

Universidade Federal do Espírito Santo

Confrontando Cosmologias Newtoniana
e neo-Newtoniana Através do Processo
de Formação de Estruturas

Hermano Endlich Schneider Velten

Orientador: Dr. Júlio César Fabris

Vitória - Espírito Santo

2007

HERMANO ENDLICH SCHNEIDER VELTEN

CONFRONTANDO COSMOLOGIAS NEWTONIANA E
NEO-NEWTONIANA ATRAVÉS DO PROCESSO DE
FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

VITÓRIA
2007

“CONFRONTANDO COSMOLOGIAS NEWTONIANA E
NEO-NEWTONIANA ATRAVÉS DO PROCESSO DE
FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS”

HERMANO ENDLICH SCHNEIDER VELTEN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada em xx de Setembro de 2007

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Sérgio Vitorino de Borba Gonçalves
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga
Centro Universitário Norte do Espírito Santo

Prof. Dr. Saulo Carneiro
Universidade Federal da Bahia

Dedico este trabalho aos meus pais, minha
verdadeira fonte de sabedoria.

”Melhor é a repreensão franca do que o amor encoberto. Leais são as feridas feitas pelo que ama, porém os beijos de quem odeia são enganosos. ”

Provérbios, 27:5-6

Agradecimentos

A palavra família ganha uma importância ainda maior quando finalmente percebe-se que ela é a principal fonte de amor, paz e felicidade de nossas vidas. Se consegui terminar este trabalho foi porque contei com o apoio ilimitado de minha mãe Zuleica, meu pai Euvaldo e meu irmão Humberto. Junto a eles, tenho um grande sentimento de gratidão pelos meus tios e primos que sempre me assistiram. Além disso, fico feliz por saber que são tantos os nomes de pessoas que gostaria de agradecer que inevitavelmente cometeria o grave erro de esquecer alguém, por isso, prefiro não citar nomes. Mais do que nunca, serei eternamente grato por tudo que aprendi devido a convivência com meu orientador Júlio César Fabris. Desejo manifestar a honra que sinto em ter tido oportunidade de conhecê-lo, pois seus ensinamentos não se limitaram à vida acadêmica e sem dúvida alguma me tornaram um ser humano melhor. Obrigado também às sinceras e corretas opiniões dos professores Sérgio Vitorino e Flávio Alvarenga. À todos vocês minha eterna gratidão. Agradeço também as agências Cnpq e Fapes pelo parcial apoio financeiro.

Hermano Endlich Schneider Velten

Vitória, Setembro de 2007.

Resumo

A utilização das equações da hidrodinâmica no estudo do Universo constitui o que chamamos de Cosmologia Newtoniana. No entanto, se considerarmos os efeitos inerciais da pressão e a distinção entre massa gravitacional e inercial é possível obter um novo conjunto de equações hidrodinâmicas que dão origem a chamada Cosmologia neo-Newtoniana. Através de um modelo constituído por matéria bariônica e gás de Chaplygin generalizado estudamos a aplicabilidade destas duas abordagens para a cosmologia sobre o prisma do processo de formação de estruturas. Confrontamos os espectros de potência teóricos obtidos pela cosmologia Newtoniana e neo-Newtoniana de nosso modelo com os dados observacionais do programa 2dFGRS. O objetivo desta análise é buscar as vantagens e desvantagens de cada abordagem. Além disto, buscamos a origem das oscilações e divergências observadas no espectro de potência que foram apontadas recentemente na literatura.

Abstract

If we utilize the hydrodynamical equations in the study of the Universe we obtain a Newtonian cosmology. However, if we consider the effects of the inercial pressure and the distinction between gravitational mass and inercial mass it is possible to obtain a new set of hydrodynamical equations that we call neo-Newtonian cosmology. In this work we study the applicability of these two approaches in structure formation theory through a model constituted by baryonic matter and Chaplygin gas. We confront the theoretical power spectrum of Newtonian cosmology and neo-Newtonian Cosmology with the 2dFGRS observational data. The purpose of this analysis is to obtain the advantage of each approach. Moreover, we search the origin of the oscillations and divergences observed in the Chaplygin gas power spectrum.

Sumário

1	Introdução	1
2	A Moderna Teoria da Gravitação	6
2.1	Introdução	6
2.2	A Equações para Fluidos Cosmológicos	7
2.3	Elementos de Relatividade Geral	10
2.4	O Modelo Padrão da Cosmologia	13
2.5	O Modelo de Friedmann	18
2.5.1	Os Parâmetros Observacionais	19
3	Formação de Estruturas no Universo	23
3.1	Introdução	23
3.2	Cosmologia Newtoniana	24
3.2.1	Teoria Perturbativa	29
3.3	O Crescimento de Estruturas na Relatividade Geral	31
3.4	Cosmologia neo-Newtoniana	33
3.4.1	Análise Perturbativa do Modelo neo-Newtoniano	35
3.5	Conclusões Parciais	38
4	Gás de Chaplygin e a Formação de Estruturas	41
4.1	Introdução	41
4.2	As desconhecidas componentes do Universo	42

4.2.1	Matéria Escura	42
4.2.2	Energia Escura	45
4.2.3	O Gás de Chaplygin	47
4.3	Perturbações na densidade para um modelo de dois fluidos: caso da cosmologia Newtoniana	50
4.4	Perturbações na densidade para um modelo de dois fluidos: caso da cosmologia neo-Newtoniana	54
5	Espectro de Potência do Gás de Chaplygin	61
5.1	Espectro de potência	61
5.1.1	Normalização do Espectro de Potência: Cálculo de σ_8	66
5.2	Análise do espectro de potência e comparação com os dados observacionais	67
5.2.1	Universo constituído de $\Omega_{c0} = 0.75$, $\Omega_{m0} = 0.25$ e $q_0 = 0.5$	70
5.2.2	Influência de Ω_{m0} nos espectros	72
5.2.3	Influência de Ω_{c0} nos espectros	75
5.3	Oscilações	78
5.3.1	Oscilações no espectro do gás de Chaplygin: Teoria Newtoniana	80
5.3.2	Influência de q_0 no surgimento das oscilações	81
5.3.3	Influência de Ω_{m0} no surgimento das oscilações	84
5.3.4	Influência de Ω_{c0} no surgimento das oscilações	86
5.3.5	Espectro de Potência: Componente Bariônica x Componente Gás de Chaplygin	87
5.3.6	O caso degenerado	90
5.4	Perturbações na Entropia e Decomposição do gás de Chaplygin	91
5.5	Modificação nas Condições Iniciais	93
6	Observações Finais e Conclusões	97
6.1	Teorias Newtoniana e Neo-Newtoniana	97
6.2	Sobre o espectro de potência da componente gás de Chaplygin	98

Referências Bibliográficas

Capítulo 1

Introdução

As observações de supernovas no final da década de 1990 revelaram um cenário em que o Universo está passando por uma fase de expansão acelerada [1,2]. Este comportamento contrasta com a natureza atrativa da interação gravitacional, o que sugere a existência de algum tipo de energia, que seja responsável em guiar o Universo neste processo dinâmico. A esta forma de energia, a qual não temos conhecimento de sua natureza, dá-se o nome de Energia Escura. As manifestações desta Energia Escura surgem em uma escala global do Universo, não tendo sido observados, ainda, indícios locais de sua existência.

A Energia Escura não é a única componente desconhecida do Universo. Em pequenas escalas a quantidade de matéria aferida em sistemas gravitacionais como galáxias e aglomerados de galáxias, associada diretamente a qualquer tipo de radiação que possa ser detectada pelas observações, é completamente incapaz de explicar a dinâmica desses sistemas. Dessa forma, existe algum tipo de matéria nestes sistemas que não emite nenhum tipo de radiação mas que, mesmo assim, se faz presente. Esta quantidade de matéria, não observada, a qual denominamos Matéria Escura, somente pode ser detectada através de métodos dinâmicos que associam a velocidade dos constituintes destes sistemas à sua quantidade de massa. Além deste tipo de manifestação local da Matéria Escura, sua participação no processo inicial de formação de estruturas é fundamental para se adequar teoria à observação. Se não considerarmos a Matéria Escura no Universo primordial,

a idade do Universo hoje seria insuficiente para explicar a formação das estruturas observadas. Energia e Matéria Escura são geralmente denominados na literatura de setor escuro da cosmologia padrão.

O grande problema destas desconhecidas componentes refere-se à sua natureza. No caso da Matéria Escura, a física de partículas possui alguns candidatos teóricos para uma possível partícula escura, mas que ainda não foram detectados em seus laboratórios. Para isso, seriam necessárias, eventualmente, energias superiores às obtidas nos modernos aceleradores de partículas. Quanto à Energia Escura, as interpretações teóricas que lhe são atribuídas, como por exemplo as flutuações quânticas do vácuo, estão em desacordo com a observação. Assim, no que diz respeito a Matéria e Energia Escura as observações sugerem que a cosmologia moderna necessita, de maneira fenomenológica, destas componentes de natureza desconhecida, afim de esclarecer o atual cenário cosmológico.

Podemos caracterizar a composição Universo entre os elementos conhecidos (radiação, bárions e neutrinos) juntamente com a Matéria e Energia Escura que constituem o setor escuro do Universo. Quando levamos em conta estas cinco componentes na composição e caracterização de algum modelo cosmológico chamamos tal modelo de quintessência. Uma maneira de estudar este setor escuro que vem sendo muito discutida nos últimos anos na cosmologia, é considerar que Matéria e Energia Escura são, na verdade, uma única substância que possui um comportamento dual. Este comportamento depende da escala com que a observamos. Esta substância escura, única, deveria se aglomerar em pequenas escalas, proporcionando um comportamento idêntico ao da Matéria Escura e ao mesmo tempo, promover a expansão acelerada do Universo. Estes cenários de unificação do setor escuro do Universo são chamados de modelos de quartessência e um dos principais candidatos é o gás de Chaplygin que possui uma equação de estado caracterizada por uma pressão negativa,

$$p = -\frac{A}{\rho}. \quad (1.1)$$

Uma interessante característica do gás de Chaplygin é que apesar de ser um gás que possui

uma equação de estado negativa a velocidade do som para este gás é positiva:

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho^2}. \quad (1.2)$$

Na tentativa de descrever a dinâmica do nosso Universo, a Relatividade Geral, teoria proposta em 1916 por Albert Einstein [3], provê todo o aparato matemático e teórico para tal tarefa. No entanto, a possibilidade de se investigar a evolução do Universo através de um modelo puramente Newtoniano, deve ser considerada, já que, não existe dentro do formalismo Newtoniano a complexidade matemática da Relatividade Geral e além disso, a maioria dos dados observacionais disponíveis, como por exemplo do programa 2dFGRS, estão situados em escalas inferiores à 100 Mpc, que são totalmente satisfatórias dentro de uma abordagem Newtoniana. De uma maneira mais abrangente, podemos nos basear no fato de que a Cosmologia Newtoniana é capaz de fornecer bons resultados sem a necessidade do uso da Relatividade Geral.

O objetivo desta dissertação é investigar a utilização do formalismo Newtoniano, com base no processo de formação de estruturas, sobre o prisma de duas abordagens que encontramos na literatura. A primeira, a qual chamaremos de Cosmologia Newtoniana, é baseada na utilização das equações hidrodinâmicas usuais (equação de Euler, equação da continuidade e equação de Poisson) [4], como modelo para representar fluidos cósmicos que hipoteticamente permeiam nosso Universo. Seu desenvolvimento remete à década de 1930, curiosamente, décadas após o surgimento da Relatividade Geral. Curiosamente, porquê devido a simplicidade da física inserida na cosmologia Newtoniana é de se esperar que tivesse surgido antes da Relatividade Geral. A segunda abordagem é baseada nos mesmos conceitos da Cosmologia Newtoniana, porém, neste caso os efeitos gravitacionais da pressão de um fluido cósmico são considerados, alterando assim, suas equações hidrodinâmicas. A pressão passa a ser uma grandeza fundamental que deve passar a ser considerada em qualquer componente que constitui o Universo, exceto aquelas componentes que não podem ser caracterizadas por uma equação de estado, como por exemplo, a matéria.

Esta é a abordagem neo-Newtoniana para a cosmologia desenvolvida posteriormente nas décadas de 1950 e 1960.

Afim de realizar um estudo comparativo entre estas duas abordagens para a cosmologia, propomos um modelo onde o Universo é composto por matéria bariônica, sem pressão, e um segundo fluido, caracterizado por alguma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$, não nula. No contexto do problema apontado anteriormente, que é a existência de um setor escuro do Universo, um eventual candidato para este fluido é o gás de Chaplygin e um estudo perturbativo será realizado dentro das abordagens Newtoniana e neo-Newtoniana. Como método para avaliar os resultados deste estudo perturbativo obtemos o espectro de potência de cada componente do modelo proposto (bariônica e gás de Chaplygin) dentro de cada uma das duas abordagens (Newtoniana e neo-Newtoniana). O espectro de potência é a ferramenta utilizada para se confrontar teoria e observação, nos permitindo realizar também uma análise comparativa entre as duas abordagens estudadas. Já adiantando uma de nossas conclusões, o fato de considerarmos um fluido com pressão na constituição do Universo faz com que a cosmologia neo-Newtoniana seja uma melhor ferramenta mais realista na descrição do Universo.

Um dos objetivos desta dissertação é indagar sobre os resultados encontrados recentemente para o espectro de potência do gás de Chaplygin. Alguns trabalhos indicam que tal espectro apresenta uma enorme discrepância entre teoria e observação. As oscilações encontradas no espectro de potência para o gás de Chaplygin estão em desacordo com os dados observacionais, como por exemplo, do programa 2dFGRS. Este resultado, aparentemente, descartaria o gás de Chaplygin como modelo de quartessência. No entanto, entendemos que uma melhor interpretação deve ser dada a estes resultados e procuramos discutir tal discordância.

A estrutura dessa dissertação é a seguinte: No capítulo 2 expomos os conceitos referentes à Relatividade Geral e o modelo padrão da cosmologia. Os principais pontos da teoria, alguns de seus problemas e os parâmetros observacionais que são utilizados para confrontar teoria e observação são apresentados. O modelo cosmológico padrão é a base do

nosso entendimento do Universo e é baseado em um conjunto de observações astronômicas associadas à teoria da Relatividade Geral.

Já no terceiro capítulo, nosso objetivo é apresentar o formalismo necessário para se proceder com um estudo perturbativo. Também, buscamos esclarecer as bases teóricas da Cosmologia Newtoniana e as principais diferenças entre as duas abordagens apresentadas. Procuramos discutir a inserção do termo de pressão nas equações hidrodinâmicas bem como o papel da pressão na dinâmica do Universo.

O problema do setor escuro do nosso Universo e a base do modelo proposto são apresentados no quarto capítulo. No nosso modelo o Universo é composto por duas componentes. Uma delas é a matéria e a outra é um fluido com equação de estado $p = \nu\rho^\gamma$ (que é equivalente ao gás de Chaplygin quando fazemos $\nu < 0$ e $\gamma = -\alpha$). Através deste modelo realizamos uma comparação entre as abordagens Newtoniana e neo-Newtoniana. Esta análise é feita estimando os valores dos parâmetros cosmológicos do modelo padrão com as observações. Assim, o próximo passo é discutir a relação entre teoria e observação.

Procedemos no quinto capítulo com uma exposição sobre a teoria envolvida na construção do espectro de potência, sua importância no confronto entre teoria e observação e alguns de nossos resultados. Investigaremos a influência de cada parâmetro cosmológico no espectro de potência para a cosmologia Newtoniana e neo-Newtoniana. Além disso, procuramos abordar sobre o problema apontado na literatura referente a existência de oscilações no espectro de potência da componente gás de Chaplygin. Relatamos a origem destas oscilações e algumas propostas encontradas na literatura sobre tal questão. Também, verificamos que nosso modelo reproduz os resultados já encontrados na literatura de maneira satisfatória e abordaremos de uma forma mais sucinta a questão das oscilações no espectro de potência.

Finalmente, apresentamos nossas observações finais e conclusões no sexto capítulo desta dissertação.

Capítulo 2

A Moderna Teoria da Gravitação

2.1 Introdução

A tentativa de descrever o Universo faz parte de um dos grandes caminhos percorridos pela ciência. Este percurso inclui, desde as primeiras teorias para a estrutura do Universo, enraizadas em arranjos geométricos de profunda inspiração divina [5], até as atuais teorias cosmológicas, onde frequentemente um número maior de dimensões é necessário, além das habituais três dimensões espaciais e uma temporal, para explicar as observações astronômicas que hoje se processam. O estado atual da cosmologia é de tal complexidade, que as menores incertezas nas observações são cruciais para verificar ou até mesmo descartar modelos cosmológicos. Mesmo tendo sido fundamental na história da astronomia as observações vêm se tornando, cada vez mais importante ao se testar uma teoria cosmológica. A cada dia que passa, o número de dados observacionais cresce de uma maneira que seria inimaginável a décadas atrás, graças aos numerosos projetos observacionais desenvolvidos por pesquisadores de todo o mundo. Neste cenário, observação e teoria caminham lado a lado na construção de uma teoria fundamental para a gravitação e cosmologia. Este capítulo se propõe a apresentar a base teórica da cosmologia moderna e os principais parâmetros observacionais utilizados.

2.2 A Equações para Fluidos Cosmológicos

A composição do Universo pode ser descrita por elementos cuja a natureza é conhecida, radiação, matéria bariônica e neutrinos, como também, pelas componentes escuras, as quais não se sabe sua origem, mas que no entanto, possuem notável papel na dinâmica do Universo em todas as suas escalas. O estudo das propriedades do Universo pode ser efetuado com grande eficácia se considerarmos que os elementos que o constituem se comportam como fluidos ideais. Esta hipótese, resumidamente, é a base da Cosmologia Newtoniana que consiste em utilizar as equações da hidrodinâmica para descrever o comportamento destes fluidos.

Na descrição de um fluido ideal uma das principais equações é a equação da continuidade. Esta equação expressa a conservação da matéria. Se considerarmos um elemento de volume do espaço V_0 a quantidade de matéria existente neste volume é $\int \rho dV$ onde ρ é a densidade do fluido e a integral é realizada sobre todo o volume V_0 . Se tomarmos como $d\vec{f}$ um elemento da superfície que envolve V_0 então a quantidade de matéria que atravessa este elemento de superfície por unidade de tempo é $\rho \vec{u} \cdot d\vec{f}$, sendo que $d\vec{f}$ é tomado na direção normal à superfície e sua magnitude é igual a área referente a este elemento de superfície e \vec{u} é a velocidade do fluido. Assim, a quantidade de fluido que atravessa a superfície no sentido de dentro para fora é:

$$\oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{f}, \quad (2.1)$$

onde a integral foi realizada sobre toda a superfície que encobre o volume V_0 .

Enquanto isso, a quantidade de matéria que deixa o volume V_0 por unidade de tempo é:

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV. \quad (2.2)$$

Igualando estas duas equações:

$$\oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{f} = -\frac{d}{dt} \int \rho dV. \quad (2.3)$$

A integral de superfície pode ser convertida em uma integral sobre o volume V_0 através do teorema de Green, o que resulta em:

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u}) \right] dV = 0. \quad (2.4)$$

Esta equação deve continuar a ser válida para qualquer volume dV . Portanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u}) = 0, \quad (2.5)$$

que é a equação da continuidade para fluidos ideais.

Como a equação da continuidade fornece a conservação da massa que reside no interior de um volume V_0 então a dinâmica de uma quantidade do fluido ficará responsável pela equação de Euler. Se tomarmos um elemento de volume no fluido, a força que atuará neste elemento será uma integral da pressão que é exercida sobre esta superfície:

$$-\oint p d\vec{f}. \quad (2.6)$$

Esta expressão, através do teorema de Green, pode ser transformada em uma integral de volume:

$$-\int \nabla p dV. \quad (2.7)$$

A dinâmica de qualquer sistema ou objeto é descrita pela segunda lei de Newton que diz que a força atuante em um corpo é diretamente proporcional à sua aceleração e o fator de proporcionalidade é a massa do corpo. Da equação acima podemos observar que o termo $\vec{\nabla} p$ é força atuante por unidade de volume. Assim, a segunda lei de Newton pode ser

escrita como:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p. \quad (2.8)$$

A derivada total que aparece na equação acima pode ser reescrita como $d/dt = \partial/\partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}. \quad (2.9)$$

Se o fluido está sujeito a um campo gravitacional \vec{g} então a equação acima é modificada de modo que a força exercida sobre o fluido $\rho\vec{g}$ é levada em conta no lado direito desta equação:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g}. \quad (2.10)$$

Qualquer elemento de volume do fluido estará sujeito a uma interação gravitacional com o restante do fluido. A intensidade do campo gravitacional \vec{g} em um ponto do fluido está diretamente relacionada ao potencial gravitacional Ψ criado pelo fluido. A equação de Poisson fornece a relação entre o potencial gravitacional em um ponto com a distribuição de matéria responsável por criar o potencial Ψ através de:

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G\rho. \quad (2.11)$$

Com isso, a hidrodinâmica de fluidos cósmicos é baseada na equação da continuidade (2.5), na equação de Euler (2.10) e na equação de Poisson (2.11). Estas equações são responsáveis por descrever o comportamento de um fluido que, no caso da Cosmologia Newtoniana, hipoteticamente permeia o Universo. No terceiro capítulo retornaremos à estas equações com o intuito de aplicá-las no estudo da formação de estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias.

2.3 Elementos de Relatividade Geral

A mecânica Newtoniana foi o principal pilar da física durante séculos. No entanto, no início do século XX, surge a teoria da relatividade restrita de Albert Einstein [6]. A partir de então, a mecânica Newtoniana passa a ser vista apenas como um limite da relatividade restrita (ou especial), para baixas velocidades, quando comparadas à velocidade da luz $c = 300.000 \text{ km/seg}$. Não bastou muito para se verificar que a teoria Newtoniana para a gravitação era inconsistente com a relatividade restrita, também. A idéia de que um corpo exerce uma influência instantânea sobre outro, característica da gravitação Newtoniana, se demonstrava incompatível com a teoria de Einstein. Pois neste caso a interação gravitacional deveria se propagar com um velocidade superior à da luz, ferindo um dos postulados da relatividade especial. Entretanto, somente em 1916, surge a teoria da Relatividade Geral (RG) como teoria fundamental para a gravitação, baseada assim como a relatividade restrita em uma complexa mudança na estrutura e compreensão do espaço e do tempo. Basicamente, o que motivou Einstein na construção de uma teoria que mudasse completamente a estrutura do espaço e do tempo, de forma que ambos passassem a serem vistos como uma mesma estrutura à quatro dimensões chamada espaço-tempo, foi o princípio da equivalência e o princípio de Mach [7].

A teoria da Relatividade Geral aparece como uma nova teoria do espaço-tempo, onde geometria e matéria estão estreitamente ligadas. Não existe mais o conceito de força gravitacional, como interação fundamental entre dois corpos. As órbitas dos corpos são as geodésicas que eles percorrem em um espaço-tempo curvo onde a curvatura é causada pela presença de massa, ou melhor dizendo, energia. Dessa forma, não mais podemos enxergar a gravidade como um campo de força e sim como uma aspecto da estrutura do espaço-tempo curvo. Na RG, a distribuição contínua de matéria e campos é descrita pelo tensor momento-energia, $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - \frac{p g^{\mu\nu}}{c^2}. \quad (2.12)$$

Nesta equação, ρ é a densidade, p é a pressão do fluido, $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, c é a velocidade da luz e u^μ é a quadri-velocidade do fluido. O tensor $T^{\mu\nu}$ possui toda a informação sobre o conteúdo material do Universo, inclusive matéria e campos. Ele é a soma dos n tensores momento-energia $T_n^{\mu\nu}$ dos vários constituintes do Universo, indexados pela letra n (bárions, neutrinos, radiação, etc). A razão para que o tensor momento-energia seja escrito dessa maneira é que um fluido pode ser basicamente caracterizado por um campo de velocidades u^μ e duas grandezas termodinâmicas, que neste caso são a pressão p e a densidade ρ . Através do tensor momento-energia é possível extrair todas as leis de conservação, por uma derivada covariante do tensor momento-energia:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (2.13)$$

onde, ponto e vírgula (;) denota uma derivada covariante. Se, ao calcular a derivada covariante do tensor momento-energia, utilizamos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker que descreve um Universo homogêneo e isotrópico,

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.14)$$

obtemos que este procedimento resulta na equação de conservação de momento da relatividade:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.15)$$

A equação (2.13), no limite não-relativístico, $p \ll \rho$, $u^\mu = (1, \vec{v})$, $v \frac{dp}{dt} \ll \left| \vec{\nabla} p \right|$ e quando escrita em termos das quantidades ρ , p e u^μ , fornece a equação da continuidade (2.5), que exprime uma lei de conservação e a equação de Euler (2.9) que contém toda a informação sobre a dinâmica do fluido.

A geometria do espaço-tempo relaciona-se com a distribuição de matéria e campos,

através da equação de Einstein:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Nesta equação, $G^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que é composto pelo tensor de Ricci. Este pode ser escrito como:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu;\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}. \quad (2.17)$$

A letra Γ que aparece nesta definição do tensor de Ricci é o símbolo de Christoffel (Γ). Este pode ser escrito em termos do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, que também aparece na equação de Einstein, pela relação:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma;\nu} + g_{\nu\sigma;\mu} - g_{\mu\nu;\sigma}). \quad (2.18)$$

Ainda na equação de Einstein, encontramos o escalar de Ricci, R ,

$$R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

A equação (2.16), exprime exatamente o fato de que matéria e energia, representados pelo tensor $T^{\mu\nu}$, estão relacionados com o tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, que representa toda a geometria do espaço-tempo. Assim, a órbita de um corpo não mais está relacionada à força gravitacional exercida pelos demais corpos a sua volta, mas é na verdade, uma geodésica em um espaço-tempo curvado pela presença de matéria.

A Relatividade Geral representou uma profunda mudança na compreensão do Universo, do ponto de vista teórico e matemático. Suas bases matemáticas estão inseridas no contexto de uma geometria Riemanniana à quatro dimensões, onde toda a complexidade de estruturas como a álgebra tensorial, variedades diferenciáveis e grupos contínuos de simetria, por exemplo, se fazem presentes no seu formalismo. Dessa forma, trata-se de

uma abordagem mais sofisticada do que a Newtoniana, que como consequência, fornece resultados mais expressivos.

2.4 O Modelo Padrão da Cosmologia

Como visto na seção anterior, a Relatividade Geral é a moderna teoria da gravitação que substitui a teoria da gravitação Newtoniana. Assim, a gravitação Newtoniana se resume a um limite de campos fracos da RG. A descrição do Universo, tendo como base teoria da RG, juntamente com uma série de observações fornece o que conhecemos por Modelo Cosmológico Padrão (MCP). O MCP, que é fundamentado na teoria do Big Bang e no modelo inflacionário [8], é o alicerce da cosmologia moderna. Os parâmetros observacionais, que são parte fundamental do MCP, têm sido nos últimos anos, medidos com grande precisão, graças ao desenvolvimento das observações, principalmente, de supernovas em valores elevados de desvio para o vermelho, da radiação cósmica de fundo (RCF) e da distribuição de matéria em galáxias e aglomerados de galáxias.

O MCP possui sua fundamentação teórica baseada na RG e foi formulada pela primeira vez pelo matemático russo Alexander A. Friedmann [9], na década de 1920. O trabalho de Friedmann consistiu em obter soluções para a equação de Einstein, de forma que, tais soluções indicavam uma expansão do Universo, dependendo unicamente da distribuição de matéria e energia do Universo.

Aliado ao arcabouço teórico do MCP, existem três aspectos observacionais que o confirmam como melhor opção na tentativa de descrever o Universo. Estas observações são:

1) Primeiro, a expansão do Universo, observada pela primeira vez pelo astrônomo Edwin P. Hubble no final da década de 1920 [10]. Hubble observou que as linhas espectrais da luz proveniente de galáxias distantes apresentam um considerável desvio para o vermelho. Hubble observou também que o desvio para o vermelho aumentava de acordo com a distância das galáxias ao observador. A observação desses resultados, por Hubble, o permitiu concluir que as galáxias possuem uma velocidade de recessão dada pela expressão,

$\vec{v} = H\vec{r}$. Esta relação, onde \vec{r} representa a distância do observador à galáxia, ficou conhecida como lei de Hubble e o parâmetro H como parâmetro de Hubble. O parâmetro de Hubble é igual a $H = \frac{\dot{a}}{a}$, onde a é o fator de escala do Universo. O melhor valor indicado pelas atuais observações para o parâmetro de Hubble é $H = 72 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [11].

2) O segundo aspecto observacional do MCP é a radiação cósmica de fundo (RCF), predita por George Gamow na década de 1940 e descoberta em 1964, por Arno A. Penzias e Robert W. Wilson [12] que é uma relíquia da época do Big Bang. O termo Big Bang designa a fase densa e quente pela qual passou o Universo marcando o início de sua expansão. A RCF se comporta como uma radiação de corpo negro com uma temperatura hoje bem definida de $T_{RCF} = 2,736 \pm 0,017K$ [11]. A observação da RCF é a principal evidência da homogeneidade e isotropia do Universo, que é uma das principais características do MCP. Esta evidência de uma relevante homogeneidade e isotropia confirma o chamado Princípio Cosmológico.

