UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM FÍSICA

Luis Ivan Morales Bautista

FORMAILSMO HAMILTONIANO DO MODELO DE JACKIW–TEITELBOIM NO CALIBRE TEMPORAL

VÍTORIA
2007

Luis Ivan Morales Bautista

Formalismo Hamiltoniano do Modelo de Jackiw-Teitelboim no Calibre Temporal

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Piguet

VITÓRIA
2007

Formalismo Hamiltoniano do Modelo de Jackiw-Teitelboim no Calibre Temporal

Luis Ivan Morales Bautista

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada em 05 de Julio de 2007

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Olivier Piguet
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Clisthenis P. Constantinidis
Universidade Federal do Espírito Santo
Coorientador

Prof. Dr. Fernando Pablo Devecchi
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves
Universidade Federal do Espírito Santo

Dedico esta dissertação a meus pais, por ser exemplo de honestidade, trabalho, companheirismo. A meus irmãos Never, Jesus e minha irmã Rocio, obrigado por tudo. Amo vocês.

Agradecimentos

A Deus, pela vida, pelas conquistas e por me dar forças para superar os obstáculos encontrados no decorrer destes anos.

Ao meu Orientador, Professor Olivier Piguet pela oportunidade concedida, pela amizade, paciência disposição, pelos ensinamentos transmitidos, obrigado Professor.

A meus pais, Lourdes e Luis, a meus irmãos, Never, Jesus e minha irmã Rocio, por acreditar sempre em mim, por seu enorme apoio, sim vocês lograr isto ia ser impossível. valeu!.

A meus tios Carlos Constantino Zapata e Norma Pajuelo, obrigado pela confiança e apoio.

A meu Profesor e amigo Jorge Espichán, por acreditar e incentivar em realizar este mestrado, obrigado Jorge.

Ao meu gram amigo Luis A. Soriano, companheiro de Mestrado, por tudo seu apoio nos momentos dificiles, por sua amizade e por suportarme tudo este tempo, obrigado meu amigo.

Ao meu amigo Cristiano pela amizade, pelo apoio, obrigado.

Ao meus amigos da Pos-Graduação em Física, amigos muito especiais que sempre estiverem mostrando sua confiança e fazendo mia estadia mais grata, pelo carinho, pelo companheirismo, pelas discussões neste trabalho, pela ajuda na correção do Português, etc. obrigados meus amigos: José André, Alex Rios, Jardel, Breno, Hermano, Gabriel, Raphael Fracalosi, Paulo , Fanny, Deborah, Fabio Fagundes, ...

A minhas grandes amigas Isabel e Cecilia, obrigado.

Aos professores Galen, Clisthenis, Brasil.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

E agradecer a CAPES, pelo financiamento para desenvolver este trabalho, obrigado.

“As melhores ideias em geral ocorrem não quando as buscamos ativamente, mas quando estamos mais relaxados.”

Abdus Salam.

Resumo

Frente às dificuldades que aparecem na teoria da Relatividade Geral no mundo real, estudam-se modelos mais simples, como por exemplo, a gravitação 2-dimensional, que permitem entender a natureza desta. No entanto mesmo se a gravitação em duas dimensões não descreve o mundo real, ela permite eliminar algumas das dificuldades encontradas num espaço-tempo 4-dimensional.

Estudaremos a gravitação 2-dimensional, nos baseando no modelo de Jackiw-Teitelboim, a qual é formulado como uma teoria topológica do tipo BF. Devido a dificuldades encontradas com o grupo de Poincaré ISO(1,1), introduziremos o grupo de (anti)-de Sitter (A)dS, SO(2,1). Faremos uma fixação parcial de calibre análoga àquela feita em 4-dimensões no formalismo de "Quantização de Laços". Estudaremos as quantidades invariantes de calibre, os observáveis de Dirac desta teoria, e finalizaremos dando uma breve introdução à transição para a teoria quântica.

Abstract

In view of the difficulties which appear in the theory of General Relativity in the real world, studies of simpler models then allow us to understand its features. If, on one side, the gravitation in two dimensions does not describe the real world, it allows us to simplify the difficulties encountered in 4-dimensional spacetime.

We will study the 2-dimensional gravitation, basing us on the model of Jackiw-Teitelboim, which is formulated as a topological theory of BF type. Due to difficulties found with the Poincare group ISO(1,1), we will introduce the (anti)-de Sitter group (A)dS, SO(2,1). We will do a parcial gauge fixing analogous to the one done in 4-dimensions in the formalism of Loop Quantization. We will study the gauge invariant quantities, namely the Dirac observables of this theory, and we will finish giving a brief introduction to the transition to the quantum theory.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

As duas teorias com mais êxito na física do século XX foram a Mecânica Quântica, que culminou na teoria quântica dos campos e no Modelo Padrão de partículas e interações fundamentais, e a Relatividade Geral (RG), que é a teoria geométrica da gravitação de Einstein. Além da gravitação, as outras interações fundamentais da natureza são bem descritas mediante teorias de calibre. Devido a isto, pensa-se que a RG possa também ser descrita como uma teoria de calibre.

Usualmente, a gravitação de Einstein é construída em termos da conexão de Christoffel $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ (formalismo métrico ou de segunda ordem), que é vista como função da métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, isto é, uma teoria da métrica. Porém, esta também pode ser modelada como uma teoria de conexões. Tal reformulação traz a RG próximo a uma teoria de calibre, parecida com as que descrevem as outras três interações fundamentais da natureza [1]. Assim todas as teorias partem da mesma simetria, a diferença está na dinâmica. Em particular, enquanto a dinâmica das teorias de calibre das outras interações requer uma geometria de fundo (*background*), a RG não.

Costuma-se escrever a ação de Einstein no formalismo métrico [2], mas esta pode também ser equivalentemente representada no formalismo de primeira ordem [3–5], onde as variáveis são a conexão de spin e o vierbein, tomadas como quantidades independentes. Neste formalismo, quando a ação é variada, obtêm-se dois conjuntos de equações, os quais em combinação produzem as equações de Einstein para a gravitação.

A conexão de spin e o vierbein podem ser vistos como vetores potenciais associados com o grupo não homogêneo de Lorentz (grupo de Poincaré) com conexão de spin relacionada às "rotações" de Lorentz e o vierbein às translações [6].

Numa formulação covariante da teoria gravitacional de Einstein aparecem vínculos entre as variáveis canônicas [7–10]. Estes geram simetrias locais – ou simetrias de calibre. Estas simetrias são as transformações de coordenadas e as transformações de Lorentz locais, às quais correspondem aos graus de liberdade de calibre, não-físicos, que podem ser reduzidos por condições de fixação de calibre adequadas.

No formalismo métrico as equações de Einstein são equações diferenciais de segunda ordem, nas dez componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo Riemanniano. Na abordagem Hamiltoniana, enfoca-se a atenção em uma superfície tridimensional imersa no espaço-tempo 4-dimensional. Então o estado do sistema é dado especificando os valores de certos campos definidos sobre esta superfície, e por meio da Hamiltoniana podemos calcular a evolução das variáveis de campo acompanhando a deformação da hipersuperficie. Esta maneira de atacar o problema na gravitação para formular a dinâmica dos campos foi vista pela primeira vez por Arnowitt, Deser e Misner [2, 11, 12].

O estudo da gravitação clássica, sobretudo o problema das singularidades, é notoriamente difícil. No nível quântico a situação é pior, apesar de mais de setenta anos de investigação, ainda não podemos dar os fundamentos conceituais básicos da gravitação quântica. Frente a tais dificuldades é natural estudar modelos mais simples que compartilham fatos importantes com a Relatividade Geral.

O objetivo do trabalho é um primeiro passo para a quantização da gravitação em duas dimensões utilizando técnicas da Gravitação Quântica de Laços (Loop Quantum Gravity) [4, 13–16].

Do ponto de vista da RG, a gravitação em duas dimensões é problemática. A ação de Einstein-Hilbert se reduz a um termo topológico (característica de Euler-Poincaré), à qual se pode acrescentar um termo cosmológico que envolve a constante cosmológica. A única dependência métrica das integrais de caminho da gravitação é dada através do termo cosmológico. Portanto, é preciso considerar extensões não-triviais da teoria de Einstein. Um exemplo interessante é o modelo de Jackiw e Teitelboim [6, 17–22], o qual será objeto de estudo do presente trabalho. Este modelo é apresentado como um modelo que tem a estrutura de uma teoria topológica tipo BF. Em duas dimensões a gravitação vista como uma teoria de calibre é caracterizada pelo grupo de Lorentz $SO(1,1)$, porém o problema é que neste grupo não temos formas quadráticas invariantes e não degeneradas [23]. Uma solução deste problema é introduzir o grupo (Anti)-de Sitter "(A)dS", para definir uma ação cuja métrica de Killing é não degenerada. Veremos que o grupo (A)dS, tomado como um grupo de calibre, contém a simetria de difeomorfismo. Este enfoque será visto no Cap. 2.

No Cap. 3, discutimos o formalismo canônico da gravitação (1+1)–dimensional, e mostraremos que a teoria é descrita por uma Hamiltoniana completamente vinculada (o que é uma característica das teorias com covariância geral [9]); mais especificamente estes vínculos são de primeira classe e são os geradores das transformações de calibre da teoria [7, 9, 10], tudo isto a nível clássico.

No Cap. 4, introduzimos uma notação para as componentes dos campos e escrevemos explicitamente os resultados obtidos, como as equações de movimento, os vínculos, a álgebra dos colchetes de Poisson destes vínculos entre eles e com cada um dos campos, e as transformações de difeomorfismo dos campos.

No Cap. 5, procedemos a uma fixação parcial de calibre, análoga àquela feita no caso (3+1)-dimensional [4, 13, 14], com o propósito de que os resultados obtidos no caso 2-dimensional sirvam como um teste da gravitação em dimensões maiores que dois. Veremos que essa fixação parcial introduz vínculos de segunda classe, os quais serão removidos usando o formalismo de Dirac para teorias vinculadas [7, 24].

No Cap. 6, estuda-se as quantidades invariantes de calibre (observáveis de Dirac), que em duas dimensões correspondem a um Laço de Wilson T, e uma quantidade L quadrática no campo escalar [25], que tem uma analogia com a área do caso (3+1)-dimensional. Veremos que efetivamente estas duas quantidades são invariantes de calibre, isto é, observáveis de Dirac.

E para finalizar, no Cap. 7 daremos uma breve introdução concernente à transição da teoria clássica para a teoria quântica [15, 16].

Capítulo 2

Gravitação em Duas Dimensões

O propósito de estudar teorias com dimensões baixas, especificamente a gravitação em baixas dimensões, é de ganhar experiência para superar as dificuldades que aparecem no mundo físico real (3+1)-dimensional.

2.1 Teoria de Calibre da Gravitação

Uma teoria de calibre pode ser pensada como uma teoria na qual as variáveis dinâmicas são especificadas com respeito a um sistema de referência, escolhido de forma arbitrária em cada instante. As variáveis fisicamente relevantes são aquelas que não dependem do sistema de referência local escolhido. A transformação das variáveis induzidas por uma troca do sistema de referência é chamada de transformação de calibre.

A teoria da gravitação é invariante sob as transformações de difeomorfismo, cujos parâmetros são funções de espaço-tempo, precisamente como em uma teoria de calibre local. Como conseqüência pensa-se que a teoria de gravitação pode ser formulada como uma teoria de calibre. A teoria da gravitação formulada como uma teoria de calibre, não está escrita em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, mas sim em termos das variáveis de Einstein-Cartan, o D-bein (para nosso caso 2-dimensional D=2, o zweibein) e^I_μ e a conexão de spin w^{IJ}_μ, os quais são vistos como quantidades independentes[1]. Isto é chamado de formalismo de primeira ordem, pois a

[1]Os índices $\mu, \nu, \cdots = 0, 1$ referem-se às coordenadas de espaço-tempo ("índices universo"). Os índices $I, J, \cdots = 0, 1$ refem-se à coordenada do espaço-tempo tangente na base definida pelo D-bein. (Ver apêndice A).

ação contém derivadas dos campos até a primeira ordem (ver abaixo). A relação entre e_μ^I e w_μ^{IJ} é dada por uma equação de movimento, a qual nos leva ao formalismo da segunda ordem da gravitação.

O modelo da gravitação em duas dimensões pode ser formulado como uma teoria invariante de calibre. Teorias tipo Einstein em (1+1)-dimensões proporcionam um cenário para o estudo de temas ainda não entendidos na gravitação em (3+1)-dimensões. Em dimensão (1+1), as equações dinâmicas não estão baseadas sobre o tensor de Einstein ($R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$), já que em duas dimensões este anula-se identicamente e a ação usual de Einstein-Hilbert ($\int d^2x\sqrt{-g}R$) é um termo de superfície (uma constante), um invariante topológico, a característica de Euler, e não conduz a equações de movimento. Dado este problema, Jackiw e Teitelboim propõem incluir um campo escalar a mais [17,18,20,21]. Esta teoria, assim como as teorias de gravitação, em relatividade, é independente de fundo (*background* independente), no sentido que a própria geometria do espaço-tempo é dinâmica.

2.2 Modelo de Jackiw-Teitelboim

Devido à trivialidade da gravitação pura em duas dimensões, poderíamos buscar inspiração de outros temas para escrever uma ação para a gravitação. Uma teoria da qual se pode buscar esta inspiração é a teoria de Liouville [18, 26]. A teoria de Liouville clássica é invariante sob as transformações conformes [27], e permitiu a Jackiw e Teitelboim propor a equação de Liouville em substituição da equação de Einstein.

Introduzindo a constante cosmológica K na equação de Einstein, teríamos para a gravitação pura,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + Kg_{\mu\nu} = 0. \tag{2.1}$$

Dado que em 2-dimensões o tensor de Einstein se anula ($R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$), pode-se observar facilmente de (2.1) que a métrica desaparece para $K \neq 0$ e é totalmente indeterminada quando $K = 0$.

A equação de Liouville

$$R - 2K = 0 \tag{2.2}$$

onde R é o escalar de curvatura, pode ser escolhida como uma boa alternativa para substituir (2.1). Tomando esta como uma substituição à equação de Einstein em 2-dimensões, Jackiw e Teitelboim sugeriram uma ação, para substituir a ação de Einstein-Hilbert, da qual a equação de Liouville (2.2) pode ser derivada [6, 17, 18, 21]. Esta ação se escreve

$$S_{JT} = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \psi (R - 2K) \tag{2.3}$$

onde ψ é um campo escalar, o qual atua como um multiplicador de Lagrange. Esta ação é conhecida como a ação de Jackiw-Teitelboim [6, 17] e é geralmente covariante, quer dizer, invariante sob os difeomorfismos do espaço-tempo.

Além da eq. (2.2), implicando numa curvatura costante, a ação (2.3) produz a equação de movimento para ψ:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \psi + K g_{\mu\nu} \psi = 0 \,, \tag{2.4}$$

onde ∇_μ é a derivada covariante definida pela métrica [21].

2.3 Modelo BF

2.3.1 O Grupo de Calibre

Em qualquer dimensão a gravitação pode ser representada como uma teoria BF com vínculos [28]. No formalismo de segunda ordem a gravitação 2-dimensional pura é representada pela ação de Jackiw-Teitelboim (2.3). Como veremos, ela pode ser obtida, do formalismo de primeira ordem, a partir de uma ação do tipo BF [18–20, 22], com vínculos, sendo então uma teoria topológica.

Uma conexão, que é uma 1-forma, tomada na álgebra de Lie de um grupo de Lie escreve-se como

$$A = A_\mu dx^\mu \,, \quad A_\mu = A^i_\mu J_i \,,$$

onde os J_i são geradores e formam uma base da álgebra de Lie.

A formulação BF da gravitação em duas dimensões é baseada numa 1-forma de conexão com valores na álgebra de Lie de um grupo gerado pelas translações do espaço-tempo, P_I, $(I = 0, 1)$, e pelo boost de Lorentz, Λ:

$$A(x) = e^I(x)P_I + w(x)\Lambda \,, \tag{2.5}$$

onde e^I e w são as 1-formas zweibein e conexão de spin, respectivamente (ver o parágrafo A.7 do Apêndice A). A escolha mais óbvia do grupo de calibre seria, então, a do grupo de Poincaré, ISO(1,1), cujos geradores satisfazem a álgebra de Poincaré 2-dimensional:

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I{}^J P_J \quad , \quad [P_I, P_J] = 0 \,. \tag{2.6}$$

No caso onde existe uma constante cosmológica K não-nula, esta álgebra deve ser estendida na álgebra de (anti-)de Sitter (A)dS, SO(2,1) (ou SO(1,2))[2]:

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I{}^J P_J \quad , \quad [P_I, P_J] = K\epsilon_{IJ}\Lambda, \tag{2.7}$$

O grupo (A)dS (ver parágrafo B.3 do apêndice B) define a teoria de calibre mais conveniente, visto que, existe neste caso uma forma quadrática invariante *não-degenerada*, o que não se dá no caso de ISO(1,1). Com efeito, esta álgebra está equipada pela métrica de Killing k_{ij} não-degenerada

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} K\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{2.8}$$

onde introduzimos os índices $i, j = 0, 1, 2$ e definimos os geradores da álgebra de (A)dS como

$$\{J_i\} = \{J_0, J_1, J_2\} = \{P_0, P_1, \Lambda\} \,. \tag{2.9}$$

[2]O tensor antisimétrico ϵ_{IJ} é definido pela convenção $\epsilon_{01} = 1$. Os índices $I, J, \cdots$ são abaixados e elevados pela métrica do espaço tangente η_{IJ} (A.11) e seu inverso η^{IJ}.

A métrica de Killing define uma forma bilinear invariante não-degenerada $\langle\ ,\ \rangle$ (o "traço") (ver (B.2) do Apêndice B), tal que

$$\langle J_i, J_j \rangle = k_{ij}\,, \quad \text{ou:} \quad \langle P_I, P_J \rangle = K\eta_{IJ}\,, \quad \langle \Lambda, \Lambda \rangle = 1\,. \tag{2.10}$$

A álgebra de Lie (2.7) pode ser escrita de forma compacta como[3]:

$$[J_i, J_i] = f_{ij}{}^{k} J_k = K\epsilon_{ijl}k^{lk}J_k\,. \tag{2.11}$$

A relação entre forma de Killing e constantes de estrutura (B.11) [18–20] é dada por

$$k_{ij} = -\frac{\sigma}{2} f_{ik}{}^{l} f_{jl}{}^{k}\,. \tag{2.12}$$

De (2.11), obtemos que as constantes de estrutura não-nulas são:

$$f_{01}{}^{2} = K = -f_{10}{}^{2}\,, \quad f_{12}{}^{0} = \sigma = -f_{21}{}^{0}\,, \quad f_{20}{}^{1} = 1 = -f_{02}{}^{1}\,. \tag{2.13}$$

É facil verificar que, com as identificações (2.9), as eqs. (2.7) e (2.11) são equivalentes.

2.3.2 A Ação do Modelo BF

A ação clássica da teoria BF, invariante de calibre não degenerada, num espaço-tempo 2-dimensional [18–20, 22, 25, 28] é dada por:

$$S_{BF}[A, \phi] = \int \langle \phi, F \rangle = \frac{1}{2}\int d^2x \phi^i F^j_{\mu\nu} k_{ij} \epsilon^{\mu\nu}\,, \tag{2.14}$$

o que pode-se reescrever como:

$$S_{BF}[A, \phi] = \int dt L_{BF}\,, \quad L_{BF} = \int dx (\phi_i \partial_t A^i_x + A^i_t D_x \phi_i), \tag{2.15}$$

onde uma integração por partes em x foi feita para obter a última expressão. Aqui, o "traço" $\langle X, Y \rangle = \langle J_i, J_j \rangle X^i Y^j = k_{ij} X^i Y^j$, para X e Y sendo elementos da álgebra de Lie, representa a forma bilinear de Killing invariante da álgebra de Lie do grupo de calibre (A)dS – equação

[3] O tensor completamente antissimétrico ϵ_{ijk} é definido pela convenção $\epsilon_{012} = +1$

(2.10), $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita 2-dimensional[4]. Os ϕ^i são campos escalares e os $F^i_{\mu\nu}$ os campos de força de Yang-Mills, todos pertencendo à representação adjunta do grupo de calibre. Explicitamente:

$$\phi = \phi^i J_i \equiv \phi^I P_I + \psi\Lambda\,,$$

$$A = A^i J_i = A^i_\mu dx^\mu J_i \equiv e^I P_I + \omega\Lambda\,,$$

$$F = dA + A\wedge A = \tfrac{1}{2}F^i_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu J_i = F^i J_i$$

$$\equiv F^I P_I + F^2\Lambda\,,$$

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + f_{jk}{}^i A^j_\mu A^k_\nu\,.$$

Variando a ação (2.14) com respeito aos campos elementares A e ϕ, obtemos

$$\begin{aligned}\delta S_{BF}[A,\phi] &= \int (\langle\delta\phi, F\rangle + \langle\phi,\delta F\rangle) = \int \langle\delta\phi, F\rangle + \int \langle\phi, d\delta A + \delta A\wedge A + A\wedge\delta A\rangle \\ &= \int \langle\delta\phi, F\rangle + \int \langle\delta A, d\phi + [A,\phi]\rangle = \int (\langle\delta\phi, F\rangle + \langle\delta A, D\phi\rangle)\,,\end{aligned}$$

onde usamos a identidade

$$\begin{aligned}\langle\phi,\delta(A\wedge A)\rangle &= \langle\phi,\delta A\wedge A\rangle + \langle\phi, A\wedge\delta A\rangle \\ &= k_{ij}f_{kl}{}^j\phi^i\delta A^k\wedge A^l = f_{kli}\delta A^k\wedge A^l\phi^i \\ &= f_{lik}\delta A^k\wedge A^l\phi^i = \langle\delta A,[A,\phi]\rangle\ .\end{aligned}$$

Assim:

$$\delta S_{BF}[A,\phi] = \int k_{ij}(\delta\phi^i F^j + \delta A^i D\phi^j) = \int (\delta\phi_i F^i + \delta A^i D\phi_i)\,. \tag{2.16}$$

Como as equações de movimento definem-se por:

$$\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta\phi_i} = 0\,, \quad \frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta A^i} = 0$$

temos:

$$\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta\phi_i} = F^i = 0\,, \quad \frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta A^i} = D\phi_i = 0$$

[4] $\epsilon^{\mu\nu}$ é definido pela convenção ($\epsilon^{tx} = +1$). Os índices de coordenadas $\mu, \nu, \cdots$ tem os valores 0 e 1, também denotados por t e x.

