\pi G \int_0^{\infty} J_0(kR) \Sigma(R) R dR. \quad (3.30)$$

Se substituirmos a equação (3.30) em (3.28), obteremos finalmente o potencial dado por:

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \int_0^{\infty} dk e^{-k|z|} J_0(kR) \int_0^{\infty} \Sigma(R') J_0(kR') R' dR'. \quad (3.31)$$

Como já mencionamos anteriormente, a velocidade circular $v_c(R)$ é uma quantidade em que temos um interesse particular. Fazendo $z = 0$ em (3.28), diferenciando ambos os lados e usando a identidade $dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$, obtemos,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \int_0^{\infty} S(k) \frac{\partial J_0(kR)}{\partial R} dk = - \int_0^{\infty} S(k) J_1(kR) k dk \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow v_c^2(R) = R \left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{z=0} = -R \int_0^{\infty} S(k) J_1(kR) k dk. \quad (3.33)$$

Apesar de termos chegado na equação (3.33), ainda falta conhecermos a função distribuição $S(k)$, que por sua vez depende da forma da densidade superficial $\Sigma(R)$. Para resolvermos este problema utilizaremos o modelo do disco exponencial $\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d}$ dado por Freeman (1970), onde R_d é o comprimento de escala do disco. Dessa forma, temos que,

$$S(k) = -2\pi G \int_0^{\infty} J_0(kR) \Sigma_0 e^{-R/R_d} R dR. \quad (3.34)$$

Para resolver a integral em (3.34) utilizaremos a equação 6.623.2 de [15], ou seja,

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau x} J_{\nu}(\beta x) x^{\nu+1} dx = \frac{2\tau(2\beta)^{\nu} \Gamma(\nu + 3/2)}{\sqrt{\pi}(\tau^2 + \beta^2)^{\nu+3/2}} \quad (3.35)$$

e além disso,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(1 + 1/2) = 1/2\Gamma(1/2) = (1/2)\sqrt{\pi}.$$

Fazendo $\tau = 1/R_d$, $\nu = 0$ e $\beta = k$, encontramos

$$\int_0^{\infty} e^{-x/R_d} J_0(kx) x dx = \frac{R_d^2}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow S(k) = \frac{-2\pi G \Sigma_0 R_d^2}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}}. \quad (3.36)$$

A equação (3.36) exibe a forma de $S(k)$ para um disco exponencial; substituindo-a em (3.31) a expressão para o potencial fica:

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \Sigma_0 R_d^2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(kR) e^{-k|z|} dk}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}}, \quad (3.37)$$

em $z = 0$,

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G \Sigma_0 R_d^2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(kR) dk}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}}. \quad (3.38)$$

Até aqui desenvolvemos os cálculos seguindo algumas sugestões indicadas por [17].

Para solucionar a equação (3.38) sugestões dadas em [19] foram importantes. Em primeiro lugar fizemos $y \equiv R/2R_d$ e substituímos em (3.38),

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G \Sigma_0 R_d^2 (2y)^3 \int_0^{\infty} \frac{J_0(kR) dk}{[4y^2 + (kR)^2]^{3/2}}. \quad (3.39)$$

Com o auxílio da referência [12], página 441, temos:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(u)du}{[u^2 + (2z)^2]^{3/2}} = \frac{I_0K_1}{2z}. \quad (3.40)$$

Fazendo $u = kR \Rightarrow du = Rdk$ e aplicando na integral em (3.39), achamos

$$\frac{1}{R} \int_0^{\infty} \frac{J_0(u)du}{[u^2 + (2y)^2]^{3/2}} = \frac{I_0K_1}{2yR}, \quad (3.41)$$

então, chega-se a

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G\Sigma_0 R I_0 K_1, \quad (3.42)$$

ou ainda, pela fórmula 8.477.2, $I_{\nu+1}K_{\nu} + I_{\nu}K_{\nu+1} = 1/z$, dada por Gradshteyn e Ryzhik,

$$\Phi(R, 0) = -\pi G\Sigma_0 R (I_0 K_1 - I_1 K_0 + 2R_d/R). \quad (3.43)$$

Derivando a equação anterior em termos de y encontramos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y, 0) = -2\pi G\Sigma_0 R_d [I_0 K_1 - I_1 K_0 + I'_0 K_1 + I'_0 K'_1 - I'_1 K_0 - I_1 K'_0]. \quad (3.44)$$

Mas,

$$\begin{aligned} I'_1 &= I_0 - \frac{I_1}{y} & I'_0 &= I_1 \\ K'_1 &= -K_0 - \frac{K_1}{y} & K'_0 &= -K_1, \end{aligned}$$

de maneira que podemos escrever,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y, 0) = -4\pi G\Sigma_0 R_d y [I_1 K_1 - I_0 K_0]. \quad (3.45)$$

Para chegar ao resultado da velocidade circular quadrática correspondente ao da refe-

rência [17], voltaremos à variável R , observando que:

$$\frac{\partial\Phi(y, 0)}{\partial y} = \frac{\partial\Phi(R, 0)}{\partial R} 2R_d.$$

Assim,

$$v_c^2 = \frac{\pi G \Sigma_0 R^2}{R_d} \left[I_0 \left(\frac{R}{2R_d} \right) K_0 \left(\frac{R}{2R_d} \right) - I_1 \left(\frac{R}{2R_d} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_d} \right) \right]. \quad (3.46)$$

A equação (3.46) é justamente a expressão da velocidade circular quadrática de uma distribuição de massa dada por um disco exponencial. Na referência [17] são traçadas três curvas de rotação dadas por: uma distribuição de massa tipo disco exponencial, uma distribuição esférica e uma massa pontual, utilizando-se para os três casos a massa de um disco exponencial contida no interior de um raio R . Os autores concluem que a velocidade circular dada pelo disco exponencial tem um pico que supera em quase 15% o da distribuição esférica e, além disso, decresce mais suavemente com o aumento do raio.

Assim, com a utilização de um potencial Newtoniano dado por uma distribuição de massa tipo disco, tem-se a possibilidade de diminuir a presença de matéria escura nas curvas de rotação de galáxias.

O uso do potencial modificado aplicado a uma distribuição de massa tipo disco tem o propósito de reduzir mais ainda a necessidade de se ter matéria escura para explicar o comportamento das curvas de rotação.

Capítulo 4

Potencial Newtoniano Modificado para uma Distribuição de Massa Tipo Disco

4.1 Cálculo de Potencial Modificado Para o Disco

Até aqui estudamos o potencial dado pela teoria Newtoniana para o disco. Nesse capítulo iremos introduzir uma mudança no potencial gravitacional Newtoniano, sendo que o potencial gravitacional será constituído de uma parte Newtoniana mais uma parte de correção.

O procedimento para realizar o cálculo do potencial modificado será similar ao utilizado no caso Newtoniano. A forma do potencial é dado por:

$$\Phi(R, z) = \Phi_N + \Phi_c = \Phi_N + \int_0^\infty (-G)\Sigma(R')R'dR' \int_0^{2\pi} \Psi_c(|\vec{x} - \vec{x}'|) d\phi'. \quad (4.1)$$

Aqui o termo Φ_N é o potencial Newtoniano e o termo Φ_c é a correção no potencial. A forma do termo de correção apresenta, para cada ponto do disco, uma dependência com o módulo da distância dada por,

$$\Psi_c(R, z) = \alpha \ln \left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{R_0} \right), \quad (4.2)$$

onde α é uma constante real e dimensional. R_0 é uma constante introduzida para manter o argumento do logaritmo adimensional, sem ter maiores implicações nos cálculos.

Temos um particular interesse nessa forma por dois motivos: a curva da velocidade

circular dada por ela é constante [$v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = r \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} = \text{constante}$] e pela possibilidade de conexão com teoria de cordas cósmicas [13], pois uma das soluções dadas para o potencial tem a forma: $\phi(r) \propto \frac{\ln(\lambda r)}{r}$, onde λ é uma constante.

Um dos conceitos mais importantes em teoria moderna de partículas é o de quebra espontânea de simetria (SSB-spontaneous symmetry breaking). A idéia principal é a de que existem simetrias na Natureza que não se manifestam em estruturas de vácuo, e elas parecem representar um papel crucial na unificação das forças. De particular interesse para cosmologia é a esperança teórica que em altas temperaturas, as simetrias que hoje são quebradas espontaneamente sejam restauradas, e que durante a evolução do Universo existem transições de fases, muitas talvez, associadas com quebras espontâneas das simetrias de calibre. Além disso, a estrutura de vácuo em muitas quebras espontâneas das teorias de calibre é muito rica: configurações topologicamente estáveis de campos de calibre e Higgs existem como domínio - paredes, cordas cósmicas e monopólos [9].

