

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**CENTRO TECNOLÓGICO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**JEANDERSON COLODETE SESSA**

**NOVOS TESTES COMPUTACIONAIS COM A  
FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM  
PROBLEMAS DE DINÂMICA**

**VITÓRIA**

**2009**

**JEANDERSON COLODETE SESSA**

**NOVOS TESTES COMPUTACIONAIS COM A  
FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM  
PROBLEMAS DE DINÂMICA**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica na área de concentração em Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto.

**Vitória**

**2009**

## Ficha Cartográfica-Bc

**JEANDERSON COLODETE SESSA**

**Comissão examinadora**

A meus pais pelo apoio e estímulo dado durante  
toda minha vida

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus pela vida e por sempre me guiar para o melhor caminho.

Ao Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto do Departamento de Engenharia Mecânica da UFES, pelo apoio, amizade, estímulo, impecável orientação e, sobretudo, por ter acreditado e apostado no meu desempenho no Programa.

Ao professor Fernando Menandro pela disponibilidade para tirar dúvidas decorrentes do trabalho.

Aos meus pais, irmão e minha avó pelo apoio que sempre me deram, e a toda minha família, primos, tios e amigos próximos que contribuíram para conclusão desse trabalho.

A minha namorada Michely pelo apoio, força e compreensão dado durante todo o trabalho.

Ao meu Co-Orientador Prof. Msc. Markcilei Lima Dan pela fundamental e indispensável ajuda e identificação de diversas dificuldades no decorrer de todo o trabalho.

A todos os amigos do IFES, do PPGEM que ajudaram fazer dessa trajetória um momento único e inesquecível.

À Zezé, secretária do PPGEM, que sempre nos atende com carinho e muita atenção.

## RESUMO

Este trabalho apresenta e discute os resultados de testes numéricos envolvendo técnicas direcionadas ao aprimoramento da eficácia da formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade, aplicada aos problemas escalares de dinâmica, em particular ao fenômeno de propagação de ondas em meios elásticos.

As equações básicas da elastodinâmica são apresentadas neste trabalho na forma compacta da Equação de Navier, que é aplicada para alguns casos particulares, os quais foram discutidos nessa dissertação.

O tratamento matemático do termo espacial foi feito utilizando os fundamentos da Teoria das Equações Integrais e para o termo temporal empregou-se a técnica da Dupla Reciprocidade tradicional. A discretização temporal foi feita através de esquemas de avanço no tempo com amortecimento fictício, visando diminuir a ação dos altos modos de vibração mal representados. Esquemas de avanço no tempo como Houbolt e Wilson- $\theta$  são apresentados neste trabalho, junto com seus respectivos resultados.

A utilização de diferentes classes de funções de base radial na interpolação foi testada, avaliando seus resultados e comparações. Efeitos do refinamento da malha, introdução de pontos internos, valor do incremento do tempo, foram os principais fatores avaliados pelas simulações numéricas realizadas nesta dissertação, comparando seus resultados com a solução analítica disponível. O esquema de acréscimo de funções globais de Goldberg e Chen foi testado em dinâmica e seus resultados comparados com o efeito da introdução de pontos internos.

## ABSTRACT

This work presents and discusses numerical results of the Dual Reciprocity Boundary Element Method (BEM) applied to scalar dynamic problems, specifically related to wave propagation phenomena. The main purpose is to evaluate the efficacy of some resources used to improve the numerical performance of the Dual Reciprocity approach.

The basic equations of elastodynamics are presented in the Navier Equation form; applied hereby to some specific scalar cases which were discussed in this dissertation.

The development of the mathematical spatial term was accomplished using the theory of integral equations and the temporal term was developed by the Dual Reciprocity Technique. The temporal discretization was implemented using the step time scheme, with fictitious damping, to avoid complete response degradation, due to the spurious action of high modal components. Houbolt and Wilson- $\theta$  time marching schemes are tested and compared concerning accuracy in this work.

The use of different kind of radial basis functions for the dual reciprocity interpolation procedure was evaluated. Effects of the mesh refinement, introduction of internal poles and time increment values were simulated. Numerical results were compared with analytical responses. The Goldberg and Chen procedure, based on global function increments in stationary cases, was applied and analyzed for dynamic problems and its results were compared with meshes with internal poles added.



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela IV.1- Deslocamento ao longo da Barra.....	80
Tabela IV.2- Tensões no engaste da Barra.....	81

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura III.1- Domínio bidimensional $\Omega$ com contorno $\Gamma$ .....	35
Figura III.2- Caracterização geométrica do problema fundamental correlato.....	38
Figura III.3- Caracterização geométrica de um contorno anguloso.....	40
Figura III.4- Elemento de contorno constante.....	45
Figura III.5- Contorno discretizado em elementos de contorno constante.....	45
Figura IV.1- Barra de secção constante engastada e submetida à carga súbita.....	52
Figura IV.2- Curva da resposta analítica para o deslocamento na extremidade carregada da barra.....	53
Figura IV.3- Curva de deslocamentos com 40 EC com 0 PI e 5 PI, $\Delta t=0,1s$ .....	53
Figura IV.4- Curva de deslocamentos com 80 EC com 25PI e 0PI, $\Delta t=0.06s$ .....	54
Figura IV.5- Curva de resposta analítica para tensão no engaste da barra.....	55
Figura IV.6- Tensão no engaste com malha de 40 EC, sem PI e passos iguais a $\Delta t=0,05s$ , $\Delta t=0,1s$ e $\Delta t=0,15s$ .....	55
Figura IV.7- Tensões no engaste para malha com 40 EC, 1PI e 0PI, $\Delta T=0.1s$ .....	56
Figura IV.8- Tensões no engaste para malha com 40 EC, 9PI e 0PI, para $\Delta t=0.1s$ .....	58
Figura IV.9- Tensões no engaste para uma malha com 40 EC, 25PI.....	58
Figura IV.10- Tensões no engaste para malha com 40 EC, 25 PI, $\Delta t=0.04s$ , $\Delta t=0.06s$ e $\Delta t=0.07s$ .....	59
Figura IV.11- Tensões no engaste para uma malha de 80 EC, sem pólos e com 1 PI para um $\Delta t=0.06s$ .....	60
Figura IV.12- Tensões no engaste para uma malha de 80 EC, com 25 PI e com 9 PI para um $\Delta t=0.06s$ .....	60
Figura IV.13- Tensões no engaste para uma malha de 80 EC, com 25 PI para um $\Delta t=0.05s$ .....	61

Figura IV.14- Efeito do parâmetro $\theta$ nas tensões,para uma malha com 80EC ,25PI e $\Delta t=0.05s$ .....	63
Figura IV.15- Tensões normais no engaste, malha com 80 EC, 25 PI, $\Delta t=0.05s$ .....	63
Figura IV.16- Tensões normais no engaste. Variação extrema de $\theta$ com a malha de 40 EC, 25PI, $\Delta t=0.1s$ .....	64
Figura IV.17- Tensões normais no engaste, $\theta =1,7$ e 25 PI. Malhas com 40 EC e 80 EC com $\Delta t=0.1s$ e $\Delta t=0.05s$ , respectivamente.....	65
Figura IV.18- Tensões normais no engaste, $\theta =1,7$ e 25 PI. Malhas com 40 EC, 9PI com $\Delta t=0.07s$ e 25PI com $\Delta t=0,05s$ .....	65
Figura IV.19- Comparação de resposta entre o esquema Wilson $\theta$ e Houbolt para malha de 40 elementos, 12 PI e $\Delta t= 0,1s$ e $\theta=1,8$ .....	67
Figura IV.20- Comparação de resposta entre o esquema Wilson $\theta$ e Houbolt para malha de 40 elementos, 25 PI e $\Delta t= 0,1s$ e $\theta=1,8$ .....	68
Figura IV.21- Comparação de resposta entre o esquema Wilson $\theta$ e Houbolt para malha de 40 elementos, 25 PI e $\Delta t= 0,1s$ e $\theta=1,4$ .....	68
Figura IV.22- Malha de 80 elementos, 25 PI e $\Delta t=0.05s$ , utilizando esquema Wilson, com $\theta=1.8$ .....	69
Figura IV.23- Efeito da ampliação do parâmetro $\theta$ . Malha de 80 elementos, 25 PI e $\Delta t=0.05s$ .....	70
Figura IV.24- Esquema Houbolt,para uma função $F= r^2 \ln r$ , malha de 80 elementos, 25 PI e $\Delta t=0,09s$ .....	73
Figura IV.25- Esquema Houbolt,para uma função $F= r^2 \ln r$ ,malha de 80 elementos, 25 PI e $\Delta t=0,1s$ .....	74
Figura IV.26- Comparação das curvas de resposta para tensão entre as funções radial simples e exponencial híbrida $F_1$ , com 80 EC, 25 PI e $\Delta t=0,06s$ .....	75
Figura IV.27-Comparação das curvas de resposta para tensão com a função exponencial híbrida $F_1$ , com 80 EC, 25 PI e $\Delta t= 0,04s$ e $\Delta t= 0,02s$ .....	76

Figura IV.28 – Curvas de resposta para tensão com a função exponencial híbrida $F_1$ , com 80 EC, 25 PI, $\Delta t=0,05s, \Delta t= 0,03s$ e $\Delta t= 0,01s$ .....	76
Figura IV.29- Tensões no engaste para malha com 80 EC, 25 PI e $\Delta t=0,05s$ . Gráfico da esquerda, função radial simples; gráfico da direita, função exponencial híbrida $F_1$ .....	77
Figura IV.30- Respostas para funções exponenciais híbridas para uma malha com 80 EC, 25 PI e $\Delta t=0,05s$ . A curva contínua corresponde à função $F_1=e^{-r}[r^2-5r+4]$ e a curva tracejada corresponde a função $F_2= e^{-r}[r^3-7r^2+9r]$ .....	77
Figura IV.31-Esquema de montagem da matriz de interpolação F com acréscimo de funções.....	79
Figura IV.32- Malha de 64 elementos $\Delta t=0.07s$ , onde a curva tracejada representa Chen e a contínua representa o algoritmo Houbolt, utilizando a função radial simples.....	81
Figura IV.33- Malha de 64 elementos $\Delta t=0.1s$ , onde a curva tracejada representa Chen e a contínua representa o algoritmo Houbolt, utilizando a função radial simples.....	82
Figura IV.34- Malha de 40 elementos $\Delta t=0.1s$ , onde a curva tracejada representa Houbolt, e a contínua representa o algoritmo Chen utilizando a função radial simples.....	82
Figura IV.35- Barra homogênea comprimida de seção variável.....	83
Figura IV.36- Solução exata para o deslocamento na extremidade livre ao longo do tempo.....	83
Figura IV.37- Solução exata para a deformação no engaste ao longo do tempo.....	84
Figura IV.38- Comparação dos valores de Deformação para uma de 65 elementos para $\Delta t=0.05s$ .....	85
Figura IV.39- Valores de Deformação para diferentes passos. Malha de 65 elementos e 25 PI.....	86
Figura IV.40- Comparação dos valores de Deformação para passos diferentes, malha de 65 elementos e 25 PI.....	86

Figura IV.41- Comparação dos valores de Deformação para passos diferentes, malha de 65 elementos 25 PI.....	87
Figura IV.42- Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos, 25PI, e $\Delta t=0.05s$ .....	88
Figura IV.43- Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos, 25PI e $\Delta t=0.02s$ .....	89
Figura IV.44- Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos, com 25 PI e $\Delta t=0.2s$ .....	89
Figura IV.45- Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos 25 PI e $\Delta t=0.2s$ .....	90
Figura IV.46- Valores de Deslocamento para uma malha de 65 elementos, 25PI, $\Delta t=0.2s$ , para função híbrida.....	91
Figura IV.47-Valores do Deslocamento para uma malha 65 elementos, 25PI e $\Delta t=0.05s$ Função Radial Simples.....	91

# SUMÁRIO

## CAPÍTULO I

---

### INTRODUÇÃO

I.1-COMENTÁRIOS PRELIMINARES.....	17
I.2-MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM DINÂMICA.....	18
I.3-MOTIVAÇÃO.....	20
I.4 OBJETIVO.....	22

## CAPÍTULO II

---

### EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTODINÂMICA

II.1-CASO GERAL.....	24
II.2-ONDAS DE DILATAÇÃO.....	26
II.3-ONDAS DE DISTORÇÃO.....	27
II.4-BARRA TRACIONADA DE SEÇÃO CONSTANTE.....	30
II.5-BARRA TRACIONADA DE SEÇÃO VARIÁVEL.....	31

II.6-MEMBRANA ELÁSTICA PLANA.....	31
II.7- RELAÇÃO ENTRE $C_1$ E $C_2$ .....	32

### **CAPÍTULO III**

---

#### **FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE APLICADA A PROBLEMAS DA ELASTO-DINÂMICA ESCALAR**

III.1- FORMULAÇÃO GERAL BÁSICA.....	34
III.2-TRATAMENTO MATEMÁTICO DO TERMO ESPACIAL.....	36
III.3-SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.....	37
III.4-TRATAMENTO MATEMÁTICO DO TERMO TEMPORAL.....	40
III.5-DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....	44

### **CAPÍTULO IV**

---

#### **SIMULAÇÕES E TESTES NUMÉRICOS**

IV.1-ESQUEMAS DE AVANÇO NO TEMPO.....	49
IV.2-RESULTADOS COM ESQUEMA Houbolt.....	52
IV.3-RESULTADOS COM ESQUEMA Wilson-Teta.....	61

IV.4- COMPARAÇÕES ENTRE O ESQUEMA WILSON-TETA E HOUBOLT.....	66
IV.5- ESCOLHA DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO.....	71
IV.6- FUNÇÕES ACRESCIDAS.....	78
IV.7-SIMULAÇÃO EM BARRAS DE SEÇÃO LINEARMENTE VARIÁVEL.....	83

## **CAPÍTULO V**

---

### **CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS**

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>95</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>98</b>
APÊNDICE A.....	99
APÊNDICE B.....	101
APÊNDICE C.....	104



## CAPÍTULO I

---

### INTRODUÇÃO

#### I.1- COMENTARIOS PRELIMINARES

Nas ciências, de uma maneira geral, e nas engenharias, em particular, é de grande importância a representação ou modelagem de problemas físicos por meios de equações diferenciais. Tão importante quanto o estabelecimento das equações diferenciais é a sua solução. Devido à complexidade das equações, nem sempre é possível determinar-se a solução analítica do problema analisado e, nesse caso, toda a atenção é voltada para sua resolução numérica, através de métodos aproximados, fundamentados no processamento computacional. Tal procedimento, cada vez mais destacado com o desenvolvimento dos computadores, possibilita a abordagem de fenômenos físicos de grande valia para o desenvolvimento da ciência, uma vez que diversos tipos de problemas complexos podem ser resolvidos e estudados.

Na engenharia, há muitos problemas que são muito bem representados por modelos matemáticos, ou seja, caracterizados matematicamente por equações diferenciais com as devidas condições de contorno ou iniciais, como por exemplo: problemas da mecânica dos sólidos, grande parte dos problemas de mecânica dos fluidos, problemas de transferência de calor, problemas de eletromagnetismo, entre outros.

A grande maioria dos métodos matemáticos que viabilizam uma solução numérica gera modelos discretos, ou seja, resultam em modelos aproximados nos quais as derivadas parciais que compõem a equação de governo do problema são substituídas por equações algébricas. Isso é feito com base em procedimentos matemáticos consistentes, no qual o domínio contínuo, composto por infinitos pontos, passa a ser representado por um conjunto finito de pontos convenientemente escolhidos. Como no processo de discretização resulta, no mínimo, em equações algébricas em número referente à quantidade de pontos escolhidos para representar o domínio original, se faz necessária a utilização de um

sistema de resolução dessas equações. Tais equações atualmente são facilmente tratadas pelos computadores eletrônicos.

Existem várias técnicas numéricas que empregam o processo de discretização e a eficiência dessas técnicas depende do tipo de problema tratado. Dentre as técnicas numéricas que podem ser destacadas, encontram-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF), que são os expoentes de uma família de métodos diferenciais. Ressalta-se também o Método dos Elementos Finitos (MEF), uma técnica integral que atualmente é a mais conhecida e empregada na engenharia.

Uma técnica integral que se consolidou graças a uma série de propriedades interessantes é o Método dos Elementos de Contorno (MEC) [1]. Nesta, apenas o contorno do problema necessita ser empregado, assim resultando importantes vantagens operacionais. Aliam-se a essa característica, a facilidade para simulação de problemas de domínios infinitos e semi-infinitos, problemas de fratura, casos de elevada concentração de tensões, regiões de contato e problemas de fronteira móvel, nos quais a redefinição de interfaces e o remanejamento de nós se fazem necessários [2,3]. A elevada precisão do MEC em muitos casos o credencia como uma técnica importante no contexto da engenharia atual.

A escolha de um método numérico é sempre um ponto discutível, pois são muitas as questões aí envolvidas e a pesquisa em torno deles está longe de cessar. De qualquer modo, a consolidação do MEC como opção eficiente em algumas categorias de problemas veio ratificar uma concepção mais arrojada com relação à superioridade de determinadas técnicas sobre outras. Tal supremacia é relativa, e depende do tipo de problema a ser analisado. Embora não seja o mais popular o Método dos Elementos de Contorno vem se firmando como uma técnica vantajosa e de considerável precisão.

## **I. 2- O METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM DINÂMICA**

A principal característica do MEC é a redução da dimensão do problema em uma unidade. Um problema tridimensional pode, então, ser representado por superfícies; do mesmo modo, um problema plano pode ser modelado por linhas. Para que isso

ocorra naturalmente, como primeira condição é preciso que os operadores diferenciais que modelam o problema físico tenham propriedades que permitam tal transformação, cujos procedimentos matemáticos similares se fundamentam na Teoria das Equações Integrais [4], tópico este de interesse às disciplinas da Física e do Cálculo Avançado. Desse modo, a dedução da formulação integral do MEC pode ser feita de modo imediato, empregando-se os princípios da teoria citada, quando os operadores diferenciais forem auto-adjuntos. Em termos práticos, resulta no emprego da técnica de integração por partes, juntamente com a aplicação do Teorema da Divergência, para obtenção de uma forma integral denominada forma inversa [4 ou 5]. A equação integral final, escrita exclusivamente em termos de valores de contorno, conforme se objetiva em qualquer aplicação com o MEC, é obtida também graças à escolha de funções auxiliares especiais, as soluções fundamentais, cujo detalhamento é feito mais à frente.

O MEC também pode ser formulado com base na teoria do Método dos Resíduos Ponderados [5], em que a solução aproximada é obtida a partir de minimização de resíduos no domínio e no contorno, usando funções especiais de ponderação, que também são as soluções fundamentais e suas derivadas.

A dedução da formulação integral do MEC utilizada nesse trabalho segue os princípios da Teoria das Equações Integrais, sendo feita empregando-se a técnica de integração por partes, juntamente com a aplicação do Teorema da Divergência, pois utiliza recursos operacionais amplamente difundidos na literatura [6] no tratamento de operadores do tipo do Laplaciano [7].

Conforme exposto, para problemas em que o operador diferencial que caracteriza a equação de governo é auto-adjunto, como é o caso da Equação de Laplace, a obtenção da forma inversa que é típica do MEC é bastante simples. Em certos problemas, no entanto, a obtenção da forma integral inversa pode ser complexa ou mesmo inacessível e o emprego de formulações alternativas que viabilizem a obtenção da forma inversa de modo aproximado é bastante interessante.

Nos casos da dinâmica escalar, em que o meio é homogêneo e isotrópico, é possível chegar a uma forma integral inversa empregando-se soluções fundamentais dependentes do tempo. Assim, nesse tipo de abordagem, a partir da equação diferencial de movimento, são feitas integrações espaciais e temporais [1] em

conjunto, aproveitando-se do fato de que também o operador derivada segunda é também auto-adjunto. Não obstante os excelentes resultados obtidos com essa formulação e outras variantes, tal abordagem é bastante complicada e também computacionalmente onerosa.

Uma das alternativas dentro do contexto do MEC para solução de problemas dinâmicos de modo simples consiste na formulação com Dupla Reciprocidade (FDR). Esta formulação, embora capaz de resolver problemas dependentes do tempo, emprega soluções fundamentais correspondentes aos problemas estacionários correlatos, vindo daí a sua simplicidade operacional.

A FDR foi inicialmente idealizada para a resolução de problemas de vibração livre [8], mas tem motivado numerosos trabalhos de pesquisa que objetivam criar modelos capazes de gerar resultados satisfatórios no estudo de problemas de cujos operadores não são auto-adjuntos ou dificultem a obtenção de uma forma integral exclusivamente em termos de valores de contorno. Nessa última categoria destacam-se os casos estacionários nos quais existem cargas de domínio, fontes, sorvedouros e outras ações correlatas. Já os problemas de difusão-advecção, estacionários ou transientes, são outros exemplos de aplicações bem sucedidas da FDR, nas quais se obtém aproximadamente um operador auto-adjunto, com o uso de funções auxiliares interpolantes, conforme é visto a seguir. O mesmo ocorre no campo da dinâmica, permitindo a solução de casos mais gerais, como os problemas não-homogêneos. Desta maneira, a FDR fornece novas alternativas de aplicação com o MEC na análise e simulação numérica de importantes classes de problemas.

No caso específico dos problemas transientes, a utilização da FDR induz a obtenção de um sistema matricial de equações análogo ao resultante da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF), com a diferença de que nenhuma integração no domínio é efetuada. Da mesma forma, o avanço temporal no MEC exige a utilização dos mesmos esquemas de integração incremental ou integração direta, esquemas bem conhecidos por conta do seu uso generalizado com o MEF.

### **I.3-MOTIVAÇÃO**

Embora seja bastante simples e flexível, a FDR em dinâmica possui algumas particularidades e imprecisões, devidas às aproximações inerentes à sua estrutura

matemática e ao fato de usar uma solução fundamental típica de um problema estacionário e tratar as derivadas temporais com o auxílio de esquemas incrementais. Assim, ainda existem muitos aspectos teóricos a serem examinados no contexto da formulação e seu aprimoramento deve ser feito com base no desenvolvimento de técnicas auxiliares que melhorem sua precisão, ratificadas por numerosas simulações computacionais que avaliem sua efetividade. Dentro desse contexto, neste trabalho toda a atenção é dedicada ao estudo da FDR aplicada à solução da Equação Escalar da Onda linear [9]. Neste contexto, pertinente à área da dinâmica dos sistemas, procura-se estudar problemas que, devido às suas características, exigem uma análise do fenômeno mecânico mais elaborado, pois freqüências e modos vibracionais mais altos são excitados e uma frente de onda típica pode ser identificada, imprimindo a propagação de alguma forma de energia. Da mesma maneira, em tais problemas são mais rigorosos os requisitos de robustez e eficiência exigidos dos algoritmos, esquemas e técnicas de aproximação utilizadas, quando comparados aos problemas de dinâmica em geral, quando apenas baixos modos de vibração são excitados.

Por outro lado, uma vez que na Equação Escalar da Onda é um caso particular da forma dinâmica da Equação de Navier [10], apenas alguns problemas mais básicos da elasticidade podem ser resolvidos, tais como: movimentos transversais de cordas e membranas, movimentos longitudinais e torcionais de barras etc. Entretanto, o caso escalar engloba também problemas importantes de outras áreas correlatas da engenharia, como os casos de propagação de ondas acústicas. Este caso tem diversas aplicações de grande interesse: inicialmente, no que diz respeito ao projeto de ambientes nos quais se deseja o bom isolamento acústico, que é a capacidade de impedir que a onda sonora (ou ruído) passe de um recinto a outro ou a absorção acústica, quando se trata de minimizar a reflexão das ondas sonoras num mesmo ambiente, diminuindo ou eliminando o nível de reverberação (que é uma variação do eco) num mesmo ambiente. Além disso, naturalmente, pode-se desejar o oposto, que é a propagação efetiva do som, com bom nível de inteligibilidade e níveis de pressão aceitáveis.

O estudo do fenômeno da propagação de ondas possui uma importante vertente, de maior complexidade, que diz respeito à análise sísmica. Muitas regiões sofrem constantemente a ação de terremotos. A análise dos sismos e dos seus efeitos

sobre as estruturas, solos ou vias de comunicação, pode fazer-se através da análise de propagação das ondas. Sabem-se da elasto-dinâmica que essas ondas se constituem em uma componente dilatacional (P) e outra distorcional (S) com velocidades de propagação diferentes, que dependem das constantes elásticas dos materiais. Costuma-se admitir a razão das velocidades das ondas S e P dependem exclusivamente do coeficiente de Poisson e que a velocidade das ondas S é uma função do módulo dinâmico de corte e da densidade. O modelo de propagação escalar pode contemplar a análise da componente dilatacional, envolvendo a pressão ou a dilatação volumétrica, e também alguns casos particulares de ondas distorcionais.

Aproveitando o conhecimento técnico e científico ganho na análise e domínio do fenômeno sísmico, uma outra aplicação similar conquistou enorme importância dentro da engenharia moderna: a modelagem geofísica com vistas à prospecção de petróleo. Os princípios mecânicos empregados na análise sísmica podem ser completamente aproveitados na identificação de lençóis de petróleo, usando métodos matemáticos que ofereçam uma expectativa de resposta dinâmica sensível à sua presença.