3) A terceira observação que fundamenta o MCP é a verificação de que taxa de abundância dos elementos leves como He^3 , D , He^4 e Li^7 é obtida com ótima precisão de acordo com a previsão do mecanismo de nucleossíntese primordial. A nucleossíntese primordial foi proposta por George Gamow [13] na década de 40 e explica o processo de formação desses elementos, através de reações nucleares, poucos minutos após o Big Bang. Os demais elementos mais pesados foram criados posteriormente no interior de estrelas e nas explosões de supernovas.

Em um Universo onde a geometria possui papel fundamental na descrição de quaisquer situações físicas, amparadas pela RG, é necessário definir uma maneira de medir distâncias. Assim, a forma mais geral da métrica, que satisfaz a homogeneidade, isotropia e expansão do Universo é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A métrica de FRW descreve um espaço tempo quadri-dimensional em termos do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, como:

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.20)$$

Esta métrica é caracterizada pelo fator de escala $a(t)$, que nos dá uma idéia do tamanho físico do Universo e o parâmetro de curvatura k , que determina a curvatura espaço-temporal, sendo que k pode assumir os seguintes valores:

* $k = -1$, caracterizando um universo aberto.

* $k = 0$, caracterizando um universo plano.

* $k = +1$, caracterizando um universo fechado.

Esta suposição de homogeneidade e isotropia do Universo só nos permite determinar a métrica a partir das possibilidades de curvatura do Universo e da função temporal $a(t)$. Assim, para obter o comportamento da evolução desse Universo é necessário inserir a métrica (2.14) nas equações de Einstein. Isto resulta no modelo de Friedmann para a evolução do Universo, onde toda a dinâmica está inserida em um conjunto de equações denominadas equações de Friedmann, que serão apresentadas na próxima seção.

Apesar do sucesso das predições do modelo cosmológico padrão é importante comentar que ainda existem questões em aberto neste modelo. Mesmo assumindo a homogeneidade e isotropia do Universo, devido as observações da radiação cósmica de fundo, o MCP não é capaz de explicá-las. Esta questão denomina-se problema do horizonte.

O que motiva esta indagação é o fato de observarmos que o Universo é composto por muitas regiões que não tiveram contato causal em uma fase primordial, ou seja, existiam muita regiões que não estavam no cone de luz passado das demais. Não existia qualquer tipo de interação entre tais regiões. Assim, como explicar o equilíbrio térmico do Universo, constatado pela radiação cósmica de fundo, se em seu início existiam regiões impossibilitadas de trocar qualquer tipo de informação (fótons) [11, 14]?

Outro problema é o chamado Problema da Curvatura que diz respeito à densidade de matéria observada no Universo, representada pelo parâmetro $\Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}$. A forma com que Ω é ser escrito indica que, independentemente do valor da curvatura k , a quantidade Ω tende a se afastar do valor unitário a medida que o Universo expande. Acontece que na métrica de FRW, o parâmetro k , que caracteriza a curvatura do espaço-tempo, é um parâmetro livre, já que não existe nada na teoria que o determina. No entanto,

a nucleossíntese indica um valor para Ω , aproximadamente 1 seg após o Big Bang, de $\Omega = 1 + 10^{-15}$ e as observações atuais da RCF, por exemplo, indicam um valor para Ω de $\Omega = 1.02 \pm 0.02$ [15]. Este resultado observacional é a razão para considerarmos a geometria do espaço-tempo plana, quando na verdade, não existe nenhuma razão, *a priori*, para isto.

Estes são alguns dos problemas do modelo cosmológico padrão, sendo que poderíamos destacar ainda a questão da origem das não homogeneidades locais, em um Universo primordial, responsáveis por iniciar o processo de colapso gravitacional e a futura formação de estruturas. No entanto, como proposta para resolver este problema, citamos o cenário inflacionário proposto por Guth, Linde e Albrecht [8] e o modelo de cordas cósmicas [16] decorrente dos estudos de defeitos topológicos.

A idéia básica da inflação é que existiu uma época onde a energia de vácuo era a componente dominante da densidade e energia do Universo, fazendo com que o fator de escala crescesse exponencialmente. Durante esta época, uma região de tamanho menor que H^{-1} pode crescer o suficiente à abranger um volume que hoje representa o Universo observado. A existência de uma fase de expansão acelerada do Universo, conhecida como fase inflacionária, pode resolver de maneira satisfatória os principais problemas que afetam o modelo cosmológico padrão. A questão é como gerar um fase de expansão acelerada. A constante cosmológica pode vir a ser utilizada, mas no entanto, o valor de Λ é constante, enquanto que todas as outras formas de energia implicam em uma densidade que decrescem com a expansão do Universo. Neste caso a constante cosmológica dominaria todas as outras formas de energia em todas as fases posteriores de evolução do Universo o que implicaria em uma eterna fase de expansão acelerada, fato este que contradiz as observações. Uma forma de se gerar esta expansão é considerar que ela não é criada por uma constante cosmológica, mas sim por um campo que evolui com a expansão do Universo e que por um curto momento no passado se comporta como constante cosmológica. A idéia é considerar um campo escalar com auto interação. Podemos escrever o tensor momento energia para este campo e em seguida encontrar que a pressão atribuída ao

mesmo possui um valor negativo [14]. Um pressão negativa é necessária para gerar a fase de expansão acelerada. Dessa forma, podemos considerar o modelo inflacionário como a principal descrição para a fase inicial do Universo, bem como para a questão da formação das flutuações primordiais.

Uma outra proposta, seria baseada no modelo de cordas cósmicas. Este modelo surge quando tomamos uma Lagrangiana que descreve um campo escalar complexo interagindo com um campo vetorial. As soluções para as equações de campo resultantes são do tipo cordas, ou seja, dessa forma podemos imaginar as cordas cósmicas como concentrações lineares de energia. Esta distribuição de energia dá origem a um tensor momento-energia da forma $T^{\mu\nu} = \sigma\delta(x)\delta(y)dia(1, 0, 0, -1)$, se tomarmos a corda na direção z . Nesta igualdade, σ representa a densidade de energia da corda que é da ordem de $\sigma \approx 10^{32} (GeV)^2$. Este tensor momento-energia, por sua vez, fornece uma métrica da forma [17]:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - (1 - 4\pi G\sigma) r^2 d\theta^2, \quad (2.21)$$

onde o espaço é plano, mas o alcance do ângulo θ é somente $0 \leq \theta \leq 2\pi(1 - 4G\sigma)$. Assim, observa-se um déficit de ângulo no plano $x - y$. Uma das consequências desse déficit de ângulo no plano $x - y$ é a condensação de matéria no plano definido pelo movimento de uma corda cósmica. No entanto, cordas cósmicas prevêem perturbações não gaussianas além do que a inexistência do segundo e terceiro picos acústicos no espectro da radiação cósmica de fundo, sendo que, aparentemente estes picos parecem existir. Assim, essas observações indicam que a teoria de cordas cósmicas deve ser modificada afim de descrever o surgimento das flutuações iniciais.

Dessa forma, podemos afirmar que é baseado no Modelo Cosmológico Padrão que está situado todo o desenvolvimento da moderna cosmologia. Este trabalho, como não poderia ser diferente, utiliza os mesmos princípios que fundamentam o MCP, como, por exemplo, a homogeneidade e isotropia do Universo. O problema da formação de estruturas figura como principal ponto, dos muitos ainda em aberto, neste leque de questões,

servindo de motivação para um estudo mais detalhado do processo de aglomeração das não homogeneidades primordiais.

2.5 O Modelo de Friedmann

As modernas observações astronômicas revelam que o Universo é composto por variadas estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias. No entanto, estas complexas estruturas parecem estar distribuídas de uma maneira estatisticamente homogênea, para escalas superiores a $100Mpc$, sendo que o comportamento dinâmico de todo o Universo não depende da dinâmica isolada de alguma dessas estruturas. Dessa maneira, para entender a evolução do Universo em larga escala é necessário tratá-lo como se estivesse preenchido por um fluido distribuído de maneira completamente homogênea. Além do que, este fluido pode ser caracterizado por uma equação de estado da forma $p = p(\rho)$.

Se a métrica de FRW (2.14) descreve o Universo da maneira mais geral possível, percebemos que ela revela uma geometria não estática, devido ao fator de escala $a(t)$, que é uma função do tempo. Se conhecermos o tensor momento-energia do fluido, podemos determinar a função $a(t)$ e o parâmetro de curvatura do Universo k , através da equação de Einstein (2.16).

A componente $0 - 0$ da equação de Einstein fornece:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}. \quad (2.22)$$

Enquanto que a componente $i - i$ fornece a equação:

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (2.23)$$

Estas duas equações combinadas com a equação de estado $p = p(\rho)$, determinam as funções $a(t)$, $p(t)$ e $\rho(t)$. Além do que, as equações (2.22) e (2.23) podem ser combinadas,

resultando em:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.24)$$

A equação (2.24) fornece uma expressão para a aceleração do Universo em termos de ρ e p , que são as componentes do tensor momento-energia. Com este resultado, Friedmann observou a possibilidade de se obter um Universo em expansão, onde a dinâmica do Universo dependeria unicamente da distribuição de matéria e energia, contrariamente à idéia de um Universo estático, defendida por todos, até as observações Hubble, inclusive Einstein.

Assim, a maneira encontrada por Einstein, na defesa de um modelo de universo estático, foi a inserção de uma constante em suas equações, de forma que as soluções de sua equação fornecesse um Universo estático, como se acreditava na época. Einstein acreditava que um universo estático concordaria com os conceitos de inércia de Ernest Mach, que proíbe a noção de vazio. Essa constante ficou conhecida como constante cosmológica e a equação de Einstein passaria a ser escrita da seguinte forma¹:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

O Universo estático de Einstein desmoronou quando as futuras observações de Hubble na década de 1920 revelaram que o Universo está em expansão.

2.5.1 Os Parâmetros Observacionais

Não somente na cosmologia moderna, mas como em todos os ramos da física, teoria e observação estão estreitamente ligadas. As observações são capazes de descartar teorias cosmológicas ou colocá-las em um patamar mais elevado dentro da física. Nesta tentativa de conectar observação e teoria é necessário definir parâmetros cosmológicos que ao mesmo tempo sejam passíveis de serem observados e possuam utilidade teórica.

Conhecemos bem hoje o parâmetro de Hubble, que mede a atual taxa de expansão do

¹Originalmente Einstein escreveu o termo $\Lambda g^{\mu\nu}$ junto ao tensor de Einstein na equação 2.25.

Universo, $H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0}$, onde t_0 representa a idade atual do Universo. É comum expressar o parâmetro de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Com isso, podemos também estimar a idade do Universo, relacionando-a com a constante de Hubble:

$$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.26)$$

Quando invertemos o valor da constante de Hubble obtemos a idade do Universo:

$$t_{univ} = H_0^{-1} = 9,773h^{-1} \text{ Gyr}. \quad (2.27)$$

Este valor pode ser multiplicado pelo valor da velocidade da luz $c = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$, o que fornece o raio de Hubble,

$$cH_0^{-1} \approx 3000h^{-1} \text{ Mpc}, \quad (2.28)$$

onde h é também chamado de fator reduzido de Hubble e tem sido medido com enorme precisão em torno do valor $h = 0,72$ [11].

Obter a idade do Universo e de suas estruturas, apesar da complexidade existente neste processo é fundamental pois, dessa maneira, pode-se estabelecer importantes vínculos para candidatos à modelo cosmológico. Por exemplo, claramente o Universo não pode ser mais novo do que alguma de sua estruturas, como por exemplo os aglomerados globulares que possuem uma idade estimada em 13 bilhões de anos.

A distância entre duas galáxias pode ser escrita como

$$\vec{r}(t) = a(t) \vec{r}_0, \quad (2.29)$$

onde \vec{r}_0 é um vetor comóvel constante para cada par de galáxias e $a(t)$ é o fator de escala do Universo. A derivada temporal dessa expressão fornece a velocidade de separação das galáxias

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}(t) \vec{r}_0 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \vec{r} = H \vec{r}, \quad (2.30)$$

que é a relação deduzida por Hubble na década de 1920, a partir de suas observações [10].

Outro aspecto fundamental das observações é o desvio para o vermelho das linhas espectrais observado na luz proveniente de objetos astronômicos distantes. As primeiras evidências desse desvio para o vermelho datam do início do século XX. A principal fonte de informação sobre o fator de escala do Universo é o desvio para o vermelho (z). A expressão que determina o valor de z pode ser encontrada em muitos lugares da literatura [11, 14, 17–19],

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (2.31)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda da luz observada enquanto que λ_1 é o comprimento de onda emitido pela fonte. Como os valores de z são sempre maiores que zero nota-se, a partir desta expressão, que o comprimento de onda de emitido sofre um aumento no seu valor até chegar ao observador. O desvio para o vermelho também pode ser escrito em termos do fator de escala [14]:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1. \quad (2.32)$$

Escrito nesta forma, fica mais evidente que um aumento em $a(t)$ provoca um desvio para o vermelho, enquanto que uma diminuição em $a(t)$ provoca um desvio para o azul nas linhas espectrais dos objetos observados. Com isso, um dos principais fatores que levam os astrônomos a concluir que o Universo está em expansão é a observação de que o espectro de galáxias distantes apresenta um desvio para o vermelho.

Uma outra importante definição é a densidade crítica do Universo

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.33)$$

onde nesta definição, o índice 0 no parâmetro de Hubble indica que deve-se tomar seu valor atualmente. Através dele é possível definir os parâmetros de densidade ou frações

de massa, de cada componente i do Universo,

$$\Omega_i = \frac{\rho_i(t_0)}{\rho_c}. \quad (2.34)$$

Os parâmetros e densidade associados à matéria, radiação, constante cosmológica e curvatura são:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}, \quad \Omega_R = \frac{8\pi G\rho_R}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_K = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}. \quad (2.35)$$

A constante k , que determina a curvatura da seção espacial do Universo, pode ser determinada através da equação de Friedmann (2.22). Se desejarmos obter o valor de k hoje, tomamos todas as grandezas físicas no presente instante, assim:

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} - \left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2, \quad (2.36)$$

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} - H_0^2 \equiv H_0^2(\Omega - 1), \quad (2.37)$$

onde $\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c}$. Assim, da equação acima, vemos que o Universo pode ser aberto, fechado ou plano, dependendo apenas do valor de Ω .

Com a equação (2.24) é possível definir o parâmetro de desaceleração do Universo q_0 , tal que:

$$q_0 = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}(t_0) = \frac{4\pi G}{3H_0^2}[\rho(t_0) + 3p(t_0)]. \quad (2.38)$$

Um valor $q_0 = 0$ indica uma expansão uniforme, enquanto que se $q_0 > 0$ o Universo possui um comportamento desacelerado e $q_0 < 0$ remete a um comportamento acelerado.

Com base nesta curta explanação sobre alguns dos parâmetros observacionais, parece bem razoável dizer que eles fornecem um conjunto de medidas fundamentais para o desenvolvimento da cosmologia moderna. O nível de sofisticação que a cosmologia alcançou nos últimos anos, deve-se, principalmente, à grande evolução das técnicas de medida envolvidas nos observatórios e telescópios, tanto em terra quanto em órbita.

Capítulo 3

Formação de Estruturas no Universo

3.1 Introdução

Uma das hipóteses do Modelo Padrão, já discutido no capítulo anterior, é a de que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Nesse cenário o termo homogêneo se refere ao fato de que a matéria, que constitui o Universo, parece estar igualmente distribuída quando observamos escalas superiores à 100Mpc. No entanto, quando nos restringimos à escalas inferiores à 100Mpc, observa-se a presença de estruturas mais elaboradas como, por exemplo, galáxias e aglomerados de galáxias. A observação dessas estruturas indica claramente que, na verdade, o Universo real contém algumas não homogeneidades. Dessa forma, explicar o surgimento dessas estruturas, assim como são observadas hoje, se tornou um dos grandes desafios da cosmologia moderna. O aparecimento dessas estruturas é devido ao crescimento substancial de pequenas flutuações no Universo primordial. Assim, a partir dessas pequenas instabilidades, a matéria começou a se aglomerar por causa da atração gravitacional, originando uma estrutura rica e variada, como observa-se hoje.

Nesse sentido, um modelo cosmológico só pode ser considerado completo se, além de explicar a formação de estruturas do Universo, também for capaz de explicar a origem das pequenas flutuações no Universo primordial. Para isso, existem dois cenários que se

propõem à explicar a origem das instabilidades, já citados. Um, é o modelo inflacionário de Universo [8]. O outro é baseado em certos objetos chamados "cordas cósmicas". No entanto, não é o objetivo desse capítulo entrar em uma discussão detalhada sobre essas duas teorias.

A base do estudo da evolução gravitacional das não homogeneidades é a teoria perturbativa. Assim, um dos principais objetivos desse capítulo é desenvolvê-la. Perturbar um sistema significa levar em conta pequenas flutuações nas grandezas físicas quando as inserimos nas equações que descrevem a dinâmica de um fluido que permeia o Universo. Este capítulo pretende mostrar que as equações para fluidos cosmológicos são parte fundamental do que chamamos Cosmologia Newtoniana. Assim a matéria é tratada como um fluido que hipoteticamente permeia todo o Universo. O modelo Newtoniano é de grande importância para o estudo da formação de estruturas, devido à sua simplicidade e sua praticidade na interpretação física do problema, de forma que, a análise Newtoniana promove uma melhor compreensão do comportamento das não homogeneidades. Só torna-se necessário partir para uma análise relativística quando o comprimento de onda da perturbação torna-se maior do que ou da ordem do raio de Hubble [17]. O tratamento relativístico também será apresentado mas, simplesmente, como fonte de comparação com os resultados da cosmologia neo-Newtoniana que será exposta em seguida.

O principal objetivo desse capítulo é expor o modelo neo-Newtoniano assim como uma alternativa ao modelo cosmológico Newtoniano. Essa alternativa é baseada em uma pequena modificação nas equações cosmológicas de fluidos, afim de incluir os efeitos gravitacionais da pressão. Chamaremos esse modelo de Modelo neo-Newtoniano.

3.2 Cosmologia Newtoniana

As leis de Newton foram a melhor explicação para a toda a mecânica compreendida pela natureza, por quase trezentos anos. Desde o "Principias" de Newton, a mecânica Newtoniana reinou absoluta nos domínios da física, até o começo do século XX, quando

suas limitações começaram a ficar evidentes logo que a teoria Newtoniana demonstrou-se incapaz de descrever corretamente a mecânica de uma partícula no limite de altas velocidades. É a partir dessa etapa, que nos confrontamos com o advento da teoria relativista de Einstein o que determinaria uma nova direção para toda a física, principalmente para a cosmologia. Em um primeiro momento, surge a teoria da relatividade restrita em 1905, para somente em 1915, a teoria da Relatividade Geral surgir como uma nova e revolucionária teoria para a gravitação e cosmologia.

A esta altura, a teoria da gravitação Newtoniana não era capaz de fazer as mesmas previsões da RG. Inevitavelmente, a cosmologia passa a ser então associada à complexidade matemática inerente à geometria Riemanniana, isto é, a álgebra tensorial, variedades diferenciáveis, etc. Assim, estando a RG ligada, de maneira unívoca, a uma geometria Riemanniana, formulada em um espaço-tempo quadri-dimensional, parece ser, a primeira vista, impossível de se estudar cosmologia sem todo esse aparato matemático.

No entanto, na década de trinta foi possível demonstrar que todos os principais resultados para os modelos homogêneos e isotrópicos do Universo podiam ser obtidos através da formulação Newtoniana, ou seja, utilizando um espaço-tempo estático, o tempo absoluto (Newtoniano) e a lei de força e da gravitação Newtoniana. Os trabalhos de E. A. Milne e W. H. McCrea [20], [22], na década de trinta, mostraram que a cosmologia poderia ser tratada não somente pela complexidade matemática e conceitual inserida na Relatividade Geral, mas também, por uma formulação mais simples e elementar como a que encontramos na física Newtoniana. A vantagem desta formulação é que torna-se muito mais factível em nível de um primeiro estudo, realizar um tratamento Newtoniano, devido a sua simplicidade matemática, quando comparado à cosmologia relativística.

O primeiro trabalho com o propósito de buscar uma alternativa para a cosmologia relativista, foi realizado por E. A. Milne em 1934 [20]. Neste trabalho, foi pela primeira vez observado a possibilidade de uma abordagem distinta da relativista para a cosmologia. As observações de Hubble, alguns anos antes, forneceram fortes evidências em favor da expansão do Universo. O mecanismo relativista para explicar a expansão observada

não considerava um Universo estático, mas, atribuía ao Universo uma dinâmica associada à expansão. Quer dizer, todo o Universo relativístico expande. No entanto, a formulação proposta por Milne, remetia a um Universo estático, Newtoniano, onde a expansão observada é devida aos movimentos de partículas neste espaço. Assim, as partículas se movimentando em um Universo estático (Newtoniano) forneceriam a mesma observação que partículas imóveis em um Universo que se expande (relativístico). A proposta de Milne preteria uma modificação na geometria, ao contrário da RG, afim de manter uma geometria Euclideana. A principal vantagem apontada por Milne, para essa abordagem, era a utilização do espaço-tempo de Minkowski, que é comumente utilizado na física. Esta afirmação de Milne é fundamentada pelas palavras do próprio Albert Einstein [21]: *”Pode-se considerar o mundo de Minkowski, do ponto de vista formal, como um espaço euclidiano quadridimensional (com coordenada temporal imaginária)”*. Por outro lado, a grande diferença entre a cosmologia Newtonina e relativista é a interpretação das quantidades físicas que aparecem nas equações diferenciais, consequentes da aplicação dos dois modelos. Enquanto que o tempo t , Newtoniano, é um tempo absoluto, o tempo τ , relativístico, é o tempo cósmico (tempo medido por um observador co-móvel). Exceto essa questão, cosmologias relativista e Newtoniana predizem, localmente, os mesmos resultados.

Em um trabalho seguinte [22] E. A. Milne e W. H. McCrea fundamentaram o que, posteriormente, veio a ser chamado de Cosmologia Newtoniana [23]. Este trabalho é, simplesmente, uma generalização do anterior. No entanto, seu grande mérito foi a obtenção das equações de Friedmann (2.22) e (2.23), para o fator de escala do Universo, a partir de um tratamento puramente Newtoniano. Assim, utilizando apenas as leis da dinâmica e gravitação Newtoniana eles mostraram que as equações relativistas poderiam ser obtidas através dessa abordagem. Para isso, as únicas considerações utilizadas foram o Princípio Cosmológico, caracterizando a homogeneidade e isotropia do Universo e a exigência de que a pressão é pequena o suficiente, quando comparada à densidade, para que pudesse ser desprezada. Dessa forma, Milne e McCrea encontraram que a equação Newtoniana,

responsável por reger a evolução de uma partícula de massa m e energia total E localizada a uma distância R do centro de uma esfera, homogênea e isotrópica, constituída de matéria com densidade $\rho(t)$ é:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\left(\frac{-2E}{m}\right)}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}. \quad (3.1)$$

Este resultado possui uma íntima relação com a segunda lei de Newton. Basta considerar uma massa m situada á uma distância R do centro de uma distribuição esférica de massa M , caracterizada por uma densidade constante ρ . Naturalmente, as leis de Newton tratam este problema como se toda massa M estivesse concentrada no centro dessa distribuição. Assim, a força Newtoniana exercida sobre a massa m é:

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^2}, \quad (3.2)$$

que coincide com a equação cosmológica de um fluido tipo poeira ($p=0$) na RG se usarmos $M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho R}{3}. \quad (3.3)$$

Se assumirmos que a densidade varia de acordo com $\rho = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}$, onde R_0 é uma constante e multiplicarmos a equação (3.3) por \dot{R} , o resultado pode ser integrado, obtendo uma equação formalmente idêntica à equação (2.24), porém, a constante de integração que surge neste procedimento possui uma interpretação distinta daquela que lhe foi atribuída na equação (2.22).

A similaridade entre a equação (3.1) e a equação (2.22) é notável. Se considerarmos $\frac{-2E}{m} = k$, percebe-se que essas equações são idênticas. Contudo, essa correspondência acarreta em uma série de consequências, de natureza teórica e interpretativa, que criam divergências sobre esta dedução das equações cosmológicas.

O grande resultado desses trabalhos foi mostrar que as previsões locais das cosmologias Newtonianas e relativísticas são exatamente as mesmas, já que muitos de seus resultados

básicos são algebricamente equivalentes, quando $p = 0$. O que torna a cosmologia Newtoniana útil em uma primeira aproximação de algum problema cosmológico, para só então, em uma etapa posterior, se fazer necessário o uso da RG.

Um dos principais críticos de uma abordagem Newtoniana para o problema cosmológico foi o físico David Layzer. Em um de seus trabalhos [23], Layzer afirma que a teoria de Milne e McCrea não é consistente com a gravitação Newtoniana. Por outro lado, os defensores da cosmologia Newtoniana baseavam-se em dois teoremas atribuídos a H. Bondi [24], que afirmavam que a cosmologia Newtoniana poderia ser utilizada em regiões finitas do Universo formando um sistema isolado, o que continuaria a deixar viável o uso da cosmologia Newtoniana. Contudo, mesmo em meio a críticas e sucessos, a teoria de Milne e McCrea figura como importante aproximação para o problema cosmológico. Isso se dá porque as previsões locais das cosmologias Newtoniana e relativística são indistinguíveis devido ao fato de que vários dos seus resultados básicos são algebricamente equivalentes.

Encontra-se na literatura um forma de suprimir todas essas ambiguidades na dedução das equações dinâmicas para um Universo homogêneo e isotrópico [25]. Através destas propostas, é possível através de uma reformulação da gravitação Newtoniana, baseada na geometria de Cartan, obter rigorosamente as equações cosmológicas para a dinâmica do Universo (equações de Friedmann).

Como o espaço da cosmologia Newtoniana é estático, é o movimento de partículas neste espaço que promove a expansão do Universo observada. Dessa forma, é necessário descrever o movimento dessas partículas através de algum conjunto de equações. A homogeneidade e isotropia do Universo motivam o chamado Princípio Cosmológico. Uma das principais observações que indicam este carácter é a RCF. Além disso, em largas escalas, a distribuição de matéria não apresenta flutuações, o que indica, que podemos tratar o Universo como se fosse preenchido por um fluido, assumindo assim a hipótese do contínuo. Dessa forma, para atribuir o carácter de fluido à uma substância, é necessário que o menor elemento de volume considerado contenha um número suficiente de "partículas" para que

as propriedades médias da substância variem de maneira contínua. Assim, no caso de assumirmos que o Universo possui este comportamento, as equações que são utilizadas para descrever o movimento desse fluido são as equações da hidrodinâmica. Com isso, a dinâmica das partículas constituintes do Universo, caracterizada por uma interação gravitacional, pode ser descrita pelas seguintes equações:

1) da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0, \quad (3.4)$$

2) de Euler,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} \Psi - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}, \quad (3.5)$$

3) de Poisson,

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \rho, \quad (3.6)$$

onde ρ é a densidade do fluido, \vec{u} é o campo de velocidades, que obedece à lei de Hubble $\vec{u} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}$, Ψ é o potencial gravitacional e p a pressão do fluido. Geralmente, a pressão é descrita por uma equação do tipo $p = p(\rho)$, denominada equação de estado do fluido. Diferentes equações de estados indicam diferentes constituintes do Universo. Como solução do conjunto de equações acima, se escrevermos $p = \nu \rho^\gamma$, a densidade de energia é proporcional ao fator de escala a , sendo que $\rho \propto a^{-3}$, independentemente do valor de ν e γ .

3.2.1 Teoria Perturbativa

O estudo de formação de estruturas utilizando a cosmologia Newtoniana torna possível a obtenção da equação diferencial de segunda ordem que rege o comportamento das flutuações presentes no Universo primordial, necessárias para explicar a formação de estruturas de uma maneira bem simples. Os efeitos relativísticos devido à curvatura do espaço-tempo serão desprezíveis em escalas de comprimento menores que o raio de Hubble, que é uma das regiões de interesse nesse estudo. Por isso, um tratamento Newtoniano

é plenamente justificável.

Para isso é necessário supor que o Universo seja preenchido por um fluido não-relativístico, com densidade ρ , pressão p , velocidade \vec{u} e potencial gravitacional Ψ , ao qual está submetido o fluido. A evolução deste fluido é descrita pelas equações hidrodinâmicas, ou seja, a equação da continuidade, a equação de Euler e a equação de Poisson. Quando adotamos um Universo homogêneo e isotrópico, que se encontra em expansão, as soluções dessas equações são:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}, \quad \vec{u} = H\vec{r}, \quad \vec{g} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\vec{r}. \quad (3.7)$$

Além destas soluções, a evolução do fator de escala é descrita pela equação de Friedmann (2.22) o que leva a um comportamento para o fator de escala $a \propto t^{2/3}$, independente da pressão.