A perspectiva de conexão do nosso trabalho com a teoria de cordas cósmicas foi motivada e é alicerçada em uma das possíveis soluções para o espaço-tempo esfericamente simétrico e estático com um boost do tensor momento-energia invariante e com uma equação de estado constante apresentada no trabalho [13]. E essa solução tem, justamente, uma forma logarítmica.

Após essa sucinta explanação, procederemos com os cálculos para o potencial gravitacional modificado ou potencial gravitacional corrigido.

Para achar o potencial gravitacional corrigido, $\Phi_c(R, z)$, faremos:

$$\begin{aligned} \Phi_c(R, z) &= \int_0^\infty (-G)\Sigma(R')R'dR' \int_0^{2\pi} \Psi_c(|\vec{x} - \vec{x}'|)d\phi' \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_c(R, z) &= \Phi_0 - \alpha G \int_0^\infty \Sigma(R')R'dR' \int_0^{2\pi} \ln|\vec{x} - \vec{x}'| d\phi', \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $\Phi_0 = 2\pi\alpha G \ln(R_0) \int_0^\infty \Sigma(R')dR'$, que será eliminado dos cálculos quando derivarmos o potencial em relação ao raio R .

Analisando a Figura 4.1 vemos que:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \left| \vec{R} - \vec{R}' \right| = \left\{ [(R + R')^2 + z^2] \cdot [1 - \eta^2 \cos^2(\phi'/2)] \right\}^{1/2}, \quad (4.4)$$

onde

$$\eta^2 \equiv \frac{4RR'}{[(R + R')^2 + z^2]}.$$

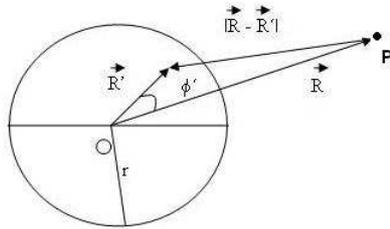


Figura 4.1: Sistemas de coordenadas cilíndricas, $z = 0$.

Podemos escrever o segundo integrando da equação (4.3), como:

$$\ln |\vec{x} - \vec{x}'| = \ln [(R + R')^2 + z^2]^{1/2} + \ln [1 - \eta^2 \cos^2(\phi'/2)]^{1/2}. \quad (4.5)$$

Em $z = 0$ tem-se

$$\ln |\vec{x} - \vec{x}'| = \ln [R + R'] + \ln [1 - \eta'^2 \cos^2(\phi'/2)]^{1/2}, \quad (4.6)$$

onde

$$\eta'^2 = \frac{4RR'}{(R + R')^2}.$$

Substituindo o resultado encontrado em (4.6) na equação (4.3), a expressão do potencial

fica sendo,

$$\begin{aligned} \Phi_c(R, 0) = & \Phi_0 - \alpha G \int_0^\infty \Sigma(R') R' dR' \int_0^{2\pi} \ln [R + R'] d\phi' - \\ & - \alpha G \int_0^\infty \Sigma(R') R' dR' \int_0^{2\pi} \ln \left[1 - \eta'^2 \cos^2(\phi'/2) \right]^{1/2} d\phi'. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para resolvermos a expressão (4.7), calcularemos as seguintes integrais,

$$\Phi_{c1}(R, 0) = -2\pi\alpha G \int_0^\infty \Sigma(R') R' \ln [R + R'] dR' \quad (4.8)$$

e

$$\Phi_{c2}(R, 0) = -\alpha G \int_0^\infty \Sigma(R') R' dR' \int_0^{2\pi} \ln \left[1 - \eta'^2 \cos^2(\phi'/2) \right]^{1/2} d\phi'. \quad (4.9)$$

A integral em ϕ' pode ser resolvida usando a fórmula 4.226.2 dada por [15], ou seja,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + a \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + a \cos^2 x) dx = \pi \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + a}}{2} \right],$$

então, fazendo $a = -\eta'^2$, $\phi'/2 = x$ e $d\phi' = 2dx$ no integrando em Φ_{c2} , temos

$$\int_0^{2\pi} \ln \left[1 - \eta'^2 \cos^2(\phi'/2) \right]^{1/2} d\phi' = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(1 + a \cos^2 x) dx = 2\pi \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \eta'^2}}{2} \right]. \quad (4.10)$$

Substituindo o valor de η'^2 a expressão (4.10) ficamos com

$$\begin{aligned} 2\pi \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \eta'^2}}{2} \right] &= 2\pi \ln \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{R'^2 + R^2 + 2RR' - 4RR'}{(R+R')^2}}}{2} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\pi \ln \left[\frac{1 + \frac{\sqrt{(R'-R)^2}}{(R'+R)}}{2} \right] &= 2\pi \ln \left[\frac{R + R' + |R' - R|}{2(R + R')} \right] = \\ &= \pi \ln \left[\frac{(R + R' + |R' - R|)^2}{4(R + R')^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como estamos trabalhando com funções modulares, lembramos que:

$$|R - R'| = R - R', R' < R$$

$$|R - R'| = R' - R, R' > R.$$

Somando as integrais,

$$\begin{aligned} \Phi_{c1} + \Phi_{c2} &= -\pi\alpha G \int_0^\infty \Sigma(R') R' \left(2 \ln(R + R') + \ln \left[\frac{(R + R' + |R' - R|)^2}{4(R + R')^2} \right] \right) dR' \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_{c1} + \Phi_{c2} &= -\pi\alpha G \int_0^\infty \Sigma(R') R' \left(\ln \left[\frac{(R + R' + |R' - R|)^2}{4} \right] \right) dR'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vamos agora separar o intervalo de integração de zero até R e de R até o infinito; além disso, utilizaremos o modelo do disco exponencial, de maneira que:

$$\begin{aligned} \Phi(R, 0) &= \Phi_0 - \pi G \alpha \Sigma_0 \int_0^R e^{-R'/R_d} R' \ln(R^2) dR' - \\ &\quad - \pi G \alpha \Sigma_0 \int_R^\infty e^{-R'/R_d} R' \ln(R'^2) dR'. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como na velocidade circular quadrática dada por (3.13), acharemos a derivada em R de (4.13). Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} &= -2\pi G \alpha \Sigma_0 \left\{ e^{-R/R_d} R \ln(R) - e^{-R/R_d} R \ln(R) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \int_0^R e^{-R'/R_d} R' dR' \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} &= -\frac{2\pi G \alpha \Sigma_0}{R} \int_0^R e^{-R'/R_d} R' dR'. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para resolver a integral em (4.14), faremos $x = R'/R_d$,

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{-R'/R_d} R' dR' &= R_d^2 \int_0^{R/R_d} e^{-x} x dx \Rightarrow \\
\Rightarrow -R_d^2 \int_0^{R/R_d} \frac{d}{dx} e^{-x} x dx &= -R_d^2 e^{-x} x \Big|_0^{R/R_d} + R_d^2 \int_0^{R/R_d} e^{-x} dx \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_0^R e^{-R'/R_d} R' dR' &= -R_d^2 e^{-R/R_d} \frac{R}{R_d} - R_d^2 R^{-R/R_d} + R_d^2 = \\
&= -R_d e^{-R/R_d} (R + R_d) + R_d^2. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Dessa maneira, a equação (4.14) toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} = \frac{2\pi G \alpha \Sigma_0}{R} [R_d e^{-R/R_d} (R + R_d) - R_d^2]. \tag{4.16}$$

Então, a velocidade quadrática circular para a correção, $v_{c,c}^2$, será:

$$v_{c,c}^2 = 2\pi G \alpha \Sigma_0 R_d [e^{-R/R_d} (R + R_d) - R_d]. \tag{4.17}$$

É importante notar que os valores de α são preferencialmente negativos. Para α igual a zero, a velocidade circular total será dada apenas pela componente Newtoniana.