#### **I.4- OBJETIVO**

Este trabalho implementa testes numéricos envolvendo técnicas e estratégias relacionadas à FDR do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade, aplicada em problemas de escalares de dinâmica, visando uma melhor avaliação desses recursos auxiliares. São examinadas as características dos principais esquemas de avanço no tempo adequado à formulação, os aspectos positivos e negativos da introdução de pontos interpolantes internos, o efeito do uso de algumas diferentes classes de funções da base radial na interpolação típica da FDR e, por fim, examina a eficácia da técnica fundamentada no acréscimo de funções globais. Para se realizar os principais testes, foi escolhido um exemplo típico, com razoável nível de dificuldade – a barra submetida a carga axial de impacto - para se proceder à simulação numérica e comparar os resultados, uma vez que se dispõe da solução analítica desse problema. Posteriormente, outros problemas dinâmicos são resolvidos, considerando os procedimentos mais eficazes.

Todas as comparações numéricas efetuadas entre os procedimentos citados são devidamente discutidos.

## CAPÍTULO II

---

### EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTODINÂMICA

#### II.1 CASO GERAL

Baseando-se na Segunda lei de Newton, para corpos homogêneos obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico na forma [9]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.1})$$

Onde  $\sigma$  é o tensor das tensões, já considerada sua simetria,  $\rho$  é a massa específica  $B$  é o vetor das forças de corpo. Escrevendo-se a equação (II.1) em notação indicial tem-se:

$$\sigma_{ij,j} + \rho B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.2})$$

Considerando-se pequenas alterações entre a configuração original ou indeformada do corpo e as configurações posteriores ao seu movimento, pode-se escrever a relação cinemática entre as componentes do deslocamento  $u_i$  em termos de alongamentos e distorções na forma do tensor de pequenas deformações  $\varepsilon_{ij}$ , ou seja:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.3})$$

Para complementar, considere também o tensor de rotações num ponto do corpo, definido por:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (\text{II.4})$$

Para materiais isotrópicos, isto é, materiais nos quais as propriedades mecânicas são as mesmas independentemente da direção coordenada tomada no domínio, pode-se expressar a relação entre tensão e deformação por [10]:



$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.5})$$

Nesta última equação,  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamé, que podem ser expressas em termos das constantes usuais da engenharia na seguinte forma:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{II.6})$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.7})$$

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Substituindo-se a relação tensão-deformação (II.5) na equação de equilíbrio (II.2) tem-se:

$$\sigma_{ij,j} + \rho B_i = \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \rho B_i = \lambda \varepsilon_{kk,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \rho B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.8})$$

Substituindo-se a relação cinemática, equação (II.3), nessa última expressão, chega-se a:

$$\lambda \varepsilon_{jj,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \rho B_i = \lambda u_{j,ji} + 2\mu \left[ \frac{1}{2} (u_{i,jj} + u_{j,ij}) \right] + \rho B_i = (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho B_i \quad (\text{II.9})$$

Ou melhor:

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.10})$$

Reescrevendo a equação acima em notação vetorial tem-se:

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) + \mu \text{lap} \underline{u} + \rho \underline{B} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.11})$$

Esta última expressão é conhecida como Equação de Navier da Elasto-dinâmica, que reúne três equações em uma única, em termos do vetor deslocamento  $\underline{u}$ .

Explicitamente, para um deslocamento tridimensional tem-se:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right] + \rho B_1 + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \rho B_2 + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right] + \rho B_3 + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

## II.2 ONDAS DE DILATAÇÃO

Dos fundamentos do cálculo tensorial, sabe-se que a aplicação do operador divergente numa equação vetorial a transforma numa equação escalar. Fisicamente, tal operação à imposição de um campo irrotacional, a partir do qual pode se estabelecer uma função potencial, aspecto típico de um campo conservativo sem rotação. Assim sendo, aplicando-se o operador divergente na equação (II.11) na ausência de forças de corpo, tem-se:

$$(\lambda+\mu)\text{div}[\text{grad}(\text{div}\underline{u})]+\mu\text{div}[\text{lap}\underline{u}]=\rho\text{div}\ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.13})$$

Ou melhor:

$$(\lambda+\mu)\text{lap}[\text{div}(\underline{u})]+\mu\text{div}[\text{lap}\underline{u}]=\rho\text{div}\ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.14})$$

Considerando que para um vetor o divergente do laplaciano é igual ao laplaciano do divergente, tem-se:

$$(\lambda+\mu)\text{lap}[\text{div}(\underline{u})]+\mu\text{lap}[\text{div}(\underline{u})]=\rho\text{div}\ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.15})$$

$$(\lambda+2\mu)\text{lap}[\text{div}(\underline{u})]=\rho\text{div}\ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.16})$$

Com base na equação (II.3) define-se o escalar dilatação volumétrica  $\theta$  como sendo:

$$\theta = \varepsilon_{kk} = u_{k,k} \quad (\text{II.17})$$

Ou, de maneira equivalente:

$$\theta = \text{div}(\underline{u}) \quad (\text{II.18})$$

Substituindo a equação (II.18) na equação (II.16) pode-se escrever:

$$(\lambda+2\mu)\text{lap}(\theta)=\rho\ddot{\theta} \quad (\text{II.19})$$

Que equivale à equação (II.13) escrita em termos da dilatação volumétrica. Assim, considerando apenas conteúdos dilatacionais, ou seja, a propagação de ondas de dilatação, pode-se escrever a equação bidimensional da onda em termos da dilatação volumétrica na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = \frac{\rho}{(\lambda+2\mu)} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \quad (\text{II.20})$$

Nota-se que a variável básica nessa equação de governo é escalar, correspondendo à dilatação volumétrica. Essa grandeza se relaciona com as tensões atuantes através da tensão média ou esférica  $p$ , definida por:

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (\text{II.21})$$

Naturalmente, a equação (II.20) pode ser escrita usando como variável básica a tensão média. A relação entre a tensão média e a dilatação volumétrica é dada pela seguinte equação [10]:

$$p = K\theta \quad (\text{II.22})$$

O módulo de Bulk  $K$  também é chamado de módulo de rigidez volumétrica se relaciona com as constantes usuais de engenharia pela fórmula:

$$K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \quad (\text{II.23})$$

Tendo a tensão média como a variável básica, a equação (II.19) pode ser escrita da seguinte forma:

$$(\lambda + 2\mu)\text{lap}\left(\frac{p}{K}\right) = \frac{\rho}{K}\ddot{p} \quad (\text{II.24})$$

Trabalhando a equação (II.24) em coordenadas cartesianas pode-se escrever:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right) = \frac{\rho}{K}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{II.25})$$

Ou melhor:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{II.26})$$

Assim, esta última equação, escrita em termos da tensão média  $p$ , representa o fenômeno de propagação de ondas de dilatação.

### II.3- ONDAS DE DISTORÇÃO

Para se obter a equação de governo de um problema no qual a deformação produzida pelas ondas seja somente de distorção e rotação, basta considerar a

dilatação volumétrica nula na equação (II.11), repetida aqui por conveniência, em termos da dilatação volumétrica, na ausência de forças de corpo:

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\theta) + \mu \text{lap} \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.27})$$

Assim sendo:

$$\mu \text{lap} \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.28})$$

Explicitamente em três dimensões:

$$\begin{aligned} \mu \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \mu \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \mu \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

É possível ainda escrever a equação de movimento para ondas de distorção de modo alternativo. Para tanto utiliza-se dois resultados bastante conhecidos na literatura, os quais são apresentados a seguir:

$$\text{lap} \underline{u} = \text{grad}(\text{div} \underline{u}) - \text{rot}(\text{rot} \underline{u}) \quad (\text{II.30})$$

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} (\text{rot} \underline{u}) \quad (\text{II.31})$$

Onde a primeira equação representa uma identidade vetorial e a segunda corresponde à definição do vetor rotação  $\underline{\omega}$ .

Substituindo as equações (II.30) e (II.31) na equação (II.11), tem-se:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) - 2\mu \text{rot} \underline{\omega} + \rho \underline{B} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.32})$$

Que na ausência de forças de corpo resulta:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) - 2\mu \text{rot} \underline{\omega} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.33})$$

Admitindo-se a dilatação volumétrica nula, tem-se:

$$-2\mu \text{rot} \underline{\omega} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.34})$$

Aplicando o operador rotacional na equação anterior, resulta:

$$-2\mu[\text{rot}(\text{rot}\underline{\omega})] = \rho\text{rot}(\ddot{\underline{u}}) \quad (\text{II.35})$$

Considere a equação (II.30), aplicada ao vetor de rotação  $\underline{\omega}$  :

$$\text{lap}(\underline{\omega}) = \text{grad}[\text{div}(\underline{\omega})] - \text{rot}[\text{rot}(\underline{\omega})] \quad (\text{II.36})$$

Sabe-se que o divergente do vetor rotacional é nulo, ou seja:

$$\text{div}(\underline{\omega}) = 0 \quad (\text{II.37})$$

Assim, a equação (II.36) se reduz a:

$$\text{lap}(\underline{\omega}) = -\text{rot}[\text{rot}(\ddot{\underline{u}})] \quad (\text{II.38})$$

Substituindo a equação (II.38) na equação (II.35) obtém-se:

$$2\mu\text{lap}(\underline{\omega}) = \rho[\text{rot}(\ddot{\underline{u}})] \quad (\text{II.39})$$

Sabendo-se que, por definição:

$$\text{rot}(\ddot{\underline{u}}) = 2\ddot{\underline{\omega}} \quad (\text{II.40})$$

Substituindo-se a equação (II.40) em (II.39), pode-se escrever:

$$\mu[\text{lap}\underline{\omega}] = \rho\ddot{\underline{\omega}} \quad (\text{II.41})$$

Reescrevendo em coordenadas cartesianas a equação (II.41), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \underline{\omega}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \underline{\omega}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \underline{\omega}}{\partial x_3^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \underline{\omega}}{\partial t^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \underline{\omega}}{\partial t^2} \quad (\text{II.42})$$

Diferentemente da equação de propagação de ondas de dilatação, esta equação é vetorial. Casos particulares em forma escalar podem ser obtidos, mas de acordo com hipóteses que consideram aspectos mecânicos e geométricos. Além disso, a velocidade de propagação  $c_2$  da equação (II.42) difere da velocidade de propagação  $c_1$  das ondas de dilatação.

A partir da equação geral da elasto-dinâmica, equação (II.12), são abordados a seguir alguns casos particulares.

## II.4 BARRA TRACIONADA DE SECÇÃO CONSTANTE

O caso mais simples da elasto-dinâmica, que se enquadra dentro na teoria escalar é o problema da propagação de ondas planas longitudinais em uma barra. Essa ação é produzida desde que se considere o carregamento imposto uniformemente distribuído, ou seja, as tensões distribuídas uniformemente na seção, de modo que a onda mecânica trafega exclusivamente na direção axial da barra.

Considere-se, então, ausência de forças de corpo e a variável básica  $u$  representando o deslocamento axial, em que vigoram as seguintes condições:

$$u = u_1(x_1, t)$$

$$u_2 = u_3 = 0$$

$$v = 0$$

A equação de movimento se reduz a:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.43})$$

Ou melhor:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.44})$$

Usando-se as equações (II.6) e (II.7) para explicitar as constantes de Lamé em termos das constantes usuais de engenharia, pode-se reescrever a equação (II.44) como sendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.45})$$

Definindo:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{II.46})$$

Assim, chega-se a equação escalar da onda, dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.47})$$

Esta equação representa a propagação unidimensional de uma onda plana em meios homogêneos e isotrópicos.

## II.5- BARRA TRACIONADA DE SECÇÃO VARIÁVEL

A teoria escalar também contempla a análise simplificada de barras de seção linearmente variável, nas quais se admitem que atuem apenas tensões normais axiais, variando gradativamente. A equação de governo dinâmica nesse caso, de acordo com Graff [9], é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \ddot{u} \quad (\text{II.48})$$

Onde naturalmente:

$$u = u_1(x_1, t)$$

$$u_2 = u_3 = 0$$

$$v = 0$$

A similaridade entre o operador diferencial que atua no lado esquerdo da equação (II.48) e o operador laplaciano em coordenadas polares é completa, de modo que pode-se resolver o problema da barra de seção variável tal como se resolve um problema escalar no qual há simetria circunferencial, ou seja, nada varia angularmente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \ddot{u} \quad (\text{II.49})$$

O deslocamento radial  $u_r = u$  é, então, a variável básica do problema. No decorrer desse trabalho serão mostrados alguns resultados para esse problema.

## II.6-MEMBRANA ELÁSTICA PLANA

Outro interessante problema de elasto-dinâmica em que se pode encontrar uma forma escalar da equação de movimento é o caso da propagação de ondas transversais em cordas e membranas. De acordo com Graff [9], o movimento de qualquer partícula nesses elementos estruturais é perpendicular à direção de

propagação da onda, o que resulta em tal movimento a ser denominado de propagação de ondas planas. Assim sendo, tem-se:

$$u = u_3(x_1, x_2, t)$$

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$v = 0$$

Nessas condições, a equação (II.12) se reduz a:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.50})$$

Ou melhor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.51})$$

Pode-se notar que a velocidade de propagação nesse caso é  $c_2$ , a mesma obtida para a equação da elasto-dinâmica para ondas de distorção, o que merece alguns comentários. Em problemas de cordas ou membranas a flexibilidade estrutural é representada pela tração  $T$  que deve, então, nesse caso tomar o lugar do módulo de elasticidade transversal  $\mu$  na equação (II.42). As ondas planas geradas, entretanto, não são ondas de distorção, ou seja, a propagação no meio ocorre sem que haja distorção na membrana; mas, o movimento transversal é um movimento de rotação. Assim, no caso de cordas e membranas, as ondas geradas não são ondas dilatacionais nem distorcionais, mas sim ondas nas quais há rotação pura das partículas, além, naturalmente, do deslocamento transversal  $u$ .

## II.7- RELAÇÃO ENTRE $C_1$ E $C_2$

Sendo  $c_1$  e  $c_2$  definido por:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{II.52})$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{II.53})$$

Substituindo a equação (II.6) e (II.7) em (II.52) obtêm-se:



$$c_1 = \sqrt{\frac{\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{(1+\nu)}}{\rho}} \quad (\text{II.54})$$

Substituindo a equação (II.7) em (II.53) obtêm-se:

$$c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (\text{II.55})$$

A relação entre  $c_1$  e  $c_2$  pode ser escrito como segue:

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}} \quad (\text{II.56})$$

Conclui-se que a relação entre as velocidades depende apenas do coeficiente de Poisson e que a rotação se propaga com uma onda de velocidade mais lenta do que a dilatação.

## CAPÍTULO III

---

### FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE APLICADA A PROBLEMAS DA ELASTO-DINÂMICA ESCALAR

#### III.1 – FORMULAÇÃO GERAL BÁSICA

Este trabalho restringe-se à simulação de problemas uni ou bidimensionais modelados pela equação da escalar da onda, equação (II.24), repetida aqui por conveniência, e escrita em termos de um potencial  $u$ , que pode significar deslocamento, flecha, pressão, dilatação ou qualquer outra grandeza escalar. Por sua vez, a velocidade de propagação  $c$  é gerada pelas propriedades físicas e geométricas do meio contínuo e também pelo tipo de onda nele admitida, de acordo com hipóteses a serem consideradas. Assim sendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{III.1})$$

A partir daqui, o equacionamento e toda a manipulação matemática é feita utilizando-se da notação indicial simples, associada ao sistema de coordenadas cartesianas, o que torna sua apresentação bastante sucinta e de fácil compreensão. Assim sendo, em notação indicial, a equação anterior fica:

$$u_{,ij} = \frac{1}{c^2} \ddot{u} \quad (\text{III.2})$$

Para a correta caracterização matemática do problema, considere um sistema bidimensional no qual seu domínio  $\Omega(X)$ , onde  $X=X(x_i)$  representa as variáveis espaciais do campo escalar, delimitado com relação à vizinhança através de um contorno  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$ , conforme apresentado na figura a seguir:

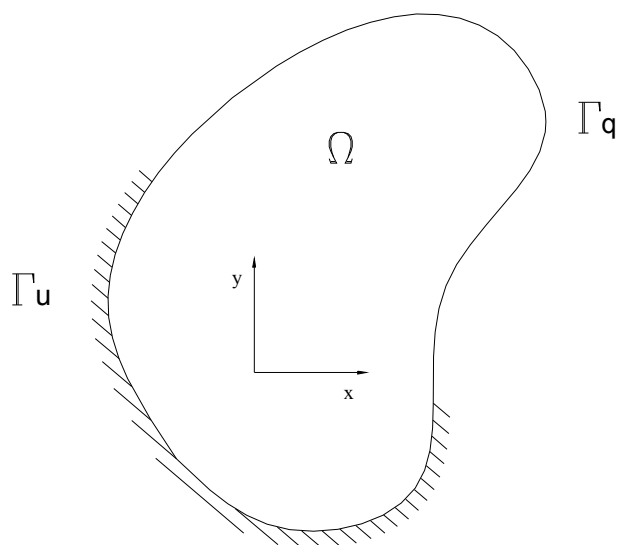


Figura III.1 – Domínio bidimensional  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$

As condições de contorno aqui pertinentes, válidas para qualquer tempo  $t$ , são de dois tipos: condições essenciais, também conhecidas na literatura como condições de Dirichlet, nas quais a variável básica é prescrita:

$$u(X,t) = \bar{u}(X,t) \quad \text{para } X \in \Gamma_u \quad (\text{III.3})$$

E naturais, também conhecidas como condições de Neumann, em que a derivada normal do potencial  $u$  é conhecida:

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}(X,t)}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{para } X \in \Gamma_q \quad (\text{III.4})$$

Nos problemas escalares de elasto-dinâmica,  $q$  usualmente adquire o significado de tensão aplicada no contorno, enquanto nos casos de transferência de calor pode ser interpretado como um fluxo imposto de energia difusiva. Em cada problema físico seu significado se modifica. No caso da acústica, sendo a pressão o potencial,  $q$  pode ser associado a uma componente de velocidade.

Um problema físico estacionário, modelado matematicamente, somente é bem posto se, além da equação de governo, dispõe-se em cada ponto da fronteira dos valores prescritos de condições de contorno, que podem ser dos dois tipos citados (outras condições possíveis e destacadas na literatura são combinações dessas). Como o

problema em questão é dinâmico, condições iniciais também são devidas. O lado direito da equação (III.1) da onda possui uma derivada segunda com relação ao tempo, de modo que duas condições iniciais distintas são necessariamente requeridas, dadas por:

$$u(X,0) = u_o(X) \quad \text{para } X \in \Omega \quad (\text{III.5})$$

E também pela derivada do potencial com relação ao tempo, expressa por:

$$\dot{u}(X,0) = v_o(X) \quad \text{para } X \in \Omega \quad (\text{III.6})$$

Bem posto o problema, o ponto de partida para a abordagem pelo MEC [4,5], de acordo com os fundamentos da teoria das equações integrais, abordagem essa aqui escolhida, consiste no estabelecimento da equação escalar da onda numa forma integral, usando uma função auxiliar  $u^*(\xi, X)$ , melhor discutida a seguir, resultando na seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^*(\xi; X) d\Omega \quad (\text{III.7})$$

Nota-se claramente que o lado esquerdo da equação (III.1), é representado pelo operador Laplaciano, enquanto no lado direito vigora uma derivada segunda com relação ao tempo  $t$  da função potencial. Na FDR, uma vez que se empregam soluções fundamentais independentes do tempo e apenas integrações espaciais são realizadas no modelo diferencial, a abordagem do problema elasto-dinâmico pode ser feita em duas partes: primeiramente, opera-se o lado esquerdo da equação (III.7), tal como se faz na análise de problemas estacionários; posteriormente, trata-se do termo dependente do tempo usando-se, então, efetivamente, os recursos de interpolação que caracterizam a FDR.

## III.2 – TRATAMENTO MATEMÁTICO DO TERMO ESPACIAL

O tratamento da integral no domínio do laplaciano de uma função escalar é um procedimento operacional básico, bem conhecido na literatura do MEC, e aqui exposto seguindo os fundamentos da Teoria das Equações Integrais.

Conforme mencionado, o lado esquerdo da equação da onda (III.1) é expresso pela Equação de Laplace, típica de problemas estacionários. Sua integral é apresentada a seguir por conveniência como LE:

$$LE = \int_{\Omega} u_{,ii} u^* (\xi; X) d\Omega \quad (III.8)$$

O primeiro passo consiste em aplicar o esquema de integração por partes na equação (III.8), de modo a reescreve-la da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (III.9)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência na primeira integral de domínio do lado direito da equação (III.9) obtém-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (III.10)$$

Aplicando-se novamente a integração por partes na integral de domínio que resta do lado direito da equação (III.10), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} (u u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega \quad (III.11)$$

Aplicando novamente o Teorema da Divergência na primeira integral de domínio da do lado direito da equação anterior, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u u^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega \quad (III.12)$$

A equação (III.12) representa a forma integral inversa da Equação de Laplace. Para se eliminar a integral de domínio que resta da equação (III.10) consideram-se as peculiaridades do problema fundamental, que serve de base para geração do MEC. Este problema será discutido detalhadamente a seguir.

### III.3–SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A função auxiliar  $u^*(\xi, X)$ , cuja expressão matemática é apresentada mais à frente, forma um conjunto de funções linearmente independentes para diferentes valores de  $\xi$  tomadas no espaço bidimensional  $X$ . Possui também propriedades de

continuidade que garantem a integrabilidade da equação (III.8), ou seja, a integral em apreço é sempre definida e não divergente, embora sua convergência frequentemente seja alcançada num sentido especial, denominado de Valor Principal de Cauchy [1], por conta de singularidades de seus núcleos.

O bom desempenho numérico do MEC pode ser devidamente creditado às propriedades da função  $u^*(\xi, X)$ , empregada anteriormente como função auxiliar no núcleo da equação (III.7). Ao contrário de outros métodos, que empregam polinômios e outras funções não estreitamente vinculadas com a solução do problema que se quer resolver, o MEC emprega uma função relacionada ao problema em questão. Assim, a função  $u^*(\xi, X)$  é a solução de um problema escalar correlato, cujo domínio é infinito e no qual existe uma fonte, ou ação externa unitária singular, aplicada num ponto  $\xi$  do domínio  $X$ .

Naturalmente, este problema correlato vai depender do tipo de problema que se deseja resolver. Brebbia e Walker [4] apresentam algumas soluções fundamentais para problemas escalares. Neste trabalho, que aborda o problema dinâmico em materiais homogêneos pela formulação com Dupla Reciprocidade, a solução fundamental se expressa através de uma equação de Poisson, no qual o termo independente é representado por uma função Delta de Dirac, conforme apresentado a seguir:

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi, X) \quad (\text{III.13})$$

Conforme ilustrado na figura (III.2), a ação externa se constitui de uma carga ou fonte concentrada de valor unitário aplicada em um ponto  $\xi$  situado em um meio infinito.

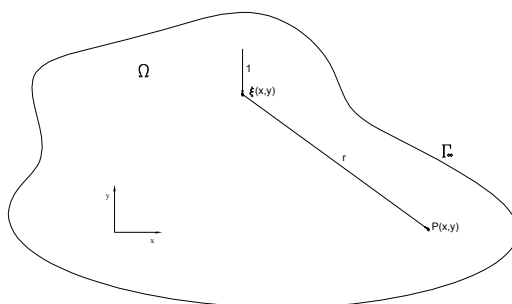


Figura III.2 – Caracterização geométrica do problema fundamental correlato

Sabe-se que a distribuição do Delta de Dirac apresenta a seguinte propriedade, caso o ponto  $X$  pertença ao domínio  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} f(X)\Delta(\xi, X)d\Omega = f(\xi) \quad (\text{III.14})$$

Deste modo, o posicionamento de  $\xi$  é importante para se determinar precisamente a equação integral clássica do MEC que pode ser escrita, de modo geral, como:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}u^*d\Omega = \int_{\Gamma} qu^*d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^*d\Gamma - C(\xi)u(\xi) \quad (\text{III.15})$$

Sendo  $q$  e  $q^*$  as derivadas normais do potencial e da solução fundamental respectivamente, ou seja:

$$q(\xi, X) = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{III.16})$$

$$q^*(\xi, X) = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad (\text{III.17})$$

Na equação (III.15),  $C(\xi)$  é um fator que ajusta o valor de  $u(\xi)$  na sentença integral, pois seu valor depende da localização do ponto  $\xi$  com relação ao domínio  $\Omega(X)$ . É muito comum com o MEC considerar-se o ponto  $\xi$ , usualmente denominado de ponto fonte, situar-se sobre o contorno ou mesmo fora dele. Pode ser demonstrado que  $C(\xi)$  toma valores 1,  $\frac{1}{2}$  e zero, conforme o ponto  $\xi$  esteja localizado respectivamente no interior do domínio, sobre um contorno suave ou fora do domínio  $\Omega$ . Maiores detalhes podem ser encontrados em diversas referências, como Brebbia [4,5], que tratam esta questão com o devido formalismo matemático.