Afim de estudar a evolução das pequenas flutuações no contexto de um Universo Newtoniano, homogêneo, isotrópico e em expansão, considera-se o seguinte conjunto de perturbações:

$$\rho = \rho_0(t) [1 + \delta(\vec{r}, t)] \quad (3.8)$$

$$p = p_0(t) + \delta p(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

$$\Psi = \Psi_0(\vec{r}, t) + \varphi(\vec{r}, t) \quad (3.10)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (3.11)$$

Ao inserir as perturbações anteriores nas equações (3.4), (3.5) e (3.6) e em seguida realizarmos uma decomposição de Fourier, de forma que a parte espacial e a temporal de todas as quantidades perturbadas são escritas separadamente através de $\delta f(\vec{r}, t) = \delta f(t) e^{-\frac{i\vec{n}\cdot\vec{r}}{a}}$, sendo \vec{n} o vetor de onda associado a cada modo de Fourier, obtemos as equações:

$$\dot{\delta} = -\frac{i\vec{n}\cdot\vec{v}}{a} \quad (3.12)$$

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{in}{a}\varphi - v_s^2 \frac{in}{a}\delta \quad (3.13)$$

$$-\frac{n^2}{a^2}\varphi = 4\pi G\rho\delta, \quad (3.14)$$

onde a velocidade do som é escrita como $v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$.

Com o intuito de eliminarmos a velocidade \vec{v} das equações (3.12), (3.13) e (3.14), derivamos a equação (3.12), aplicamos o divergente na equação (3.13), depois combinamos as equações resultantes para obter:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \left\{ \frac{n^2 v_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho \right\} \delta = 0, \quad (3.15)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem responsável por reger o comportamento e evolução das perturbações. As soluções desta equação fornecem um modo crescente δ_+ e um modo decrescente δ_- . No caso especial onde $v_s^2 = 0$ as soluções serão dadas por:

$$\delta_+ \propto t^{2/3} \quad e \quad \delta_- \propto t^{-1}, \quad (3.16)$$

Já a solução geral desta equação diferencial ($v_s^2 \neq 0$) é dada por:

$$\delta_{\pm} \propto t^{-1/6} J_{\mp 5/6\nu} \left(\frac{\Pi t^{-\nu}}{\nu} \right) \quad (3.17)$$

onde J é uma função especial do tipo Bessel, $\Pi^2 = \frac{t^{2\gamma-2/3} v_s^2 n^2}{a^2}$, $\nu = \gamma - 4/3$ e γ é o expoente da equação de estado do gás $p = \nu\rho^\gamma$. As propriedades destas soluções estão claramente expostas e discutidas na literatura [14, 17].

3.3 O Crescimento de Estruturas na Relatividade Geral

Apesar de uma análise Newtoniana utilizar um aparato matemático mais simples do que a RG, ela apresenta algumas limitações. Por exemplo, só podemos abordar o problema de formação de estruturas quando o comprimento de onda da perturbação for menor que

o raio de Hubble ($\lambda < d_H$) [17]. Dessa forma, a RG provê uma maneira de contornar os insucessos da cosmologia Newtoniana, através de um formalismo muito mais sofisticado, baseado na perturbação das suas equações de campo. Dessa forma, se desejarmos um tratamento mais rigoroso, não somente para o problema da formação de estruturas, como também para qualquer outra questão cosmológica é necessário utilizar a abordagem da Teoria da Relatividade Geral.

Vamos considerar a evolução das flutuações da densidade de massa no Universo primordial. O procedimento consiste em perturbar a métrica $g^{\mu\nu}$ e o tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$. Com isso, têm-se $(g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu})$ e $(T^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu})$, onde o conjunto $(g^{\mu\nu}, T^{\mu\nu})$ representa a solução de base das equações, enquanto que $(\delta g^{\mu\nu}, \delta T^{\mu\nu})$ corresponde à perturbação no tensor métrico e no tensor momento-energia respectivamente. É necessário então introduzir estas perturbações na equação de Einstein (2.16). Em nível linear, esse procedimento dá origem à uma equação diferencial de segunda ordem para o contraste da densidade, $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$, da forma [14, 17, 18]:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0(1 + \nu)(1 + 3\nu) = 0, \quad (3.18)$$

no caso de um fluido descrito por uma equação de estado do tipo $p = \nu\rho$ e nos limites de grandes comprimentos de onda para a perturbação.

Quanto ao tratamento relativístico, vale expor que, este possui uma dificuldade de origem conceitual e técnica. Isto porque, a forma dos coeficientes métricos $g^{\mu\nu}$ ou dos coeficientes do tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$, pode ser modificada quando efetuamos uma mudança de coordenadas. Essa transformação pode dar origem a um comportamento distinto da perturbação $\delta T^{\mu\nu}$, podendo até gerar uma componente que inicialmente não existia no sistema. Entretanto, mudanças de coordenadas são necessárias de acordo com a peculiaridade do problema. A forma de contornar este problema, em regiões onde o comprimento de onda da perturbação é menor do que o raio de Hubble, é desconsiderar os efeitos relativísticos proporcionados pela curvatura do espaço-tempo. Dessa forma,

quando o comprimento de onda da perturbação está dentro do horizonte de Hubble, é possível fazer com que a teoria Newtoniana seja aplicável ao problema [17].

3.4 Cosmologia neo-Newtoniana

Como já exposto, o trabalho realizado por Milne e McCrea em 1934 mostrou que as equações relativísticas para a dinâmica do Universo poderiam ser obtidas através de um tratamento Newtoniano considerando um caso onde a pressão é nula. Naturalmente, o próximo passo no aprimoramento de uma cosmologia Newtoniana seria considerar a pressão do fluido. Isto foi feito por McCrea em 1951, resultando no que chamamos de cosmologia neo-Newtoniana [26].

McCrea mostrou que, afim de se fazer prevalecer a analogia entre os casos Newtoniano e relativista, é necessário a adoção de dois conceitos físicos da relatividade. Primeiro, manter a relação de equivalência entre massa e energia, através do fator c^2 . Além disso, a possibilidade de distinção entre massa inercial e gravitacional, principalmente, porque seria fundamental considerar que a densidade de massa gravitacional σ de uma distribuição de matéria e energia era fornecida por [27]:

$$\sigma = T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3. \quad (3.19)$$

As componentes do tensor momento-energia são escritas como:

$$T_0^0 = \rho \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{p}{c^2} \quad T_\nu^\mu = 0 \rightarrow (\mu \neq \nu). \quad (3.20)$$

Então, a densidade de massa gravitacional é escrita por:

$$\sigma = \rho + 3\frac{p}{c^2}. \quad (3.21)$$

Para um Universo de densidade ρ e pressão p , em expansão, de forma que um observador

em um ponto O descreve a velocidade de um objeto na posição \vec{q} em relação a O como sendo $d\vec{q}/dt = H(t)\vec{q}$ sua aceleração é fornecida por:

$$\frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = \vec{q} \frac{dH}{dt} + \frac{d\vec{q}}{dt} H = \vec{q} \dot{H} + \vec{q} V^2. \quad (3.22)$$

Se o observador em O vê todo o espaço ao seu redor esféricamente simétrico então o módulo da força gravitacional exercida sobre o objeto em \vec{q} pela massa contida no interior de uma esfera de raio q será GM/q^2 . É neste ponto que deve-se considerar que a densidade de massa é fornecida por σ [27], para então, quando considerarmos a aceleração da partícula, equação (3.22), devida à força gravitacional, termos:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4}{3}\pi G\sigma = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p/c^2). \quad (3.23)$$

Quando identificamos $H(t)$ com o fator de escala através da lei de Hubble, $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$, encontramos a partir da equação acima as equações de Friedmann. Assim, esta foi a forma obtida por McCrea para que, considerando uma simetria esférica e um Universo homogêneo e isotrópico, as equações diferenciais obtidas para o fator de escala do Universo, coincidirem com as equações de Friedmann.

Posteriormente, em 1965, Harrison, sem utilizar qualquer conceito proveniente da relatividade obtém os mesmos resultados encontrados por McCrea em 1951 [28]. Harrison utilizou o conceito de microcosmo, onde o Universo seria particionado em células de volume infinitamente pequeno imersas em um espaço-tempo plano. Estas células, não importando o quão pequenas sejam estão em cada instante com o mesmo conteúdo, ou seja, são indistinguíveis. O estado de cada célula é independente do seu volume. Com isso, quando fazemos o volume da célula tender a zero, a métrica no interior da célula permanece plana, como na relatividade especial. Assim, da mesma forma como o conceito de microcosmo garante a homogeneidade e isotropia do Universo, também é o Princípio Cosmológico aplicado a um fluido perfeito. O que Harrison concluiu foi que o modelo

de microcosmo não necessita de conceitos advindos da Relatividade Geral. Dessa forma, utilizando apenas o formalismo da relatividade especial associado à primeira lei da termodinâmica e as equações hidrodinâmicas, Harrison obteve resultados idênticos aos de McCrea.

Como resultado dos trabalhos de Harrison e McCrea, obtemos a cosmologia neo-Newtoniana, cujas equações hidrodinâmicas são as seguintes [28]:

1) equação da continuidade ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \vec{u} \right] = 0, \quad (3.24)$$

2) equação de Euler ,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} \Psi - \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)^{-1} \vec{\nabla} p, \quad (3.25)$$

3) equação de Poisson ,

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (3.26)$$

Nestas equações, todas as noções da física Newtoniana são mantidas, como por exemplo, tempo absoluto, espaço Euclidean e força gravitacional. Neste conjunto de equações a pressão possui um papel muito mais notável. A densidade de massa gravitacional (σ) que compõe a equação de Poisson é fornecida pela equação (3.21). Junto a isso, temos que a densidade de massa inercial, presente nas equações da continuidade e de Poisson é passa a ser escritos em termos da pressão do fluido.

3.4.1 Análise Perturbativa do Modelo neo-Newtoniano

O objetivo desta seção é apresentar uma análise perturbativa das equações da hidrodinâmica neo-Newtoniana juntamente com uma interpretação dos termos associados à pressão que surgem neste formalismo. Tal desenvolvimento foi efetuada pela primeira vez em por *Lima et al* [29]. Foram Sachs e Wolfe os primeiros a verificar, na década de

sessenta, que o tratamento perturbativo das equações (3.24), (3.25) e (3.26) não fornece o mesmo resultado, no calibre síncrono, da teoria relativista [30]. Se realizarmos um procedimento perturbativo, assim como o exposto na seção (3.2.1), neste conjunto de equações, encontramos:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0(1+\nu)(1+3\nu) + \frac{\dot{a}}{a}\nu\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\dot{\delta} + \frac{\ddot{a}}{a}\nu\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\delta = \frac{v_s^2}{a^2}\nabla^2\delta. \quad (3.27)$$

Se compararmos a equação acima com a equação (3.18), observamos que (3.27) possui dois termos adicionais no lado esquerdo da equação que não possuem análogos com o caso relativista. A origem destes termos está ligada ao gradiente da pressão na equação da continuidade (3.24). Assim, vemos que a equação (3.24) corresponde à equação da continuidade apenas no caso homogêneo. Este resultado parece não viabilizar o uso do conjunto de equações neo-Newtonianas em um estudo perturbativo. No entanto, é possível modificar a equação (3.24) afim de solucionar este problema [29]. Desta forma a nova equação da continuidade é escrita como:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) + \frac{p}{c^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0. \quad (3.28)$$

A explicação para esta modificação é que o termo de fonte (último termo da equação acima) está relacionado com o trabalho necessário para um fluido expandir de um volume V para $V + dV$.

$$\frac{1}{V}\frac{dW}{dt} = p\frac{4\pi a^2 da}{\frac{4}{3}\pi a^3 dt} = 3\frac{\dot{a}}{a}p = p\vec{\nabla}\cdot\vec{u}. \quad (3.29)$$

Assim, a modificação proposta na equação da continuidade é na verdade a inserção do termo acima (corrigido pelo fator $\frac{1}{c^2}$) na equação (3.4).

Apesar de as equações (3.24) e (3.28) resultarem na mesma equação de conservação para uma distribuição homogênea, existe uma grande diferença entre elas no caso não homogêneo. Quando perturbações são incluídas, as equações perturbadas resultantes são diferentes. De forma que, quando utilizamos (3.28) no lugar de (3.24), obtemos

uma equação consistente com a teoria relativista. Essa modificação resolve a contradição apontada por Sachs e Wolfe.

Vamos considerar uma equação de estado da forma $p = \nu\rho$ e proceder com uma análise perturbativa, através de um procedimento análogo ao feito na seção (3.2.1), porém, nas equações (3.28), (3.25) e (3.26). As perturbações das quantidades físicas estão expressas em (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11), que quando inseridas nestas equações fornecem:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\vec{\nabla}_r \varphi - \frac{\vec{\nabla}_r \delta p}{(\rho + p)}, \quad (3.30)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}_r \delta \right] - \frac{3\dot{a}}{a} p_0 \delta + \frac{3\dot{a}}{a} \delta p + (p + \rho) \vec{\nabla}_r \vec{v} = 0, \quad (3.31)$$

$$\vec{\nabla}_r^2 \varphi = 4\pi G \rho_0 \left(\delta + \frac{3\delta p}{\rho_0} \right). \quad (3.32)$$

A mudança para as coordenadas co-móveis é atribuída à substituição $\vec{q} = \frac{\vec{r}}{a}$. Esta mudança acarreta em $\vec{\nabla} = a\vec{\nabla}_r$. A derivada temporal de uma função arbitrária f torna-se:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f} - \frac{\dot{a}}{a} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} f. \quad (3.33)$$

Esta mudança de coordenadas, associada a utilização da equação de estado $p = \nu\rho$, nos fornece as seguintes equações:

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} \varphi}{a} - \frac{v_s^2 \vec{\nabla} \delta}{a(1 + \nu)}, \quad (3.34)$$

$$\dot{\delta} + \frac{(1 + \nu) \vec{\nabla} \vec{v}}{a} = 0, \quad (3.35)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho_0 a^2 (1 + 3\nu) \delta. \quad (3.36)$$

Assim, ao combinarmos as equações acima, a equação perturbada obtida ao considerarmos

não homogeneidades na teoria neo-Newtoniana é:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0(1 + \nu)(1 + 3\nu) = 0. \quad (3.37)$$

Todas as quantidades envolvidas na equação acima são idênticas às aquelas já definidas anteriormente. Com isso, observa-se que as equações perturbadas, relativistas (no calibre síncrono) e neo-Newtonianas, são idênticas nos limites de grandes comprimentos de onda. Este resultado sugere que um estudo perturbativo baseado na cosmologia neo-Newtoniana pode indicar resultados tão úteis quanto aos da relatividade, utilizando um formalismo muito mais simples como o Newtoniano.

3.5 Conclusões Parciais

Neste capítulo apresentamos todo o formalismo necessário para um estudo perturbativo das equações cosmológicas de fluidos. A cosmologia Newtoniana foi exposta, onde procuramos enfatizar suas raízes conceituais e técnicas. Trata-se de uma importante ferramenta no estudo da formação de estruturas em larga escala para modos onde o comprimento de onda da perturbação é menor que o raio de Hubble ($\lambda < d_H$). De uma forma geral, a aplicação das equações Newtonianas é restrita à matéria não-relativística e não pode ser usada para esta componente mesmo em situações onde o comprimento de onda da perturbação seja muito menor que o raio de Hubble ($\lambda \ll d_H$). Já as perturbações com comprimento de onda maior que o raio de Hubble ($\lambda > d_H$) devem ser tratadas através do formalismo relativístico.

Como exposto neste capítulo, o desenvolvimento de uma cosmologia baseada em conceitos físicos Newtonianos, passou por um processo de desenvolvimento entre as décadas de 1930 e 1960. A formulação do uso das equações hidrodinâmicas para a cosmologia em 1934, não levavam em conta a pressão dos fluidos cósmicos. A evolução natural da teoria exigiu que a pressão fosse posteriormente considerada nestas equações, afim de se

estudar situações mais complexas e realistas. Tratava-se de uma tentativa de aproximar a Cosmologia Newtoniana de uma avançada teoria como a RG. Mesmo porque, o aparecimento do termo de pressão na RG é interpretado como um efeito puramente relativístico e demonstra uma radical mudança conceitual da gravitação Newtoniana para a relativista.

O papel da pressão na RG é demonstrar que a interação gravitacional não é um efeito somente da densidade de energia. A pressão também gravita e é um dos responsáveis pela curvatura do espaço-tempo. De acordo com a equação (2.24) uma pressão positiva possui o mesmo papel atrativo que a densidade de matéria e energia do Universo enquanto que, no contexto Newtoniano, a pressão possui um papel unicamente repulsivo. De qualquer forma, no limite $p = 0$ (matéria não-relativística) as equações da RG recaem na teoria Newtoniana. Isto indica uma equivalência entre as teorias, mesmo para $p \ll \rho$, mas, ao mesmo tempo é necessário um cuidado maior na parte interpretativa do papel da pressão nas duas teorias.

Quando os efeitos da pressão são levados em conta, as equações da cosmologia Newtoniana são modificadas dando origem às equações (3.24), (3.25) e (3.26), que são a base da chamada, cosmologia neo-Newtoniana. No entanto, é necessário fazer uma modificação em uma dessas equações, a saber, equação da continuidade, afim de que a equação para o contraste da densidade obtida desta forma seja compatível com o tratamento relativista [29].

Deve-se notar que a compatibilidade citada acima restringe-se à perturbações adiabáticas com uma equação de estado constante. É possível encontrar na literatura, uma análise dos limites de validade das equações perturbadas no caso de uma equação de estado mais geral, do tipo, $p = \nu\rho^\gamma$ [32]. Nesta situação, quando confrontamos os resultados do modelo neo-Newtoniano com o modelo relativista não observa-se a mesma concordância, como no caso $p = \nu\rho$. Esta questão restringe, *a priori*, a aplicabilidade da cosmologia neo-Newtoniana, se desejarmos utilizar modelos constituídos de fluidos cósmicos descritos por uma equação de estado, mais geral, do tipo $p = \nu\rho^\gamma$. Entretanto, o objetivo primário desse trabalho consiste em investigar a possibilidade de um tratamento

deste tipo. Queremos observar, através da determinação de parâmetros cosmológicos, a aplicabilidade deste formalismo via determinação de parâmetros cosmológicos, ou seja, verificar se, apesar desta dificuldade teórica para o caso $p = \nu\rho^\gamma$, os resultados encontrados para a teoria neo-Newtoniana são satisfatórios com a observação. No próximo capítulo, proporemos um modelo cosmológico que seja capaz de comparar os modelos Newtoniano e neo-Newtoniano.

Capítulo 4

Gás de Chaplygin e a Formação de Estruturas

4.1 Introdução

De acordo com o modelo cosmológico padrão o Universo deve ser composto por duas componentes desconhecidas. Uma delas seria a Matéria Escura (ME) que possui papel fundamental no processo de formação das estruturas observadas e a outra, a Energia Escura (EE) que explica a expansão acelerada do Universo. No entanto, torna-se viável investigar a possibilidade de substituir Energia e Matéria Escura por uma única componente com a função de desempenhar os dois papéis, simultaneamente, reduzindo assim o número de componentes desconhecidas do Universo. Esta componente seria designada, então, como única componente desconhecida do Universo. Os modelos que fornecem uma única descrição para a ME e EE, são conhecidos como modelos de quartessência. O principal candidato a modelo de quartessência é o gás de Chaplygin, que tem sido muito estudado nos últimos anos, principalmente no âmbito da formação de estruturas [38].

Neste capítulo encontra-se a base do modelo proposto. Investigamos a possibilidade de um Universo composto por matéria bariônica e gás de Chaplygin generalizado ser consistente com os dados observacionais. Os resultados que esperamos encontrar são os

parâmetros cosmológicos e os parâmetros relacionados ao gás de Chaplygin generalizado que melhor se adequam ao nosso modelo. Realizaremos o estudo perturbativo tanto nas equações da Cosmologia Newtoniana quanto na neo-Newtoniana com o objetivo de fazer um estudo comparativo sobre a aplicabilidade destas duas teorias. Neste capítulo obteremos as equações diferenciais de segunda ordem que regem o comportamento das flutuações na densidade para um Universo composto por dois fluidos, sem interação.

4.2 As desconhecidas componentes do Universo

4.2.1 Matéria Escura

Toda informação que temos do Universo é devido a algum tipo de radiação observada, como fótons, raios-X, etc. No entanto, a dinâmica de alguns sistemas gravitacionais não é compatível com a quantidade de matéria que, a princípio, observamos. Alguns sistemas possuem uma razão massa-luminosidade Υ da ordem da centena em unidades solares, ou seja, existe muito mais massa no sistema do que era de se esperar, já que se tomarmos nosso Sol como unidade padrão, dizemos que a razão massa-luminosidade do nosso Sol é igual a um $\Upsilon_{\odot} = 1 M_{\odot}/L_{\odot}$ (uma massa solar M_{\odot} por uma luminosidade solar L_{\odot}). Essa quantidade de matéria que não pode ser detectada através da radiação eletromagnética que emite é a chamada Matéria Escura. Matéria Escura é então, qualquer tipo de matéria cuja presença só pode ser aferida por processos dinâmicos que relacionam a matéria do sistema com grandezas cinemáticas, como por exemplo, a velocidade de rotação de galáxias em um aglomerado de galáxias. No modelo padrão da física de partículas, não existem reais candidatos para constituir este tipo de matéria. Algumas alternativas teóricas residem na possibilidade de a Matéria Escura ser composta por áxions resultantes de um processo de quebra de simetria da GUT (Grand Unified Theories)¹ em um Universo primordial, como também, serem partículas chamadas neutralinos que surgem na supersimetria, já que esta exige a existência de um parceiro supersimétrico para o neutrino.

¹Que em português significa Grande Teoria de Unificação

Das observações da curva de rotação de aglomerados de galáxias, constatou-se que não existia uma concordância entre a curva observada e os resultados teóricos da mecânica Newtoniana, quando aplicada à aglomerados. Foi o astrônomo, Fritz Zwicky, na década de trinta, o primeiro a observar tal desacordo [31]. Ao trabalhar com o aglomerado de COMA, Zwicky, utilizando o Teorema do Virial, verificou que não havia uma diminuição no valor da velocidade das galáxias a medida que estas se afastavam do centro do aglomerado. Esta observação está em total desacordo com a lei Newtoniana, que diz que o valor da velocidade dessas galáxias deveria diminuir obedecendo uma lei de inverso da distância. Dessa forma, podemos pensar em duas explicações para tal fato. A primeira hipótese, que diz respeito à Matéria Escura, consiste em propor a existência de um acréscimo de matéria ao redor do aglomerado para explicar tal observação. Esta matéria acrescida, formaria um halo ao redor do aglomerado, sendo chamado então de Halo de Matéria Escura. Matéria Escura é então algum tipo de matéria que por alguma razão se faz presente no Universo, afim de explicar a dinâmica observada em pequena escala, mas que no entanto, não foi até hoje detectada. Uma segunda alternativa para este problema, seria propor uma modificação na mecânica Newtoniana de forma à corrigir esta grave diferença entre teoria e observação. Uma das alternativas é a teoria MOND (Modified Newtonian Dynamics), proposta na década de oitenta, por Mordehai Milgrom [33]. A teoria MOND representa uma modificação na segunda lei de Newton, mas que teria validade somente em objetos que estivessem submetidos à acelerações menores que o parâmetro de aceleração crítica $a_0 = 1.2 \times 10^{-10} m/seg^2$. De acordo com esta teoria, não seria necessário recorrer ao acréscimo de matéria em sistemas gravitacionais para explicar a dinâmica observada. A teoria MOND corrige satisfatoriamente o problema da curva de rotação de galáxias, como exposto acima [34]. Entretanto, a Matéria Escura possui outro papel fundamental no modelo cosmológico, no que diz respeito à formação de estruturas. Para esta questão a teoria MOND não exhibe, ainda, resultados concretos. O que justificaria, aliás, uma investigação mais profunda sobre a utilização da teoria MOND no processo de formação de estruturas. Ainda no contexto de teorias alternativas para a gravitação, Jacob Bekenstein

propôs uma formulação covariante e relativística para a gravitação como alternativa para a Matéria Escura [35]. Esta teoria é chamada TeVeS (proveniente de Tensorial-Vetorial-Escalar) e possui como limite não relativístico a teoria MOND. Alguns avanços na questão do processo de formação de estruturas baseados nesta teoria podem ser encontrados em [36].

As estruturas observadas hoje são o resultado de um processo de colapso gravitacional, que se deu início quando o Universo tinha em torno de 400.000 anos [14, 17, 18]. Esta é a chamada época do desacoplamento, quando matéria e radiação deixam de estar ligadas. Se considerarmos um sistema composto por uma componente bariônica e outra de Matéria Escura é possível estudar a evolução de cada componente através da equação (3.15). Neste caso, como trata-se, na verdade, de uma generalização da equação (3.15) para as várias componentes do Universo, o termo gravitacional contém a contribuição de todos os constituintes de forma que a equação (3.15) torna-se o sistema de equações:

$$\ddot{\delta}_A + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_A + \frac{k^2 v_{sA}^2}{a^2} \delta_A = 4\pi G \sum_j \rho_j \delta_j, \quad (4.1)$$

com o subscrito A indicando cada componente do Universo e o somatório em i representando a contribuição gravitacional de todas as componentes.

Na situação de termos as componentes bariônica e de Matéria Escura, verifica-se que as flutuações bariônicas não evoluem até a época do desacoplamento, pois ela está interagindo com a radiação. Enquanto isso, as perturbações na Matéria Escura podem evoluir livremente na época anterior ao desacoplamento [17]. O que significa que logo após o desacoplamento temos: $\rho_{ME}\delta_{ME} \gg \rho_b\delta_b^2$. Quando resolvemos a equação (4.1) para estas duas componentes suas soluções indicam que as flutuações na matéria bariônica crescem em épocas posteriores ao desacoplamento, influenciadas pelas flutuações na matéria escura ($\delta_b \rightarrow \delta_{ME}$). Assim, este resultado mostra que as perturbações na matéria bariônica são induzidas pelas flutuações na Matéria Escura, após o desacoplamento [17], ou seja, se

² ME designa a componente de Matéria Escura enquanto que b a componente bariônica

não houvessem as flutuações na matéria escura não se daria o crescimento das flutuações na matéria bariônica e conseqüentemente não observaríamos as estruturas astronômicas existentes. A Matéria Escura desempenha papel fundamental no processo de formação de estruturas, sendo que, qualquer outra teoria que se proponha a não invocá-la de maneira fenomenológica deve descrever, também, corretamente o Universo, assim como é observado.

4.2.2 Energia Escura

O modelo de Friedmann, assim como apresentado na seção (2.5), não entra em conflito com grande parte das observações. No entanto, existem certas observações às quais, ele ainda não é capaz de explicar. Como já dito na última seção, afim de explicar a dinâmica de sistemas gravitacionais e o processo de colapso gravitacional é necessário invocar uma componente, de origem ainda desconhecida, chamada Matéria Escura.

Existe ainda a constatação, através das observações de supernovas, de que o Universo está em um processo de expansão acelerada. Esta observação é, a princípio, contraditória pois a matéria do Universo está submetida a uma interação gravitacional, unicamente, atrativa e não repulsiva, como é possível observar na eletrostática por exemplo. Estes resultados foram pela primeira vez obtidos em 1998, quando as observações de supernovas mostraram, que o Universo está em uma fase de expansão acelerada [1,2]. O desvio para o vermelho destes objetos, aparece mais fraco do que o esperado, tanto para modelos que consideram universos abertos quanto planos. Dessa forma, confirmou-se que o Universo está acelerado e não desacelerado, como seria de se esperar, devido à atração gravitacional da matéria. Logo, deve haver algum tipo de força repulsiva, atuando em largas escalas, para explicar esta aceleração. Neste contexto, surge a idéia de Energia Escura, como ente responsável pela aceleração do Universo.

Um dos candidatos à Energia Escura é a constante cosmológica Λ . A adição de uma constante às equações de Einstein fornece soluções que determinam um Universo estático com a característica de que a massa desse Universo decresce juntamente com seu raio.

Este modelo descarta a existência de um Universo estático e vazio, concordando assim com os postulados de Mach. A constante cosmológica se faz necessária no Universo estático de Einstein, pois sem ela, a densidade de energia deveria assumir valores negativos. Se observarmos a equação (2.24), a única forma de termos uma evolução para o fator de escala com velocidade constante é $\rho = -3p$. Da mesma forma, para que o fator de escala possua um comportamento acelerado ($\ddot{a} > 0$), como observado, devemos ter $(\rho + 3p < 0)$, o que exige que ou a densidade de energia ou a pressão do fluido sejam negativas. A constante cosmológica pode ser interpretada então, como uma energia de vácuo, que permeia todo o Universo e promove a expansão acelerada que é observada. Resultados recentes indicam que se considerarmos um Universo plano, como as observações indicam e separarmos as componentes do Universo em matéria, caracterizada por Ω_m e energia de vácuo, Ω_Λ , encontramos [37]:

$$\Omega_\Lambda = 0,71 \pm 0,05 \qquad \Omega_m = 0,29 \pm 0,05. \qquad (4.2)$$

Este resultado sugere que 70% do conteúdo do Universo está sob a forma de algum tipo de energia desconhecida. Esta componente escura deve resistir ao colapso gravitacional, caso contrário já teria sido detectada nos halos de galáxias. No entanto, se a maioria da energia do Universo resiste ao colapso gravitacional, isso impediria as estruturas de se formar. Este impasse pode ser resolvido se esta componente escura não atuou significativamente no passado, na época da formação das estruturas, sendo que somente em um passado recente ela passou a ser a componente dominante, explicando assim a atual expansão acelerada do Universo. Este argumento exige um candidato à Energia Escura que, de acordo com a RG, possua uma pressão negativa. Dessa forma, podemos descartar a Matéria Escura, radiação, neutrinos ou bárions que possuem pressão positiva ou nula. Espera-se um comportamento do tipo da constante cosmológica onde $p \approx -\rho$. É fácil observar que a constante cosmológica possui esta característica se englobarmos Λ ao tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ no lado direito da equação de Einstein.