Sendo o potencial gravitacional uma grandeza escalar, a soma de dois ou mais potenciais é feita algebricamente,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots \tag{4.18}$$

logo,

$$r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = r \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} + \dots \right)$$

de modo que podemos escrever,

$$v_c^2 = v_{c,1}^2 + v_{c,2}^2 + v_{c,3}^2 + \dots \quad (4.19)$$

De maneira que a expressão para velocidade circular quadrática total será a soma entre as velocidades ciculares quadráticas Newtoniana, $v_{c,N}^2$, e a do termo de correção, $v_{c,c}^2$:

$$v_c^2 = v_{c,N}^2 + v_{c,c}^2 = \frac{\pi G \Sigma_0 R^2}{R_d} [I_0 K_0 - I_1 K_1] + 2\pi G \alpha \Sigma_0 R_d [e^{-R/R_d} (R + R_d) - R_d]. \quad (4.20)$$

A expressão (4.20) é a equação mais importante do nosso trabalho. Com ela podemos comprovar se a estrutura do potencial modificado, introduzido por nós, está de acordo com as curvas de rotação de galáxias tipo disco.

Analisando a equação (4.20), vemos que existem três parâmetros a serem determinados: α , Σ_0 e R_d . Σ_0 e R_d expressam características das galáxias, enquanto o α está ligado à correção no potencial gravitacional Newtoniano. Os parâmetros α e Σ_0 são os parâmetros livres da nossa teoria: o α pela liberdade do termo de correção e o Σ_0 pelo fato de depender da razão massa-luminosidade das galáxias [30]. Conclui-se também, através de uma análise dimensional, que o parâmetro α tem unidade do inverso do comprimento.

Discorreremos sobre os parâmetros livres na próxima seção.

4.2 Análise das Curvas das Velocidades Circulares Modificadas Variando com o Raio

A distribuição de brilho superficial em galáxias tipo disco obedece a uma lei exponencial (Freeman 1970). Para a escala de comprimento de disco assumiremos alguns valores no sentido de produzirmos galáxias hipotéticas; assim teremos como avaliar o comportamento das curvas de rotação geradas por elas. Tomaremos os seguintes valores para a escala de comprimento do disco: $R_d=6.0, 5.0, 4.3, 3.8, 3.3$ e 3.0 .

Vamos aplicar a raiz quadrada à equação (4.20) e normalizá-la fazendo o fator $\sqrt{\frac{\pi G \Sigma_0}{R_d}}=1$. A normalização é feita no sentido de diminuir o número de variáveis da equação, assim

poderemos traçar curvas de rotação hipotéticas. Como queremos saber de que maneira a velocidade circular varia com o raio R , consideraremos α como uma constante e atribuiremos dois valores ao mesmo. A escolha destes valores é justificada nos parágrafos abaixo. Assim, variando apenas o valor de R , podemos ver como se comporta a velocidade circular.

Então, a velocidade circular normalizada, $V_{c,norm}$, é dada por:

$$V_{c,norm} = \left\{ R^2 [I_0 K_0 - I_1 K_1] + 2\alpha R_d^2 \{ e^{-R/R_d} (R + R_d) - R_d \} \right\}^{1/2}. \quad (4.21)$$

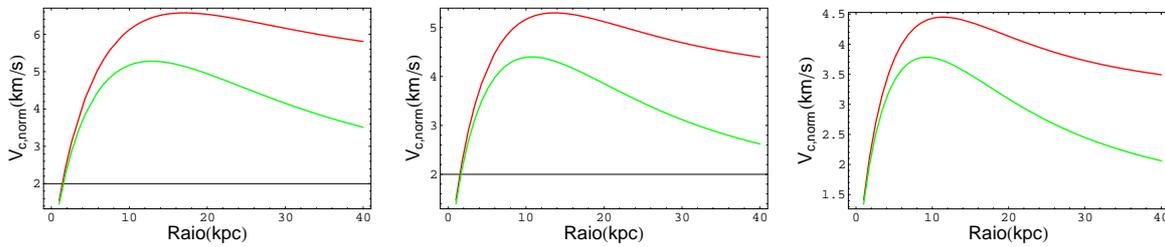


Figura 4.2: Curvas de rotação para $R_d=6.0$ kpc, $R_d=5.0$ kpc e $R_d=4.3$ kpc, respectivamente, e $\alpha = -0.05$ kpc $^{-1}$. Geradas por potenciais Newtoniano, em verde, e modificado, em vermelho.

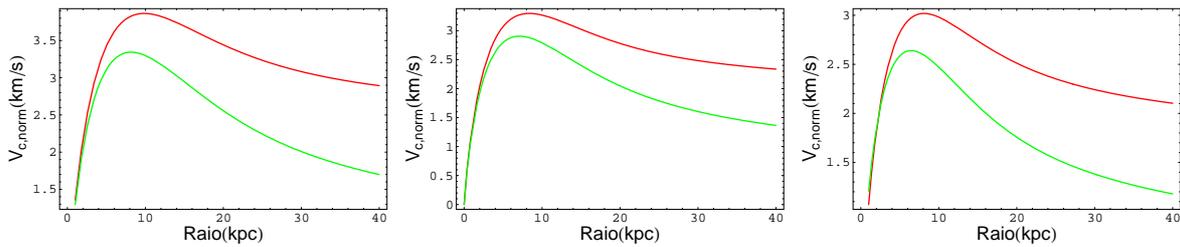


Figura 4.3: Curvas de rotação para $R_d = 3.8$ kpc, $R_d = 3.3$ kpc e $R_d = 3.0$ kpc, respectivamente, e $\alpha = -0.05$ kpc $^{-1}$. Geradas por potenciais Newtoniano, em verde, e modificado, em vermelho.

Podemos notar, nas Figuras 4.2 e 4.3, que os gráficos gerados pelas equações da velocidade circular modificada têm amplitudes maiores que os gráficos gerados pelo potencial gravitacional Newtoniano para um disco fino, com $\alpha = -0.05$ kpc $^{-1}$. Os gráficos mostram que a equação modificada para as curvas de rotação apresentam um comportamento que cumpre o objetivo que buscamos: obter curvas com amplitudes maiores que as ampli-

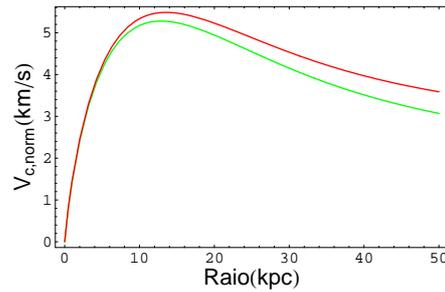


Figura 4.4: Curvas de rotação para $R_d=3.0\text{kpc}$ e $\alpha = -0.008\text{kpc}^{-1}$. Geradas por potenciais Newtoniano, em verde, e modificado, em vermelho.

tudes das curvas Newtonianas e com um decréscimo mais suave das amplitudes com o aumento do raio. Pois dessa maneira, não haverá necessidade de adicionar matéria escura na composição da massa de galáxias tipo disco.

Todavia, podemos observar na Figura 4.4 que, para $\alpha = -0.008\text{kpc}^{-1}$, a curva da velocidade circular modificada se aproxima muito da curva Newtoniana. Assim, faz-se necessário avaliarmos a expressão da velocidade circular modificada para diferentes valores de α . Com essa intenção, traçaremos algumas curvas da velocidade circular modificada variando tanto o raio R quanto o parâmetro α , obtendo superfícies que proporcionarão mais detalhes às nossas análises.

4.3 Análise do Comportamento das Curvas das Velocidades Circulares Modificadas Quando o Raio e o Parâmetro α Variam Juntos

Apesar das curvas de rotação de galáxias espirais terem formas similares [34], algumas características são peculiares a cada galáxia; como por exemplo: a extensão da curva, o valor da velocidade circular máxima entre outras. Podemos notar essas particularidades expressas na Figura 4.5, onde são mostradas algumas curvas de rotação¹.

Ao analisarmos o comportamento das curvas de rotação da velocidade circular modificada, variando tanto o raio R quanto o valor de α , esperamos que essas curvas de rotação esbocem características parecidas às da Figura 4.5.

¹Onde R_{25} é o raio no qual a isofota apresenta brilho superficial de $25 \text{ mag}/''^2$.