Para problemas bidimensionais envolvendo contornos angulosos [1] são considerados os seguintes valores de  $C(\xi)$ :

$$C(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (\text{III.18})$$

O coeficiente  $\alpha$  corresponde ao ângulo entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso, conforme mostra a figura III.3 a seguir:

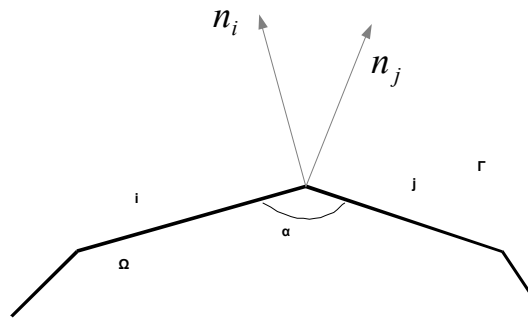


Figura III.3 – Caracterização geométrica de um contorno anguloso

A equação integral inversa inclui valores da solução fundamental  $u^*(\xi, X)$  e sua derivada normal  $q^*(\xi, X)$ . Os valores explícitos de  $u^*(\xi, X)$  e sua derivada normal, para os problemas bidimensionais aqui tratados são apresentados a seguir [5]:

$$u^*(\xi, X) = \left( \frac{-1}{2\pi} \right) \ln[r(\xi, X)] \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r(\xi, X)} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) \quad (\text{III.20})$$

### III.4–TRATAMENTO MATEMÁTICO DO TERMO TEMPORAL

Conforme exposto, após o tratamento do lado esquerdo da equação da onda, um procedimento similar é agora apresentado para o seu lado direito, representado a seguir por conveniência como LD:

$$\text{LD} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{III.21})$$

Este termo é aqui tratado pela Formulação com Dupla Reciprocidade, inicialmente proposta por Nardini e Brebbia [8] para solução de problemas de autovalor. Uma vez constatada suas qualidades nesse caso, a FDR ampliou o campo de aplicação do MEC, permitindo abordar com relativa simplicidade uma série de problemas anteriormente não acessíveis às formulações mais clássicas, particularmente os casos envolvendo ações de domínio, escoamento com convecção forçada,



processos transientes e comportamento dinâmico. Existe uma grande diferença conceitual entre a FDR e as formulações clássicas, mas a principal delas consiste no fato de que no lugar de se utilizar soluções fundamentais correlatas, a Dupla Reciprocidade usa soluções fundamentais mais simples e funções auxiliares de interpolação para então estabelecer uma equação integral de contorno. Mais especificamente, a FDR aproveita-se da simplicidade matemática da solução fundamental estacionária, associada a equação de Poisson, para resolver casos dependentes do tempo e outros.

Por outro lado, as interpolações realizadas pelas funções auxiliares produzem mais uma fonte de aproximação, além daquelas típicas dos métodos numéricos produzidas pela discretização do domínio, e pode acarretar a imprecisão do modelo numérico. Pesquisas empreendidas no sentido de obter melhoria dos resultados, principalmente através do uso de funções mais eficientes, mostraram que o erro cometido pelas funções auxiliares pode ser reduzido até limites aceitáveis para aplicações de engenharia. No entanto, se tratando de problemas de dinâmica, ainda é necessário algum trabalho investigativo para se conseguir trazer os erros a níveis satisfatórios.

Além da simplicidade com que trata os casos escalares, especialmente os casos dependentes do tempo, outra característica que não deve ser omitida entre as importantes contribuições da formulação com Dupla Reciprocidade é a flexibilidade. Graças a este atributo é possível gerar formulações do Método dos Elementos de Contorno mais acessíveis em problemas cujo operador diferencial da equação de governo é relativamente complicado, como os casos de convecção forçada[12] e os casos dinâmicos com materiais não homogêneos [13].

A aplicação do procedimento característico da formulação com a Dupla Reciprocidade parte da consideração de que o termo dinâmico da equação (III.21) pode ser interpretado como se fosse uma ação de domínio. A FDR propõe substituir a ação de domínio  $ii$  por uma soma finita composta por novas funções auxiliares  $\tilde{\alpha}^j F^j$ , onde  $\tilde{\alpha}^j$  são coeficientes inicialmente desconhecidos e  $F_j$  são funções de aproximação cuja quantificação depende de pontos  $X^j$  escolhidos tanto no contorno, quanto no interior do domínio. Assim, a seguinte aproximação é considerada [14]:

$$\ddot{u}(X, t) \cong \ddot{\alpha}^j(t) F^j(X) \quad (\text{III.22})$$

O procedimento exposto assemelha-se ao método de separação de variáveis e de certo modo, esta estrutura serve para promover certas operações necessárias, conforme será visto mais à frente. No entanto, o aspecto mais importante contido na expressão (III.22) é a interpolação aí introduzida, na qual se situa a maior fonte de aproximação produzida pela formulação, comentados anteriormente.

Define-se uma nova função  $\Psi^j$ , como sendo uma primitiva de  $F^j$ , conforme a equação (III.23) a seguir:

$$\Psi_{,ii}^j = F^j \quad (\text{III.23})$$

Deste modo, a ação de domínio  $\ddot{u}$  pode ser escrita como se segue:

$$\ddot{u} = \ddot{\alpha}^j \Psi_{,ii}^j \quad (\text{III.24})$$

Substituindo-se a equação (III.24) na equação(III.7) pode-se, então, escrever:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{\alpha}^j \Psi_{,ii}^j u^* d\Omega \quad (\text{III.25})$$

Percebe-se nesta última equação que o mesmo operador diferencial que atuou no do lado esquerdo da equação de governo (equação (III.8)) – o Laplaciano - atua também do lado direito. Deste modo, graças ao artifício imposto pela FDR as estruturas matemáticas que aparecem nas parcelas estacionária e dinâmica são equivalentes. Assim sendo, aplicam-se as mesmas transformações matemáticas que conduziram a equação (III.8) a se expressar unicamente em termos de valores de contorno. Desta forma a equação (III.25) fica:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \ddot{\alpha}^j \left[ \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi^j q^* d\Gamma - C(\xi) \psi^j(\xi) \right] \quad (\text{III.26})$$

Deve-se ressaltar que  $\eta^j$  e  $\psi^j$  são funções conhecidas, ou seja, não dependem da solução do problema, dependendo apenas das funções  $F^j$ , que podem ser escolhidas arbitrariamente.

Assim, um aspecto importante surge com referência à representatividade das funções escolhidas, foco principal desse trabalho. Funções bem simples e flexíveis devem ser preferidas, pois aquelas com elevado decaimento ou crescimento, singularidades ou complexidade não serão adequadas. Todo um estudo sobre o significado analítico e geométrico destas funções, bem como os testes baseados na experiência para avaliação da precisão de várias delas, pode ser encontrado na literatura [15,16].

Uma interessante opção para estas funções é aquela que determina a distância euclidiana entre dois pontos. É o tipo de função mais empregada. Assim sendo:

$$F^j(X) = r(A^j, X) \quad (\text{III.27})$$

Referenciando-a em coordenadas polares, com origem em  $A^j$ , a equação (III.23) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi^j(X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^j(X)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi^j(X)}{\partial \theta^2} = r \quad (\text{III.28})$$

Sendo  $\Psi^j$  independente de  $\theta$ , a equação (III.28) passa a ser:

$$\frac{\partial^2 \Psi^j(X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^j(X)}{\partial r} = r \quad (\text{III.29})$$

Trabalhando a equação diferencial (III.29), pode-se obter uma solução particular conforme mostrada:

$$\Psi^j = \frac{r^3}{9} \quad (\text{III.30})$$

Dessa maneira as funções  $\eta^j$  serão:

$$\eta^j = \frac{r^2}{3} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{III.31})$$

Neste trabalho foram usadas diversas funções que serão mostradas mais adiante, junto com seus resultados e comparações.

Nesse ponto, a equação de governo na forma integral encontra-se na forma:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - C(\xi)u(\xi) = \frac{1}{c^2} \ddot{\alpha}^j$$

$$\left[ \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi^j q^* d\Gamma - C(\xi)\Psi^j(\xi) \right] \quad (\text{III.32})$$

### III.5-DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA

No MEC, depois de obtida a formulação integral inversa, equação (III.32), o próximo passo para a resolução de um problema é a discretização do contorno. Devido ao fato de o MEC trabalhar com uma equação integral na forma inversa, que é equivalente a uma sentença de resíduos ponderados onde se minimizam os erros cometidos na possível desobediência das condições de contorno essenciais e naturais, pode-se utilizar uma função constante para a aproximação da função potencial [4]. Isto permite que se possam utilizar elementos constantes para a discretização do contorno, sem necessidade de satisfazer a continuidade da função potencial e de sua derivada entre os elementos de contorno.

Para as simulações realizadas neste trabalho foram utilizados elementos de contorno constantes no processo de discretização. O elemento de contorno constante apresenta-se como o mais fácil de implementar, mas nem por isso inadequado nas análises realizadas junto aos problemas de campo escalar. Diversos trabalhos têm mostrado a eficiência satisfatória deste tipo de elemento, não obstante a sua simplicidade [3].

E apresentado agora, de maneira bastante sucinta, o procedimento geral de discretização do contorno considerando tal tipo de elemento.

A figura (III.4) apresenta o esquema de um elemento de contorno constante.

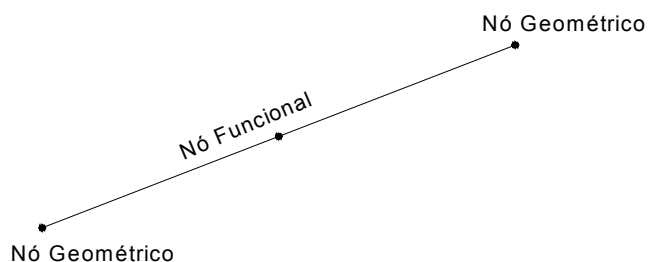


Figura III.4 – Elemento de contorno constante

Para melhor caracterização dos elementos, denominam-se de nós geométricos aqueles que são responsáveis pela conectividade geométrica dos mesmos, enquanto são chamados de nós funcionais os que representam o valor da propriedade, função potencial ou sua derivada, no ponto.

A figura III.5 representa a fronteira de um domínio bidimensional, discretizado em elementos de contorno constantes:

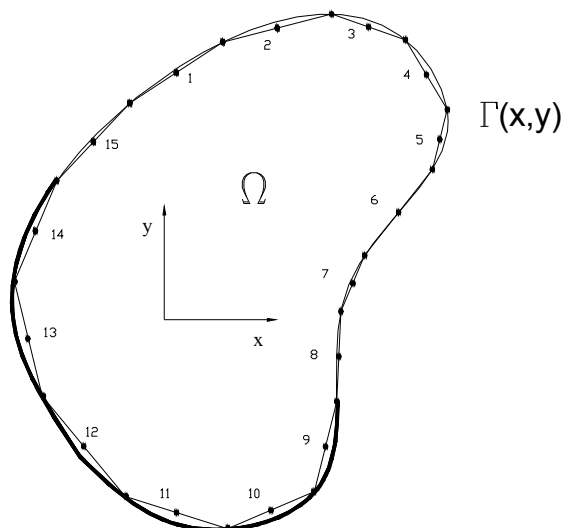


Figura III.5 – contorno discretizado em elementos de contorno constante

Pode-se então escrever para um elemento genérico:

$$\Gamma(x, y) = \sum_{k=1}^n \Gamma^k \quad (\text{III.33})$$

Onde  $\Gamma^k$  representa o elemento de contorno de número  $k$  e  $n$  é o número de elementos de contorno da malha em questão.

Assim, aproximando-se o contorno por uma série de segmentos retos onde as funções auxiliares de interpolação também são consideradas constantes ao longo de cada elemento  $\Gamma_j$ , são aproximadas, ou seja, serão consideradas constantes. Sendo assim, podemos reescrever a equação (III.32) da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma_k - C(\xi) u(\xi) = \frac{1}{c^2} \quad (\text{III.34})$$

$$\sum_{j=1}^{N+L} \ddot{\alpha}^j \left[ \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \eta^j u^* d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \Psi^j q^* d\Gamma_k - C(\xi) \Psi^j(\xi) \right]$$

Os índices  $N$  representam o número de elementos de contorno e  $L$  o número de pontos interpolantes da função  $F^j$ . Os pontos de interpolação são considerados coincidentes com os pontos nodais, por simplicidade. É interessante colocá-los também no interior do domínio, para melhorar a representação das ações de domínio [17]. São mostrados resultados com pontos de interpolação inseridos no interior do domínio no decorrer deste trabalho.

São conhecidas as funções que aparecem nos integrandos da equação (III.34), de forma que estas integrais podem ser realizadas, especialmente através de técnicas numéricas como a quadratura de Gauss a mais usada com o Método dos Elementos de Contorno.

Localizando os pontos  $\xi$  sobre cada um dos elementos e realizando-se as integrais expostas na equação (III.34), gera-se um conjunto de  $n$  equações lineares que pode ser escrito matricialmente da seguinte forma:

$$Hu - Gq = \frac{1}{c^2} (H\Psi - G\eta)\ddot{\alpha} \quad (\text{III.35})$$

As mesmas matrizes  $H$  e  $G$  que aparecem do lado esquerdo da equação (III.35) agora aparecem do lado direito, além dessas matrizes duas novas matrizes  $\Psi$  e  $\eta$

que correspondem as matrizes formadas pelas funções dadas nas equações (III.30) e (III.31) respectivamente, surgem após a aplicação da Dupla Reciprocidade. Além das matrizes, surge o vetor  $\ddot{\alpha}$  que é ainda desconhecido e deve ser eliminado para ser possível a resolução do sistema. Para isso recorrer-se a equação (III.22), que pode ser aplicada ao contorno discretizado, onde o número de funções de interpolação é igual ao número de nós de discretização, resultando na seguinte equação matricial:

$$P = F\ddot{\alpha} \quad (III.36)$$

Onde cada elemento do vetor P corresponde ao valor nodal de ação do domínio e a matriz F corresponde à matriz formada pelas funções de interpolação. De acordo com a equação (III.22), pode-se escrever:

$$\ddot{u} = F\ddot{\alpha} \quad (III.37)$$

Multiplicando os dois lados da equação (III.37) por  $F^{-1}$  tem-se:

$$F^{-1}\ddot{u} = F^{-1}F\ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} = F^{-1}\ddot{u} \quad (III.38)$$

Substituindo a equação (III.38) na equação (III.35), pode-se escrever:

$$Hu - Gq = \frac{1}{c^2}(H\Psi - G\eta)\ddot{u}F^{-1} \quad (III.39)$$

Definindo-se:

$$M = [G\eta - H\psi]F^{-1} \quad (III.40)$$

Substituindo a equação (III.40) na equação (III.39) temos o seguinte sistema matricial:

$$M\ddot{u} + Hu = Gq \quad (III.41)$$

A equação (III.41) é uma equação matricial algébrica apenas no que se refere às variáveis espaciais. É necessário realizar um procedimento de discretização também com relação à variável tempo, ou seja, a discretização temporal e feita através de métodos de integração direta ou métodos de integração passo a passo, que fazem a

solução incremental avançar no tempo. No presente trabalho o tratamento da derivada temporal é por dois dos mais conhecidos métodos de avanço, cujos algoritmos serão mostrados no próximo capítulo.

Deve-se ressaltar que na etapa de integração, aparecem matrizes e vetores associados há instantes futuros, presentes e passados. Considerando-se a aplicação das respectivas condições de contorno conhecidas, faz-se uma transposição dos valores incógnitos junto a uma matriz de coeficientes no instante futuro, enquanto os valores prescritos formam um vetor de termos independentes que se juntam as matrizes nos instantes presente e passado. Deste modo, a equação (III.41) dá origem a um sistema de equações que pode ser implementado e resolvido computacionalmente em cada passo de integração.



## CAPITULO IV

---

### SIMULAÇÕES E TESTES NUMÉRICOS

#### IV.1-ESQUEMAS DE AVANÇO NO TEMPO

A discretização temporal é feita numa etapa posterior à discretização espacial, através de operadores de diferenças finitas adaptados e, posteriormente, resolvidos através de métodos de integração direta. Estes métodos buscam definir uma relação adequada que permita calcular valores futuros a partir de resultados anteriores de uma forma matematicamente consistente. Em outros termos, o que se busca na construção de algoritmos de integração passo a passo é definir uma relação de recorrência adequada, que permita a partir dos valores conhecidos no instante anterior ( $t=t_n$ ) determinarem os valores das variáveis dependentes no instante seguinte ( $t=t_{n+1}$ ). Essa relação é chamada operador de aproximação. Assim enquanto a solução exata satisfaz a equação diferencial em qualquer instante  $t \in [0, t_f]$ , para a solução aproximada deseja-se que ela satisfaça essa equação em instantes discretos,  $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_f$ . O intervalo de tempo  $\Delta t$ , define a discretização e é definido como passo de integração.

O comportamento dos esquemas tradicionais de avanço no tempo no MEC é similar ao observado no Método dos Elementos Finitos, guardando boa parte das mesmas características numéricas, mas havendo, contudo, algumas particularidades bastante importantes.

O primeiro ponto em comum é o interesse em se escolher esquemas incondicionalmente estáveis. A estabilidade de um algoritmo de incremental associado a uma equação de equilíbrio dinâmico consiste na integração precisa da sua resposta considerando-se as mais altas componentes de frequência aí presentes, de modo que mesmo essas altas componentes não sendo bem representados, os erros originados por elas não cresçam durante o processo de

integração. A estabilidade é garantida se o passo de integração é suficientemente pequeno para integrar precisamente as componentes de resposta dadas pelos altos modos associados. Já os esquemas incondicionalmente estáveis são matematicamente constituídos de forma a limitar o crescimento dos erros produzidos pelas componentes modais mais elevadas.

Assim, um esquema condicionalmente estável requer um valor mínimo de incremento de tempo para poder integrar as equações de movimento sem problemas de instabilidade numérica. Esse valor mínimo é dependente do conteúdo modal presente, que por sua vez, depende da discretização empregada. Assim, inicialmente dever-se-ia identificar o conteúdo de frequências que realmente participam da solução para, então, se escolher o valor do passo proporcionalmente ao período do modo mais elevado aí presente. No entanto, num problema de propagação de ondas, existe um elevado número deles e sua identificação seria trabalhosa. Um recurso interessante e efetivo consiste em se aproveitar os estudos feitos com o método das Diferenças Finitas e o Método das Características e aplicar a condição de Courant-Friedrich [18.], que fisicamente significa que o passo de integração deve ser pequeno suficiente que o trânsito da onda nesse intervalo não ultrapasse o tamanho do menor elemento de discretização utilizado (célula, elemento finito, elemento de contorno etc).

Desse modo, ao serem escolhidos esquemas de avanço incondicionalmente estáveis, não existem problemas de estabilidade com relação à escolha de incrementos de integração pequenos, embora se perceba uma piora de precisão quando o passo de integração é muito reduzido, bem inferior ao valor que já permitiria a integração precisa de todas as componentes modais, e as discretizações espaciais são grosseiras [19]. Além disso, o custo computacional cresce à medida que os intervalos de integração se reduzem.

Já o problema gerado pelo uso de incrementos de tempo “grandes” para integração das equações consistiria, em princípio, apenas de erros de precisão, ou seja, o passo de integração é inadequado para representar adequadamente os conteúdos de resposta ditados por modos mais elevados.

Assim, uma questão a ser discutida seria um critério para escolha de um intervalo de tempo adequado, que não fosse grande nem reduzido demais. Nesse sentido,

mesmo usando-se esquemas incondicionalmente estáveis, a condição de Courant-Friedrich continua sendo útil para orientar a escolha de um incremento de tempo próximo do ideal, de forma que, adaptada ao MEC sugere-se que:

$$\Delta t_{sugerido} = \frac{L_{min}}{c} \quad (IV.1)$$

Onde L é o tamanho do menor elemento de contorno e c é a velocidade de propagação da onda.

Não obstante as similaridades existem importantes peculiaridades do MEC com relação aos outros métodos na área da dinâmica. A mais importante delas refere-se à formulação mista, que calcula as variáveis básicas ou primais juntamente com suas derivadas normais. Esse cálculo simultâneo exige a utilização de esquemas portadores de amortecimento fictício, capazes de filtrar a presença de modos elevados mal caracterizados, que se amplificam na determinação das derivadas do potencial [20]. Nos casos mais comuns da dinâmica estrutural, os modos mais altos não participam da solução e sua eliminação em nada prejudica a resposta. O problema passa a ser crítico quando a resposta de fato possui um conteúdo modal mais elevado, como nos casos transientes relacionados ao impacto e à propagação de ondas, pois a inclusão de amortecimento acarreta diminuição na precisão das respostas. É preciso, então, avaliar detidamente a intensidade de amortecimento presente em cada esquema de avanço para que não haja uma excessiva degradação da solução numérica.

Uma série de testes envolvendo problemas de impacto em barras identificou inicialmente o esquema Houbolt como mais indicado dentre os mais tradicionais, dentre os quais se incluem os algoritmos de Newmark e Diferença Central Incondicionalmente Estável.

A razão para essa escolha se deve ao fato do esquema Newmark não possuir amortecimento fictício e o Esquema de Diferença finita incondicionalmente estável tê-lo em intensidade reduzida e não satisfatória. O controle da ação dos altos modos espúrios é fundamental, como será observado mais à frente.

## IV.2–RESULTADOS COM ESQUEMA HOUBOLT

É um algoritmo de aproximação incondicionalmente estável, onde as aproximações da aceleração e velocidade são expressas em termos de componentes do deslocamento. O detalhamento das equações encontra-se no Apêndice A.

A comparação de desempenho dos esquemas numéricos é agora examinada considerando o problema de impacto numa barra homogênea de seção constante, caso típico de propagação de ondas longitudinais, como mostra a figura IV.1. Nesse caso o potencial corresponde ao deslocamento longitudinal enquanto a derivada normal associa-se as tensões axiais. Há excitação de um infinito número de modos naturais, cuja participação na resposta traz dificuldades a sua representação numérica, tornando-o um importante problema teste.

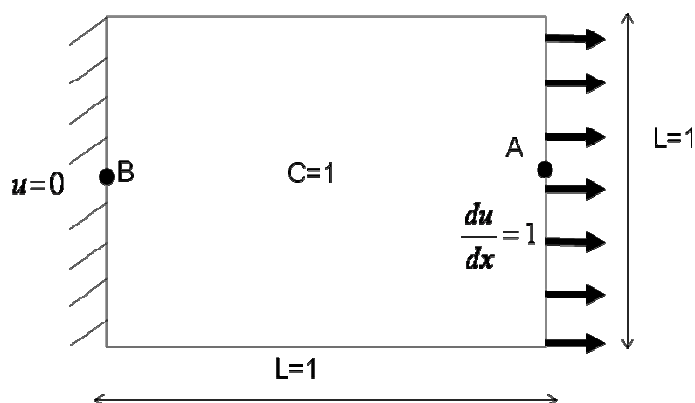


Figura IV.1-Problema teste: barra de seção constante engastada e submetida à carga súbita

A resposta analítica para o deslocamento ao longo do tempo no ponto A é apresentado na figura IV.2. O comportamento é análogo ao da função “dente de serra”.

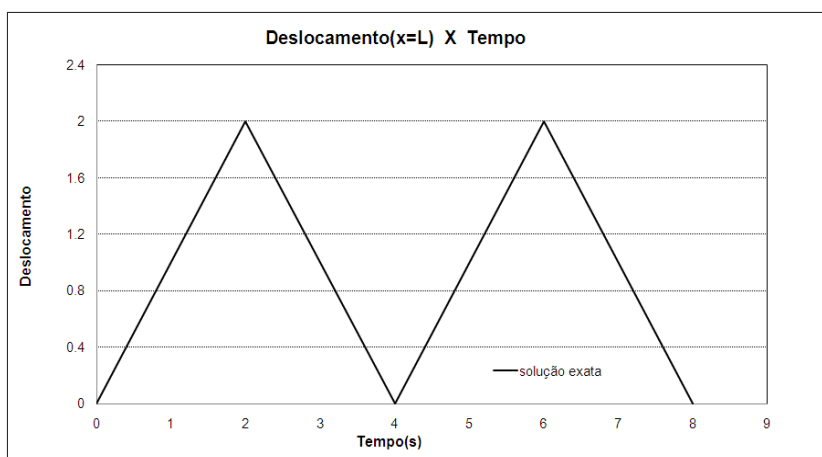


Figura IV.2 - Curva da resposta analítica para o deslocamento na extremidade carregada da barra

Por conta do potencial não ser amplificado pelas frequências naturais excitadas pelo carregamento dinâmico, a resposta numérica para o deslocamento no ponto A é razoável, conforme mostra a figura IV.3, para uma malha com 40 elementos de contorno constantes, sem pontos internos e com 5 pontos internos interpolantes, usando uma função radial simples a apresentação esquemática das malhas é mostrada no Apêndice C. O incremento de tempo empregado foi  $\Delta t=0,1s$ . O arredondamento dos picos das curvas é devido à ausência dos altos modos, amortecidos numericamente. O menor período da curva obtida sem pólos interpolantes deve-se à menor flexibilidade do sistema (menos graus de liberdade – maior rigidez) e pior representação da massa no interior do domínio, que faz com que a velocidade de propagação da onda seja majorada.

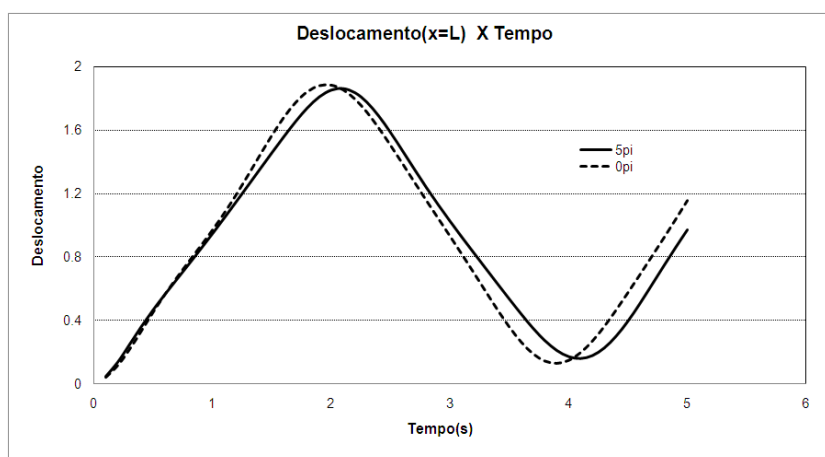


Figura IV.3 -Curva de deslocamentos com 40 EC com 0 PI e 5 PI,  $\Delta t=0,1s$

Naturalmente, melhores resultados são obtidos com malhas mais refinadas, como mostrado na Figura IV.4, na qual 80 elementos de contorno constantes e 25 pontos internos são introduzidos na discretização, cuja integração é feita em incrementos de 0,06s, pois a malha sem pontos internos não produz resultados estáveis para passos de integração menores.