A ação para uma teoria da gravitação deve ser invariante de difeomorfismo. É importante verificarmos que ação (2.14) é invariante de difeomorfismo, sendo isto uma conseqüência da invariância de calibre. Sob uma transformação de calibre infinitesimal o campo de calibre A e o campo escalar ϕ transformam-se como

$$\begin{aligned} &\delta_{\text{calibre}} A = d\epsilon + [A, \epsilon] \equiv D\epsilon \,, \quad \epsilon = \epsilon^i J_i \\ &\delta_{\text{calibre}} \phi = [\phi, \epsilon]^i = f_{jk}{}^i \epsilon^j \phi^k . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sob um difeomorfismo infinitesimal, $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x)$, as transformações do campo de calibre A, e do campo escalar ϕ são dadas pela derivada de Lie na direção do campo vetorial ξ^μ:

$$\mathcal{L}_\xi A = (i_\xi d + d i_\xi) A \,, \quad \mathcal{L}_\xi \phi = i_\xi d\phi \,,$$

onde i_ξ é a derivada interior associada ao campo vetorial ξ^μ. Essas transformações podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A &= i_\xi (dA + A^2) + d i_\xi A - i_\xi A^2 = i_\xi F + D(i_\xi A) \\ &= i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta \phi} + D(i_\xi A) = i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta \phi} + D\epsilon \,, \\ \mathcal{L}_\xi \phi &= (i_\xi d + d i_\xi)\phi = i_\xi d\phi = i_\xi D\phi - i_\xi [A, \phi] \\ &= i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta A} + [\phi, i_\xi A] = i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta A} + [\phi, \epsilon] \,, \end{aligned}$$

as quais possuem, a menos das equações de movimento, a forma de transformações de calibre com parâmetro infinitesimal $\epsilon = i_\xi A = \xi^\mu A_\mu$. Isto significa que a invariância sob os difeomorfismos já está contida na invariância de calibre se as equações de movimento são satisfeitas. Este resultado é típico de uma teoria de calibre topológica [9, 28] tal qual a presente formulação de calibre da gravitação.

Expandindo a ação (2.14) nas componentes $i = I, 2$, obtemos

$$S_{BF}[A,\phi][A,\phi] = \int (k_{IJ} \phi^I F^J + k_{22} \phi^2 F^2) = \int (K \eta_{IJ} \phi^I F^J + \phi^2 F^2) \,. \tag{2.18}$$

As componentes da curvatura em termos de (e^I, w) são

$$F^I \equiv T^I = dA^I + f_{jk}{}^I A^j \wedge A^k = de^I + w^I{}_J \wedge e^J \,, \tag{2.19}$$

$$F^2 = dA^2 + \frac{1}{2} f_{jk}{}^2 A^j \wedge A^k = dw + \frac{K}{2} e^I \wedge e^J \epsilon_{IJ} \,, \tag{2.20}$$

com T^I sendo a torsão. As equações de movimento são dadas por:

$$dw + \frac{K}{2} e^I \wedge e^J \epsilon_{IJ} = 0\,, \tag{2.21}$$

$$T^I = de^I + w^I{}_J e^J = 0\,, \tag{2.22}$$

$$D\phi^i = 0\,. \tag{2.23}$$

A Equação (2.22) é a condição de torsão nula para a conexão de spin. Supondo que o zweibein seja inversível, essa condição permite determinar algebricamente a conexão de spin, unicamente, como função das componentes de e^I e de suas derivadas [3,13]: Com efeito, (2.22) implica que,

$$2\partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^I + w^I{}_{J\mu} e_\nu{}^I - w^I{}_{J\nu} e^I{}_\mu = 0 \tag{2.24}$$

Multiplicando esta última equação por $E^\nu{}_I$ duas vezes[5] teremos:

$$\begin{aligned} 2E^\mu{}_K E^\nu{}_L \partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^I + E^\mu{}_K w^I{}_{J\mu} \delta^J_L - E^\nu{}_L w^I{}_{J\nu} \delta^J_K &= 0 & (2.25)\\ \xi^I{}_{KL} + w^I{}_{LK} - w^I{}_{KL} &= 0 & (2.26)\end{aligned}$$

onde introduzimos as notações

$$\xi^I{}_{KL} = 2E^\mu{}_K E^\nu{}_L \partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^I\,, \quad \text{e} \quad w^I{}_{LK} = w^I{}_{L\mu} E^\mu_K\,. \tag{2.27}$$

Tendo em conta que[6]

$$\xi_{JKL} = \xi^I{}_{KL} \eta_{IJ} \tag{2.28}$$

reescrevemos (2.26) como

$$w_{JKL} - w_{JLK} = \xi_{JKL}\,. \tag{2.29}$$

Fazendo permutações cíclicas dos índices,

$$w_{KLJ} - w_{KJL} = \xi_{KLJ} \tag{2.30}$$

$$w_{LJK} - w_{LKJ} = \xi_{LJK}\,, \tag{2.31}$$

[5] $E^\nu{}_I$ é a matriz inversa de $e_\nu{}^I$; para ver as propriedades dos D-bein e para a manipulação dos índices, ver o parágrafo A.7 do Apêndice A.

[6] Aqui o colchete [ ] nas expressões acima indicam antissimetria nos índices dentro dele.

somando (2.29) com (2.30) e substraindo (2.31), e também usando a propriedade $w_{IJK} = -w_{JIK}$, teremos que:

$$w_{JKL} = \frac{1}{2}(\xi_{JKL} + \xi_{KLJ} - \xi_{LJK})\,. \tag{2.32}$$

Logo, nesta última equação, manipulando os índices e substituindo as Equações (2.27) e (2.28) teremos finalmente como solução de (2.22):

$$\begin{aligned} w^{IJ}{}_{\mu}[e] &= E^{\alpha J}\partial_{[\alpha}e_{\mu]}{}^{I} + E^{\beta I}\partial_{[\mu}e_{\beta]}{}^{J} - e_{\mu M}E^{\alpha I}E^{\beta J}\partial_{[\alpha}e_{\beta]}{}^{M} \\ &= 2E^{\alpha[I}\partial_{[\nu}e_{\alpha]}{}^{J]} + e_{\mu M}E^{\alpha I}E^{\beta J}\partial_{[\beta}e_{\alpha]}{}^{M}\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

A Equação (2.21) relaciona o escalar de curvatura

$$R[w] = \frac{2\sigma}{e}\epsilon^{\mu\nu}\partial_{\mu}w_{\nu}\,, \quad \text{e} \quad e = \det(e^{I}{}_{\mu})\,. \tag{2.34}$$

com a constante cosmológica:

$$R[w] = -2\sigma K\,,$$

o que é a equação de Liouville (2.2) no caso Lorentziano $\sigma = -1$ [6, 18].

Uma ação do tipo (2.18) aparece pela primeira vez escrita por Fukawa e Kamimura [20], como uma descrição teórica de calibre do modelo Jackiw-Teitelboim [26] da gravidade 2-dimensional. Substituindo[7] a condição de torsão nula (2.22) na ação (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} S_{BF}[A,\phi] &= \int \phi_2 F^2 = \int \psi F^2 = \int \psi \left(dw + \frac{K}{2}\epsilon_{IJ}e^{I} \wedge e^{J} \right) \\ &= \int d^2x\, \psi \left(\partial_{\mu}w_{\nu} + \frac{K}{2}\epsilon_{IJ}e^{I}_{\mu}e^{J}_{\nu} \right) \epsilon^{\mu\nu} = \frac{\sigma}{2}\int d^2x\sqrt{\sigma g}\psi(R[w] + 2\sigma K) \end{aligned}$$

nesta última substituindo $\sigma = -1$ (que indica que estamos no espaço Loretziano) teremos que

$$S_{BF}[A,\phi] = -\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-g}\psi(R[w] - 2K) = -S_{JT}$$

reconhecendo assim a ação de Jackiw-Teitelboim (2.3) como um resultado derivado da ação BF (2.18) – a menos um sinal irrelevante. Logo, com a substituição de w por $w(e)$, a ação (2.18) reduze-se à ação de segunda ordem (2.3), o que mostra a equivalência das duas teorias.

[7] O que é legítimo visto que a solução da equação de torsão nula é puramente algébrica.

Capítulo 3

Formalismo Hamiltoniano

Na formulação canônica de nossa teoria, da gravitação dois-dimensional, veremos que a dinâmica é definida inteiramente através de vínculos. Alguns destes vínculos manifestam-se quando levamos a cabo a transformação de Legendre para definir a Hamiltoniana. Estes são chamados de vínculos primários. Quando requeremos que estes vínculos sejam preservados pela evolução, aparecem novos vínculos, chamados de vínculos secundários, os quais tem que ser também preservados pela evolução. Existem diferenças entre estes vínculos; dizemos que estes são de primeira classe se os colchetes de Poisson entre eles são combinações lineares de vínculos, caso contrario são chamados de vínculos segunda classe. Vamos encontrar ambos tipos e usaremos o procedimento dos colchetes de Dirac para os de segunda classe, convertendo o conjunto de vínculos de segunda classe em vínculos cujos colchetes de Dirac com qualquer campo são nulos. O tratamento Hamiltoniano de sistemas vínculados foi tratado por Dirac [7]. Para uma revisão rapída deste formalismo, ver Apêndice C e mais profundamente nas referencias [4, 7–10, 29].

O efeito de ter vínculos numa teoria, é restringir a dinâmica numa sub-variedade do espaço de fase, chamada de superfície vínculada. A trajetória dinâmica nesta superfície não esta unicamente definida. Cada evolução dinâmica é representada por uma família infinita de trajetórias que são fisicamente equivalentes. As trajetórias de uma família são equivalentes de calibre e definem um espaço de fase reduzido [4, 7, 9, 10, 29].

A ação (2.14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
S_{BF}[A,\phi][A,\phi] &= \frac{1}{2}\int \langle \phi, F_{\mu\nu}\rangle\, dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \int \langle \phi, \partial_t A_x - \partial_x A_t + [A_t, A_x]\rangle\, d^2x \\
&= \int \langle \phi, \partial_t A_x\rangle\, d^2x + \int \langle A_t, D_x\phi\rangle\, d^2x \\
&= \int k_{ij}\left(\partial_t A_x^i \phi^j + A_t^i D_x \phi^j\right) d^2x \\
&= \int dt L\,,
\end{aligned}
$$

$$
\text{onde} \quad L = \int dx \left(\partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i\right) \equiv \int dx \mathcal{L}\,, \quad \text{com} \quad \phi_i = k_{ij}\phi^j\,. \tag{3.1}
$$

Para chegarmos neste resultado usamos a importante propriedade mostrada em (B.13). Podemos já identificar as variáveis dinâmicas como os A_x^i e os ϕ_i, enquanto os A_t^i serão interpretados como multiplicadores de Lagrange, dado que eles aparecem linearmente e sem suas derivadas temporais; isto será mais evidente nos dois parágrafos seguintes.

Observemos que, no formalismo Hamiltoniano, privilegiamos a coordenada temporal t. Isso não prejudicará a covariança geral da teoria, visto que a invariança de difeomorfismo será mantida através da aplicação dos correspondentes vínculos, dentro do formalismo de Dirac a ser explicitado mais abaixo.

3.1 Momentos Conjugados

Aplicamos aqui o formalismo Hamiltoniano descrito no Apéndice C.

O ponto de partida para o formalismo Hamiltoniano é a definição dos momentos canônicos. Tomando como coordenadas generalizadas as componentes da conexão $A_\mu^i(x,t)$, consideradas como funções da coordenada espacial x, os momentos canonicamente conjugados são definidos como as derivadas funcionais[1]

$$
\pi_i^{A_\mu}(x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_\mu^i(x))}\,.
$$

[1]No seguinte, só a dependência na coordenada espacial, denotada x, y, etc., é explicitada. Todos os campos são tomados no mesmo valor t da coordenada temporal.

Então

$$\pi_i^{A_x}(x) \;=\; \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_x^i(x))} = k_{ij}\phi^j = \phi_i\,, \tag{3.2}$$

$$\pi_i^{A_t}(x) \;=\; \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_t^i(x))} = 0\,, \tag{3.3}$$

esta última eq. (3.3), representa três vínculos o que indica que a Lagrangiana (3.1) que descreve a teoria é uma lagrangiana singular, o que significa que não todas as velocidades podem ser escritas em termos dos momentos e os campos; temos então que $\partial_t A_x^i(x)$ pode ser escrito em termos dos momentos e os campos $A_x^i(x)$, $A_t^i(x)$ e ψ, mas isto não é possível para $\partial_t A_t^i(x)$, por conseguinte devemos usar o procedimento de Dirac [7] (ver o apêndice C), para a transformação de Legendre de teorias singulares. De acordo com a terminologia de Dirac estes vínculos (3.3) são chamados de “vínculos primários”.

Recorrendo à tranformação de Legendre, (C.7), definimos a Hamiltoniana

$$H = \int dx\,\mathcal{H}\,,$$

onde a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}$ é dada por

$$\mathcal{H} = \phi_i\partial_t A_x^i + \pi_i^{A_t}(x)\partial_t A_t^i - \mathcal{L} = \pi_i^{A_t}(x)\partial_t A_t^i - A_t^i D_x\phi_i\,.$$

Então a Hamiltoniana é

$$H = \int dx\left(\pi_i^{A_t}(x)\partial_t A_t^i - A_t^i D_x\phi_i\right) = \int dx\left(\pi_i^{A_t}(x)\partial_t A_t^i - \langle A_t, D_x\phi\rangle\right) \tag{3.4}$$

3.2 Vínculos Secundários

Da definição dos colchetes de Poisson (ver Apêndice C) na mecânica, em particular para coordenadas generalizadas q^n, p_n, temos:

$$\{q^n, p_m\} = \delta^n_m\,, \quad \{q^n, q^m\} = 0 = \{p_n, p_m\} \tag{3.5}$$

No nosso caso, para dois funcionais $F[A,\pi]$ e $G[A,\pi]$, temos

$$\{F,G\} = \int dz \left(\frac{\delta F}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G}{\delta \pi_i^{A_\mu}(z)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_i^{A_\mu}(z)} \frac{\delta G}{\delta A_\mu(z)} \right) . \tag{3.6}$$

Para os campos elementares:

$$\begin{aligned} &\left\{A_x^i(x), \phi_j(y)\right\} = \delta_j^i\, \delta(x-y) = \left\{A_t^i(x), \pi_j^{A_t}(y)\right\} \ , \\ &\left\{A_\mu^i(x), A_\nu^j(y)\right\} = 0 = \{\phi_i(x), \phi_j(y)\} \ , \\ &\left\{\pi_i^{A_t}(x), \pi_j^{A_t}(y)\right\} = 0 \, . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Observamos que todas essas equações são dadas num mesmo tempo t.

A eq. (3.3) implica que temos três vínculos primários[2],

$$\pi_i^{A_t}(x) \approx 0 \, . \tag{3.8}$$

Por questão de consistência, estes vínculos não devem evoluir temporalmente. A derivada temporal sendo definida pelo colchete de Poisson com a Hamiltoniana, devemos impor que os colchetes dos vínculos primários com a Hamiltoniana sejam fracamento nulos: (Apêndice C)

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} \approx 0.$$

No nosso caso, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i^{A_t} &= \left\{\pi_i^{A_t}(x), H\right\} = \int \left\{\pi_i^{A_t}(x), \pi_i^{A_t}(x)\partial_t A_t^i - A_t^j(y) D_y \phi_j(y)\right\} dy \\ &= \int \left\{\pi_i^{A_t}(x), A_t^j(y)\right\} D_y \phi_j(y) dy \\ &= D_x \phi_i(x) = \partial_x \phi_i + f_{ij}{}^k A_x^j \phi_k \\ &\equiv \mathcal{G}_i(x) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim devemos impor os vínculos secundários

$$\mathcal{G}_i(x) = D_x \phi_i(x) \approx 0 \, . \tag{3.10}$$

[2](Apêndice C). Os vínculos decorrente diretamente das relações de momento são chamados de vínculos primários $\phi_m(q,p) \approx 0$ usando a notação de Dirac " $\approx$ " significa uma igualdade "fraca". Isto quer dizer que só no final dos cálculos imporemos as igualdades fortes "=" para os vínculos.

Para mais adiante facilitar os cálculos podemos escrever os vínculos de forma integral,

$$\mathcal{P}(\alpha) = \int dx\ \alpha^i(x)\pi_i^{A_t}(x)\,, \tag{3.11}$$

$$\mathcal{G}(\epsilon) = \int dx\ \epsilon^i(x)\mathcal{G}_i(x)\,, \tag{3.12}$$

onde os $\epsilon^i(x)$ são parâmetros infinitesimais locais, que podem ser escolhidos como "funções teste" suaves[3]. Reciprocamente:

$$\pi_i^{A_t}(x) = \frac{\delta\mathcal{P}(\alpha)}{\delta\alpha^i(x)}\,, \quad \mathcal{G}_i(x) = \frac{\delta\mathcal{G}(\epsilon)}{\delta\epsilon^i(x)}\,. \tag{3.13}$$

Explicitamente para $\mathcal{G}_i$ temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\epsilon) &= \int dx\epsilon^i(x)(\partial_x\phi_i(x) + f_{jki}A_x^j\phi^k) \\ &= \int dx(-\phi_i(x)\partial_x\epsilon^i(x) + \epsilon^i(x)f_{ij}{}^k A_x^j\phi_k) \end{aligned}$$

Observamos que a Hamiltoniana (3.4) tem precisamente a forma de um vínculo integral, com as funções ϵ^i substituídas pelas componentes temporais $-A_t^i$ e $\partial_t A_t^i$ da conexão, que fazem o papel de multiplicadores de Lagrange. Isto era de esperar já que uma Hamiltoniana de puro vínculo é uma característica das teorias com covariancia geral [9, 10], que é o caso da relatividade geral.

Os vínculos primários $\pi_i^{A_t}(x)$ podem ser resolvidos trivialmente $\pi_i^{A_t}(x) = 0$. De outro lado os campos A_t^i tornam-se funções completamente arbitrarias. Então a Hamiltoniana (3.4) fica na forma:

$$H = -\int dx A_t^i D_x\phi_i \tag{3.14}$$

3.3 Álgebra dos Vínculos

Vejamos quais propriedades devem satisfazer os vínculos $\mathcal{G}_i(x)$, eq. (3.10), principalmente quanto a seus colchetes de Poisson. O colchete de Poisson de dois vínculos quaisquer tem que ser uma combinação linear dos vínculos (propriedades de vínculos de primeira classe[4]). Isto

[3]Funções do espaço $\mathcal{S}$ de Schuartz, as quais são funções $\mathcal{C}^\infty$ que decaem no infinito mais rapidamente que qualquer potencia de x, assim como todas suas derivadas.

[4]Ver os parágrafos (C.3.1) e (C.3.2) do apêndice (C)

garantirá a preservação dos vínculos durante a evolução do sistema. Da seguinte computação dos colchetes de Poisson dos $\mathcal{G}_i(x)$ pode-se concluir que os $\mathcal{G}_i(x)$ são funções de primeira classe:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}(\epsilon), \mathcal{G}(\eta)\} &= \int\int dxdy \left(\left\{ -D_x \epsilon^k \phi_k, \eta^m f_{mn}{}^p A^n \phi_p \right\} + \right. \\
&\quad \left. \left\{ \epsilon^i f_{ij}{}^k A^j \phi_k, -D_y \eta^p \phi_p \right\} \right) \\
&= -\int dx f_{ij}{}^k \left(\eta^j D_x \epsilon^i + \epsilon^i D_x \eta^j \right) \phi_k \\
&= -\int dx D_x \left(f_{ij}{}^k \epsilon^i \eta^j \right) \phi_k \\
&= -\int dx D_x \left[(\epsilon \times \eta)^k \right] \phi_k \\
&= \int dx \, (\epsilon \times \eta)^k \, D_x \phi_k \\
&= \mathcal{G}(\epsilon \times \eta)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$(\epsilon \times \eta)^k = f_{ij}{}^k \epsilon^i \eta^j,$$

para os vínculos avaliados localmente:

$$\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} = \frac{\delta^2}{\delta \epsilon^i(x) \delta \eta^j(y)} \{\mathcal{G}(\epsilon), \mathcal{G}(\eta)\}$$

então

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} &= \frac{\delta^2}{\delta \epsilon^i(x) \delta \eta^j(y)} \left(\int dz f_{kl}{}^n \epsilon^k \eta^l \mathcal{G}_n(z) \right) \\
&= f_{ij}{}^k \delta(x - y) \mathcal{G}_k(x) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Vemos que os vínculos $\mathcal{G}_i(x)$ formam uma álgebra de Lie, fechada, com o produto de Lie sendo o colchete de Poisson. Como a Hamiltoniana é uma combinação linear de vínculos, deduzimos que os colchetes destes últimos com a Hamiltoniana são fracamente nulos. Os vínculos são portanto de primeira classe de acordo com a terminologia de Dirac. Os vínculos secundários $\mathcal{G}_i(\epsilon)$ são os geradores das transformações de calibre da teoria. Com efeito

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}(\epsilon), A_x^p(x)\} &= \left\{ \int dy(-\phi_i(y)\partial_y \epsilon^i(y) + \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k A_x^j(y) \phi_k(y)), A_x^p(x) \right\} \\
&= \int dy(-\partial_y \epsilon^i \{\phi_i(y), A_x^p(x)\} + \\
&\quad \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k A_x^j(y) \{\phi_k(y), A_x^p(x)\}) \\
&= \partial_x \epsilon^p + f_{ji}{}^p A_x^j \epsilon^i = D_x \epsilon^p \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}(\epsilon), \phi_p(x)\} &= \left\{ \int dy(-\phi_i(y)\partial_y \epsilon^i(y) + \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k A_x^j(y)\phi_k(y)), \phi_p(x) \right\} \\
&= \int dy \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k \phi_k(y) \left\{ A_x^j(y), \phi_p(x) \right\} \\
&= -f_{pi}{}^k \epsilon^i \phi_k = -[\epsilon, \phi]_p = [\phi, \epsilon]_p
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Localmente

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_i(x), A_x^p(y)\} &= \{D_x \phi_i(x), A_x^p(y)\} \\
&= \left\{ \partial_x \phi_i(x) + f_{ij}{}^k A_x^j(x)\phi_k(x), A_x^p(y) \right\} \\
&= -\partial_x \delta(x-y)\delta_i^p - f_{ij}{}^p A_x^j(x)\delta(x-y)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_i(x), \phi_m(y)\} &= \{D_x \phi_i(x), \phi_m(y)\} \\
&= f_{im}{}^k \phi_k(x)\delta(x-y)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

O fato dos vínculos formarem uma álgebra de Lie, ver (3.15), corresponde ao fato das transformações de calibre formarem um grupo.