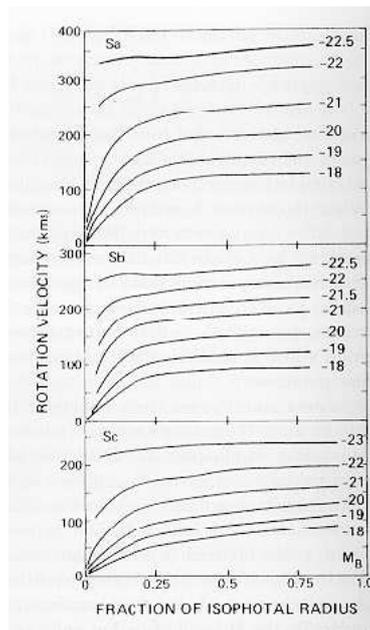


Figura 4.5: Curvas de rotação sintéticas mostrando velocidade de rotação média variando suave como função da fração do raio isofotal, R_{25} . Figura extraída da referência [34].

Na Figura 4.6 são exibidas duas superfícies representando duas galáxias hipotéticas, uma com $R_d=6\text{kpc}$ e outra com $R_d=3\text{kpc}$. Os eixos do espaço coordenado são: o raio R , o parâmetro α e a velocidade circular v_c .

Podemos verificar, na primeira superfície da Figura 4.6, $R_d=6\text{kpc}$, um comportamento suave da variação das intensidades das velocidades circulares em relação raio. Todavia, as intensidades das velocidades circulares diminuem mais rapidamente à medida que os valores de α vão ficando cada vez mais positivos. Essas variações ficam mais evidentes quando visualizamos a superfície por outro ângulo, como é mostrado na Figura 4.7. Nota-se consideráveis diminuições nas intensidades das velocidades circulares quando aumentamos os valores de α .

Para a segunda superfície, $R_d=3\text{kpc}$, observamos a existência de uma deformação que gera uma presença mais evidente de picos, ou seja, com o aumento do raio as intensidades das velocidades circulares diminuem mais rapidamente. É importante notar que o eixo das velocidades para a primeira superfície varia de 0 até 10, como podemos ver mais facilmente na Figura 4.8, enquanto o eixo da segunda varia de 0 até 4, ou seja, quando se tem galáxias com valores de R_d cada vez menores, as curvas de rotação apresentam

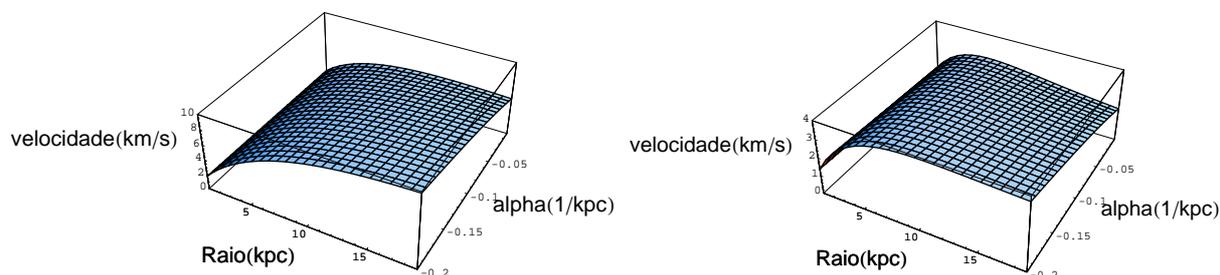


Figura 4.6: Superfícies compostas pelas curvas de velocidade circular modificada variando R e α . À esquerda, para $R_d=6\text{kpc}$ e à direita, para $R_d=3\text{kpc}$.

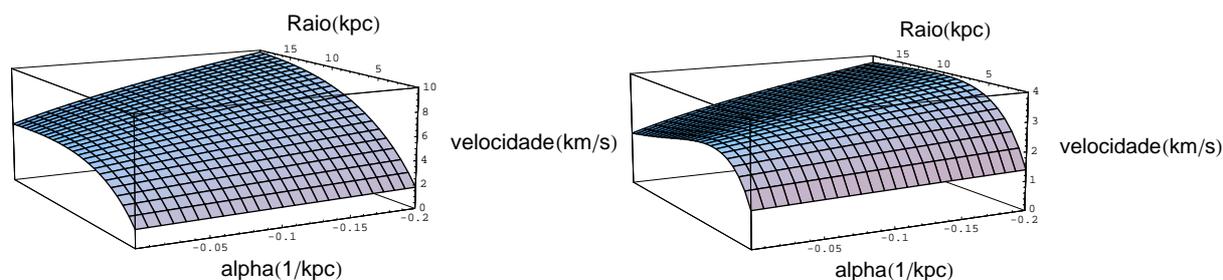


Figura 4.7: Mesmas superfícies da Figura 4.6, porém giradas.

velocidades circulares cada vez menores. Além disso, as intensidades das velocidades circulares desta superfície diminuem mais rapidamente com raio do que as da primeira superfície.

O comportamento das curvas de rotação para galáxias hipotéticas apresentadas nesta seção, pode nos dar valiosas informações que possibilitará análises prévias de algumas características de galáxias reais através dos perfis das curvas de rotação.

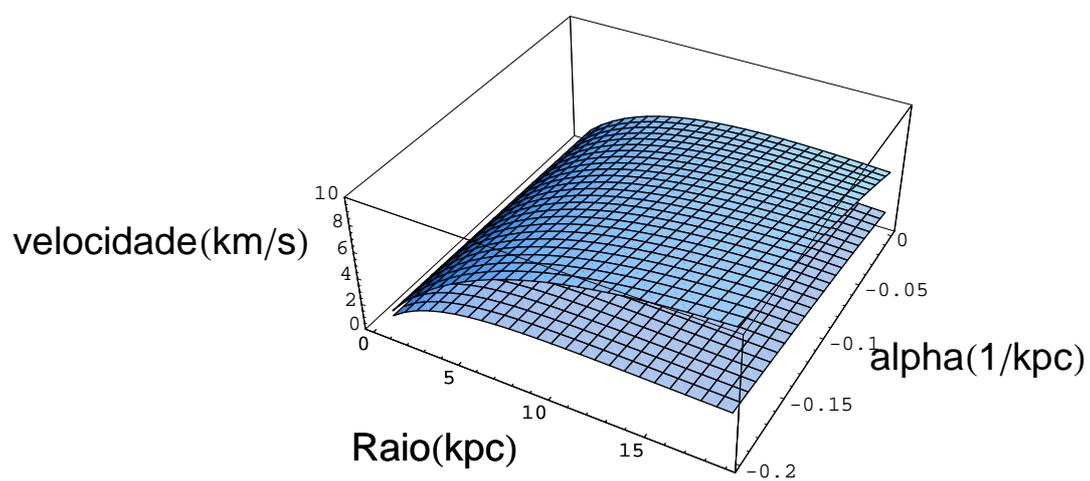


Figura 4.8: Mesmas superfícies da Figura 4.6 traçadas simultaneamente.

Capítulo 5

Comparação do Modelo com dados Observacionais

5.1 Dados Observacionais

Analisaremos um grupo de 9 galáxias de baixo brilho superficial, LSB. Das 9 galáxias LSB duas são anãs: NGC 3109 e DDO 154. O interesse nas galáxias LSB é justificado pelo argumento dos autores da referência [30], ou seja, galáxias LSB e anãs são supostamente dominadas por matéria escura. No trabalho [25], por exemplo, utilizando-se um perfil de distribuição de densidade de halo de matéria escura para galáxias anãs, consegue-se um excelente modelo de massa para sistemas tipo disco envolvidos por halos escuros. Assim, nas galáxias LSB, os detalhes da distribuição de matéria visível são menos importantes, caso contrário, a presença de braços espirais estendidos e estruturas barradas poderiam levar a um significativo movimento não circular, complicando as interpretações dos dados.

Por estas galáxias serem supostamente dominadas por matéria escura, o êxito do nosso modelo nas curvas de rotação, sem a presença de matéria escura, é uma forte evidência a nosso favor.

5.1.1 Coleta de Dados

Os dados observacionais foram extraídos da referência [10], que contém um conjunto de 9 galáxias LSB. As informações referentes às suas: posições, velocidades circulares e barras de erros nas medidas das velocidades circulares, estão contidas no Apêndice. Os valores dos comprimentos de escala de disco, R_d , são mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Nome de cada galáxia e seu respectivo comprimento de escala de disco.

Galáxia	$R_d(\text{kpc})$
NGC 247	4.15
NGC 3109	2.30
DDO 154	0.72
F 568-1	8.20
F 583-1	2.43
F 563-1	4.29
F 568-3	6.15
F 574-1	6.58
F 568-v1	4.86

Para compararmos os resultados teóricos com os dados observacionais, utilizamos o parâmetro χ^2 . A qualidade dos resultados teóricos está caracterizada pela estatística do parâmetro χ^2 , que é definido como:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(v_{c,i}^m - v_{c,i}^c)^2}{\sigma_{v_{c,i}}^2}. \quad (5.1)$$

onde $v_{c,i}^m$ é o valor medido da velocidade circular, $v_{c,i}^c$ é o valor calculado e $\sigma_{v_{c,i}}^2$ é o erro na medida da velocidade circular.