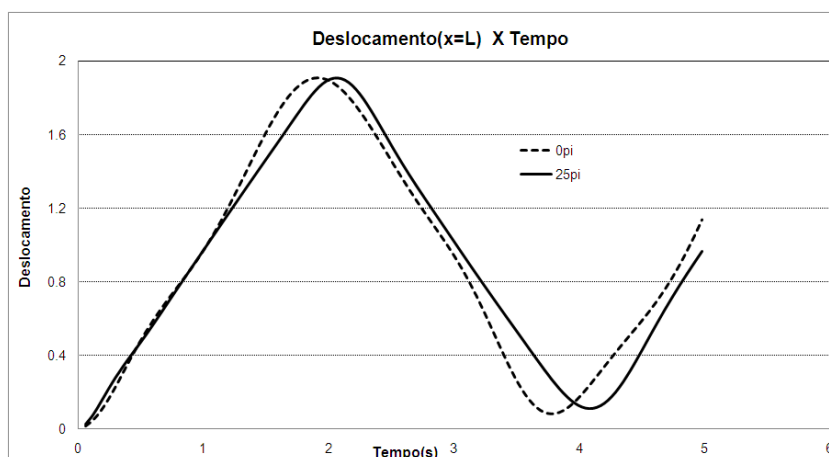


Figura IV.4 - Curva de deslocamentos com 80 EC com 25PI e 0PI,  $\Delta t=0.06s$

Esse bom comportamento numérico se repete qualquer sejam os esquemas de avanço empregados, mas o mesmo não ocorre na determinação das tensões, cujos valores no ponto B, situado no engaste, devem ser objeto de melhor exame. O aspecto da resposta analítica é mostrado na figura IV.5. Nota-se a presença de elevações e depressões abruptas correspondentes à chegada e partida das frentes de onda. Numericamente, a simulação desse comportamento é bastante difícil, daí a razão para que exemplo-teste seja uma boa referência para medida de desempenho dos esquemas de avanço e outras estratégias que visem o aprimoramento da solução computacional.

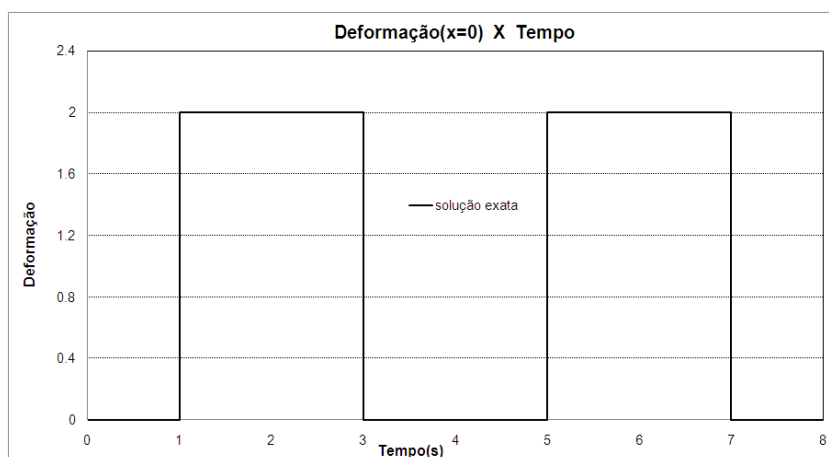


Figura IV.5-Curva de resposta analítica para tensão no engaste da barra

No gráfico da figura IV.6 é apresentada a curva de resposta para a mesma malha composta de 40 elementos de contorno constantes e  $\Delta t=0,1s$ . Verifica-se que o desempenho no cálculo das tensões é bem inferior ao obtido na determinação numérica dos deslocamentos, exatamente por conta da presença de altos modos mal representados, cuja participação é amplificada na determinação das tensões. O intervalo de tempo é fator importante no controle dos altos modos mal representados. Vê-se que para passos de integração muito reduzidos (curva da esquerda) a ação dos altos modos é mais pronunciada. Ressalta-se que para essa malha o passo de 0,05s foi o mínimo capaz de produzir a integração estável. Para passos grandes (curva da direita), o amortecimento fictício filtra esses altos modos e a resposta é mais suave, arredondada, pois apenas os primeiros modos atuam. Na curva central tem-se a melhor resposta, pois as equações são integradas com um passo próximo do ideal. O controle do intervalo de integração mais preciso deve ser objeto de análise detalhada, pois afeta diretamente a qualidade dos resultados, especialmente no caso das tensões.

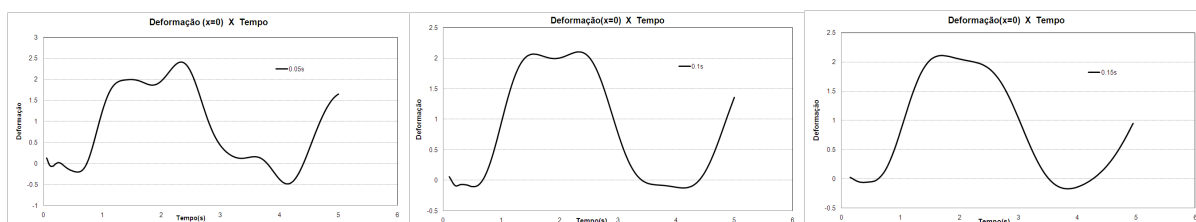


Figura IV.6 – Tensão no engaste com malha de 40 EC, sem PI e passos iguais a:  $\Delta t=0,05s$  (esquerda);  $\Delta t=0,1s$  (centro); e  $\Delta t=0,15s$  (direita)

Por essa razão, doravante apenas a determinação das tensões será objeto de análise, servindo o grau de precisão de sua resposta numérica como uma espécie de fator de desempenho do método e seus recursos.

Dentre esses recursos efetivos para melhoria do desempenho da formulação com Dupla Reciprocidade em todas as circunstâncias, ressalta-se a introdução de pontos internos interpolantes, também chamados de pólos, já empregados na melhoria da resposta de deslocamentos (vide figura IV.4). Sua eficácia deve-se ao fato de que não há garantia matemática que o posicionamento exclusivo dos pontos de interpolação no contorno ofereça resultados precisos, embora sob certas condições os resultados sejam até satisfatórios.

Assim, ao melhor representar as propriedades de massa no interior do domínio compreende-se porque a introdução de pólos é capaz de produzir significativa melhoria de resultados, conforme se pode observar na figura IV.7. Nela é apresentada a resposta de tensão no engaste numa malha sem ponto interno e noutra com 1 ponto interno centralizado no domínio bidimensional. O intervalo de integração foi de 0,1s que, de acordo com os testes realizados com essa malha, oferece os resultados com melhor precisão.

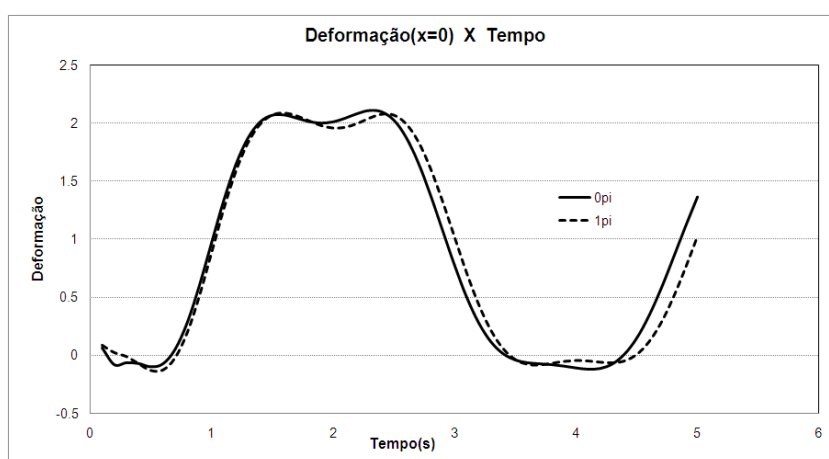


Figura IV.7- Tensões no engaste para malha com 40 EC, 1PI e 0PI,  $\Delta T=0.1s$

Conforme exposto, o emprego de pontos internos aumenta a quantidade de graus de liberdade, dando mais flexibilidade ao sistema, de modo que a defasagem observada entre as duas curvas é devida a maior rigidez da discretização sem pólos,



que adianta a frente de onda por artificializar uma maior velocidade de propagação. A melhor representação dos modos primordiais pode ser observada pelo formato mais retangular das faixas de pico e alívio de tensão.

Por outro lado, a inclusão de excessivo número de pontos internos relativamente à quantidade de pontos nodais no contorno pode não acarretar substancial melhoria nos resultados, especialmente para os posteriores ciclos de resposta. Além de possíveis problemas numéricos, relativos ao condicionamento das matrizes, hipótese essa que não deve ser desprezada quando uma excessiva quantidade de pólos em comparação com a quantidade de elementos de contorno empregada na malha é introduzida, pode ocorrer que a inserção de numerosos pólos não aprimore o conteúdo mais baixo da resposta (que já estaria bem representado) e apenas cresça a quantidade de altos modos mal representados. Por outro lado, a introdução de pólos também amplia a faixa de integração, ou seja, diminui o valor do passo mínimo requerido para a integração estável. A justificativa desse aumento da faixa de estabilidade alcançada pela inserção dos pontos internos deve estar ligada ao aumento da quantidade de amortecimento fictício no sistema, que tende assim a amortecer os modos mais altos, especialmente aqueles introduzidos pela própria adição dos pólos, permitindo assim a integração das equações de movimento em intervalos de tempo menores. Outro fator ainda mais importante é que a adição de pólos altera o valor do incremento de tempo tido como ideal nas malhas deles destituídas, reduzindo-o, como será visto a seguir.

Na Figura IV.8, mostra a comparação das curvas sem pontos internos com nove pontos internos posicionados de modo homogêneo no domínio. Vê-se um melhor comportamento no início dessa resposta, mas uma espécie de ampliação dos valores iniciais dos picos e depressões da curva, efeito de modos amortecidos (curva pontilhada). Percebe-se ainda a maior flexibilidade do sistema com os nove pólos, pois a curva de resposta apresenta período maior. A resposta com os pólos, excetuando-se os primeiros instantes, apresenta um comportamento pior, mas a questão é que o intervalo de tempo ideal não mais é de 0,1s como o é para a malha sem pólos.

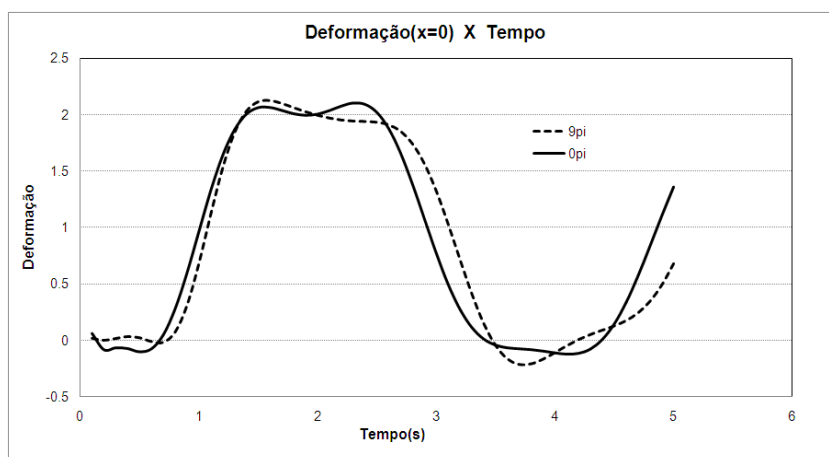


Figura IV.8- Tensões no engaste para malha com 40 EC, 9PI e 0PI, para  $\Delta t=0.1s$

Na figura IV.9 apresentam-se os resultados com a introdução de 25 pontos internos interpolantes, para dois valores de passo de integração,  $\Delta t=0,1s$  (curva tracejada) e  $\Delta t=0,08s$  (curva contínua). Vê-se que a redução do passo reduziu levemente o amortecimento e o período de resposta (outro efeito numérico do esquema Houbolt), mas não afetou substancialmente o resultado. Embora de modo suave, pode perceber-se que a curva contínua, com incremento de integração menor, apresenta melhor resultado.

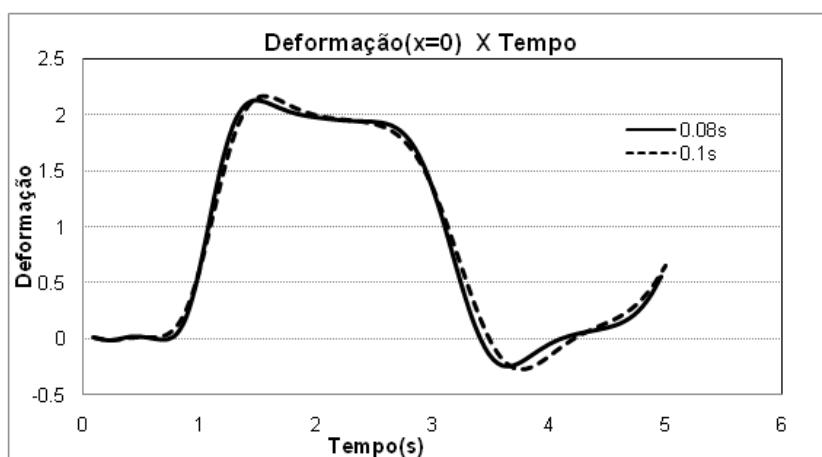


Figura IV.9- Tensões no engaste para uma malha com 40 EC, 25PI,  $\Delta t=0.08s$ (curva contínua) e  $\Delta t=0.1s$ (curva tracejada)

Conforme exposto, verificou-se que com o aumento dos pontos internos a faixa de integração aumenta, ou seja, seu valor mínimo se reduz e o incremento de integração ótimo se modifica, reduzindo-se. Isto pode ser confirmado pela

observação dos gráficos constantes na Figura IV.10 a seguir, nos quais se percebem que a resposta para  $\Delta t=0,07s$  foi a mais precisa. Com o valor do passo mínimo, observam-se oscilações provenientes da ação menos acentuada do amortecimento fictício junto aos altos modos.

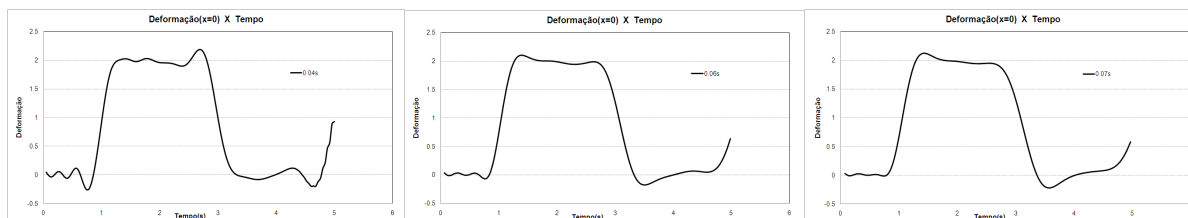


Figura IV.10-Tensões no engaste para malha com 40 EC, 25 PI,  $\Delta t=0.04s$ (curva da esquerda);  $\Delta t=0.06s$ (curva ao centro); e  $\Delta t=0.07s$ (curva da direita).

Em seguida são testadas malhas mais refinadas, com 80 elementos de contorno constantes. A questão do refinamento excessivo do contorno sem a introdução pólos interpolantes deve ser adequadamente discutida. Há dificuldade por parte das funções de interpolação, posicionadas unicamente no contorno, representarem adequadamente uma quantidade cada vez maior de informações relativamente a todo o domínio. Com o refinamento, um maior número de componentes modais é captado, e certamente os mais elevados são mal representados e podem prejudicar grandemente a resposta, se não forem amortecidos. Isto justifica o comportamento da resposta apresentada na figura IV.11, onde as tensões no engaste são obtidas para malha de 80 elementos de contorno, sem pólos e com apenas um pólo para um passo igual a 0,06s.

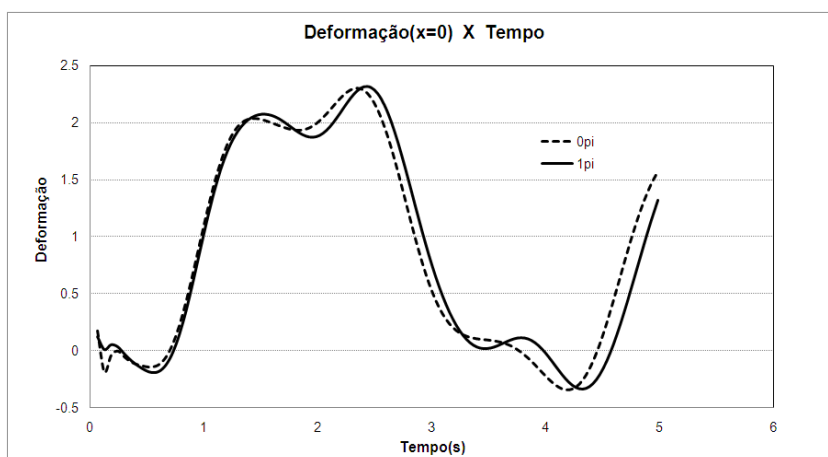


Figura IV.11- Tensões no engaste para uma malha de 80 EC, sem pólos e com 1 PI para um  $\Delta t=0.06s$

O aumento da quantidade de pólos melhorou o resultado, conforme pode ser observado na figura IV.12. Nove pólos e 25 pólos são distribuídos homogeneamente no domínio. O incremento de tempo também foi de 0,06s.

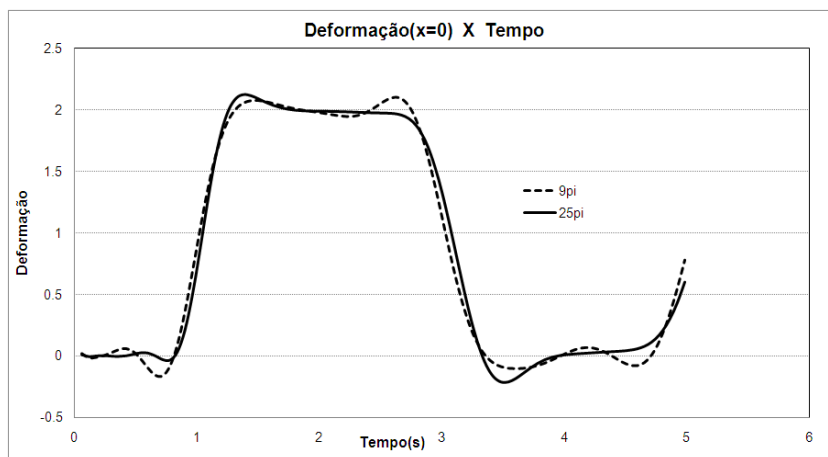


Figura IV.12- Tensões no engaste para uma malha de 80 EC, com 25 PI e com 9 PI para um  $\Delta t=0.06s$

Embora o fenômeno de ampliação das cristas seja mais pronunciado com os 25 pontos internos interpolantes, as fases iniciais da solução numérica estão bem melhor representadas e pode-se apontar essa resposta como a mais precisa de todas até agora obtidas. Pode-se então afirmar, por constatação, que a formulação

com Dupla Reciprocidade produz resultados convergentes, embora dependentes de alguns fatores.

Constata-se uma vez mais que a introdução de pontos internos melhora a faixa de integrabilidade do esquema, pois com  $\Delta t=0.05s$  sem pólos os resultados divergem, mas com 25 pólos há estabilidade na resposta, conforme mostra a Figura IV.13 a seguir. Os resultados com 25 pólos divergem apenas para  $\Delta t=0.04s$ . Assim sendo, verifica-se uma vez mais que a inclusão de pontos internos ou pólos no interior diminui o valor mínimo do incremento de integração possível de ser empregado. A resposta nessa condição é, inclusive, a de melhor concordância com a solução analítica. Ressalta-se, entretanto, que nem sempre o menor incremento de tempo possível oferece as melhores respostas.

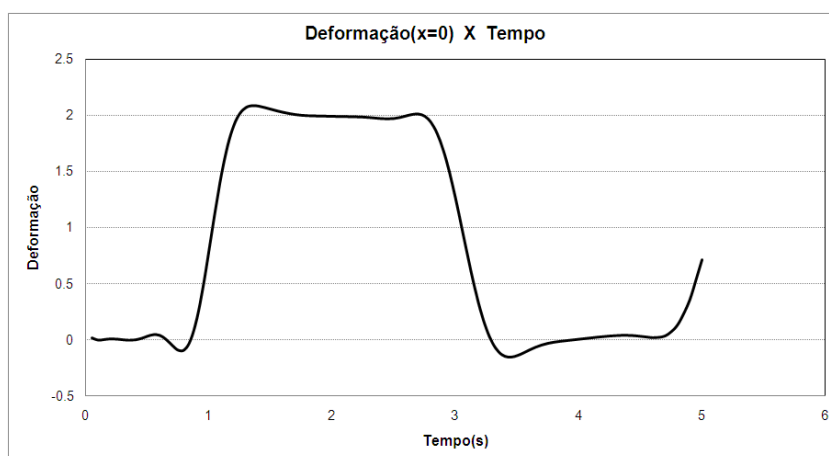


Figura IV.13- Tensões no engaste para uma malha de 80 EC, com 25 PI para um  $\Delta t=0.05s$

### IV.3–RESULTADOS COM O ESQUEMA WILSON-TETA

Conforme observado, a melhoria dos resultados seria obtida caso se pudesse ao mesmo tempo integrar as equações com passos menores e controlar efetivamente a ação dos altos modos espúrios. Com base nisso, posteriormente, em diversos trabalhos, Loeffler e Castillo [21] testaram outros esquemas como os de Wilson- $\theta$ , de Chung-Lee e HHT- $\alpha$ , este último uma adaptação do algoritmo de Newmark [19]. Todos esses esquemas apresentam como característica interessante o controle da quantidade de amortecimento numérico através de um parâmetro específico,

independente do valor do passo de integração. Todos são, naturalmente, incondicionalmente estáveis.

O esquema de Chung-Lee caracterizou-se por introduzir altas taxas de amortecimento fictício, enquanto o esquema HHT- $\alpha$  permitiu o emprego de passos bem maiores do que aqueles permitidos nos outros algoritmos, o que permitiria considerável economia computacional, não fossem as excessivas oscilações resultantes de taxas mais reduzidas de amortecimento fictício. O esquema Wilson- $\theta$  foi o que melhor permitiu a introdução da dosagem adequada de amortecimento de modo mais simples, ampliando a faixa de integração em relação ao esquema de Houbolt. Por essa razão, alguns testes são feitos aqui para ratificar essas conclusões.

Como primeira experiência para avaliar as características do esquema Wilson- $\theta$ , cujo o equacionamento é exposto no Apêndice B, na Figura IV.14 mostrada a seguir são feitas três simulações nas quais é testado o efeito do parâmetro  $\theta$  no comportamento das tensões normais na resposta da barra sob carga de impacto, empregando-se uma malha de 80 elementos constantes, 25 pontos internos interpolantes e incremento de integração  $\Delta t$  igual a 0.05s. Com esse nível de refinamento, apenas valores de  $\theta$  superiores a 1.6 apresentam comportamento estável, enquanto valores iguais ou menores do que esse divergem. Experiências com o Método dos Elementos Finitos mostram que o esquema de Wilson é condicionalmente estável a partir de  $\theta=1,3$ , de modo que essa instabilidade se deve às peculiaridades da formulação com Dupla Reciprocidade. As curvas de resposta mais precisas são obtidas com  $\theta$  igual a 1.8 (curva contínua). Valores muito superiores, como a curva tracejada mostrada na Figura IV.14 ( $\theta=3$ ), produzem distorções significativas na curva de resposta. Tais distorções correspondem à introdução de amortecimento fictício na resposta, daí a curva de resposta se tornar suavizada e com período amplificado.

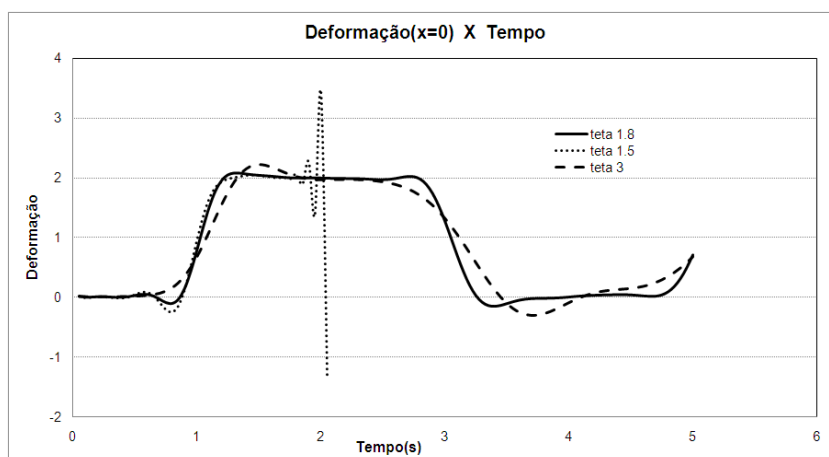


Figura IV.14 – Efeito do parâmetro  $\theta$  nas tensões. Curva pontilhada,  $\theta=1.5$ ; curva contínua,  $\theta=1.8$ ; curva tracejada,  $\theta=3.0$ . Malha com 80 EC e 25 PI com  $\Delta t=0.05$ s.