Capítulo 4

Resultados em Componentes

4.1 Equações de Movimento

Conhecendo a ação, expressão (2.14), podemos determinar as equações de movimento que descrevem nossa teoria; um método para determinar estas equações é o princípio de ação estacionária. Aplicando este princípio a ação (2.14), a qual é uma funcional depende dos campos ϕ_i e A^i_μ, obtivemos a expressão (2.16) que pode ser escrita como,

$$\delta S_{BF}[A^i_\mu, \phi] = \int (\delta\phi_i F^i + \delta A^i D\phi_j) = \int (\frac{1}{2}\delta\phi_i F^i{}_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} + D_\mu\phi_j \delta A^i_\nu \epsilon^{\mu\nu}) d^2x \, . \tag{4.1}$$

As equações de movimento são:

$$\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta\phi_i} = \frac{1}{2}F^i{}_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} = \partial_t A^i_x - \partial_x A^i_t + f_{jk}{}^i A^j_t A^k_x = 0 \, , \tag{4.2}$$

$$\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta A^i_\nu} = D_\mu \phi_i \epsilon^{\mu\nu} = 0 \, . \tag{4.3}$$

Introduzindo as notações, para o zweibein e o campo escalar:

$$\begin{pmatrix} N & \chi \\ N^1 & e^1_x \end{pmatrix} \equiv (e^I_\mu) = \begin{pmatrix} e^0_t & e^0_x \\ e^1_t & e^1_x \end{pmatrix} , \tag{4.4}$$

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi) \equiv (\phi_i) = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \, , \tag{4.5}$$

respectivamente, podemos escrever as componentes da conexão como

$$
\begin{aligned}
A_x^i &= (e_x^I, w_x) = (e_x^0, e_x^1, w_x) = (A_x^0, A_x^1, A_x^2) = (\chi, e_x^1, w_x)\,, \\
A_t^i &= (e_t^I, w_t) = (e_t^0, e_t^1, w_t) = (A_t^0, A_t^1, A_t^2) = (N, N^1, w_t)\,.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Em função da notação para nossos campos introduzida em (4.5) e (4.6) e dos valores das constantes de estrutura da álgebra de Lie dados por (2.13), as equações de movimento para os campos escalares (4.2) serão:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta \varphi_0} &= \partial_t \chi - \partial_x N - \sigma(e_x^1 w_t - w_x N^1)\,, \\
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta \varphi_1} &= \partial_t e_x^1 - \partial_x N^1 - w_x N + \chi N^1\,, \\
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta \psi} &= \partial_t w_x - \partial_x w_t - k(\chi N^1 - e_x^1 N)\,.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

De (4.3), as equações para $A_t^i(x)$:

$$
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta A_t^i} = D_x \phi_i = \partial_x \phi_i + f_{ij}{}^k A_x^j \phi_k\,,
\tag{4.8}
$$

serão:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta N} &= D_x \varphi_0 = \partial_x \varphi_0 + k e_x^1 \psi - w_x \varphi_1\,, \\
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta N^1} &= D_x \varphi_1 = \partial_x \varphi_1 + \sigma w_x \varphi_0 - k\chi\psi\,, \\
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta w_t} &= D_x \psi = \partial_x \psi + \chi \varphi_1 - \sigma w_x \varphi_0\,.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Reconhecemos aqui os vínculos secundários (3.10).

Finalmente, para $A_x^i(x)$:

$$
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta A_x^i} = -D_t \phi_i = -(\partial_t \phi_i + f_{ij}{}^k A_t^j \phi_k)\,,
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta \chi} &= -D_t \varphi_0 = -(\partial_t \varphi_0 + k N^1 \psi - w_t \varphi_1)\,, \\
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta e_x^1} &= -D_t \varphi_1 = -(\partial_t \varphi_1 + \sigma w_t \varphi_0 - k N \psi)\,, \\
\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta w_x} &= -D_t \psi = -(\partial_t \psi + N \varphi_1 - \sigma N^1 \varphi_0)\,.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Temos assim um total de 9 equações de movimento, trêz das quais, (4.9), são os vínculos secundários da teoria.

4.2 Hamiltoniana e Álgebra dos Vínculos

Como já sabemos, a característica de uma teoria com covariância geral é que a Hamiltoniana é de puro vínculos, como pode ser visto na eq. (3.14). Escrevendo (3.14) em componentes teremos:

$$H = -\int dx(A_t^0 D_x\phi_0 + A_t^1 D_x\phi_1 + A_t^2 D_x\phi_2)\,. \tag{4.11}$$

Substituindo (4.5) e (4.6) na Hamiltoniana, obtemos:

$$H =- \int dx(N D_x\varphi_0 + N^1 D_x\varphi_1 + w_t D_x\psi)\,, \tag{4.12}$$

onde $D_x\varphi_0(x)\,,\ D_x\varphi_1(x)$ e $D_x\psi(x)$ estão dadas por (4.9), a forma geral dado por (4.8). Os momentos conjugados ficam como:

$$\pi_i^{A_x}(x) = \phi_i(x)\,; \quad \text{em componentes :} \begin{cases} \pi_0^{\chi}(x) = \varphi_0(x)\,, \\ \pi_1^{e_x^1}(x) = \varphi_1(x)\,, \\ \pi_2^{w_x}(x) = \psi(x)\,, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\pi_i^{A_t}(x) = 0\,; \quad \text{em componentes :} \begin{cases} \pi_0^{N}(x) \approx 0\,, \\ \pi^{N^1}(x)_1 \approx 0\,, \\ \pi^{w_t}(x)_2 \approx 0\,. \end{cases} \tag{4.14}$$

Da eq. (3.15) para os vínculos secundários, vemos que estes formam uma álgebra de Lie fechada sob os colchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(y)\} &= f_{12}{}^0\delta(x-y)\mathcal{G}_0(x) = \sigma\,\delta(x-y)\mathcal{G}_0(x)\,, \\ \{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_0(y)\} &= f_{20}{}^1\delta(x-y)\mathcal{G}_1(x) = \delta(x-y)\mathcal{G}_1(x)\,, \\ \{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_1(y)\} &= f_{01}{}^2\delta(x-y)\mathcal{G}_2(x) = k\,\delta(x-y)\mathcal{G}_2(x)\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

E finalmente escrevemos os colchetes de Poisson dos vínculos secundários com cada um dos campos, representando assim as transformações de calibre infinitesimais dos mesmos. Utilizando os colchetes de (3.18) para as componentes da conexão, temos:

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_0(x), e_x^0(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_0(x), e_x^1(y)\} &= w(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_0(x), w(y)\} &= -k e_x^1(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_1(x), e_x^0(y)\} &= -\sigma w(x)\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_1(x), e_x^1(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_1(x), w(y)\} &= k\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_2(x), e_x^0(y)\} &= \sigma e_x^1(x)\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_2(x), e_x^1(y)\} &= -e_x^0(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_2(x), w(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y)\,,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

De (3.19), deduzimos os colchetes de Poisson dos vínculos com campos escalares:

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_0(x), \varphi_0(y)\} &= 0\,, \\
\{\mathcal{G}_0(x), \varphi_1(y)\} &= k\,\psi(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_0(x), \psi(y)\} &= -\varphi_1(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_1(x), \varphi_0(y)\} &= -k\,\psi(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_1(x), \varphi_1(y)\} &= 0\,, \\
\{\mathcal{G}_1(x), \psi(y)\} &= \sigma\,\varphi_0(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_2(x), \varphi_0(y)\} &= \varphi_1\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_2(x), \varphi_1(y)\} &= -\sigma\,\varphi_0(x)\,\delta(x-y)\,, \\
\{\mathcal{G}_2(x), \psi(y)\} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

4.3 Transformações Gerais de Coordenadas – Difeomorfismos

Como vimos no Cap.3, as transformações de calibre contêm as transformações gerais de coordenadas, isto é, as transformações de difeomorfismos. Estes atuam sobre nossos campos, infinitesimalmente, através da derivada de Lie $\mathcal{L}$. A derivada de Lie de numa direção de um campo vetorial ξ, é definida como:

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi d + d i_\xi ,$$

onde i_ξ é a derivada interior ou contração, e d a derivada exterior. Então o difeomorfismo para um campo escalar φ é dado por,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \varphi &= (i_\xi d + d i_\xi)\varphi = (i_\xi d)\varphi \\ &= \xi^\mu \partial_\mu \varphi \,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

E para a conexão A que é uma 1-forma temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A &= (\xi^\mu \partial_\mu A_\nu + (\partial_\nu \xi^\mu) A_\mu) dx^\nu \\ &= (\mathcal{L}_\xi A_\nu) dx^\nu \,, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_\xi A_\nu = \xi^\mu \partial_\mu A_\nu + (\partial_\nu \xi^\mu) A_\mu \,. \tag{4.19}$$

No caso 2-dimensional a derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi$, que gera um difeomorfismo na direção do vetor $\xi = (\xi^t \,, \xi^x)$ pode ser decomposta numa derivada de Lie temporal (que gera um difeomorfismo temporal) e numa derivada de Lie espacial (que gera um difeomorfismo espacial):

$$\mathcal{L}_{(\xi^t \,, \xi^x)} = \mathcal{L}_{(\xi^t \,, 0)} + \mathcal{L}_{(0 \,, \xi^x)}; \tag{4.20}$$

nesta última equação, $\mathcal{L}_{(\xi^t \,, 0)}$ representa o difeomorfismo temporal, e $\mathcal{L}_{(0 \,, \xi^x)}$ o difeomorfismo espacial.

Então em termos de componentes, utilizando a eq. (4.18), escrevemos os difeomorfismos para os campos escalares (4.5) como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}\varphi_0 &= \xi^t\partial_t\varphi_0 \quad , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}\varphi_0 = \xi^x\partial_x\varphi_0\,, \\
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}\varphi_1 &= \xi^t\partial_t\varphi_1 \quad , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}\varphi_1 = \xi^x\partial_x\varphi_1\,, \\
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}\psi &= \xi^t\partial_t\psi \quad , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}\psi = \xi^x\partial_x\psi\,.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Para a conexão A_t^i temos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}A_t^i = \partial_t(\xi^t A_t^i) \\
&\mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}A_t^i = \xi^x\partial_x A_t^i + \partial_t\xi^x A_x^i
\end{aligned} \tag{4.22}$$

então, usando (4.22) e (4.6), os difeomorfismos para os A_t^i:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}N &= \partial_t(\xi^t N) \quad , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}N = \xi^x\partial_x N + \partial_t\xi^x\chi\,, \\
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}N^1 &= \partial_t(\xi^t N^1) \ , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}N = \xi^x\partial_x N^1 + \partial_t\xi^x e_x^1\,, \\
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}w_t &= \partial_t(\xi^t w_t) \quad , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}w_t = \xi^x\partial_x w_t + \partial_t\xi^x w_x\,.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Analogamente A_x^i tranforma-se como,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}A_x^i = \xi^t\partial_t A_x^i + (\partial_x\xi^t)A_t^i\,, \\
&\mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}A_x^i = \partial_x(\xi^x A_x^i)\,.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Com a Equação (4.24) e a notação (4.6) as transformações de difeomorfismo para as componentes de A_x^i serão:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}\chi &= \xi^t\partial_t\chi + (\partial_x\xi^t)N \quad , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}\chi = \partial_x(\xi^x\chi)\,, \\
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}e_x^1 &= \xi^t\partial_t e_x^1 + (\partial_x\xi^t)N^1 \ , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}e_x^1 = \partial_x(\xi^x e_x^1)\,, \\
\mathcal{L}_{(\xi^t\,,0)}w_t &= \xi^t\partial_t w_x + (\partial_x\xi^t)w_t \ , \quad \mathcal{L}_{(0\,,\xi^x)}w_x = \partial_x(\xi^x w_x)\,.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Capítulo 5

Fixação Parcial do Calibre: Calibre Temporal

5.1 Calibre Canônico

A presença dos vínculos de primeira classe e das simetrias de calibre associadas, indicam a existência de mais de um conjunto de variáveis canônicas que correspondem a um estado físico dado.

Com a fixação de calibre (fixação parcial em nosso caso) que vamos implementar, estaremos trazendo vínculos de segunda classe (ficando alguns de primeira classe, já que a fixação será só parcial). Depois dessa fixação de calibre e da aparição dos vínculos de segunda classe passaremos a trabalhar com os colchetes de Dirac para assim ter uma teoria livre de vínculos de segunda classe, no sentido que estes, serão considerados como identidades expressando algumas variáveis dinâmicas em termos de outras, e poderão ser resolvidos de maneira consistente.

5.2 Calibre Temporal

Comecemos apresentando a fixação de calibre temporal no caso do espaço-tempo de dimensão 4. Seja A a conexão do grupo de calibre, se transformando como:

$$A^{'} = g^{-1}dg + g^{-1}Ag\,.$$

Restringindo-nos a sistemas de coordenadas onde os vetores ∂_a $(a = 1, 2, 3)$ são tangentes à variedade espaço $\mathcal{M}_3$ (então, as coordenadas x^a são também coordenadas de $\mathcal{M}_3$). Impomos a condição de calibre

$$e_a^0(x) = 0\,, \tag{5.1}$$

em qualquer ponto p da variedade, o que fixa parcialmente a invariância de Lorentz local. Com a restrição acima sobre a escolha do sistema de coordenadas, essa condição é equivalente a $e_i^t = 0$, ou seja, com $e_i = e_i^\mu \partial_\mu = e_i^a \partial_a$, os três vetores de base de tipo espaço do espaço-tempo tangente, e^i, são tangentes a $\mathcal{M}_3$.

A condição (5.1) deixa a invariância de calibre residual SO(3), que diz respeito às rotações do 3-espaço tangente a $\mathcal{M}_3$.

Para nosso caso de duas dimensões, $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{R}$, a condição de calibre escreve-se

$$e_x^0 \equiv \chi \approx 0\,, \tag{5.2}$$

onde usamos a notação de igualdade fraca, visto que a condição será implementada através de um vínculo: introduzindo portanto um campo multiplicador de Lagrange $B(x, t)$, completamos a ação (2.14)-(2.15) para

$$S = \int d^2x(\phi_i F^i + B\,\chi) = \int dt\, L\,, \tag{5.3}$$

$$L = \int dx((\partial_t A_x^i)\phi_i + A_t^i\, D_x \phi_i + B\,\chi)\,. \tag{5.4}$$

Fizemos isto com o intuito de implementar em seguida um análogo à formulação ADM da gravitação.

Os momentos conjugados de A_x^i sendo dados por

$$\pi_i^{A_x}(x) = \phi_i(x)\,; \quad \text{em componentes}: \begin{cases} \pi_0^{\chi}(x) = \varphi_0(x)\,, \\ \pi_1^{e_x^1}(x) = \varphi_1(x)\,, \\ \pi_2^{w_x}(x) = \psi(x)\,, \end{cases}$$

os correspondentes colchetes de Poisson escrevem-se

$$\left\{A_x^i(x), \phi_j(y)\right\} = \delta_j^i \delta(x-y)\,; \quad \text{em componentes}: \begin{cases} \{\chi(x), \varphi_0(y)\} = \delta(x-y)\,, \\ \{e_x^1(x), \varphi_1(y)\} = \delta(x-y)\,, \\ \{w(x), \psi(y)\} = \delta(x-y)\,. \end{cases}$$

Além disso temos

$$\left\{B(x), \pi^B(y)\right\} = \delta(x-y)\,, \quad \left\{\pi_j^{A_t}(x), A_t^i(y), \right\} = \delta_j^i\, \delta(x-y)\,. \tag{5.5}$$

Observamos que temos quatro vínculos primários, que são

$$\pi_i^{A_t} \approx 0, \quad \pi^B \approx 0\,.$$

Fazendo a transformação de Legendre do Lagrangiano, a Hamiltoniana fica como

$$H = -\int dx(A_t^i\, D_x \phi_i + B\, \chi)\,. \tag{5.6}$$

O requerimento da estabilidade dos vínculos primários durante a evolução no tempo significa que a derivada temporal dos momentos conjugados das variáveis A_t^i e B deve ser fracamente igual a zero; obtemos assim

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i^{A_t} &= \left\{\pi_i^{A_t}, H\right\} = D_x \phi_i \equiv \mathcal{G}_i \approx 0\,, \quad (i = 0, 1, 2) && (5.7) \\ \dot{\pi}^B &= \left\{\pi^B, H\right\} = \chi \equiv \mathcal{G}_3 \approx 0\,. && (5.8) \end{aligned}$$

Estas expressões $\mathcal{G}_i$, $\mathcal{G}_3$ são os chamados vínculos secundários. Os vínculos $\mathcal{G}_i$ são os mesmos do Cap. 3. O novo vínculo, $\mathcal{G}_3$, representa a fixação de calibre temporal.

5.3 Álgebra de Vínculos

Usando os colchetes de Poisson canônicos (5.2) e (5.5), calculamos os colchetes dos vínculos, obtendo

$$\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} = f_{ij}{}^n \delta(x-y)\mathcal{G}_n(x) \approx 0\,, \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= \{D_x\phi_i(x), \chi(y)\}\ , \\
&= \left\{\partial_x\phi_i(x) + f_{ij}{}^k\, A_x^j(x)\,\phi_k(x), \chi(y)\right\}\ , \\
&= -\delta_{i0}\,\partial_x\delta(x-y) - f_{ij}{}^0\, A_x^j(x)\delta(x-y)\,.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_i(y)\} &= \left\{\chi(x), \partial_y\phi_i(y) + f_{ij}{}^k\, A_x^j(y)\,\phi_k(y)\right\}\ , \\
&= -\delta_{i0}\,\partial_x\delta(x-y) + f_{ij}{}^0\, A_x^j(x)\delta(x-y)\,.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} = -\partial_x\delta(x-y) \quad , \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_0(y)\} = -\partial_x\delta(x-y)\,, \\
&\{\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_3(y)\} = -\sigma\, w\,\delta(x-y)\,, \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_1(y)\} = \sigma\, w\,\delta(x-y)\,, \\
&\{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\} = \sigma\, e_x^1\delta(x-y) \quad , \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_2(y)\} = -\sigma\, e_x^1\delta(x-y)\,,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

e os outros colchetes são nulos. Então os colchetes de Poisson, para estes vínculos integrados com parametros locais $\epsilon(x)$ e $\eta(x)$– têm a forma:

$$\{\mathcal{G}_\alpha(\epsilon), \mathcal{G}_\beta(\eta)\} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}(\epsilon,\eta) \approx \int dx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \eta\partial_x\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma\,\epsilon\eta\, w \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\,\epsilon\eta\, e_x^1 \\ \eta\partial_x\epsilon & \sigma\,\epsilon\eta\, w & -\epsilon\eta\, e_x^1 & 0 \end{pmatrix},$$

com $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$; e avaliados localmente:

$$\{\mathcal{G}_\alpha(x), \mathcal{G}_\beta(y)\} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}(x,y) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma\, w \\ 0 & 0 & 0 & \sigma e^1_x \\ -\partial_x & \sigma w & -\sigma e^1_x & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{5.13}$$

Calculando o determinante da matriz $\mathcal{C}_{\alpha\beta}(x,y)$ eq. (5.13), obtemos que $\det(\mathcal{C}_{\alpha\beta}) = 0$, isto significa que existe ao menos um vínculo de segunda classe entre os $\mathcal{G}_\alpha(x)$. Não se pode distinguir claramente os vínculos de primeira classe dos de segunda classe. Para fazer a distinção entre estes dois tipos de vínculos teremos que fazer uma redefinição.

