

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Comparação de Desempenho entre as  
Formulações Singular e Hipersingular do  
Método dos Elementos de Contorno

**Dissertação de mestrado**

VITÓRIA

2009

Enilene Regina Lovatte

# Comparação de Desempenho entre as Formulações Singular e Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno

## **Dissertação de mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**VITÓRIA**

**2009**

Enilene Regina Lovatte

Comparação de Desempenho entre as  
Formulações Singular e Hipersingular do  
Método dos Elementos de Contorno

**Dissertação de mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa da Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da  
Universidade Federal do Espírito Santo, como  
requisito parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Mecânica.

Aprovada em 29 de maio de 2009.

**MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler – UFES - orientador

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro – UFES

Prof. Dr. Webe João Mansur - COOPE-UFRJ

Aos meus amores Hans e Nicolas

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por todas as bênçãos e conquistas da minha vida.

Ao meu marido Hans-Jorg, meu filho Nicolas e minha mãe Enilma por tudo que representam para mim.

A meu sobrinho André e meu irmão Hudson.

A meu sogro Hans Max e minha sogra Ruth.

Ao professor Carlos Loeffler pela tranquilidade, presença, amizade e orientação.

À Universidade Federal do Espírito Santo – UFES e aos professores Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM pela oportunidade de cursar o Mestrado.

Aos amigos do mestrado, que tornaram esta jornada mais divertida, em especial ao mestre Barroncas, pela presença e ajuda.

A secretária do PPGEM, Zezé, pelo constante apoio e dedicação e demais colaboradores do Programa e Departamento de Engenharia Mecânica.

“Os anos ensinam o que os dias desconhecem”

Autor desconhecido

## Resumo

Neste trabalho apresentam-se as Formulações Singular e Hipersingular do Método de Elementos de Contorno e comparam-se seus resultados em problemas de campo escalar estacionários bidimensionais, governados pela Equação de Laplace.

Nas formulações convencionais do Método dos Elementos de Contorno, uma atenção especial deve ser dada às integrações singulares que aparecem nos núcleos das integrais de contorno, típicas do método. Esta atenção se redobra no caso de Formulações Hipersingulares.

Com o tratamento adequado destas integrais é possível demonstrar-se que são convergentes no sentido do Valor Principal de Cauchy e podem ter seu tratamento simplificado diante de alguns procedimentos ligados à discretização e ao posicionamento dos nós funcionais típicos do Método dos Elementos de Contorno.

Embora as características de ambas as formulações já tenham sido apresentadas na literatura especializada, muitas particularidades interessantes da formulação hipersingular não são bem conhecidas e devem ser mais bem avaliadas, especialmente com base em resultados comparativos com a formulação singular clássica.

O objetivo deste trabalho é apresentar estas formulações integrais para a Equação de Laplace e seu devido tratamento numérico na forma mais simplificada, considerando as propriedades dos núcleos e da ordem dos elementos de contorno empregados na discretização do contorno.

Comparando-se os resultados numéricos dos erros percentuais cometidos no cálculo do potencial e sua derivada em exemplos de solução analítica conhecida, discute-se o desempenho de cada formulação, finalizando-se esta análise com a comparação com um exemplo referente a outro método numérico.

## Abstract

In this work, the Singular and Hypersingular Formulations of the Boundary Element Method are presented and their results are compared on two dimensional stationary scalar field problems, governed by the Laplace Equation.

In the conventional formulations of the Boundary Element Method, a special attention must be given to the singular integrations that appear in the boundary integrals kernel, typical of the method. This special attention is for more important in the case of Hypersingular Formulations.

With the adequate treatment of these integrals it is possible to demonstrate that they are convergent in the sense of the Cauchy Principal Value and that they can have their treatment simplified according to some discretization functional nodes positioning and procedures which are typical of the Boundary Element Method

Although both formulations characteristics have been presented already in specialized literature, many interesting particularities of the Hypersingular Formulation are not well known and better evaluation, specially through comparative results with the classic singular formulation.

The objective of this work is to present these integral formulations of the Laplace Equation and their numerical treatment in the simplest form, considering the kernel properties and the order of the boundary elements used in the boundary discretization.

By performing a comparison between the numerical results percentage error, made in the potential and its derivative calculations in examples with known analytical solutions, the performance of each formulation is discussed. This analysis finishes with a comparison with a referring example, using another numerical method.



Figura 2.1– Domínio Estendido de um Setor Circular ao redor do Ponto Fonte $\xi$ .....	10
Figura 2.2 - Definição dos Ângulos Internos entre os Contornos Adjacentes ao Redor do Ponto Fonte.....	12
Figura 2.3 – Caracterização geométrica de um contorno anguloso.....	13
Figura 2.4 - Domínio $\Omega(x)$ com isolamento na região carregada.....	15
Figura 3.1 – Comportamento da curva do núcleo da integral singular ao longo do elemento de contorno.....	23
Figura 3.2— Limites de Integração ao longo do elemento singular. ....	27
Figura 5.1– Barra engastada sujeita a carga unitária na extremidade direita. ....	36
Figura 5.2 - Erro percentual no deslocamento axial com malha de 16 EC calculado no contorno - barra engastada.....	37
Figura 5.3 - Erro percentual no deslocamento axial com malha de 32 EC calculado no contorno - barra engastada.....	37
Figura 5.4 – Erro percentual no deslocamento axial com malha de 64 EC calculado no contorno - barra engastada.....	38
Figura 5.5– Erro médio percentual do deslocamento axial no contorno em função da quantidade de elementos de contorno - barra engastada .....	39
Figura 5.6– Erro percentual no deslocamento axial interior com malha de 16 EC - barra engastada .....	39
Figura 5.7– Erro percentual no deslocamento axial interno com malha de 32 EC - barra engastada. ....	40
Figura 5.8 – Erro percentual no deslocamento axial interno com malha de 64 EC – barra engastada. ....	40
Figura 5.9– Erro médio percentual no interior do deslocamento axial barra engastada de acordo com número de elementos. ....	41
Figura 5.10– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 16 EC, valores calculados no contorno e no interior com a FHS – barra engastada. ....	42
Figura 5.11– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 32 EC, valores calculados no contorno e no interior com a FHS – barra engastada. ....	42
Figura 5.12– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 64 EC, valores calculados no contorno e no interior com a FHS – barra engastada. ....	43

Figura 5.13 - Erro percentual no deslocamento axial com malha de 16 EC calculado no contorno - barra engastada.....	44
Figura 5.14– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 32 EC calculado no contorno - barra engastada.....	44
Figura 5.15– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 64 EC calculado no contorno - barra engastada.....	45
Figura 5.16– Erro percentual na tensão com malha de 16 EC calculado no contorno - barra engastada .....	45
Figura 5.17– Erro percentual na tensão com malha de 32 EC calculado no contorno - barra engastada. ....	46
Figura 5.18– Erro percentual na tensão com malha de 64 EC calculado no contorno - barra engastada .....	46
Figura 5.19 – Erro médio percentual da tensão no contorno da barra engastada para diversas malhas - barra engastada.....	47
Figura 5.20– Erro percentual na tensão com malha de 16 EC calculado no interior - barra engastada. ....	48
Figura 5.21– Erro percentual na tensão com malha de 32 elementos constantes calculado no interior - barra engastada. ....	48
Figura 5.22– Erro percentual na tensão com malha de 64 EC calculado no interior - barra engastada. ....	49
Figura 5.23– Erro médio percentual da tensão no interior da barra engastada para diversas malhas - barra engastada.....	49
Figura 5.24 – Cilindro infinitamente longo sujeito a diferencial de temperatura.....	50
Figura 5.25 - Discretização do contorno com malhas de 16,32 e 64 EC – um quarto de cilindro.....	50
Figura 5.26- Erro percentual na temperatura com malha de 16 EC calculado no contorno – aresta horizontal – um quarto de secção de cilindro.....	51
Figura 5.27- Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no contorno – aresta horizontal - um quarto de secção de cilindro. ....	52
Figura 5.28- Erro percentual na temperatura com malha de 64 elementos constantes calculado no contorno – aresta horizontal - um quarto de secção de cilindro. ....	52
Figura 5.29- Erro médio percentual da temperatura no contorno do quarto de cilindro para diversas malhas.....	53
Figura 5.30- Erro percentual na temperatura com malha de 16 elementos constantes calculado no interior - um quarto de secção de cilindro. ....	54

Figura 5.31 - Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro. ....	55
Figura 5.32- Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro. ....	55
Figura 5.33- Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no contorno e interior – Formulação Hipersingular - um quarto de secção de cilindro. ....	55
Figura 5.34- Erro médio percentual da temperatura no contorno do quarto de cilindro para diversas malhas. ....	56
Figura 5.35 - Erro percentual no fluxo com malha de 16 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro. ....	57
Figura 5.36 - Erro percentual no fluxo com malha de 32 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro. ....	57
Figura 5.37 - Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro. ....	57
Figura 5.38– Erro médio percentual fluxo no interior do quarto de cilindro para diversas malhas. ....	58
Figura 5.39 - Erro percentual no fluxo com malha de 16 EC calculado no contorno – contorno externo - um quarto de secção de cilindro. ....	59
Figura 5.40- Erro percentual no fluxo com malha de 32 EC calculado no contorno – contorno externo - um quarto de secção de cilindro. ....	59
Figura 5.41- Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no contorno – contorno externo - um quarto de secção de cilindro. ....	60
Figura 5.42- Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no contorno e interior – Formulação Hipersingular - um quarto de secção de cilindro. ....	60
Figura 5.43- Erro médio percentual do fluxo no interior do quarto de cilindro para diversas malhas. ....	61
Figura 5.44– Semicírculo sujeito a diferencial de temperatura no contorno reto. ....	61
Figura 5.45- Discretização feita com malhas de 16, 32 e 64 EC – meio círculo .....	62
Figura 5.46 - Erro percentual na temperatura com malha de 16 EC calculado no contorno curvo - semicírculo .....	63
Figura 5.47 - Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no contorno curvo - semicírculo .....	63
Figura 5.48 - Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no contorno curvo - semicírculo .....	64

Figura 5.49 - Erro médio percentual na temperatura no contorno para diversas malhas - semicírculo .....	64
Figura 5.50 - Erro percentual no fluxo com malha de 16 EC calculado no contorno reto - semicírculo .....	65
Figura 5.51 - Erro percentual no fluxo com malha de 32 EC calculado no contorno reto – semicírculo .....	65
Figura 5.52 - Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no contorno reto- semicírculo .....	66
Figura 5.53 - Erro médio percentual no fluxo no contorno para diversas malhas - semicírculo .....	66
Figura 5.54 - Erro percentual na temperatura com malha de 16 EC calculado no interior - semicírculo .....	67
Figura 5.55 - Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no interior – semicírculo .....	67
Figura 5.56 - Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no interior – semicírculo .....	68
Figura 5.57 - Erro médio percentual na temperatura no interior para diversas malhas – semicírculo .....	68
Figura 5.58 – Percolação em meio poroso .....	69
Figura 5.59 – Comparação dos valores obtidos pelo MEC(64EC) – FHS e MVF(320VF)- meio poroso .....	70
Figura 5.60 – Comparação dos valores obtidos pelo MEC(64EC) – FSC e MVF(320VF)- meio poroso .....	70

# Conteúdo

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES .....	1
1.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	2
1.3 MOTIVAÇÃO .....	4
1.4 OBJETIVOS .....	5
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO (VOU CONFERIR DEPOIS) .....	6
CAPÍTULO 2 FORMULAÇÃO SINGULAR DO MEC .....	7
2.1 INTRODUÇÃO .....	7
2.2 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL .....	7
2.3 ANÁLISE DAS SINGULARIDADES .....	10
2.4 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL .....	14
2.5 DETERMINAÇÃO DE VALORES NO INTERIOR .....	16
CAPÍTULO 3 FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO MEC .....	19
3.1 INTRODUÇÃO .....	19
3.2 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL .....	19
3.3 ANÁLISE NUMÉRICA DAS INTEGRAIS .....	22
3.4 SOLUÇÃO DAS INTEGRAIS .....	26
3.5 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO HIPERSINGULAR .....	28
CAPÍTULO 4 EXAME DA FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS .....	29
4.1 INTRODUÇÃO .....	29
4.2 EXPRESSÃO DO MRP EQUIVALENTE À FORMA INTEGRAL INVERSA .....	30
4.3 ANÁLISE DA FORMA INTEGRAL INVERSA À LUZ DO MRP .....	32
CAPÍTULO 5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	35

5.1	INTRODUÇÃO .....	35
5.2	BARRA ENGASTADA .....	36
5.2.1	Deslocamentos em pontos no contorno - aresta horizontal .....	37
5.2.2	Deslocamento em pontos no interior .....	39
5.2.3	Deslocamento no contorno - a aresta vertical direita .....	43
5.2.4	Tensão na aresta vertical do engaste.....	45
5.2.5	Tensão no interior .....	47
5.3	TUBO COM SIMETRIA ANGULAR .....	49
5.3.1	Temperatura na aresta horizontal - contorno .....	51
5.3.2	Temperatura no interior do domínio.....	54
5.3.3	Fluxo no interior do domínio.....	56
5.3.4	Fluxo no contorno externo.....	58
5.4	CHAPA SEMICIRCULAR COM DESCONTINUIDADE .....	61
5.4.1	Temperatura no contorno curvo .....	62
5.4.2	Fluxo no contorno reto .....	64
5.4.3	Temperatura no interior .....	66
5.5	MEIO POROSO .....	68
	CAPÍTULO 6 CONCLUSÃO .....	71
	CAPÍTULO 7 BIBLIOGRAFIA .....	73
	Apêndice A - Solução Fundamental.....	75
	Apêndice B - Solução analítica para barra engastada.....	79
	Apêndice C - Solução analítica para quarto de secção de cilindro.....	82
	Apêndice D – Solução analítica para o semicírculo .....	86
	Apêndice E - Quadratura de Gauss - Legendre .....	88
	Apêndice E – Demonstração Hipersingular .....	90
	Apêndice F – Exemplo de formação de matriz .....	92

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Na engenharia de projeto, a experiência obtida com a realização de testes com protótipos ou a realização anterior de empreendimentos similares foi durante algum tempo a ferramenta mais empregada por engenheiros na concepção e construção de máquinas, equipamentos e edificações.

Evidentemente, o custo de confecção de alguns protótipos, especialmente os de grande porte, era muito alto. Além disso, a simulação experimental nem sempre é muito simples e representa adequadamente o fenômeno desejado. Por isso, tão logo se tornou acessível à engenharia o emprego de ferramentas computacionais, o desenvolvimento de modelos matemáticos para representar o comportamento físico dos problemas passou a ser a metodologia dominante de solução.