Na Figura IV.15 são comparados os resultados obtidos com a mesma malha e intervalo de tempo anterior ( $\Delta t=0,05$ s) considerando  $\theta$  iguais a 1,7 e 2,0, valores esses que definem aproximadamente a faixa mais adequada de utilização de  $\theta$  para a malha empregada. Castillo[22] já havia realizados testes nesse sentido e chegou a conclusões semelhantes, ou seja, o valor ideal de  $\theta$  é aproximadamente o mínimo. Menores valores de  $\theta$  não produzem os resultados porque há insuficiente quantidade de amortecimento fictício e isso faz com que a ação dos altos modos espúrios predomine. Essa ação impede a integração das equações de movimento e produz a instabilidade vista no gráfico anterior (Figura IV.14, curva pontilhada). Por outro lado, conforme exposto, o excessivo amortecimento tende a filtrar também os modos mais baixos e forçar o movimento a apresentar-se como uma vibração de um sistema com um grau de liberdade altamente amortecido.

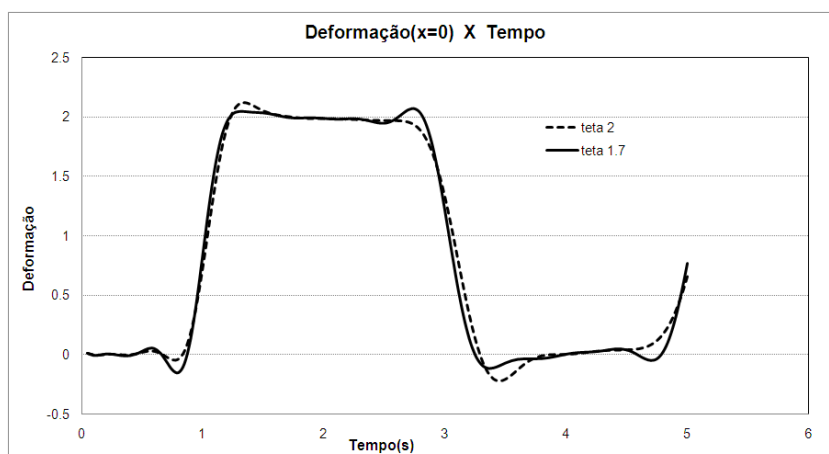


Figura IV.15 – Tensões normais no engaste. Faixa ideal de valores para  $\theta$ , aproximadamente iguais a 1,7 (curva contínua) e 2,0 (curva tracejada). Malha com 80 EC, 25 PI,  $\Delta t=0.05s$ .

A seguir examina-se a sensibilidade do parâmetro  $\theta$  para malhas menos refinadas. Tal como observado por Castillo [22], com a redução da quantidade de elementos a faixa de utilização de  $\theta$  se amplia, e desse modo obtém-se resultados estáveis de resposta partir de  $\theta$  igual a 1,3, considerando-se 25 PI. Deve-se ressaltar que a faixa de valores ideais de  $\theta$  decresce levemente com malhas menos refinadas. A Figura IV.16 mostra um gráfico em que se apresentam valores díspares de  $\theta$ , ou seja,  $\theta=1,4$  (curva tracejada) e  $\theta=3.0$  (curva contínua). Percebe-se a ação vigorosa do amortecimento fictício com  $\theta=3.0$ , suavizando a resposta. A ação dos altos modos com  $\theta=1,4$  se faz perceber nas cristas exageradas após a elevação e a depressão da curva de resposta.

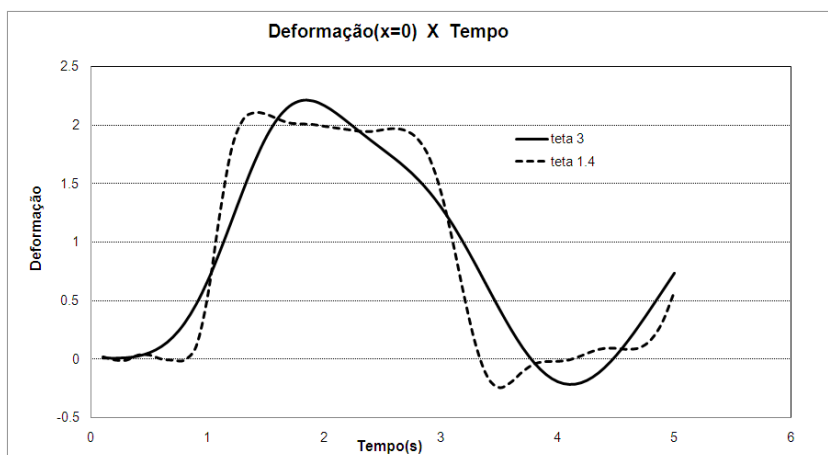


Figura IV.16 – Tensões normais no engaste. Variação extrema de  $\theta$  com a malha de 40 EC, 25PI,  $\Delta t=0.1s$ . Curva tracejada,  $\theta=1,4$ ; curva contínua,  $\theta=3.0$ .

Em síntese, pode-se concluir que a faixa de utilização de  $\theta$  se amplia com a redução da malha e a magnitude dos valores ideais se reduzem de pequena quantidade. Isto significa que o uso de malhas mais pobres permitem a integração das equações com menores quantidades de amortecimento fictício. Entretanto, como seria esperado, a precisão dos resultados com tais malhas menos refinadas é inferior. Isto é comprovado no gráfico da figura IV.17, onde se comparam as curvas de resposta



para  $\theta$  igual a 1.7 empregando-se as malhas de 40 e 80 elementos, com passos de integração de 0,1s e 0,05s respectivamente, ambas com 25 pontos internos.

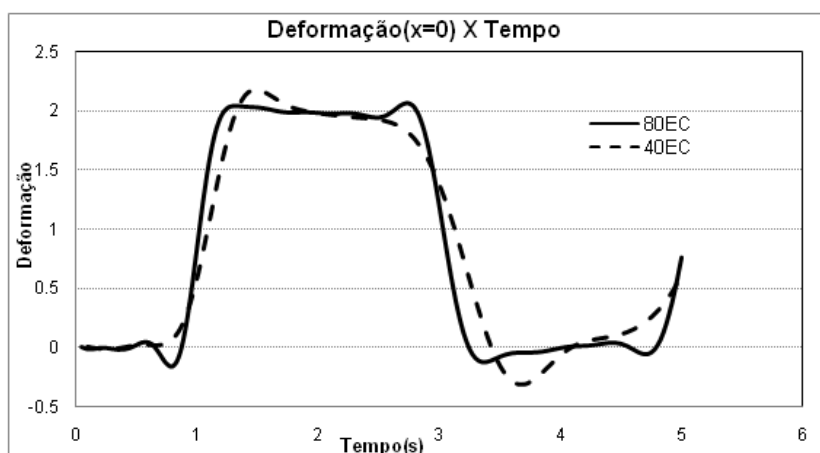


Figura IV.17 – Tensões normais no engaste.  $\theta = 1,7$  e 25 PI. Malhas com 40 EC (curva tracejada) e 80 EC (curva contínua), com  $\Delta t = 0,1s$  e  $\Delta t = 0,05s$ , respectivamente.

Verifica-se claramente que a precisão da resposta com a malha mais refinada é superior, mas com base no que foi exposto anteriormente (vide gráficos da Figura IV.10), uma melhor resposta para 40 EC com 25 PI seria obtida com menor valor de incremento de integração. Na figura IV.18, são comparados os resultados para a malha de 40 elementos com 9 pólos para incremento de tempo igual a 0,07s e 25 pólos com incremento de 0,05s. Os resultados melhoraram em comparação com o exposto na figura IV.16, quando o incremento de tempo usado era maior do que o devido. A inserção de pontos internos requer de fato uma diminuição do incremento de tempo para uma resposta mais precisa.

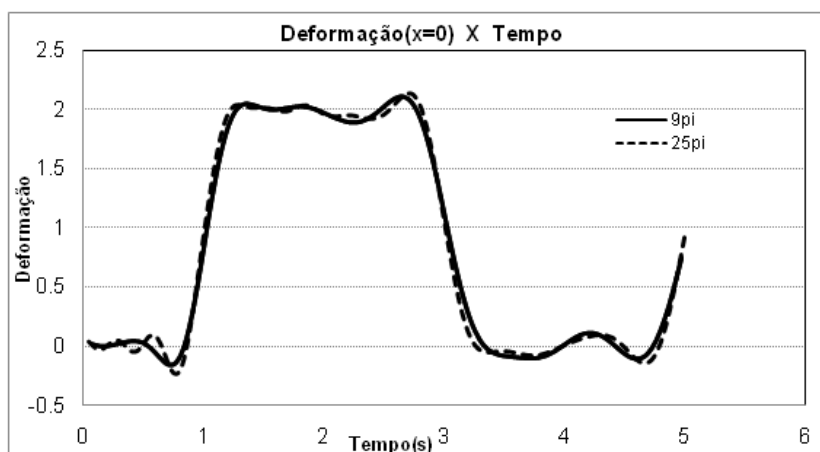


Figura IV.18 – Tensões normais no engaste.  $\theta$  igual a 1,7 e 25 PI. Malhas com 40 EC: 9 pólos com  $\Delta t=0.07s$  (curva contínua) e 25 pólos internos com  $\Delta t=0,05s$  (curva tracejada).

Voltando-se à questão dos limites do intervalo de tempo, mais uma vez ressalta-se o grande problema da formulação com Dupla Reciprocidade em dinâmica: o refinamento da malha diminui a faixa de utilização dos passos de integração, que não podem então ser muito reduzidos, como seria ideal para melhor representação da resposta. Esse tipo de problema não ocorre com a mesma intensidade com outras formulações e métodos numéricos, cujo problema mais sério é exatamente o oposto: permitir-se a integração com incrementos de tempo grandes para reduzir o tempo computacional. Na Dupla Reciprocidade, como em todo método de solução incremental, existe um limite superior ditado pela precisão da resposta, pois, de modo geral, intervalos muito grandes não permitem exatidão na integração das equações e, no caso de uso de esquemas com amortecimento fictício, este efeito aumenta com o intervalo de integração, distorcendo a resposta; e há um limite inferior, induzido pela imprecisão na representação da inércia do sistema, que resulta em freqüências e modos espúrios que instabilizam a solução. A atenuação dessa restrição no valor mínimo do passo de integração com o refinamento da malha certamente é alcançado com a utilização de elementos de ordem superior, pois então há uma melhor representação de todas as propriedades do sistema. Tentativas nesse sentido também são feitas nesse trabalho com a escolha de funções de interpolação alternativas, discutidas mais à frente.

#### **IV.4-COMPARAÇÕES ENTRE OS ESQUEMAS WILSON-TETA E Houbolt**

Uma das interessantes conclusões do trabalho da dissertação de mestrado de Castillo [22] refere-se ao fato de que o esquema Wilson  $\theta$  permitiria uma dosagem mais adequada de amortecimento fictício, e assim permitira a inclusão de maior número de pólos, melhorando as condições de integração com relação ao Esquema Houbolt. Desse modo, a maior flexibilidade na inclusão de amortecimento resultaria na obtenção de melhores resultados com o esquema Wilson  $\theta$ , especialmente na integração com passos menores nas malhas mais refinadas.

Entretanto, embora repleto de exemplos, a dissertação de Castillo não fez uma comparação direta de resultados entre os dois métodos, de modo que a questão do fator precisão entre os dois esquemas não ficou rigorosamente bem definida.

De fato, as primeiras simulações aqui realizadas mostraram resultados aparentemente similares no que se refere à precisão. Por outro lado, a maior flexibilidade do esquema Wilson- $\theta$  poderia ser interpretada de modo diverso, ou seja, a presença de mais um fator de controle, caso não seja ele efetivo com relação à precisão ou a estabilidade, apenas torna o método menos simples.

Como primeiro exemplo, na Figura IV.19 é apresentada a comparação direta entre os resultados numéricos do esquema Houbolt e Wilson- $\theta$ , empregando-se uma malha com 40 elementos de contorno, 12 pontos internos interpolantes e intervalo de integração  $\Delta t = 0.1s$ . O parâmetro  $\theta$  foi tomado igual a 1,8, valor situado ainda dentro da faixa de melhor desempenho, que depende do refinamento da malha.

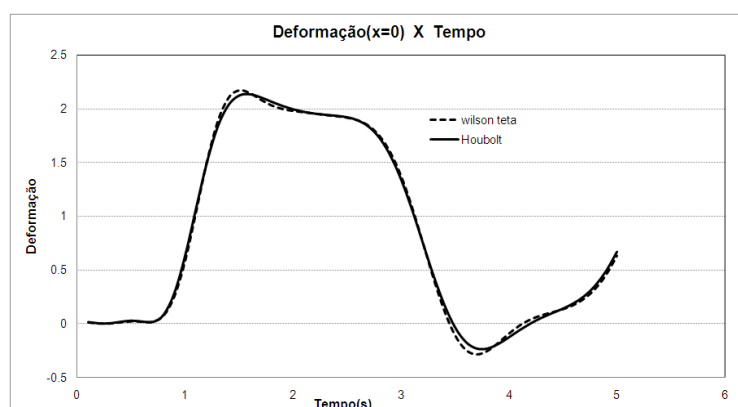


Figura IV.19 – Comparação de resposta entre o esquema Wilson  $\theta$  (linha pontilhada) e Houbolt (linha contínua) para malha de 40 elementos, 12 PI e  $\Delta t = 0,1s, \theta = 1.8$ .

Percebe-se que as curvas de resposta para ambos os métodos nessas condições é praticamente a mesma, ou seja, realmente não há diferença significativa no resultado de ambos os métodos. Imaginava-se que ao empregar um número mais restrito de instantes de equilíbrio, o esquema Wilson- $\theta$  oferecesse resultados em que a chegada e a saída da frente de onda (elevação e depressão) na curva de resposta no engaste se apresentassem sensivelmente mais verticalizadas do que no esquema Houbolt, mas o que se observou nesse sentido foi um efeito muito tênue.

No próximo teste, apresentado na Figura IV.20, afere-se o efeito da introdução de um maior número de pólos interpolantes na mesma malha de 40 EC, empregando-se o mesmo incremento de tempo para o avanço da solução e  $\theta=1.8$ .

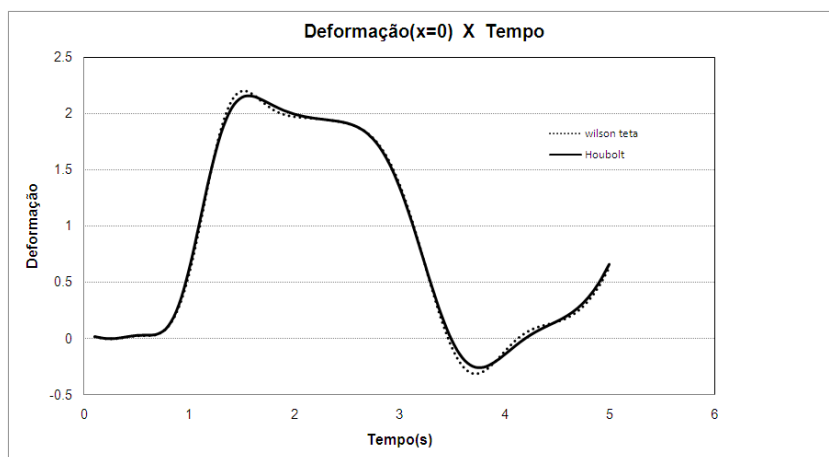


Figura IV.20 – Comparação de resposta entre o esquema Wilson  $\theta$  (linha pontilhada) e Houbolt (linha contínua) para malha de 40 elementos, 25 PI e  $\Delta t= 0,1s$ .  $\theta=1.8$ .

Percebe-se que o resultados de ambos é similar, e com relação à solução analítica apenas os valores iniciais são mais bem representados com esse acréscimo na quantidade de pólos. Com base nesse resultado, na Figura IV.21 é feita a comparação das curvas de resposta alterando-se o valor do parâmetro  $\theta$  no esquema Wilson.

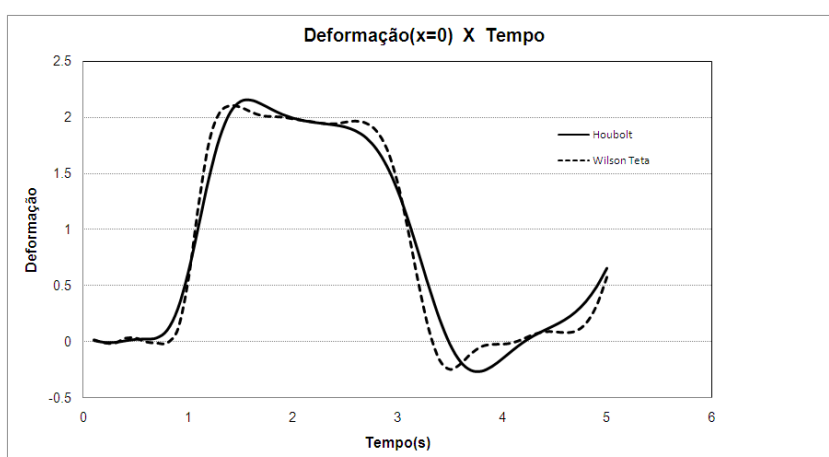


Figura IV.21 – Comparação de resposta entre o esquema Wilson  $\theta$  (linha tracejada) e Houbolt (linha contínua) para malha de 40 elementos, 25 PI e  $\Delta t= 0,1s$ .  $\theta=1.4$ .

Vê-se que ao reduzir a quantidade de amortecimento fictício o resultado dos métodos se diferenciou. A menor taxa de amortecimento fez a curva do método Wilson verticalizar-se, ao recuperar a participação de alguns modos superiores.

Já na figura IV.22 é apresentada a comparação direta entre os resultados numéricos do esquema Houbolt e Wilson- $\theta$ , empregando-se uma malha com 80 elementos de contorno, 25 pontos internos interpolantes e intervalo de integração  $\Delta t = 0.05s$ . O parâmetro  $\theta$  foi tomado igual a 1.8, valor situado dentro da faixa de melhor desempenho.

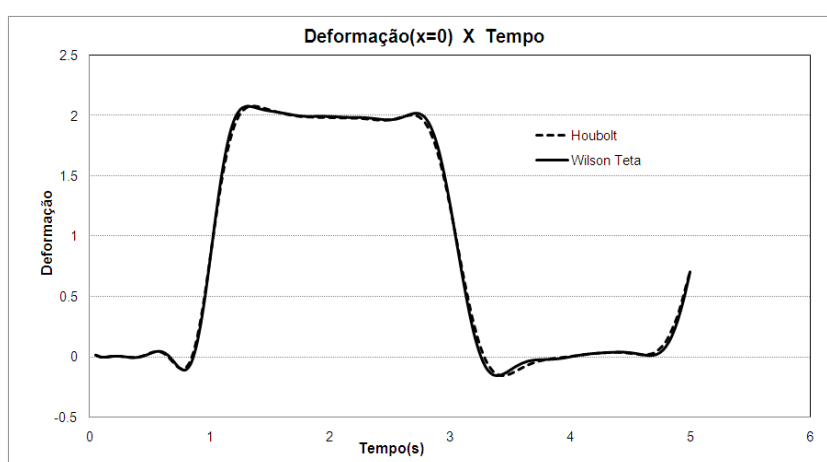


Figura IV.22 - Malha de 80 elementos, 25 PI e  $\Delta t = 0.05s$ , utilizando esquema, Houbolt e Wilson- teta, com  $\theta = 1.8$ .

Verifica-se que ambos os esquemas produziram resultados praticamente idênticos. Essa similaridade ocorre, portanto, sempre que o valor de  $\theta$  se encontra dentro do que é identificado como faixa ideal, ou seja, aquela que fornece resultados os menos distantes possíveis da resposta analítica. Essa faixa, no entanto, está bem mais próxima do valor mínimo do que do valor máximo, que rigorosamente não existe, a não ser no sentido de amortecer quase que completamente a solução numérica.

No próximo teste, apresentado nos gráficos da Figura IV.23, observa-se a atenuação da resposta para tensões com a malha de 80 EC e 25 PI, devido à ampliação exagerada do valor de  $\theta$ . Para  $\theta = 6$ , o efeito da ampliação do amortecimento fictício se faz no sentido de se retirar a participação da quase totalidade dos modos de vibração, deixando a curva com o aspecto quase-senoidal, típica da ação dominante do primeiro harmônico. A energia desse harmônico, portanto, permanece

praticamente inalterada, pois o pico e depressão no primeiro ciclo até ultrapassam os valores esperados (certamente ação do harmônico posterior). O amortecimento numérico, nessa fase, se distingue bastante do comportamento do amortecimento estrutural. Todavia, quando se estabelece  $\theta=12$ , não havendo mais participações de modos elevados para dissipar, o amortecimento numérico reduz então as amplitudes de vibração e dilata o período de vibração, fazendo a curva de resposta de um sistema com vários graus de liberdade tender à curva típica de um sistema amortecido com um grau de liberdade.

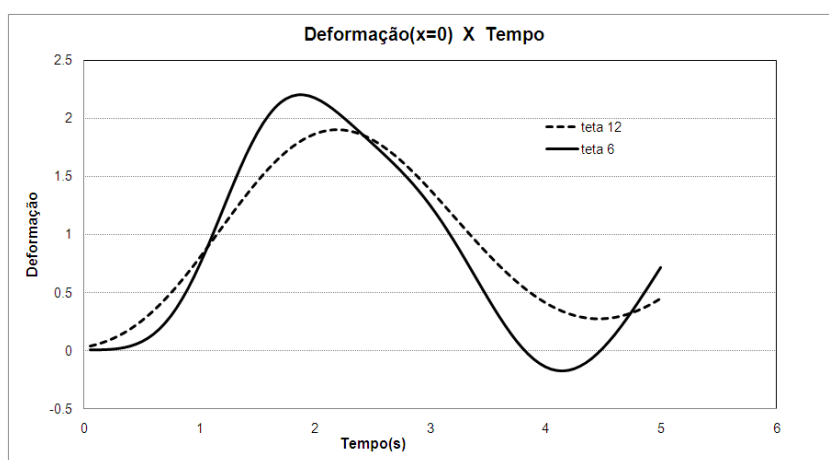


Figura IV.23 - Malha de 80 elementos, 25 PI e  $\Delta t=0.05s$ . Efeito da ampliação do parâmetro  $\theta$ . Curva contínua,  $\theta=6$ ; curva tracejada,  $\theta=12$ .

Diante do material colhido, pode-se verificar que a maior flexibilidade na inclusão de amortecimento que permite a integração no esquema Wilson- $\theta$  com intervalos de tempo menores não resulta em melhoria de precisão, pois se identifica que isso é possível apenas para valores de  $\theta$  elevados, que introduzem altas taxas de amortecimento fictício e arredondam a resposta. Desse modo, é bastante questionável considerar-se como vantajosa a introdução do parâmetro  $\theta$  como variável de controle do amortecimento numérico. Diante da similaridade dos resultados, talvez seja mais interessante optar-se pela simplicidade do esquema Houbolt e fazer o controle da taxa de amortecimento somente pela magnitude do incremento de integração

#### IV.5-ESCOLHA DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O cerne da formulação com Dupla Reciprocidade consiste da aproximação expressa pelo lado direito equação III.23, repetida aqui por conveniência:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{\alpha}^j \Psi_{,ii}^j u^* d\Omega \quad (\text{IV.2})$$

Conforme a equação (III.21) temos:

$$\Psi_{,ii}^j = F^j \quad (\text{IV.3})$$

Comumente são escolhidas funções radiais com esse propósito, graças a uma série de propriedades interessantes, mencionadas mais à frente. Vários exemplos podem ser encontrados para as funções radiais; algumas das mais comuns são:

$$F(r) = r \quad (\text{radial simples})$$

$$F(r) = r^3 \quad (\text{radial cúbica})$$

$$F(r) = r^2 \ln(r) \quad (\text{radial de placas finas})$$

$$F(r) = (r^2 + c^2)^{1/2} \quad (\text{radial multiquádrica})$$

$$F(r) = e^{-cr^2} \quad (\text{radial gaussiana})$$

Ao longo do texto outras funções diferentes, interessantes para as aplicações específicas de propagação de ondas com a formulação com Dupla Reciprocidade, serão comentadas.

As aplicações das funções radiais atualmente são muito variadas. Dentre as aplicações recentes, o tratamento de imagens é dos mais importantes. O processo de interpolação é uma ferramenta importante para preservar o espectro do mapeamento obtido com base em informações colhidas de modo exato em certos pontos, como em exames de raios X do esqueleto humano. O mesmo ocorre no esquadramento de costas marítimas por sonar. Em ambas as aplicações, as funções radiais de placa (thin-plate splines) têm apresentado ótimos resultados. Já as funções multiquádricas mostram bom desempenho em medidas de temperatura ou variáveis de campo na superfície da terra, bem como em aplicações meteorológicas nas quais estações colhem dados esparsos em vários instantes de

tempo e estes resultados devem ser integrados espacialmente para dar uma visão satisfatória do clima numa região mais extensa.

A modelagem do comportamento das redes neurais também se inclui entre as funções radiais que foram introduzidas com relativo êxito, graças a sua multifuncionalidade e, em certas circunstâncias, por sua suavidade. Uma área recente, mas cuja afinidade com os campos de pesquisa já citados é imediata, diz respeito à prospecção de poços de petróleo, onde se deseja mapear com relativa precisão todo um campo geofísico com base em medições discretas. A denominação de tomografia sísmica ao procedimento executado explicita claramente as similaridades dessa nova área de atuação com as áreas anteriormente citadas.

A formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade foi uma das técnicas pioneiras no uso recente das funções radiais como componente auxiliar em seu arcabouço matemático.