5.4 Redefinição dos Vínculos

Redefinimos nossos vínculos com $\mathcal{G}_\alpha \rightarrow \mathcal{G}'_\alpha$, começando com

$$\mathcal{G}'_0 = a\mathcal{G}_0 + b\mathcal{G}_2 + c\partial_x\mathcal{G}_2\,,$$

para o qual vamos pedir que cumpra-se a condição $\{\mathcal{G}'_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} \approx 0$:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}'_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= \{a\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} + \{b\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\} + \{c\partial_x\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\}\ , \\ &\approx a\,\{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} + b\,\{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\} + c\,\{\partial_x\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\}\ , \\ &\approx -a\partial_x\delta(x-y) + b\sigma\, e^1_x\delta(x-y) + c\partial_x(\sigma\, e^1_x\delta(x-y)) \approx 0\,, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$b = -a\sigma\frac{\partial_x e^1_x}{(e^1_x)^2} \quad ; \quad c = a\frac{\sigma}{e^1_x}\,.$$

Com $a = (e^1_x)^2$, obtemos,

$$\mathcal{G}'_0(x) = (e^1_x)^2\mathcal{G}_0(x) - \sigma(\partial_x e^1_x)\mathcal{G}_2(x) + \sigma e^1_x\partial_x\mathcal{G}_2(x)\,. \tag{5.14}$$

Analogamente

$$\mathcal{G}'_1(x) = d_1\mathcal{G}_1(x) + d_2\mathcal{G}_2(x)\,,$$

para o qual imporemos que $\{\mathcal{G}'_1(x), \mathcal{G}_3(y)\} \approx 0$, o que implica em

$$c = d_1 w(x)/e^1_x(x)\,.$$

Colocando $d_1 = e^1_x(x)$, obtemos

$$\mathcal{G}'_1(x) = e^1_x(x)\mathcal{G}_1(x) + w(x)\,\mathcal{G}_2(x)\,. \tag{5.15}$$

Finalmente, tomamos

$$\mathcal{G}'_2(x) = \mathcal{G}_2(x) \quad ; \quad \mathcal{G}'_3(x) = \mathcal{G}_3(x)\,. \tag{5.16}$$

Uma vez redefinidos os vínculos, determinamos sua álgebra

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_0(\eta)\} &= \int dx(\epsilon\partial_x\eta - \eta\partial_x\epsilon)\sigma((e^1_x(x))^2\mathcal{G}'_1(x) - 2e^0_x(x)\mathcal{G}'_0(x)) \approx 0\,,\\
\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\} &= \int dx\Big[-(\epsilon\partial_x\eta - \eta\partial_x\epsilon)(\frac{3}{2}\mathcal{G}'_0(x) + \sigma\partial_x\epsilon\partial_x\mathcal{G}'_2(x) + \frac{1}{2}\sigma e^0_x\mathcal{G}'_1(x))\\
&\quad +\epsilon\eta(2\frac{e^0_x}{e^1_x}(w\mathcal{G}'_0(x) + \sigma\partial_x e^1_x\mathcal{G}'_1(x)) - \frac{1}{2}\sigma\partial_x(e^0_x\mathcal{G}'_1(x))\\
&\quad -\sigma\partial_x(e^0_x\partial_x\mathcal{G}'_2(x)))\Big] \approx 0\,,\\
\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_2(\eta)\} &= \int dx\Big[\epsilon\eta(2\frac{e^0_x}{e^1_x}\mathcal{G}'_0(x) - e^1_x\mathcal{G}'_1(x) + (e^1_x w + \sigma\partial_x e^1_x)\mathcal{G}'_2(x)\\
&\quad -\frac{1}{2}\partial_x(e^0 x\mathcal{G}'_2)) - (\epsilon\partial_x\eta - \eta\partial_x\epsilon)e^0_x\mathcal{G}'_2(x)\Big] \approx 0\,,\\
\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &\approx 0\\
\{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\} &= -\int dx\,(\epsilon\partial_x\eta - \eta\partial_x\epsilon)\,\mathcal{G}'_1(x) \approx 0\,,\\
\{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_2(\eta)\} &= \int dx\Big[\epsilon\eta(\frac{1}{e^1_x}(\sigma\mathcal{G}'_0(x) + e^0_x\mathcal{G}'_1(x) + (\partial_x e^1_x - e^0_x w)\mathcal{G}'_2(x))\\
&\quad -\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{G}'_2) - (\epsilon\partial_x\eta - \eta\partial_x\epsilon)\mathcal{G}'_2(x)\Big] \approx 0\,,\\
\{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &\approx 0\,,\\
\{\mathcal{G}'_2(\epsilon), \mathcal{G}'_2(\eta)\} &= 0\,,\\
\{\mathcal{G}'_2(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &= \int dx\epsilon\eta\sigma e^1_x(x)\,,\\
\{\mathcal{G}'_3(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Escrevemos a matriz destes vínculos

$$\mathcal{C}'_{\alpha\beta}(x,y) = \left\{\mathcal{G}'_\alpha(x), \mathcal{G}'_\beta(y)\right\} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma e^1_x \\ 0 & 0 & -\sigma e^1_x & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y)\,, \tag{5.17}$$

ou,

$$\mathcal{C}'_{\alpha\beta}(x,y) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'_{ab}(x,y) \end{pmatrix} \delta(x-y)\,,$$

com a submatriz $(a,b=2,3)$:

$$\mathcal{C}'_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma e^1_x \\ -\sigma e^1_x & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y)\,,$$

cujo inverso, no sentido da convolução, é

$$(\mathcal{C}'_{ab}(x,y))^{-1} = \mathcal{C}'^{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma/e^1_x \\ \sigma/e^1_x & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y)\,.$$

Inverso no sentido da convolução significa, explicitamente que:

$$\int dz \mathcal{C}'^{ab}(x,z)\, \mathcal{C}'_{bc}(z,y) = \delta^a_c \delta(x,y)\,.$$

Notemos que $\mathcal{C}^{'}_{\alpha\beta}$ é uma matriz antisimétrica inversível sobre a superfície de vínculos.

A redefinição dos vínculos permite que a matriz (5.13) seja diagonalizada em blocos, o que torna possível distinguir os vínculos de primeira classe dos de segunda classe na eq. (5.17). Conclui-se que $\mathcal{G}'_0$ e $\mathcal{G}'_1$ são os vínculos de primeira classe enquanto $\mathcal{G}'_2$ e $\mathcal{G}'_3$ são os de segunda classe. Chega-se a esta conclusão por inspecção da matriz (5.17), observando que ela é de rank 2 (fracamente), e que a submatriz 2×2 inversível $\mathcal{C}'_{ab}$ é aquela dos colchetes de $\mathcal{G}'_2(x)$ e $\mathcal{G}'_3(x)$.

5.5 Tratamento dos Vínculos de Segunda Classe

Ao contrário dos vínculos de primeira classe, que geram invariâncias de calibre, definindo portanto o setor físico da teoria, os de segunda classe geram transformações de contato que não podem ser simetrias, pelo fato de existiram colchetes de Poisson não fracamente nulos com os demais vínculos. Deste modo eles mapeiam um estado permitido sobre um estado não permitido, gerando inconsistências na teoria.

5.5.1 Colchetes de Dirac

Dada a existência de vínculos de segunda classe na teoria é preciso trabalhar com os colchetes de Dirac para fazermos a quantização canônica. Os colchetes de Dirac estão definidos como,

$$\begin{aligned} &\{A(t,x), B(t,y)\}_D = \{A(t,x), B(t,y)\} - \\ &\int d^3z_1 d^3z_2 \left\{A(t,x), \mathcal{G}'_a(t,z^1)\right\} \mathcal{C}'^{ab}(z_1,z_2) \left\{\mathcal{G}'_b(t,z_2), B(t,y)\right\}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Aqui $A, B =$ são funcionais dos campos, e^1_x, w, φ_0, φ_1, ψ. Calculando os colchetes de Dirac, obtemos, para A e $B = e^1_x$, w, φ_1, ψ (mas não φ_0):

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} \ . \tag{5.19}$$

explicitamente:

$$\begin{aligned} \{e^1_x(x), \varphi_1(y)\}_D &= \{e^1_x(x), \varphi_1(y)\} = \delta(x-y)\,, \\ \{w(x), \psi(y)\}_D &= \{w(x), \psi(y)\} = \delta(x-y)\,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Para $B = \varphi_0$

$$\begin{aligned} \{A(x), \varphi_0(y)\}_D &= \{A(x), \varphi_0(y)\} - \left\{A(x), \mathcal{G}'_a(z^1)\right\} \mathcal{C}'^{ab}(z_1,z_2) \left\{\mathcal{G}'_b(z_2), \varphi_0(y)\right\}\,, \\ &= \{A(x), \varphi_0(y)\} - \{A(x), \mathcal{G}'_2(y)\} \frac{\sigma}{e^1_x(y)} - \{A(x), \mathcal{G}'_3(y)\} \frac{\sigma\varphi_1(y)}{e^1_x(y)}\,. \end{aligned}$$

Os colchetes de Dirac dos vínculos de segunda classe com uma função A qualquer do espaço de fase se anulam:

$$\{A(x), \mathcal{G}'_b(y)\}_D = 0; \quad (\forall\ A(x)\ , b = 2,3). \tag{5.21}$$

Esta propriedade permite impor, de maneira consistente, as igualdades fortes

$$\mathcal{G}'_2 = 0 \quad ; \quad \mathcal{G}'_3 = \chi = 0\,. \tag{5.22}$$

De (5.22), a segunda equação é a condição de calibre, e a primeira permite eliminar o campo φ_0:

$$\varphi_0 = \sigma \frac{\partial_x \psi}{e^1_x}\,, \tag{5.23}$$

e $\mathcal{G}'_0$ e $\mathcal{G}'_1$, definidos por (5.14) e (5.15) ficam como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}'_0(x) &= (e^1_x)^2 \mathcal{G}_0(x) = (e^1_x)^2 (\partial_x \varphi_0 + k e^1_x \psi - w \varphi_1) \\
&= \sigma e^1_x \partial^2_x \psi - \sigma \partial_x e^1_x \partial_x \psi + k (e^1_x)^3 \psi - (e^1_x)^2 w \varphi_1\,, \qquad (5.24)\\
\mathcal{G}'_1(x) &= e^1_x \mathcal{G}_1(x) = e^1_x (\partial_x \varphi_1 + \sigma w \varphi_0) \\
&= e^1_x \partial_x \varphi_1 + w \partial_x \psi\,, \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

com φ_0 dado por (5.23).

Depois de usarmos os colchetes de Poisson para disguirmos vínculos de primeira classe dos de segunda, todas as equações da teoria devem ser formuladas em termos dos colchetes de Dirac, com os vínculos de segunda classe convertendo-se em identidades fortes (5.22), o que permite substituir χ por 0, e a variável φ_0 pela expressão (5.23) em termos das outras variáveis canônicas.

5.5.2 Simetria de Calibre e Difeomorfismos

Tomando em conta as igualdades fortes (5.22) podemos calcular a álgebra de Dirac para os vínculos $\mathcal{G}'_0$ e $\mathcal{G}'_1$, obtendo:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_0(\eta)\}_D &= \int dx (\epsilon\, \partial_x \eta - \eta\, \partial_x \epsilon) \sigma (e^1_x)^2 \mathcal{G}'_1(x)\,, \\
\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\}_D &= \int dx (-2\epsilon \partial_x \eta + \eta \partial_x \epsilon) \mathcal{G}'_0(x)\,, \qquad (5.26)\\
\{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\}_D &= \int dx (\epsilon\, \partial_x \eta - \eta\, \partial_x \epsilon) \mathcal{G}'_1(x)\,,
\end{aligned}$$

o que confirma $\mathcal{G}'_0(x)$ e $\mathcal{G}'_1(x)$ como vínculos de primeira classe. As transformações de calibre infinitesimais geradas por eles são dadas por:

$$\begin{aligned}
\Big\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \varphi_1(y)\Big\}_D &= \sigma\epsilon(y)\partial_y^2\psi(y) + \sigma\partial_y(\epsilon(y)\partial_y\psi(y)) + 3k\epsilon(y)(e^1_x(y))^2\psi(y) \\
&\quad - 2\epsilon(y)\, e^1_x(y)w(y)\varphi_1(y) \\
&= 2\frac{\epsilon}{e^1_x}\mathcal{G}'_0(y) + \frac{\xi^x}{e^1_x}\mathcal{G}'_1(y) - \xi^t\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta e^1_x} - \frac{\sigma}{e^1_x}\lambda\partial_y\psi \\
&\quad + \mathcal{L}_{(\xi^t,-\xi^x)}(\varphi_1(y))\,, \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \psi(y)\Big\}_D &= -\epsilon(y)(e^1_x(y))^2\varphi_1(y) \\
&= -\xi^t\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta w} + \mathcal{L}_{(\xi^t,-\xi^x)}(\psi(y))\,, \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), e^1_x(y)\Big\}_D &= \epsilon(y)(e^1_x(y))^2 w(y) \\
&= -\sigma\xi^t\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta\varphi_1} + \sigma\mathcal{L}_{(\xi^t,-\xi^x)}(e^1_x(y))\,, \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big\{\mathcal{G}'_0(\epsilon), w(y)\Big\}_D &= -\sigma\partial_y^2(\epsilon\, e^1_x(y)) - \sigma\partial_y(\epsilon(y)\partial_y e^1_x(y)) - k\epsilon(y)(e^1_x(y))^3 \\
&= -\xi^t\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta\psi} + \sigma\partial_y\lambda + \mathcal{L}_{(\xi^t,-\xi^x)}(w(y))\,. \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

Aqui

$$\lambda = \epsilon e^1_x\partial_y N/N - \partial_y(\epsilon e^1_x) - \epsilon\partial_y e^1_x\,, \qquad (5.31)$$

$$\xi^t = \epsilon(e^1_x)^2/N\,, \qquad (5.32)$$

$$\xi^x = \epsilon e^1_x N^1/N\,, \qquad (5.33)$$

e, para $\mathcal{G}'_1$:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}'_1(\eta), \varphi_1(y)\}_D &= \eta(y)\partial_y\varphi_1(y) = \mathcal{L}_{(0\,,\,\eta)}(\varphi_1(y)) \\
\{\mathcal{G}'_1(\eta), \psi(y)\}_D &= \eta(y)\partial_y\psi(y) \;= \mathcal{L}_{(0\,,\,\eta)}(\psi_1(y)) \\
\{\mathcal{G}'_1(\eta), e^1_x(y)\}_D &= \partial_y(\eta(y)\, e^1_x(y)) = \mathcal{L}_{(0\,,\,\eta)}(e^1_x(y)) \\
\{\mathcal{G}'_1(\eta), w(y)\}_D &= \partial_y(\eta(y)\, w(y)) \;= \mathcal{L}_{(0\,,\,\eta)}(w(y))
\end{aligned} \qquad (5.34)$$

Nas expressões (5.27–5.30), o símbolo $\mathcal{L}_{(v^t,v^x)}$ representa a derivada de Lie na direção do vetor (v^t, v^x), gerando os difeomorfismos temporais e espaciais. Podemos interpretar esse resultado da maneira seguinte: a condição de calibre temporal (5.2), que quebra a invariância de calibre, deixa duas simetrias locais residuais. Sendo que a primeira consiste na invariância sob os difeormorfismos espaciais, parametrizados pela função η, gerados pelo vínculo $\mathcal{G}'_1(\eta)$ (ver (5.34)), enquanto a segunda simetria gerada por $\mathcal{G}_0'(\epsilon)$, a menos das equações de movimento[1] e dos vínculos, é a invariância sob uma certa combinação de difeormorfismos temporais e espaciais, de parametros ξ^t e ξ^x, com uma transformação de Lorentz local de parametro λ, (ver as eq. (5.27–5.30)). Esta última transformação de Lorentz é compensatória, isto é, reestabelece a condição de calibre temporal quebrada pelos difeomorfismos temporais.

5.6 Hamiltoniano Final

Aplicando a teoria de Dirac podemos analisar a teoria de maneira consistente. Essencialmente, a formulação de Dirac permitiu eliminar os vínculos de segunda classe, os quais geravam inconsistências na teoria. A Hamiltoniana final fica só como função dos vínculos de primeira classe, que são os geradores das transformações de calibre. Assim, nossa Hamiltoniana escreve-se como:

$$H_T = -\int dy \left(\zeta_0(y)\mathcal{G}_0'(y) + \zeta_1(y)\mathcal{G}_1'(y)\right) \,, \tag{5.35}$$

onde ζ_0 e ζ_1 são funções arbitrárias.

As equações de movimento para uma variável física $\mathcal{A}$ podem ser determinadas mediante a equação de Hamilton-Dirac,

$$\dot{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}, H_T\}_D \,. \tag{5.36}$$

Determinamos as equações de movimento para os campos independentes após a fixaçao, isto é, a dinâmina dos campos e_x^1 , w_x , φ_1 e ψ:

$$\begin{aligned}
\partial_t e_x^1(x) &= \left\{e_x^1(x), H\right\}_D = \int dy \left\{\zeta_0(y)\mathcal{G}_0'(y) + \zeta_1(y)\mathcal{G}_1'(y), e_x^1(x)\right\}_D \\
&= \int dy \left(\zeta_0(y)\left\{\mathcal{G}_0'(y), e_x^1(x)\right\}_D + \zeta_1(y)\left\{\mathcal{G}_1'(y)), e_x^1(x)\right\}_D\right) \\
&= \int dy \left(\zeta_0(y)(e_x^1(x))^2 w_x(x)\delta(x-y) + \zeta_1(y)\partial_x(e_x^1(x)\delta(x-y))\right) \\
&= \zeta_0(x)(e_x^1(x))^2 w_x(x) + \partial_x(\zeta_1(x)e_x^1(x)) \,,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

[1] As derivadas funcionais $\delta S_{BF}[A,\phi]/\delta\varphi$ e $\delta S_{BF}[A,\phi]/\delta A_x^i$ são da ação original (2.14), correspondendo às equações de movimento (4.7) ou (4.10).

$$\begin{aligned}\partial_t w_x(x) &= -\{H, w(x)\}_D \\ &= \partial_x(-\sigma\partial_x(\zeta_0 e_x^1) - \sigma\zeta_0\partial_x e_x^1 +) - k\zeta_0(e_x^1)^3 \,,\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\partial_t\varphi_1(x) = \sigma\zeta_0\partial_x^2\psi + \sigma\partial_x(\zeta_0\partial_x\psi) + 3k\zeta_0(e_x^1)^2\psi - 2\zeta_0 e_x^1 w_x\varphi_1 + \zeta_1\partial_x\varphi_1 \,, \tag{5.39}$$

$$\partial_t\psi(x) = -\zeta_0 e_x^1\varphi_1 + \zeta_1\partial_x\psi \,. \tag{5.40}$$

Estas quatro equações de movimento são equivalentes às equações de movimento originais (4.7), (4.9) e (4.10) quando $\chi = 0\,,\ \varphi_0 = \sigma\partial_x\psi/e_x^1$, substituindo w_t em função dos outros campos usando a primeira das equações (4.7):

$$w_t = -\sigma\frac{\partial_x N}{e_x^1} + \frac{N^1}{e_x^1}w_x \,, \tag{5.41}$$

e os multiplicadores de Lagrange, ζ_0 e ζ_1 sendo substituídos por $N/(e_x^1)^2$ e N^1/e_x^1 respectivamente. Fazendo isto nas equações (5.37 – 5.40) teremos:

$$\partial_t e_x^1(x) = w_x(x)N(x) + \partial_x N^1(x)$$

$$\partial_t w_x(x) = \partial_x w_t - kNe_x^1$$

$$\begin{aligned}\partial_t\varphi_1(x) &= 2\frac{N}{e_x^1}\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta N} + \frac{N^1}{e_x^1}\frac{\delta S_{BF}[A,\phi]}{\delta N^1} - \sigma w_t\varphi_0 + kN\psi \\ &= -\sigma w_t\varphi_0 + kN\psi\end{aligned}$$

$$\partial_t\psi(x) = -N\varphi_1(x) + \frac{N^1}{e_x^1}\partial_x\psi(x)$$

que são as equações originais como era de esperar.

Capítulo 6

Observáveis

Na relatividade Geral (RG), os observáveis "$\mathcal{O}$", isto é as quantidades físicas que podemos predizer e medir em experimentos reais, correspondem a quantidades da teoria que são invariantes sob transformações de coordenadas. Na abordagem onde a invariância sob os difeomorfismos é incluida numa invariância de calibre geral, as variáveis físicas – os observáveis – são aquelas que também são independentes da escolha do sistema de referência local, isto é, invariantes de calibre, como já mencionamos (Cap.2).

Assim, por definição, um observável (clássico) $\mathcal{O}$ é uma função sobre a superfície vinculada, a qual é invariante de calibre. Então o observável $\mathcal{O}$ pode ser descrito como uma função do espaço de fase que tem colchetes de Dirac[1] fracamente iguais a zero com os vínculos de primeira classe.

Numa teoria quântica da gravitação, uma questão importante para esta é a natureza de seus observáveis. Especificamente é de grande interesse como a observação local pode ser definida. Os efeitos quânticos chegam a ser muito importantes na descrição do cenário de evolução no universo primordial, nos buracos negros, e de forma geral nos cenários que apresentam singularidades.

Neste trabalho, vamos considerar somente exemplos de observáveis na teoria clássica.

[1]Os colchetes de Poisson foram substituidos por colchetes de Dirac, já que depois da fixação de calibre aparecem vínculos de segunda classe, os quais foram eliminados com ajuda dos colchetes de Dirac.

6.1 Observáveis de Dirac

Consideremos um sistema clássico que apresenta duas soluções, ambas evoluindo de um mesmo conjunto de dados iniciais, e separando-se num tempo posterior.

As duas soluções devem ser fisicamente indistinguíveis ou calibre relacionados. De outro modo o determinismo, o qual é o principio básico da física clássica, seria perdido. Com respeito ao determinismo, Dirac dá a definição de observável da seguinte maneira. Um observável de Dirac ou invariante de calibre é uma função $\mathcal{O}$ das variáveis dinâmicas que não distinguem as duas soluções do sistema, mencionadas acima. Em outras palavras, somente aquelas funções que tem o mesmo valor sobre as duas soluções podem ser observadas, isto é, consideradas como observáveis.