Deve-se ressaltar que projetar equipamentos, edificações e máquinas a partir de modelos analíticos construídos com elevado rigor matemático intensificou-se principal e fundamentalmente com o acesso dos profissionais de engenharia ao uso dos computadores eletrônicos.

Equações simples que representavam os problemas do passado e serviam de apoio aos projetos de engenharia, cederam lugar às equações diferenciais parciais, algumas mesmo não lineares, ou então, a sistemas de equações diferenciais ordinárias de grande complexidade.

O tratamento matemático que se empregava com vistas a resolver estas equações para obtenção de uma solução analítica ou fechada teve que ser revisto, porque poucas eram aquelas que conseguiam ser devidamente solucionadas.

Via de regra, quando se tratam de equações complexas, esse tratamento consiste de um procedimento operacional no qual operadores diferenciais cedem lugar a aproximações e o domínio contínuo é representado por um limitado número de pontos especiais. É o processo de discretização.

Muitos métodos numéricos modernos são fundamentados na idéia da discretização. Compõe-se basicamente de uma aproximação do domínio contínuo por um conjunto discreto ou finito de pontos que o representem consistentemente.

Em termos matemáticos, a discretização acarreta a substituição de uma equação diferencial por um conjunto de equações algébricas, de fácil implementação e resolução pelos computadores modernos.

Os métodos numéricos ou computacionais, como passaram a ser conhecidos, atualmente tornaram-se viáveis, confiáveis e amplamente difundidos com o advento e evolução dos computadores, uma poderosa ferramenta, capaz de processar milhares de cálculos em intervalos de tempo cada vez menores, e largamente utilizados em diversas áreas de conhecimento.

Dentro dos estudos relacionados à engenharia, uma linha de pesquisa é voltada especificamente para o desenvolvimento de métodos numéricos e suas aplicações.

Como exemplos de métodos numéricos podem-se citar o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

## **1.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

O MEC destaca-se entre os demais, primeiramente por discretizar exclusivamente o contorno, reduzindo assim em uma a dimensão do modelo numérico, com isso facilitando a entrada de dados e sua interface com programas gráficos destinados à visualização e reestruturação da conformação geométrica dos problemas. Seguem-se outras vantagens, tais como: apresentar bons resultados na sua formulação clássica, ser de fácil implementação e possuir grande campo de utilização. Finalmente, mas não menos importante, é a sua adequação a problemas com domínios infinitos e semi-infinitos, casos com fronteiras móveis e problemas de contato e mecânica da fratura.

Em função dessas qualidades, intensas pesquisas têm ampliado seu campo de aplicação, ao mesmo tempo em que são elaborados códigos ou aplicativos computacionais de uso industrial, resultando inclusive na conquista de espaço comercial.

As bases teóricas do MEC se fundamentam na Teoria das Equações Integrais, que por sua vez tem sua origem nos trabalhos dos matemáticos dos séculos XVIII a XX. Entre os nomes cujas contribuições conceituais foram fundamentais para o desenvolvimento teórico podem-se citar: Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Carl Friedrich Gauss (1777–1855), George Green (1793–1841) e Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), entre outros.

Esta remota origem do método não encontrou viabilidade operacional para soluções de problemas práticos até meados de 1962, quando os computadores eletrônicos se tornaram disponíveis e a solução das equações pode ser efetivada, isso mediante a necessária introdução dos conceitos de interpolação, aproximação e discretização do domínio. É a partir daí que a história moderna do MEC efetivamente começou.

Por exemplo, uma importante contribuição nesse contexto de aproximação é o método de Ritz, proposto por Walter Ritz (1878-1909) também em 1908. Quando aplicado aos subdomínios, o método de Ritz é considerado o precursor do Método dos Elementos Finitos.

A grande mudança de paradigma – a conquista de soluções aproximadas para os modelos matemáticos – produziu uma série de esforços conexos, que se tornaram, logo, um movimento, seguido até 1967.



O crescimento rápido de soluções numéricas de equações integrais de contorno foi acelerado quando em 1967, Frank Joseph Rizzo (1938-) publicou o artigo sobre a aproximação da equação integral aos problemas de valor de contorno a problemas elastostáticos clássicos. Outro importante nome para desenvolvimento do método é Thomas Allen Cruse (1941-).

Embora os computadores eletrônicos tenham sido inventados nos anos 40, não se tornaram extensamente disponíveis aos pesquisadores comuns até princípios dos anos 60. Não é surpresa que o desenvolvimento destes métodos tenha ocorrido nesta época.

No final dos anos 60, outro grupo no Reino Unido começou a pesquisar equações integrais. Watson foi introduzido às equações integrais de contorno em 1966, como um estudante de pesquisa na Universidade de Southampton.

Suas tentativas em determinar a natureza das singularidades supostas, entretanto, foram mal sucedidas. Foram produzidas dissertações baseadas em métodos indiretos tais como: Kupradze, Banerjee em 1970, e Watson e Tomlin em 1973.

Foi por essa ocasião que Brebbia, em Southampton, deu a seu estudante do pós-doutorado, Jean-Claude Lachat, a tarefa de desenvolver a formulação a qual se tornou a equação integral de contorno, que procura obter a mesma versatilidade que os elementos finitos possuem nas estruturas pesquisadas por Brebbia. A pesquisa de Brebbia até então estava na solução numérica de estruturas (casca), incluindo pesquisas de métodos variacionais, elementos finitos e equações integrais.

Apesar disso, no início dos anos 70, o MEC era ainda uma técnica numérica principiante, mas experimentava um crescimento exponencial. Até esse tempo, os E.U.A. e as escolas britânicas trabalhavam isoladamente.

Em 1972, Brebbia organizou a primeira Conferência Internacional sobre métodos variacionais em Southampton com Tottenham. Brebbia convidou Cruse para participar da conferência.

Já no final dos anos 70, vários livros-texto foram escritos e conferências foram organizadas sobre o método.

Ainda nos primórdios da década de 70, as adaptações da quadratura Gaussiana poderiam integrar fracas funções singulares, mas os valores principais de Cauchy não poderiam ser computados diretamente pela quadratura.

Os valores principais de Cauchy foram resolvidos não conforme calculado por Lachat em 1975, e sim de acordo com um artigo de Watson, que foi publicado em 1976, e considerado como o primeiro trabalho que incorporou as principais idéias de discretização aos métodos que trabalhavam com integrais de contorno. Até 1977, o método numérico para resolver equações integrais tinha sido chamado por Cruse de método da equação integral de contorno. .

De acordo com Brebbia, o termo “elemento de contorno” foi originado no departamento da engenharia civil na universidade de Southampton. É usado para indicar o método pelo qual a superfície externa de um domínio é dividida em uma série de elementos sobre o qual as funções consideradas podem variar de maneiras diferentes.

Brebbia apresentou o Método de Elemento de Contorno usando a formulação do Método dos Resíduos Ponderados. Da publicação do livro de Brebbia e Dominguez em diante, vários autores descreveram o Método.

Mais amplamente, o MEC foi usado como um termo genérico para uma variedade de métodos numéricos que têm como paradigma a discretização exclusiva do contorno.

### 1.3 MOTIVAÇÃO

Existem várias formulações do MEC, sendo a mais comum denominada de formulação direta clássica ou singular [1], na qual as variáveis básicas ou primais do problema são resolvidas, simultaneamente, com suas derivadas normais. Nesta formulação, a partir de uma equação diferencial de governo, obtém-se uma equação integral de contorno, comumente operacionalizada e posta convenientemente na sua forma inversa Brebbia [...], com o auxílio de funções auxiliares especiais, as soluções fundamentais Brebbia e Walker [...].

Em função dos avanços na modelagem matemática e o aumento da capacidade dos computadores em armazenar e processar dados, todas as modernas técnicas numéricas discretas experimentam desenvolvimentos e adaptações para que consigam o melhor desempenho com generalidade.

O MEC não foge a essa regra e várias formulações alternativas têm sido propostas, no sentido de aprimorar a precisão, ampliar a versatilidade e torná-lo computacionalmente mais eficiente. O caso da formulação hipersingular (FHS) é típico: a FHS foi gerada para se obter mais precisão no cálculo de derivadas tangenciais das variáveis básicas ou primais no contorno, o que levou a uma formulação integral de ordem mais elevada do que a formulação integral clássica (FSC).

Em princípio, o procedimento hipersingular foi empregado recursivamente, na forma de um pós-processamento, de modo similar ao que se faz para calcular valores no interior do domínio. Assim sendo, resolvido o problema clássico, onde são encontrados os valores nodais das incógnitas, esses valores são re-introduzidos na equação integral original, derivada espacialmente com relação à direção tangencial no contorno.

Em problemas de elasticidade, por exemplo, é importante a precisão no cálculo das tensões no contorno. Isso é possível somente através do cálculo das deformações específicas, que são geradas a partir de derivadas espaciais dos deslocamentos. Por conta da simplicidade, é comum se encontrar procedimentos alternativos para determinação das tensões calculados na interpolação dos deslocamentos ao longo dos elementos de contorno, mas com prejuízo na exatidão dos resultados.

Outra importante aplicação pode ser colhida na área de termo-fluidos, como nos casos em que se deseja identificar o campo de velocidades a partir de um potencial de pressão, pois é indispensável conhecer-se tanto as componentes de velocidade normal quanto tangencial, para posteriormente utilizar-se a equação de energia e se definir o campo de temperaturas [white, ramachandran]. O emprego da FHS é o procedimento mais eficaz nesse sentido.

Talvez a aplicação mais importante da FHS no MEC seja a modelagem de trincas, questão importante no contexto da Mecânica da Fratura. O uso da FHS em conjunto com a FCS permite a obtenção de duas equações linearmente independentes para um mesmo ponto do contorno da fissura, representativos de duas partículas distintas, o que é bastante interessante e vantajoso na modelagem desses problemas.

A FHS também pode ser usada não apenas recursivamente, mas diretamente, na formação do sistema matricial de equações com valores nodais de contorno. Isto porque, de acordo com alguns estudos, Prado, Mansur [...], a FHS apresenta melhor precisão na solução de problemas descontínuos e com elevados gradientes. Desse modo, a FHS deixaria de ser um recurso complementar ou coadjuvante, para efetivamente formular o problema físico em questão.

#### **1.4 OBJETIVOS**

Embora a apresentação da FHS tenha sido feita há mais de duas décadas e alguns importantes trabalhos tenham sido desenvolvidos nessa área, aspectos importantes da sua formulação, interessantes particularidades numéricas e o resultado de um maior número de simulações numéricas não estão suficientemente difundidos.

Este trabalho se propõe a realizar uma análise detalhada dos resultados obtidos pela FHS na solução de problemas de campo escalar estacionários bidimensionais, comparando-os diretamente com os resultados da FSC e com as soluções analíticas disponíveis.

Uma análise matemática preliminar de desempenho é feita tomando como base o Método dos Resíduos Ponderados, não obstante a complexidade exigida numa abordagem mais geral nesse sentido.

É apresentado o detalhamento da formulação matemática e especial atenção é dada aos procedimentos de implementação numérica, bastante peculiares à metodologia hipersingular e muitas vezes omitidos na literatura especializada.

Um último propósito se apresenta nessa dissertação, que é facilitar o estudo e interpretação dos fundamentos da FHS com relação ao uso recursivo da formulação integral para a uma nova redistribuição ou minimização de resíduos na obtenção de valores nodais no contorno [Loeffler].

O cálculo de valores da variável básica e de suas derivadas espaciais no interior do domínio já é feito dessa maneira: efetiva-se um pós-processamento computacional empregando-se novamente a equação integral de governo – que é um uso reiterado da sentença de resíduos ponderados – considerando todos os valores nodais já calculados.

Essa parece ser a razão para que a precisão desses resultados no interior seja superior àquela obtida no cálculo dos valores de contorno: o uso recursivo da equação integral equivale a uma nova minimização dos erros numéricos cometidos, pois que existe uma associação entre a equação integral de governo e uma sentença do método dos resíduos ponderados.

Resta, no entanto, identificar que esse procedimento recursivo [Loeffler e Wrobel], seja no cálculo da variável primal ou sua derivada normal, não equivale à obtenção dos valores

obtidos diretamente pelo uso da FHS. A confirmação dessa distinção entre o procedimento recursivo e a FHS é um desses objetivos específicos desse trabalho.

Conforme exposto, esse trabalho aborda apenas a Equação de Laplace em duas dimensões, por questão de simplicidade e também para salientar os conceitos principais, especialmente relacionados à determinação das derivadas direcionais da variável primal, cuja teoria hipersingular do MEC não é acessível. Apesar disso, muitas das conclusões são gerais, aplicando-se aos problemas tridimensionais e a outras diferentes equações de governo.

## **1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO (VOU CONFERIR DEPOIS)**

O Capítulo 2 deste trabalho apresenta os aspectos básicos do MEC, sua aplicação à equação governante do problema e da Formulação Singular.

O Capítulo 3 trata da formulação Hipersingular, uma derivação da formulação singular que utiliza os conceitos apresentados no Capítulo 2.

Outra análise da integral inversa do FHS do MEC é feita no Capítulo 4, utilizando-se o Método dos Resíduos Ponderados (MRP).

No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos com as FSC e FHS, aplicadas a três exemplos numéricos de solução analítica conhecida, finalizando com a comparação dessas formulações do MEC com o Método dos Volumes Finitos num problema que não possui solução analítica disponível.

As conclusões e sugestões para futuros trabalhos são apresentadas no Capítulo 6 desta dissertação.

# CAPÍTULO 2

## FORMULAÇÃO SINGULAR DO MEC

### 2.1 INTRODUÇÃO

O MEC baseia-se na transformação das equações diferenciais que descrevem o problema em equações integrais, expressas apenas no contorno da região analisada. Com a discretização das equações integrais há a formação de um sistema de equações lineares algébricas cuja solução fornece o valor das incógnitas no contorno.

Neste Capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos do MEC na sua formulação clássica ou singular (FSC) que serve de base para posteriores desenvolvimentos conceituais, expostos nos capítulos seguintes.

### 2.2 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

O equacionamento geral para o MEC pode ser obtido pelo Método dos Resíduos Ponderados ou pela aplicação de princípios da Teoria das Equações Integrais, particularmente o emprego do procedimento de integração por partes. Neste trabalho, em princípio, este último processo é empregado, por conveniência.