Em geral, as melhores aplicações das funções radiais são as seguintes: as funções a serem aproximadas dependem de muitas variáveis ou parâmetros; são definidas por muitos dados; os dados são valores esparsos distribuídos no domínio; a distribuição desses dados não é homogênea.

Cabe destacar que outras funções não radiais podem ser usadas com o mesmo propósito, embora seu uso em geral não seja vantajoso, pois existem propriedades importantes no contexto das funções radiais que dificilmente ocorrem com outras classes de funções. A simetria radial é talvez a mais importante dessas propriedades: o argumento da função depende tão somente da distância de um dado ponto aos pontos-base e quaisquer rotações não influenciam seu resultado. Além disso, a norma euclidiana também se caracteriza por estabelecer valores sempre positivos o que é interessante sob o ponto de vista de resolução de matrizes. Contudo, outros fatores podem se tornar igualmente importantes: características de decaimento e suavidade podem ser fundamentais e, nesse sentido, não são adequadas certas funções como a função radial simples.

Muitos trabalhos já foram publicados advogando a supremacia de certas funções sobre outras em determinadas aplicações, mas não há generalidade nesse melhor desempenho. O tipo de condição de contorno, a forma do contorno e a distribuição dos dados impedem qualquer demonstração matemática que aponte a melhor



função para todos os casos. Alguns problemas-teste têm sido apresentados na literatura, especialmente ligados ao MEC, examinando o comportamento de diversos tipos de funções [15]. Embora forneçam informações importantes, descartando certas funções deficientes como, por exemplo, as radiais quadráticas, as conclusões ainda não são definitivas.

No que tange à dinâmica com a Dupla Reciprocidade, tais testes com diversas funções de interpolação não foram devidamente realizados. Por exemplo, usando-se elementos de contorno constantes, as funções radiais cúbicas ( $F^i=r^3$ ) produziram resultados totalmente instáveis, embora tenham excelente desempenho no cálculo de volumes e outras aplicações com o próprio MEC em problemas estacionários [23]. Tais funções somente resultaram em respostas estáveis se somadas diretamente com a função radial simples, sem produzir qualquer melhoria nos resultados.

A conhecida função Spline-plate ( $F^i=r^2 \ln r$ ) apresentou uma faixa de estabilidade mais restrita. Considerando o esquema Houbolt e uma malha com 80 EC e 25 PI, a curva de resposta para tensões usando a Spline-plate apresentou estabilidade somente a partir de  $\Delta t=0,09s$  (Figura IV.24), enquanto a função radial simples ( $F^i=r$ ) nessas condições permitiu a integração estável com  $\Delta t=0,05s$ . Necessitando empregar maiores incrementos de tempo para integração, a resposta é atenuada pela inserção de maiores quantidades de amortecimento fictício e fica com um aspecto bastante distorcido.

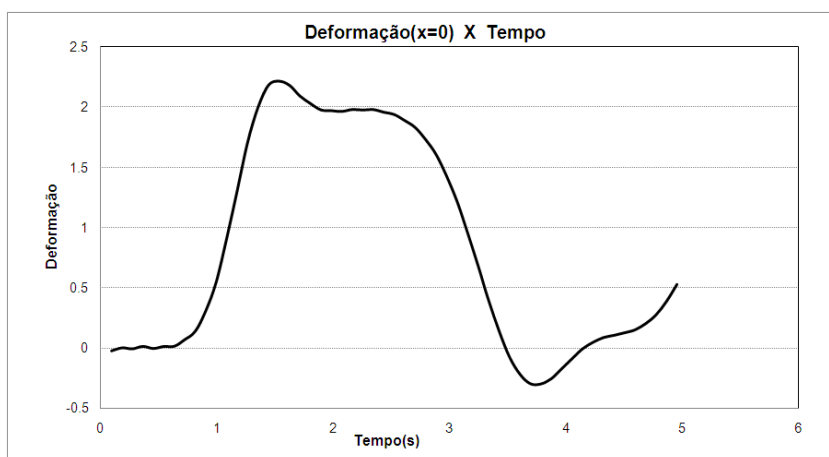


Figura IV.24 – Função  $F= r^2 \ln r$  . Esquema Houbolt. Malha de 80 elementos, 25 PI e  $\Delta t=0,09s$ .

Embora bastante sutil, é possível perceber tremulações nos instantes iniciais e também na região do cume da curva (entre 1,5 e 3s), indicativas da proximidade do passo de integração com o limite de integração estável. Estas tremulações somem com o acréscimo do valor do passo, conforme mostra a Figura IV.25.

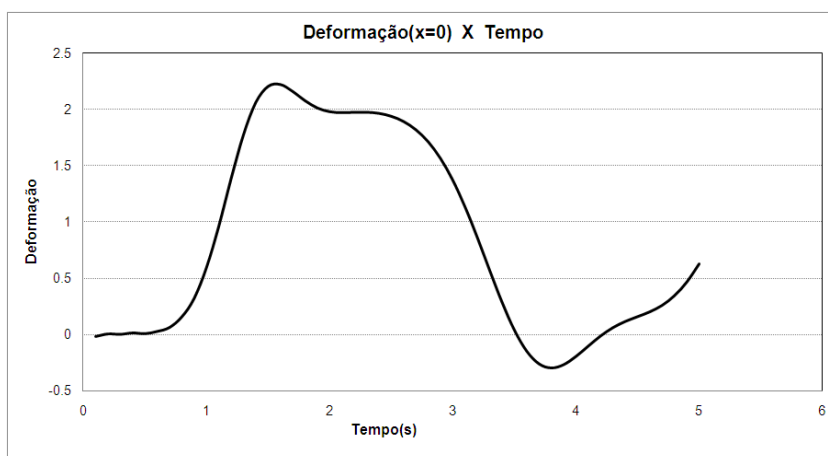


Figura IV.25 – Função  $F = r^2 \ln r$ . Esquema Houbolt. Malha de 80 elementos, 25 PI e  $\Delta t = 0,1s$ .

Uma possível explicação para esse comportamento sensível das funções na dinâmica se deve ao fato de que a massa do sistema estaria sendo bem representada em nível global, mas localmente estariam sendo introduzidas heterogeneidades acentuadas, que dispersariam as frentes de onda em sua propagação, dando origem a uma elevada sensibilidade numérica.

Uma classe de funções cujos resultados nos testes foram razoáveis foram as exponenciais híbridas, dadas por:

$$F1 = e^{-r}(r^2 - 5r + 4) \Rightarrow \Psi1 = e^{-r}r^2$$

$$F2 = e^{-r}(r^3 - 7r^2 + 9r) \Rightarrow \Psi2 = e^{-r}r^3$$

Estas funções foram escolhidas pela primitiva  $\psi$  e demais derivadas possuírem uma estrutura exponencial negativa, que tende a suavizar a interpolação.

A seguir são apresentados os resultados de tensão referentes à comparação das funções radiais com as funções exponenciais híbridas  $F1 = e^{-r}(r^2 - 5r + 4)$  e exponencial híbrida  $F2 = e^{-r}(r^3 - 7r^2 + 9r)$ , que foram funções que apresentaram boa

estabilidade e resultados razoáveis. Foi empregado o esquema Houbolt para o avanço no tempo.

Na figura IV.26 apresenta-se a curva de tensão obtida no engaste da barra sob carga de impacto, comparando-se a funções radiais simples com a função exponencial híbrida F1. Empregou-se uma malha com 80 elementos de contorno constantes e 25 pontos internos interpolantes nessas simulações.

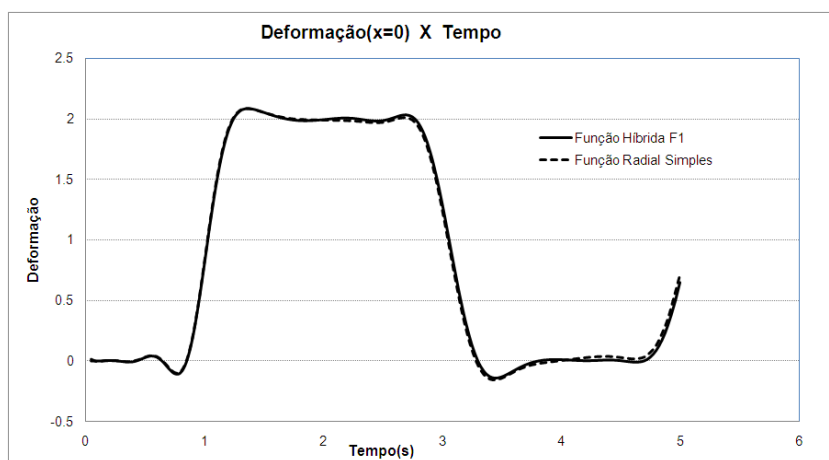


Figura IV.26 – Comparação das curvas de resposta para tensão entre as funções radial simples e exponencial híbrida F1, com 80 EC, 25 PI e intervalo de integração igual a 0,05s.

Os resultados são muito semelhantes nessas condições. Entretanto, a principal diferença ocorre com relação à faixa de integração. A função radial apresentou instabilidade para valores do incremento de tempo menores do que 0,05s, enquanto a função exponencial híbrida F1 conservou-se estável para um valor do passo menor, igual a 0,04s. Todavia, o que é mais interessante é que a instabilidade apresentada pela função exponencial com passos menores do que o mínimo é lenta, conforme mostra a Figura IV.27, onde se vê o comportamento da resposta com a função exponencial híbrida F1 com  $\Delta t=0,04s$  e  $\Delta t=0,02s$ . A instabilidade apresentada pela função radial simples cresce muito mais rapidamente. Isto significa que as propriedades de inércia estão mais bem representadas pela função exponencial.

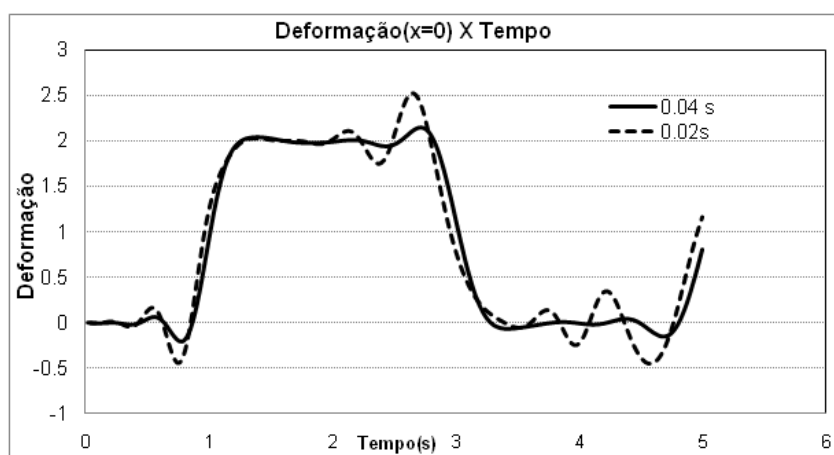


Figura IV.27 – Comparação das curvas de resposta para tensão com a função exponencial híbrida F1, com 80 EC, 25 PI e passo igual a 0,04s (curva contínua) e 0,02s (curva tracejada).

Para melhor ilustrar o comportamento dessa função F1 com os diversos intervalos de integração, nos gráficos que compõem a Figura IV.28 são apresentadas três curvas de resposta para intervalos de integração iguais a 0,05s, 0,03s e 0,01s, para malha de 80 EC com 25 PI.

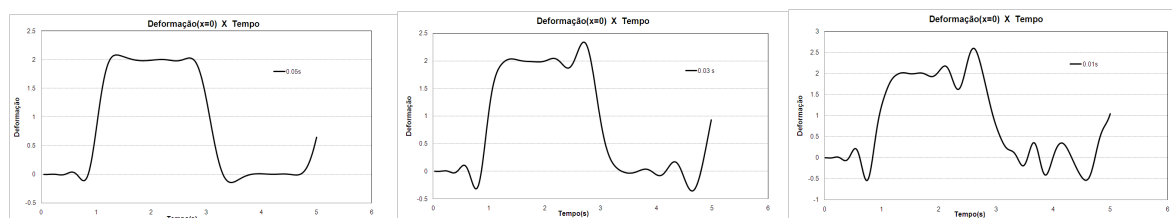


Figura IV.28 – Curvas de resposta para tensão com a função exponencial híbrida F1, com 80 EC, 25 PI e passos iguais a 0,05s (esquerda), 0,03s (centro) e 0,01s (direita).

A melhor resposta ocorre com  $\Delta t$  igual 0,05s. As respostas com passos menores são mais oscilantes, devido à menor dose de amortecimento fictício. Não obstante a instabilidade da solução com as funções exponenciais ocorrer para passos mais reduzidos e modo mais gradativo, diferentemente do que ocorre com as funções radiais simples, no qual o crescimento instável da solução é muito elevado, a melhoria na precisão dos resultados não foi significativa. Considerando a malha com 80 EC, 25 PI e  $\Delta t=0,05s$ , o gráfico da esquerda na Figura IV.29 mostra a resposta de tensões no engaste para a função radial simples; já no gráfico da direita, o resultado para a função exponencial. O melhor desempenho da função exponencial é bastante

discreto, indicando que talvez se esteja chegando ao máximo do que se pode aprimorar no modelo tradicional de funções locais da Dupla Reciprocidade usando elementos constantes.

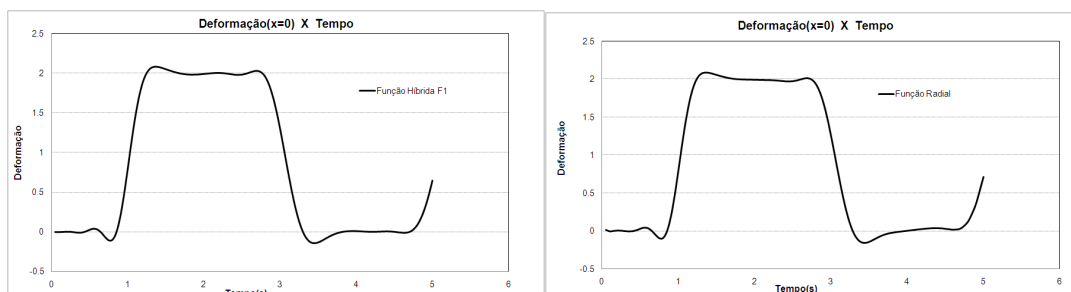


Figura IV.29– Tensões no engaste para malha com 80 EC, 25 PI e  $\Delta t=0,05s$ . Gráfico da esquerda, função radial simples; gráfico da direita, função exponencial híbrida F1.

Na figura IV.30 são mostradas e comparadas as curvas de resposta para dois tipos de funções exponenciais híbridas, as funções exponencial  $F1=e^{-r}[r^2-5r+4]$  e exponencial  $F2=e^{-r}[r^3-7r^2+9r]$  para um incremento de tempo igual a 0,05s. As curvas são muito semelhantes, mas o melhor desempenho foi da exponencial F1.

Em princípio pode-se pensar que todas as funções da mesma família apresentam comportamento similar, mas isso não é verdade na dinâmica. Basta tomar o comportamento das funções radiais simples e cúbica, que foram muito diferentes.

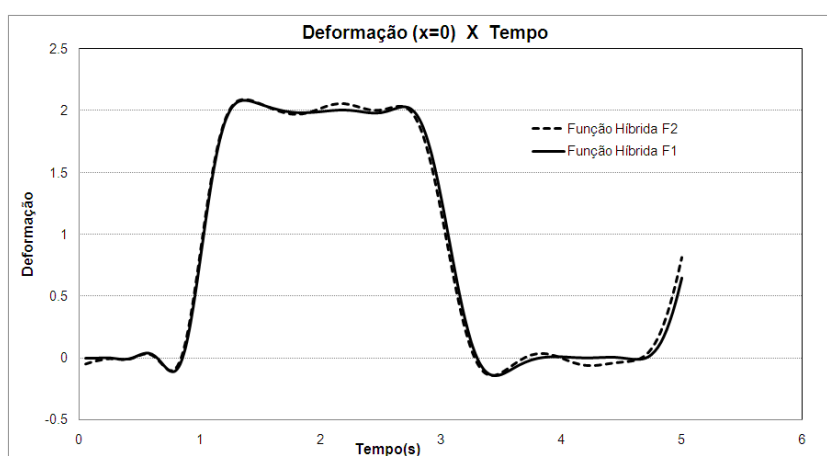


Figura IV.30 – Respostas para funções exponenciais híbridas para uma malha com 80 EC, 25 PI e  $\Delta t=0,05s$ . A curva contínua corresponde à função  $F1=e^{-r}[r^2-5r+4]$  e a curva tracejada corresponde a função  $F2=e^{-r}[r^3-7r^2+9r]$ .

No caso da família das funções exponenciais híbridas, considere uma função exponencial  $F_3$  dada por:

$$F_3 = e^{-r}(r+1/r) \Rightarrow \Psi = e^{-r} + D \ln r + C$$

Tomando valores de  $C$  e  $D$  nulos, tal função não possibilitou a integração estável das equações para qualquer intervalo de tempo.

#### **IV.6-FUNÇÕES ACRESCIDA**

Outra categoria de funções alternativas às funções radiais locais são as chamadas funções de interpolação globais. Ao contrário das radiais e outras definidas com origem nos pontos base, tais funções são referenciadas a um sistema global de coordenadas. De acordo com a geometria do domínio, há possibilidade de escolha de um tipo de função mais adequado, permitindo, em tese, melhores resultados. O trabalho de Partridge et al[14] dá maiores detalhes e sintetiza com clareza as vantagens e desvantagens de tal procedimento. O grande problema das funções globais é seu conflito com o aspecto de generalidade exigido das técnicas numéricas nas aplicações da engenharia. Inserem-se mais um condicionante ao bom desempenho das funções de interpolação, que já depende do tipo de modelo matemático envolvido. Com as funções globais, domínios retangulares são afins a determinada classe de funções globais, que não se comportam tão bem quando os domínios são circulares, exigindo outros tipos de função.

Por outro lado, existem táticas nas quais se procura combinar o efeito de diferentes funções sem fazer uma simples soma direta. É o caso da estratégia denominada de acréscimo de funções. Na realidade, é um procedimento semelhante à introdução de pontos internos interpolantes, mas combinando funções adicionais. Há um relativo êxito em certas aplicações estacionárias. Um bom exemplo é o esquema proposto por Goldberg e Chen [24], em que vários testes provaram que há um considerável aumento de precisão quando um conjunto de funções globais  $F^j$  é acrescido a um conjunto de funções radiais simples ou cúbicas. Tais funções globais e suas primitivas são:

$$F_a = 1 \rightarrow \Psi_a = (x^2 + y^2)/4$$

$$F_b = x \rightarrow \Psi_b = (x^3)/6$$

$$F_c = y \rightarrow \Psi_c = (y^3)/6$$

O esquema de acréscimo funciona matricialmente da seguinte forma: a partir de uma matriz básica composta dos pólos do contorno, introduzem-se novas linhas e colunas referentes às funções globais, que são referenciadas à origem do sistema de coordenadas adotado. Ressalte-se que qualquer mudança no posicionamento da origem do sistema não acarreta alteração nos resultados. No caso, são introduzidas 3 linhas e 3 colunas, para ajustar a matriz F e permitir sua inversão. A matriz F continua simétrica. Os termos em comum para as linhas e colunas acrescentadas recebem o valor zero, conforme mostra a figura IV.31. São acrescentados zeros também ao vetor das ações de domínio na posição referente aos graus de liberdade acrescentados. As matrizes  $\psi$  e  $\eta$  também são alteradas na quantidade de colunas.

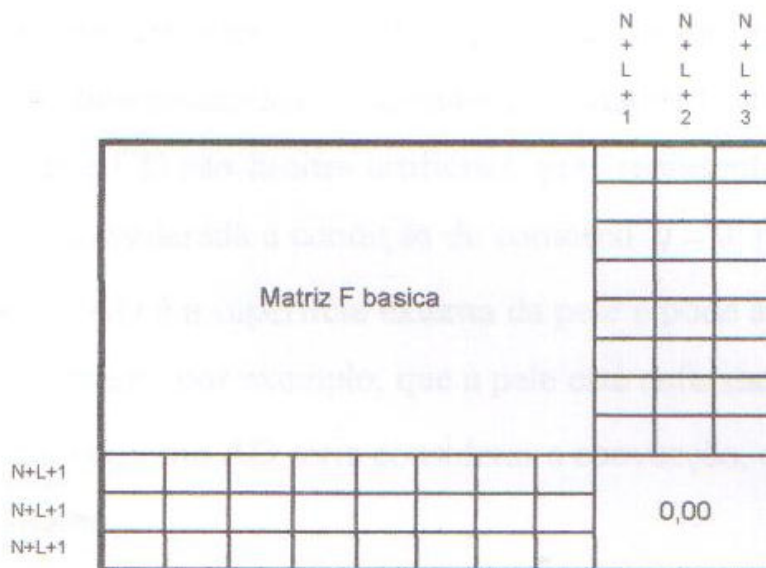


Figura IV.31. Esquema de montagem da matriz de interpolação F com acréscimo de funções

Em termos matriciais, o sistema acrescido pode ser escrito na seguinte forma, onde se distinguem os coeficientes  $\alpha$  relativos aos pólos de contorno, dos  $\alpha$  introduzidos pelas funções globais adicionais:

$$\begin{Bmatrix} F_{\text{contorno}} & F_{\text{acrescida}} \\ F_{\text{acrescida}} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{\text{contorno}} \\ \alpha_{\text{acrescida}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{\text{contorno}} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Da última equação deste sistema pode-se retirar a seguinte identidade:

$$\{F_{acrescida}\}\{\alpha_{contorno}\} = 0$$

Que demonstra a relação de dependência entre os novos coeficientes das funções acrescidas.

Para ilustrar, o problema de uma barra engastada submetida ao seu peso próprio é resolvido pelo esquema de Goldberg e Chen, acrescentando funções, e também pelo esquema tradicional, incluindo 4 pontos internos interpolantes, homogeneamente distribuídos no domínio. A tabela IV.1 ilustra as características desse problema. Foram empregados 36 elementos de contorno constantes, de mesmo tamanho.

Os resultados são apresentados na forma de duas tabelas. A primeira, Tabela IV.1, mostra os resultados dos deslocamentos ao longo do comprimento da barra e a segunda, Tabela IV.2, apresenta os resultados para as tensões no engaste.

Tabela IV.1-Deslocamento ao longo da Barra

<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>GOLDBERG</b>	<b>4 PÓLOS</b>	<b>ANALÍTICA</b>
.6250000E-01	.0000000E+00	.5699349E-01	.5568466E-01	.605468E-01
.1875000E+00	.0000000E+00	.1671508E+00	.1652570E+00	.1796875E+00
.3125000E+00	.0000000E+00	.2610629E+00	.2579955E+00	.2636718E+00
.4375000E+00	.0000000E+00	.3391305E+00	.3350341E+00	.3417968E+00
.5625000E+00	.0000000E+00	.4014864E+00	.3965317E+00	.4042968E+00
.6875000E+00	.0000000E+00	.4481641E+00	.4425087E+00	.4511718E+00
.8125000E+00	.0000000E+00	.4791271E+00	.4728676E+00	.4824218E+00
.9375000E+00	.0000000E+00	.4942311E+00	.4866518E+00	.4980468E+00
.1000000E+01	.6250000E-01	.4932891E+00	.4883281E+00	.5000000E+00
.1000000E+01	.1875000E+00	.4960263E+00	.4900398E+00	.5000000E+00
.1000000E+01	.3125000E+00	.4965449E+00	.4904714E+00	.5000000E+00
.1000000E+01	.4375000E+00	.4966825E+00	.4906371E+00	.5000000E+00
.1000000E+01	.5625000E+00	.4965970E+00	.4906370E+00	.5000000E+00



.1000000E+01	.6875000E+00	.4962664E+00	.4904714E+00	.5000000E+00
.1000000E+01	.8125000E+00	.4954602E+00	.4900398E+00	.5000000E+00
.1000000E+01	.9375000E+00	.4921506E+00	.4883281E+00	.5000000E+00

Tabela IV.2- Tensões no engaste da Barra

X	Y	GOLDBERG	4 PÓLOS	ANALÍTICA
.0000000E+00	.9375000E+00	-.1037843E+01	-.1014897E+01	-.1000000E+01
.0000000E+00	.8125000E+00	-.9777530E+00	-.9696603E+00	-.1000000E+01
.0000000E+00	.6875000E+00	-.9904165E+00	-.9791338E+00	-.1000000E+01
.0000000E+00	.5625000E+00	-.9917414E+00	-.9802248E+00	-.1000000E+01

Percebe-se que o esquema de Goldberg e Chen apresentou resultados superiores ao da malha com 4 pólos interpolantes, pelo menos para esse caso onde a ação de domínio é constante.

Todavia, quando o mesmo esquema é testado no problema do impacto na barra, a sua resposta é inferior à obtida com o modelo original, sem acréscimo de funções, e mesmo sem pontos internos interpolantes, conforme mostra a figura IV.32. A faixa de integração é igualmente reduzida quando se usa o esquema de Goldberg e Chen.