5.1.2 Probabilidades Bayesianas

A análise de probabilidades Bayesianas desenvolvida a seguir, foi baseada nos trabalhos [28] e [1]. A função distribuição de probabilidades (PDF - Probability Density Function) para os parâmetros α e Σ_0 , fornecido um conjunto de dados da velocidade circular v_c , pode ser obtida pela probabilidade dos dados condicionais de v_c em (α, Σ_0) , se usarmos o teorema de Bayes:

$$p(\alpha, \Sigma_0 | v_c) = \frac{p(v_c | \alpha, \Sigma_0) p(\alpha, \Sigma_0)}{p(v_c)}. \quad (5.2)$$

Consideraremos as probabilidades $p(\alpha, \Sigma_0)$ e $p(v_c)$ constantes, pois não temos restrições prévias aos parâmetros ou aos dados. Assim, a probabilidade condicional de (α, Σ_0) em v_c é proporcional à probabilidade condicional de v_c em (α, Σ_0) :

$$p(\alpha, \Sigma_0|v_c) \propto p(v_c|\alpha, \Sigma_0). \quad (5.3)$$

Cada velocidade circular $v_{c,i}$ é considerada independente e tendo uma distribuição Gaussiana. Então a probabilidade do conjunto das velocidades condicionais v_c em (α, Σ_0) é o produto das Gaussianas, similarmente ao que é dado na referência [1]:

$$p(v_c|\alpha, \Sigma_0) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{v_c,i}^2}} \exp\left[-\frac{(v_{c,i}^m - v_{c,i}^c)^2}{2\sigma_{v_c,i}^2}\right], \quad (5.4)$$

que pode ser reescrito usando o χ^2 calculado na equação (5.1) como,

$$p(v_c|\alpha, \Sigma_0) \propto \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right), \quad (5.5)$$

pois o produto de exponenciais é a exponencial da soma presentes em χ^2 .

Por fim, utilizando a equação (5.3), temos que a probabilidade condicional dos parâmetros (α, Σ_0) no conjunto das velocidades circulares v_c , pode ser escrita de forma normalizada:

$$p(\alpha, \Sigma_0|v_c) = \frac{\exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right) d\Sigma_0}, \quad (5.6)$$

onde as integrais são realizadas na região permitida do espaço de parâmetros.

Quando o valor do χ^2 da estatística dos mínimos quadrados é mínimo, a probabilidade é máxima. Os valores dos parâmetros (α, Σ_0) neste máximo são os valores mais prováveis para os parâmetros, quando analisados simultaneamente. Porém, χ^2 mínimo pode estar localizado em uma região estreita com pequenos valores de χ^2 , enquanto uma outra região larga pode também ter pequenos valores de χ^2 .

Com a probabilidade Bayesiana, no espaço de parâmetros bi-dimensional, podemos

construir uma probabilidade para um parâmetro por marginalização, isto é, integrando com relação ao outro parâmetro, ou probabilidade marginal. Então, a probabilidade marginal para α será dada por:

$$p(\alpha|v_c) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha, \Sigma_0|v_c) d\Sigma_0, \quad (5.7)$$

similarmente para o parâmetro Σ_0 .

5.2 Resultados Analíticos X Dados Observacionais

Os resultados obtidos para as curvas de rotação utilizando o potencial Newtoniano modificado serão comparados com os dados observacionais extraídos da referência [10].

Na Tabela 5.2 são mostrados os valores de α e Σ_0 . As colunas estão dispostas da seguinte maneira: na coluna (1) os nomes das galáxias; respectivamente, nas colunas (2) e (3), os valores de α e Σ_0 que melhor ajustam nosso modelo; na coluna (4) o parâmetro que mostra a qualidade do ajuste; respectivamente, nas colunas (5) e (7) os valores mais prováveis de α e Σ_0 com seus limites inferior e superior; nas colunas (6) e (8) os níveis de confiança para α e Σ_0 , respectivamente.

Tabela 5.2: Parâmetros ajustados para curva de rotação modificada

Galáxia	α 1/kpc	Σ_0 M_{\odot}/pc^2	χ^2 -	α^+ 1/kpc	% α -	Σ_0^+ M_{\odot}/pc^2	% Σ_0 -
F563-1	-0.3204	68.65	0.2662	$-0.1421^{+0.1181}_{-1.5390}$	95.10	$16.71^{+139.86}_{-6.43}$	95.44
F568-1	-0.0339	117.17	0.3538	$-0.0261^{+0.0179}_{-1.2871}$	95.13	$13.18^{+123.13}_{-5.45}$	95.20
F568-3	-0.7750	18.24	0.1397	$-0.1353^{+0.1304}_{-1.3127}$	95.10	$9.08^{+80.47}_{-3.69}$	95.19
F568-v1	-0.2923	73.63	0.1955	$-0.0975^{+0.0911}_{-1.1293}$	95.39	$23.56^{+145.79}_{-8.35}$	95.41
F574-1	-2.3257	4.27	0.7481	$-0.0883^{+0.0866}_{-2.1433}$	95.06	$5.13^{+65.26}_{-2.47}$	95.31
F583-1	-10.1711	3.34	2.6564	$-0.9462^{+0.6937}_{-10.0875}$	95.03	$3.51^{+40.33}_{-1.63}$	95.25
NGC247	0.0143	253.28	4.6308	$0.0243^{+0.0469}_{-0.1062}$	95.15	$246.32^{+75.75}_{-95.37}$	95.25
NGC3109	-6.8328	4.16	2.0642	$-1.8643^{+1.1910}_{-5.8406}$	95.10	$4.25^{+21.00}_{-1.38}$	95.40
DDO154	-48.64	2.42	40.95	$-48.0835^{+15.9865}_{-3.8165}$	95.07	$2.45^{+1.16}_{-0.53}$	95.02

Com base na Tabela 5.2, podemos notar que as 6 galáxias apresentam os melhores ajustes do modelo apresentado por nós, enquanto o restante das galáxias, DDO 154, NGC 247 e F 583-1, tem valores bem destoantes dos do primeiro grupo. A galáxia DDO

154 tem valores muito altos para o χ^2 e para o parâmetro α e possui uma curva de probabilidades anômala, ver Figura 5. Já a galáxia NGC 247 tem um valor muito alto para o parâmetro Σ_0 e um valor $\alpha > 0$ não previsto em nossa teoria. A curva de ajuste para a galáxia F 583-1 não tem boa qualidade, Figura 5.1.

É observada, principalmente entre as três galáxias anãs, uma relação inversa entre o comprimento de escala do disco e o valor de α : quanto maior o R_d menos negativo é o valor de α . Isso se deve ao fato de quanto maior o R_d , maior a influência do disco e menor a correção no potencial a ser feita.

Como já dissemos antes, os autores de [31] estabelecem que as máximas densidades superficiais estelares de galáxias LSB são tipicamente $< 100 M_\odot \text{pc}^{-2}$, de acordo com as razões massa-luminosidade estelares dadas em [8]. Assim, os valores da densidade superficial estelar das galáxias F568-1 e NGC 247 não estão compatíveis com o limite estabelecido. Esta discrepância pode não ser tão problemática para nosso modelo, pois existe a possibilidade dessas galáxias pertencerem ao conjunto de galáxias que estão fora dos valores típicos dados por [31]. Além disso, com um nível de confiança de 95%, todos os valores mais prováveis de Σ_0 têm seu respectivo valor mínimo $< 100 M_\odot \text{pc}^{-2}$, exceto NGC 247.

Lembramos que a galáxia DDO 154 é do tipo Irregular Barrada, e esta estrutura difere completamente de uma estrutura tipo disco. Portanto, a falta de êxito no ajuste da curva de rotação para esta galáxia, expressa necessidade de um aprimoramento do modelo para que galáxias desse tipo sejam contempladas.