Existe uma relação importante entre o observável de Dirac e o formalismo Hamiltoniano. Os observáveis de Dirac são caracterizados por terem colchetes de Poisson com os vínculos que se anulam fracamente (para nosso caso, depois de ter levado em consideração a fixação parcial de calibre, os colchetes de Dirac). De fato, o formalismo para sistemas inteiramente vinculados foi construído por Dirac, com o propósito de caracterizar os observáveis como invariantes de calibre.

Como já sabemos, numa teoria com vínculos, a Hamiltoniana é escrita como uma Hamiltoniana não vinculada H_0 mais os vínculos $\mathcal{G}_m \approx 0$, isto é:

$$H_T = H_0 + \zeta_m(t)\mathcal{G}_m\,, \quad m = 1, \cdots, l,$$

com l funções arbitrárias $\zeta_m(t)$. A dinâmica de um observável $\mathcal{O}$ é dada pela equação de Hamilton, (Hamilton-Dirac para nosso caso):

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \{\mathcal{O}, H_T\} = \{\mathcal{O}, H_0\} + \zeta_m \{\mathcal{O}, \mathcal{G}_m\}\,. \tag{6.1}$$

Daqui podemos reconhecer que a evolução é determinística, e assim $\mathcal{O}$ é um observável de Dirac, unicamente se,

$$\{\mathcal{O}, \mathcal{G}_m\} \approx 0, \quad \forall\, m\,. \tag{6.2}$$

6.2 Observáveis em 2D

No nosso caso a fixação parcial de calibre introduz vínculos de segunda classe, e para sua análise tivemos que introduzir os colchetes de Dirac para eliminá-los, e assim eliminar as inconsistências da teoria. Então, em nosso caso, como em todas teorias que apresentam vínculos, para os observáveis físicos temos que substituir os colchetes de Poisson, eq. (6.2), por colchetes de Dirac. Assim os observáveis físicos correspondentes devem satisfazer:

$$\{\mathcal{O}, \mathcal{G}'_m\}_D \approx 0, \quad \forall\, m\,, \tag{6.3}$$

onde $\mathcal{G}'_m$, $m = 0, 1$ são os vínculos (5.24-5.25).

Suponhamos que nossa variedade $\mathcal{M}$ 2-dimensional tenha a topologia $\mathcal{S}_1 \times R$ e que $x^\mu = (t, \theta)$, onde t é uma coordenada não compacta ao longo de R e $\theta \in [0, 2\pi]$ é uma coordenada periódica sobre o círculo $\mathcal{S}_1$. Depois da fixação de calibre os campos e momentos canônicos são $e^1_x(\theta)$, $w_x(\theta)$ e $\varphi_1(\theta)$, $\psi(\theta)$ com colchetes de Dirac,

$$\begin{aligned} \left\{e^1_x(\theta), \varphi_1(\theta')\right\}_D &= \delta(\theta - \theta')\,, \\ \{w_x(\theta), \psi(\theta')\}_D &= \delta(\theta - \theta')\,. \end{aligned}$$

Os vínculos $\mathcal{G}'_i$ de primeira classe (dados nas eqs. (5.24) e (5.25)), são os geradores das transformações de calibre.

O espaço de fase sobre o qual os vínculos são definidos é um espaço de dimensão infinita. Está mostrado, na ref. [25] – que trata do mesmo problema, mas para um grupo $SU(2)$, compacto, em vez do grupo (A)dS não–compacto considerado aqui – que o espaço das órbitas de calibre é dois dimensional, podendo ser coordenatizado pelas duas quantidades invariantes de calibre:

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Tr}\, U[A] = \mathrm{Tr}\, P e^{\oint_s A} = \mathrm{Tr}\, P e^{\oint_s \tau_i A^i} \\ &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P \oint_{s_1} A \oint_{s_2} A \cdots \oint_{s_{n-1}} A\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \cdots \int_0^{\theta_{n-1}} d\theta_n A_x(\theta_n) A_x(\theta_{n-1}) \ldots A_x(\theta_1)\right)\,, && (6.4) \\ L &= \langle \phi(\theta), \phi(\theta) \rangle = k_{ij} \phi^i(\theta) \phi^j(\theta) = k^{ij} \phi_i(\theta) \phi_j(\theta)\,, && (6.5) \end{aligned}$$

onde A é a conexão de $SU(2)$ e ϕ um campo escalar na representação adjunta. A eq. (6.4) é conhecida como Laço de Wilson (*Loop* de Wilson). Aqui P denota o ordenamento de caminho no parâmetro θ, na ordem cresente, mais explicitamente, $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_n$, e τ_i são os geradores do grupo de calibre ($\tau_i = i\sigma_i/2$ no caso de $SU(2)$, σ_i sendo as matrizes de Pauli). O observável L, eq. (6.5), é um análogo da área em 3+1 dimensões. As quantidades L e T comutam com os vínculos de primeira classe, formando uma base dos observáveis invariantes de calibre, por conseqüência, os estados físicos da teoria são caraterizados exatamente por estas duas quantidades, expressões (6.4) e (6.5).

Nosso propósito é mostrar – para os primeiros termos não-triviais da expressão (6.4) e exatamente para (6.5) – que as quantidades T e L correspondendo ás quantidades (6.4-6.5) na nossa teoria, depois da fixação de calibre, satisfazem as condições de invariância (6.3).

Antes da fixação de calibre feita no Cap. 5, pode-se mostrar que as funções T e L satisfazem (6.2), o que significa que estas funções, são constantes de movimento, isto é, observáveis da teoria. Veremos se estas quantidades ainda podem ser interpretadas como observáveis, depois de ter levado a cabo a fixação parcial de calibre.

Na representação fundamental do grupo (A)dS os geradores J_i podem ser representados pelas matrizes:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \frac{i}{2}\sqrt{K}\sigma_3\,, \\
S_1 &= -\frac{i}{2}\sqrt{\sigma K}\sigma_1\,, \\
S_2 &= -\frac{i}{2}\sqrt{\sigma}\sigma_2\,,
\end{aligned}
$$

onde σ_1, σ_2 e σ_3 são as matrizes de Pauli. Eles estão relacionados à forma de Killing k_{ij} por:

$$
S_i S_j = \frac{1}{2} f_{ij}{}^k S_k - \frac{\sigma}{4} k_{ij}\,. \tag{6.6}
$$

Dessa equação obtemos facilmente que,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(S_i S_j) &= -\frac{\sigma}{2} k_{ij}\,, \\
\mathrm{Tr}(S_{j_1} S_{j_2} S_{j_3}) &= -\frac{\sigma}{4} f_{j_1 j_2}{}^k k_{k j_3}\,, \\
\mathrm{Tr}(S_{j_1} S_{j_2} S_{j_3} S_{j_4}) &= -\frac{\sigma}{8} f_{j_1 j_2}{}^k f_{j_3 j_4}{}^l k_{kl} + \frac{1}{8} k_{j_1 j_2} k_{j_3 j_4}\,.
\end{aligned}
$$

Escrevendo (6.4) numa forma explícita, teremos

$$
\begin{aligned}
T &= \mathrm{Tr}(1 + \oint_s A + \frac{1}{2!} P \oint_{s_1} A \oint_{s_2} A + \frac{1}{3!} P \oint_{s_1} A \oint_{s_2} A \oint_{s_3} A + \cdots) \\
&= T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_i + \cdots
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

O sub-índice $i = 0, 1, 2, \ldots$ em T_i indica a ordem de homogeneidade nas variáveis de campo. Usando as expressões de A_x^i em termos de w_x, e_x^1 dadas por (4.6), tomando em conta a condição de calibre $\chi \approx 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \mathrm{Tr}(1_{2\times 2}) = 2\,, \\
T_1 &= \mathrm{Tr}(\oint_s A) = 0\,, \\
T_2 &= \mathrm{Tr}(\frac{1}{2!} P \oint_{s_1} A \oint_{s_2} A) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 A^i(\theta_1) A^j(\theta_2) \mathrm{Tr}(S_i S_j) \\
&= -\frac{\sigma}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 A^i(\theta_1) A^j(\theta_2) k_{ij} \\
&= -\frac{\sigma}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 (e_x^1(\theta_1) e_x^1(\theta_2) K + w_x(\theta_1) w_x(\theta_2))\,, \\
T_3 &= 0\,, \\
T_4 &= -\frac{\sigma}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \int_0^{\theta_2} d\theta_3 \int_0^{\theta_3} d\theta_4 \big(K^2 e_x^1(\theta_1) e_x^1(\theta_2) e_x^1(\theta_3) e_x^1(\theta_4) \\
&\quad + K e_x^1(\theta_1) e_x^1(\theta_2) w_x(\theta_3) w_x(\theta_4) + K w_x(\theta_1) w_x(\theta_2) e_x^1(\theta_3) e_x^1(\theta_4) \\
&\quad + w_x(\theta_1) w_x(\theta_2) w_x(\theta_3) w_x(\theta_4) - K e_x^1(\theta_1) w_x(\theta_2) e_x^1(\theta_3) w_x(\theta_4) \\
&\quad - K w_x(\theta_1) e_x^1(\theta_2) w_x(\theta_3) e_x^1(\theta_4) + K e_x^1(\theta_1) w_x(\theta_2) w_x(\theta_3) e_x^1(\theta_4) \\
&\quad + K w_x(\theta_1) e_x^1(\theta_2) e_x^1(\theta_3) w_x(\theta_4)\big)\ .
\end{aligned}
$$

Determinemos agora os colchetes de Dirac do observável T com os vínculos

$$
\{\mathcal{G}_1'(y), T\}_D = \{\mathcal{G}_1'(y), T_0 + T_1 + T_2 + \cdots\}_D\ . \tag{6.8}
$$

Até a ordem 2:

$$
\{\mathcal{G}_1'(y), T_0\}_D = 0 = \{\mathcal{G}_1'(y), T_1\}_D\ ,
$$

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_1'(y), T_2\}_D &= -\frac{\sigma}{2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \left\{\mathcal{G}_1'(y), e_x^1(\theta_1)e_x^1(\theta_2)K + w_x(\theta_1)w_x(\theta_2)\right\}_D \\
&= \frac{\sigma}{2}Ke_x^1(y)\partial_y\left[\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 e_x^1(\theta_2)\delta(\theta_1 - y)\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 e_x^1(\theta_1)\delta(\theta_2 - y)\right] \\
&\quad + \frac{\sigma}{2}Kw_x(y)\partial_y\left[\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 w_x(\theta_2)\delta(\theta_1 - y)\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 w_x(\theta_1)\delta(\theta_2 - y)\right] \\
&= \frac{\sigma}{2}Ke_x^1(y)\partial_y\left[\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 e_x^1(\theta_2)\delta(\theta_1 - y)\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\theta_2 \int_{\theta_2}^{2\pi} d\theta_1 e_x^1(\theta_1)\delta(\theta_2 - y)\right] \\
&\quad + \frac{\sigma}{2}Kw_x(y)\partial_y\left[\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 w_x(\theta_2)\delta(\theta_1 - y)\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\theta_2 \int_{\theta_2}^{2\pi} d\theta_1 w_x(\theta_1)\delta(\theta_2 - y)\right] \\
&= \frac{\sigma}{2}Ke_x^1(y)\partial_y\left[\int_0^{y} d\theta_2 e_x^1(\theta_2) + \int_y^{2\pi} d\theta_1 e_x^1(\theta_1)\right] \\
&\quad + \frac{\sigma}{2}Kw_x(y)\partial_y\left[\int_0^{y} d\theta_2 w_x(\theta_2) + \int_y^{2\pi} d\theta_1 w_x(\theta_1)\right] \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Em conseqüência, até a ordem T_2,

$$
\{\mathcal{G}_1'(y), T\}_D = 0\,. \tag{6.9}
$$

Façamos agora, o cálculos para $\mathcal{G}_0'(y)$. Mas antes vejamos a ordem nos campos para estas funções. De (5.24) temos,

$$
\mathcal{G}_0'(x) = \mathcal{G}_{02}'(x) + \mathcal{G}_{04}'(x)\,,
$$

onde

$$
\mathcal{G}_{02}'(x) = \sigma e_x^1 \partial_x^2 \psi - \sigma \partial_x e_x^1 \partial_x \psi\,, \tag{6.10}
$$

$$
\mathcal{G}_{04}'(x) = k(e_x^1)^3\psi - (e_x^1)^2 w\varphi_1\,, \tag{6.11}
$$

representam funções dos campos e momentos; $\mathcal{G}_{02}'(x)$ é de segunda ordem e $\mathcal{G}_{04}'(x)$ de quarta ordem.

Com ajuda de (5.29), (5.30), (6.10), (6.11) e da definição (3.13), obtemos facilmente que:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathcal{G}'_{02}(y), e^1_x(x)\right\}_D &= 0\,, \\
\{\mathcal{G}'_{02}(y), w_x(x)\}_D &= -\sigma\partial^2_x(\delta(y-x)e^1_x) - \sigma\partial_x(\delta(y-x)e^1_x)\,, \\
\left\{\mathcal{G}'_{04}(y), e^1_x(x)\right\}_D &= \delta(y-x)(e^1_x)^2 w_x\,, \\
\{\mathcal{G}'_{04}(y), w_x(x)\}_D &= -K\delta(y-x)(e^1_x)^3\,;
\end{aligned}$$

então, usando estas expressões teremos que

$$\{\mathcal{G}'_0(y), T_0\}_D = 0 = \{\mathcal{G}'_0(y), T_1\}_D$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}'_0(y), T_2\}_D &= \{\mathcal{G}'_{02}(y), T_2\}_D + \{\mathcal{G}'_{04}(y), T_2\}_D = \{\mathcal{G}'_{02}(y), T_2\}_D + \mathbf{O(4)} \\
&= -\frac{\sigma}{2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \left\{\mathcal{G}'_{02}(y), e^1_x(\theta_1)e^1_x(\theta_2)K + w_x(\theta_1)w_x(\theta_2)\right\}_D + \mathbf{O(4)} \\
&= -\frac{\sigma}{2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \left[\left(-\sigma\partial^2_{\theta_1}(\delta(\theta_1-y)e^1_x(\theta_1) - \sigma\partial_{\theta_1}(\delta(\theta_1-y)\partial_{\theta_1}e^1_x(\theta_1))\right) w_x(\theta_2)\right. \\
&\quad \left. + w_x(\theta_1)\left(-\sigma\partial^2_{\theta_2}(\delta(\theta_2-y)e^1_x(\theta_2) - \sigma\partial_{\theta_2}(\delta(\theta_2-y)\partial_{\theta_2}e^1_x(\theta_2))\right)\right] + \mathbf{O(4)} \\
&= -\frac{1}{2}\left[-e^1_x(y)\partial^2_y\left(\int_0^y d\theta_2 w_x(\theta_2)\right) + \partial_y e^1_x(y)\partial_y\left(\int_0^y d\theta_2 w_x(\theta_2)\right)\right. \\
&\quad \left. - e^1_x(y)\partial^2_y\left(\int_y^{2\pi} d\theta_1 w_x(\theta_1)\right) + \partial_y e^1_x(y)\partial_y\left(\int_y^{2\pi} d\theta_1 w_x(\theta_1)\right)\right] + \mathbf{O(4)} \\
&= 0 + \mathbf{O(4)}\,,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

onde $\mathbf{O(4)}$ representa as contribuições de quarta ordem e ordem superiores nas variáveis de campo. Agrupando todos os termos, para $\mathcal{G}'_0(y)$ temos finalmente que, até a ordem 2 inclusive,

$$\{\mathcal{G}'_0(y), T\}_D = 0\,. \tag{6.13}$$

Mostramos assim que o colchete de Dirac do Laço de Wilson T, expressão (6.4), com cada um dos vínculos sendo nulos ou fracamente nulos, é um observável. Esta conclusão vale até, pelo menos, na ordem considerada. Até esta ordem a quantidade T é um invariante de calibre.

Vejamos agora o caso da função L, expressão (6.5), que escrita explicitamente em função dos campos, fica como:

$$L \;=\; k^{ij}\phi_i\phi_j = \frac{\sigma}{K}(\varphi_0)^2 + \frac{1}{K}(\varphi_1)^2 + (\psi)^2\,, \tag{6.14}$$

onde $\varphi_0 = \sigma\partial\psi/e_x^1$. Antes de iniciar o cálculo, determinemos os colchetes de Dirac dos vínculos com φ_0,

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_0'(\epsilon), \varphi_0(x)\}_D &= -\frac{\sigma}{e_x^1}\left(\partial_x(\epsilon(e_x^1)^2\varphi_1) + \epsilon e_x^1 w_x \partial_x\psi\right) , \\
\{\mathcal{G}_1'(\epsilon), \varphi_0(x)\}_D &= \sigma\epsilon\frac{\partial_x^2\psi}{e_x^1} - \sigma\epsilon\frac{\partial_x\psi\partial_x e_x^1}{(e_x^1)^2} .
\end{aligned}
$$

Com ajuda destas duas últimas expressões conjuntamente com (5.27–5.30) e (5.34), teremos:

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_1'(\epsilon), L\}_D &= \left\{\mathcal{G}_1'(\epsilon), \frac{\sigma}{K}(\varphi_0)^2 + \frac{1}{K}(\varphi_1)^2 + (\psi)^2\right\}_D \\
&= \frac{2\sigma\varphi_0}{K}\{\mathcal{G}_1'(\epsilon), \varphi_0(x)\}_D + \frac{2\varphi_1}{K}\{\mathcal{G}_1'(\epsilon), \varphi_1(x)\}_D + 2\psi\{\mathcal{G}_1'(\epsilon), \psi\}_D \\
&= \frac{2\varphi_0}{K(e_x^1)^2}\left(\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon\partial_x\psi\partial_x e_x^1\right) + \frac{2\varphi_1}{K}(\sigma\epsilon\partial_x\varphi_1) + 2\epsilon\psi\partial_x\psi \\
&= 2\frac{\sigma\epsilon\varphi_0}{K(e_x^1)^2}\mathcal{G}_0'(x) + 2\frac{\epsilon\varphi_1}{Ke_x^1}\mathcal{G}_1'(x) \approx 0 . \qquad (6.15)\\
\{\mathcal{G}_0'(\epsilon), L\}_D &= \left\{\mathcal{G}_0'(\epsilon), \frac{\sigma}{K}(\varphi_0)^2 + \frac{1}{K}(\varphi_1)^2 + (\psi)^2\right\}_D \\
&= \frac{2\sigma\varphi_0}{K}\{\mathcal{G}_0'(\epsilon), \varphi_0(x)\}_D + \frac{2\varphi_1}{K}\{\mathcal{G}_0'(\epsilon), \varphi_1(x)\}_D + 2\psi\{\mathcal{G}_0'(\epsilon), \psi\}_D \\
&= \frac{-2\varphi_0}{Ke_x^1}\left(\partial_x(\epsilon(e_x^1)^2\varphi_1) + \epsilon e_x^1 w_x\partial_x\psi\right) + \frac{2\varphi_1}{K}\big(\sigma\epsilon\partial_x^2\psi + \sigma\partial(\epsilon\partial_x\psi) \\
&\quad + 3K\epsilon(e_x^1)^2\psi - 2\epsilon e_x^1 w_x\varphi_1\big) + 2\psi(-\epsilon(e_x^1)^2\varphi_1) \\
&= -2\frac{\epsilon\varphi_0}{K}\mathcal{G}_1'(x) + 4\frac{\epsilon\varphi_1}{Ke_x^1}\mathcal{G}_0'(x) \approx 0 . \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

Observando as eqs. (6.15) e (6.16), vemos que estas satisfazem (6.3), isto é, os colchetes de Dirac da quantidade L com cada um dos vínculos é fracamente igual a zero, então podemos concluir que a quantidade L também representa um observável.

Em conclusão, na ordem considerada nos cálculos, as quantidades T e L satisfazem (6.3) e assim representam observáveis de Dirac.

T e L correspondem, na presente teoria, baseada no grupo de calibre (A)dS, às quantidades T e L calculadas na referência [25], onde está mostrado que elas formam uma base algébrica dos observáveis de Dirac da teoria topológica baseada no grupo de calibre compacto $SU(2)$. Podemos esperar que na nossa teoria T e L também formem uma base algébrica dos observáveis.

Capítulo 7

Quantização

Teoria Quântica de Laços (Loop Quantum Gravity), é uma teoria de quantização independente de fundo (background) da relatividade clássica, que produz uma geometria quântica discreta na escala de Planck. O trabalho pioneiro em gravitação quântica não perturbativa são os trabalhos de Dirac [30] e de Wheeler e DeWitt [31] posteriormente. A idéia geral é de aplicar a transformação de Legendre (C.7) à ação de Einstein-Hilbert, dividindo o espaço-tempo em espaço e tempo, e construindo assim a Hamiltoniana. A Hamiltoniana resultante é uma Hamiltoniana puramente de vínculos.

De acordo com a teoria da quantização de Dirac dos sistemas Hamiltonianos completamente vínculados, supõe-se que a Hamiltoniana vinculada $\hat{H}$, atuando sobre o estado $|\Psi\rangle$ anula-o,

$$\hat{H}\,|\Psi\rangle = 0\,. \tag{7.1}$$

Esta equação que define $|\Psi\rangle$ como um estado "físico", elemento do subespaço de Hilbert "físico" $\mathcal{H}$, é a bem conhecida equação de Wheeler-DeWitt ou equação de Einstein quântica, da gravitação quântica canônica. Ela se assemelha à equação de Schrödinger sem o termo $\partial\,|\Psi\rangle\,/\partial t$.

A motivação de desenvolver a dinâmica Hamiltoniana do nosso sistema clássico foi o desejo de deduzir um sistema mecânico quântico correspondente. Na formulação de Dirac da mecânica quântica [7], a correspondencia é expressa pela substitução dos colchetes de Dirac por comutadores entre operadores, conforme a notação abaixo

$$\{\quad,\quad\}_D \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\quad,\quad]\,. \tag{7.2}$$

Pórem, tal prescrição pode estar sujeita a ambigüidades.