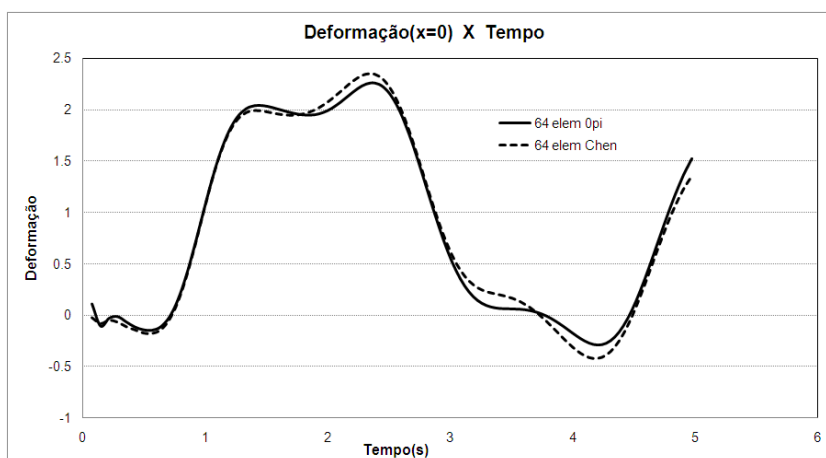


Figura IV.32. -Malha de 64 elementos  $\Delta t=0.07s$ , onde a curva tracejada representa o esquema de Goldberg e Chen e a contínua representa o modelo tradicional sem acréscimo de funções, utilizando a função radial simples, sem pontos internos interpolantes.

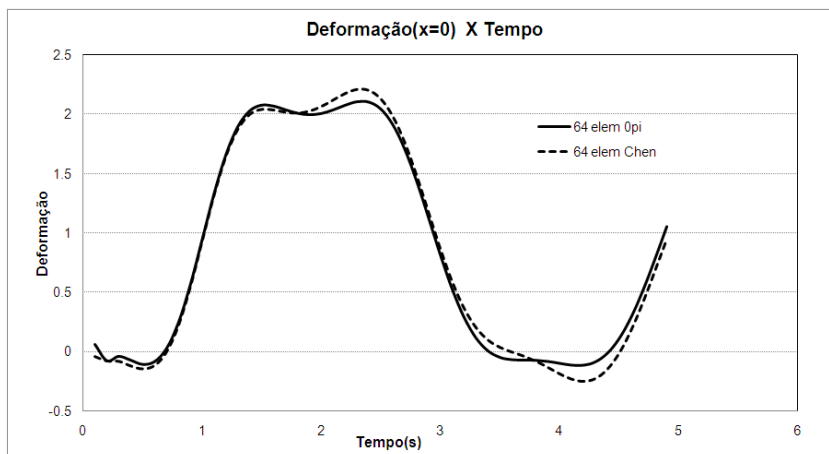


Figura IV.33- Malha de 64 elementos  $\Delta t=0.1s$ , onde a curva tracejada representa o esquema de Goldberg e Chen e a contínua representa o modelo tradicional sem acréscimo de funções e sem pontos internos, utilizando a função radial simples

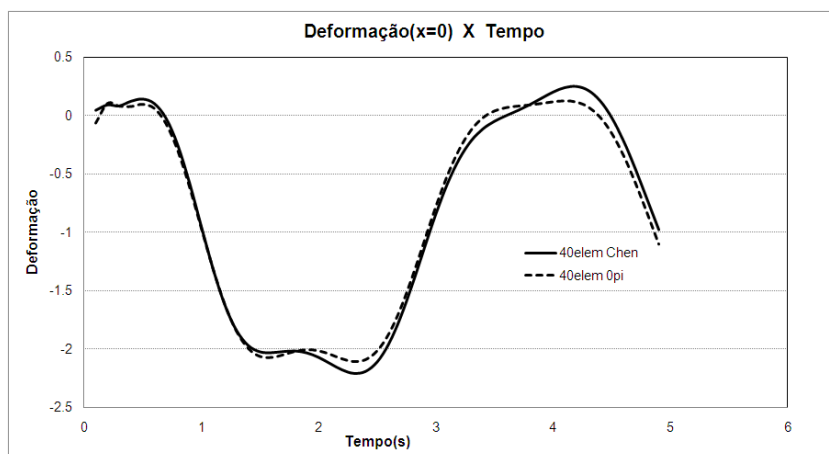


Figura IV.34- Malha de 40 elementos  $\Delta t=0.1s$ , onde a curva tracejada representa o esquema tradicional sem pontos internos e a contínua representa o esquema de acréscimo de funções.

Portanto, o esquema proposto por Goldberg e Chen [24], em que testes provou que há um considerável aumento de precisão quando um conjunto de funções  $F^j=(1,x,y)$  é acrescido a um conjunto de funções radiais simples ou cúbicas realmente apresenta relativo êxito em certas aplicações estacionárias. Todavia, quando o mesmo esquema é testado no problema do impacto na barra, a sua resposta é inferior ao modelo tradicional mesmo sem pontos internos. Naturalmente, a resposta do modelo original ainda seria melhor caso fossem introduzidos pontos internos interpolantes, conforme exposto anteriormente.

#### IV.7-SIMULAÇÃO EM BARRAS DE SEÇÃO LINEARMENTE VARIÁVEL

Com base nos resultados obtidos para a solução numérica do problema de propagação de ondas em barras de seção constante, nesta seção são feitas simulações para obtenção da resposta dinâmica em barras de seção linearmente variável, cuja equação de governo também se enquadra na elasto-dinâmica escalar. As melhores funções de interpolação são aqui empregadas e o avanço da solução no tempo é feito apenas com o esquema Houbolt.

O problema proposto consiste de uma barra engastada numa extremidade e sujeita a uma carga súbita de intensidade constante na outra.

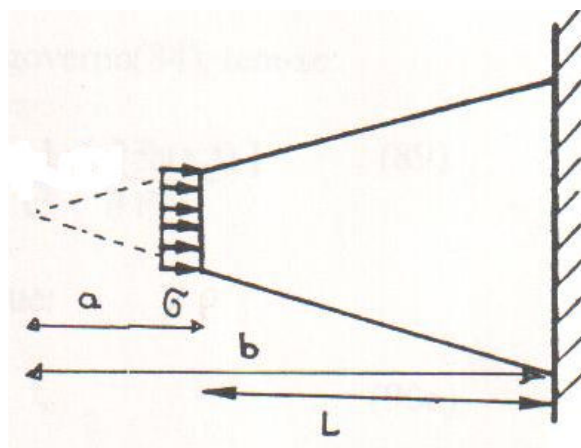


Figura IV.35-Barra homogênea comprimida de seção variável

A resposta analítica ao longo do tempo para o deslocamento da extremidade livre para  $a=0,6u.c$  (unidades de comprimento) e  $b=3,0u.c$  é mostrada na figura IV.36 a seguir.

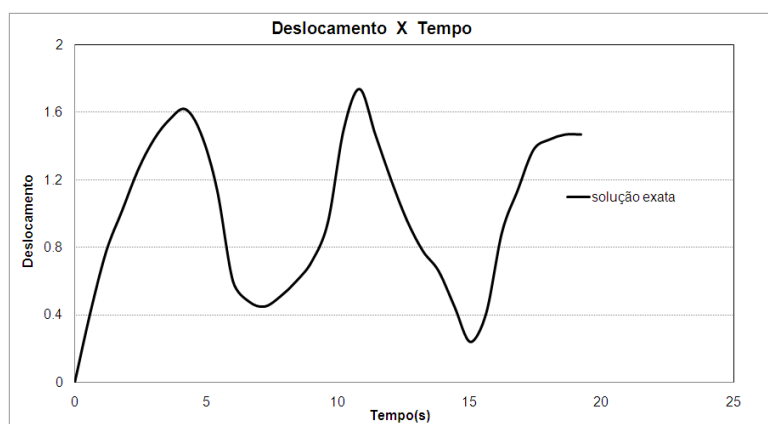


Figura IV.36- Solução exata para o deslocamento na extremidade livre ao longo do tempo

A solução estática para esse problema apresenta um deslocamento máximo de  $1.6u.c.$  Numa barra de seção constante, a resposta dinâmica para uma carregamento dessa natureza amplifica o valor estático em duas vezes. Numa barra de seção variável, caso a seção engastada seja a de maior área, há redução desse valor; caso a seção engastada seja a de menor área, o comportamento se inverte. Ressalta-se que a relação  $b/a$  é grandeza importante na definição do comportamento dinâmico de um problema dessa natureza. Para o tipo de condição de contorno imposta, verifica-se que o aumento da relação  $b/a$  reduz o coeficiente de amplificação dinâmica para os deslocamentos, enquanto aumenta esse mesmo coeficiente para as tensões normais.

A solução analítica para tensões ou deformações no engaste no decorrer do tempo é apresentada a seguir, na figura IV.37. O valor estático da deformação nesse caso é aproximadamente 3.4 vezes menor do que o dinâmico. Vê-se que há significativa amplificação dinâmica nesse caso, conforme mostra o gráfico citado.

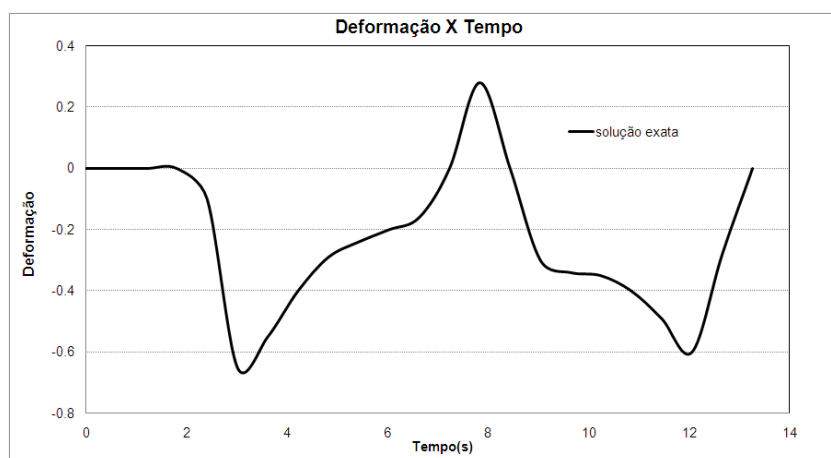


Figura IV.37- Solução exata para a deformação no engaste ao longo do tempo

Percebe-se claramente que enquanto a onda não atinge o engaste, o valor da deformação é nulo. Considerando a velocidade de propagação unitária, após **3,4s** há, então, súbita ascensão nos valores de deformação.

Da mesma maneira que para o problema da barra de seção constante, a obtenção de respostas numéricas com boa precisão para as deformações é mais difícil, por conta dos altos modos que dinamicamente as compõem. Assim sendo, os testes que

se seguem concentram-se especialmente na representação da resposta das deformações ou tensões no engaste.

Diante dos bons resultados das funções exponenciais híbridas, primeiramente são mostrados os resultados para uma malha composta por 65 elementos de contorno constantes, de praticamente mesmo tamanho. São considerados 25 pontos internos interpolantes. A malha utilizada é apresentada esquematicamente no Apêndice C.

Para ressaltar a importância dos pontos internos nesse problema, são apresentados os resultados para tensões para um intervalo de integração igual a 0.05s, considerando duas situações: com os 25 pontos internos e na ausência completa deles. Ambas as respostas estão com baixa qualidade, mas na ausência de pólos no interior a fase inicial de repouso inexistente (antes da frente de onda chegar ao ponto considerado) e descabidas tensões compressivas aparecem, denotando a má representação da inércia do sistema. Nesse problema, mais do que no problema da barra de seção constante, a introdução de pontos internos se faz necessária para melhorar significativamente a resposta.

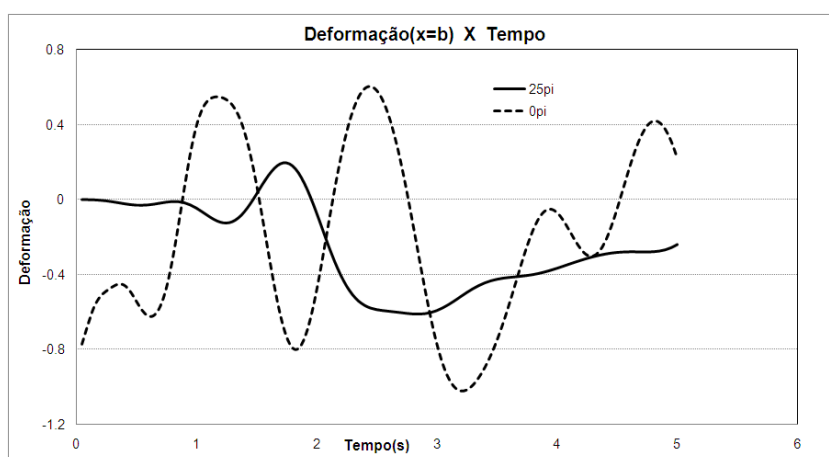


Figura IV.38- Comparação dos valores de Deformação para uma malha de 65 elementos para  $\Delta t=0.05s$

Para avaliar o efeito do passo de integração, foram feitas uma nova simulação com a malha composta de 25 pólos no interior com um intervalo de tempo menor, igual a 0,02s. Esse resultado é comparado com o resultado para passo igual a 0,05s é mostrado na figura IV.39.

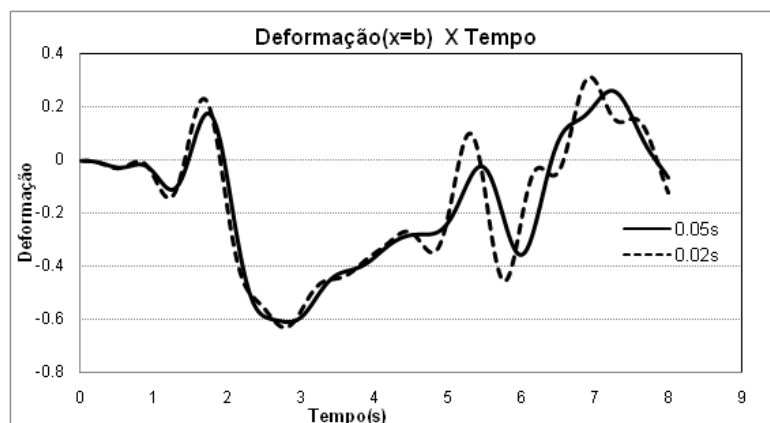


Figura IV.39- Valores de Deformação para diferentes passos. Malha de 65 elementos e 25 PI

Observam-se oscilações mais intensas com a resposta obtida com menor passo de integração, denotando a maior presença dos altos componentes modais espúrios, fazendo com que a resposta fique mal representada. Com base nisso, a próxima comparação envolve o uso de um incremento de integração maior, de forma que a maior quantidade de amortecimento fictício filtre as contribuições modais mais elevadas e apresente uma resposta mais próxima da solução analítica. Esse resultado é apresentado na figura IV.40 e de fato que para o passo maior ocorre uma melhora da resposta quando comparada com o passo menor, devido à eliminação dos altos componentes modais mal representados.

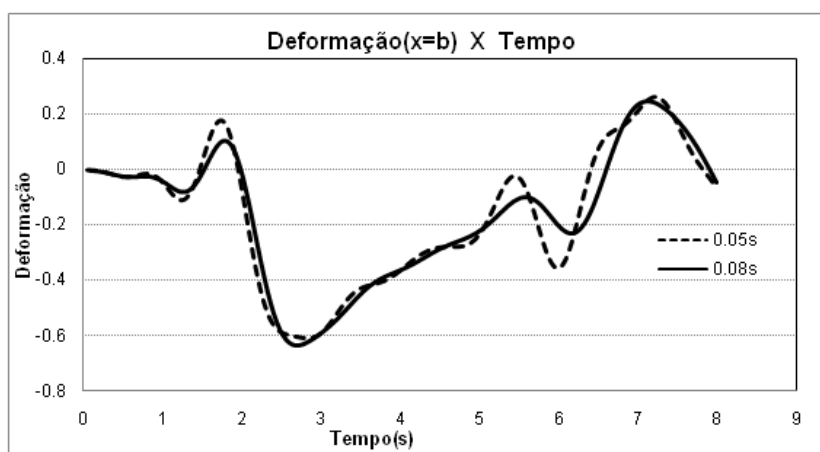


Figura IV.40-Comparação dos valores de Deformação para passos diferentes, malha de 65 elementos e 25 PI.

Por fim, aumenta-se ainda mais o passo de integração e conseqüentemente o amortecimento numérico, o que resulta na resposta mais próxima da solução analítica. A elevação indevida no instante que antecede à chegada da frente da onda no engaste desaparece, mostrando que tal fenômeno se devia à errada majoração de um alto modo na resposta.

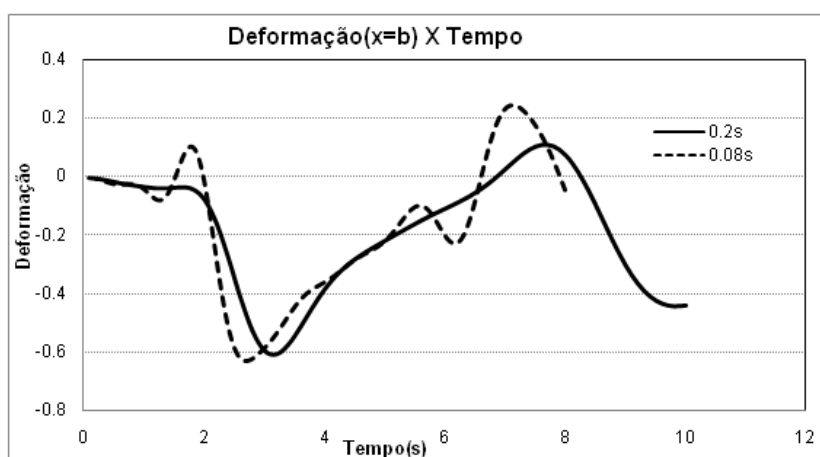


Figura IV.41-Comparação dos valores de Deformação para passos diferentes, malha de 65 elementos 25 PI

Em resumo, para a função de interpolação  $e^{-r}(r^2 - 5r + 4)$ , a resposta com a malha de 65 elementos, 25 PI, com intervalo de integração  $\Delta t=0.2s$  foi a que melhor se aproximou da solução exata.

Embora os resultados anteriores sejam razoáveis, a seguir é feita a simulação do mesmo problema usando a função radial simples, a única entre todas as demais que produziu uma resposta estável para esse problema. Todas as demais funções produziram instabilidade, para qualquer intervalo de tempo, demonstrando que esse problema, nas condições b/a consideradas, é ainda mais sensível numericamente do que a barra com seção constante.

Realmente, para a função radial simples o valor mínimo do  $\Delta t$  capaz de produzir resposta estável sem pontos internos foi de 0.07s. Apenas com a introdução de pontos internos foi possível utilizar passos menores, reforçando o fato de que para essa função, ainda mais necessária é a utilização de pontos internos interpolantes.

Fica mais uma vez provado que a inclusão de pólos internos aumenta a faixa de utilização do incremento de integração  $\Delta t$ .

Na figura IV.42 a seguir são comparadas as respostas para a função radial simples e a exponencial híbrida, com a mesma malha com 65 pontos nodais no contorno e 25 pólos no interior. Os resultados são semelhantes, mas, como seria de se esperar, maiores oscilações são produzidas pela função radial simples, pois que a exponencial híbrida possui um decaimento natural em sua constituição.

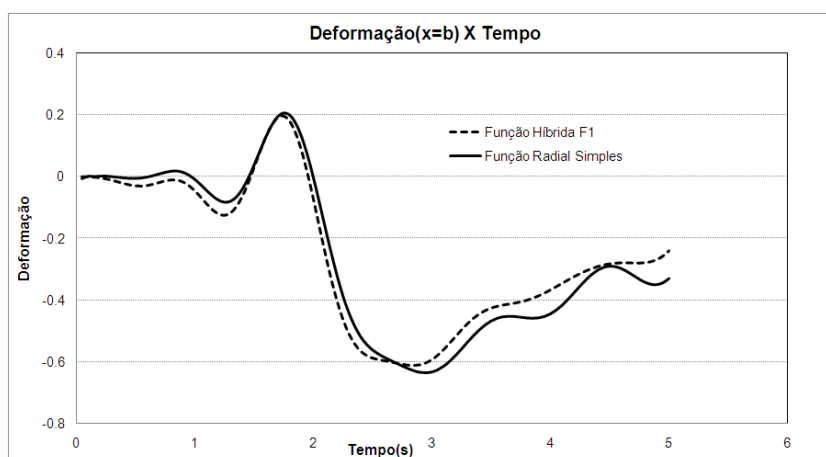


Figura IV.42- Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos, 25PI, e  $\Delta t=0.05s$

Ressalta-se também que a função radial simples apresenta uma melhor inicialização na resposta e atinge valores maiores de tensão, aproximando-se mais da solução exata do que a função exponencial híbrida  $e^{-r}(r^2 - 5r + 4)$ .

Na figura IV.43 seguinte, reduz-se o incremento de integração e, como seria de se esperar, as oscilações se ampliaram, por conta da ação menos amortecida dos altos modos espúrios.



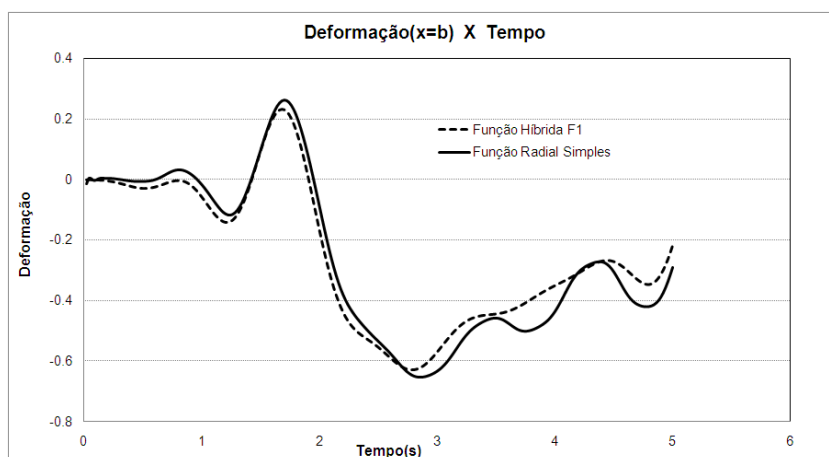


Figura IV.43- Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos, 25PI e  $\Delta t=0.02s$

Surpreendentemente, quando se aumenta o incremento de integração, para o valor ótimo anteriormente encontrado, vê-se que a resposta da função radial simples nesse caso foi mais precisa, conforme se pode observar na figura IV.44.

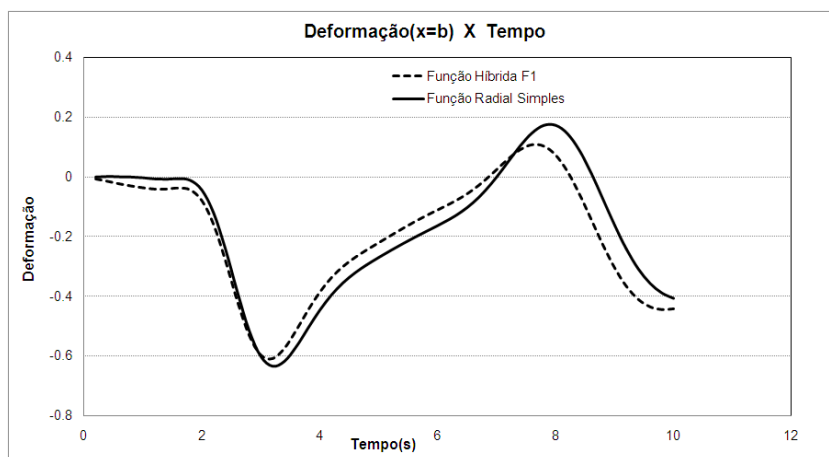


Figura IV.44- Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos, com 25 PI e  $\Delta t=0.2s$

Tanto os valores de pico são menos amortecidos, quanto à fase de inicialização possui melhor precisão, melhor representando o repouso antes da chegada da frente de onda. A comparação do resultado da função radial simples com a resposta analítica é apresentada na figura IV.45 a seguir.

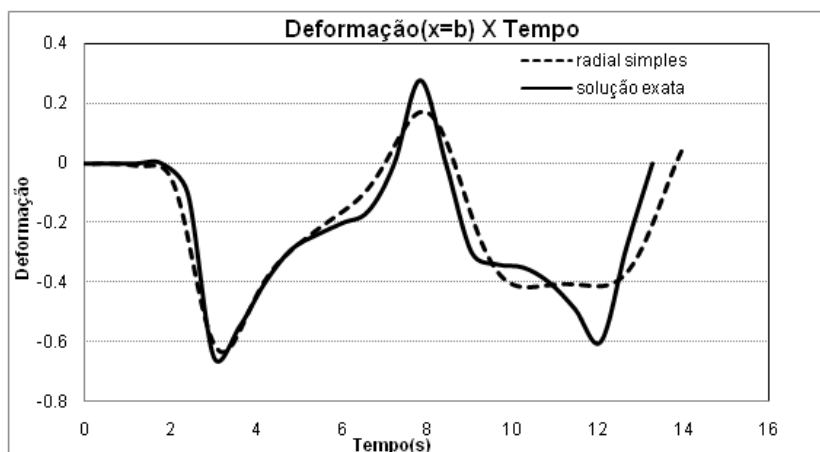


Figura IV.45-Valores de Deformação para uma malha de 65 elementos 25 PI e  $\Delta t=0.2s$

Dentre todas as funções utilizadas, essas duas funções foram às únicas capazes de oferecer respostas razoáveis para tensão na barra homogênea de seção linearmente variável, considerando que foram feitos testes com outras funções dentre elas, a função radial cúbica ( $R^3$ ), função spline-plate (logarítmica), a função  $e^{-r}(r^3 - 7r^2 + 9r)$  e a função  $e^{-r}$ . Nem todas as respostas divergiram completamente, mas foram muito ruins, com restrita faixa de passo de integração para aquisição de uma solução estável. Ressalta-se que a função radial cúbica, tal como ocorreu na barra de seção constante, não permitiu a geração de resultados estáveis.