Na seção 4.3, ao analisarmos o comportamento das curvas da velocidade circular modificada quando variamos simultaneamente o raio e o parâmetro α , destacamos a influência dos valores do comprimento de escala de disco, R_d , nos perfis das curvas de rotação. Com a finalidade de verificar as predições feitas na seção 4.3, aplicaremos as análises a duas curvas da Figura 5.3. Essa figura é escolhida pelo fato do eixo vertical de todos os gráficos terem valores semelhantes, mas devemos ficar atentos aos valores das abscissas. Vemos que, à medida que o raio aumenta, a primeira curva (F 568-1) é a que menos tende à horizontal, enquanto que a segunda curva (F 563-1) tende mais rapidamente, indicando que o comprimento de escala do disco e a velocidade circular máxima da galáxia F 568-1

são maiores que os da galáxia F 563-1.

Vale ressaltar que, mesmo tendo obtidos excelentes resultados nos ajustes das curvas de rotação da maioria das galáxias, como podemos ver nas Figuras 5.1 e 5.3, utilizamos uma distribuição de massa muito simplificada: tipo disco fino. Certamente, adicionando-se outras contribuições, a exemplo do gás interestelar usado nos trabalhos [30], [22], [4] e [5], ou ainda, a aplicação da função massa inicial (IMF)¹ no estudo dos discos, como apresentada nas referências [14] e [21], nosso modelo ganhará mais robustez .

Um estudo mais aprofundado das características dessas e de outras galáxias LSB, sem dúvidas, possibilitará maior sofisticação do modelo.

¹O número de estrelas que se formam por intervalo de massa por unidade de volume (ou área no caso de galáxias tipo disco) depende fortemente da massa. Esta dependência funcional é conhecida como IMF [2].

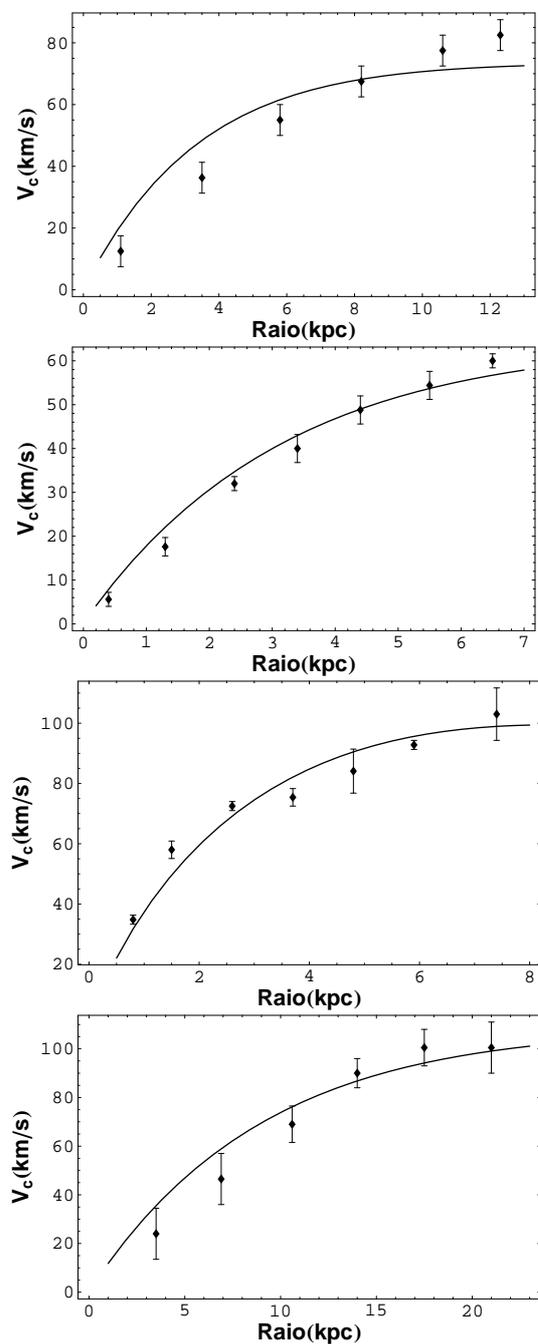


Figura 5.1: Curvas de rotação, linha contínua, para as galáxias F583-1, NGC3109, NGC247 e F574-1, e seus respectivos dados observacionais, pontos com barra.

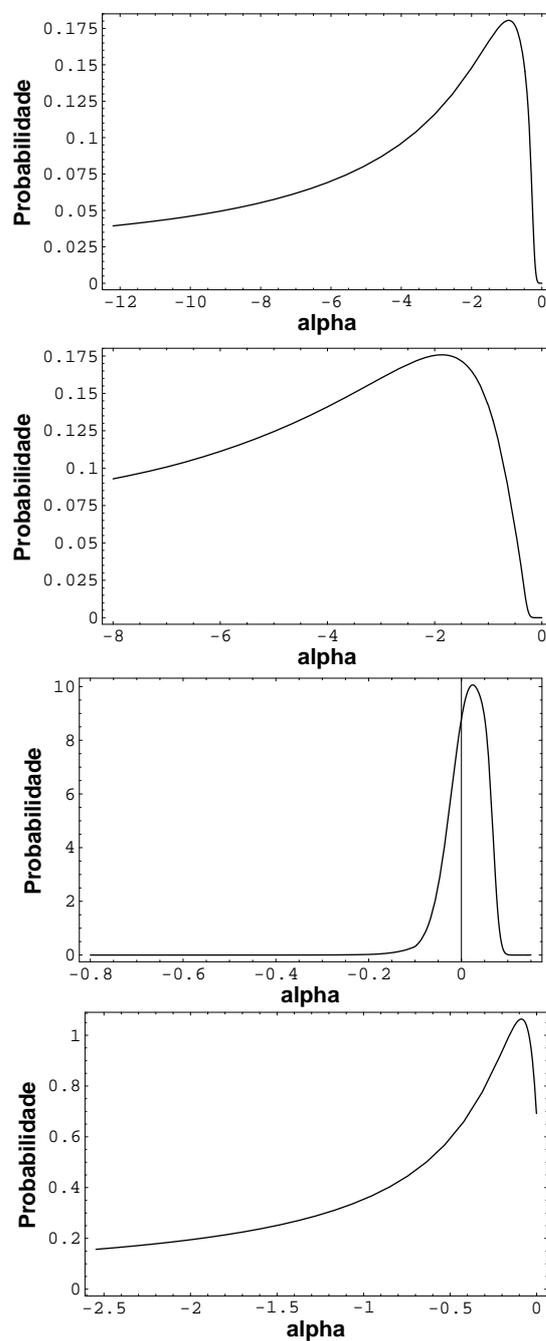


Figura 5.2: Curvas das probabilidades do valor de α para as galáxias F583-1, NGC3109, NGC247 e F574-1. O ordenamento das galáxias é feito de cima para baixo.

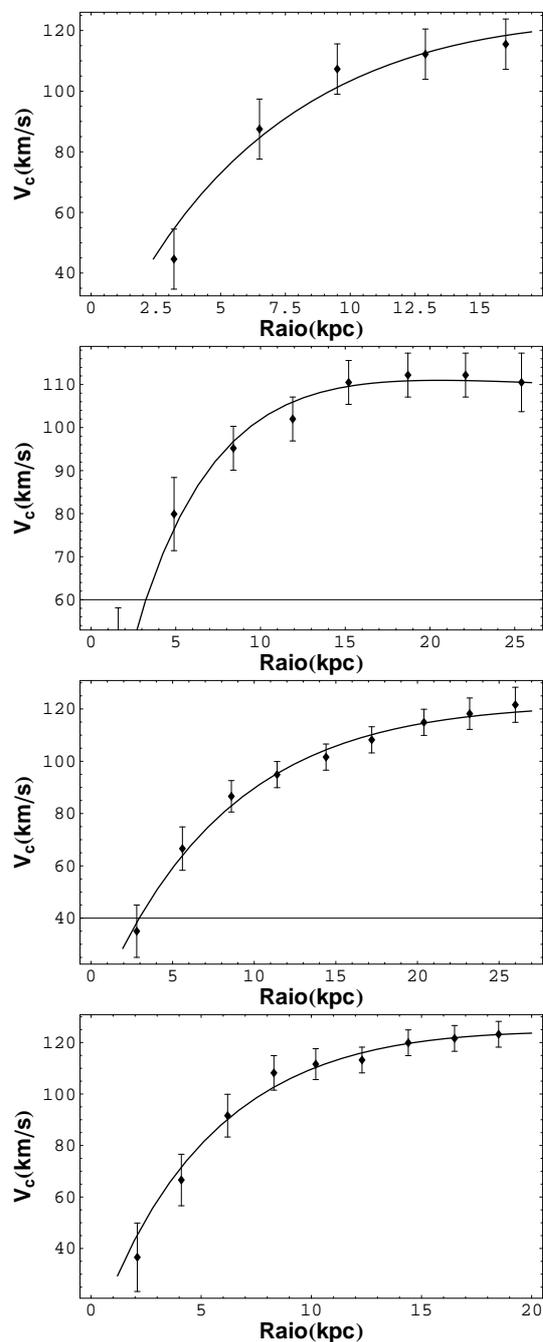


Figura 5.3: Curvas de rotação, linha contínua, para as galáxias F568-1, F563-1, F568-3 e F568v1, e seus respectivos dados observacionais, pontos com barra.