Seja um problema de potencial escalar estacionários, sem fontes ou ações de corpo, num domínio bidimensional  $\Omega(X)$ , onde  $X=X(x_1, x_2)$ . Tais problemas são governados pela Equação de Laplace, dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.1)$$

Na equação anterior  $u(X)$  é a variável básica ou primal, escalar, representando um campo mecânico ou térmico em estado permanente, com propriedades contínuas, homogêneas e isotrópicas. As condições essenciais e naturais são definidas no contorno  $\Gamma(X)$ , respectivamente, através das seguintes equações:

$$u(X) = \bar{u}(X) \text{ em } \Gamma_u \quad (2.2)$$

$$q(\mathbf{X}) = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{X}) \text{ em } \Gamma_q \quad (2.3)$$

Nesta última equação,  $n$  é o vetor unitário normal no ponto  $\mathbf{X}=\mathbf{X}(x_i)$ . O passo inicial para a abordagem pelo MEC via Teoria das Equações Integrais consiste do estabelecimento da equação de Laplace numa forma integral, usando-se  $u^*(\xi; \mathbf{X})$  como função auxiliar, resultando na seguinte expressão, na qual foram omitidos os argumentos por simplicidade:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] u^* d\Omega = 0 \quad (2.4)$$

Por ser um operador auto-adjunto, o Laplaciano permite a aplicação do esquema de integração por partes duas vezes na equação anterior, de modo que se pode reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] u^* d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} \right] u d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x_1} u \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x_2} u \right] \right\} d\Omega + \\ &\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} u^* \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_2} u^* \right] \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência na segunda e terceira parcelas do lado direito da Equação 2.5 chega-se a:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] u^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} \right] u d\Omega - \int_{\Gamma} \{uq^*\} d\Gamma + \int_{\Gamma} \{qu^*\} d\Gamma \quad (2.6)$$

Onde:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad (2.7)$$

(12)

$$q = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.8)$$

A função auxiliar  $u^*(\xi; X)$  é denominada solução fundamental tradicional, que é a solução de um problema correlato pela Equação de Poisson, onde uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto fonte  $\xi$  de um domínio espacial infinito. A equação de governo nessas condições de simetria angular é expressa por:

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} = -\Delta(\xi; r) \quad (2.9)$$

Onde  $r(\xi; X)$  é a distância Euclidiana entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $X=X(x_i)$ ;  $\Delta(\xi; r)$  é a função Delta de Dirac, singular em  $r = \xi$ . Uma solução particular da Equação 2.9 é dada por:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (2.10)$$

Daí resulta:

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r(\xi; X)} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.11)$$

Devido às propriedades da função Delta de Dirac, a substituição da Equação 2.10 no primeiro termo do lado direito da Equação 2.6 permite transformar a equação integral de domínio original em uma única expressão constituída de integrais de contorno e uma função de ponto, na forma:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} \{uq^*\} d\Gamma - \int_{\Gamma} \{qu^*\} d\Gamma = 0 \quad (2.12)$$

Nesta última equação,  $c(\xi)$  é uma constante que depende do posicionamento do ponto fonte com relação ao domínio. Se esse ponto estiver fora do domínio físico,  $c(\xi)$  é nulo; se o ponto fonte estiver situado internamente,  $c(\xi)$  é igual a 1. Usualmente, efetuada a etapa de discretização com o MEC, os pontos fonte precisam ser localizados externamente ao domínio ou então sobre o contorno, para gerarem um sistema matricial de equações resolvível.

O posicionamento dos pontos fonte  $\xi$  externamente é bastante razoável, desde que se estabeleça um bom critério de posicionamento, de modo gerar um sistema de equações linearmente independente e bem condicionado. No entanto, a opção mais comum e difundida localiza os pontos fonte no contorno, preferencialmente coincidentes com os pontos nodais, e, desse modo, deve-se conhecer o valor de  $c(\xi)$ .

O levantamento desse valor quando o ponto fonte é posicionado no contorno exige uma análise matemática elaborada, vista a seguir com detalhe por conveniência, de modo a servir de preparo para a abordagem do problema hipersingular, ainda mais complexa.

### 2.3 ANÁLISE DAS SINGULARIDADES

Considere a equação integral de governo na forma inversa, em que o ponto fonte  $\xi$  está localizado internamente ao domínio físico  $\Omega(X)$ , ou seja:

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} \{uq^*\} d\Gamma - \int_{\Gamma} \{qu^*\} d\Gamma = 0 \quad (2.13)$$

Para se encontrar o valor de  $c(\xi)$  quando  $\xi$  se situa no contorno, é necessário se empregar uma estratégia na qual se posiciona o ponto fonte bem próximo à fronteira, criando um contorno adicional que o envolve, e cujas integrais são devidamente examinadas. A Figura 2.1 ilustra a estratégia de criação do domínio acrescido em torno de  $\xi$ .

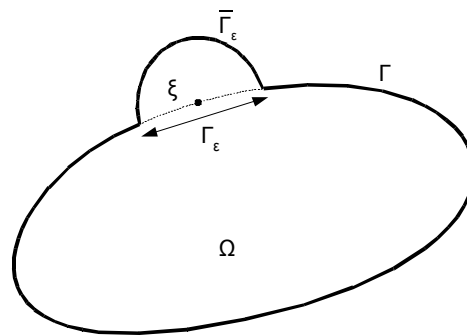


Figura 2.1– Domínio Estendido de um Setor Circular ao redor do Ponto Fonte  $\xi$ .

Ressalta-se que poderia ser feito um procedimento inverso, ou seja, excluir o ponto  $\xi$  do domínio e aproximá-lo suficientemente da fronteira de modo a criar uma reentrância, cujas integrais necessitariam igualmente ser examinadas. Neste trabalho, opta-se pela primeira estratégia, em que  $\xi$  está interno ao domínio.

De acordo com Giugiani [...], a geometria desse contorno adicional é arbitrária; a forma circular apenas é a mais conveniente, pelas facilidades operacionais oferecidas.

Considerando-se este domínio estendido, tem-se  $\Gamma_{est} = \Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon$  e, dessa forma, a Equação integral 2.13 pode ser reescrita como:



$$u(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma \right\} \quad (2.14)$$

A despeito das funções  $u^*(\xi; X)$  e  $q^*(\xi; X)$  serem descontínuas em  $r=0$ ,  $u^*(\xi; X)$  (vide Equação 2.10) é integrável ao longo do contorno e seu limite é estabelecido normalmente; entretanto, a integral de  $q^*(\xi; X)$  (vide Equação 2.11) é singular. Integrais singulares são aquelas cujos integrandos alcançam um valor infinito em algum ponto no domínio de integração.

Apesar desta situação, as integrais podem ser convergentes ou não, dependendo das características de seus integrandos e outros fatores citados a frente. A análise da sua existência é feita exatamente tomando-se um intervalo reduzido, que inclui a singularidade, e obtendo-se o limite quando este espaço pequeno tende a zero.

No caso em questão, verifica-se que a integral de fato não existe no senso usual se o ponto singular estiver incluído, de forma que sua integral deve ser examinada separadamente, na forma:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma \right\} \quad (2.15)$$

Esse exame é feito considerando-se uma estratégia, em que se adiciona um potencial nulo na equação anterior, especificamente no núcleo da terceira integral do lado direito da citada equação, obtendo-se a equação a seguir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(\xi) d\Gamma \right\} \quad (2.16)$$

Vê-se que a integral sobre o contorno estendido foi desdobrada em duas outras, e que ao se considerar que  $u(X)$  é uma função continua, uma expansão em série de Taylor de primeira ordem pode ser implementada no primeiro termo da Equação 2.16. Levando-se em consideração, que no setor circular valem as seguintes relações:

$$r \equiv \varepsilon; \frac{dx_i}{\varepsilon} = n_i; d\bar{\Gamma}_\varepsilon = \varepsilon d\theta \quad (2.17)$$

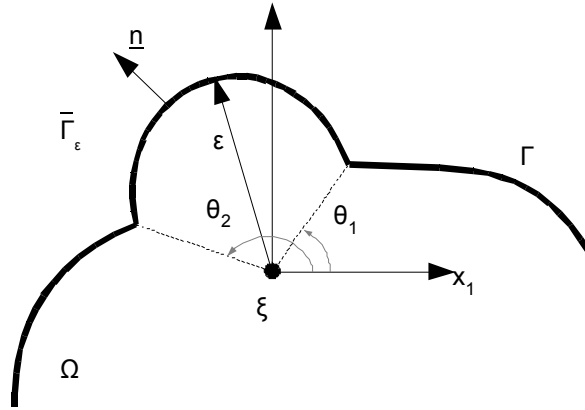


Figura 2.2 - Definição dos Ângulos Internos entre os Contornos Adjacentes ao Redor do Ponto Fonte

Obtém-se, para o primeiro membro do lado direito da Equação 2.16, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] \right\} d\Gamma &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{[u_{,i}(\xi) \Delta x_i]}{\varepsilon} \right\} d\Gamma = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\theta \frac{1}{2\pi} u_{,i}(\xi) n_i \varepsilon d\theta \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim sendo, da Equação 2.16 obtém-se a seguinte identidade:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(\xi) d\Gamma \right\} = u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) d\Gamma \right\} \quad (2.19)$$

Este termo pode ser facilmente integrado, mas é deixado aqui em forma geral, pois caso o ponto fonte se situe num ponto anguloso, seu valor é dependente do ângulo formado entre os elementos adjacentes, conforme ilustra a figura

Assim sendo, pode-se escrever que:

$$u(\xi) \left[ 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) d\Gamma \right] = u(\xi) c(\xi) \quad (2.20)$$

Substituindo-se a expressão de  $q^*(\xi; X)$  na expressão anterior e considerando-se que no contorno circular adicional tem-se  $\partial r / \partial x_i = 1/n_i$ , tem-se:

$$c(\xi) = [1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} \varepsilon d\theta] = [1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{1}{n_i} n_i \varepsilon d\theta] = [1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta] \quad (2.21)$$

No caso de contornos suaves, pode-se considerar  $\theta_1=0$  e  $\theta_2=\pi$ , ou seja:

$$c(\xi) = [1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta] = 0,5 \quad (2.22)$$

Nos casos em que o contorno é anguloso, tem-se:

$$c(\xi) = \frac{\pi - \theta_2 + \theta_1}{\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (2.23)$$

O ângulo  $\alpha$  corresponde ao ângulo interno entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso, conforme mostra a Figura 2.3

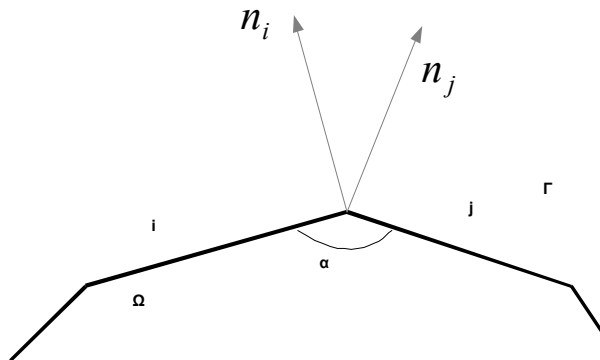


Figura 2.3 – Caracterização geométrica de um contorno anguloso

Nesse ponto, a equação integral de governo pode ser escrita como:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma \right\} \quad (2.24)$$

Com relação à última integral no lado direito da Equação 2.24, desde que  $u(X)$  obedeça a condição de Holder, diz-se que seu limite existe no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC), ou seja, a integral é convergente, pois os valores singulares se anulam, de alguma forma. No caso de integrais singulares como desse tipo, a seguinte abordagem pode ser feita:

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{r} r_{,i} n_i (X) d\Gamma + \int_{+\varepsilon}^b \frac{1}{r} r_{,i} n_i (X) d\Gamma \right] \quad (2.25)$$

Na equação anterior, por generalidade, a e b são os limites inicial e final da integração. Compondo o núcleo das integrais, encontra-se a função hiperbólica  $q^*(\xi; X)$ , função essa cuja integral isolada resultaria divergente; todavia, essa função é acompanhada do produto  $r_{,i}n_i$ , que altera o sinal do núcleo e a torna convergente.

Antecipando as conseqüências do processo de discretização, no caso específico de elementos de contorno retilíneos o valor de  $r_{,i}n_i$  é nulo, pois significa o produto escalar entre a direção do raio vetor  $r_{,i}$  e a normal ao contorno, direções essas ortogonais. No caso de elementos curvilíneos, prova-se Mansur et al [...], que todo o núcleo em questão está geometricamente associado à curvatura  $\rho$  do elemento no ponto fonte  $\xi$ , ou seja:

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} r_{,i} n_i = \frac{1}{2\rho(\xi)} \quad (2.26)$$

Assim sendo, tomados todos os limites, a equação integral de governo pode ser escrita simplesmente como:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma(X) - VPC \int_{\Gamma} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma(X) \quad (2.27)$$

Nisso consiste a Formulação Singular do Método dos Elementos de Contorno. A próxima etapa consiste na implementação do processo de discretização, procedimento esse geral, sendo assim válido para qualquer formulação.

## 2.4 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Conforme exposto anteriormente, um modelo matemático é bem posto caso se conheça ou valor da variável básica ou da sua derivada normal em todos os pontos do contorno. Nos pontos que se conhece uma delas, a outra pode ser encontrada a partir da aplicação do MEC, que possui características operacionais interessantes.

O Método dos Elementos de Contorno pertence à classe dos métodos de discretização. Assim sendo, a representação do problema físico original deixa de ser contínua, ou seja, considerando um número infinito de pontos, e passa a ser representada matematicamente por um número finito deles, nos quais as variáveis podem ser conhecidas ou incógnitas. Nessa última situação seus valores podem ser encontrados após a resolução de um sistema de equações algébricas, gerado por esse processo de discretização.

Na discretização, tanto a geometria do problema quanto o campo de variáveis são aproximados no contorno através de elementos, de acordo com certas funções pré-estabelecidas. Dentro de cada elemento se definem os pontos discretos, chamados pontos nodais, que variam em número e posicionamento, em função da ordem ou tipo de elemento.

Também a forma geométrica dos elementos pode variar de acordo com essas funções que aproximam o campo de variáveis nodais. Neste trabalho, são usados elementos constantes, porque o objetivo do trabalho é a análise da precisão.

Assim sendo, após a montagem do sistema matricial de equações, procede-se à sua solução, podendo-se então conhecer os valores incógnitos, seja do potencial ou da sua derivada normal, em todos os pontos discretos.

O MEC é um método misto, ou seja, valores incógnitos do potencial e sua derivada normal são resolvidos simultaneamente. Em fase posterior, podem-se calcular valores no interior do domínio, usando a mesma equação integral, num procedimento de pós-processamento, chamado de procedimento recursivo.

O contorno é percorrido de maneira que o domínio  $\Omega$  esteja sempre à esquerda, desta maneira garantindo que o vetor normal  $n$  esteja apontando para fora do domínio. Assim, quando o contorno é percorrido no sentido anti-horário, o sistema ou volume de controle, tem seu domínio definido internamente, como o mostrado na Figura 2.4.