Com a consistência da nossa teoria clássica, o primeiro passo para construir uma teoria quântica é construir o espaço de Hilbert cinemático [15,16] dos estados do sistema, através da imposição dos vínculos; logo construir um espaço de Hilbert físico formado dos estados $|\Psi\rangle$ obedecendo às equações de Wheeler-DeWitt (7.1). Aqui só uma parte restrita desse programa será descrita.

Vejamos primeiro a álgebra dos operadores de campos, e em particular os comutadores dos vínculos da teoria.

7.1 Álgebra dos Campo e dos Vínculos

Promovemos nossos campos clássicos em seus correspondentes operadores quânticos atuando num espaço de Hilbert "cinemático", supondo já construido, previamente à imposição dos vínculos [15, 16]. Devemos identificar os correspondentes pares de variáveis canônicamente conjugadas, o que é necessário para resolver o problema inerente de ordenamento dos fatores na transição da mecânica clássica para a mecânica quântica, via o princípio de correspondência. Escrevemos então nossos vínculos clássicos em forma de operadores, os quais serão ordenados como:

$$:\widehat{\mathcal{G}}_0'(x): = \sigma(\partial_x^2\widehat{\psi})\widehat{e_x^1} - \sigma\partial_x\widehat{\psi}\partial_x\widehat{e_x^1} + k\widehat{\psi}(\widehat{e_x^1})^3 - \widehat{w}\widehat{\varphi_1}(\widehat{e_x^1})^2\,, \tag{7.3}$$

$$:\widehat{\mathcal{G}}_1'(x): = (\partial_x\widehat{\varphi_1})\widehat{e_x^1} + \widehat{w}\partial_x\widehat{\psi}\,. \tag{7.4}$$

Tenhamos em conta que estes vínculos $:\widehat{\mathcal{G}}_0'(x):$ e $:\widehat{\mathcal{G}}_1'(x):$ estão escritos em um ordenamento particular simbolizado pelos $:\cdots:$. Aos colchetes de Dirac dos campos correspondem comutadores, eq. (7.2); em particular, as relações de comutação básicas das variáveis canônicas serão definidos como:

$$\left[\widehat{e_x^1}(x), \widehat{\varphi_1}\right] = i\hbar\,\delta(x-y), \qquad \left[\widehat{w}(x), \widehat{\psi}\right] = i\hbar\,\delta(x-y)$$

(os outros comutadores sendo nulos). Para evitar problemas de singularidades "ultravioletas", podemos introduzir uma regularização δ_n da distribuição de Dirac δ, tal que, no sentido das distribuições,

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x-y)=\delta(x-y). \tag{7.5}$$

Para facilitar os cálculos consideremos os vínculos integrados com funções teste $\epsilon(x)$ e $\eta(x)$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}_0'(\epsilon) &= \int dx\epsilon\widehat{\mathcal{G}}_0'(x)\,,\\ \widehat{\mathcal{G}}_1'(\eta) &= \int dy\eta\widehat{\mathcal{G}}_1'(y)\,.\end{aligned}$$

Analogamente ao caso clássico, porém sempre tomando em conta o ordenamento escolhido das variáveis canônicas, os comutadores dos vínculos são dados por:

$$\begin{aligned}\left[\widehat{\mathcal{G}}_0'(\epsilon),\widehat{\mathcal{G}}_0'(\eta)\right] &= i\hbar\sigma\textstyle\int dx(\epsilon\,\partial_x\eta-\eta\partial_x\epsilon)(\widehat{e_x^1})^2 : \widehat{\mathcal{G}}_1'(x) :\\ \left[\widehat{\mathcal{G}}_0'(\epsilon),\widehat{\mathcal{G}}_1'(\eta)\right] &= -i\hbar\textstyle\int dx(2\epsilon\,\partial_x\eta-\eta\partial_x\epsilon) : \widehat{\tilde{\mathcal{G}}}_0(x) :\\ \left[\widehat{\mathcal{G}}_0'(\epsilon),\widehat{\mathcal{G}}_1'(\eta)\right] &= i\hbar\textstyle\int dx(2\eta\partial_x\epsilon-\epsilon\,\partial_x\eta) : \widehat{\tilde{\mathcal{G}}}_0(x) :\\ \left[\widehat{\mathcal{G}}_1'(\epsilon),\widehat{\mathcal{G}}_1'(\eta)\right] &= -i\hbar\textstyle\int dx(\epsilon\,\partial_x\eta-\eta\partial_x\epsilon) : \widehat{\tilde{\mathcal{G}}}_1(x) :\end{aligned} \tag{7.6}$$

Vemos assim que os operadores de vínculos satisfazem uma álgebra de Lie equivalente a seu análogo clássico. Este resultado esta mostrado na ref. [32]. Ele é formal por enquanto, pois o espaço de Hilbert onde atuam os operadores de campo e a definição precisa dos operadores de vínculos ainda não foi feita.

Alem de usar o princípio de correspondência para substituir campos clássicos por seus correspondentes operadores quânticos, a quantização canônica requer que escolhamos um conjunto de funções (chamadas às vezes de váriaveis elementares) sobre o espaço de fase da teoria em consideração, para logo encontrar uma representação sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Com os campos $e_x^1\,, w_x$ e os momentos conjugados $\varphi_1\,,\psi$ temos quatro possibilidades para escolher o conjunto máximo de variáveis básicas que comutam, podendo ser:

$$\begin{aligned}\Psi\left[e_x^1,w_x\right] \quad &\text{com}\,,\quad \hat{\varphi}_1(x)=-i\hbar\frac{\delta}{\delta e_x^1(x)}\;,\hat{\psi}(x)=-i\hbar\frac{\delta}{\delta w_x(x)}\,;\\ \Psi\left[e_x^1,\psi\right] \quad &\text{com}\,,\quad \hat{\varphi}_1(x)=-i\hbar\frac{\delta}{\delta e_x^1(x)}\;,\hat{w}_x(x)=i\hbar\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\,;\\ \Psi\left[\varphi_1,\psi\right] \quad &\text{com}\,,\quad \hat{e}_x^1(x)=i\hbar\frac{\delta}{\delta\varphi_1(x)}\,,\quad \hat{w}_x(x)=i\hbar\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\,;\\ \Psi\left[\varphi_1,w_x\right] \quad &\text{com}\,,\quad \hat{e}_x^1(x)=i\hbar\frac{\delta}{\delta\varphi_1(x)}\,,\quad \hat{\psi}(x)=-i\hbar\frac{\delta}{\delta w_x(x)}\,.\end{aligned}$$

A última representação, é escolhida nas ref. [15, 16, 32], onde Ψ é um funcional dos campos $\varphi_1(x)$ e $w_x(x)$.

Uma primeira tarefa é a construção de um espaço de Hilbert desses funcionais Ψ, com produto escalar bem definido, e onde os operadores do campo são autoadjuntos, os campos $\hat{\varphi}_1$ e $\hat{w}_x$ atuam multiplicativamente, e $\hat{e}^1_x(x)$ e $\hat{\psi}(x)$ atuam como derivadas.

A segunda tarefa é a definição dos vínculos como operadores auto-adjuntos, obedecendo às regras de comutação (7.6).

Finalmente, uma vez definidos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e os operadores, temos que resolver (7.1).

Como sabemos, a dinâmica do sistema está definida pela Hamiltoniana (5.35). Em conseqüência, as equações que definem a dinâmica quântica, são:

$$\widehat{\mathcal{G}}_0'(x)\,|\Psi\rangle = 0\,, \tag{7.7}$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_1'(x)\,|\Psi\rangle = 0\,. \tag{7.8}$$

Elas selecionam os estados físicos do sistema, elementos do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{fisico}$.

Capítulo 8

Conclusão

Apesar da gravitação em um espaço-tempo 2-dimensional, não ser um modelo real de nosso universo, o modelo simples estudado neste trabalho nos permite entender melhor as dificuldades apresentadas na gravitação do mundo real.

No nível clássico construímos uma teoria fisicamente consistente, vimos que a teoria é descrita por uma Hamiltoniana completamente vinculada, mais precisamente com vínculos de primeira classe, os quais são os geradores das transformações de calibre da teoria. Estas transformações de calibre contêm as transformações de difeomorfismo. Vimos que, após a fixação parcial de calibre no calibre temporal, através do cálculo dos colchetes de Dirac e a resolução explícita dos vínculos de segunda classe produzidos pela fixação de calibre, as simetrias de calibre se reduzem às simetrias de difeomorfismos temporais e espaciais, gerados pelos vínculos de primeira classe ${\mathcal{G}'}_0$ e ${\mathcal{G}'}_1$, e no caso de ${\mathcal{G}'}_0$, a menos de equações de movimento, vínculos e uma transformação de Lorentz local compensatória, necessária para manter a fixação de calibre temporal.

Consideramos duas quantidades candidatas para observáveis de Dirac, o Laço de Wilson T e uma quantidade L quadrática nos campos escalares. Verificamos que os colchetes de Dirac destas quantidades com os dois vínculos se anulam fracamente, quer dizer, a menos de termos proporcionais aos vínculos, pelo menos na ordem de aproximação dos cálculos feitos aqui. Dentro desta aproximação, concluímos que L e T são quantidades invariantes de calibre, isto é, elas são observáveis de Dirac.

Finalmente fizemos algumas considerações formais sobre a construção teoria quântica correspondente.

Apêndice A

Variedades

A experiência indica que o espaço-tempo é um contínuo 4-dimensional, no sentido que este requer quatro números – as coordenadas x^μ, $\mu = 0, \cdots, 3$ – para caracterizar um evento. Na relatividade especial assume-se que isto é verdadeiro globalmente, isto é, todo evento no espaço-tempo pode ser colocado numa correspondência um a um com os pontos de R^4. No entanto na relatividade geral onde a geometria do espaço-tempo é dinâmica, certas propriedades globais não triviais da estrutura do espaço-tempo podem aparecer. Para isto é necessário trabalhar com um conjunto no qual a vizinhança de cada ponto veja-se como R^4, tendo porém, propriedades globais completamente diferentes.

Para a formulação matemática da Relatividade Geral é necessário conhecer algumas propriedades básicas sobre as variedades. Uma variedade $\mathcal{M}$ n-dimensional é, um conjunto que tem uma estrutura diferenciável localmente homeomórfica a R^n.

A.1 Espaço Topológico

Um *Espaço Topológico* $(X, \mathcal{C})$ consiste de um conjunto X junto com uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos – os abertos – de X satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}$.

2. Para qualquer subconjunto finito ou infinito $\{U_i\}$ a união satisfaz $\bigcup_i U_i \in \mathcal{C}$.

3. para qualquer subconjunto finito $\{U_1, ..., U_n\}$ a interseção satisfaz $\bigcap_i U_i \in \mathcal{C}$.

A.2 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ é um espaço topológico, que localmente é visto como sendo R^4 porém não necessariamente na sua extensão global. Mais exatamente, uma variedade $\mathcal{M}$ n-dimensional é um conjunto satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{M}$ é um espaço topológico.
2. Existe uma família de pares (U_α, ψ_α) onde os U_α são abertos de $\mathcal{M}$ e cada ψ_α é um homeomorfismo (mapeamento um-um e contínuo) $\psi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, V_α sendo um aberto de R^n.
3. Cada ponto p de $\mathcal{M}$ está contido em ao menos um dos U_α.
4. Se dois abertos U_α e U_β tem uma intersecção não-nula, o mapeamento $\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : V_\alpha \bigcap V_\beta \to V_\alpha \bigcap V_\beta$ é um difeomorfismo (um-um e C^∞)

Cada tripla $(U_\alpha, V_\alpha, \psi_\alpha)$ é chamada de carta, cada função ψ_α representa um sistema de coordenadas [2, 3, 33].

A.3 Vetores

Na relatividade especial, o espaço-tempo é o de Minkowski. Na relatividade geral ele será um espaço-tempo Riemanniano.

Em geral, a cada ponto p no espaço-tempo está associado um conjunto de vetores localizados naquele ponto; este conjunto é conhecido como *espaço tangente* em p e é denotado por T_p. Um vetor pode ser decomposto em componentes com relação a algum conjunto de vetores base. Uma base é qualquer conjunto máximo de vetores linearmente independentes. Para qualquer espaço vetorial existe um número infinito de possíveis bases, cada uma consistindo do mesmo número de vetores. Este número n sendo a dimensão do espaço-tempo. Então qualquer vetor pode ser escrito como uma combinação de vetores-base $\hat{e}_{(a)}$

$$V = V^a \hat{e}_{(a)}. \tag{A.1}$$

Uma base particular é a base de coordenadas:

$$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu, \quad \mu = 0, \cdots, n-1. \tag{A.2}$$

Nesta base, um vetor escreve-se

$$V = V^\mu \partial_\mu. \tag{A.3}$$

onde V^μ são as componentes do vetor.

A.4 Vetores Duais (Um-Formas)

Dado um ponto p do espaço-tempo ao qual está associado um espaço tangente, é possível associar a este um outro espaço vetorial conhecido como *espaço vetorial dual*. Este espaço dual do espaço tangente T_p, é usualmente denotado por T_p^*. O espaço dual é o espaço de todos os mapeamentos lineares do espaço vetorial original para os números reais: as formas. Se $w \in T_p^*$ é um vetor dual, então este atua como um mapeamento tal que,

$$w(aV + bW) = aw(V) + bw(W) \quad \in R.$$

onde V e W são vetores e a, b são escalares.
Definimos a base de coordenadas dual dx^μ por

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu. \tag{A.4}$$

Os funcionais lineares são chamados de vetores duais, vetores cotangentes ou formas. O efeito de aplicar as 1-formas dx^μ a um vetor X é selecionar sua μ-ésima componente, isto é,

$$dx^\mu(X) = X^\nu dx^\mu(\partial_\nu) = X^\nu \delta^\mu_\nu = X^\mu. \tag{A.5}$$

Então

$$w(X) = X^\nu w_\mu dx^\mu(\partial_\nu) = X^\mu w_\mu \,.$$

A.5 Formas Diferenciais

Com a definição da 1-forma pode-se escrever formas de ordem superior: uma 2-forma é definida pelo produto tensorial antissimétrico ou produto exterior "$\wedge$" de 1-formas.

$$w = \frac{1}{2!} w_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu .$$

Mais geralmente uma r-forma é dada pelo produto exterior de r 1-formas:

$$w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \,. \tag{A.6}$$

Aqui

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = \mathrm{sinal}(P) dx^{\mu_{p_1}} \wedge dx^{\mu_{p_2}} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{p_r}} \,,$$

com P sendo uma permutação arbitrária de $1, \cdots, r$, e sinal(P) a paridade da permutação de $1, \cdots, r \rightarrow p_1, \cdots, p_r$.

Temos então que

$$w_{\mu_1 \cdots \mu_r} = \mathrm{sinal}(P) w_{\mu_{p_1} \cdots \mu_{p_r}} \,. \tag{A.7}$$

A.6 Derivada Exterior

Uma maneira de obter uma $(r+1)$-forma a partir de uma r-forma w é através da derivada exterior, definida por

$$dw := \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial w_{\mu_1 \ldots \mu_r}}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}$$

o fator $dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}$ vai implicar uma antissimetrização dos $(r+1)$-índices $\nu, \mu_1, \ldots, \mu_r$ o que implica num fator extra de $1/(r+1)!$.

A derivada exterior satisfaz a propriedade de que atuando duas vezes sobre uma r-forma w, dá origem a um resultado identicamente nulo:

$$d^2w = d(dw) = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial^2 w_{\mu_1\ldots\mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\right) dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = 0 \tag{A.8}$$

que ocorre devido à contração dos dois indices simétricos na derivada segunda com os dois antissimétricos em $dx^\lambda \wedge dx^\nu$.

A.7 Bases Não-Coordenadas: Formalismo de Primeira Ordem

A partir de agora suponhamos uma variedade do espaço-tempo equipada por uma métrica g, definindo o produto interno dos vetores: na base de coordenadas, o produto de dois vetores V_1 e V_2 é dado por:

$$g(V_1, V_2) = g_{\mu\nu}(x) V_1^\mu(x) V_2^\nu(x). \tag{A.9}$$

Como bases naturais para o espaço tangente T_p num ponto p, temos tomado a derivada parcial com respeito as coordenadas naquele ponto, ∂_μ. Similarmente a base de coordenadas no espaço cotangente T_p^* é dada pelas 1-formas dx^μ. Mas isto não impede o uso de qualquer outra base. Imaginemos que em cada ponto da variedade introduzimos um conjunto de vetores base $E_I, (E_I \in T_P)$ (indicadas pelas letras latinas maiúsculas para lembrar que eles não estão relacionados a qualquer sistema de coordenadas). Escolhemos estes vetores base como "ortonormais": seja que o produto interno destes vetores base dado por

$$g(E_I, E_J) = \eta_{IJ}\,, \tag{A.10}$$

onde

$$\begin{gathered}\eta_{00} = \sigma; \quad \eta_{ii} = 1, (i = 1, \ldots, D-1); \quad \eta_{IJ} = 0, (I \neq J) \\ \text{com} \quad \sigma = \begin{cases} +1 : & \text{espaço-tempo Riemanniano}\,, \\ -1 : & \text{espaço-tempo Lorentziano}\,. \end{cases}\end{gathered} \tag{A.11}$$

Assim η_{IJ} no espaço-tempo Lorentziano representa a métrica de Minkowski, ao passo que no caso Riemanniano, a métrica η_{IJ} é Euclidiana. O conjunto de vetores E_I da base "ortonormal" é conhecido como *vielbein*. Em diferentes números de dimensões estes são o vierbein (quatro), dreibein (três), zweibein (dois), em D-dimensões (D-bein), etc.

Dado que temos uma base, qualquer vetor pode ser expresso como uma combinação linear dos elementos desta base. Especialmente pode-se expressar os antigos vetores base ∂_μ em termos dos novos:

$$\partial_\mu = e_\mu{}^I E_I \tag{A.12}$$

As componentes $e_\mu{}^I$ formam uma matriz $n \times n$ inversível. Denotemos a inversa por $E^\mu{}_I$,

$$E^\mu{}_I = \eta_{IJ} g^{\mu\nu} e_\nu{}^J, \tag{A.13}$$

a qual satisfaz

$$E^\mu{}_I e_\nu{}^I = \delta^\mu_\nu\,, \quad e_\mu{}^I E^\mu{}_J = \delta^I_J\,, \tag{A.14}$$

os $E^\mu{}_J$ são as componentes do vetor E_I na base de coordenadas:

$$E_I = E^\mu{}_I \partial_\mu$$

Em termos dos veilbein (A.10) fica

$$g_{\mu\nu} E^\mu{}_I E^\nu{}_J = \eta_{IJ} \tag{A.15}$$

ou equivalentemente

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu{}^I(x) e_\nu{}^J(x) \eta_{IJ} \tag{A.16}$$

De (A.15) vemos que as componentes do tensor métrico na base ortogonal são aquelas do tensor da métrica plana, η_{IJ}. Então podemos subir e baixar os índices latinos com a métrica plana η_{IJ} e sua inversa η^{IJ}.

Quando expressamos a métrica através do D-bein, temos mais graus de liberdade para descrever a mesma geometria, assim temos redundâncias, o tensor métrico tem $D(D+1)/2$ componentes independentes, enquanto o D-bein e_μ^I tem D^2 componentes. Isso significa que muitos D-bein descrevem a mesma métrica, e eles estão relacionados uns aos outros por transformações locais

– ou de calibre. Desta maneira temos

$$e^I(x) \to e'^I(x) = (\Lambda^{-1})^I{}_J(x)e^J(x) = \Lambda_J{}^I(x)e^J(x), \tag{A.17}$$

$$E^I(x) \to E'^I(x) = \Lambda^I{}_J(x)E^J(x)\,, \tag{A.18}$$

$\forall\, x \in \mathcal{M}$. Definimos as 1-formas de D-bein por

$$e^I = e_\nu{}^J dx^\nu\,, \tag{A.19}$$

aqui $E^I = \eta^{IJ}E_J$ e $\Lambda_J{}^I = \eta_{JK}\eta^{IL}\Lambda^K{}_L$.
Escrevemos para posteriores fins a identidade ,

$$d\Lambda\Lambda^{-1} + \Lambda d(\Lambda^{-1}) = 0\,, \tag{A.20}$$

obtida pela diferenciação de $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$.

Posto que a métrica do espaço-tempo deve ficar invariante sob essas transformações, a matriz $\Lambda^I{}_J$ deve satisfazer,

$$\eta_{IJ}\Lambda^I{}_K\Lambda^J{}_L = \eta_{KL}$$

que implica

$$\Lambda^I{}_J \in \begin{cases} \mathrm{SO}(D) & \text{, se } (\mathcal{M},g) \text{ é Riemanniano} \\ \mathrm{SO}(D-1,1) & \text{, se } (\mathcal{M},g) \text{ é Lorentziano} \end{cases}$$

Assim o grupo de calibre é o grupo de Lorentz. Sob essas transformações de calibre os índices de espaço-tempo são deixados invariantes enquanto que os índices internos são rodados. Assim, o D-bein define um sistema de coordenadas (pseudo-)ortonormal no espaço tangente em cada ponto do espaço-tempo, cujas bases podem ser rodadas livremente.