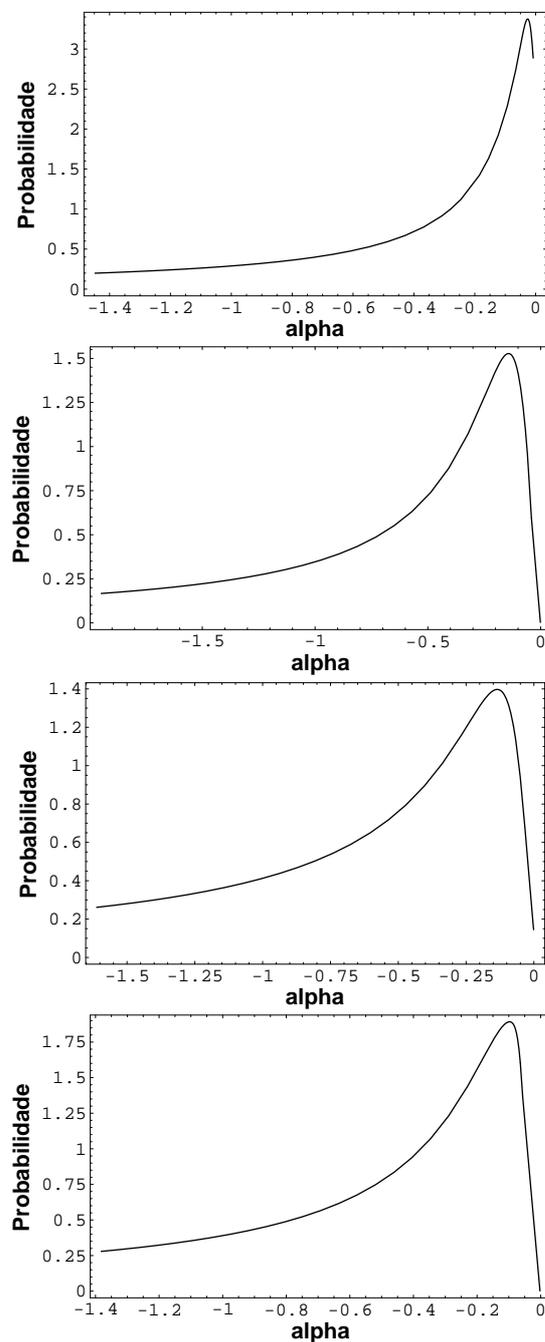


Figura 5.4: Curvas das probabilidades do valor de α para as galáxias F568-1, F563-1, F568-3 e F568v1. O ordenamento das galáxias é feito de cima para baixo.

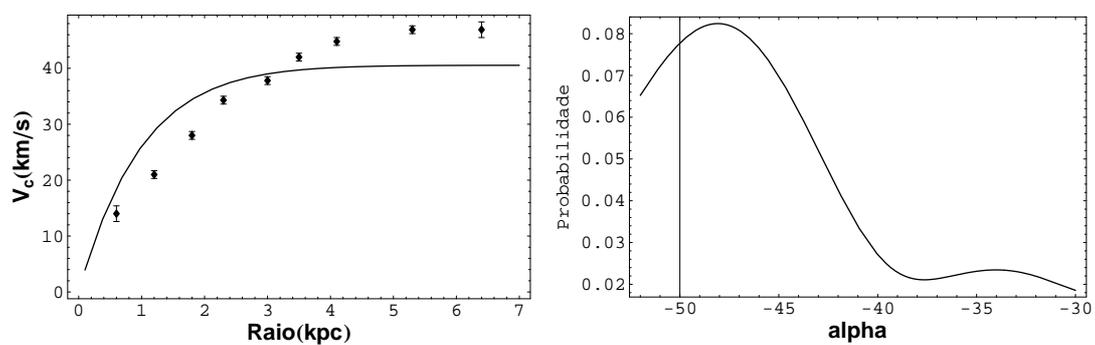


Figura 5.5: À esquerda, pontos (com barras de erro) correspondentes aos dados observacionais da galáxia DDO 154 e curva contínua representando a velocidade de rotação modificada. À direita, curva da probabilidade do valor de α para a galáxia DDO154.

Capítulo 6

Considerações Finais

6.1 Conclusões

Este trabalho apresenta uma modificação do potencial Newtoniano contendo dois parâmetros livres α e Σ_0 que foi aplicada a galáxias espirais. É utilizada uma análise estatística Bayesiana para obter as estimativas, com as barras de erro, para cada parâmetro. Foi aplicado o procedimento de marginalização tanto para α , em kpc^{-1} , quanto para Σ_0 , em $\text{M}_\odot\text{pc}^{-2}$. As curvas de cinco galáxias apresentaram excelente concordância com os dados observados. Os resultados de α e Σ_0 são a seguir : F 563-1 $\alpha=-0.3204$ e $\Sigma_0=68.65$; F 568-1 $\alpha=-0.0339$ e $\Sigma_0=117.17$; F 568-3 $\alpha=-0.7750$ e $\Sigma_0=18.24$; F 568-v1 $\alpha=-0.2923$ e $\Sigma_0=73.63$; F 574-1 $\alpha=-2.3257$ e $\Sigma_0=4.27$. Os resultados ruins foram deveras importantes ao entendimento da necessidade de se aprofundar mais nas propriedades de cada galáxia.

O modelo fornece um arcabouço teórico que permite fazer predições sobre algumas características das galáxias espirais observando os perfis das curvas de rotação. O estudo de um número maior de galáxias deve melhorar as predições feitas pelo modelo.

O modelo reproduz muito bem as curvas de rotação de galáxias espirais LSB, sem que precisássemos introduzir a matéria escura.

O êxito obtido pela correção desenvolvida por nós, nos incentiva a investir na sofisticação do modelo.

6.2 Perspectivas

Apesar dos bons resultados conseguidos pelo modelo desenvolvido neste trabalho, um número maior de dados observacionais proporcionará maior robustez às suas predições.

Quando se trabalha com a análise estatística Bayesiana a redução do número de parâmetros livres na teoria implica em mudanças na forma da função densidade de probabilidade dos outros parâmetros [29]. Sendo assim, pode-se investigar as mudanças no perfil da função densidade de probabilidades introduzindo estimativas da densidade superficial de massa estelar dadas na literatura.

É necessário investigar a possibilidade de se obter o modelo descrito acima, utilizando-se uma abordagem relativista: um gás de cordas cósmicas pode representar o potencial desejado. Todavia, outras configurações devem ser investigadas.

Apêndice

Tabelas dos dados observacionais

São apresentadas aqui as tabelas contendo os dados observacionais de cada galáxia. Na primeira coluna temos as distâncias ao centro da galáxia em kpc; na segunda coluna as velocidades em km/s e na terceira coluna as barras de erro para as velocidades dadas também em km/s.