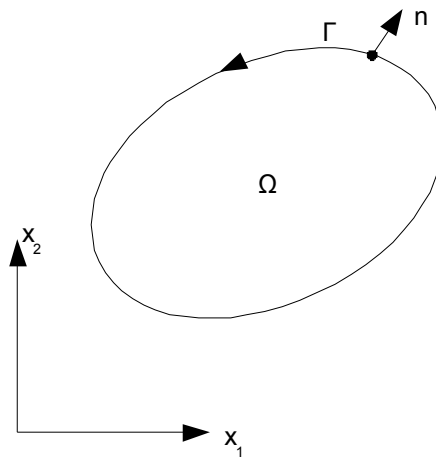


Figura 2.4 - Domínio  $\Omega(x)$  com isolamento na região carregada

Considerando-se o contorno dividido em  $N$  elementos e admitindo-se que os valores de  $u(X)$  e  $q(X)$  são constantes ao longo de cada elemento de contorno, pode-se discretizar a Equação integral 2.13 de modo que:

$$\frac{1}{2}u(\xi^i) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [u(X)q^*(\xi^i; X)]d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [q(X)u^*(\xi^i; X)]d\Gamma_j \quad (2.28)$$

As integrais que relacionam o nó  $i$ , onde se posiciona o ponto fonte  $\xi$ , com relação ao ponto fonte  $X$ , ponto em que se realiza a integração e pertencente ao elemento  $j$ , (vide Apêndice F) podem ser concisamente representados por coeficientes de influência, dados por:

$$H^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_k q^* d\Gamma_j \quad (2.29)$$

$$G^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_k u^* d\Gamma_j$$

Nas equações anteriores, as funções  $\Phi_k$  representam as funções de forma, que no caso dos elementos constantes empregados nesse trabalho são iguais à unidade. Assim, para um nó  $i$  pode-se, então, escrever a Equação 2.28 na forma:

$$\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N H^{ij}u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij}q^j \quad (2.30)$$

De acordo com procedimentos operacionais tradicionais do MEC, são estabelecidos  $N$  pontos nodais e a aplicação da Equação 2.30 para todos esses pontos gera um sistema de equações matricialmente expresso por:

$$\mathbf{HU} - \mathbf{GQ} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

Cuja solução pode ser feita por qualquer método eficiente de solução para sistemas de equações lineares não simétricas. Comumente é usado o método de Gauss, com precisão plenamente satisfatória. Ressalta-se que as matrizes  $H$  e  $G$ , obtidas nas integrações de  $u^*(\xi; X)$  e  $q^*(\xi; X)$  ao longo do contorno, são cheias, a menos que a técnica de sub-regiões seja empregada [...].

## 2.5 DETERMINAÇÃO DE VALORES NO INTERIOR

A aplicação das condições de contorno na equação matricial (5) permite a obtenção dos valores de potencial e da derivada normal nos pontos do contorno onde tais grandezas eram incógnitas. Para calcular valores do potencial em pontos internos, utiliza-se um procedimento muito simples: reaplica-se a equação integral de governo (4) utilizando-se os valores nodais já determinados, tomando como pontos fonte  $\xi^i$  os pontos internos desejados, ou seja:

$$u(\xi^i) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k u^*(\xi^i; X) d\Gamma - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k q^*(\xi^i; X) d\Gamma \quad (2.32)$$

Na Equação 2.32,  $\varphi_k(X)$  são funções de forma e  $U_k^e$  e  $Q_k^e$  são as variáveis nodais, potenciais e derivadas normais, já calculadas. Historicamente, esse procedimento foi feito, inicialmente, apenas para valores do potencial, sendo posteriormente estendido para cálculo de valores da derivada direcional. Nesse caso, deriva-se a Equação 2.32 com relação às coordenadas espaciais do ponto fonte, de modo que:

$$q_j(\xi^i) = \frac{\partial u(\xi^i)}{\partial x_j(\xi)} = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k \frac{\partial u^*(\xi^i; X)}{\partial x_j(\xi)} d\Gamma - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k \frac{\partial q^*(\xi^i; X)}{\partial x_j(\xi)} d\Gamma \quad (2.33)$$

Conforme exposto na introdução, em vários problemas físicos, especialmente na elasticidade, é de grande interesse o cálculo de derivadas do potencial no contorno. De acordo com Prado [...], esse procedimento foi desenvolvido, inicialmente, com o propósito de calcular tensões tangenciais no contorno com maior precisão.

A idéia foi estendida para problemas de potencial escalar bidimensional apenas em 1988, embora em várias aplicações, como nos casos em que se deseja conhecer o campo de velocidades a partir de um potencial de pressão, seja indispensável se conhecer tanto as componentes de velocidade normal quanto tangencial.

Para se aplicar a equação integral inversa em termos das derivadas normais para pontos situados no contorno, um extenso tratamento matemático deve ser empreendido com o propósito de levantar adequadamente o limite quando o ponto fonte posiciona-se no contorno. Esse tratamento diz respeito à própria aplicação direta da FHS para gerar o sistema de equações do MEC, e é exposto com detalhe no próximo Capítulo.

Apenas com o intuito de finalizar esse item, a equação integral resultante para o caso geral é dada por:

$$s(\xi)q_j(\xi) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_j} q(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_j} [u(X) - u(\xi)] d\Gamma(X) \quad (2.34)$$

O valor de  $s(\xi)$  no caso de contornos suaves é igual a 0,5; entretanto, para outras condições surge um acoplamento entre as derivadas direcionais, requerendo um tratamento computacional mais elaborado do que se aplica na formulação singular.

Conforme exposto, as motivações iniciais para o estudo e aplicação da formulação hipersingular consistiram da necessidade de se calcular derivadas tangenciais no contorno com boa precisão. Este procedimento, naturalmente, pode ser feito, simplesmente, como um pós-processamento, após a obtenção das variáveis nodais através da formulação clássica. Então, para a obtenção dos fluxos tangenciais  $\tau$ , a Equação 2.34 pode ser reescrita de modo que, no caso de contornos suaves, tem-se:

$$\frac{1}{2} \tau(\xi) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_t(\xi)} d\Gamma - \sum_{e=1}^N [U_k^e - U(\xi)] \int_{\Gamma_e} \varphi_k \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_t(\xi)} d\Gamma \quad (2.35)$$



# CAPÍTULO 3

## FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO MEC

### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo são apresentados os conceitos básicos da formulação Hipersingular do MEC (FHS), que é uma formulação derivada da formulação clássica apresentada no Capítulo 2 aplicada para a solução de problemas bidimensionais de potencial.

Nesta formulação, primeiro se encontra a equação integral de contorno que fornece a derivada direcional de um ponto fonte, situado no interior do domínio. Posteriormente, tal como na formulação clássica, leva-se, através de um processo limite, essa equação integral em termos da derivada do potencial em um ponto interno para o contorno.

É possível proceder a essa derivada espacial numa direção qualquer, mas uma vez que um modelo matemático para ser bem posto exige o envolvimento das condições de contorno naturais, que são expressas em termos de derivadas normais, necessariamente é preciso que essas últimas grandezas sejam explicitadas na equação integral. Posteriormente, se desejado, pode-se proceder à derivada do potencial em pontos de contorno numa direção m qualquer.

O nome Hipersingular resulta do fato de que com essa derivação da equação original de contorno a ordem das derivadas dos núcleos se altera. Com o posicionamento do ponto fonte nos próprios elementos de contorno, esses núcleos das integrais passam a ter singularidades de ordem superior ( $1/r$  e  $1/r^2$ ) às que existem na formulação clássica ( $\ln r$  e  $1/r$ , respectivamente).

Historicamente, o conceito de hipersingularidade foi introduzido por Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) em 1908. Seus trabalhos ainda são tomados como referência nos textos que tratam da FHS.

### 3.2 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

A formulação hipersingular pode ser deduzida a partir da derivação da Equação integral 2.13 com relação à direção normal tomada no ponto fonte  $\xi$ , situado internamente, ou seja:

$$\frac{du(\xi)}{dn(\xi)} = q(\xi) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial n} q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial n} u(X) d\Gamma = \tag{3.1}$$

$$\int_{\Gamma} q^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} p^*(\xi; X) u(X) d\Gamma$$

Por conta da derivação efetuada, os núcleos se modificam de ordem. Com relação à direção normal, a derivada de  $u^*(\xi; X)$  transforma-se em  $q^*(\xi; X)$ . Já o núcleo resultante da derivada de  $q^*(\xi; X)$ , de ordem inversa mais elevada é dado por  $p^*(\xi; X)$ :

$$p^*(\xi; X) = (1/2\pi r^2) \{2[r_{,i}(X)n_i(\xi)][r_{,j}(X)n_j(X)] - n_i(\xi)n_i(X)\} \quad (3.2)$$

Uma expressão similar à Equação 3.2 pode ser obtida para qualquer direção, mas num pós-processamento, por conta da já comentada necessidade do problema matematicamente ser bem posto.

Para se obter a equação integral na qual o ponto fonte se situa no contorno, um processo similar ao anteriormente apresentado no Capítulo 2 deve ser implementado.

Inicialmente, considera-se um setor circular adicional de raio  $\varepsilon$  (veja Figura 2.2). Considerando, então, esse contorno adicional, e o fato de que o ponto fonte está interno ao domínio, a equação integral da derivada normal do potencial fica sendo dada por:

$$q(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma - \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma \right\} \quad (3.3)$$

Por conveniência, aplicando-se um potencial constante  $u(\xi)$  em todo o domínio e considerando-se que a derivada normal do potencial  $q(\xi)$ , doravante denominada simplesmente de fluxo, não é afetado por esse potencial adicional, a equação pode ser reescrita como:

$$q(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; X)[u(X) - u(\xi)]d\Gamma - \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; X)[u(X) - u(\xi)]d\Gamma \right\} \quad (3.4)$$

As expressões de  $p^*(\xi; X)$  e  $q^*(\xi; X)$  são mais simples, uma vez que no contorno adicional  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  tem-se:

$$n_i \varepsilon = r_{,i} = r_i / r; r \equiv \varepsilon \quad (3.5)$$

Logo:

$$p^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi r^2} \{2[\frac{r_j(X)}{r} n_j(\xi)][\frac{r_i(X)}{r} n_i(X)] - n_i(\xi)n_i(X)\} = \frac{1}{2\pi \varepsilon^2} \{2[n_j(X)n_j(\xi)][n_i(X)n_i(X)] - n_i(\xi)n_i(X)\} = \frac{n_i(\xi)n_i(X)}{2\pi \varepsilon^2} \quad (3.6)$$

Na expressão anterior, foi considerado que:

$$n_i(X)n_i(X) = n_i(\xi)n_i(\xi) = 1 \quad (3.7)$$

Também a expressão de  $q^*(\xi; X)$  se simplifica no contorno adicional:

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r} \left[ \frac{\partial r(X)}{\partial x_i(X)} \frac{\partial x_i(X)}{\partial n(\xi)} \right] - \frac{1}{2\pi r} \left[ \frac{r_i(X)}{r} n_i(\xi) \right] = -\frac{1}{2\pi \varepsilon} [n_i(X)n_i(\xi)] \quad (3.8)$$

Efetuada-se uma expansão em Série de Taylor de primeira ordem, a quarta integral do lado direito da Equação 3.4 se torna:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} p^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi \varepsilon} \frac{u_{,j} \Delta x_j}{\varepsilon} \varepsilon d\theta \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} \quad (3.9)$$

Similar aproximação deve ser feita no segundo termo do lado direito da Equação 3.4, conduzindo ao seguinte limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) q(X) d\Gamma \right\} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi \varepsilon} u_{,j} n_j \varepsilon d\theta \right\} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} \quad (3.10)$$

Com exceção do sinal negativo, este é o mesmo resultado que foi encontrado analisando-se a Equação 3.9, e a soma das duas integrais pode ser computada como uma única integral; a Equação 3.4 pode ser reescrita como:

$$q(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p^*(\xi; \mathbf{X})[u(\mathbf{X}) - u(\xi)]d\Gamma \quad (3.11)$$

O segundo termo do lado esquerdo da Equação 3.11 é resolvido fazendo-se uma integração angular, mas é necessário atentar ao fato de que  $n_i$  é função de  $\theta$ . O resultado desta integral é, naturalmente, dependente do ângulo interno no entorno do ponto singular. Uma descrição detalhada desse procedimento trigonométrico é feita no Apêndice F. De modo conciso:

$$q(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} = q(\xi) - s(\xi)q(\xi) + w_i(\xi)q_i(\xi) \quad (3.12)$$

Considerando-se contornos suaves,  $w_i$  é nulo,  $s(\xi)$  é igual a 0,5 e a Equação 3.12 envolve apenas o fluxo na direção normal; no entanto, para contornos não suaves, fluxos direcionais ortogonais aparecem acoplados na mesma equação.

Quanto às integrais remanescentes, nenhuma delas é convergente no senso comum, mas existem no sentido de VPC; no caso geral, quando considerados juntos. Assim, a Equação 3.12 fica:

$$0,5q(\xi) = \text{VPC} \left\{ \int_{\Gamma} p^*(\xi; \mathbf{X})[u(\mathbf{X}) - u(\xi)]d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma \right\} \quad (3.13)$$

Esta última equação é a equação integral hipersingular do Método de Elemento de Contorno.

### 3.3 ANÁLISE NUMÉRICA DAS INTEGRAIS

O levantamento do VPC na FHS não é simples, especialmente porque no caso geral os limites existem apenas quando considerados juntos. Para identificar isso, considera-se, inicialmente, a avaliação do núcleo singular.

Tendo em vista a generalidade, é importante dividir-se a integral em duas partes, antes (LE) e depois (LD) do ponto singular, e empregar a metodologia de Hadamard para tratar a singularidade, adicionando e subtraindo um fluxo constante  $q(\xi)$ , tal como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{SING}} q(X)q^*d\Gamma = & -\frac{1}{2\pi} \left[ \int_{LE} q^{LE}(X) \frac{1}{r} r_{>i}^{LE} n_i |J|^{LE} dr + \int_{LD} q^{LD}(X) \frac{1}{r} r_{>i}^{LD} n_i |J|^{LD} dr = \right. \\
& -\frac{1}{2\pi} \left[ \int_{LE} \frac{q^{LE}(X) - q^{LE}(\xi)}{r} r_{>i}^{LE} n_i |J|^{LE} dr + \int_{LE} \frac{q^{LE}(\xi)}{r} r_{>i}^{LE} n_i |J|^{LE} dr \right. \\
& \left. \left. + \int_{LD} \frac{q^{LD}(X) - q^{LD}(\xi)}{r} r_{>i}^{LD} n_i |J|^{LD} dr + \int_{LD} \frac{q^{LD}(\xi)}{r} r_{>i}^{LD} n_i |J|^{LD} dr \right] \right.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Na Equação 3.14 J é o Jacobiano e  $r_{>i}$  é um quociente correspondente a um valor trigonométrico bem definido ao longo do elemento singular e  $n_i = n_i(\xi)$ . Ressalta-se que o valor do núcleo segue a estrutura da Equação 2.13, sem as particularizações consideradas na Expressão 3.8, pertinente apenas ao contorno adicional.