Similarmente, podemos considerar uma base ortonormal de um-formas em T_p^*. Em particular, e^I, definida por (A.19) fornece uma destas bases. Com efeito esta é a base dual de E_I, pois usando (A.14) verificamos que,

$$e^I(E_J) = \delta^I_J. \tag{A.21}$$

O inverso da Equação (A.19) é dado por

$$dx^\mu = e^\mu{}_I e^I \tag{A.22}$$

Um tensor “de Lorentz", $T^{I_1\cdots I_m}{}_{J_1\cdots J_n}(x)$, é definido por transformar-se como:

$$\begin{aligned} T'^{I_1\cdots I_m}{}_{J_1\cdots J_n}(x) &= \Lambda^{I_1}{}_{K_1}(x)\cdots\Lambda^{I_m}{}_{K_m}(x)\Lambda_{J_1}{}^{L_1}(x)\cdots \\ &\cdots\Lambda_{J_n}{}^{L_n}(x)T^{K_1\cdots K_m}{}_{L_1\cdots L_n}(x) \end{aligned} \tag{A.23}$$

sob as transformações de calibre. O D-bein é um exemplo (ver (A.18)). Qualquer outro vetor pode ser expresso em termos de seus componentes na base ortonormal. Se o vetor V é escrito na base de coordenada, $V = V^\mu\partial_\mu$, e na base D-bein, $V = V^I E_I$, as componentes estão relacionadas por:

$$V^I = e_\mu{}^I V^\mu, \quad V^\mu = E^\mu{}_I V^I\,.$$

Assim os vielbein nos permite passar dos índices gregos para os latinos e vice-versa.

Os tensores também podem ser definidos com uma mescla de componentes, como exemplo,

$$V^I{}_J = e_\mu{}^I V^\mu{}_J = E^\mu{}_J V^I{}_\mu = e_\mu{}^I E^\nu{}_J V^\mu{}_\nu$$

As bases dos sistemas não-coordenados, podem ser trocadas independentemente das coordenadas. A única restrição é que (A.10) seja preservada.

Além das transformações locais, temos também as transformações gerais de coordenadas – os difeomorfismos

$$x'^\mu = x'^\mu(x),$$

sob os quais um tensor espaço-tempo $T^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots}$ transforma-se como

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\alpha_m}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_n}}T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_n\cdots\beta_n}(x). \tag{A.24}$$

Os difeomorfismos atuam-nos índices gregos $\mu, \nu, \cdots$, ao passo que as transformações de Lorentz locais atuam nos índices latinos $I, J, \cdots$.

Num espaço-tempo com coordenadas cartesianas a derivada covariante de um tensor do tipo (A.24) é dada por suas derivadas parciais, porém para um tensor numa variedade Riemanniana em geral, um termo de conexão é necessário, um para cada índice involvendo a conexão $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Um procedimento análogo vale para uma base não coordenada, porém substituindo os coeficientes de conexão ordinária $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ pela conexão de spin, denotada por $w_\mu{}^I{}_J$. Para cada índice Latino tem-se uma contribuição da conexão de spin, e a derivada covariante escreve-se por exemplo, como:

$$DX^I{}_J = dX^I{}_J + w^I{}_K \wedge X^K{}_J - w^K{}_J \wedge X^I{}_K. \tag{A.25}$$

A derivada covariante é definida pela propriedade de DX ser um tensor de Lorentz se X é um tensor de Lorentz. Em conseqüência a conexão w se transforma sob o grupo de Lorentz como

$$w'^I{}_J = \Lambda^I{}_K w^K{}_L (\Lambda^{-1})^L{}_J + \Lambda^I{}_K (d\Lambda^{-1})^K{}_J\,. \tag{A.26}$$

A conexão de spin pertence à álgebra de Lie do grupo de Lorentz, o que significa que

$$w^{IJ} = -w^{JI}, \quad \text{onde} \quad w^{IJ} = \eta^{JK} w^I{}_K. \tag{A.27}$$

Chega-se nesta expressão assumendo que a métrica η^{IJ} seja invariante, isto é

$$D\eta^{IJ} = d\eta^{IJ} + w^I{}_k \eta^{kJ} + w^J{}_k \eta^{Ik} = 0$$

dado que η^{IJ} é uma constante então $d\eta^{IJ} = 0$. Em conseqüência de (A.27) pode-se escrever, no caso de dimensão igual 2,

$$w^{IJ} = w\epsilon^{IJ}\,, \tag{A.28}$$

onde ϵ^{IJ} é o tensor de Levi-Civita.

Qualquer tensor com alguns números de índices gregos inferiores antissimétricos e alguns números de índices latinos podem ser pensados como uma forma diferencial. Vejamos as expressões da torsão e da curvatura neste formalismo, pois estes dois tensores caracterizam qualquer conexão dada.

As relações que definem a torsão e curvatura são respectivamente:

$$T^I = De^I = de^I + w^I{}_J \wedge e^J, \tag{A.29}$$

$$R^I{}_J = dw^I{}_J + w^I{}_K \wedge w^K{}_J\,. \tag{A.30}$$

Estas duas ultimas equações são chamadas de equações de estrutura de Cartan, onde $R^I{}_J$ simboliza a 2-forma de curvatura de Riemann. Lembre-se que a base e^I e a coneção $w^I{}_J$, ambas

1-formas, são definidas por:

$$e^I = e_\mu{}^I dx^\mu, \tag{A.31}$$

$$w^I{}_J = w_\mu{}^I{}_J dx^\mu. \tag{A.32}$$

Então os tensores torsão e curvatura escritos em componentes são dadas pelas relações:

$$T^I = \frac{1}{2} T^I{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu\,, \tag{A.33}$$

$$R^I{}_J = \frac{1}{2} R^I{}_{J\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu\,, \tag{A.34}$$

onde

$$T^I{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu{}^I - \partial_\nu e_\mu{}^I + w_\mu{}^I{}_J e_\nu{}^J - w_\nu{}^I{}_J e_\mu{}^J \tag{A.35}$$

$$R^I{}_{J\mu\nu} = \partial_\mu w_\nu{}^I{}_J - \partial_\nu w_\mu{}^I{}_J + w_\mu{}^I{}_K w_\nu{}^K{}_J - w_\nu{}^I{}_K w_\mu{}^K{}_J \tag{A.36}$$

Os coeficientes $T^I{}_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor torsão e $R^I{}_{J\mu\nu}$ são as componentes do tensor de curvatura de Riemann.

Apêndice B

Grupo e Álgebra de Lie

B.1 Álgebras de Lie

Usando o fato de que os grupos de Lie são variedades diferenciáveis, pode-se aproximar a vizinhança de qualquer ponto do grupo de Lie G por um espaço vetorial, tangente ao grupo de Lie naquele ponto particular. Esse espaço tangente possui a estrutura de uma álgebra de Lie.

Um espaço vetorial $\mathcal{G}$ sobre um campo $\mathbf{K}$, se chama álgebra de Lie sobre $\mathbf{K}$ se existe uma operação bilinear (chamada operação de colchetes) $\mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Mais precisamente, uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial sobre um campo $\mathbf{K}$ equipado de um produto $(x, y) \to [x, y]$ com as seguintes propriedades:

1. Antissimétrico, isto é $[x, y] = -[y, x]$ (o que implica $[x, x] = 0$),
2. é bilinear, $[x, ay + bz] = a\,[x, y] + b\,[x, z]$,
3. Satisfaz a identidade de Jacobi, $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$.

   $\forall\, x, y, z \in \mathcal{G}$; $a, b \in \mathbf{K}$.

A dimensão desse espaço vetorial é igual a dimensão do grupo de Lie. Denotemos por $J_a(a = 1, ..., \mathrm{dim(G)})$ uma base da álgebra de Lie; num ponto do grupo G, eles satisfazem

$$[J_a, J_b] = f_{ab}{}^{c} J_c\,, \tag{B.1}$$

se nos movermos de um ponto de G a outro, esta relação não altera-se, conseqüentemente as quantidades ${f_{ab}}^c$ são independentes. Por esta razão elas são chamados de *constantes de estrutura* do grupo de Lie G. Os geradores J_a satisfazem em particular a identidade de Jacobi

$$[J_a,[J_b,J_c]]+[J_c,[J_a,J_b]]+[J_b,[J_c,J_a]]=0. \tag{B.2}$$

De (B.1) e (B.2) pode-se ver que as constantes de estrutura satisfazem:

$$ {f_{ab}}^c = -{f_{ba}}^c, \tag{B.3}$$

$$ {f_{ad}}^e {f_{bc}}^d + {f_{cd}}^e {f_{ab}}^d + {f_{bd}}^e {f_{ca}}^d = 0, \tag{B.4}$$

a primeira delas é devida a antissimetria do colchete e a segunda à identidade de Jacobi. Usando o mapeamento exponencial, os elementos g da parte de G conectada à identidade[1] podem ser escritas como

$$g=\exp(\epsilon^a J_a) \tag{B.5}$$

onde os ϵ^a são parâmetros do grupo de Lie. Se conjugarmos elementos da álgebra de Lie com elementos do grupo de Lie obtemos elementos da álgebra de Lie. Se L e J são elementos da álgebra de Lie temos que

$$\begin{aligned} e^L T e^{-L} &= J+[L,J]+\frac{1}{2!}[L,[L,J]]+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{ad}_L)^n J, \end{aligned} \tag{B.6}$$

onde $\mathrm{ad}_L J \equiv [L,J]$. Os termos no lado direito de (B.6) são elementos da álgebra de Lie, por tanto a conjugação gJg^{-1} define uma transformação da álgebra em si mesma. Em adição, se $g''=g'g$, vemos que a composição das transformações associadas a g' e g dá uma transformação associada a g''. Estas transformações definem então uma representação do grupo G, sendo o espaço da representação a própria álgebra de Lie de G. Esta representação é chamada de *representação adjunta* do grupo de Lie.

[1] Os grupos de Lie que consideramos neste trabalho sendo conexos, essa propriedade valerá para todo elemento g de G.

B.1.1 Matrizes da Representação Adjunta

Definimos as matrizes $d(g)$ por

$$gJ_ag^{-1}J_bd^b{}_a(g), \tag{B.7}$$

estas matrizes são de dimensão $n(=\dim(G))$, e elas formam uma representação de G. Tomando os elementos g_1 e g_2, calculamos

$$\begin{aligned} J_bd^b{}_a(g_1g_2) &= g_1g_2J_a(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2J_ag_2^{-1}g_1^{-1} \\ &= g_1J_cd^c{}_a(g_2)g_1^{-1} = g_1J_cg_1^{-1}d^c{}_a(g_2) \\ &= J_dd^d{}_c(g_1)d^c{}_a(g_2)\,. \end{aligned}$$

Posto que os geradores J_a são linearmente independentes, temos:

$$d(g_1g_2) = d(g_1)d(g_2)\,.$$

Se g é um elemento de G infinitesimalmente próximo à identidade, podemos escrever:

$$g = 1 + \epsilon^a J_a.$$

com ϵ^a infinitesimalmente pequeno. De (B.7) temos

$$\begin{aligned} (1+\epsilon^aJ_a)J_b(1-\epsilon^cJ_c) &= J_cd^c{}_b(1+\epsilon^aJ_a) \\ &= J_c(\delta^c_b + \epsilon^a d^c{}_b(J_a)) = J_b + \epsilon^a\,[J_a, J_b] \\ &= J_b + \epsilon^a f_{ab}{}^cJ_c\,. \end{aligned}$$

Posto que os parâmetros infinitesimais são arbitrários, obtemos

$$d^c{}_b(J_a) = f_{ab}{}^c\,, \tag{B.8}$$

por conseguinte, na representação adjunta, as matrizes que representam os geradores são dadas pelas constantes de estrutura da álgebra. Isto define a representação matricial da álgebra de Lie na representação adjunta. Mais geralmente, cada vez que se tem uma representação matricial do grupo de Lie, adquirimos através do mapeamento exponencial uma representação matricial da correspondente álgebra de Lie [34].

B.2 Forma de Killing

Dada qualquer álgebra de Lie $\mathcal{G}$ com elementos $x, y \in \mathcal{G}$, definimos a forma quadrática $k(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)$, onde ad x é uma matriz que denota x na representação adjunta. Então, k é uma forma bilinear sobre $\mathcal{G}$, chamada a Forma de Killing. Também k é associativa no sentido que $k([xy], z) = k(x, [yz])$. Isto segue-se da identidade $\mathrm{Tr}([x,y]z) {=} \mathrm{Tr}(x[y,z])$. Uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ sobre o campo $\mathbf{K}$ é dita semi-simples se sua forma de Killing $k(x,y)$ é não degenerada, e um grupo de Lie se chama semi-simples se sua álgebra de Lie é degenerada. Serão estes os tipos de grupos que estudaremos [35, 36].

Consideremos tensores $M_{ijk...}$, $(i, j, k, .. = 1, 2, ..., D)$, numa representação de dimensão D. Os geradores são representados por matrizes J_a, $(a = 1, 2, ...d$ dimensão do grupo), com elementos $J_{a\,i}{}^{j}$. As transformações infinitesimais do tensor $M_{ijk...}$ são dadas por

$$\delta M_{ijk\cdots} = \epsilon^a (J_{a\,i}{}^{m} M_{mjk\cdots} + J_{a\,j}{}^{m} M_{imk\cdots} + J_{a\,k}{}^{m} M_{ijm\cdots} + \cdots); \tag{B.9}$$

para um tensor $M_{mjk\cdots}$ invariante, cumpre-se a relação;

$$J_{a\,i}{}^{m} M_{mjk\cdots} + J_{a\,j}{}^{m} M_{imk\cdots} + J_{a\,k}{}^{m} M_{ijm\cdots} + \cdots = 0. \tag{B.10}$$

Os índices da constante de estrutura são levantados e abaixados com a métrica Killing k_{ab}

$$f_{abc} = k_{ce} f_{ab}{}^{e}$$

k_{ab} é um tensor invariante e simétrico, na representação adj. $(J_a \to f_{ab}{}^{c})$:

$$f_{ac}{}^{e} k_{eb} + f_{ab}{}^{e} k_{ce} = f_{acb} + f_{abc} = 0.$$

Então

$$f_{abc} = -f_{acb},$$

e de (B.3) sabemos que $f_{abc} = -f_{bac}$, podemos concluir desta maneira que a constante de estrutura é completamente antissimétrica com respeito a seus três índices, isto é, $f_{abc} = f_{[abc]}$.

A forma de Killing em função das costantes de estrutura escreven-se como

$$k_{ab} = -\frac{\sigma}{2} f_{ac}{}^{d} f_{bd}{}^{c}, \tag{B.11}$$

onde $\sigma = \pm 1$ ($+1$ para o espaço Euclideano e -1 para o espaço Lorentziano). Este forma de Killing define uma forma quadrática invariante sobre a álgebra de Lie:

$$\langle A, B \rangle = k_{ab} A^a B^b = \langle B, A \rangle \tag{B.12}$$

onde A^a e B^b são as componentes de A e B na base $\{J_a\}$, $A = A^a J_a$, $B = B^a J_a$. Podemos provar uma importante identidade de permutação cíclica

$$\langle A, [B, C] \rangle = \langle [A, B], C \rangle = \langle C, [A, B] \rangle \ , \tag{B.13}$$

com efeito;

$$\begin{aligned}
\langle A, [B, C] \rangle &= k_{ab} A^a [B, C]^b = k_{ab} A^a [B^d J_d, C^e J_e]^b \\
&= A^a B^d C^e k_{ab} f_{de}{}^{b} = A^a B^d C^e f_{dea} = A^a B^d C^e f_{ade} \\
&= [A, B]_e C^e = k_{ef} [A, B]^f C^e = \langle [A, B], C \rangle = \langle C, [A, B] \rangle \ .
\end{aligned}$$

Mudanças de sinais ocorrem em (B.12) e (B.13) se algums dos $A, B, \cdots$, são formas de grau ímpar.

B.3 Grupo de Sitter e anti-de Sitter (A)dS

O grupo de Sitter e anti-de Sitter **(A)dS** são grupos semi-simples. Grupos semi-simples são preferidos como grupos de calibre porque eles tem um invariante no grupo, conhecido como a métrica de Killing, o qual é usado para definir termos cinéticos para os campos de calibre.

Grupos que não são semi-simples contêm subgrupos invariantes abelianos, e os geradores dos grupos abelianos comutam entre eles. O fato de que eles sejam subgrupos invariantes implica que muitas das constantes de estrutura da álgebra de Lie sejam nulas; o que implicaria que a métrica de Killing adquiriria autovalores iguais a zero impedindo sua inversibilidade.

Apêndice C

Formalismo de Dirac para Campos Vínculados

A construção de uma teoria quântica para um sistema com muitas variáveis é em geral complicada de formular. A teoria podería ser mais simples se fossemos na correspondente mecânica clássica, a qual poderia-se descrever por variáveis com interações simples entre eles. Porém é possível que isto não seja adequado para descrever a natureza. Para tratar este problema com variáveis mais gerais, usualmente constroe-se uma teoria Lagrangiana em forma de campos. Logo, usando algumas regras estabelecidas (transformação de Legendre) podemos colocar a teoria clássica em forma Hamiltoniana, assim obtendo uma formulação generalizável à teoria quântica. Geralmente este procedimento produz, além da Hamiltoniana dinâmica, um conjunto de vínculos que os campos devem obedecer – como pode ocorrer já na mecânica quântica.

Em nosso trabalho tratamos de uma teoria completamente vínculada. Não há Hamiltoniana dinâmica, mas somente vínculos. O problema de desenvolver a dinâmica de uma Hamiltoniana clássica consistente correspondendo a tal sistema Lagrangiana singular foi primeiramente atacado por Dirac [24] depois Anderson e Bergmann [37], Bergmann e Goldberg [38] entre outros.

O tratamento de teorias singulares baseado no método de Dirac [7], é muito aplicado na física de altas energias, especialmente em teorias de calibre [8–10]. Com a presença destes vínculos na teoria temos que ter cuidado ao aplicar o formalismo de Dirac, especialmente quando surgem os vínculos de primeira e de segunda classe, já que só os de primeira classe são geradores de transformações de calibre, os de segunda classe devendo ser eliminados. Os graus de liberdade de calibre associados aos vínculos de primeira classe devem ser fixados por "condições de calibre" apropriadas, o que pode produzir novos vínculos de segunda classe, que deverão também ser eliminados.

C.1 Principio da Ação

Assumindo que existe uma integral de ação S e que este dada por:

$$S[q(\tau), \dot{q}(\tau)] = \int dt L(q^a, \dot{q}^a) \,,$$

onde o integrando $L(q^a, \dot{q}^a)$ é a Lagrangiana, $q^a(\tau)$ as coordenadas canônicas e $\dot{q}^a(\tau) := dq^a/d\tau$ as velocidades canônicas. Conhecendo L, podemos obter uma Hamiltoniana e determinando a Hamiltoniana teremos dado o primeiro passo para obter uma teoria quântica.

Consideramos $L = L(q^a, \dot{q}^a)$ com um número finito de graus de liberdade sob uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão m, (isto pode também ser generalizado para um sistema com número infinito de graus de liberdade).

Da variação da integral da ação obtemos a equação de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q^a}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \,. \tag{C.1}$$

Para ir ao formalismo Hamiltoniano introduzimos o momento canônico p_a, definido por

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \,. \tag{C.2}$$

Na teoria dinâmica usual, supõe-se que os momentos são funções inversíveis das velocidades. Queremos ter a possibilidade de que estes momentos não sejam todos funções inversíveis das velocidades, isto é, que não existe uma única solução $\dot{q}^a$ que expresse as velocidades em termos das coordenadas e momentos canônicos; quando isto acontece dizemos que estamos tratando com Lagrangianas singulares.
Mais precisamente, uma Lagrangiana é chamada de singular se o determinante da matriz hes-

siana é nulo, isto é:

$$\det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}) = 0. \tag{C.3}$$

Supondo que a ordem da matriz (C.3) seja $m - r$ com $0 < r \leq m$. Então podemos resolver (ao menos localmente) $m - r$ velocidades $\dot{q}^A$, $A = 1, \cdots, m - r$ para $m - r$ momentos p_A, permanecendo r velocidades q^i, $i = 1, \cdots, r$.

$$p_A = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^A} \quad \Rightarrow \dot{q}^A = \dot{q}^A(q^a, p_A, \dot{q}^i)\,, \tag{C.4}$$

onde as equações restantes, $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$, não devem depender dos $\dot{q}^i$ consideremos as equações que definem os momentos p_i,

$$\pi_i(q^a, p_A) := p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i}, \tag{C.5}$$

deduzimos que os p_a não são independentes uns dos outros. As funções

$$\phi_i(q^a, p_a) := p_i - \pi_i(q^a, p_A) = 0, \tag{C.6}$$

são chamadas de *vínculos primários*, que decorrem unicamente da Lagrangiana. Esta terminologia é devida a Bergmann e Dirac [7].

Consideremos a quantidade

$$\tilde{H}(q^a, p_a, v^i) := (p_a v^a - L(q^a, p_a))_{\dot{q}^A = \dot{q}^A(q^a, p_A, v^i)}\,, \quad v^i = \dot{q}^i, \tag{C.7}$$

(que é a transformação de Legendre), chamada de Hamiltoniana primária correspondendo a L. A Hamiltoniana é linear em v^i com coeficientes ϕ_i. Com efeito, diferenciando com respeito a v^i a expressão

$$\tilde{H}(q^a, p_a, v^i) = p_A \dot{q}^A(q^a, p_B, v^i) + p_i v^i - L(q^a, \dot{q}^A(q^a, p_B, v^i), v^j)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial v^i} &= \left[p_A - (\frac{\partial L(q^a, v^a)}{\partial \dot{q}^A})_{\dot{q}^A}\right] \frac{\partial \dot{q}^A}{\partial v^i} + \left[p_i - (\frac{\partial L(q^a, v^a)}{\partial v^i})_{\dot{q}^A}\right] \\ &= p_i - \pi_i(q^a, p_A) = \phi_i(q^a, p_a). \end{aligned}$$

Isto indica que (C.7) pode ser escrito como

$$\tilde{H}(q^a, p_a) = H_0(q^a, p_A) + v^i \phi_i(q^a, p_a), \tag{C.8}$$

onde H_0, o qual independe dos v^i é a Hamiltoniana canônica[1]. Com a extensão dos vínculos (C.6), as equações de Hamilton da teoria definida pela Hamiltoniana $\tilde{H}$ podem ser escritas como

$$\dot{q}^a = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_a} = \frac{\partial H_0}{\partial p_a} + v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_a}, \tag{C.9}$$

$$-\dot{p}^a = -\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_a} = \frac{\partial H_0}{\partial q_a} + v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_a}, \tag{C.10}$$

e

$$\phi^i(q, p) = 0. \tag{C.11}$$

Estas são as equacões de movimento mais gerais da teoria, e são equivalentes às equações de Euler-Lagrange (C.1). Assim o espaço de fase está dado por q^a e p_a enquanto que os v^i são *multiplicadores de Lagrange*, os quais são completamente arbitrários. Para tratar estas equações é conveniente introduzir o formalismo dos colchetes de Poisson.