É importante compreender a origem desta Energia Escura e entender por que ela representa mais da metade da constituição do Universo. Não bastasse a questão da origem da Energia Escura outro aspecto intrigante é o valor que ela possui hoje. É possível fazer uma estimativa teórica para a densidade de energia de vácuo, através da energia de ponto zero das oscilações quânticas. Por outro lado, através das observações podemos utilizar a relação entre as frações de massa Ω para medir a densidade de energia de vácuo através da observação da aceleração do Universo. Estes dois resultados mostram que o valor teórico para a densidade de energia de vácuo do Universo é 120 ordens de grandezas maior que o resultado observacional [11]:

$$\rho_{\Lambda}^{teo} \approx 1.4 \times 10^{74} Gev^4 = 3.2 \times 10^{91} g/cm^3,$$

$$\rho_{\Lambda}^{obs} \approx 0.7\rho_c = 2.9 \times 10^{-11} Gev^4 = 0.66 \times 10^{-29} g/cm^3.$$

Este resultado pode ser amenizado, mas não resolvido, se a supersimetria for levada em conta no cálculo do valor teórico. Com isso, estes resultados representam, sem dúvidas, uma das maiores discordâncias entre teoria e observação na ciência, fazendo com que o problema da Energia Escura permaneça ainda como uma questão em aberto na física.

4.2.3 O Gás de Chaplygin

A fim de uma total compreensão da atual cosmologia torna-se inevitável explicar a expansão acelerada do Universo e o processo de formação das estruturas cósmicas. Para estas duas questões não existem ainda respostas definitivas e conclusivas, que não invoquem as desconhecidas componentes do Universo, a saber, Matéria e Energia Escura. A origem deste setor escuro do Universo é totalmente desconhecida. O que se espera é que, em um futuro próximo, possamos descobrir através dos modernos aceleradores de partículas, como o LHC, constituintes da matéria até então desconhecidas pelo modelo padrão da física de partículas, que seriam candidatas à Matéria Escura. O caso da Energia Escura

é um pouco mais complicado. Não existe um provável candidato natural para esta força misteriosa, além da constante cosmológica, que impulsiona a expansão do Universo. De qualquer forma, tanto para a ME quanto para a EE, não existem ainda evidências de suas existências nos laboratórios.

Uma simples alternativa para este problema é a substituição das duas componentes escuras por uma simples componente, que exerça o papel de ME e EE, em suas respectivas escalas. A grande vantagem dessa abordagem é a existência de apenas um ente desconhecido no Universo. Estes modelos de unificação para a ME e EE são chamados de modelos de quartessência, já que remetem a uma constituição para o Universo de bárions, neutrinos, radiação e um elemento desconhecido. Um dos principais candidatos à quartessência é o gás de Chaplygin. Este gás é caracterizado por uma equação de estado exótica, onde a pressão assume valores negativos sempre que a densidade do fluido for positiva, o que é de se esperar:

$$p_{ch} = -\frac{A}{\rho_{ch}}, \quad (4.3)$$

onde A é uma constante positiva. Esta equação de estado foi introduzida pelo físico russo S. Chaplygin, em 1904, na descrição de processos aerodinâmicos [39]. Uma pressão negativa pode ser utilizada no estudo de sólidos deformados [40], nas faixas de estados quânticos no contexto do efeito Hall e em outros fenômenos. As aplicações do Gás de Chaplygin estão também relacionadas à física de partículas [41] e sua origem pode ser explicada na teoria de cordas. No contexto da teoria de cordas, a equação de estado de gás de Chaplygin é obtida a partir da ação de Nambu-Goto para d-branas em um espaço-tempo $(d+2)$, quando aplicamos a parametrização do cone de luz [42]. Além disto, o gás de Chaplygin é o único fluido que admite uma generalização supersimétrica [43]. São várias as aplicações para o gás de Chaplygin. No entanto, a que nos interessa é na cosmologia.

Uma característica importante do gás de Chaplygin é referente a sua velocidade do som. Devido à sua equação de estado conter o termo de densidade no denominador, ela dá origem a uma velocidade do som positiva, $v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho^2}$, que não é algo trivial para

fluidos com pressão negativa.

A grande vantagem de um modelo de quartessência, que utilize o gás de Chaplygin como fluido, é explicar tanto o processo de formação de estruturas quanto a aceleração do Universo, atribuindo isso a somente um elemento. No caso da expansão do Universo é a própria equação de estado do gás de chaplygin que, por possuir uma pressão negativa, indica um comportamento acelerado para o Universo, segundo a equação (2.24). Quando inserimos a equação (4.3) na equação de conservação de momento da relatividade (2.15), obtemos:

$$\rho_{ch} = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (4.4)$$

onde a é o fator de escala do universo e B é uma constante de integração. A partir da equação acima, podemos verificar que o comportamento da densidade no início do Universo, $a \approx 0$, corresponde a era da matéria onde $\rho_m \approx a^{-3}$. À medida que o Universo evolui, $a \approx 1$, o comportamento da densidade do gás de Chaplygin aproxima-se da constante cosmológica, o que significa uma expansão acelerada do Universo. Esta característica dual é a chave para a proposta de unificação da Matéria e Energia Escura, através do gás de Chaplygin, já que ele promove a transição entre um estágio de expansão desacelerada para a atual fase de expansão acelerada.

Um modelo um pouco mais elaborado para um fluido, seria o gás de Chaplygin generalizado (GCG), que é caracterizado pela equação de estado:

$$p_{ch} = -\frac{A}{\rho_{ch}^\alpha}, \quad (4.5)$$

com A e α constantes positivas. Que por sua vez, fornece a seguinte relação para a densidade do Universo:

$$\rho_{ch} = \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (4.6)$$

Modelos cosmológicos que utilizam o GCG e matéria, como duas únicas componentes do Universo, são uma aproximação mais realista dentro da cosmologia. Trata-se de um

modelo que apresenta uma maior possibilidade de comparação com os dados observacionais. Os modelos teóricos que utilizam o gás de Chaplygin generalizado tem sido confrontados com várias fontes de dados observacionais [38]. Os dados de supernovas indicam um parâmetro $\alpha > 1$ [44], enquanto que o espectro de potência das observações do WMAP e BOOMERanG sugerem $\alpha \leq 0.6$ [45]. Outros vínculos nos parâmetros do gás de Chaplygin são obtidos, por exemplo, através dos dados de lentes gravitacionais [46].

A utilização do gás de Chaplygin como principal representante da componente escura do Universo, ainda necessita de resultados mais promissores que o qualifiquem como verdadeiro responsável pelas observações que, hoje, atribuímos à Energia e Matéria Escura. Sem dúvida, as questões relevantes à Matéria e Energia Escura, não somente no contexto do gás de Chaplygin, mas como também no âmbito de toda a cosmologia moderna, ainda estão distantes de serem solucionadas, o que requer cada vez mais, modelos teóricos capazes de confrontar suas previsões com os dados observacionais.

4.3 Perturbações na densidade para um modelo de dois fluidos: caso da cosmologia Newtoniana

A equivalência entre as equações modificadas para fluidos cosmológicos (teoria neo-Newtoniana) e a cosmologia Newtoniana padrão é alcançada quando fazemos $p = 0$. Nosso objetivo é analisar um modelo composto por um fluido sem pressão e outro fluido com pressão. Dessa maneira, uma análise perturbativa de tal sistema deve levar em conta os componentes físicos dos dois fluidos, como velocidade, densidade, potencial gravitacional e pressão, se for o caso. Nesta seção utilizaremos a abordagem Newtoniana para o sistema proposto, afim de observar o comportamento do contraste da densidade das duas componentes distintas (matéria e o fluido com pressão) e confrontar este comportamento com a observação. A equação de estado para o fluido com pressão será considerada da forma $p = \nu\rho^\gamma$, aumentando a generalidade do nosso modelo e nos possibilitando fazer, ao fim da análise perturbativa, a determinação dos valores dos parâmetros cosmológicos que

melhor ajustam nosso modelo aos dados observacionais através do espectro de potência. Assim, o conjunto de equações que se obtém através desse modelo de dois fluidos é:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_c \vec{u}_c) = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_c}{\partial t} + \vec{u}_c \cdot \vec{\nabla}_r \vec{u}_c = -\vec{\nabla}_r \Psi - \frac{\vec{\nabla}_r p_c}{\rho_c}, \quad (4.8)$$

$$\nabla_r^2 \Psi = 4\pi G (\rho_c + \rho_m), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_m \vec{u}_m) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_m}{\partial t} + \vec{u}_m \cdot \vec{\nabla}_r \vec{u}_m = -\vec{\nabla}_r \Psi. \quad (4.11)$$

Nestas equações, φ é o potencial gravitacional ao qual estão submetidos os dois fluidos, p_c , ρ_c e \vec{u}_c são respectivamente a pressão, a densidade e o campo de velocidades do fluido com pressão, enquanto que ρ_m e \vec{u}_m são respectivamente a densidade e o campo de velocidade do fluido sem pressão. Neste conjunto de equações cada fluido conserva-se separadamente o que explica escrevermos as equações (4.7) e (4.10). Também, existe uma equação de Euler para descrever a dinâmica de cada fluido separadamente, equações (4.8) e (4.11). No entanto, quando computamos o potencial através da equação de Poisson desta distribuição de matéria e energia, equação (4.9), ambos os fluidos são responsáveis pelo potencial Ψ . No contexto de um Universo em expansão adota-se a lei de Hubble $\vec{u}_m = \vec{u}_c = H\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$, onde a é o fator de escala do Universo, faz-se $c=1$ com o intuito de simplificar os cálculos, e consideraremos que o fluido com pressão, como já exposto, possui equação de estado $p = \nu\rho^\gamma$. Então, se estas equações descrevem o comportamento dos fluidos dentro do modelo proposto acima, suas soluções deverão obedecer também às soluções em nível e base que caracterizam um Universo homogêneo e isotrópico:

$$\rho_c(t) = \frac{\rho_{c0}}{a^3}, \quad \rho_m(t) = \frac{\rho_{m0}}{a^3}, \quad p_c = p_c(t), \quad \vec{\nabla} \Psi = \frac{4\pi G}{3} \rho_t \vec{r}. \quad (4.12)$$

Temos que ρ_t significa a densidade total do Universo. Também, ρ_{c0} e ρ_{m0} são as densidades do fluido com pressão e da matéria medidos hoje.

Voltando ao nível perturbativo, insere-se o seguinte conjunto de perturbações abaixo nas equações (4.7)-(4.11):

$$\rho_c = \rho_{c0} + \delta\rho_c \quad \vec{u}_c = \vec{u}_{c0} + \delta\vec{v} \quad p_c = p_{c0} + \delta p_c \quad (4.13)$$

$$\rho_m = \rho_{m0} + \lambda\rho_m \quad \vec{u}_m = \vec{u}_{m0} + \delta\vec{v} \quad \Psi = \Psi_0 + \delta\varphi \quad (4.14)$$

É importante notar que as quantidades δ , λ , δp , $\delta\vec{v}$ e $\delta\varphi$ são consideradas pequenas quando comparadas em nível das soluções de base. Assim, depois de adotarmos o mesmo procedimento da seção (3.2.1), obtemos as seguintes equações para os contrastes de densidade $\delta = \frac{\delta\rho_c}{\rho_c}$ e $\lambda = \frac{\lambda\rho_m}{\rho_m}$:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \left(\frac{n^2 v_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho_c\right)\delta = 4\pi G\rho_m\lambda, \quad (4.15)$$

$$\ddot{\lambda} + 2H\dot{\lambda} - 4\pi G\rho_m\lambda = 4\pi G\rho_c\delta. \quad (4.16)$$

Na equação acima, $v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ representa a velocidade do som, n é o número de onda da perturbação, que aparece devido ao fato de termos expandido a dependência espacial das quantidades perturbadas em ondas planas. É importante notar que as duas equações acima, formam um sistema de equações diferenciais parciais acopladas, já que as variáveis λ e δ não são independentes. Este fato dificulta a resolução destas equações, implicando em um procedimento numérico na resolução do sistema. Dessa forma, o procedimento numérico envolvido na resolução das equações (4.15) e (4.16) requer uma mudança da variável independente t para o fator de escala a , usando a propriedade:

$$\frac{d}{dt} = \dot{a} \frac{d}{da} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \ddot{a} \frac{d}{da} + \dot{a}^2 \frac{d^2}{da^2}. \quad (4.17)$$

Das equações de Friedmann (2.22) e (2.24) podemos obter as expressões para a primeira

e segunda derivadas do fator de escala em função dos parâmetros fracionários de massa e do próprio fator de escala. Estas relações são definidas como:

$$f(a) = \dot{a}^2 = a^2(\Omega_m + \Omega_c + \Omega_k), \quad (4.18)$$

$$j(a) = \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\Omega_c + \Omega_m}{2a(\Omega_m + \Omega_c + \Omega_k)}. \quad (4.19)$$

Com estes resultados podemos reescrever as equações perturbadas em termos de parâmetros adimensionais, resultando em uma equação diferencial para o fator de escala do Universo.

Em termos do parâmetros cosmológicos $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}$ e $\Omega_c = \frac{8\pi G\rho_c}{3H_0^2}$, podemos reescrever as equações (4.15) e (4.16) como:

$$\delta'' + \left(\frac{2}{a} + j(a)\right) \delta' + \left(\frac{n^2 v_s^2}{H_0^2 a^2} - \frac{3\Omega_c}{2}\right) \frac{\delta}{f(a)} = \frac{3\Omega_m}{2f(a)} \lambda, \quad (4.20)$$

$$\lambda'' + \left(\frac{2}{a} + j(a)\right) \lambda' - \frac{3\Omega_m}{2} \frac{\lambda}{f(a)} = \frac{3\Omega_c}{2f(a)} \delta, \quad (4.21)$$

onde os pontos que representavam uma derivada em relação ao tempo foram substituídas pelas linhas que representam uma derivação em relação ao fator de escala, além disso H_0 é o parâmetro de Hubble medido hoje. Os parâmetros de massa são escritos como função do fator de escala do universo:

$$\Omega_m = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} \quad \Omega_c = \frac{\Omega_{c0}}{a^3} \quad (4.22)$$

Nas definições acima, Ω_{m0} e Ω_{c0} são os valores dos parâmetros cosmológicos medidos atualmente. Nestas equações Ω_k é o parâmetro associado à curvatura do espaço. Quanto ao valor dos parâmetros cosmológicos medidos hoje, teremos válido que:

$$\Omega_{k0} + \Omega_{m0} + \Omega_{c0} = 1 \quad (4.23)$$

Um parâmetro que precisa ser definido no modelo Newtoniano é o parâmetro de desacel-

eração do Universo q_0 . A partir da equação de Friedmann (2.24), podemos escrever para o modelo Newtoniano, onde se faz a aproximação, $p \ll \rho$:

$$\begin{aligned} -q_0 &= \frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{b_0} + \rho_{c_0}) \\ q_0 &= \frac{\Omega_{m0} + \Omega_{c0}}{2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

De acordo com esta definição, como Ω_{m0} e Ω_{c0} sempre admitem valores positivos o parâmetro de desaceleração do Universo, para a cosmologia Newtoniana será sempre positivo, ou seja, um Universo desacelerado. Visto que recentes observações indicam justamente o contrário, um Universo acelerado, devemos nos restringir ao uso da cosmologia Newtoniana.

4.4 Perturbações na densidade para um modelo de dois fluidos: caso da cosmologia neo-Newtoniana

O objetivo desta seção é obter um conjunto de equações diferenciais acopladas para o modelo proposto na seção anterior, utilizando, no entanto, as equações hidrodinâmicas pertencentes à cosmologia neo-Newtoniana. Assim como na seção anterior, o sistema de dois fluidos composto por matéria bariônica e um fluido com pressão é tratado perturbativamente. Utilizando o conjunto de equações propostas por *Lima et al* [29], as equações que fornecem a base do nosso modelo são:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_c \vec{u}_c) + p_c \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_c = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_c}{\partial t} + \vec{u}_c \cdot \vec{\nabla}_r \vec{u}_c = -\nabla_r \Psi - \frac{\vec{\nabla}_r p_c}{p_c + \rho_c}, \quad (4.26)$$

$$\nabla_r^2 \Psi = 4\pi G (\rho_c + 3p_c + \rho_m), \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_m \vec{u}_m) = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_m}{\partial t} + \vec{u}_m \cdot \vec{\nabla}_r \vec{u}_m = -\vec{\nabla}_r \Psi. \quad (4.29)$$

Neste conjunto de equações, assumimos que $c = 1$ e, no contexto de um Universo homogêneo e isotrópico, $\vec{v} = H\vec{r}$ e $\rho = \rho(t)$. Da equação da continuidade (3.28), podemos obter o comportamento para a densidade do fluido com pressão. Dessa forma, dentro das condições assumidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\rho_c \vec{u}_c) + p_c \nabla \cdot \vec{u}_c &= 0 \\ \dot{\rho}_c + 3H(\rho_c + p_c) &= 0, \end{aligned}$$

como $p = \nu \rho_c^\gamma$, então,

$$\dot{\rho}_c + 3H(\rho_c + \nu \rho_c^\gamma) = 0,$$

o que fornece, após integração da equação diferencial acima:

$$\rho_c = \{u_0 a^{-3(1-\gamma)} - \nu\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (4.30)$$

Na expressão acima, u_0 é uma constante de integração. É importante notar também que se considerarmos $\nu = 0$ e $\gamma = 0$, o comportamento da densidade ρ_c recai no comportamento da matéria bariônica $\rho_m \propto a^{-3}$. Além do comportamento da densidade, podemos verificar a forma das equações de Friedmann para a cosmologia neo-Newtoniana. A partir da equação de Euler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= -\vec{\nabla} \Psi, \\ \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \vec{r} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \vec{r} &= -\vec{\nabla} \Psi, \\ \frac{\ddot{a}}{a} \vec{r} &= -\vec{\nabla} \Psi. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por outro lado, da equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G (\rho_c + 3p_c + \rho_m). \quad (4.32)$$

Aplicando o divergente em (4.31) e igualando o resultado com (4.32), obtemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_c + 3p_c + \rho_m). \quad (4.33)$$

A equação acima é a generalização da equação (2.24) para o nosso modelo. Da mesma forma, através de uma integração da equação acima, encontramos:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_c + \rho_m). \quad (4.34)$$

Voltando ao nível linear, inserimos o conjunto de perturbações propostas em (4.13) e (4.14) nas equações (4.25)-(4.29). De maneira análoga ao procedimento da seção anterior, coletamos apenas os termos perturbados de primeira ordem e escrevemos todas as quantidades perturbadas como uma expansão de Fourier:

$$f(x, t) = f_0(t) e^{-\frac{i\vec{n}\cdot\vec{r}}{a}}. \quad (4.35)$$

Os termos de primeira ordem das equações da continuidade são:

$$\dot{\delta} + 3H (v_s^2 - w_c) \delta + \frac{i\vec{n}\cdot\delta\vec{v}}{a} (1 + w_c) = 0, \quad (4.36)$$

para o fluido com pressão e

$$\dot{\lambda} + \frac{i\vec{n}\cdot\delta\vec{v}}{a} = 0, \quad (4.37)$$

para a matéria. Na equação (4.36) a velocidade do som é representada por $v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ e o parâmetro de estado é definido por $w = \frac{p_c}{\rho_c}$. Já os termos lineares da equação de Poisson

(4.32) são representados pela equação:

$$-\frac{n^2\delta\varphi}{a^2} = 4\pi G (1 + 3v_s^2) \rho_{c0}\delta + 4\pi G\rho_{m0}\lambda. \quad (4.38)$$

Os termos lineares das equações de Euler fornecem:

$$\delta\dot{\vec{v}} + H\delta\vec{v} = -\frac{in}{a}\delta\varphi - \frac{ik}{a}\frac{v_s^2}{1+w}\delta, \quad (4.39)$$

para o fluido com pressão e

$$\delta\dot{\vec{v}} + H\delta\vec{v} = -\frac{in}{a}\delta\varphi \quad (4.40)$$

para a matéria. Assim, podemos combinar as equações (4.36)-(4.40) afim de obtermos um conjunto de equações acopladas para λ e δ . O que nos interessa são os termos de primeira ordem em nível perturbativo. O comportamento das perturbações para os contrastes da densidade será regido pelas seguintes equações:

$$\ddot{\lambda} + 2H\dot{\lambda} - 4\pi G\rho_m\lambda = 4\pi G (1 + 3v_s^2) \rho_c\delta, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + [2 + 3(v_s^2 - w)] H\dot{\delta} + \left\{ 3(\dot{H} + 2H^2)(v_s^2 - w) \right. \\ + 3(\dot{v}_s^2 - \dot{w}) + \frac{n^2v_s^2}{a^2(1+w)} \\ \left. - 4\pi G\rho_c(1 + v_s^2) \right\} \delta = 4\pi G\rho_m\lambda. \end{aligned} \quad (4.42)$$

As equações acima regem o comportamento para os contrastes da densidade δ e λ . Os pontos sobre as quantidades indicam derivadas temporais. Podemos perceber que temos duas equações com os termos δ e λ acoplados. Uma análise analítica deste conjunto de equações torna-se inviável devido a este fato e a complexidade das soluções de base. Assim, com o objetivo de se obter o comportamento de δ e λ , devemos realizar um procedimento numérico na resolução destas equações. Os resultados obtidos serão apresentados posteri-

ormente. Mas antes disso é necessário transformar as equações (4.41) e (4.42) em equações adimensionais através da inserção dos parâmetros fracionários de massa $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}$ e $\Omega_c = \frac{8\pi G\rho_c}{3H_0^2}$.

Estas equações podem ser reescritas em termo dos parâmetros cosmológicos como:

$$\lambda'' + \left[v(a) + \frac{2}{a} \right] \lambda' - \frac{3\Omega_m}{2p(a)} \lambda = \frac{3\Omega_c(1+3w)}{2p(a)} \delta, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \delta'' + \left[v(a) + \frac{2}{a} + \frac{3w(\gamma-1)}{a} \right] \delta' + \left\{ 3w(\gamma-1) \left(\frac{v(a)}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{3w'(\gamma-1)}{a} + \frac{n^2\gamma w}{a^2 p(a)(1+w)H_0^2} - \frac{3\Omega_c(1+w\gamma)}{2p(a)} \right\} \delta = \frac{3\Omega_m}{2p(a)} \lambda. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Vamos agora explicar como foram feitas as reformulações no parâmetros cosmológicos inseridos nas equações acima.

A partir da equação (4.30), a densidade do fluido com pressão pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \rho_c &= \{ u_0 a^{-3(1-\gamma)} - \nu \}^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ \Omega_c &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \{ u_0 a^{-3(1-\gamma)} - \nu \}^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ \Omega_c &= \{ \bar{u}_0 a^{-3(1-\gamma)} - \bar{\nu} \}^{\frac{1}{1-\gamma}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde redefinimos:

$$\bar{u}_0 = \left(\frac{8\pi G}{3H_0^2} \right)^{1-\gamma} u_0 \quad \bar{\nu} = \left(\frac{8\pi G}{3H_0^2} \right)^{1-\gamma} \nu \quad (4.46)$$

A partir das equações de Friedmann para nosso modelo, equações (4.33) e (4.34), obtemos as expressões para a primeira e segunda derivadas do fator de escala:

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} = v(a) = -\frac{\Omega_c(1+3w) + \Omega_m}{2a(\Omega_c + \Omega_m + \Omega_k)}, \quad (4.47)$$

$$\dot{a}^2 = p(a) = a^2(\Omega_m + \Omega_c + \Omega_k). \quad (4.48)$$

Onde w é melhor representado por:

$$w = \frac{p_c}{\rho_c} = \frac{\bar{\nu}_0}{\bar{u}_0 a^{-3(1-\gamma)} - \bar{\nu}_0}. \quad (4.49)$$

A velocidade do som para este caso é:

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \nu \rho_c^{\gamma-1} = \gamma w. \quad (4.50)$$

Outro parâmetro observacional que deve ser reformulado dentro do nosso modelo é o parâmetro de desaceleração do Universo $q_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0}$. Para q_0 temos que:

$$q_0 = \frac{\Omega_{c0}}{2} (1 + 3\bar{\nu} \Omega_{c0}^{\gamma-1}) + \frac{\Omega_{m0}}{2}. \quad (4.51)$$

Em virtude da modificação nas equações cosmológicas para fluidos, os parâmetros de densidade passam a ser reescritos como:

$$\Omega_m = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} \quad \Omega_c = (\bar{k}_0 a^{-3(\gamma-1)} - \bar{\nu})^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (4.52)$$

Sendo \bar{k}_0 dependente dos parâmetros já definidos, como o fator de desaceleração e parâmetros de densidade:

$$\bar{k}_0 = \frac{1}{3\Omega^\gamma} (2q_0 - \Omega_{m0} + 2\Omega_{c0}). \quad (4.53)$$

O que podemos observar nas redefinições feitas acima é que existe uma dependência entre os parâmetros \bar{k}_0 , $\bar{\nu}_0$ e \bar{u}_0 que restringe a variação de tais parâmetros. Por exemplo, o valor do parâmetro ν presente na equação de estado é diretamente proporcional à sua redefinição $\bar{\nu}$, equação (4.45). Assim, se exigirmos que a equação de estado seja negativa o valor de $\bar{\nu}$ deve ser negativo também. A partir da equação (4.52), temos que $\Omega_{c0} > 0$, o que implica em $\bar{k}_0 a^{-3(\gamma-1)} > \bar{\nu}$, que por sua vez, estabelece vínculos sobre os valores de

q_0 , Ω_{c0} e Ω_{m0} segundo a equação (4.53).

De posse das equações que descrevem o comportamento das perturbações nas densidades de matéria e gás de Chaplygin podemos determinar a forma do espectro de potência para estas duas componentes e comparar o espectro teórico obtido com os dados observacionais. No próximo capítulo procederemos com esta análise e discutiremos os resultados obtidos sobre o ponto de vista das cosmologias Newtoniana e neo-Newtoniana.

Capítulo 5

Espectro de Potência do Gás de Chaplygin

5.1 Espectro de potência

O estudo da teoria perturbativa realizada na seção (3.2.1), indica que as flutuações primordiais na densidade de massa do Universo podem ser descritas como ondas planas (processo também chamado de decomposição de Fourier) onde cada onda plana possui um correspondente número de onda n . Esta representação é bastante útil, pois dessa forma, as perturbações podem ser representadas como uma superposição de ondas planas que evoluem independentemente e de acordo com uma equação diferencial de segunda ordem, como por exemplo a equação (3.15). O crescimento destas flutuações obedece, neste caso, ao regime linear da teoria perturbativa, de forma que definimos o contraste da densidade $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$, onde ρ_0 corresponde à densidade média da distribuição de massa do Universo. Esta definição surge como uma simples forma de substituir a função densidade $\rho(x)$ por um parâmetro adimensional δ , o que facilita a interpretação física necessária na relação entre teoria e observação. No entanto, como resultado deste procedimento, não faz sentido esperar que a teoria reproduza as propriedades de uma galáxia em particular localizada em um ponto específico do espaço, ou seja, não se espera que a teoria reproduza o valor

exato do contraste da densidade $\delta(x)$ em um determinado local. Isto porque, para que tal resultado fosse alcançado seria necessário que os cálculos não-lineares¹ fossem adicionados na descrição feita e além disso, seriam necessárias condições iniciais muito precisas, as quais não temos conhecimento. Dessa forma, é necessário desenvolver uma maneira de se comparar a teoria com os dados observacionais. Para tal, ao invés de se exigir da teoria perturbativa a determinação exata da distribuição de massa do Universo, pretende-se determinar as propriedades estatísticas médias de sua densidade. Mesmo porque, o conceito de homogeneidade do Universo está muito mais ligado a suas propriedades estatísticas do que ao conceito de termos $\vec{\nabla}\rho(x) = 0$ em determinadas regiões.

O que a observação nos revela é que a distribuição de massa do Universo segue, basicamente, dois tipos de comportamento. Um, seria aquele observado em pequenas escalas devido a existência de estruturas não-lineares, que surgiram de modos perturbados que se tornaram não-lineares anteriormente. O outro, corresponde à estrutura em larga escala, caracterizada por $\delta \ll 1$. Este aspecto global da distribuição de massa do Universo é resultado dos modos perturbados que ainda não se tornaram não-lineares. Assim, estas duas observações são tratadas como vínculos observacionais e devem ser preditas por qualquer modelo perturbativo teórico.