O próximo passo é levantar o limite dessas integrais quando r tende a zero e explicitar as condições para que o limite exista no senso do VPC:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{SING}} q(X)q^*d\Gamma = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{LE} \frac{q^{LE}(X) - q^{LE}(\xi)}{r} r_{>i}^{LE} n_i |J|^{LE} dr + \int_{LD} \frac{q^{LD}(X) - q^{LD}(\xi)}{r} r_{>i}^{LD} n_i |J|^{LD} dr \right. \\
& \left. + q^{LE}(\xi) r_{>i}^{LE} n_i |J|^{LE} [\ln(L^{LE}) - \lim_{r \rightarrow 0} \ln(r)] + q^{LD}(\xi) r_{>i}^{LD} n_i |J|^{LD} [\ln(L^{LD}) - \lim_{r \rightarrow 0} \ln(r)] \right\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Na equação anterior  $L^{LE}$  e  $L^{LD}$  são os comprimentos integrados à esquerda e à direita. Observa-se que há valores singulares que somente se neutralizam em composição com outros termos, gerados pela análise da integral hipersingular, apresentada a seguir.

No entanto, em casos particulares, bastante comuns na prática com o MEC, a Equação 3.15 se simplifica.

Para contornos suaves,  $r_{>i}$  em cada segmento da integração, antes e após o ponto singular, possuem sinais distintos, conforme mostra a Figura 3.1.

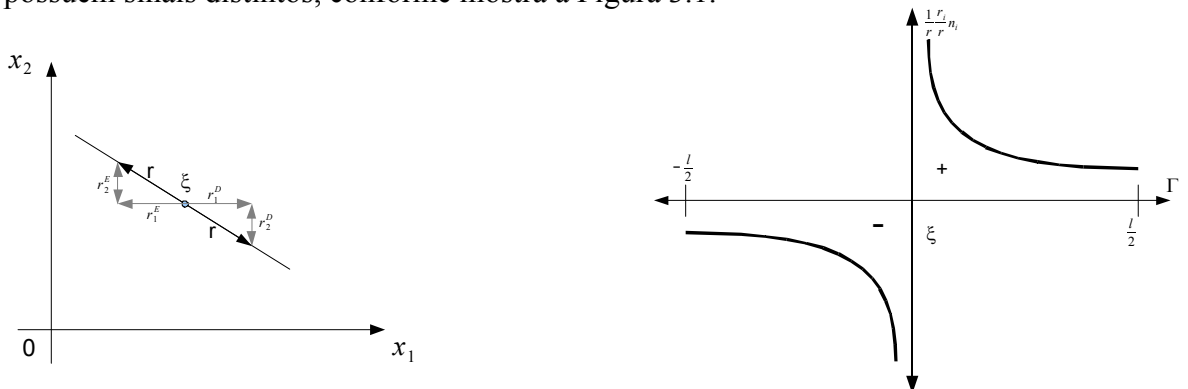


Figura 3.1 – Comportamento da curva do núcleo da integral singular ao longo do elemento de contorno.

No caso de não haver descontinuidade dos fluxos no entorno da singularidade, ou seja:

$$q^{LE}(\xi) = q^{LD}(\xi) \quad (3.16)$$

Assim, juntando-se essas duas condições, a continuidade dos fluxos e o sinal distinto de  $r_{,i}$ , percebe-se que as duas últimas parcelas do lado direito da Equação 3.15, compostas por funções de ponto, se anulam. Em tais situações é desnecessário empregar o procedimento de Hadamard e a análise da integral singular poderia ser feita diretamente.

Também a posição dos nós funcionais nos elementos de contorno auxilia na solução da integral singular, pois nos elementos constantes o ponto singular é centralizado. No caso de elementos retilíneos uma solução geométrica é imediata: conforme visto,  $r_i n_i$  representa o produto escalar entre vetores ortogonais, sendo nulo nessa condição.

Já a abordagem da integral hipersingular é mais elaborada. Das duas parcelas que compõem o núcleo de  $p^*(\xi; X)$  apenas uma delas é de fato de ordem de singularidade mais alta; a outra, composta de produtos  $r_{,i} n_i$ , no caso de elementos retilíneos, é nula, ou seja:

$$\frac{1}{2\pi^2} \left\{ \int_{SING} [u(X) - u(\xi)] [r_{,i} n_j(\xi) r_{,j} n_i(X)] |J| dr \right\} = 0 \quad (3.17)$$

De acordo com Mansur et al. [...], a mesma estratégia feita anteriormente para analisar a integral singular deve ser implementada no caso hipersingular, de modo a garantir a integrabilidade do núcleo no caso geral, no sentido do VPC, gerando a seguinte sentença, após a imposição dos limites:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{SING} [u(X) - u(\xi)] \frac{1}{r^2} n_i(\xi) n_i(X) |J| dr = \\ & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{LD} \left[ \frac{[h^{LD}(X) - \tau^{LD}(\xi)]}{r} n_i^{LD}(\xi) n_i^{LD}(X) |J|^{LD} \right] dr + \int_{LE} \left[ \frac{[h^{LE}(X) - \tau^{LE}(\xi)]}{r} n_i^{LE}(\xi) n_i^{LE}(X) |J|^{LE} \right] dr \right. \\ & \left. + h^{LE}(\xi) n_i^{LE}(\xi) n_i^{LE}(X) |J|^{LE} [\ln(L^{LE}) - \lim_{r \rightarrow 0} \ln(r)] + h^{LD}(\xi) n_i^{LD}(\xi) n_i^{LD}(X) |J|^{LD} [\ln(L^{LD}) - \lim_{r \rightarrow 0} \ln(r)] \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nesta última expressão, definiu-se  $\tau(\xi)$  como o fluxo tangencial, ou seja:

$$\tau(\xi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{[u(X) - u(\xi)]}{r} \quad (3.19)$$

Também se definiu  $h(X)$  como sendo, simplesmente, uma função auxiliar:

$$h(X) = \frac{u(X) - u(\xi)}{r} \quad (3.20)$$

Esta forma geral explicita as funções singulares que se compensam com as funções correlatas dadas na Equação 3.15, no sentido de VPC, ou seja, as duas últimas parcelas da Equação 3.14 interagem com as duas últimas parcelas do lado direito da Equação singular 3.15, anulando a singularidade no caso geral.

Essa formulação apresentada também é interessante por permitir se optar pela avaliação numérica da integral com núcleo  $(1/r)$ , pois os tradicionais pontos de Kutt de primeira ordem podem ser implementados, em lugar dos pontos complexos de segunda ordem, voltados à solução de  $(1/r^2)$ .

Também a solução da integral hipersingular pode ser simplificada no caso de continuidade de fluxos tangenciais e emprego de elementos retilíneos. Diferentemente do caso anterior, a integral hipersingular não é nula, mas pode ser resolvida analiticamente, considerando que em  $r=0$  a singularidade é neutralizada pelo termo  $[u(X) - u(\xi)]$ :

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\text{SING}} [u(X) - u(\xi)] \frac{n_i(\xi)n_i(X)}{r^2} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\text{SING}} [U^p \varphi^p(X) - u(\xi)] \frac{n_i(\xi)n_i(X)}{r^2} |J| dr \right\} \quad (3.21)$$

Ressalta-se que, uma vez neutralizada a singularidade, por todos os demais pontos do contorno, excluído, evidentemente, o ponto singular, tem-se:

$$u(\xi) \int_{\Gamma} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{r^2} d\Gamma = 0 \quad (3.22)$$

O fato dessa última expressão ser nula não é evidente. Prado [...] apresenta em sua dissertação de Mestrado uma demonstração para esse resultado, que é apresentado no Apêndice F, pela dificuldade de se obtê-la na literatura.

### 3.4 SOLUÇÃO DAS INTEGRAIS

Considerando-se elementos retilíneos constantes, os núcleos singulares e hipersingulares podem ser resolvidos de modo simples, considerando-se que o ponto fonte se situa exatamente no centro do elemento e os valores do potencial e fluxos não variam ao longo dos elementos, de modo que não há problemas de descontinuidade nessas grandezas.

Considerando a retidão do elemento, o valor do núcleo de mais alta ordem é dado por:

$$p^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r^2} [n_i(X)n_i(\xi)] \quad (3.23)$$

Analisando-se sua integral no elemento da hipersingularidade, tem-se:

$$\int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma = -U^{\text{sing}} \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r^2} [n_i(X)n_i(\xi)]d\Gamma \quad (3.24)$$

Percebe-se que, nesse caso:

$$n_i(X)n_i(\xi) = 1 \quad (3.25)$$

Então:

$$\int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma = \int_{\Gamma^{\text{sing}}} U^{\text{sing}} \left( -\frac{1}{2\pi r^2} \right) d\Gamma = -\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{\Gamma^{\text{sing}}} \frac{1}{r^2} d\Gamma \quad (3.26)$$

Dividindo-se o domínio  $\Gamma$  em dois subdomínios, conforme mostrado na Figura 3.2, tem-se:



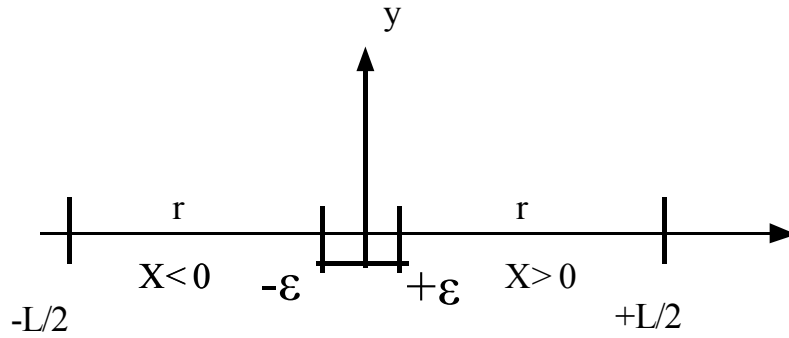


Figura 3.2— Limites de Integração ao longo do elemento singular.

$$-\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{\Gamma^{\text{sing}}} \frac{1}{r^2} d\Gamma = -\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{-L/2}^{-\varepsilon} \frac{1}{r^2} dr - \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{+\varepsilon}^{L/2} \frac{1}{r^2} dr \quad (3.27)$$

Resolvendo-se a equação, tem-se:

$$\begin{aligned} &-\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left( -\frac{1}{r} \right)_{-L/2}^{-\varepsilon} - \frac{U_e n_i}{2\pi} \left( -\frac{1}{r} \right)_{\varepsilon}^{L/2} = \\ &\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left[ +\frac{1}{(-\varepsilon)} + \left( -\frac{1}{(-L/2)} \right) \right] + \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left[ +\frac{1}{(L/2)} + \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] = \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left( -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon} + \frac{4}{L} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

A singularidade presente no resultado dessa última integral é neutralizada exatamente pelo termo:

$$-\int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X) u(\xi) d\Gamma = -u(\xi) \int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X) d\Gamma = U^{\text{sing}} \int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X) d\Gamma \quad (3.29)$$

Pois da mesma maneira como foi feito com  $u(X)$ ,  $u(\xi)$  também é uma função constante, saindo, portanto, do núcleo da integral.

Analisando-se agora a integral no elemento da singularidade, vê-se que sua solução é imediata, ou seja:

$$\int_{\Gamma^{\text{sing}}} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma = Q^{\text{sing}} \int_{\text{sing}} q^*(\xi; X)d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} Q^{\text{sing}} \int_{\text{sing}} \frac{r_{>i} n_i}{r} d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

### 3.5 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO HIPERSINGULAR

O processo de discretização para a equação hipersingular segue o mesmo padrão apresentado anteriormente: os pontos fonte  $\xi$  são posicionados em coincidência com todos os pontos nodais que caracterizam os elementos de contorno, de modo a gerar um sistema resolvível de equações, no qual o número de incógnitas seja igual ao número de valores conhecidos.

Devido à diferença nos núcleos das integrais, novos coeficientes de influência são gerados e as matrizes resultantes são distintas, ou seja:

$$H^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_k q^* d\Gamma_j \quad (3.31)$$

$$W^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_k p^* d\Gamma_j \quad (3.32)$$

Daí resultando na seguinte equação matricial:

$$WU - HQ = 0 \quad (3.33)$$

# CAPÍTULO 4

## EXAME DA FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

### 4.1 INTRODUÇÃO

A Técnica ou Método dos Resíduos Ponderados (MRP) é uma das ferramentas numéricas importantes para se resolver aproximadamente problemas modelados através de equações diferenciais. Assim como o Método de Ritz [], essa técnica atuou como uma espécie de precursora dos modernos métodos numéricos, oferecendo possibilidade de solução computacional a muitos problemas de difícil solução analítica.

Também se distingue dos métodos discretos citados nos Capítulos 3 e 4 por não apresentar a idéia de discretização completamente desenvolvida, empregando usualmente um procedimento global de solução, em oposição à idéia vigente no MEC e nos demais métodos correlatos de se realizar aproximações em células, elementos ou volumes elementares, que se compatibilizam entre si.

Por outro lado, sendo uma técnica mais básica em seus fundamentos, o MRP pode ser aplicado para deduzir todos os demais, desde que se imponham adequadamente as características próprias de cada um dos métodos numéricos desejados [Brebbia, 1978].

Há numerosa literatura explanando e discutindo as características gerais da MRP e sua aplicação na dedução da formulação básica do MEC, destacando-se as obras mais clássicas [Brebbia e Walker, 1980; Brebbia et al, 1982].

Através da sentença do MRP é possível entender interessantes características do MEC com relação a outros métodos, especialmente no que tange ao papel e ao efeito das funções auxiliares na formulação integral. Especificamente, à luz do MRP pode-se melhor avaliar a importância do papel da solução fundamental, que ao ser uma função assemelhada ao problema que se quer resolver, consegue minimizar mais eficientemente os resíduos numéricos, facultando uma melhor precisão à solução aproximada.

Deve-se ressaltar, entretanto, que o MRP não é a única forma de se deduzir ou formular o MEC, bem como as outras técnicas discretas citadas. Também não é a mais simples e fácil de estender aos problemas complicados. Com respeito ao MEC, os procedimentos fundamentados na Teoria das Equações Integrais têm sido mais amplamente empregados na dedução do método, por conta de sua maior simplicidade e clareza, não obstante não ficar formalmente demonstrada a transformação da sentença integral exata numa sentença integral aproximada, o que é feito normalmente numa etapa posterior, de forma menos rigorosa.