C.2 Colchetes de Poisson

Se temos duas funções dos q^a e p_a, $f(q,p)$ e $g(q,p)$, o colchete de Poisson para estas funções é definido por:

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q^a}. \tag{C.12}$$

Com esta definição temos:

$$\left\{p_a, q^b\right\} = \delta_a^b, \quad \left\{q^a, q^b\right\} = \{p_a, p_b\} = 0\,.$$

Seguindo a definição os colchetes de Poisson tem as propriedades:

[1] H_0 representa a Hamiltoniana sem vínculos e as equações de Hamilton para esta são: $\dot{q}^A = \frac{\partial H_0}{\partial p_A}$ e $\dot{p}^A = -\frac{\partial H_0}{\partial q_A}$

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$, é antissimétrico,
- $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$, é linear,
- $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$, lei do produto,
- $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$, identidade de Jacobi.

Com ajuda dos colchetes de Poisson (C.12) e as equações de Hamilton (C.9) e (C.10), as equações de movimento, para qualquer função $g = g(q, p)$, podem ser reescritas como:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q^n} \dot{q^n} + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p_n} = \{g, H_0\} + v^i \{g, \phi_i\}. \tag{C.13}$$

Suponhamos que (C.13) escreve-se como:

$$\dot{g} = \left\{g, H_0 + v^i \phi_i\right\}. \tag{C.14}$$

Os coeficientes v^i não são funções de q^a e p_a, assim (C.12) não pode ser usado para determinar o colchete de Poisson (C.14). Entretanto podemos usar as propriedades dos colchetes de Poisson, obtendo

$$\dot{g} = \{g, H_0\} + \left\{g, v^i\right\} \phi_i + v^i \{g, \phi_i\}\ . \tag{C.15}$$

Aqui o colchete $\{g, v^i\}$ não é bem definido, porém ele é multiplicado por algo que anula-se, ϕ_i, assim (C.13) e (C.14) concordam. Aqui temos que ter cuidado em não usar estes vínculos antes de trabalhar com os colchetes de Poisson, caso contrário poderíamos obter um resultado errado. Para lembrar desta regra no formalismo de Poisson, escrevemos (C.6) como equações com um símbolo diferente de igualdade "$\approx$". Assim (C.6) é escrita como

$$\phi_i \approx 0. \tag{C.16}$$

O símbolo "≈ 0" significa "*fracamente igual a zero*" (terminologia introduzida por Dirac), o que significa que ϕ_i poderia ter colchetes de Poisson com algumas variáveis canônicas que não se anulam. Assim nossa equação de movimento pode ser consistentemente escrita como:

$$\dot{g} = \left\{g, \tilde{H}\right\}\ , \tag{C.17}$$

onde

$$\tilde{H} = H_0 + v^i \phi_i \tag{C.18}$$

é chamado de Hamiltoniana total.

C.3 Condições de Consistência

Vejamos as conseqüências das equações de movimento. Os vínculos primários forçam o sistema a uma subvariedade do espaço de fase definida por $\phi_i = 0$, $(i = 1, \cdots, r)$. Isto é consistente com a dinâmica se, e somente se, aquela variedade é invariante, isto é, se (C.13) ou (C.17) com $g = \phi_i$, se anulam. Então, deveríamos ter por consistência

$$\dot{\phi}_i = \left\{ \tilde{H}, \phi_i \right\} = \{H_0, \phi_i\} + v^j \{\phi_j, \phi_i\} = 0, \tag{C.19}$$

sobre a superfície de vínculos $\bar{\mathcal{M}} := \mathcal{M}_\phi$ do espaço de fase. Temos três possibilidades:

1. com ajuda dos vínculos primários as equações valem identicamente;
2. as equações reduzem-se ás equações independentes dos v^i, assim envolvendo unicamente os q e p. Tais equações poderiam ser independentes dos vínculos primários, sendo da forma
$$\dot{\phi}_i = \chi(q^a, p_a) = 0\,;$$
3. se (C.19) não se reduz ao 1^o ou 2^o caso, então impõem-se condições sobre os v^i.

O caso 1 não tem problemas; o 2^o indica que temos novos vínculos $\chi(q^a, p_a)$ sobre os q's e p's. Vínculos que aparecem desta forma são chamados de *vínculos secundários*. Estes diferem dos primários já que os vínculos primários são simplesmente conseqüência da definição das variáveis momento (C.2). Enquanto isso os vínculos secundários fazem uso das equações de movimento de Euler-Lagrange (ou Equações de movimento de Hamilton).

Se temos vínculos secundários aparecendo na teoria estes devem ser juntados aos vínculos originais (C.6) fornecendo outras condições de consistência:

$$\dot{\chi} = \{\chi, H_0\} + v^i \{\chi, \phi_i\} \approx 0.$$

Com estas equações repete-se novamente o processo até que todos os vínculos independentes e as condições sobre os v^i sejam encontradas. Se resultam r' novos vínculos ($\phi_{r'} \approx 0\,,\ r' = r+1, \cdots, r+l$) adicionaremos estes aos r vínculos primários; aqui l é o número total de vínculos secundários. Tanto os vínculos primários como os secundários são trabalhados da mesma maneira, então todos estes vínculos podem ser escritos juntos como

$$\phi_k \approx 0\,, \quad k = 1, \cdots, r + l \equiv f. \tag{C.20}$$

Quanto ao 3^o caso temos que observar que condições devem ser impostas sobre os coeficientes v^i. Estas condições são dados por as equações

$$\{\phi_j, H_0\} + v^i \{\phi_j, \phi_i\} \approx 0, \quad (i = 1, \cdots, r \ e \ j = 1, \cdots, f) \tag{C.21}$$

que darão as condições sobre os coeficientes v^i.

Suponhamos que os v^i são desconhecidos, e que em (C.21) tenhamos um número de equações lineares não-homogêneas, com funções dos q e p como coeficietes dos v^i, e que as soluções para estes v^i sejam denotadas por:

$$v^i = V^i(q^a, p_a). \tag{C.22}$$

Tais soluções devem existir, caso contrário significaria que as equações de movimento de Euler-Lagrange seriam inconsistentes. Á estas soluções particulares é preciso acrescentar a solução geral do sistema homogêneo $v^i \{\phi_j, \phi_i\} \approx 0$ associado a (C.21). Então as soluções mais gerais possíveis de (C.21) são

$$v^i = V^i + u^a U_a{}^i \tag{C.23}$$

onde os ${U_a}^i$'s representam as soluções do sistema homogêneo e os u^a's são coeficientes arbitrários. Substituindo em (C.18) temos uma nova Hamiltoniana total

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_0 + V^i \phi_i + u^a {U_a}^i \phi_i, \\ &= H' + u^a \phi_a. \end{aligned} \tag{C.24}$$

com $H' = H_0 + V^i \phi_i$ e $\phi_a = {U_a}^i \phi_i$. O número de coeficientes u^a é usualmente menor que o número de coeficientes v^i. Os v^i têm que satisfazer condições de consistência, ao passo que os u^a's são coeficientes arbitrários. Poderia-se tomar os u^a's como funções arbitrárias do tempo e, ainda assim, todos os requerimentos da teoria seriam satisfeitos. Como resultado, as variáveis dinâmicas não são completamente determinadas em qualquer tempo. Observamos finalmente que qualquer combinação linear dos ϕ é um vínculo.

C.3.1 Vínculos de Primeira e Segunda Classe

Uma classificação mais útil que a distinção entre vínculos primários e secundários é o conceito de vínculos de primeira e segunda classe. Qualquer variável dinâmica R, função dos q e p, é chamada de *primeira classe* se seus colchetes de Poisson com todos os ϕ são fracamente zero:

$$\{R, \phi_i\} \approx 0\,, \quad i = 1, \cdots, f. \tag{C.25}$$

De outra maneira R será de *segunda classe*. Se R é de primeira classe, então $\{R, \phi_i\}$ tem que ser fortemente igual a uma combinação linear dos ϕ's, os quais são fracamente zero. Assim

$$\{R, \phi_i\} = r_{ii'} \phi_{i'}. \tag{C.26}$$

Um fato importante das propriedades das funções de primeirá classe é que os colchetes de Poisson de duas destas funções é de primeira classe. Em particular H' na Equação (C.24) é de primeira classe.

C.3.2 Vínculos de Primeira Classe como Geradores das Transformações de Calibre

A presença das funções arbitrárias $u^a\,(a = 1, \cdots, l)$ na Hamiltoniana total (C.24) indica que nem todos os p e q são observáveis, isto é, existe mais de um conjunto de valores das variáveis canônicas representando um mesmo estado físico dado. Porém a teoria tem que ser independente destas funções. O fato dos coeficientes u^a serem funções arbitrárias do tempo, significa que uma variável canônica em um instante qualquer poderia ter mais de um valor; ou melhor, dado um conjunto inicial de variáveis canônicas em um tempo t_1 definindo completamente um estado físico, espera-se determiná-lo completamente em qualquer outro tempo. Agora os coeficientes u^a são funções arbitrárias, o que significa que os valores das variáveis canônicas em um tempo posterior t_2 dependem da escolha dos u^a's. Considerando em particular $t_2 = t_1 + \delta t$, a diferença entre os valores que toma uma variável dinâmica A no tempo t_2 correspondente a duas escolhas u^a e $\tilde{u}^a$, com a Hamiltoniana (C.24):

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left\{A, \tilde{H}\right\} = \left\{A, H^{'} + u^a \phi_a\right\} = \left\{A, H^{'}\right\} + u^a \left\{A, \phi_a\right\} \\ \delta \dot{A} &= (u^a - \tilde{u}^a) \left\{A, \phi_a\right\} \end{aligned}$$

de onde temos que

$$\delta A = (u^a - \tilde{u}^a) \delta t \left\{A, \phi_a\right\} = \delta u^a \left\{A, \phi_a\right\}, \tag{C.27}$$

com $\delta u^a = (u^a - \tilde{u}^a)\delta t$. A transformação (C.27) não deve alterar o estado físico em t_2. Então estendendo a terminologia usada em teoria de campos de calibre conclui-se que os vínculos geram transformações de calibre. As transformações que não mudam o estado físico, as "transformações de calibre", formam um grupo contínuo (grupo de Lie), o que implica que as transformações infinitesimais formam uma álgebra de Lie (com o colchete de Poisson). Então os colchetes de Poisson dos vínculos ϕ gerando essas tranformações devem ser iguais a combinações lineares dos tais vínculos. Em outras palavras, os ϕ que geram transformações de calibre são de primeira classe. Em geral as transformações (C.27) não são as únicas que não fazem mudar o estado físico. De fato temos:

1. O colchete de Poisson de dois vínculos de primeira classe $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ gera uma transformação de calibre.

2. O colchete de Poisson de quaisquer vínculos de primeira classe ϕ_a com a Hamiltoniana de primeira classe $H^{'}$, $\left\{\phi_a, H^{'}\right\}$ gera uma transformação de calibre.

O número de funções arbitrárias é igual ao número de valores que toma o sufixo "a". E é o número de transformações de calibre independentes.

As funções de primeira classe formam uma subálgebra sobre $\mathcal{M}$. Agora todos os vínculos (C.20) podem ser divididos em dois conjuntos, um consistente com os *vínculos de primeira classe*, com base de vínculos linearmente independentes

$$\psi_i(q,p) \approx 0 \qquad\qquad i = 1, \cdots, I\,, \tag{C.28}$$

e os demais que ficam, $N = f - I$ de *vínculos, de segunda classe*, com base

$$\varphi_\alpha(q,p) \approx 0 \qquad\qquad \alpha = 1, \cdots, N\,. \tag{C.29}$$

Os ψ_i e φ_α poderiam incluir vínculos primários como também vínculos secundários.

C.3.3 Vínculos de Segunda Classe. Colchetes de Dirac

Os vínculos de segunda classe dão origem à matrizes $N \times N$ dos colchetes de Poisson, não singulares, denotados como

$$C_{\alpha\beta} = \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}\,. \tag{C.30}$$

Dado que o determinante de uma matriz antissimétrica anula-se se sua dimensão for ímpar, pode-se concluir que o número N de vínculos de segunda classe deve ser par. Posto que $C_{\alpha\beta}$ é não singular sua inversa $C^{-1}_{\alpha\beta}$ existe e satisfaz

$$C_{\alpha\beta}C^{-1}_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}\,. \tag{C.31}$$

Agora construimos, para qualquer variável dinámica A, uma nova variável A' que tenha colchetes que se anulam com todos os vínculos de segunda classe. A' é dada por

$$A' = A - \{A, \varphi_\alpha\}\, C^{-1}_{\alpha\beta}\varphi_\beta\,. \tag{C.32}$$

Com efeito ,

$$\begin{aligned} \{A', \varphi_\gamma\} &= \{A, \varphi_\gamma\} - \{A, \varphi_\alpha\}\, C^{-1}_{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} \\ &= \{A, \varphi_\gamma\} - \{A, \varphi_\alpha\}\, \delta_{\alpha\gamma} = 0\,. \end{aligned} \tag{C.33}$$

Aqui $\{A', \psi_i\}$ não necessariamente é zero, ψ_i sendo um vínculo de primeira classe.

Agora postulamos que os colchetes de Poisson de duas quantidades A e B sejam substituídos pelos colchetes de Poisson das variáveis A' e B',

$$\{A, B\} \to \{A', B'\} = \{A, B\} - \{A, \varphi_\alpha\}\, C^{-1}_{\alpha\beta}\, \{\varphi_\beta, B\}\,. \tag{C.34}$$

Apesar que $A' \approx A, B' \approx B$, o colchete de Poisson $\{A', B'\}$ não é fracamente igual a $\{A, B\}$. Então definem-se os colchetes de Dirac como

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \varphi_\alpha\}\, C^{-1}_{\alpha\beta}\, \{\varphi_\beta, B\}\ , \tag{C.35}$$

verifica-se que (fracamente)

$$\{A, B\}_D \approx \{A', B'\} \approx \{A', B\} \approx \{A, B'\}\ . \tag{C.36}$$

Se todos os colchetes de Poisson são substituídos pelos colchetes de Dirac, a equação (C.36) nos diz que estamos escolhendo tratar unicamente de vínculos de primeira classe. Todos os vínculos de segunda classe podem ser estabelecidos como iguais a *zero fortemente*, já que os colchetes de Dirac de qualquer função com vínculos de segunda classe é zero:

$$\{A, \varphi_\gamma\}_D = \{A, \varphi_\gamma\} - \{A, \varphi_\alpha\}\, C^{-1}_{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = 0\,. \tag{C.37}$$

De (C.36) e da definição (C.32) pode-se ver que $\{A, \{B, C\}_D\}_D \approx \{A', \{B', C'\}\}$, assim a identidade de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}_D\}_D + \{B, \{C, A\}_D\}_D + \{C, \{A, B\}_D\}_D \approx 0 \tag{C.38}$$

é satisfeita pelos colchetes de Dirac fracamente.

Ademais de (C.38) as propriedades que satisfazem os colchetes de Dirac são:

- $\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D$;
- $\{A, BC\}_D = \{B, A\}_D C + B\{A, C\}_D$;
- $\{\varphi_\alpha, A\}_D = 0$, $\forall\, A(p,q)$, e φ_α vínculos de segunda classe;
- $\{A, B\}_D \approx \{A, B\}$, para B de primeira classe e A arbitrário.
- $\{A, \{B, C\}_D\}_D \approx \{A, \{B, C\}\}$ para B e C de primeira classe e A arbitrário.

Depois dos colchetes de Poisson terem servido a seu propósito de distinguir os vínculos de primeira classe dos de segunda classe, todas as equações da teoria são formuladas em termos dos colchetes de Dirac e os vínculos de segunda classe são convertidos em identidades expressando algumas variáveis canônicas em termos de outras.

Referências Bibliográficas

[1] R. Utiyama, "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction", Phys. Rev. 101, (1956) 1597-1607.

[2] Robert M. Wald, "General Relativity", The University of Chicago, 1984.

[3] Reinhold A. Bertlmann, "Anomalias in Quantum Field Theory", Clarendon Press-Oxford, 1996.

[4] T. Thiemann, Introduction to "Modern Canonical Quantum General Relativity", [arXiv:gr-qc/0110034]

[5] Peter Peldán, "Actions for gravity, with generalizations: A Review", Class. Quant. Grav. 11:1087-1132, 1994, [arXiv:gr-qc/9305011]

[6] R. Jackiw, "Diverse Topics in Theoretical and Mathematic physics – Gauge Theories and Gravity ", World Scientific, Singapure 1995.

[7] P.A.M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.

[8] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, "Constrained Hamiltonian Systems", Academia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.

[9] M. Henneaux and C. Teitelboim, "Quantization of Gauge Systems", Princeton University Press, 1991.

[10] D.M. Gitman and I.V. Tyutin, "Quantization of Fields with Constraints", Springer-Verlang Series in Nuclear and Particle Physics, Berlin Heidelberg, 1990.

[11] Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W., "The Dynamics General Relativity in Gravitation: An Intoduction to Current Reseach", ed. L. Witten (New York: Wiley), 1962.

[12] A. Corichi, and D. Nunez, "Introduction to The ADM Formalism" (in spanish), Rev. Mex. Fis. 37, 720-747 (1991).

[13] Carlo Rovelli, "Quantum Gravity", Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2004.

[14] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski, "Background Independent Quantum Gravity: A Status Report.", Class.Quant.Grav.21:R53,2004., [arXiv:gr-qc/0404018].

[15] Clisthenis P. Constantinidis, José André Lourenço, Olivier Piguet e Wesley Spalenza, "Quantização da Gravidade em Duas Dimensões via o Formalismo de Laços", apresentado em "XXVII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos" de 24-28 de setembro de 2006, SP-Brasil. e "XIII Escola de Verão Jorge André Swieca de Partículas e Campos", de 22-28 de Janeiro de 2007, SP-Brasil.

[16] Clisthenis P. Constantinidis, José André Lourenço, Olivier Piguet, em preparação, Depatamento de Física-UFES-Brasil-2007.

[17] Roman Jackiw, "Two Lectures on Two-Dimensional Gravity", LASSF II, Caracas, Venezuela, October 1995, [arXiv:gr-qc/9511048].

[18] M. Weis, "Topological Aspect of Quantun Gravity", [arXiv:hep-th/9806179].

[19] K. Isler and C.A. Trugenberger, "Gauge Theory of Two-Dimensional Quantum Gravity", Phy. Rev. Lett. 63 (1989) 834.

[20] T. Fukuyama and K. Kamimura, "Gauge Theory of Two-Dimensional Gravities", Phy. Lett. 160B (1985) 259.

[21] Marc Henneaux, "Quantum Gravity in Two-Dimension: Exact Solution of Jackiw Model", Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 959.

[22] A. H. Chamseddine and D. Wyler, "Gauge Theory of Topological Gravities in (1+1) Dimensions", Phy. Lett. B 228(1989) 75.

[23] Edward Witten, "(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System", Nucl. Phys. B311, 46, 1988.

[24] P.A.M. Dirac, Canad. J. Math. 2, 129 (1950); P.A.M. Dirac, Canad. J. Math. 3, 1 (1951).

[25] E. R. Livine, Alejandro Perez and Carlo Rovelli, "2d Manifold-Independence Spinfoam Theory", [arXiv:gr-qc/0102051].

[26] R. Jackiw, "Liouville Field Theory: A Two-Dimensional Model For Gravity?", ed. S Christens, Hilgar, Bristol, p403-420, 1984.

[27] R. Jackiw, Gauge Covariant Conformal Transformations, Phy. Rev. lett. 41 (1978) 1635.

[28] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G.T. Thompson, "Topological Field Theory", Phys.Rept. 209:129-340,1991. M. Blau and G. Thompson, "Topological Gauge Theories of Antisymetric Tensor Field", Ann. Phys. 205(1991) 130-172.

[29] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin, "Loops Knots Gauge Theory and Quantum gravity", Cambridge University, 1996

[30] P.A.M. Dirac, Phys. Rev. 73(1948)1092; P.A.M. Dirac,Rev. Mod. Phys. 21(1949)392

[31] B. S. DeWitt, Phys. Rev. 160(1967)1113; B. S. DeWitt, Phys. Rev. 162(1967)1195; B. S. DeWitt, Phys. Rev. 162 (1967) 1239.

[32] Alex Rios Costa, tese de mestrado "Uma Revisão da Gravitação Bidimensional do Ponto de Vista da Gravitação Quântica de Loops", departamento de Física-UFES-Brasil-2007.

[33] M. Nakajara, "Geometry Topology and Physics", Institute of Phisics Publishin Bristol An Philadelphia, 1990.

[34] Luiz Agostinho Ferreira, “Lecture Notes in Lie Algebras and Lie Grups”, IFT/UNESP (2000).

[35] James E. Humphreys, “Introduction to Lie Algebras and Representation”, Spring-Verlag New York, 1972.

[36] Chan Hong-Mo, Tsou Scheung Tsun, “Some Elementary Gauge Theory Concepts”, World Scientific Lectures Notes in Physics-Vol. 47, 1993.

[37] J. L. Anderson and Peter G. Bergmann, “Constraints Covariant Field Theories”, Phys. Rev. 83 (1951) 1018.

[38] Peter G. Bergmann and I. Goldberg, “Dirac Braket Transformation in Phace Spase”, Phys. Rev. 98 (1955) 531.