Ao longo do século XX, vários tipos de estatísticas foram utilizadas em diferentes aspectos da cosmologia e astrofísica [18]. Destas, o uso da função de correlação demonstrou-se como principal maneira de abordar a questão do processo de formação de estruturas em larga escala. Para entender um pouco melhor a função de correlação, supomos que a probabilidade δP de se encontrar um objeto, seja uma estrela, uma galáxia ou um aglomerado de galáxias, em um elemento de volume δV seja dada por:

$$\delta P = \eta \delta V, \quad (5.1)$$

onde a densidade média de probabilidade η é independente da posição. Desta definição, o

¹Um modo perturbado entra no regime não-linear quando $\delta \approx 1$

número médio de objetos encontrados dentro de um volume V do Universo é simplesmente a integral sobre a equação acima:

$$\langle N \rangle = \eta V. \quad (5.2)$$

A partir destes conceitos probabilísticos podemos definir a função de correlação de dois pontos $\xi(r_{12})$ como uma medida do quanto a presença de um objeto em um elemento de volume δV_1 interfere na probabilidade de se encontrar um outro objeto em um elemento de volume δV_2 separados por uma distância r_{12} . Com isso, a probabilidade de se encontrar um objeto em δV_1 e outro em δV_2 é fornecida por:

$$\delta P = \eta^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(r_{12})]. \quad (5.3)$$

O termo η^2 aparece elevado ao quadrado nesta equação afim de fazê-la adimensional. Assim, pode-se dizer que a função de correlação caracteriza a interferência existente entre objetos vizinhos no valor da probabilidade δP . Quando consideramos esta ligação entre os vizinhos, a probabilidade de se encontrar um objeto em um determinado volume (5.1) passa a ser escrita como:

$$\delta P = \eta \delta V [1 + \xi(r)]. \quad (5.4)$$

Da relação acima, podemos perceber que se $\xi(r) = 0$ a probabilidade de se encontrar um objeto em δV não depende da existência de outros objetos. Desta definição, o número médio de vizinhos dentro de uma distância r a partir de um objeto é a integral da equação anterior:

$$\langle N \rangle = \frac{4}{3} \pi r^3 \eta + \eta \int_0^r \xi(r) dV. \quad (5.5)$$

Segundo a equação acima, podemos interpretar a função de correlação ξ , como uma medida direta da capacidade de aglomeração de estruturas em torno de um ponto. A partir das definições acima podemos discutir melhor a relação existentes entre os estudos teóricos e os dados observacionais, já que o que observamos são as concentrações de objetos em um volume do Universo, ou seja, a função de correlação.

A função de correlação pode ser relacionada diretamente com as flutuações de massa da forma [18]:

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3n \langle |\delta_n|^2 \rangle e^{-i\vec{n}\cdot\vec{r}}. \quad (5.6)$$

Na tentativa de construir uma relação direta entre observação ($\xi(r)$) e a teoria (δ_n) é preciso desenvolver uma ligação direta entre as quantidades observadas e suas predições teóricas. No que remete a teoria, os coeficientes δ_n estão ligados às flutuações de massa de uma maneira bem peculiar de forma que é importante discutir um pouco sobre esta relação. As propriedades estatísticas de uma distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias podem ser melhor estudadas através da definição de espectro de potência.

O primeiro passo na tentativa de se realizar um tratamento estatístico para as perturbações é discretizar o Universo, ou seja, dividi-lo em volumes (células) independentes, onde a densidade de massa do Universo possua características estatísticas idênticas em cada volume. No entanto, a medida que estas células evoluem a interação gravitacional mútua existente, não permite que estes volumes evoluam de maneira independente. Dessa forma, trabalhar no espaço das posições não seria apropriado afim de se manter a independência de cada célula. Surge então uma justificativa para a utilização de outra abordagem para as perturbações da densidade. Este tratamento consiste em identificar cada perturbação como uma superposição de ondas planas. É necessário utilizar o espaço de Fourier (ou espaço recíproco), de forma que, cada onda plana está associada a um número de onda n que evolui independentemente enquanto ainda permanece no regime linear. Podemos desta forma, escrever o contraste da densidade como:

$$\delta(x) = \sum_n \delta_n \exp(i\vec{n}\cdot\vec{x}) = \sum_n \delta_n^* \exp(-i\vec{n}\cdot\vec{x}). \quad (5.7)$$

Acima, os coeficientes de Fourier δ_n são quantidades complexas que podem ser calculados através da expressão:

$$\delta_n = \frac{1}{V_j} \int_{V_j} \delta(x) \exp(-i\vec{n}\cdot\vec{x}) dx. \quad (5.8)$$

Na expressão acima para os coeficientes de Fourier δ_n , V_j é o volume de cada célula representada no espaço de Fourier. Isto nos possibilita calcular todos os coeficientes δ_n de forma a conhecer completamente $\delta(x)$.

Como estamos interessados nas propriedades estatísticas de $\delta(x)$, temos que, por definição, o valor médio de $\delta(x)$ é zero, $\langle \delta \rangle = 0$ [18]. No entanto, a sua variância, não é:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle = \sum_n \langle |\delta_n|^2 \rangle = \frac{1}{V_j} \sum_n \delta_n^2. \quad (5.9)$$

Se tomarmos o limite $V_j \rightarrow \infty$, a variância pode ser escrita como [18]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_n^2 d^3n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_n^2 4\pi n^2 dn = \int_0^\infty \Delta_n^2 d(\ln n), \quad (5.10)$$

onde

$$\Delta_n^2 = \frac{n^3}{2\pi^2} P(n). \quad (5.11)$$

$P(n)$ é identificado como o espectro de potência da perturbação e Δ_n^2 é a contribuição para a variância de cada intervalo logarítmico de n . A função $P(n)$ é exatamente o que nos permite comparar teoria e observação, já que, como os modos perturbados evoluem dentro do regime linear, a forma da função $P(n)$ não é modificada neste período, enquanto que somente as amplitudes da perturbação δ_n é que variam neste intervalo [18].

A forma primordial do espectro de potência é fixada pelas condições iniciais do modelo. Na próxima seção discutiremos as condições iniciais utilizadas no nosso modelo. O resultado final para o espectro de potência é devido as funções transferência $T(n)$ e a função crescimento $g(\Omega)$ que levam em conta o crescimento das amplitudes referentes a cada modo perturbado. Deixaremos para discutir a utilização destas funções na construção do espectro final de potência na próxima seção.

5.1.1 Normalização do Espectro de Potência: Cálculo de σ_8

Nesta seção discutimos a formulação do espectro de potência. Os conceitos envolvidos no cálculo de $P(n)$ são de natureza puramente estatística. Além disso, citamos que a variância relacionada aos valores de δ é obtida segundo a equação (5.10). Na teoria estatística o cálculo da variância (σ^2) de uma amostra nos fornece uma medida do quão longe em geral os seus valores se encontram do valor médio. Assim como também é a própria definição de δ ($\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$) que nos diz quanto que o valor da densidade local ρ difere do valor médio ρ_0 . Dessa forma, podemos delegar ao cálculo de σ^2 para a densidade do Universo como uma medida da dispersão de massa. A formação das estruturas em larga escala é visto como um processo de amplificação das perturbações primordiais. No estudo de perturbações cosmológicas dizemos que as flutuações (δ) introduzidas nas equações hidrodinâmicas evoluem dentro do regime linear enquanto $\delta \ll 1$. A medida que cada modo perturbado associado a um número de onda n evolui, o valor de δ pode vir a variar e consequentemente concentrações não lineares de matéria podem surgir. É fato que muitas estruturas que observamos hoje correspondem a flutuações na densidade com ordens de magnitude muito acima da densidade média do Universo, por exemplo, aglomerados de galáxias possuem um valor típico de $\rho_{aglom}/\rho_{univ} 10^2 - 10^3$. Assim, quando δ atinge o valor da unidade ($\delta \approx 1$) o regime linear passa a não ser mais válido. Neste caso, as perturbações atingiram o regime não linear da evolução das flutuações e uma nova abordagem deve ser utilizada no estudo perturbativo.

Existe uma grande dificuldade com o tratamento de regime não linear pois não existem soluções analíticas para este problema. Dessa forma, simulações numéricas envolvendo N-corpos são necessárias para se obter resultados acerca do processo final de formação de estruturas. Entretanto, este método não é capaz de fornecer conhecimento sobre as considerações físicas envolvidas no processo de colapso gravitacional não linear. Como uma forma de contornar esta situação, métodos semi-analíticos são desenvolvidos com o intuito de amenizar a complexidade do caso. Para uma revisão de alguns métodos

analíticos e algumas aproximações locais utilizadas deste problema, consultar Makler et. al [48].

Voltando ao tratamento estatístico das perturbações de massa, o cálculo da variância da massa em um esfera de raio r (σ_r^2) é feito da seguinte forma:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(n) W^2(nr) n^2 dn. \quad (5.12)$$

Onde $P(n)$ é o espectro de potência e a função $W(nr)$, também chamada de função janela, é definida como:

$$W(nr) = \frac{3 [\text{sen}(nr) - nr \cos(nr)]}{(nr)^3}. \quad (5.13)$$

Como normalização do espectro de potência adota-se o cálculo da variância em um esfera de raio $r = 8Mpc$, chamado σ_8 . Dessa forma, para o cálculo de σ_8 , faz se $r = 8Mpc$ nas equações acima. Como estamos limitando a cálculo da variância a uma região do Universo de tamanho $r = 8Mpc$, as componentes da perturbação que contribuem para a variância nesta escala são as componentes que possuem comprimento de onda $\lambda > r = 8Mpc$. Frequências maiores que aquelas referentes a $\lambda = 8Mpc$ tendem a estar proporcionalmente fora do volume especificado. Isto justifica a forma da função $W(nr)$ pois $W(nr) \cong 1$ para $nr < 1$ e $|W(nr)| < (nr)^{-2}$ para $nr \gg 1$. Apresentaremos os resultados para o cálculo de σ_8^2 em cada um dos espectros da componente de matéria da próxima seção.

5.2 Análise do espectro de potência e comparação com os dados observacionais

Nas duas últimas seções do quarto capítulo, derivamos as equações que regem o comportamento das flutuações na densidade para um Universo dominado por matéria bariônica e gás de Chaplygin. No entanto, nossa abordagem considerou tanto um tratamento Newtoniano, seção (4.3), quanto o neo-Newtoniano, seção (4.4). Nosso objetivo é re-

resolver as equações (4.20-4.21) e (4.41-4.42) através de um procedimento numérico, já que uma análise analítica é inviável para estes tipos de equações. Afim de realizar o cálculo numérico deste conjunto de equações e sendo que tratam-se de equações diferenciais parciais de segunda ordem o resultado esperado só pode ser obtido se fixarmos as condições iniciais do problema. Além disso, é necessário também, no contexto da análise numérica pretendida, definir os limites de variação utilizados para o desvio para o vermelho e para o número de onda n nos processos de resolução das equações propostas no quarto capítulo.

A expressão para o espectro de potência final, em $z = 0$, pode ser encontrada em muitos lugares da literatura [19]. No nosso caso utilizaremos a forma encontrada em [57].

$$P(n) = \left| \frac{\delta\rho(n)}{\rho(n)} \right|^2 = |\delta(n)|^2 = A n T^2(n) \frac{g^2(\Omega_{t0})}{g^2(\Omega_{m0})}, \quad (5.14)$$

onde $\Omega_{m0} = \Omega_{ME0} + \Omega_{b0}$ é a soma das densidades relativas de massa da Matéria Escura (ME) e matéria bariônica (b), existentes hoje e Ω_{t0} representa a quantidade total de matéria do Universo. Vamos explicar o significado dos termos que aparecem na expressão para o espectro de potência em (5.14). Nesta expressão, A é uma constante de normalização. Seu valor pode ser fixado através das medidas do espectro das anisotropias da RCF feito pelo COBE. Existe uma relação direta entre seu valor e o momento de quadrupolo Q_{rms} do espectro das anisotropias da RCF [57]:

$$A = \frac{96}{5} l_H^4 \pi^2 \frac{Q_{rms}^2}{T_0^2}, \quad (5.15)$$

onde $l_H \equiv H_0^{-1} \approx 3000h^{-1}$ Mpc é o valor do raio de Hubble e $T_0 = 2,725 \pm 0,001$ K é a temperatura da RCF. O valor do momento de quadrupolo é $Q_{rms} = 18\mu\text{k}$, que é obtido a partir dos dados do COBE e consistente com as recentes medidas do WMAP [58]. Estes resultados permitem fixar o valor de $A = 6,8 \times 10^5$ Mpc⁴. $T(n)$ é a função transferência que possui o papel de fixar as condições iniciais do problema e produzir o espectro final. Ela assume um espectro inicial invariante de escala tipo Harrison-Zeldovich e determina o

espectro hoje considerando que o Universo, inicialmente, é composto por Matéria Escura e constante cosmológica, que determina a atual expansão do Universo. Existem na literatura várias formas para a função transferência [19]. Em nosso trabalho escolhemos a forma encontrada em [47], também conhecida como função de transferência BBKS:

$$T(n) = \frac{\ln(1 + 2.34q)}{2.34q} [1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4]^{-\frac{1}{4}}. \quad (5.16)$$

Na definição desta função transferência usamos a seguinte notação [57]:

$$\Gamma = \Omega_{m0} h e^{-\Omega_{b0} - (\Omega_{b0}/\Omega_{m0})} \quad ; \quad q = q(n) = \frac{n}{(h\Gamma) Mpc^{-1}}. \quad (5.17)$$

Nestas definições, Γ é o parâmetro de Sugiyama [50] e o valor de n é sempre dado em unidades de $h Mpc^{-1}$. A função de crescimento, $g(\Omega)$, que aparece em (5.14) é [51]:

$$g(\Omega) = \frac{5\Omega}{2} \left[\Omega^{4/7} - \Omega_{\Lambda} + \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_{\Lambda}}{70}\right) \right]^{-1}. \quad (5.18)$$

Esta função crescimento leva em conta o efeito da constante cosmológica Λ no processo de formação de estruturas. Nesta expressão, Ω_{Λ} é a fração de massa associada à constante cosmológica Λ .

No processo de fixação das condições iniciais consideramos que cada modo perturbado corresponde a um número de onda n , onde podemos fixar um valor inicial para $|\delta(n)|$ de acordo com (5.14). Quando fixamos as condições iniciais do problema buscamos como base um cenário compatível com as observações. No nosso caso, utilizaremos o modelo Λ CDM como modelo base para fixação das condições iniciais. Assim, os valores fixados para os parâmetros neste processo foram: $\Omega_{\Lambda i} = 0.75$, $\Omega_{MEi} = 0.25$ e $\Omega_{bi} = 0.04^2$.

De acordo com nosso modelo o espectro final depende basicamente da variação dos parâmetros fracionários de massa Ω_{c0} e Ω_{m0} . A curvatura da seção espacial do Universo

²Utilizamos $\Omega_{\Lambda i}$, Ω_{MEi} e Ω_{bi} como as frações de densidade no instante em que calculamos as condições iniciais. Enquanto que $\Omega_{\Lambda 0}$, Ω_{ME0} e Ω_{b0} representam as frações de massa como as observamos hoje.

é fixada hoje por $\Omega_{k0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{c0}$. O nosso objetivo é comparar o espectro teórico com os dados observacionais do espectro de potência de 221414 galáxias provenientes do programa 2dF Galaxy Redshift Survey [52], que possui suas incertezas expressas nas barras de erros calculadas em 1σ .

Uma vez expostas as equações diferenciais que regem o comportamento das flutuações na densidade de matéria para os modelos Newtoniano e neo-Newtoniano, vamos encontrar o espectro de potência da componente de matéria, a partir de uma análise numérica destas equações. Nosso objetivo é comparar a teoria Newtoniana com a neo-Newtoniana para diferentes situações:

5.2.1 Universo constituído de $\Omega_{c0} = 0.75$, $\Omega_{m0} = 0.25$ e $q_0 = 0.5$

Espectro da matéria para teoria neo-Newtoniana

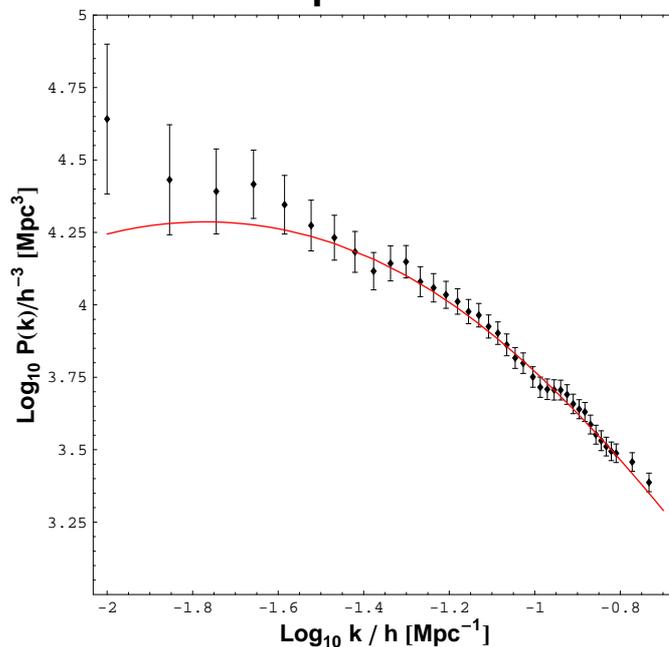


Figura 5.1: Espectro de potência para a componente de matéria com $\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.25$. A linha observada é o espectro teórico obtido a partir da teoria neo-Newtoniana. O resultado do ajuste estatístico foi $\chi^2 = 62.92$ e encontramos $\sigma_8 = 0.82$.

Se observarmos as figuras (5.1) e (5.2) é possível fazer uma primeira comparação entre

Espectro da matéria para teoria Newtoniana

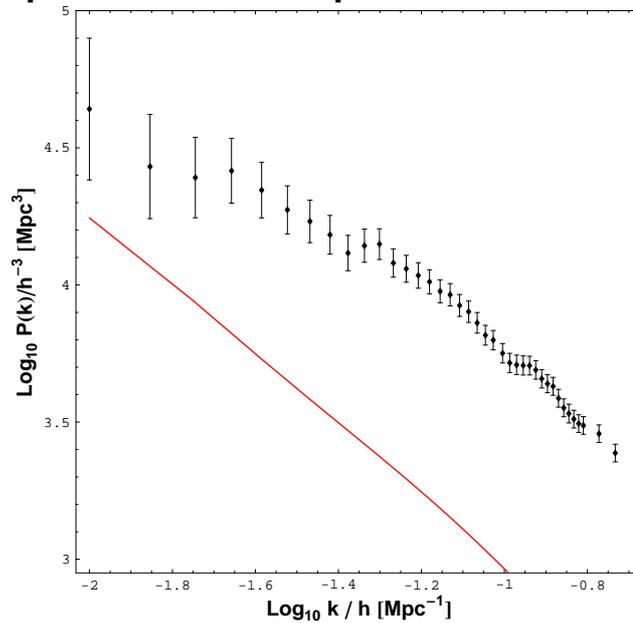


Figura 5.2: Espectro de potência para a componente de matéria segundo a teoria Newtoniana para $\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.25$. Resultados estatísticos: $\chi^2 = 170.55$ e $\sigma_8 = 0.33$.

os resultados obtidos com as cosmologias Newtoniana e neo-Newtoniana. Em ambos os espectros utilizamos um cenário onde o parâmetro de desaceleração do Universo é igual a $q_0 = 0.5$ e é composto por gás de Chaplygin (pois fazemos, $\gamma = -1$ e $\nu = -1$, na equação de estado do gás) e matéria. As frações de massa utilizadas foram $\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.25$, respectivamente, mantendo a geometria do Universo plana ($\Omega_{k0} = 0$). Com esta escolha de parâmetros fracionários de massa idealizamos um Universo onde uma possível contribuição de Matéria Escura é admitida. Isto porque, a nucleossíntese primordial indica que a quantidade de bárions no Universo esteja em torno de $\Omega_{b0} = 0.04$. Com isso, podemos atribuir neste cenário uma quantidade de $\Omega_{ME0} = 0.21$ para a matéria, provenientes da Matéria Escura, $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{ME0}$.

A qualidade dos espectros teóricos, quando comparados aos dados observacionais é medida com base no método dos mínimos quadrados e consiste em computar a quantidade

estatística χ^2 para cada espectro,

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\mu_{0,i}^o - \mu_{0,i}^t)^2}{\sigma_{\mu_{0,i}}^2}. \quad (5.19)$$

Nesta expressão, $\mu_{0,i}^o$ é o valor atribuído à observação enquanto que $\mu_{0,i}^t$ é o valor referente ao nosso modelo teórico, $\sigma_{\mu_{0,i}}^2$ é o erro encontrado em cada dado observacional. De acordo com esta definição da estatística χ^2 os modelos teóricos que melhor se enquadrarem com os dados observacionais serão aqueles que fornecerem o menor valor para χ^2 . Assim, poderemos calcular a qualidade de cada espectro o que possibilitará uma comparação entre os resultados obtidos.

Observamos a partir da comparação entre as figuras (5.1) e (5.2) que a utilização do modelo neo-Newtoniano, figura (5.1), indica uma melhor consistência com os dados observacionais, $\chi_{nN}^2 = 62.92$, em relação à teoria Newtoniana, $\chi_N^2 = 170.55$, figura (5.2). Este resultado motiva estender a comparação entre a teoria Newtoniana e neo-Newtoniana para os demais parâmetros cosmológicos e para outros cenários visando identificar o papel das componentes escuras (matéria e energia) e dos parâmetros cosmológicos em cada abordagem.

5.2.2 Influência de Ω_{m0} nos espectros

Na próxima análise fixaremos o valor de $\Omega_{c0} = 0.75$ e o valor de Ω_{m0} será variado em cada espectro. Além disso, nos restringiremos a um Universo acelerado com $q_0 = -0.5$ somente para o caso neo-Newtoniano, já que, na abordagem Newtoniana, o valor do parâmetro de desaceleração do Universo depende diretamente de Ω_{c0} e Ω_{m0} de acordo com (4.24). Esta dependência faz com que os universos idealizados na teoria Newtoniana sejam sempre desacelerados. Os resultados para a teoria neo-Newtoniana são apresentados na figura (5.3) e os resultados para teoria Newtoniana na figura (5.4). Os casos de interesse são $\Omega_{m0} = 0.04$, $\Omega_{m0} = 0.25$ e $\Omega_{m0} = 0.46$, representando um Universo aberto, plano e fechado, respectivamente. Neste caso, no cenário de uma geometria aberta, nos

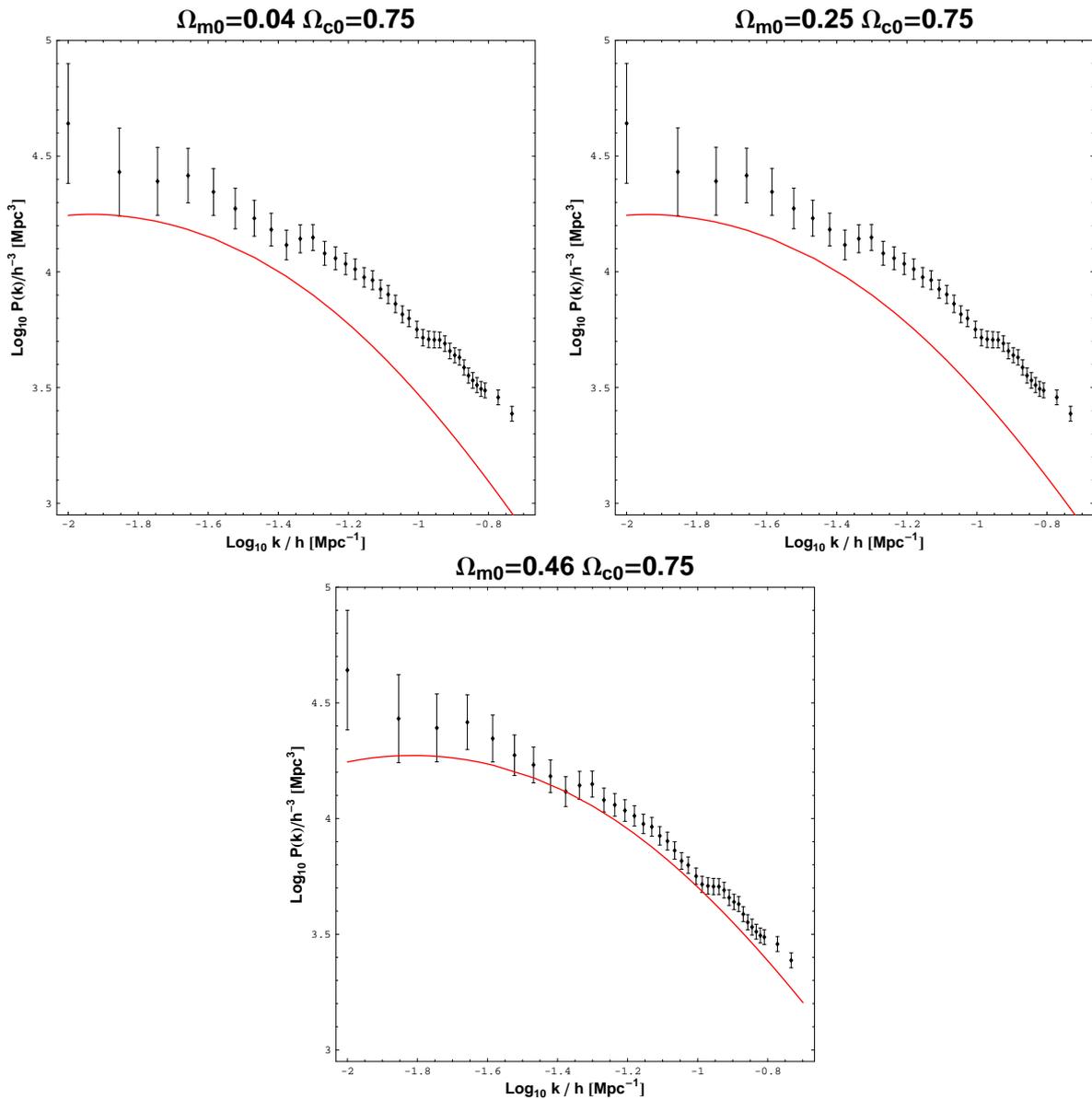


Figura 5.3: Espectros de potência para a componente de matéria segundo a teoria neo-Newtoniana para diferentes cenários cosmológicos. Para $\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.04$, resultados estatísticos: $\chi^2 = 106.74$ e $\sigma_8 = 0.54$ (no alto a esquerda) ; para $\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.25$, resultados estatísticos: $\chi^2 = 86.07$ e $\sigma_8 = 0.64$ (no alto a direita); para $\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.46$, resultados estatísticos: $\chi^2 = 69.26$ e $\sigma_8 = 0.75$ (em baixo).

confrontamos com um Universo onde a matéria é constituída unicamente por bárions na fração de $\Omega_{m0} = 0.04$ descartando assim qualquer contribuição da Matéria Escura na componente Ω_{m0} .