Nesse Capítulo, mostram-se os fundamentos teóricos do MRP de modo a melhor compreender o desempenho numérico das formulações singular e hipersingular do MEC.

O MRP se formula através de uma sentença de resíduos ponderados, no qual se busca uma minimização de resíduos numéricos através da ortogonalização deles com relação a um espaço funcional, que serve de base à composição da solução aproximada.

## 4.2 EXPRESSÃO DO MRP EQUIVALENTE À FORMA INTEGRAL INVERSA

Com vistas à apresentação do MRP e sua ligação com o MEC de maneira mais simples, considere mais uma vez um volume de controle bidimensional  $\Omega$ , dentro do qual escoa em regime permanente uma substância contínua, homogênea e isotrópica ou atue um campo térmico ou mecânico igualmente estacionário e com as mesmas condições materiais. A equação diferencial de governo resulta na Equação de Laplace, repetida a seguir por conveniência agora em notação indicial:

$$u_{,ii} = 0 \quad (4.1)$$

O procedimento será apresentado a seguir em uma forma concisa usando notação indicial derivada das formas apresentadas na literatura [Brebbia et al,1982; Brebbia, 1978].

A forma integral forte associada à Equação 4.1 é dada por:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

A função  $u^*$  exposta na equação anterior deve ser interpretada, em princípio, como uma função auxiliar de ponderação, com propriedades matemáticas tais que não impeçam o estabelecimento da sentença anterior. Posteriormente, seu significado será estendido e melhor discutido.

Integrando a Equação 4.2 por partes, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (4.3)$$

Esta última forma é conhecida como forma fraca associada à equação diferencial original. Empregando-se o Teorema da Divergência, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (4.4)$$

Empregando-se a Equação 4.3, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u d\Omega = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (4.5)$$

Percebendo-se que:

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q \quad (4.6)$$

Pode-se escrever a Equação 4.7 de maneira equivalente, destacando-se o contorno em que a derivada normal q do potencial é prescrita, ou seja:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma_u} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

Para se encontrar a forma do MRP equivalente à forma inversa, toma-se a integral de domínio existente do lado direito da Equação 4.7 e fazem-se novamente as operações de integração por partes:

$$-\int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega = -\int_{\Omega} (u u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega \quad (4.8)$$

Aplicando-se mais uma vez o Teorema da Divergência:

$$-\int_{\Omega} (u u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = -\int_{\Gamma} u u^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega \quad (4.9)$$

Definindo-se:

$$q^* = u^*_{,i} n_i \quad (4.10)$$

Pode-se escrever:

$$-\int_{\Gamma} uu^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} uu^*_{,ii} d\Omega = -\int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uu^*_{,ii} d\Omega \quad (4.11)$$

Também se destacando a região do contorno na qual o potencial é prescrito, tem-se:

$$-\int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uu^*_{,ii} d\Omega = -\int_{\Gamma_u} \bar{u}q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uu^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Juntando-se os resultados obtidos pelas Equações. 4.7 e 4.12 pode-se escrever a forma do MRP equivalente à forma integral inversa da equação diferencial de governo. É preciso, no entanto, operacionalizar a última integral do lado direito da Equação 4.12 de modo a reescrevê-la na forma integral forte, ou seja, com o operador laplaciano sendo aplicado no potencial  $u$ , que a essa altura deve já ser entendido como uma aproximação. Daí resulta:

$$\int_{\Gamma_u} (\bar{u} - u)q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} (q - \bar{q})u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,ii}u^* d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

### 4.3 ANÁLISE DA FORMA INTEGRAL INVERSA À LUZ DO MRP

Definindo-se, então, os resíduos no domínio ( $R_D$ ), no que diz respeito à diferença entre o potencial aproximado e o prescrito no contorno ( $R_E$ ), e ainda o que representa a diferença entre o valor aproximado e prescrito do fluxo também no contorno ( $R_N$ ), ou seja:

$$\begin{aligned} R_D &= (\nabla^2 u) \\ R_E &= (u - \bar{u}) \\ R_N &= (q - \bar{q}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pode-se reescrever a Equação 4.13 na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} R_D u^* d\Omega = \int_{\Gamma_q} (R_N) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (R_E) q^* d\Gamma \quad (4.15)$$

Essa última equação é a equação do MRP equivalente à forma integral inversa da equação de governo. Pode ser interpretada como uma sentença no qual há minimização de resíduos com relação às condições de contorno essenciais, naturais e aos valores no domínio. Sabe-se que a solução aproximada  $u$  e sua derivada normal se distinguem da solução exata, essa sentença trata de reduzir ao máximo a diferença entre seus valores.

Em termos específicos do MEC, na conjunção dos campos das variáveis aproximadas entre os elementos de contorno, podem-se admitir descontinuidades de valores, seja no potencial ou na sua derivada normal, pois que a sentença do MRP correspondente à forma inversa possui uma estrutura matemática capaz de minimizar os resíduos provenientes dessa descontinuidade.

A forma fraca da equação diferencial, por exemplo, usada comumente no Método dos Elementos Finitos, não possui termo capaz de minimizar descontinuidade no potencial; daí o mau funcionamento dos elementos descontínuos nesse método. Já no MEC, o uso de elementos constantes, que são descontínuos em termos do potencial e fluxo, funciona satisfatoriamente.

A análise da Equação de resíduos 4.15 permite também avaliar a importância da solução fundamental e sua derivada normal como funções de ponderação. Ao serem aparentadas com o problema que se quer resolver, oferecem uma excelente base para geração de um espaço solução, do qual os resíduos serão expurgados, por conta da ortogonalização que cada uma das parcelas integrais da Equação 4.15 representa. O uso de polinômios e outras funções podem ser feito satisfatoriamente, mas sem a mesma eficiência nesse processo de minimização residual do que funções assemelhadas à solução analítica do problema.

A existência de um processo de minimização de resíduos pode ser comprovada também de outra maneira, verificando o que ocorre quando se emprega recursivamente a equação integral, para o cálculo das variáveis internas.

Vários testes empregando recursivamente a sentença integral mostraram que a precisão dos resultados do potencial no contorno é melhorada, o mesmo ocorrendo em alguns casos para suas derivadas normais [3].

O uso recursivo mencionado consiste na reaplicação da equação integral na forma discretizada, equação (4), incluindo os valores já calculados do potencial e sua derivada normais, com os pontos fontes localizados novamente no contorno, mas em coordenadas diferentes das dos pontos nodais.

Sabe-se que a precisão no cálculo das variáveis internas é melhor do que a obtida nos valores de contorno e a razão disso provém do fato de que o uso recursivo da equação integral

equivale a uma nova minimização dos erros numéricos cometidos, pois que existe, conforme mostrado, uma associação entre a equação integral de governo e uma sentença do MRP.

Abordando agora o caso da FHS, vê-se que tais funções de ponderação correspondem às derivadas normais (ou direcionais quaisquer) de  $u^*(\xi; X)$  e  $q^*(\xi; X)$ , funções essas ficam de ordem inversa superior.

Sabe-se que o bom desempenho do MRP está ligado à escolha de funções de aproximação e ponderação que obedeçam a uma série de condições, nas quais se inclui a completude da seqüência, em que funções mais simples devem ser preferencialmente escolhidas, a menos que algumas peculiaridades no problema se apresentem.

Isso explica a adequação da FHS em problemas com regiões com elevados gradientes, pois as funções com maior ordem de singularidade têm maior capacidade de ortogonalização de resíduos nessas condições.

Resta, no entanto, estudar e comparar, mais detidamente, o comportamento da FHS na solução recursiva, seja para pontos internos quanto para valores de contorno.

Ressalta-se, todavia, que na equação integral da FHS, há um termo adicional na equação integral, (vide Equação 2.35) dado por:

$$f_t(\xi; X) = \sum_{e=1}^N [U_k^e - u(\xi)] \int_{\Gamma_e} \varphi_k \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial n} d\Gamma \quad (4.16)$$

É provável que além da ordem mais alta das funções de ponderação, a presença desse termo adicional, de fundamental importância para a integrabilidade de  $f_t(\xi; X)$ , introduza algum efeito numérico adicional que altere a precisão ou a taxa de convergência dos resultados.



# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS NUMÉRICOS

### 5.1 INTRODUÇÃO

São apresentados aqui os resultados de simulações numéricas realizados com a FSC e a FHS em quatro exemplos.

Para três desses exemplos, que possuem solução analítica, além dos valores numéricos, são calculados os correspondentes valores analíticos do potencial e sua derivada normal, assim como os erros percentuais. Esses erros referenciam o quanto o valor obtido através do MEC pela FSC e FHS está próximo ou distante do valor analítico conhecido, oferecendo uma estimativa de precisão.

Num último exemplo, em que não se possui solução analítica, os resultados numéricos do MEC são comparados com uma solução de referência obtida pelo Método dos Volumes Finitos, com o emprego de uma malha bastante refinada.

Os exemplos que se seguem comparam também os resultados das FSC e FHS para pontos internos, usando assim um procedimento recursivo de cálculo, de modo a permitir uma melhor avaliação do comportamento numérico de ambas as formulações e ratificar algumas conclusões à luz do Método dos Resíduos Ponderados.

Nesse contexto, particularmente interessa o exame de desempenho da FHS no cálculo dos valores de derivadas do potencial em pontos internos, pois assim pode-se ter uma idéia da eficiência do uso de funções de mais alta singularidade no papel de funções de ponderação, atuando recursivamente, sob a ótica do MRP.

Foram usados programas escritos em linguagem FORTRAN com elementos retilíneos constantes.

Para o cálculo do potencial (temperatura, deslocamento) e sua derivada (fluxo, tensão) utilizaram-se as expressões 5.1 para barra engastada, 5.2 para um quarto de secção de tubo e 5.3 para o semicírculo, obtidas conforme demonstrado nos Apêndices A a D.

$$\begin{aligned} T &= x \\ q &= \frac{dT}{dn} \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$T = \frac{\ln r}{\ln 3}$$

$$q = \frac{1}{r \ln 3}$$
(5.2)

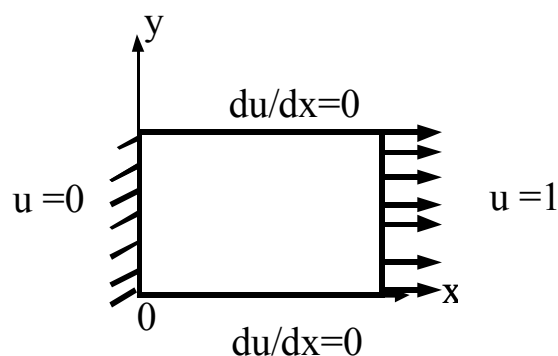
$$T = \frac{\theta}{\pi}$$

$$q = \frac{dT}{dn} = -\frac{1}{\pi x}$$
(5.3)

Em cada formulação (singular e Hipersingular), o programa foi alterado na subrotina que calcula os núcleos da matriz.

## 5.2 BARRA ENGASTADA

Como primeiro exemplo, considera-se uma barra de comprimento unitário, engastada numa extremidade e sujeita a uma carga axial igualmente unitária na outra extremidade, conforme mostra a Figura 5.1.



*Figura 5.1– Barra engastada sujeita a carga unitária na extremidade direita.*

Foram usadas malhas com 16, 32 e 64 EC homogêneos, ou seja, de mesmo tamanho.

Mostra-se a curva de erro percentual para o potencial, neste caso representando o deslocamento axial, calculado na aresta horizontal no contorno, no interior do elemento e também na aresta vertical direita (extremidade livre).

A solução analítica para o deslocamento é muito simples, sendo linear. O valor das tensões ou deformações é constante ao longo da barra.

### 5.2.1 Deslocamentos em pontos no contorno - aresta horizontal

Nas figuras que se seguem são apresentadas as curvas do erro percentual cometido no cálculo do potencial ao longo da aresta horizontal do contorno, que nesse caso representa o deslocamento axial, tanto para a FSC (linha contínua), quanto para a FHS (linha tracejada).

Na Figura 5.2 comparam-se os valores do erro percentual cometido com a malha de 16 EC. A seguir, na Figura 5.3 apresenta-se a curva de erro para a malha de 32 EC. Na Figura 5.4, finalmente, mostra-se a curva de erro com a malha de 64 EC.

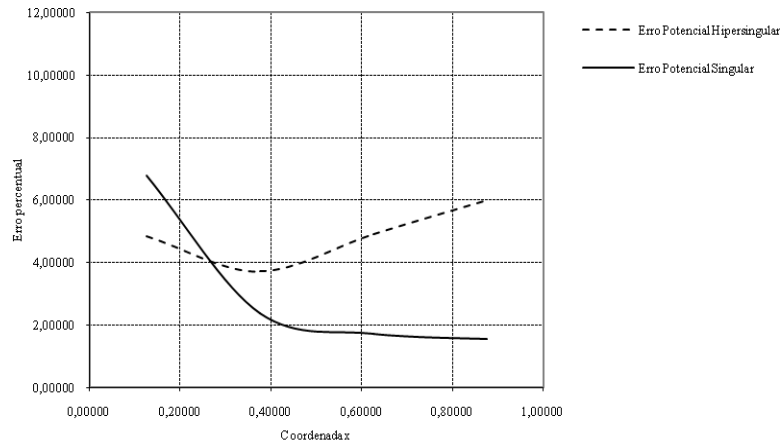


Figura 5.2 - Erro percentual no deslocamento axial com malha de 16 EC calculado no contorno - barra engastada

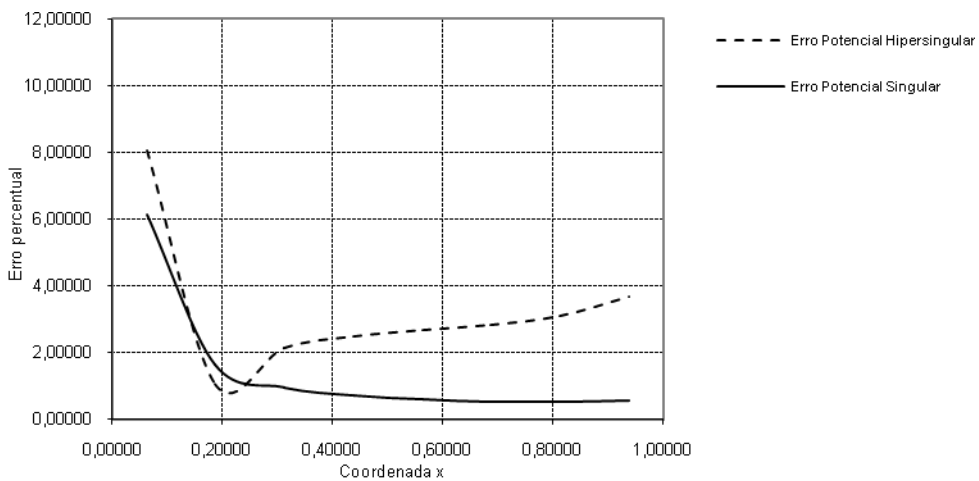


Figura 5.3 - Erro percentual no deslocamento axial com malha de 32 EC calculado no contorno - barra engastada

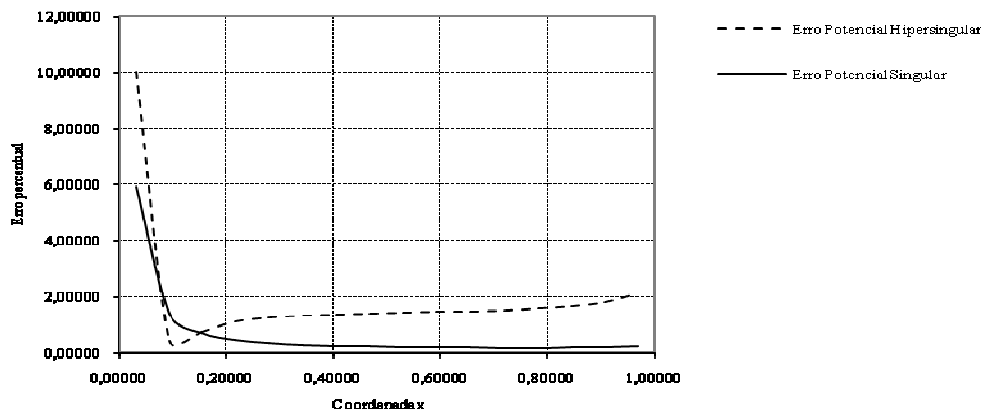


Figura 5.4 – Erro percentual no deslocamento axial com malha de 64 EC calculado no contorno - barra engastada.