F 568-1		
Distância kpc	Velocidade kms^{-1}	Barra de Erro kms^{-1}
3.2	44.6	9.9
6.5	87.5	9.9
9.5	107.3	8.3
12.9	112.2	8.3
16.0	115.5	8.3

F 583-1		
Distância kpc	Velocidade kms^{-1}	Barra de Erro kms^{-1}
1.1	12.5	5.0
3.5	36.3	5.0
5.8	55.0	5.0
8.2	67.5	5.0
10.6	77.5	5.0
12.3	82.5	5.0

F 574-1		
Distância	Velocidade	Barra de Erro
kpc	kms^{-1}	kms^{-1}
3.5	24.0	10.5
6.9	46.5	10.5
10.6	69.0	7.5
14.0	90.0	6.0
17.5	100.5	7.5
21.0	100.5	10.5

DDO 154		
Distância	Velocidade	Barra de Erro
kpc	kms^{-1}	kms^{-1}
0.6	14.0	1.4
1.2	21.0	0.7
1.8	28.0	0.7
2.3	34.3	0.7
3.0	37.8	0.7
3.5	42.0	0.7
4.1	44.8	0.7
5.3	46.9	0.7
6.4	46.9	1.4

NGC 247		
Distância	Velocidade	Barra de Erro
kpc	kms^{-1}	kms^{-1}
0.8	34.8	1.5
1.5	58.0	2.9
2.6	72.5	1.5
3.7	75.4	2.9
4.8	84.1	7.3
5.9	92.8	1.5
7.4	103.0	8.7

NGC 3109		
Distância	Velocidade	Barra de Erro
kpc	kms ⁻¹	kms ⁻¹
0.4	5.6	1.6
1.3	17.6	2.1
2.4	32.0	1.6
3.4	40.0	3.2
4.4	48.8	3.2
5.5	54.4	3.2
6.5	60.0	1.6

F 563-1		
Distância	Velocidade	Barra de Erro
kpc	kms ⁻¹	kms ⁻¹
1.6	47.6	10.5
4.9	79.9	8.5
8.4	95.2	5.1
11.9	102.0	5.1
15.2	110.5	5.1
18.7	112.2	5.1
22.1	112.2	5.1
25.4	110.5	6.8

F 568-3		
Distância	Velocidade	Barra de Erro
kpc	kms ⁻¹	kms ⁻¹
2.8	35.0	10.0
5.6	66.6	8.3
8.6	86.6	6.0
11.4	94.9	5.0
14.4	101.6	5.0
17.2	108.2	5.0
20.4	114.9	5.0
23.2	118.2	6.0
26.0	121.6	6.7

F 568-v1		
Distância	Velocidade	Barra de Erro
kpc	kms ⁻¹	kms ⁻¹
2.1	36.6	13.3
4.1	66.6	10.0
6.2	91.6	8.3
8.3	108.2	6.7
10.2	111.6	6.0
12.3	113.2	5.0
14.4	119.9	5.0
16.5	121.5	5.0
18.5	123.2	5.0

Referências Bibliográficas

- [1] A. G. Riess et al. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *Astron. J.*, **116**, 1009 (1998).
- [2] Bradley W. Carroll e Dale A. Ostlie. 1996. *An Introduction to Modern Astrophysics*, ed. Companhia Addison-Wesley.
- [3] B. Fuchs. *Dim Matter in the Disks of Low Surface Brightness Galaxies*, astro-ph/0204387 (2002).
- [4] B. Fuchs. *Massive disks in low surface brightness galaxies*, *Astrophysics and Space Science*, **284**, 2, 719-722 (2003).
- [5] B. Fuchs. *Constraints on the Decomposition of the Rotation Curves of Spiral Galaxies*, astro-ph/0212485 v1 (2003).
- [6] David Burstein, Vera C. Rubin, Norbert Thonnard e W. Kent Ford Jr. *The Distribution of Mass in Sc Galaxies*, *Ap. J.*, **253**, 70-85 (1982).
- [7] E. Battaner e E. Florido. *The rotation curve of spiral galaxies and its cosmological implications*, *Fundamentals of Cosmic Physics*, **21**, 1-154 (2000).
- [8] Eric F. Bell e Roelof S. de Jong. *Stellar Mass-to-Light Ratios and the Tully-Fisher Relation*, *Ap. J.*, **550**, 1, 212-229 (2001).
- [9] Edward W. Kolb e Michael S. Turner. 1994. *The Early Universe*, ed. Westview Press.

- [10] Frank C. van den Bosch, Brant E. Robertson, Julianne J. Dalcanton e W.J.G. de Blok. *Constraints on the Structure of Dark Matter Halos from the Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies*, *Astron. J.*, **119**, 4, 1579-1591 (2001).
- [11] George. B. Arfken e Hans J. Weber. 2005. *Mathematical Methods for Physicists*, edição internacional, Elsevier Academic Press.
- [12] G. N. Watson. 1980. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, segunda edição, Cambridge University Press.
- [13] Harald H. Soleng. *Dark Matter and Non-Newtonian Gravity from General Relativity Coupled to a Fluid of Strings*, *General Relativity and Gravitation*, **27**, 4, (1995).
- [14] Hyun-chul Lee, Brad K. Gibson, Chris Flynn, Daisuke Kawata, Michael A. Beasley. *Is the initial mass function of low surface brightness galaxies dominated by low-mass stars?*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **353**, 1, 113 (2004).
- [15] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik. 1981. *Tables of Series, Products and Integrals*, MIR.
- [16] Jacob D. Bekenstein. *An Alternative to Dark Paradigm: Relativistic MOND Gravitation*, astro-ph/0412652 v3 (2005).
- [17] J. Binney e S. Tremaine. 1987. *Galactic Dynamics*, terceira edição Princeton University Press.
- [18] Juliano Pereira Campos. *Dinâmica de Galáxias: Modelos Analíticos Aplicados às Galáxias Espirais*, Trabalho Monográfico, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2003.
- [19] K. C. Freeman. *On the Disk of Spiral and S0 Galaxies*, *Ap. J.*, **160**, 811-830 (1970).
- [20] Kepler de Souza Oliveira Filho e Maria de Fátima Oliveira Saraiva. 2004. *Astronomia e Astrofísica*, segunda edição, São Paulo: Editora Livraria da Física.
- [21] L. Portinari, J. Sommer-Larsen, R. Tantaló. *Mass-to-Light ratio, Initial Mass Function and chemical evolution in disc galaxies*, astro-ph/0402427 v1 (2004).

- [22] Laurent Chemin, Claude Carignan e Philippe Amram. *Dark matter in low mass surface density galaxies*, AarXiv:0707.1479 v1 (2007).
- [23] M. Milgrom. *MOND-a pedagogical review*, Acta Phys. Polon. B, **32**, 3613 (2001).
- [24] M. -H. Rhee. *Ph.D Thesis*, University of Gronongen (1996).
- [25] P. Salucci e A. Burkert. *Dark Matter Scaling Relations*, Ap. J., **537**, L9-L12 (2000).
- [26] Richard Bowers e Terry Deeming. 1984. *Astrophysics II: Interstellar Matter and Galaxies*, ed. Jones e Bartlett.
- [27] R. H. Sanders. *The Published Extended Rotation Curves of Spiral Galaxies: Confrontation with Modified Dynamics*, Ap. J., **473**, 117 (1996).
- [28] R. Colistete Jr., J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves e P. E. de Souza. *Bayesian Analysis of the Chaplygin Gas and Cosmological Constant Models using the SNe Ia Data*, Int. J. Mod. Phys. D, **13**, 669 (2004).
- [29] R. Colistete Jr. e J. C. Fabris. *Bayesian Analysis of the (Generalized) Chaplygin Gas and Cosmological Constant Models using the 157 gold SNe Ia Data*, Class. Quant. Grav., **22**, 2813-2834 (2005).
- [30] S. Capozziello, V. F. Cardone e A. Troisi. *Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of R^n gravity: no need for dark matter?*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **375**, 4, 1423-1440 (2007).
- [31] Stacy S. McGaugh, Vera C. Rubin e W.J.G. de Blok. *High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies: I Dados*, Astron. J., **122**, 5, 2381-2395 (2001).
- [32] Vera C. Rubin, W. Kent Ford Jr. e Norbert Thonnard. *Rotational Properties of 21 Sc Galaxies with a Large Range of Luminosities and Radii, from NGC 4605 ($R = 4kpc$) to UGC 2885 ($R = 122kpc$)*, Ap. J., **238**, 471-87 (1980).

- [33] Vera C. Rubin, David Burstein e Norbert Thonnard. *A New Relation for Estimating the Intrinsic Luminosities of Spiral Galaxies*, Ap. J., **242**, L149-L152 (1980).
- [34] Vera C. Rubin, David Burstein, W. Kent Ford Jr. e Norbert Thonnard. *Rotation Velocities of 16 Sa Galaxies and a Comparison of Sa, Sb, and Sc Rotation Properties*, Ap. J., **289**, 81-104 (1985).
- [35] Yoshiaki Sofue e Vera Rubin. *Rotation Curves of Spiral Galaxies*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **39**, 137-174 (2001).
- [36] F. Zwicky. *Helvetica Physica Acta*, **6**, 110 (1933).
- [37] Ricardo Oliveira de Mello. www.cosmobrain.com.br/artigos/artigo-012001.