Para uma geometria plana e fechada a quantidade de matéria foi maior que no caso de uma geometria aberta em uma quantia de $\Omega_{m0} = 0.21$ e $\Omega_{m0} = 0.42$, respectivamente. Este acréscimo de matéria pode ser atribuído à Matéria Escura, neste caso podemos avaliar qual

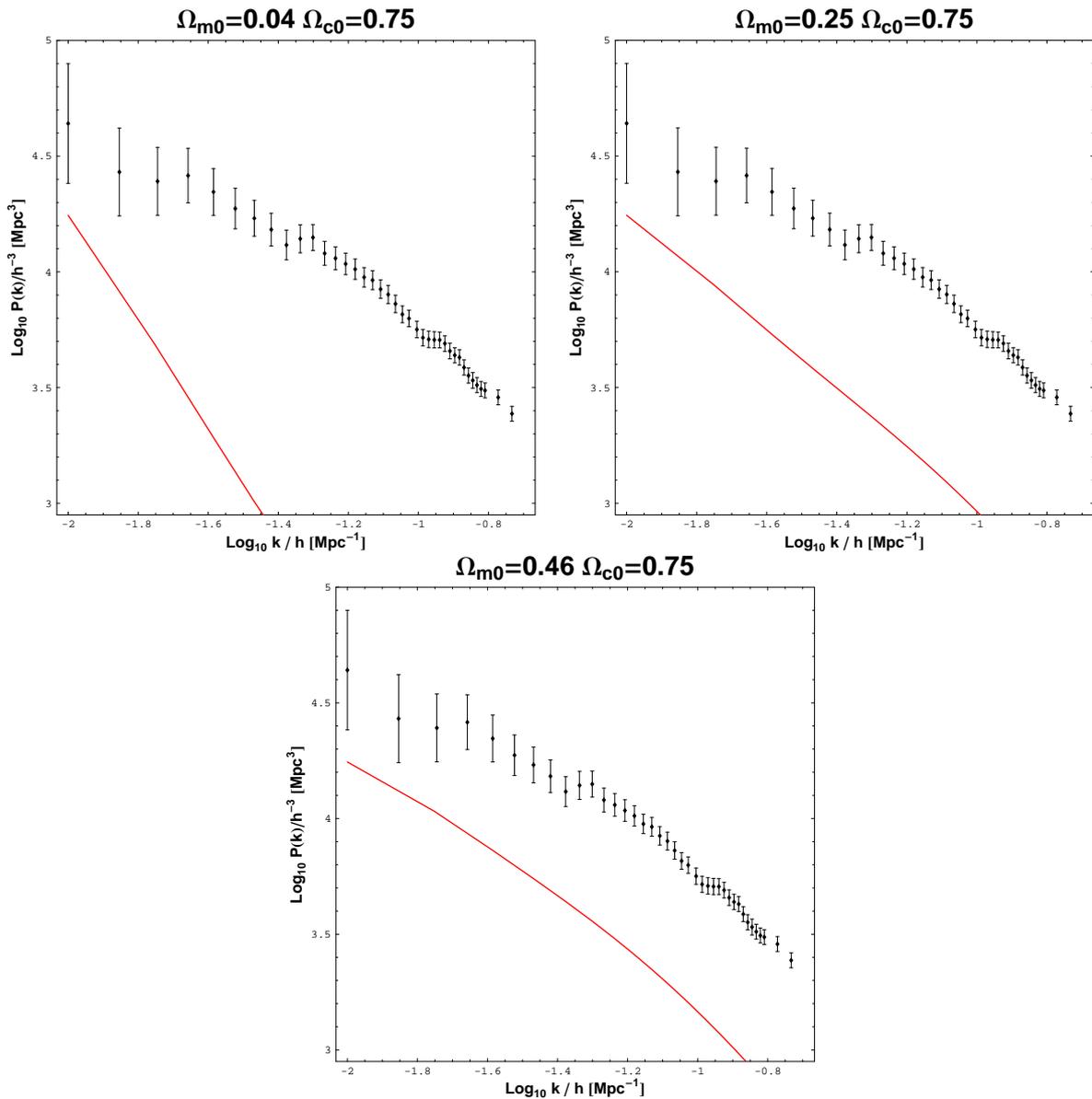


Figura 5.4: Espectros de potência para a componente de matéria segundo a teoria Newtoniana. Fazemos $\Omega_{c0} = 0.75$ fixo e variamos as quantidades de matéria sem pressão da seguinte forma: com $\Omega_{m0} = 0.04$, encontramos $\chi^2 = 204.16$ e $\sigma_8 = 0.12$ (no alto a esquerda); com $\Omega_{m0} = 0.25$, encontramos $\chi^2 = 170.55$ e $\sigma_8 = 0.32$ (no alto a direita) e com a fração $\Omega_{m0} = 0.46$, encontramos $\chi^2 = 150.60$ e $\sigma_8 = 0.41$ (em baixo). Repare que o aumento da quantidade de Ω_{c0} provoca uma ligeira melhora na qualidade dos ajustes. O melhor resultado foi o terceiro quadro com $\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.46$.

é o resultado da inserção de matéria no Universo. Nosso objetivo nesta análise é verificar a influência do parâmetro Ω_{m0} (matéria) no espectro de potência da componente de matéria. Dessa forma, a fração de gás de Chaplygin fixada é próxima daquela que geralmente é atribuída à Energia Escura, pelo modelo ΛCDM , $\Omega_{c0} = 0.75$. Os cenários idealizados nas figuras (5.3) e (5.4) diferem pelo parâmetro de desaceleração do Universo, pois no caso

Newtoniano, temos que q_0 é dado pela expressão (4.24) e no caso neo-Newtoniano fixamos $q_0 = -0.5$. A diferença entre os valores utilizados para o parâmetro de desaceleração q_0 nestas duas análises, remetem a universos bastante distintos. Por isso, não podemos realizar nesta análise uma comparação entre as duas teorias utilizadas, mas sim, avaliar exclusivamente o papel da quantidade Ω_{m0} nas duas abordagens. Quanto aos valores do parâmetro de desaceleração utilizados devemos observar um fato muito importante antes de qualquer conclusão sobre a utilização das teorias Newtoniana e neo-Newtoniana. Modelos para universos desacelerados, caracterizados por $q_0 > 0$, entram em conflito com as observações de supernovas [1,2]. No caso da teoria Newtoniana, necessariamente todos os cenários que propormos remeterão à universos desacelerados, equação (4.24). Essa é uma das principais diferenças entre as duas abordagens e desfavorece o uso da teoria Newtoniana para este tipo de análise. Isto pode justificar, por exemplo, a diferença entre os resultados do ajuste χ^2 para as duas teorias. Esta análise demonstrou claramente que, em ambos os casos, quanto maior a quantidade de matéria na composição do Universo melhor é o ajuste χ^2 .

5.2.3 Influência de Ω_{c0} nos espectros

O próximo caso de interesse consiste em fixar o valor de $\Omega_{m0} = 0.04$ e variar o valor de Ω_{c0} em cada análise. A escolha deste valor para a quantidade de matéria não é aleatória. A fixação de $\Omega_{m0} = 0.04$ é predito pela nucleossíntese primordial e indica que a composição de matéria do Universo é essencialmente bariônica. Uma vez fixado o valor de Ω_{m0} os valores de Ω_{c0} que utilizaremos serão $\Omega_{c0} = 0.75$, $\Omega_{c0} = 0.96$ e $\Omega_{c0} = 1.17$, representando um Universo aberto, plano e fechado, respectivamente. O objetivo desta análise é buscar o contribuição da componente escura representada pelo fluido com pressão, ou seja, verificar a importância da Energia Escura na constituição do Universo e sua contribuição na forma dos espectros. De maneira qualitativa, podemos averiguar até que ponto ela poder ser representada por um fluido que possui uma equação de estado $p = \nu\rho^\gamma$. Na figura (5.5) observamos os resultados para a teoria neo-Newtoniana e na figura (5.6) os resultados

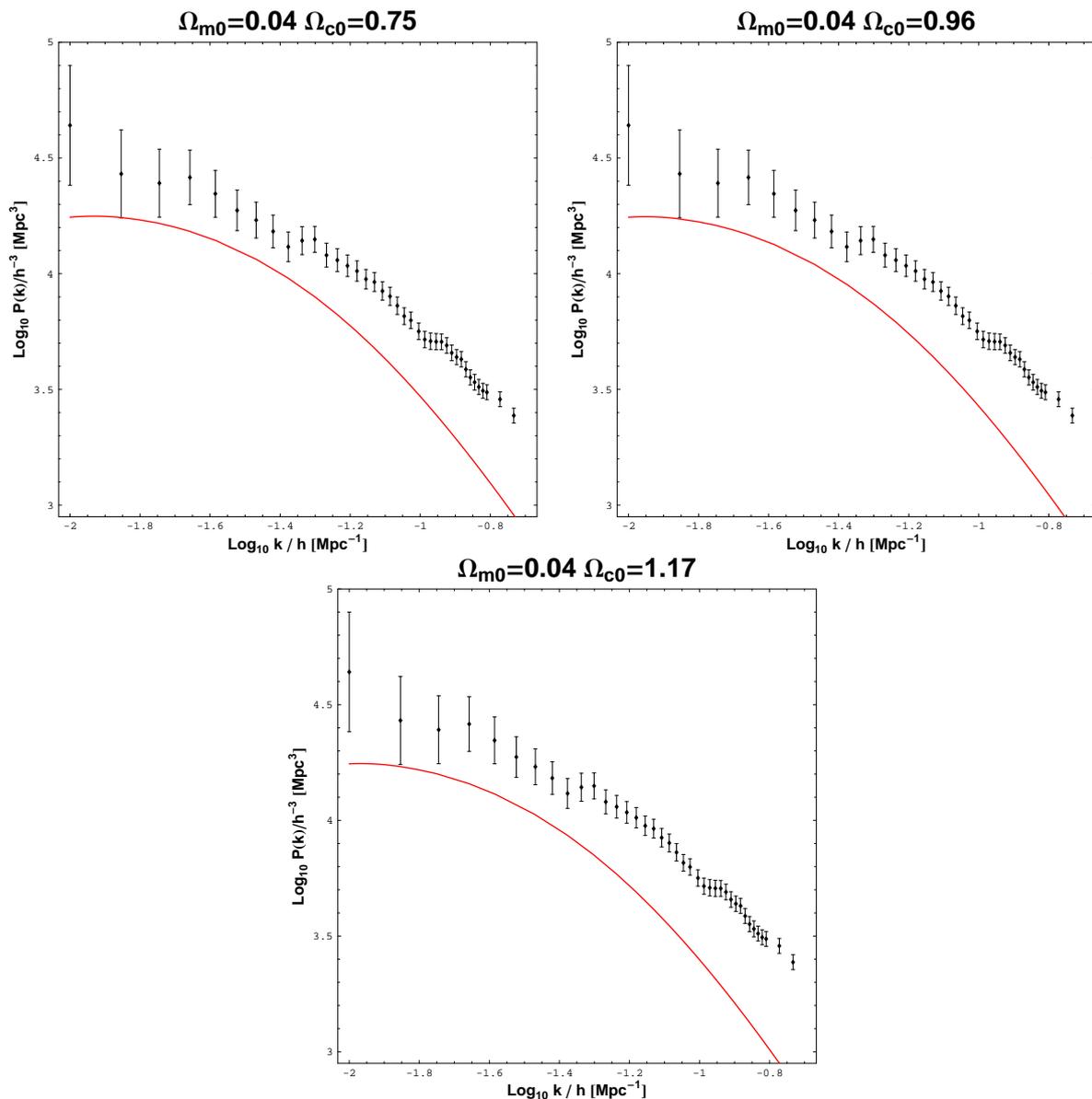


Figura 5.5: Espectros de potência para a componente de matéria segundo a teoria neo-Newtoniana. Fazemos $\Omega_{m0} = 0.04$ fixo e variamos as quantidades de gás de Chaplygin da seguinte forma: $\Omega_{c0} = 0.75$, $\Omega_{c0} = 0.96$ e $\Omega_{c0} = 1.17$. Aparentemente não há mudanças nos espectros, mas os resultados para o ajuste χ^2 e σ_8 foram: $\chi^2_{\Omega_{c0}=0.75} = 106.74$ e $\sigma_8 = 0.54$ (no alto a esquerda), $\chi^2_{\Omega_{c0}=0.96} = 113.77$ e $\sigma_8 = 0.51$ (no alto a direita) e $\chi^2_{\Omega_{c0}=1.17} = 118.57$ e $\sigma_8 = 0.49$ (em baixo).

para a teoria Newtoniana. Os resultados para ambas situações demonstram que a fração $\Omega_{m0} = 0.04$ é inconsistente com os dados observacionais o que sugere a possibilidade de inserirmos, de maneira fenomenológica, Matéria Escura na composição do Universo, isto porque, de acordo com as análises propostas até agora, os cenários com $\Omega_{m0} > 0.04$ demonstraram melhor consistência com os dados observacionais. Na análise anterior, seção (5.2.2), observamos que para uma valor de Ω_{c0} fixo, quanto maior a quantidade de matéria

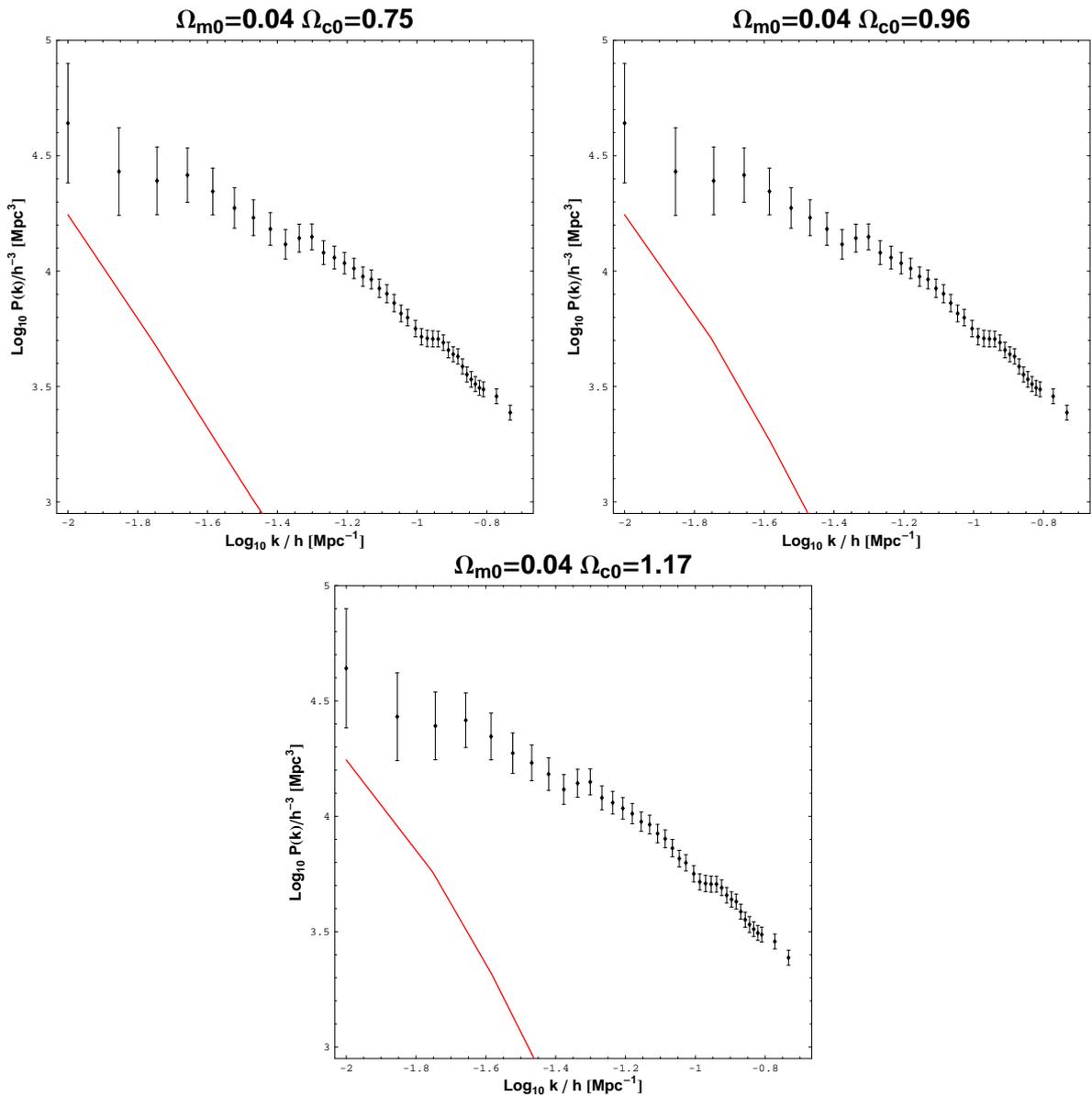


Figura 5.6: Espectros de potência para a componente de matéria segundo a teoria Newtoniana. Fazemos $\Omega_{m0} = 0.04$ fixo e variamos as quantidades de gás de Chaplygin, com seus respectivos resultados para χ^2 e σ_8 , da seguinte forma: Para $\Omega_{c0} = 0.75$, encontramos $\chi^2 = 204.16$ e $\sigma_8 = 0.12$ (no alto a esquerda); para $\Omega_{c0} = 0.96$, encontramos $\chi^2 = 207.211$ e $\sigma_8 = 0.46$ (no alto a direita) e para $\Omega_{c0} = 1.17$, encontramos $\chi^2 = 207.87$ e $\sigma_8 = 0.07$ (em baixo).

melhor foram os resultados para o ajuste χ^2 . No entanto, a partir desta análise (figuras (5.5) e (5.6)) é possível observar que a medida que houve um acréscimo da quantidade Ω_{c0} os valores encontrados para o ajuste χ^2 foram ficando cada vez maiores. Isto indica que o aumento da quantidade do fluido com pressão, no caso o gás de Chaplygin ($\nu = -1$ e $\gamma = -1$), interfere negativamente para o ajuste χ^2 . A consequência direta desta análise é que uma geometria aberta foi favorecida, tendo fornecido o menor valor para χ^2 tanto no

caso Newtoniano quanto no neo-Newtoniano. Ainda sobre esta análise devemos destacar que a utilização do gás de Chaplygin visa a unificação das componentes escuras em um só fluido. Neste caso, a quantidade dos parâmetros fracionários de massa são, afim de manter uma geometria plana: $\Omega_{m0} = 0.04$ e $\Omega_{c0} = 0.96$. Dessa forma, apesar de uma geometria plana ser fortemente indicada pela maioria das observações [11], nossa análise da figura (5.5) não forneceu o melhor ajuste χ^2 para o caso plano.

Nesta seção apresentamos alguns de nossos resultados. Deixaremos para realizar uma discussão sobre estes resultados, bem como outras análises de interesse, nas observações finais.

5.3 Oscilações

Apesar do interesse da cosmologia na Matéria e Energia Escura não se sabe ao certo se elas são duas componentes separadas da composição do Universo. Mesmo porque, suas propriedades e origens continuam ainda desconhecidas. Talvez, trata-se de um único elemento que possui a peculiar característica de se comportar como Matéria Escura, nas regiões de alta densidade do Universo e como Energia Escura nas regiões de baixa densidade. Dessa forma, o que se busca ao trabalhar com modelos de quartessência, em particular o gás de Chaplygin, é a verificação de sua validade como descrição da componente escura do Universo e em caso afirmativo, descobrir qual é o valor dos parâmetros, que estão a ele associados, que melhor ajustam o modelo proposto aos dados observacionais.

Independentemente da natureza do gás de Chaplygin um comportamento curioso em seu espectro de potência é observado. Recentes trabalhos demonstram que o espectro de potência para o gás do Chaplygin generalizado, apresenta oscilações e divergências que são totalmente inconsistentes com a observação [49, 56]. Este comportamento é uma forte evidência de que os modelos de unificação entre Matéria e Energia Escura não seriam consistentes com a observação e que, juntamente, Matéria e Energia Escura deveriam ser tratadas como duas componentes distintas.

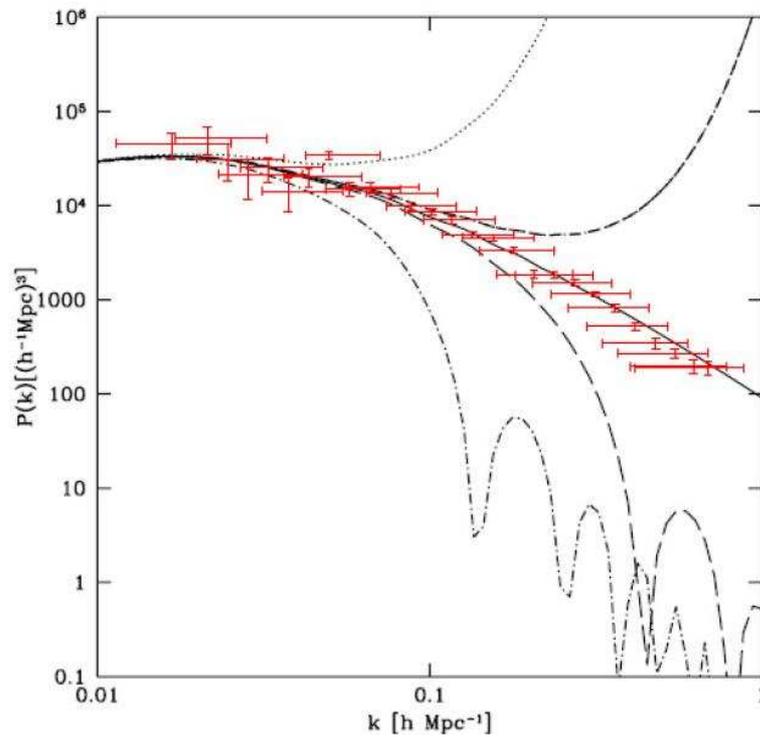


Figura 5.7: Na figura acima observamos os espectros de potência para a componente gás de Chaplygin obtido por *Sandvik et. al* [56] para diferentes valores do parâmetro α . Da superior para a inferior as curvas observadas representam modelos de gás de Chaplygin generalizado com $\alpha = -10^{-4}, -10^{-5}, 0, 10^{-5}$ e 10^4 . Os dados observacionais, são advindos do programa 2dFGRS.

A figura (5.7) foi a primeira evidência encontrada na literatura a respeito da existência de oscilações e divergências no espectro de potência para o gás de Chaplygin. Cada linha tracejada da figura (5.7) representa o comportamento do espectro de potência para a componente gás de Chaplygin generalizado para diferentes valores do parâmetro α na equação $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$. As oscilações são evidentes para alguns valores de α , o que a princípio, ou descartaria a utilização do gás de Chaplygin no processo de formação de estruturas ou restringiria seriamente os possíveis valores do parâmetro α . Assim como apontado em [56], espera-se que tais oscilações sejam devidas ao comportamento da velocidade do som através do gás de Chaplygin.

A partir desta observação procederemos também com uma análise do espectro de potência da componente gás de Chaplygin com o objetivo de investigar a existência das oscilações e divergências em nosso modelo. Junto a isso, em caso afirmativo, buscaremos as características deste comportamento e sua relação com os parâmetros observacionais.

Antes de prosseguir, é importante deixar claro que a equação de estado para o gás de chaplygin generalizado é $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$, enquanto que a equação de estado do gás que utilizamos é $p = \nu\rho^\gamma$. Doravante, sempre que citarmos a utilização do gás da Chaplygin estamos levando em consideração que só é válida a analogia entre as equações de estado quando $\gamma = -\alpha$. Além disso, o fato de propormos um modelo onde a constituição do Universo é baseada em matéria e um gás com equação de estado $p = \nu\rho^\gamma$ nos permite calcular o espectro de potência das duas componentes separadamente. Assim, quando nos referirmos ao espectro de potência da componente gás de Chaplygin, estamos calculando o espectro de potência referente a perturbação (δ). Diferentemente do que calculamos na seção (5.2), onde computamos o espectro de potência referente as perturbações da matéria (λ).

5.3.1 Oscilações no espectro do gás de Chaplygin: Teoria Newtoniana

O comportamento do espectro de potência da componente gás de Chaplygin segundo a teoria Newtoniana é mostrado na figura (5.8). Analisamos dois cenários para o Universo onde a diferença entre eles reside na quantidade Ω_{m0} . Apesar da diferença entre os valores de Ω_{m0} nos dois casos, esta não é a única diferença observada. Devemos notar que o parâmetro de desaceleração do Universo, na teoria Newtoniana, está diretamente relacionado às quantidades fracionárias de massa através da equação (4.24). Com isso, o surgimento das oscilações no cenário $\Omega_{m0} = 0.04$ e $\Omega_{c0} = 0.75$ da figura (5.8) não pode ser atribuído unicamente ao parâmetro Ω_{m0} ou ao parâmetro q_0 . No contexto da teoria Newtoniana, fica desta maneira, muito difícil estudar o papel dos parâmetros cosmológicos separadamente. No cenário $\Omega_{m0} = 0.25$ e $\Omega_{c0} = 0.75$ da figura (5.8) as divergências no espectro de potência da componente gás de Chaplygin encontradas não reproduziram as oscilações observadas em *Sandvik et. al.* (figura 5.7) e também evidenciaram o caso $\gamma = 0$ (Λ CDM) como melhor ajuste para os dados observacionais. Aliás, podemos adiantar que o caso $\gamma = 0$, resultará nos melhores ajustes para χ^2 em todas as situações analisadas.

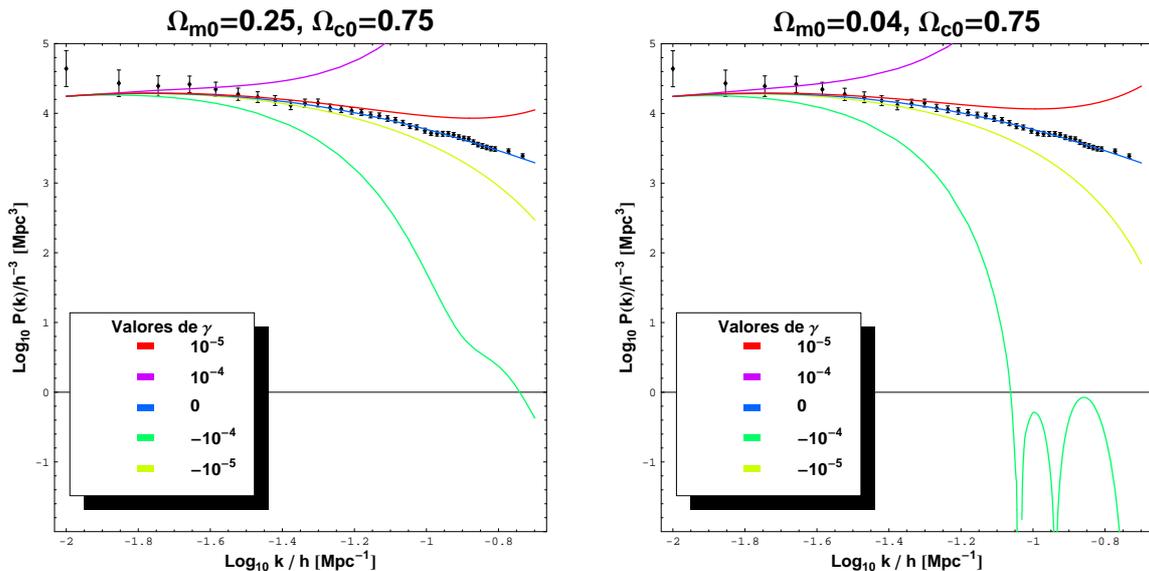


Figura 5.8: Espectros de potência para a componente gás de Chaplygin segundo a Teoria Newtoniana. No espectro da esquerda os parâmetros utilizados foram $\Omega_{c0} = 0.75$, $\Omega_{m0} = 0.25$. No espectro da direita os parâmetros foram $\Omega_{c0} = 0.75$, $\Omega_{m0} = 0.04$; Valores de $\gamma = 10^{-4}$, 10^{-5} , 0 , -10^{-5} , -10^{-4} (curva superior a inferior).