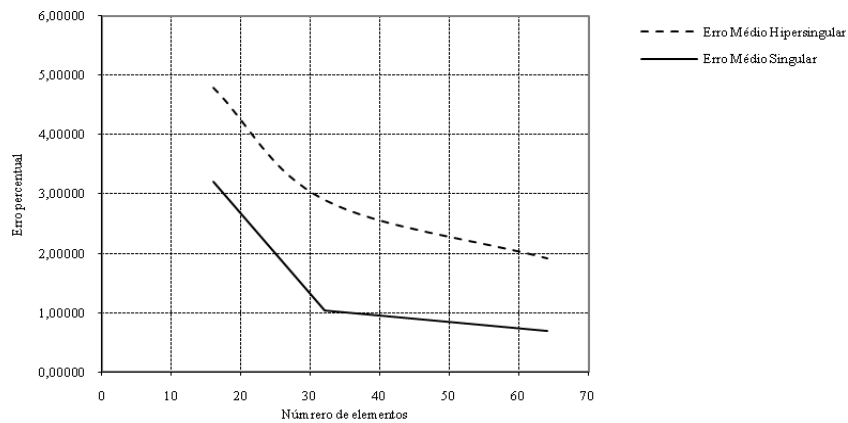
Observa-se que, com o refinamento da malha, as soluções analíticas e numéricas tendem a se aproximar, ou seja, o erro percentual diminui, denotando a convergência das formulações com o refinamento da malha.

De um modo geral, a FSC teve melhor desempenho que a FHS no caso em questão, em que estão ausentes gradientes ou singularidades nas variáveis básicas do problema, exceto para uma pequena faixa, localizada na região próxima ao engaste, onde o comportamento da Formulação Hiper singular é ligeiramente melhor, com menor erro percentual, mas apenas para a malha de 16 elementos.

Outro fator interessante é o fato de na FHS apesar do erro percentual de modo global se reduzir, os valores de deslocamento próximos ao canto engastado, mais precisamente no primeiro elemento de contorno situado nessa posição, tiveram erro percentual crescente com o refinamento.

Na curva representada no gráfico da Figura 5.5 verifica-se o decréscimo do erro médio percentual na solução numérica para o deslocamento axial no contorno com o aumento do número de elementos para a barra engastada em questão, em ambas as formulações.

Enquanto o erro médio da FSC está na faixa dos 0,8%, a FHS apresentou um erro significativamente maior, em torno de 2%.



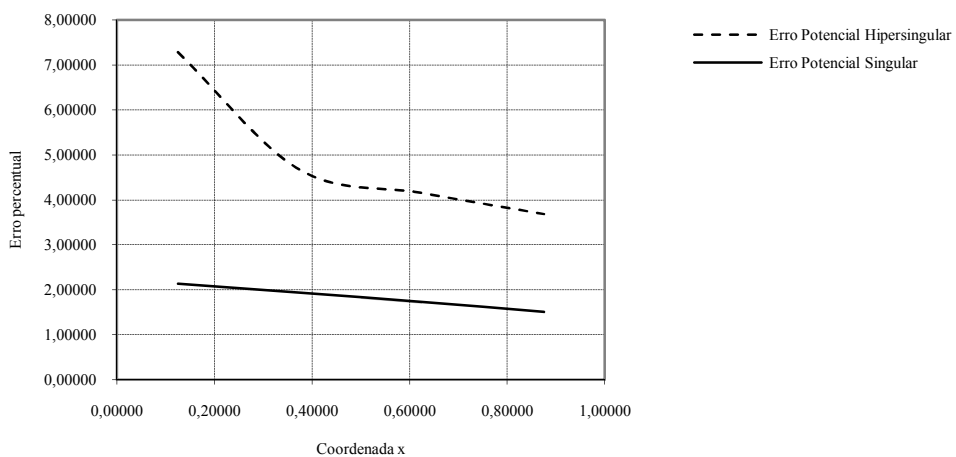
*Figura 5.5– Erro médio percentual do deslocamento axial no contorno em função da quantidade de elementos de contorno - barra engastada*

### 5.2.2 Deslocamento em pontos no interior

A seguir, ilustra-se o comportamento do erro percentual cometido no cálculo deslocamento axial no interior do domínio para a FSC (linha contínua) e para a FHS (linha tracejada). Doravante, esse mesmo padrão é sempre adotado para caracterizar as respostas das formulações.

Os pontos no interior são situados sobre uma linha paralela às arestas horizontais, e também equidistantes destas.

Os gráficos que se seguem mostram as curvas de erro percentual para as malhas de 16, 32 e 64 EC.



*Figura 5.6– Erro percentual no deslocamento axial interior com malha de 16 EC - barra engastada*

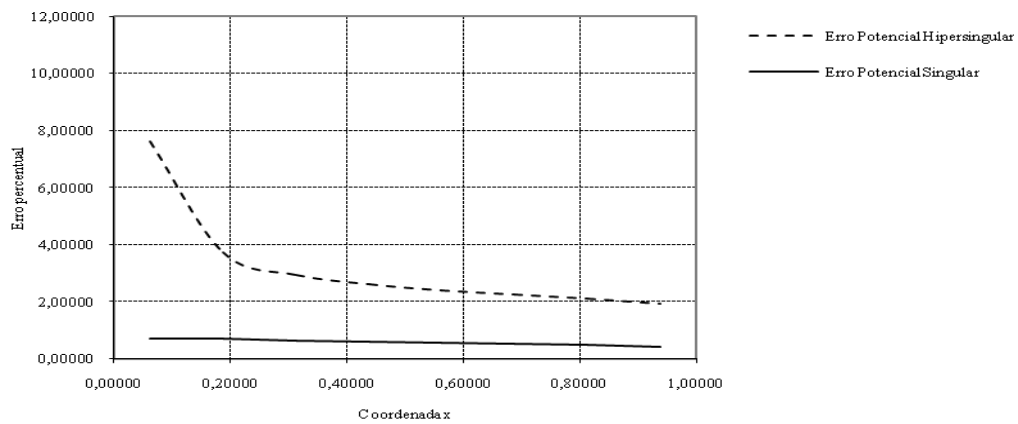


Figura 5.7– Erro percentual no deslocamento axial interno com malha de 32 EC - barra engastada.

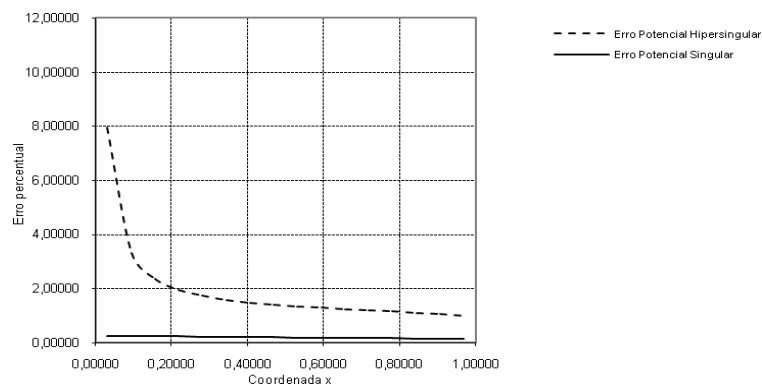


Figura 5.8 – Erro percentual no deslocamento axial interno com malha de 64 EC – barra engastada.

Observa-se que a atuação mais precisa da FSC também se repete no cálculo de variáveis internas, com uma queda significativa no erro dos valores do deslocamento.

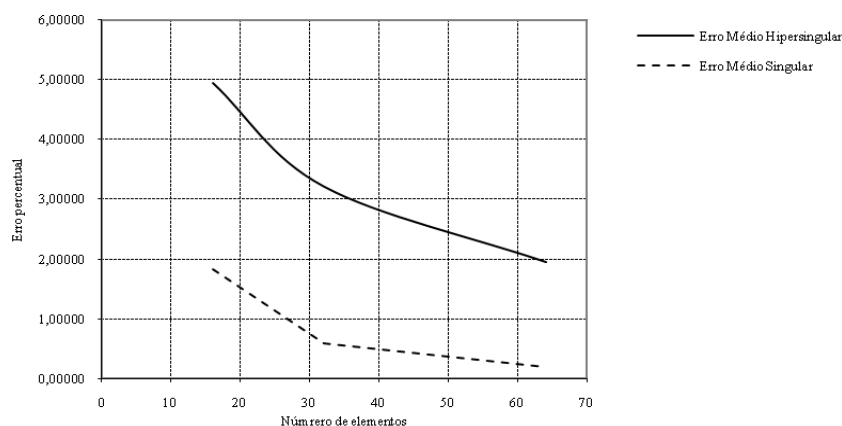
É importante observar que, à medida que o número de elementos da malha aumenta, ocorre uma diminuição do erro percentual de ambas as formulações, apesar de prevalecer o melhor desempenho da Formulação Singular.

No que diz respeito à FSC o erro médio percentual no cálculo dos valores internos com a malha mais refinada foi de cerca de 0,2%, enquanto no cálculo de valores de contorno com essa mesma malha foi de 0,8%.

Isso denota a ação efetiva de redistribuição ou reminimização de resíduos, produzida pelo uso reiterado ou recursivo da equação integral de contorno, que também é uma sentença de resíduos ponderados, conforme mostrado no Capítulo 4.

Nessa análise de desempenho interno, não há um ponto em que a FHS tenha um valor de erro percentual mais baixo do que a FSC.

Na curva representada no gráfico a seguir (Figura 5.9) verifica-se o decréscimo do erro médio percentual do deslocamento axial calculado recursivamente, com o aumento do número de elementos para a barra engastada em questão, em ambas as formulações.



*Figura 5.9– Erro médio percentual no interior do deslocamento axial barra engastada de acordo com número de elementos.*

Com relação à precisão do cálculo dos valores de contorno em comparação com os valores obtidos para pontos internos na FHS, em que há o uso recursivo da sentença integral, o comportamento foi distinto da FSC. O valor do erro médio percentual não se alterou, mas as curvas de erro local foram mais homogêneas. Para ressaltar esse fenômeno, nas figuras seguintes são rerepresentadas as curvas de erro percentual no deslocamento ao longo da direção axial, no cálculo efetivado para valores de contorno e para pontos internos, com a FHS.

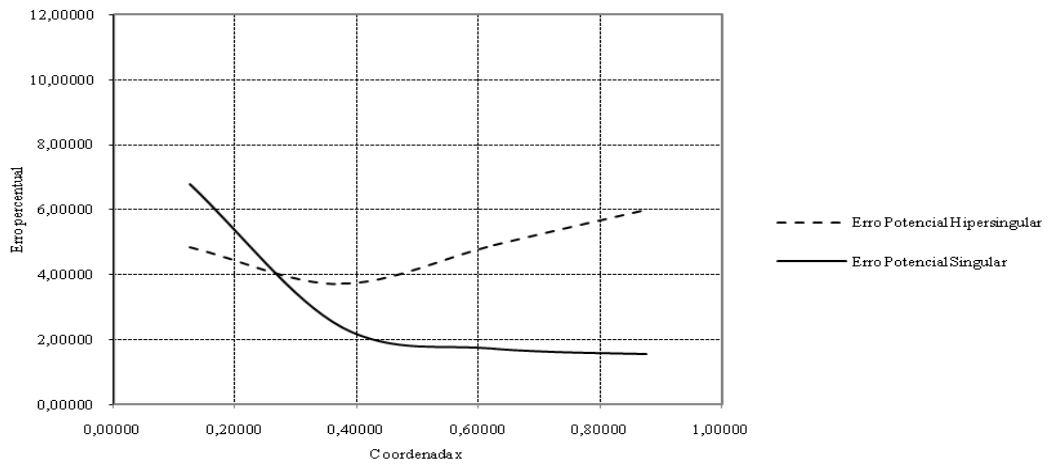


Figura 5.10– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 16 EC, valores calculados no contorno e no interior com a FHS – barra engastada.