Cabe ressaltar que embora os resultados com a função radial nesse caso tenha sido superior, as faixas de integrabilidade da função exponencial híbrida foram maiores.

Para ilustrar, a seguir são apresentadas as curvas de resposta para os deslocamentos na extremidade livre, nas condições em que se obtiveram os melhores resultados para as tensões. Nota-se o forte amortecimento na solução numérica da função exponencial híbrida para os deslocamentos, onde apenas o ciclo inicial da resposta foi razoavelmente simulado.

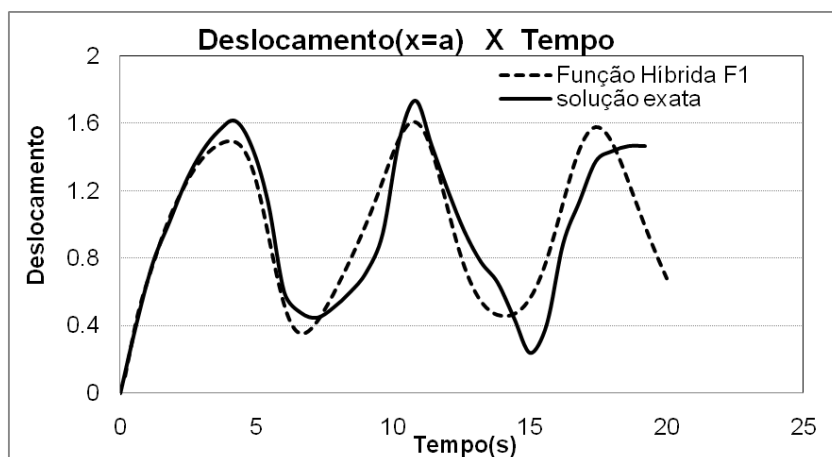


Figura IV.46- Valores de Deslocamento para uma malha de 65 elementos, 25PI,  $\Delta t=0.2s$ , função  $e^{-r}(r^2 - 5r + 4)$

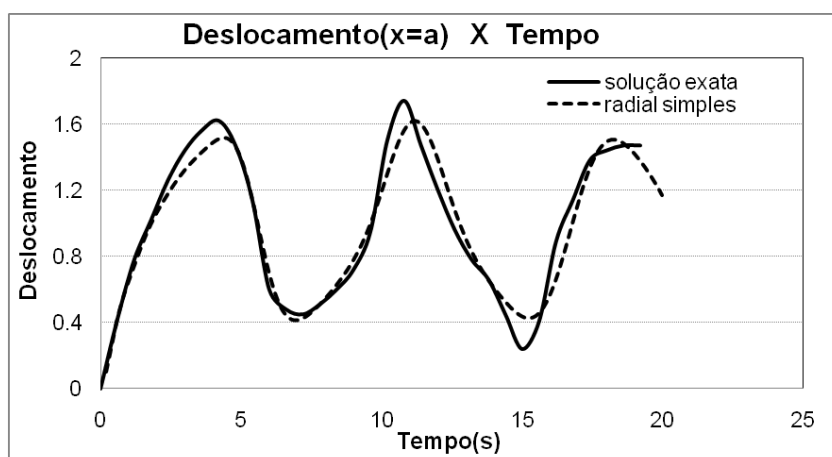


Figura IV.47 -Valores do Deslocamento para uma malha 65 elementos, 25PI e  $\Delta t=0.2s$  Função Radial Simples

Como era de se esperar, uma vez que o formato da malha para simulação da barra de seção linearmente variável não é retangular, os resultados obtidos com as funções globais acrescidas foram completamente inconsistentes. Não se tratou exclusivamente de instabilidade numérica, mas de valores absurdamente pequenos por uma parte significativa do tempo de resposta, antes de se perder a estabilidade de modo abrupto. Isso mais uma vez reforça que o uso de funções globais está ligado a uma expectativa da resposta numérica, fato razoavelmente possível de se prever em problemas estacionários, mas completamente sem plausibilidade em casos dinâmicos.

## CAPÍTULO V

---

### CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na Dupla Reciprocidade existem dificuldades no controle numérico das vibrações espúrias produzidas pelos altos modos da resposta no cálculo das tensões. Utilizando-se técnicas incrementais é necessária a utilização de esquemas incondicionalmente estáveis com amortecimento fictício.

Dos mais conhecidos esquemas, Houbolt e Wilson- $\theta$  oferecem resultados razoáveis, com precisão semelhante. Apesar da flexibilidade desse último no controle da quantidade de amortecimento, esta característica não oferece vantagem efetiva na precisão dos resultados. Diante da maior simplicidade do esquema Houbolt, não há razão para substituí-lo nas modelagens com a FDR.

Outro fator importante é que a adição de pólos altera o valor do incremento de tempo tido como ideal, como se observou em malhas com pontos internos onde o valor ideal do incremento se reduziu, além de ampliar a faixa de integração.

Outro problema grave da Dupla Reciprocidade em dinâmica é o erro cometido pelas funções de interpolação na representação das propriedades de inércia, que modifica a estabilidade dos esquemas de avanço no tempo e impede o emprego de passos reduzidos. Portanto, a melhoria na constituição da inércia é fundamental. Entre as estratégias disponíveis para melhorar o desempenho encontram-se a introdução de pólos e a identificação de uma função de interpolação mais adequada.

As funções híbridas utilizadas, embora não apresentem extraordinária melhoria na precisão dos resultados, permitiu a redução do tempo mínimo requerido para obtenção de uma solução estável, o que é bastante significativo, pois o intervalo restrito de valores utilizáveis de passos de integração é um fator nocivo ao uso corrente da FDR. Ressalta-se que os testes ratificaram o pertinência do valor do intervalo de tempo recomendado pela relação de Courant-Friedrich, que oferece uma estimativa importante para a integração estável das equações.

Outro aspecto a se destacar foi o desempenho ruim da técnica de acréscimo de funções globais, que não apresentou êxito e, como se suspeitava, é recomendada apenas para aplicações estáticas nas quais a malha seja retangular. Os testes com a barra de seção variável mostraram isso, pois sequer houve a obtenção de uma resposta estável.

Outra conclusão importante é que funções de interpolação da mesma família, como as funções radiais cúbicas e de ordem superior, muito boas em aplicações outras como a estática e problema difusivos-advectivos, não apresentam comportamento similar em dinâmica, como foi possível observar em várias simulações realizadas neste trabalho.

Através das simulações realizadas nesta dissertação observou-se que a introdução de pólos melhora apreciavelmente as propriedades de inércia no interior do domínio. Porém, foi observado que, ao aumentar a quantidade de pontos internos interpolantes, é preciso ajustar o incremento ou passo de integração, reduzindo-o. O excesso na inclusão desses pontos internos, em comparação com a quantidade de elementos de contorno, pode ocasionar uma deterioração da resposta, por conta da presença de uma quantidade maior de componentes modais mais elevados, componentes esses mal representados. Outro fator importante é que a adição de pólos altera o valor do incremento de tempo tido como ideal, como se observou em malhas com pontos internos onde o valor ideal do incremento se reduziu, além de ampliar a faixa de integração.

Ressalta-se a introdução de pólos deve ser bem distribuída em todo domínio, uniformemente, devendo-se ponderar a quantidade deles em função do número de elementos contorno usados e distanciá-los suficientemente do contorno, de acordo com o tamanho dos elementos.

Em dinâmica, deve-se procurar usar malhas de elementos de contorno homogêneas, ou seja, com os elementos possuindo sempre que possível, o mesmo tamanho. Para a barra de seção variável, o melhor desempenho das malhas homogêneas foi evidente.

O grande problema da formulação com Dupla Reciprocidade em dinâmica é que o uso de intervalos muito grandes não permite uma boa integração das equações e passos muito pequenos aumenta a presença dos altos componentes modais mal

representados. Obter um valor ótimo do passo de integração é um fator de extrema importância para o controle dos altos modos mal representados, simulações realizadas mostraram que a variação do passo de integração altera a resposta do problema, conforme mostrado neste trabalho.

Obter o equilíbrio entre a quantidade de pontos internos, o refinamento da malha, o passo de integração e a função de interpolação utilizada são essenciais para uma melhoria dos resultados. Qualquer um desses fatores que esteja mal representado altera significativamente a resposta final, trabalhar em conjunto todos esses fatores é uma forma de melhorar resultados em problemas de dinâmica com Dupla Reciprocidade. Outro fator que influencia a precisão dos resultados é a ordem do elemento de contorno utilizado nas simulações. Neste trabalho, em todos os testes realizados foram utilizados elementos constantes. Para completa investigação do comportamento das funções de interpolação seria necessária a realização de simulações com elementos de ordens superiores. Tais testes podem ser sugeridos para trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. and WROBEL, L. C., **“Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering”**. Sprinter-Verlag, New York, 1984.
- [2] BREBBIA, C. A & DOMINGUES, J.,”Boundary Elements An Introductory Course” Wit Press.Pub., Southampton,1992.
- [3] WROBEL, L.C. & ALIABADI, M.H., **“The Boundary Element Method”**, Wiley,Chichester, 2002
- [4] BREBBIA, C. A. & WALKER, S., **“Boundary Element Techniques in Engineering”**. Newnes-Buttterworths, U.K.,1980.
- [5] BREBBIA, C. A., **“The Boundary Element Method for Engineers”**, Pentech Press,1978.
- [6] KREISZIG,E.,”Matemática Superior”,LTC,Rio de Janeiro,1976.
- [7] BUTKOV, E., **“Mathematical Physics”**. Addison Wesley, Massachussets, 1973.
- [8] NARDINI, D., BREBBIA, C. A., (1982), **“A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements”**. Proceeding of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering, Southampton.
- [9] GRAFF, K. F., **“Wave Motion in Elastic Solids”**. Dover Publ. New York , 1991.
- [10] TIMOSHENKO, S.P.,GOODIER J. N.,Teoria da Elasticidade,Guanabara 2 Rio de Janeiro,1980.
- [11] LAI, W.M., RUBIN , D.,KREMPPL, E.,”**Introduction to Continuum Mechanics”**

- [12] DAN, M. L., **“Duas Novas Formulações do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas a Problemas Advectivos-Difusivos”**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Depto de Engenharia Mecânica, 2004.
- [13] SANTOLIN, WAGNER DALVI, **”Análise Dinâmica de Problemas Escalares Não-Homogêneos Através do Método dos Elementos de Contorno”**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Depto de Engenharia Mecânica, 2006.
- [14] PARTRIDGE, P. W., BREBBIA, C. A., WROBEL, L.C., **“The Dual Reciprocity Boundary Element Method”**. Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1992.
- [15] PARTRIDGE, P. W., **“Approximation functions in the dual reciprocity method”**. International journal of boundary elements communications, v. 8, n. 1, 1997.
- [16] GOLBERG, M. A. et al., **“Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method”**. Computational mechanics, v.21, p. 141-148 1997.
- [17] LOEFFLER, C. F. & MANSUR, W. J., **“Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems. Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer”**. Computational Mechanics Publishing, UK, pp 105-124, 1987.
- [18] POTTER, D., **“Computational Physics, John Wiley,Chichester,1980”**
- [19] BATHE, K. J., **“Finite element procedures in engineering analysis”**. USA: Prentice-Hall, 1982.
- [20] CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J., **“Dynamics of Structures”**. International Student Edition. Tokyo: McGraw – Hill, 1982.



- [21] CASTILLO, G.A.V., LOEFFLER, C.F., **Performance Evaluation of Some New Time Integration Methods in Elastodynamic Problems Formulated by Dual Reciprocity Boundary Element Method**, Proceedings of XXV BEM, pp. 329-338, Split, Croatia, (2003).
- [22] CASTILLO, G. A., **“Análise comparativa do desempenho dos esquemas incrementais de avanço no tempo com o método dos elementos de contorno”**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica. Vitória, ES, maio de 2001.
- [23] LOEFFLER, C.F., CRUZ, A.L., BULCÃO, A., **Alguns Aspectos Computacionais das Funções de Interpolação Radiais e sua Aplicação no Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade**, Anais do XXIX CILAMCE Maceió, 2008.
- [24] GOLDBERG, M.A., CHEN C.S., **The Theory of radial Basis Function applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential Equations**, Boundary Element Comm. 5 pp.57-61, (1994).

## APÊNDICES

## APÊNDICE A

### ALGORITMO HOUBOLT

#### Inicialização

$$\dot{U}^t = \frac{U^{t+\Delta t} - U^t}{\Delta t} = \frac{U^t - U^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

$$U^{t+\Delta t} = 2U^t - U^{t-\Delta t} \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{U}^t = \frac{U^{t+\Delta t} - U^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (\text{A.3})$$

$$U^{t+\Delta t} = 2\Delta t \dot{U}^t + U^{t-\Delta t} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.2) em (A.4) é obtido (A.5), ou seja:

$$U^{t-\Delta t} = U^t - \Delta t \dot{U}^t \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{U}^{t-\Delta t} = \frac{U^t - U^{t-\Delta t}}{\Delta t} = \frac{U^{t-\Delta t} - U^{t-2\Delta t}}{\Delta t} \quad (\text{A.6})$$

$$U^{t-2\Delta t} = 2U^{t-\Delta t} - U^t \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.5) em (A.7) é obtido (A.8):

$$U^{t-2\Delta t} = U^t - 2\Delta t \dot{U}^t \quad (\text{A.8})$$

Sendo as equações (A.9) e (A.10) as aproximações das acelerações e velocidades respectivamente, ou seja:

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2U^{t+\Delta t} - 5U^t + 4U^{t-\Delta t} - U^{t-2\Delta t}) \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11U^{t+\Delta t} - 18U^t + 9U^{t-\Delta t} - 2U^{t-2\Delta t}) \quad (\text{A.10})$$

Considerando a equação matricial mostrada no capítulo III para um instante  $t+\Delta t$  pode-se escrever:

$$M\ddot{U}^{t+\Delta t} + HU^{t+\Delta t} = Gq^{t+\Delta t} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo a equação (A.9) na equação matricial (A.11) obtêm-se:

$$M \frac{1}{\Delta t^2} (2U^{t+\Delta t} - 5U^t + 4U^{t-\Delta t} - U^{t-2\Delta t}) + HU^{t+\Delta t} = Gq^{t+\Delta t}$$

$$2MU^{t+\Delta t} - 5MU^t + 4MU^{t-\Delta t} - MU^{t-2\Delta t} + \Delta t^2 HU^{t+\Delta t} = Gq^{t+\Delta t} \Delta t^2$$

$$[2M + \Delta t^2 H]U^{t+\Delta t} - \Delta t^2 Gq^{t+\Delta t} = 5MU^t - 4MU^{t-\Delta t} + MU^{t-2\Delta t} \quad (\text{A.12})$$

## APÊNDICE B

### ALGORITMO WILSON- $\theta$

Sabendo-se que  $\tau$  denota um incremento no tempo, onde  $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$ , então para um intervalo  $t$  até  $t+\theta\Delta t$ , é assumido que [19]:

$$\ddot{U}^{t+\tau} = \ddot{U}^t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) \quad (\text{B.1})$$

Integrando a equação (B.1) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\tau} \ddot{U}^{t+\tau} d\tau &= \int_t^{t+\tau} \ddot{U}^t d\tau + \int_t^{t+\tau} \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) \\ \dot{U}^{t+\tau} - \dot{U}^t &= \dot{U}^t \tau + \int_t^{t+\tau} \frac{\tau}{\theta\Delta t} \ddot{U}^{t+\theta\Delta t} d\tau - \int_t^{t+\tau} \frac{\tau}{\theta\Delta t} \ddot{U}^t d\tau \\ \dot{U}^{t+\tau} - \dot{U}^t &= \dot{U}^t \tau + \frac{\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} \tau^2}{2\theta\Delta t} - \frac{\ddot{U}^t \tau^2}{2\theta\Delta t} \\ \dot{U}^{t+\tau} &= \dot{U}^t + \dot{U}^t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Integrando a equação (B.2) obtêm-se:

$$\begin{aligned} U^{t+\tau} - U^t &= \int_t^{t+\tau} \dot{U}^t d\tau + \int_t^{t+\tau} \dot{U}^t \tau d\tau + \int_t^{t+\tau} \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) d\tau \\ U^{t+\tau} - U^t &= \dot{U}^t \tau + \frac{\dot{U}^t \tau^2}{2} + \int_t^{t+\tau} \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} \ddot{U}^{t+\theta\Delta t} d\tau - \int_t^{t+\tau} \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} \ddot{U}^t d\tau \\ U^{t+\tau} - U^t &= \dot{U}^t \tau + \frac{\dot{U}^t \tau^2}{2} + \frac{\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} \tau^3}{6\theta\Delta t} - \frac{\ddot{U}^t \tau^3}{6\theta\Delta t} \\ U^{t+\tau} &= U^t + \dot{U}^t \tau + \frac{\dot{U}^t \tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Escrevendo as equações (B.2) e (B.3) no instante  $t+\theta\Delta t$  pode-se escrever:

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \dot{U}^t + \ddot{U}^t \theta\Delta t + \frac{(\theta\Delta t)^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t)$$

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \dot{U}^t + \ddot{U}^t \theta\Delta t + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t)$$

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \dot{U}^t + \ddot{U}^t \theta\Delta t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t)$$

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \dot{U}^t + \theta\Delta t \left( \frac{1}{2} \ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \frac{1}{2} \ddot{U}^t \theta\Delta t + \ddot{U}^t \theta\Delta t \right)$$

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \dot{U}^t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} + \ddot{U}^t) \quad (\text{B.4})$$

$$U^{t+\theta\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \theta\Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}^t (\theta\Delta t)^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t} \theta^3 \Delta t^3 (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t)$$

$$U^{t+\theta\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \theta\Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}^t \theta^2 \Delta t^2 + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t)$$

$$U^{t+\theta\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \theta\Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}^t \theta^2 \Delta t^2 + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} \ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} \ddot{U}^t$$

$$U^{t+\theta\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \theta\Delta t + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{U}^t) \quad (\text{B.5})$$

Isolando o termo  $\ddot{U}^{t+\theta\Delta t}$  da equação (B.5), obtêm-se  $\ddot{U}^{t+\theta\Delta t}$  em função de  $U^{t+\theta\Delta t}$ , ou seja:

$$\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (U^{t+\theta\Delta t} - U^t) - \frac{6}{\theta\Delta t} (\dot{U}^t) - 2\ddot{U}^t \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a equação (B.6) em (B.4), obtêm-se  $\dot{U}^{t+\theta\Delta t}$  em função de  $U^{t+\theta\Delta t}$ , ou seja:

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (U^{t+\theta\Delta t} - U^t) - 2\dot{U}^t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{U}^t \quad (\text{B.7})$$

Considerando a equação matricial mostrada no capítulo III no instante  $t+\theta\Delta t$  pode-se escrever:

$$M\dot{U}^{t+\theta\Delta t} + HU^{t+\theta\Delta t} = Gq^{t+\theta\Delta t} \quad (\text{B.8})$$

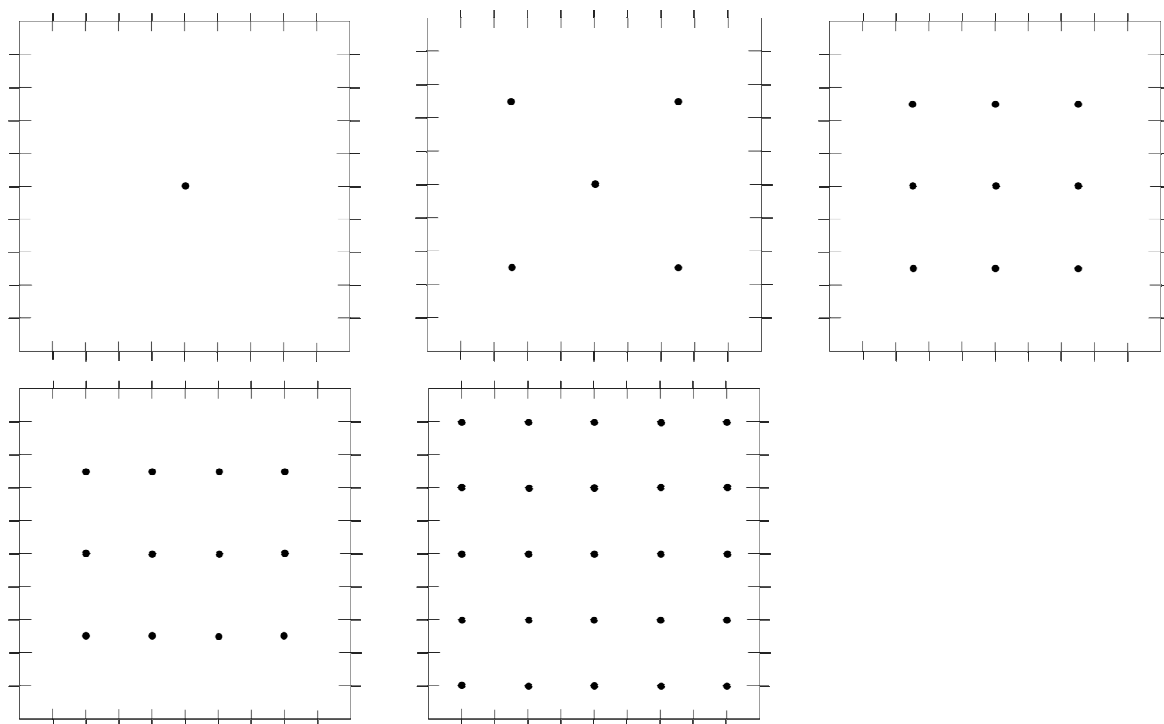
Substituindo a equação (B.6) na equação (B.8) tem-se:

$$\begin{aligned}
M \left[ \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (U^{t+\theta\Delta t} - U^t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{U}^t - 2\ddot{U}^t \right] + HU^{t+\theta\Delta t} &= Gq^{t+\theta\Delta t} \\
M \left[ \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} U^{t+\theta\Delta t} - \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} U^t - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{U}^t - 2\ddot{U}^t \right] + HU^{t+\theta\Delta t} &= Gq^{t+\theta\Delta t} \\
M \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} U^{t+\theta\Delta t} + M \left[ -\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} U^t - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{U}^t - 2\ddot{U}^t \right] + HU^{t+\theta\Delta t} &= Gq^{t+\theta\Delta t} \\
U^{t+\theta\Delta t} \left[ H + M \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \right] = Gq^{t+\theta\Delta t} + M \left[ \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} U^t - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{U}^t - 2\ddot{U}^t \right] & \quad (B.9)
\end{aligned}$$

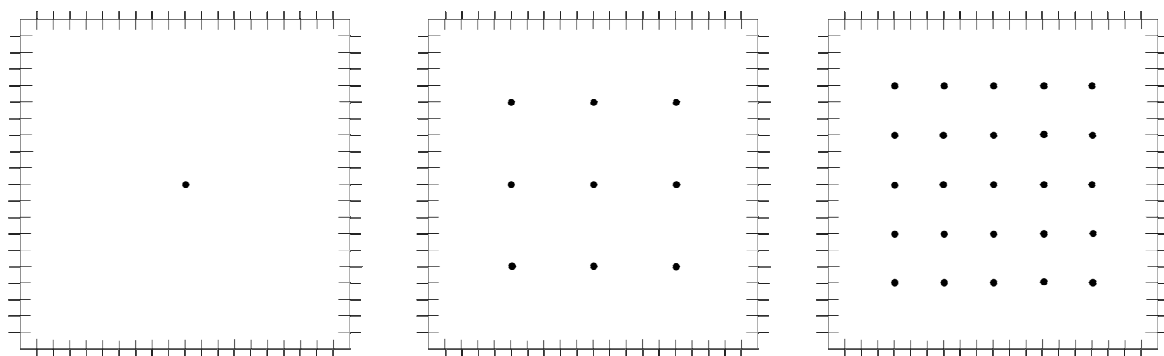
Obtendo-se  $U^{t+\theta\Delta t}$  pela equação (B.9) e substituindo na equação (B.6) obtemos  $\ddot{U}^{t+\theta\Delta t}$ , o qual é usado nas equações (B.1), (B.2), (B.3), para  $\tau = \Delta t$ , calcula-se  $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ ,  $\dot{U}^{t+\Delta t}$ ,  $U^{t+\Delta t}$ , que serão usados como condição inicial para o novo instante de cálculo.

## APÊNDICE C

Barra de seção constante



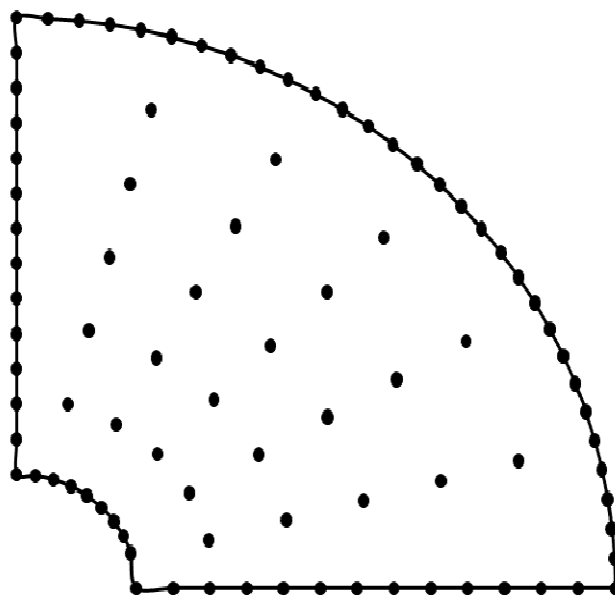
Malhas de 40 EC com 1, 5, 9, 12, 25 PI respectivamente



Malhas de 80 EC com 1, 9, 25 PI respectivamente.



Barra de seção variável



Malha de 65 EC, com 25 PI