Isto porque, a velocidade do som para este gás passa a ser nula em todo momento e consequentemente, não pode implicar em nenhum tipo de oscilação, assim como apontado por *Sandvik et. al.*

5.3.2 Influência de q_0 no surgimento das oscilações

Também é interessante mostrar como são os resultados para o caso da cosmologia neo-Newtoniana. Nas figuras (5.9) e (5.10) computamos os espectro de potência para a componente gás de Chaplygin de acordo com a teoria neo-Newtoniana para seis diferentes cenários. O objetivo desta análise é identificar a relação existente entre o parâmetro de desaceleração do Universo e o espectro de potência da componente gás de Chaplygin. Quando utilizamos na análise anterior a teoria Newtoniana, verificamos que não seria possível comparar os espectros de potência para o gás de Chaplygin para mudanças apenas em q_0 . Já no caso neo-Newtoniano, podemos verificar as alterações ocorridas no espectro de potência, unicamente em função da variação de q_0 . Assim, podemos obter o papel de q_0 nos espectros para um Universo acelerado ($q_0 < 0$), para um Universo com expansão

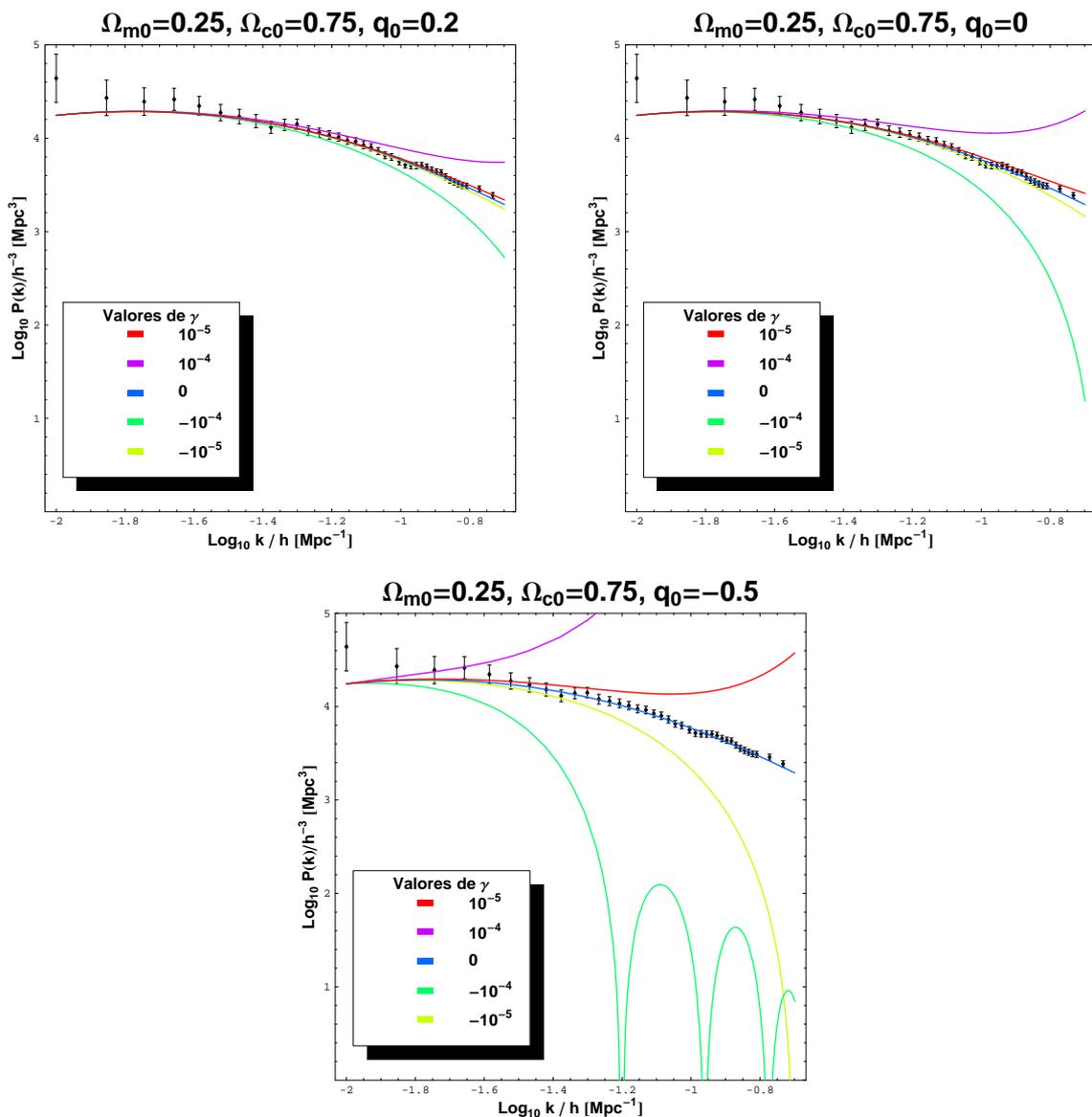


Figura 5.9: Espectro de potência para a componente gás de Chaplygin segundo a teoria neo-Newtoniana. Vários cenários foram avaliados para diferentes valores do parâmetro de desaceleração do Universo. As oscilações surgem apenas para Universos desacelerados.

uniforme ($q_0 = 0$) e para um Universo desacelerado ($q_0 > 0$). Na figura (5.9) fixamos as quantidades $\Omega_{m0} = 0.25$ e $\Omega_{c0} = 0.75$ e confrontamos os espectros para três valores de q_0 . Em um Universo desacelerado, $q_0 = 0.2$, as divergências observadas nos espectros, para valores de γ diferentes de zero são muito menores do que aquelas apresentadas para o caso $q_0 = 0$ e mais ainda quando comparadas a um Universo acelerado, $q_0 = -0.5$. Além disso, as oscilações no espectro de potência da componente gás de Chaplygin, que são apontadas na literatura [56], só foram observadas para um Universo acelerado, $q_0 =$

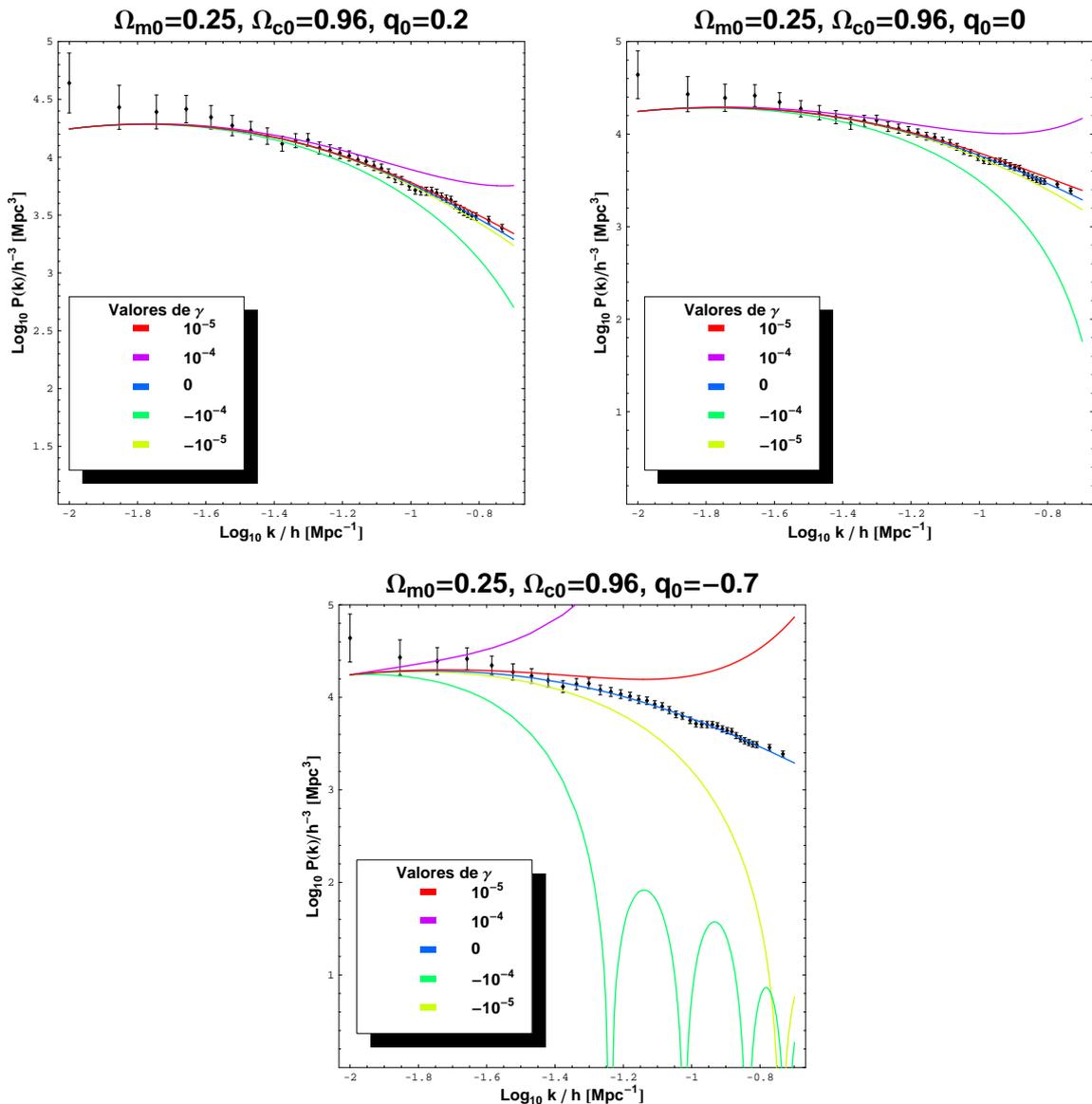


Figura 5.10: Espectro de potência para a componente gás de Chaplygin segundo a teoria neo-Newtoniana. Assim como observado na figura anterior, as oscilações do espectro de potência são observadas apenas em $q_0 = -0.7$.

–0.5. E seguida, realizamos o mesmo tipo de análise, só que desta vez para cenários com $\Omega_{m0} = 0.25$ e $\Omega_{c0} = 0.96$. Os resultados desta análise podem ser observados na figura (5.10). Novamente as oscilações no espectro só poderam ser observadas para um Universo acelerado, $q_0 = -0.7$. Também, podemos verificar que a mudança no valor de Ω_{c0} não alterou as características do espectro de potência como as identificadas na figura (5.9). Neste caso, as oscilações surgem para um Universo acelerado e as divergências ocorrem para os demais valores de γ menos para o caso $\gamma = 0$ onde obtemos o melhor ajuste χ^2 . As

análises que realizamos sobre a influência do parâmetro de desaceleração do Universo no espectro de potência do gás de Chaplygin indicam uma possível causa para o surgimento das oscilações observadas na literatura, mas no entanto, não esclarecem por completo sua natureza. Assim, podemos estender esta procura pela origem das oscilações para os demais parâmetros cosmológicos.

5.3.3 Influência de Ω_{m0} no surgimento das oscilações

Com o objetivo de buscar a origem das oscilações no espectro de potência da componente gás de Chaplygin nossa próxima análise comparativa consistirá de fixarmos tanto o parâmetro de desaceleração do Universo em $q_0 = -0.5$ quanto a fração de densidade de massa do gás de Chaplygin generalizado em $\Omega_{c0} = 0.75$. Ao realizar esta fixação de parâmetros podemos variar unicamente a quantidade de matéria Ω_{m0} dando origem a três diferentes cenários. Assim, desejamos verificar o papel da quantidade Ω_{m0} no surgimento das oscilações do espectro da componente gás de Chaplygin.

Vale lembrar que nas análises comparativas observadas nas figuras (5.3) e (5.4) buscamos o papel de Ω_{m0} no espectro de potência da componente de matéria. O objetivo daquela análise consistia unicamente em verificar qual seria a melhor abordagem (Newtoniana ou neo-Newtoniana) no estudo do espectro de potência.

A composição do Universo para as três situações analisadas na figura (5.11) remete à distintas geometrias. Analisamos um geometria aberta ($\Omega_{m0} = 0.04$ e $\Omega_{c0} = 0.75$), uma geometria plana ($\Omega_{m0} = 0.25$ e $\Omega_{c0} = 0.75$) e uma geometria fechada ($\Omega_{m0} = 0.46$ e $\Omega_{c0} = 0.75$), todas elas com iguais quantidades de Ω_{c0} . Assim, o que determina a geometria do Universo é o valor de Ω_{m0} . O que observamos, de acordo com a figura (5.11), é que o acréscimo de matéria na constituição do Universo acentua as oscilações presentes no espectro de potência da componente gás de Chaplygin. No entanto, não podemos afirmar que a quantidade de matéria bariônica no Universo é a única responsável pelo surgimento das oscilações observadas no espectro. Mesmo porque, como observado nas análises anteriores, o parâmetro de desaceleração do Universo q_0 também exerce influên-

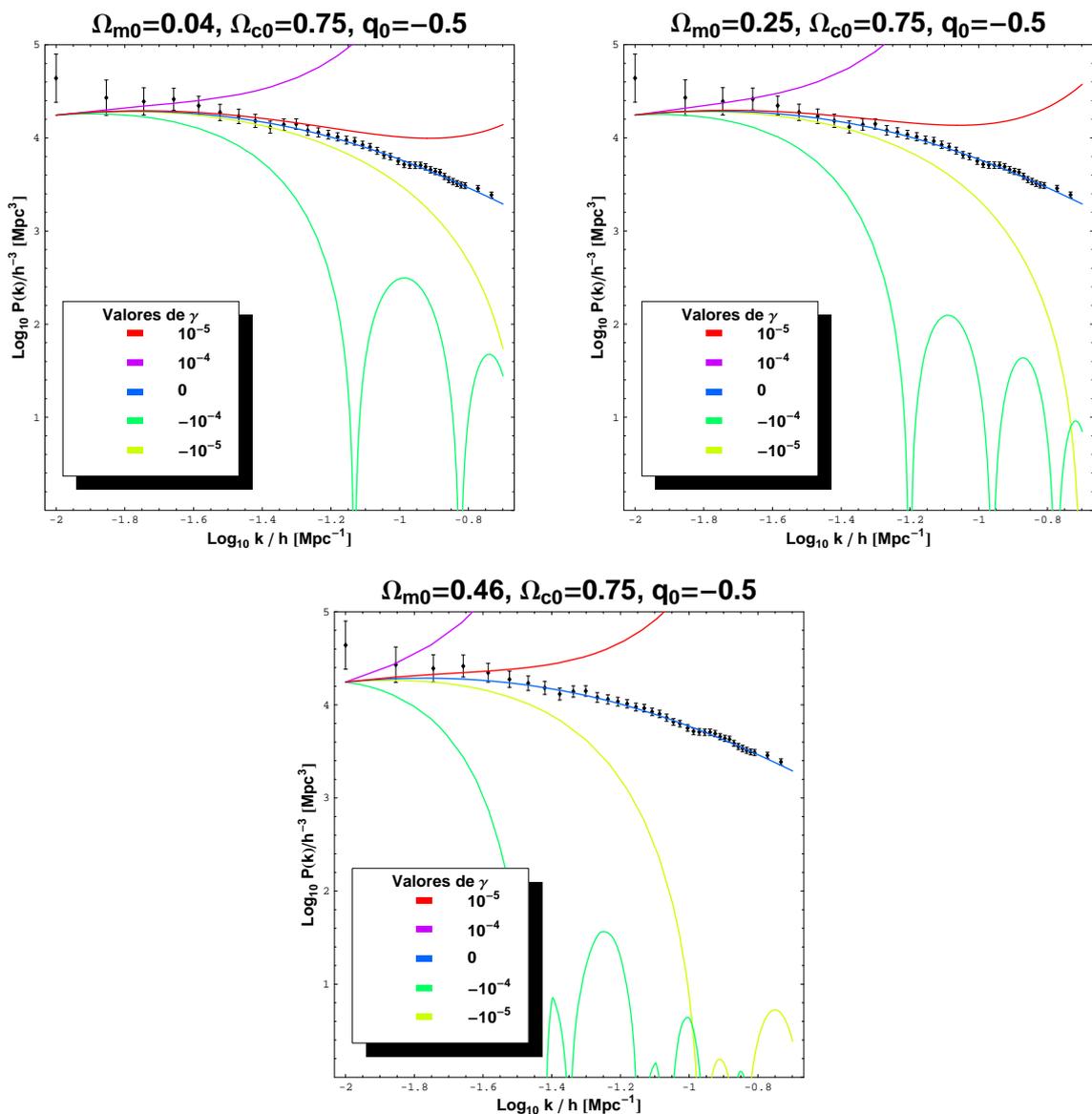


Figura 5.11: Espectros de potência para a componente gás de Chaplygin segundo a teoria neo-Newtoniana para três distintos cenários. Na figura acima observamos o comportamento dos espectros segundo a variação do parâmetro Ω_{m0} . As oscilações tornam-se mais evidentes a medida que acrescentamos Ω_{m0} na constituição do Universo.

cia no surgimento das oscilações. Contudo, a análise dos espectros de potência para a componente gás de Chaplygin observados na figura (5.11) demonstra que a quantidade de Ω_{m0} interfere na intensidade de tais oscilações.

5.3.4 Influência de Ω_{c0} no surgimento das oscilações

Da mesma forma como abordamos a questão da origem das oscilações no espectro de potência da componente gás de Chaplygin acima, analisaremos agora a influência de Ω_{c0} nos espectros. Para esta comparação fixamos os valores de $\Omega_{m0} = 0.04$ e de $q_0 = -0.5$. Como antes, para cada diferente valor de Ω_{c0} possuímos uma geometria diferente para o Universo. Os valores utilizados para Ω_{c0} foram: $\Omega_{c0} = 0.75$ (geometria aberta), $\Omega_{c0} = 0.96$

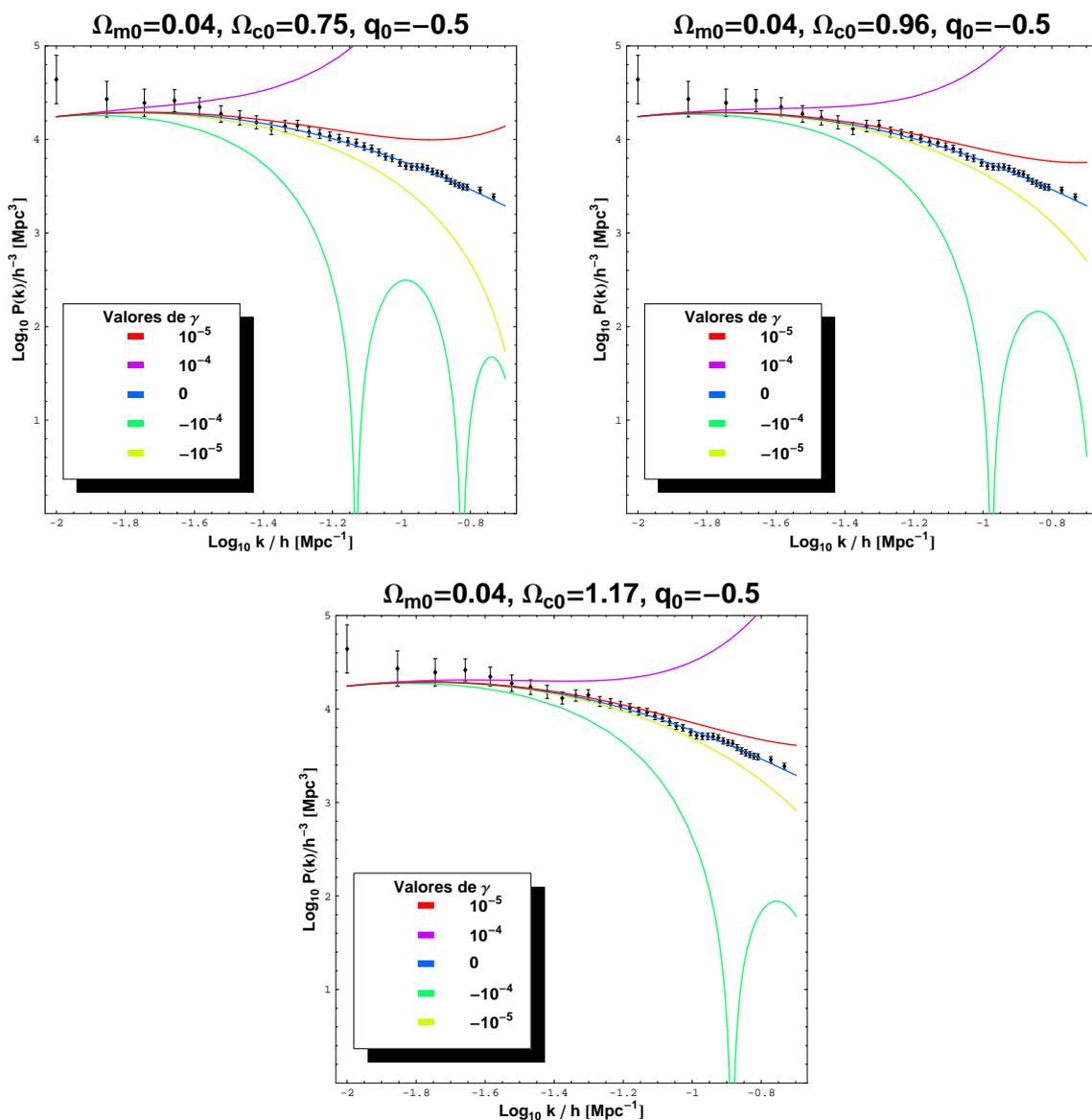


Figura 5.12: Espectros de potência para a componente gás de Chaplygin segundo a teoria neo-Newtoniana. A variação de Ω_{c0} promove uma sutil variação nas oscilações observadas. Ao contrário do que o observado com a quantidade de Ω_{m0} , um aumento na quantidade Ω_{c0} provoca uma diminuição nas oscilações.

(geometria plana) e $\Omega_{c0} = 1.17$ (geometria fechada).

A análise gráfica e puramente qualitativa da figura (5.12) revela uma relação muito discreta entre a quantidade Ω_{c0} e o espectro de potência da componente gás de Chaplygin. Com o aumento da quantidade Ω_{c0} na constituição do Universo é possível observar que as oscilações presentes no espectro experimentam uma diminuição em sua intensidade. Quer dizer, quanto maior a quantidade de ω_{c0} na constituição do Universo, menores são as oscilações observadas no espectro.

Este resultado, no que diz respeito a geometria do Universo em questão é contraditório ao resultado da análise anterior. Quando buscamos a influência de Ω_{m0} no surgimento das oscilações observamos que as oscilações do espectro sofriam um considerável aumento. Enquanto que, a análise da figura (5.13) mostra uma diminuição das oscilações a medida que acrescentamos gás de Chaplygin generalizado. Assim, podemos descartar qualquer influência da geometria do Universo no surgimento das oscilações observadas no espectro de potência da componente gás de Chaplygin. Este resultado já é capaz de restringir os nossos esforços na procura de uma possível causa para a existência das oscilações do espectro.

5.3.5 Espectro de Potência: Componente Bariônica x Componente Gás de Chaplygin

Nesta seção trataremos a questão das oscilações observadas no espectro de potência da componente gás de Chaplygin de maneira conclusiva. Nosso objetivo é fazer uma comparação entre os espectros obtidos, para alguns cenários cosmológicos, da componente bariônica e da componente gás de Chaplygin. Este é um dos objetivos de propormos neste trabalho um Universo composto por duas componentes. Dessa forma é possível observar o comportamento do espectro de potência da componente de matéria mesmo em um Universo permeado por gás de Chaplygin. A literatura aponta as oscilações observadas no espectro de potência da componente gás de Chaplygin como um dos pontos negativos do

modelo [49]. Claramente, um modelo cosmológico é considerado satisfatório até o ponto em que suas previsões não satisfazem mais os dados observacionais. Assim, fica evidente que todas as oscilações observadas nos espectros de potência da componente gás de Chaplygin são realmente um problema para o modelo. No entanto, devemos indagar melhor se realmente estes espectros teóricos para a componente gás de Chaplygin constituem a mesma grandeza física aos quais referem-se os dados observacionais.

Todos os dados observacionais utilizados nos espectros deste trabalho foram obtidos a partir do programa 2dFGRS [52]. A coleta dos dados observacionais referentes ao espectro de potência é baseada em métodos fotométricos que foram aplicados a diferentes regiões do Universo onde há matéria aglomerada na forma de galáxias ou aglomerados de galáxias. Com isso, temos que os dados observacionais com que lidamos referem-se unicamente à matéria bariônica. Assim, mesmo que o gás de Chaplygin se aglomere localmente, ou seja, mesmo que seja possível admitirmos a existência de estruturas formadas por gás de Chaplygin, não seria possível observarmos tais objetos em nenhum comprimento de onda do espectro eletromagnético.

Nas figuras (5.13) e (5.14) compararemos diferentes espectros onde uma composição base para o Universo foi admitida ($\Omega_{c0} = 0.75$ e $\Omega_{m0} = 0.25$). Na figura (5.13) temos os espectros de potência para a componente gás de Chaplygin. Enquanto que na figura (5.14) analisamos exatamente os mesmos cenários que os da figura (5.13), mas no entanto, os espectros teóricos que observamos são os espectros da componente matéria.

Continuamos a considerar em cada gráfico cinco valores possíveis para γ . Na figura (5.13) é possível observar oscilações no espectros quando $q_0 = -0.5$ e $\gamma = -10^{-4}$. Este valor de γ foi o menor valor que utilizamos em nossas análises. Trata-se de um valor muito pequeno (em módulo) mas suficientemente capaz de produzir as oscilações. Para situações onde $\gamma < -10^{-4}$ continuamos a observar o mesmo comportamento no espectro de potência. Por outro lado, todos os espectros observados na figura (5.14), referentes a componente de matéria, não apresentam nenhum tipo de oscilação. Apesar disso, é possível observar um caso de divergência entre o espectro e os dados observacionais quando

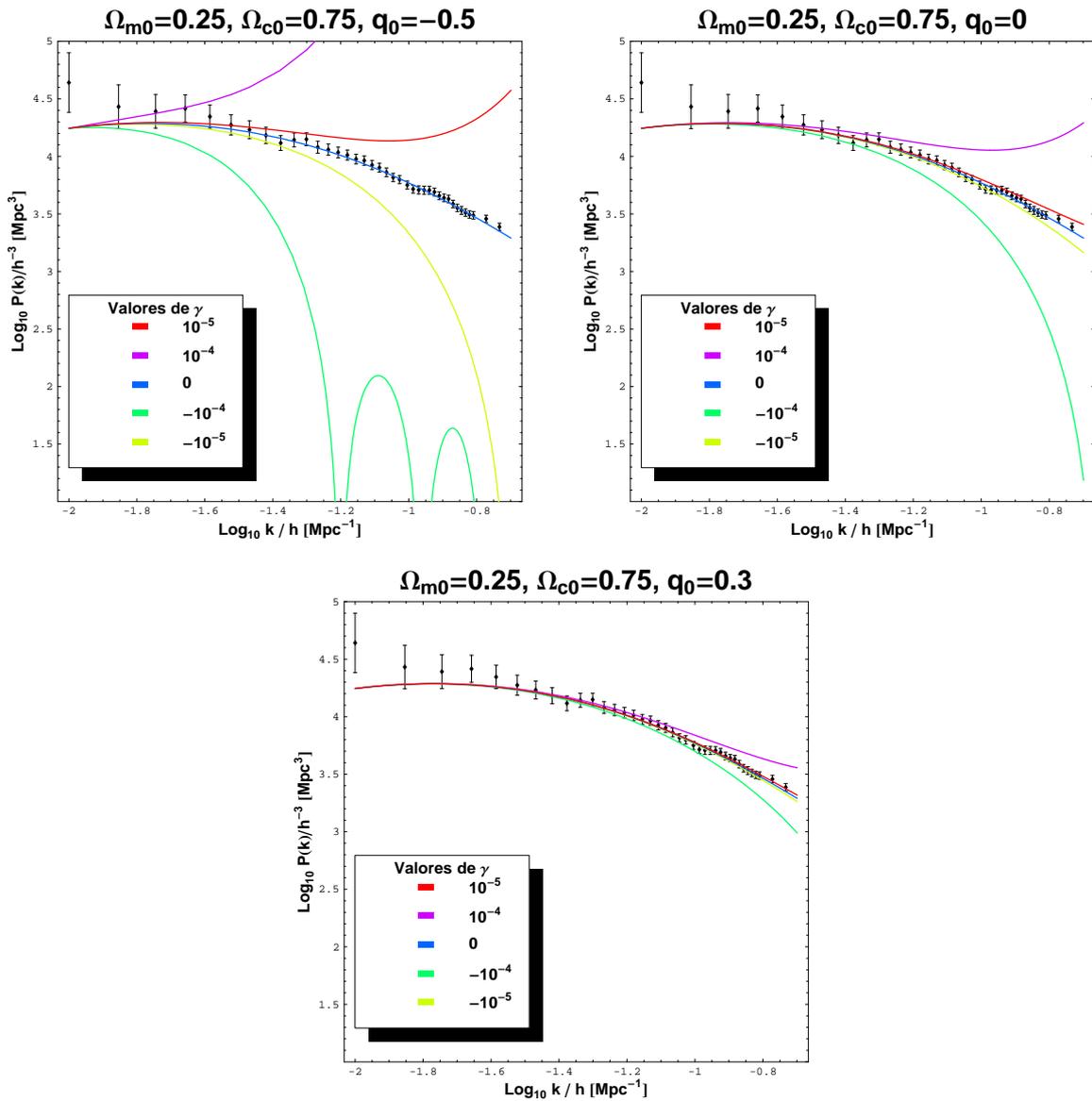


Figura 5.13: Espectros de potência para a componente gás de Chaplygin ($\delta\rho_c$) de acordo com a teoria neo-Newtoniana. As oscilações no espectro podem ser observadas somente se $q_0 = -0.5$.

$\gamma = 10^4$ e $q_0 = -0.5$. É possível levantar a hipótese de que a causa desta divergência seja o valor negativo de q_0 . Isto porque em todos os cenários anteriormente observados, onde testamos a influência de q_0 nos espectros, foi possível observar que as oscilações ou divergências foram acentuadas para valores negativos de q_0 .

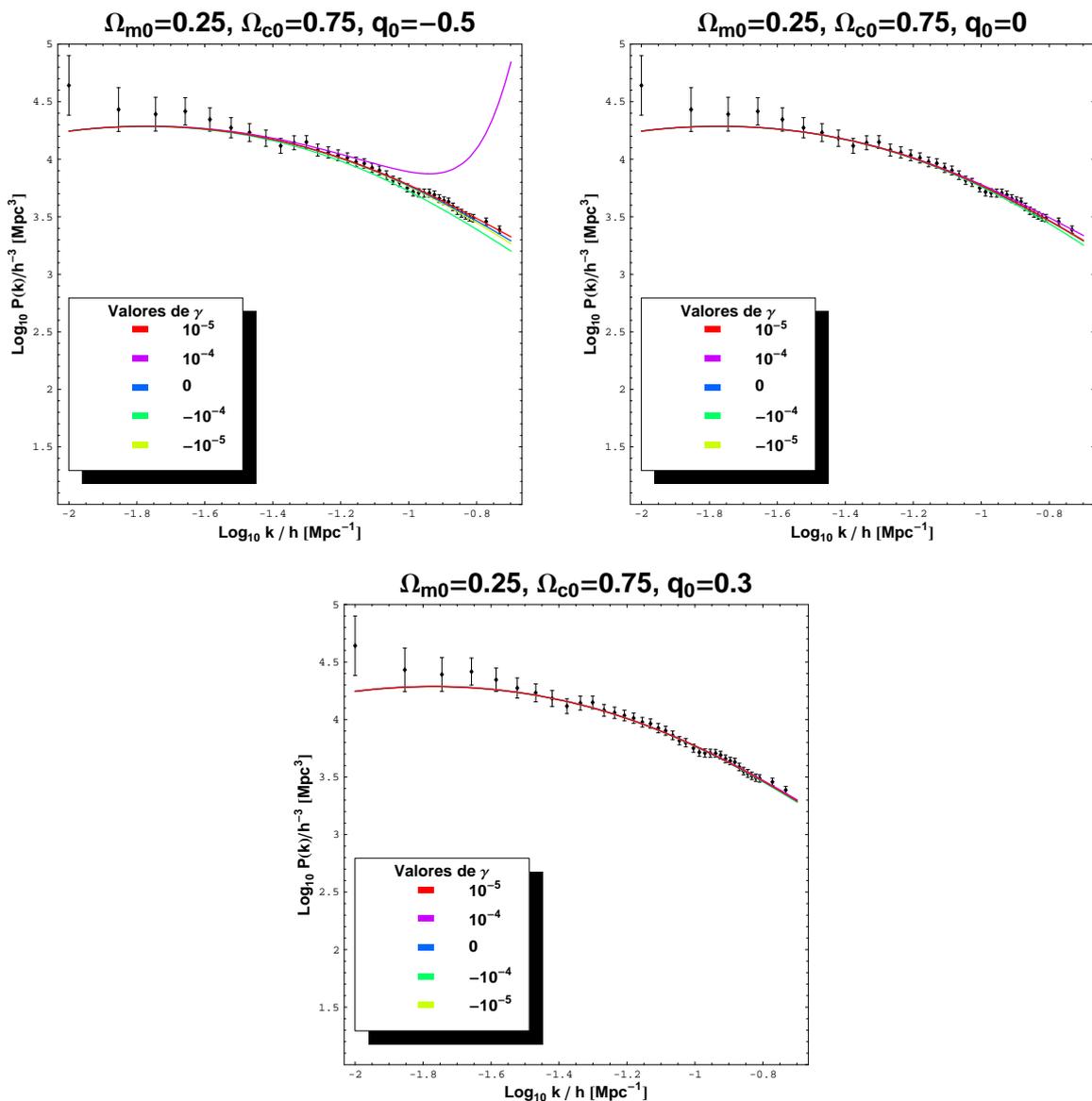


Figura 5.14: Espectros de potência para a componente de matéria ($\lambda\rho_m$) segundo a teoria neo-Newtoniana. As oscilações desaparecem para todos os casos estudados restando ainda um divergência para o caso onde $q_0 = -0.5$.

5.3.6 O caso degenerado

Na figura (5.15) podemos observar uma situação onde a teoria neo-Newtoniana produziu um espectro completamente degenerado. Como nas análises anteriores, os espectros para cinco distintos valores do parâmetro γ foram incluídos em uma mesma figura e o resultado é um espectro completamente degenerado. Este caso degenerado é uma situação bem particular onde as oscilações no espectro de potência não são observadas. Os valores utilizados para os parâmetros cosmológicos nesta análise foram: $\Omega_{c0} = 0.75$, $\Omega_{m0} = 0.25$

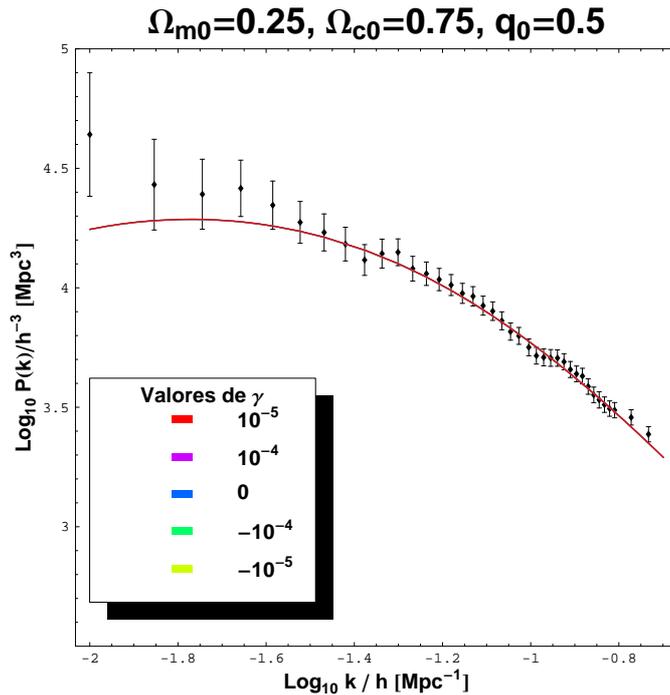


Figura 5.15: Espectro de potência para a componente gás de Chaplygin segundo a teoria neo-Newtoniana. Neste cenário, assim como nas análises anteriores, utilizamos cinco diferentes valores para γ e o resultado foi um espectro completamente degenerado.

e $q_0 = 0.5$. Além disto, esta mesma degenerescência no espectro de potência já havia sido encontrada para o caso de perturbações entrópicas que serão discutidas na próxima seção [54]. No nosso modelo, a causa de tal degenerescência no espectro é atribuída ao fato de a velocidade do som para o gás de Chaplygin se anular para determinada configuração dos parâmetros cosmológicos.

5.4 Perturbações na Entropia e Decomposição do gás de Chaplygin

Como visto na última seção, um estudo perturbativo baseado em um modelo de quartessência para um Universo, onde a componente escura é dominada pelo gás de Chaplygin, produz incompatibilidades entre teoria e observação. O espectro de potência para o gás de Chaplygin exhibe oscilações e divergências em seu comportamento, assim como observado na figura (5.7). Este fato, por si só, pode ser o suficiente para descartar um

modelo de unificação para o setor escuro do Universo representado pelo gás de Chaplygin. A existência do problema das oscilações no espectro de potência, já foi também detectada para outros modelos de quartessência como o logarítmico e o exponencial [53]. No entanto, encontram-se na literatura duas maneiras de se processar o espectro de potência para o gás de Chaplygin, evitando a existência das oscilações e divergências observadas por *Sandvik et. al.* [56]. Numa primeira proposta, um tipo particular de escolha dentro do processo perturbativo é tomada fazendo com que as oscilações do espectro continuem a existir somente para alguns valores muito particulares do parâmetro α . Trata-se de perturbações entrópicas que eliminam as quantidades responsáveis pelas oscilações nas equações perturbadas [54].

Nos estudos perturbativos referentes ao gás de Chaplygin geralmente assume-se que as perturbações na pressão são adiabáticas. A alternativa proposta por *Reis et.al* [54], consiste em tratar de perturbações não-adiabáticas, ou entrópicas, com o objetivo de eliminar as oscilações no espectro de potência para o gás de Chaplygin. Nesta abordagem, utilizando o calibre síncrono, as equações que governam a evolução das perturbações escalares são [55]:

$$\delta' + 3(c_{si}^2 - w_i) \frac{a'}{a} \delta_i = -(1 + w_i) \left(kv_i + \frac{h'_L}{2} \right) - 3w_i \frac{a'}{a} \Gamma_i, \quad (5.20)$$

$$v'_i + (1 - 3c_{si}^2) \frac{a'}{a} v_i = \frac{c_{si}^2}{1 + w_i} k \delta_i + \frac{w_i}{1 + w_i} k \Gamma_i, \quad (5.21)$$

$$h''_L + \frac{a'}{a} h'_L = - \sum_i (1 + 3c_{si}^2) 8\pi G \rho_i a^2 \delta_i - 24\pi G a^2 \sum_i p_i \Gamma_i, \quad (5.22)$$

onde δ_i é o contraste da densidade, v_i é a perturbação na velocidade e Γ_i a perturbação entrópica de cada componente i , a é o fator de escala, h_L é o traço da perturbação métrica e n é o número de onda associado a cada modo perturbado. As componentes consideradas foram: A bariônica, com $c_{sb}^2 = 0$ e $\Gamma_b = 0$ e o gás de Chaplygin. Quando o gás de Chaplygin é considerado, as oscilações observadas no espectro de potência é um consequência direta, de termos o lado direito da equação (5.21) não nulo, para o caso

adiabático (Γ_{ch}) [56]. Dessa forma, podemos anular o lado direito da equação (5.21), afim de eliminar as oscilações no espectro de potência, de maneira que o fator Γ_{ch} é determinado por:

$$\Gamma_{ch} = -\frac{c_{sch}^2}{w_{ch}}\delta_{ch} = \alpha\delta_{ch}. \quad (5.23)$$

Os resultados obtidos para este caso são totalmente satisfatórios, no sentido de não exibir as oscilações no espectro de potência para o gás de Chaplygin. Além disso, independentemente dos valores de α utilizados por *Reis et al.* [54], não há diferença no comportamento do espectro de potência para o gás de Chaplygin, o que indica uma forte degenerescência para tal espectro.

Um segundo caso estudado propõe uma decomposição única do gás de Chaplygin de forma que a energia associada à Matéria Escura é transferida para a componente de Energia Escura que se comporta como constante cosmológica [59]. O resultado deste modelo no processo de formação de estruturas revela que a componente de Matéria Escura δ_{DM} não é suprimida enquanto o Universo evolui o que acarreta na inexistência das oscilações observadas no espectro de potência da componente gás de Chaplygin.

Este curioso comportamento observado no espectro de potência do gás de Chaplygin sugere uma melhor investigação sobre o caso. As oscilações observadas entram em conflito com os dados observacionais, fato este que é apontado como uma possibilidade de se descartar a utilização do gás de Chaplygin em estudos correspondentes à formação de estruturas. Deixaremos para abordar esta questão nas observações finais.

5.5 Modificação nas Condições Iniciais

Em todas as análises numéricas realizadas até aqui computamos o espectro de potência com base na relação (5.14). Antes de calcular os espectros de potência nas seções (5.2) e (5.3) foi necessário fixar as condições iniciais das equações (4.20-4.21) e (4.41-4.42). Nesse procedimento assumimos que a forma do espectro após a época do desacoplamento ($z \approx 1100$) até hoje ($z \approx 0$) é invariante. Assim, podemos calcular as condições iniciais

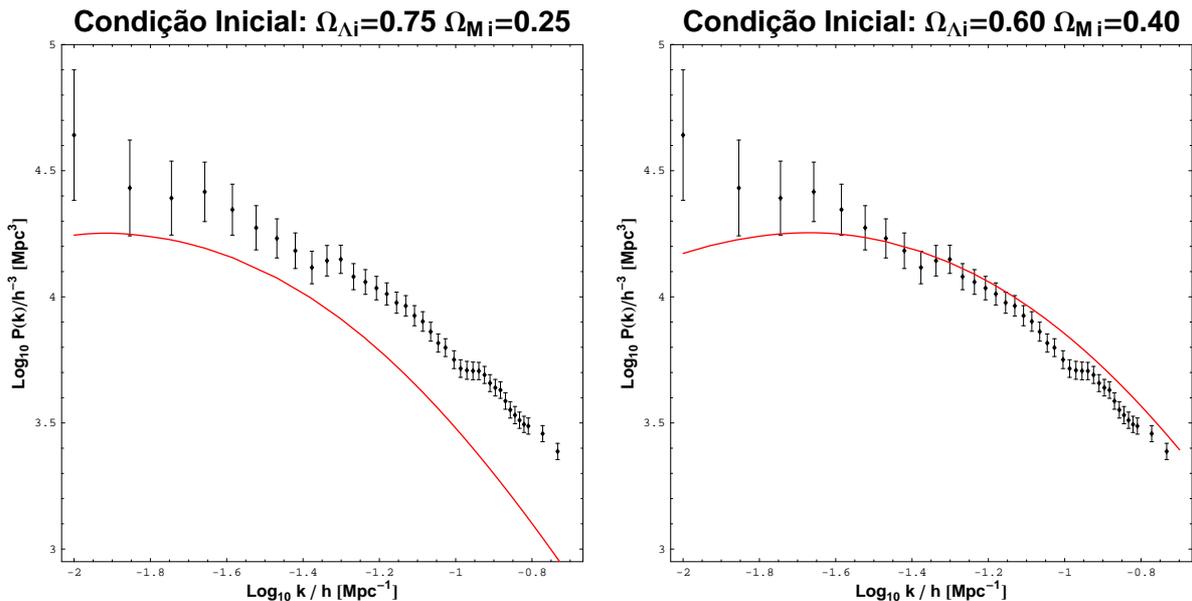


Figura 5.16: Espectros de potência para a componente de matéria de acordo com a teoria neo-Newtoniana para dois valores de condições iniciais. No entanto, ambos cenários são idênticos: $\Omega_{m0}=0.04$, $\Omega_{c0} = 0.96$ (cenário de unificação do setor escuro) e $q_0 = 0.2$ (Universo desacelerado). No espectro da esquerda da figura acima utilizamos $\Omega_{\Lambda i} = 0.75$ e $\Omega_{M i} = 0.25$ no cálculo das condições iniciais e obtivemos o valor de $\chi^2 = 105.18$ e $\sigma_8 = 0.54$. Enquanto que no espectro da direita da figura acima utilizamos $\Omega_{\Lambda i} = 0.60$ e $\Omega_{M i} = 0.40$. Encontramos para este caso $\chi^2 = 63.837$ e $\sigma_8 = 0.90$.

das equações (4.20-4.21) e (4.41-4.42) em qualquer momento no passado desde que ele se encontre neste intervalo. A constituição do Universo nesta época é fundamental para a determinação das condições iniciais. Através da relação (5.14) podemos encontrar um valor inicial para $|\delta(n)|$, computando $\sqrt{P(n)}$ com os valores $\Omega_{T i}$ e $\Omega_{M i}$, no lugar de Ω_{t0} e Ω_{m0} , onde $\Omega_{T i} = \Omega_{M i} + \Omega_{\Lambda i}$, sendo que $\Omega_{T i}$ representa a densidade fracionária total, $\Omega_{M i}$ a densidade fracionária de matéria e $\Omega_{\Lambda i}$ a densidade fracionária da constante cosmológica, todas elas calculadas em um instante inicial. No cálculo de todas as condições iniciais dos espectros das seções (5.2) e (5.3) a composição utilizada para o Universo foi a mesma. Consideramos que o Universo era composto por constante cosmológica e matéria nas frações $\Omega_{\Lambda i} = 0.75$ e $\Omega_{M i} = 0.25$, respectivamente. Esta composição é a base do modelo ΛCDM . O nosso objetivo nesta seção é investigar a alteração ocorrida nos espectros de potência se considerarmos uma constituição diferente do Universo no momento em que calculamos suas condições iniciais. Propomos alterar as quantidades de constante cosmológica e matéria para $\Omega_{\Lambda i} = 0.60$ e $\Omega_{M i} = 0.40$. Com esta alteração, quando volta-

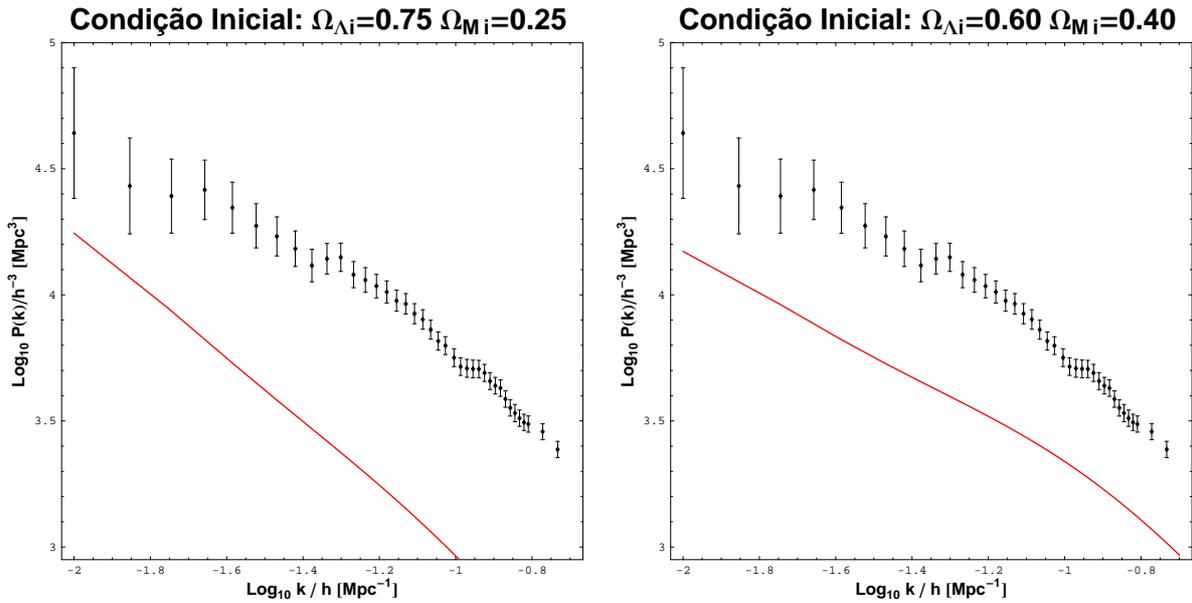


Figura 5.17: Espectros de potência para a componente de matéria de acordo com a teoria Newtoniana para dois tipos de condições iniciais. No entanto, ambos cenários são idênticos: $\Omega_{m0} = 0.25$, $\Omega_{c0} = 0.75$ (cenário de unificação do setor escuro) e $q_0 = 0.5$ (Universo desacelerado). No espectro da esquerda da figura acima utilizamos $\Omega_{\Lambda i} = 0.75$ e $\Omega_{M i} = 0.25$ no cálculo das condições iniciais e obtivemos os resultados: $\chi^2 = 170.55$ e $\sigma_8 = 0.33$. Enquanto que no espectro da direita da figura acima utilizamos $\Omega_{\Lambda i} = 0.60$ e $\Omega_{m i} = 0.40$ e encontramos $\chi^2 = 127.03$ e $\sigma_8 = 0.55$.

mos no passado a quantidade de Energia Escura deixa de ser tão dominante e de alguma forma se converte em Matéria Escura. A Energia Escura deve possuir uma relevante parcela da composição do Universo hoje, para explicar a expansão acelerada, mas não necessariamente no passado, o que justificaria nossa proposta.

Nesta etapa voltamos a calcular o espectro da componente de matéria. Vamos fixar nossas atenções no cenário de unificação do setor escuro do Universo ($\Omega_{m0} = 0.04$ e $\Omega_{c0} = 0.96$), no contexto de uma geometria plana ($\Omega_{m0} + \Omega_{c0} = 1$). Além disso, consideramos aqui um Universo desacelerado com $q_0 = 0.2$. Pretendemos realizar uma breve análise comparativa sintetizando as principais diferenças entre o cenário em que as condições iniciais são calculadas levando em conta $\Omega_{\Lambda i} = 0.75$ e $\Omega_{M i} = 0.25$ com o cenário onde $\Omega_{\Lambda i} = 0.60$ e $\Omega_{M i} = 0.40$. Na figura (5.16), é possível observar a forma do espectro para os dois casos. O resultado da estatística χ^2 , apresentado na legenda, indica que a alteração proposta no cálculo das condições iniciais adequou melhor a teoria com a observação, ou seja, em uma análise inicial a quantidade de constante cosmológica no passado não precisa

ser tão superior a Matéria Escura.

Ainda observando a variação do comportamento do espectro de potência segundo uma modificação nas condições iniciais, analisamos um resultado para a teoria Newtoniana na figura (5.17). Contrário ao caso anterior, quando mudamos as condições iniciais, a predição teórica do modelo Newtoniano se distancia dos dados observacionais como fica evidenciado pelos valores da estatística χ^2 para cada um dos casos apontados na legenda. Quando utilizamos $\Omega_{\Lambda i} = 0.75$ e $\Omega_{M i} = 0.25$ obtivemos $\chi^2 = 170.55$ enquanto que com $\Omega_{\Lambda i} = 0.60$ e $\Omega_{m i} = 0.40$ encontramos $\chi^2 = 127.03$. Novamente esta análise indica que a modificação proposta no cálculo das condições iniciais promove uma melhor concordância entre o espectro teórico e as observações. No entanto, somente estas análises não nos permitem concluir qual é a real relação entre o comportamento do espectro de potência e o valor da condição inicial utilizada no cálculo das equações (4.20-4.21) e (4.41-4.42). Nosso objetivo nesta seção é apresentar esta característica do cálculo numérico do espectro de potência, de forma que seria necessário proceder com uma análise comparativa muito mais extensa para poder concluir sobre o papel da influência da composição do Universo no momento em calculamos as condições iniciais.

Capítulo 6

Observações Finais e Conclusões

6.1 Teorias Newtoniana e Neo-Newtoniana

Buscamos neste trabalho o estudo e a compreensão da cosmologia sob um ponto de visto puramente clássico. Em particular, nos interessamos na teoria envolvida na questão da evolução das flutuações primordiais que resultam, devido a um processo de colapso gravitacional, nas estruturas astronômicas que hoje observamos. Junto a isso, o fato de observarmos que o Universo atravessa uma fase onde seu tamanho físico expande de forma acelerada nos permite propor uma constituição para o Universo baseada em matéria e um fluido ideal com pressão negativa. No modelo apresentado no quarto capítulo o Universo é constituído por matéria, sem pressão e um segundo fluido que possui uma equação de estado do tipo $p = \nu\rho^\gamma$. Nosso objetivo foi confrontar nosso modelo com os dados observacionais, advindos do programa 2dFGRS e buscar, então, o comportamento do espectro de potência para diferentes cenários cosmológicos. A escolha deste tipo de equação de estado nos fornece um comportamento bastante geral para o fluido de forma a podermos cobrir o caso do gás de Chaplygin ($\gamma = -1$), que foi discutido neste trabalho e é um forte candidato para a Energia Escura. Para buscar uma ligação entre observação e teoria, utilizamos um estudo perturbativo baseado nas cosmologias Newtoniana e neo-Newtoniana. O que nossos espectros teóricos obtidos no quinto capítulo nos permitem concluir é que os

resultados obtidos para o espectro de potência da matéria deixam claro que o modelo neo-Newtoniano apresenta predições teóricas em melhor acordo com as observações. Podemos atribuir este resultado ao fato de que ao considerarmos os efeitos gravitacionais da pressão nas equações cosmológicas de fluidos, possuímos um aparato teórico mais realista para o modelo proposto. Assim, ficou evidente que quando consideramos a participação de um fluido com pressão diferente de zero na constituição do Universo, as equações da hidrodinâmica neo-Newtoniana fornecem melhores resultados do que o modelo Newtoniano.

Uma natural continuação para este trabalho é a generalização deste modelo para o caso relativístico incluindo, talvez, um gás com uma equação de estado mais complexa.

6.2 Sobre o espectro de potência da componente gás de Chaplygin

Discutimos ao longo dos capítulos quatro e cinco deste trabalho a utilização do gás de Chaplygin como constituinte do setor escuro do Universo. A respeito deste, apesar de um gás que possua uma pressão negativa ser satisfatório para explicar a observada fase de expansão acelerada do Universo, existem problemas associados ao gás de Chaplygin quando estudamos o processo de formação de estruturas. Tais problemas estão relacionados com oscilações observadas no espectro de potência do gás de Chaplygin. No nosso modelo, observamos oscilações no espectro da componente gás de Chaplygin. No entanto, estas se restringiram aos casos onde o parâmetro de desaceleração do Universo era menor que zero como podemos observar nos espectros das seções (5.3.1) a (5.3.5). Além disso, mesmo quando $\gamma = -10^{-4}$ já é possível observar oscilações no espectro de potência. A nossa discussão sobre este problema baseia-se no fato de que os dados utilizados no confronto de um espectro teórico com a observação são provenientes da matéria bariônica. Logo, não convêm comparar um espectro teórico para a componente gás de Chaplygin com tais dados. Afinal de contas, não observamos o gás de Chaplygin, que é justamente um candidato para o setor escuro do Universo. Assim, ao propormos uma constituição para o

Universo baseada em matéria e um gás com pressão dada pela equação $p = \nu\rho^\gamma$ desejamos justamente observar o comportamento do espectro de potência da matéria mesmo quando o Universo é permeado por um gás com pressão negativa ($\nu < 0$). Realizamos esta análise na seção (5.3.5) onde computamos os espectros de potência da matéria e do gás para os mesmos cenários cosmológicos e observamos que as oscilações surgem apenas nos espectros do gás e não nos da matéria. Sob este ponto de vista, parece razoável afirmar que ainda é um pouco prematuro dizer que o gás de Chaplygin apresenta problemas quando testado no âmbito do processo de formação de estruturas.

Referências Bibliográficas

- [1] A. G. Riess *et al.* [High-z Supernova Search], *Astron. J.* **116**, 1009, (1998).
- [2] S. Perlmutter *et al.* [Supernova cosmology project], *Astrophysic. J.* **517**, 565, (1999).
- [3] A. Einstein, *Annalen der Physik*, 49, 769-822, (1916).
- [4] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, (1987).
- [5] M. Gleiser, *O Fim da Terra e do Céu*, Companhia das Letras, (2001).
- [6] A. Einstein, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.* **142** (1917), *Ann. Phys.* **69**, 436, (1922).
- [7] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, (1984).
- [8] A. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 327(1981); A. D. Linde, *Phys. Lett* **108B**, 389 (1982); A. Albrecht e P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220, (1982).
- [9] A. Friedmann, *Z. Phys.* **10**, 377, (1922).
- [10] E. P. Hubble, *Publ. Natu. Acad. Sci.* **15**, 168, (1929).
- [11] J. Garcia-Bellido, [astro-ph/0502139](#).
- [12] A. A. Penzias and R. R. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419, (1965).
- [13] G. Gamow, *Phys. Rew.* **70** (1946) 572; *Phys. Rew.* **74**, 505, (1948).
- [14] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, São Francisco, (1972).
- [15] M. Giovannini, [astro-ph/0703730](#).

- [16] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Others Topological Defects*, Cambridge University Press, (1994).
- [17] T. Padmanabhan, *Structure Formation of the Universe*, Cambridge U.P., (1993).
- [18] P. J. E. Peebles, *The Large-Scale Structure of Universe*, Princeton, (1980).
- [19] P. J. Peebles, *Physical principles of Cosmology* (Princeton University press, 1993); J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge Univ. Press, (1999).
- [20] E. A. Milne, *Quart. J. Math.* **5**, 64, (1934).
- [21] A. Einstein, *Teoria da Relatividade Especial e Geral*, Contraponto, (1999).
- [22] E. A. Milne, W. H. McCrea, *Quart. J. Math.* **5**, 73, (1934).
- [23] D. Layzer, *Astron. J.* **59**, 258, (1954).
- [24] H. Bondi, *Cosmology*, Cambridge, (1952).
- [25] F. J. Tipler, *Am. J. Phys.* **64**, 10, (1996).
- [26] W. H. McCrea, *Proc. R. Soc. London* **206**, 562, (1951).
- [27] E. T. Whittaker, *Proc. Roy. Soc. A*, **149**, 384-395, (1935).
- [28] E. R. Harrison, *Ann. Phys (N.Y.)* **35**, 437, (1965).
- [29] J. A. S. Lima, V. Zanchin e R. Brandenberg, gr-qc/9612166.
- [30] R. K. Sacks e A. M. Wolfe, *Astr. J.* **147**, 73, (1965).
- [31] Zwicky F., *Helv. Phys. Acta*, **6**, 110, (1933).
- [32] R. R. R. Reis, *Phys. Rev D* **67**, 087301, (2003).
- [33] M. Milgrom, *Astrophys. J.* **270**, 365, (1983); M. Milgrom, *Astrophys. J.* **270**, 371 (1983); M. Milgrom, *Astrophys. J.* **270**, 384, (1983).

- [34] M. Milgrom, R. H. Sanders, Arquivo e-print: astro-ph/0611494; R. H. Sanders, E. Noordermeer, astro-ph/0703352.
- [35] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev D* **70**, 083509, (2004).
- [36] C. Skordis, *Phys. Rev D* **74**, 103513, (2006).
- [37] R. A. Knop *et. al.*, Arquivo e-print: astro-ph/0309368.
- [38] T. Multamaki, M. Manera, E. Gaztanaga, *Phys. Rev. D* **69**, 023004 (2004).
- [39] S. Chaplygin, *Sci. Mem. Moscow Univ. Math* **21**, 1, (1904).
- [40] K. Stanyukovich, *Unsteady Motion of Continuous Media*, Pergamon, Oxford, UK (1960).
- [41] R. Jackiw, A particle field theorist's lectures on supersymmetric, non Abelian fluid dynamics and d-branes, physics/0010042.
- [42] M. Bordemann, J. Hoppe, *Phys. Letters B*, **317**, (1993).
- [43] R. Jackiw e A. P. Polychronacos, *Phys. Rev D* **62**, 085019, (2000).
- [44] J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves, P. E. Souza, astro-ph/0207430.
- [45] M.C. Bento, O. Bertolami e A.A.Sen, *Phys. Letters* **B575**, 172, (2003).
- [46] A. Dev, D. Jain, D. D. Upadhyaya e J.S. Alcaniz, astro-ph/0311056.
- [47] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser e A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304** 15 (1986).
- [48] M. Makler, T. Kodama, M. O. Calvão, astro-ph/0101113.
- [49] R. R. R. Reis, I. Waga, M. O. Calvao, S. E. Joras, *Phys. Rev D* **68** 061302 (2003).
- [50] N. Sugiyama, *Astrophys. J. Suppl.* **100** 281 (1995), astro-ph/9412025.
- [51] S. M. Carrol, W. H. Press, E. L. Turner, *Ann. Rev. astron. Astrophys.* **30** 499 (1992).

- [52] S. Cole *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362** (2005) 505-534, astro-ph/0501174.
- [53] R. R. R. Reis, I. Waga, Makler. M, astro-ph/0501613.
- [54] R. R. R. Reis, I. Waga, M. O. Calvão e S. E. Jorás, astro-ph/0306004.
- [55] H. Kodama, M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1, (1984); K. A. Malik, PhD thesis, University of Portsmouth, astro-ph/0101563.
- [56] H. Sandvik, M. Tegmark, M. Zaldarriaga, I. Waga, astro-ph/0212114.
- [57] J. Martin, A. Riazuelo e M. Sakellariadou, *Phys. Rev. D* **61**, 083518, (2000).
- [58] G. Hinshaw *et. al.*, astro-ph/0603451.
- [59] M. C. Bento, O. Bertolami e A. A. Sen, astro-ph/0407239.