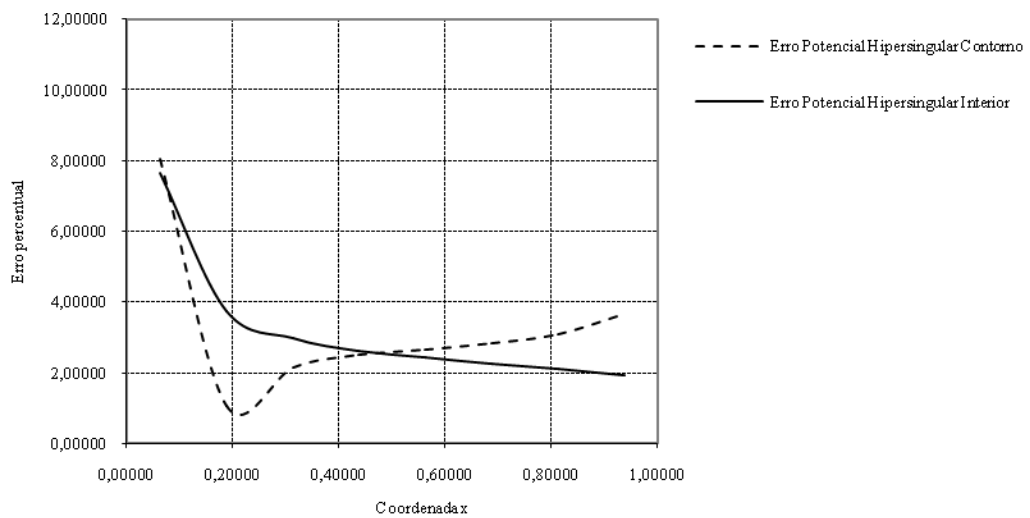
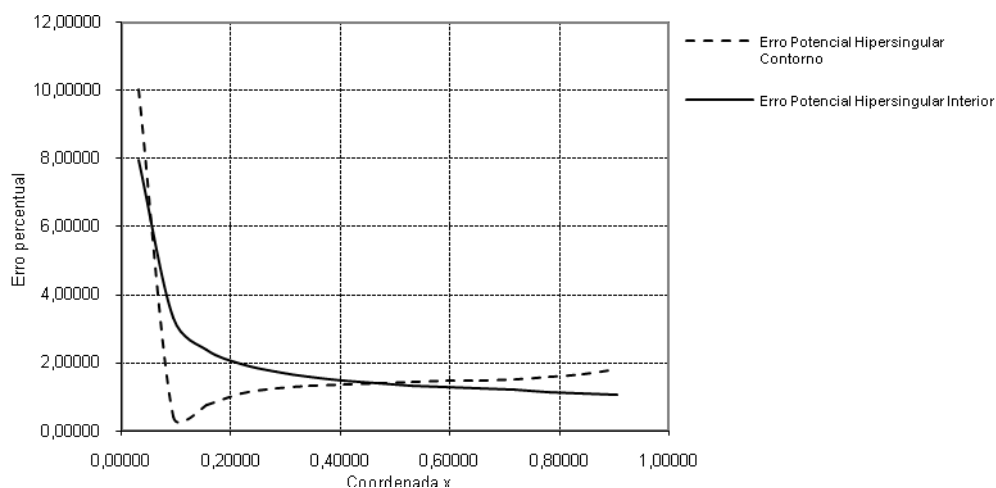


Figura 5.11– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 32 EC, valores calculados no contorno e no interior com a FHS – barra engastada.





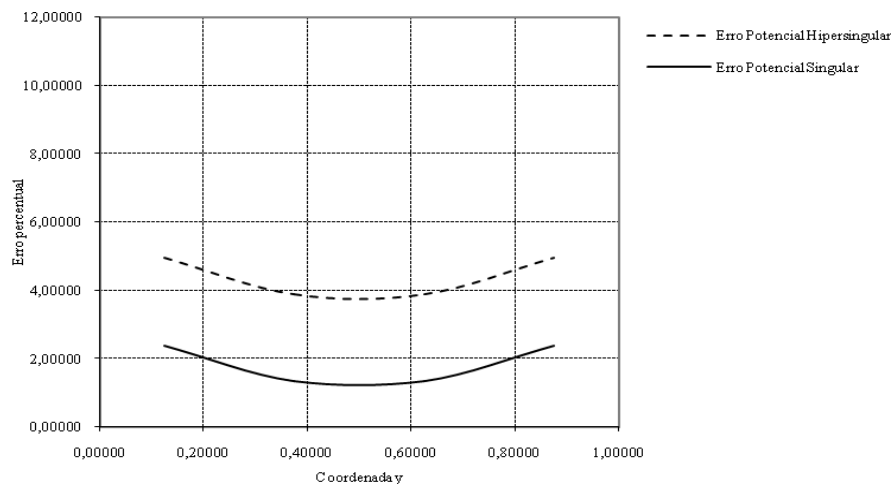
*Figura 5.12– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 64 EC, valores calculados no contorno e no interior com a FHS – barra engastada.*

### 5.2.3 Deslocamento no contorno - a aresta vertical direita

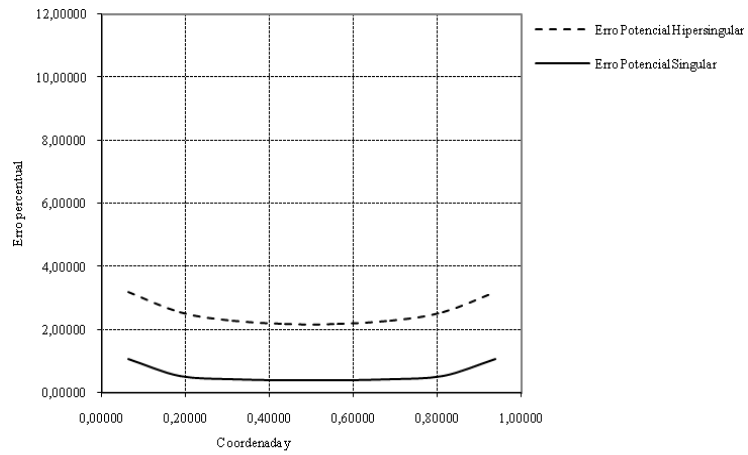
A seguir, as Figuras 5.13 a 5.15 ilustram o comportamento do erro percentual cometido no cálculo do deslocamento axial máximo, que ocorre na extremidade livre, para a FSC e FHS, em função da quantidade de elementos de contorno utilizados.

Estudando-se então a aresta vertical referente à extremidade livre da barra em questão, observa-se que o desempenho da FHS é pior do que a FSC, como esperado, em função dos resultados anteriormente apresentados.

Evidentemente, refinando-se a malha, a diferença entre os erros percentuais obtidos através das duas formulações é menor, sendo os valores simétricos em relação a um eixo vertical central.



*Figura 5.13 - Erro percentual no deslocamento axial com malha de 16 EC calculado no contorno - barra engastada.*



*Figura 5.14 - Erro percentual no deslocamento axial com malha de 32 EC calculado no contorno - barra engastada.*

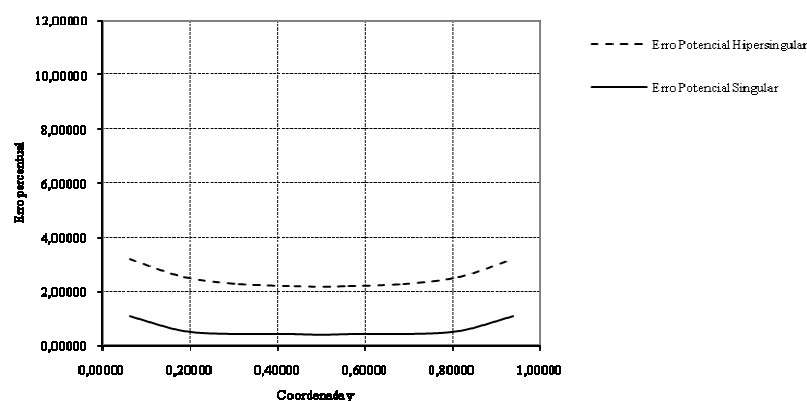


Figura 5.15– Erro percentual no deslocamento axial com malha de 64 EC calculado no contorno - barra engastada.

### 5.2.4 Tensão na aresta vertical do engaste

As Figuras 5.16 a 5.18 referem-se às curvas do erro percentual cometido no cálculo da derivada do potencial (tensão ou deformação) na aresta vertical esquerda para a duas formulações, em função da quantidade de elementos de contorno utilizados.

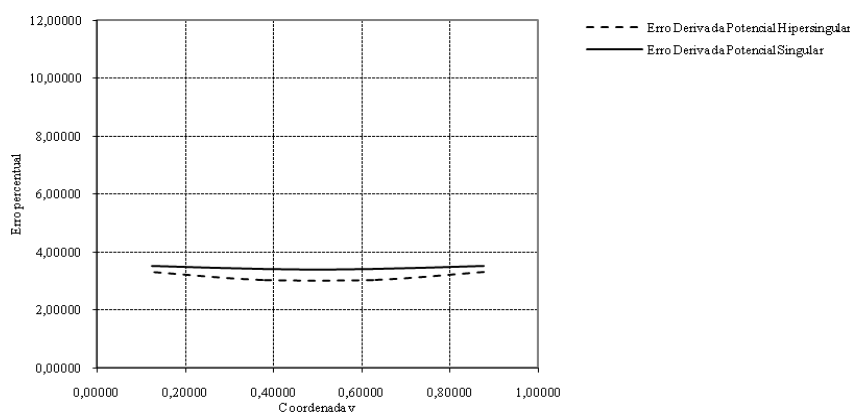


Figura 5.16– Erro percentual na tensão com malha de 16 EC calculado no contorno - barra engastada

Ainda neste caso, a FSC possui desempenho melhor, mas a diferença no desempenho das formulações diminui, ou seja, houve uma melhora relativa no comportamento dos resultados numéricos da FHS.

Em ambas as formulações, diminui-se o erro à medida que o número de elementos utilizados na discretização do contorno aumenta.

O erro percentual é simétrico em relação a um eixo central horizontal e diminui à medida que o número de elementos da malha cresce.

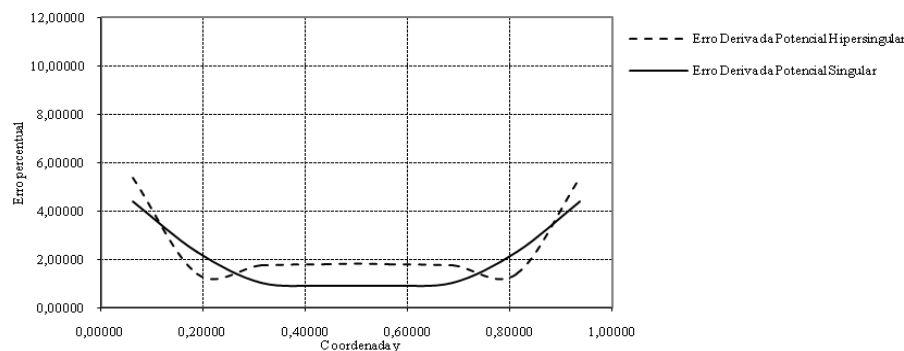


Figura 5.17– Erro percentual na tensão com malha de 32 EC calculado no contorno - barra engastada.

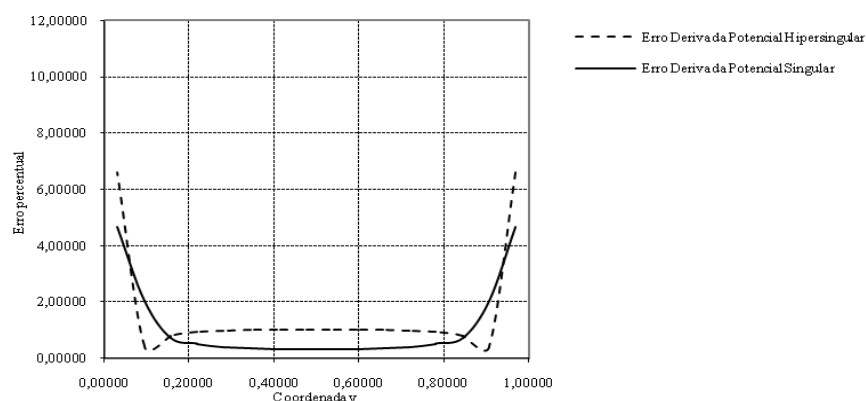
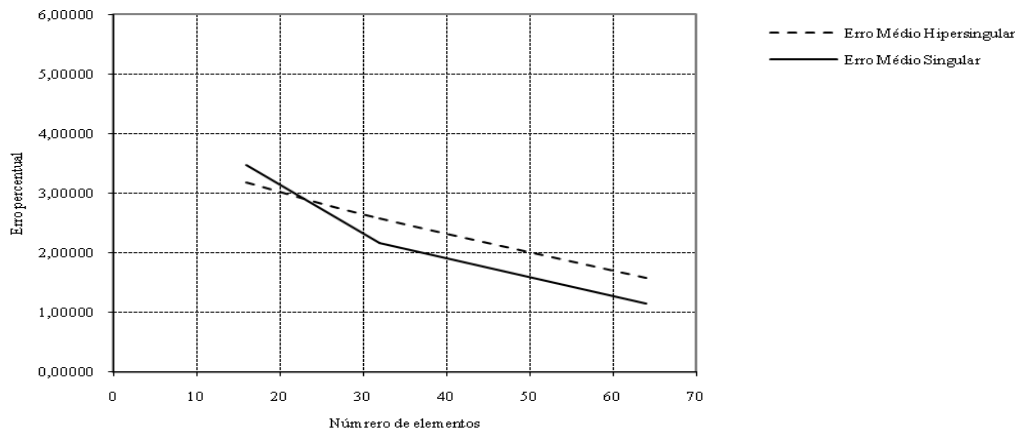


Figura 5.18– Erro percentual na tensão com malha de 64 EC calculado no contorno - barra engastada

O gráfico da Figura 5.19 mostra a convergência das curvas de erro médio percentual em função do refinamento da malha em ambas as formulações.

É provável que essa melhoria de desempenho da FHS na determinação das tensões já seja um indicativo que as funções de ponderação nela empregadas, de ordem de singularidade mais alta, são capazes de representar melhor as tensões do que os deslocamentos, não porque esses primeiros sejam um comportamento mais acentuado nesse problema, pois são, teoricamente, uniformemente distribuídos; mas porque as tensões em si, como são funções derivadas dos deslocamentos, são mais difíceis de representar matematicamente nas formulações aproximadas.



*Figura 5.19 – Erro médio percentual da tensão no contorno da barra engastada para diversas malhas - barra engastada*

### 5.2.5 Tensão no interior

As curvas de erro percentual mostradas nas Figuras 5.20 a 5.22 referem-se ao cálculo da derivada do potencial no interior para a FSC e para a FHS, em função da quantidade de elementos de contorno utilizados.

À medida que a malha é refinada, a diferença entre os erros percentuais no cálculo das tensões obtido para as duas formulações diminui consideravelmente, demonstrando a convergência dos resultados para a solução analítica com o refinamento.

Mais uma vez, em todos os casos, a FSC apresenta desempenho superior à FHS, mas comparativamente com os valores do erro percentual encontrados na determinação do deslocamento, os resultados são melhores, ou seja, os erros percentuais no cálculo das tensões no interior são menores do que os obtidos na avaliação dos deslocamentos.

Para a malha mais refinada a FHS teve erro médio na faixa de 0,8%, enquanto nos deslocamentos esse valor correlato era de 2%.

Ratifica-se uma maior adequação da FHS em representar os campos de tensão, não obstante as características desse exemplo, à luz do MRP, não favorecerem as funções de mais alta singularidade que a compõem.

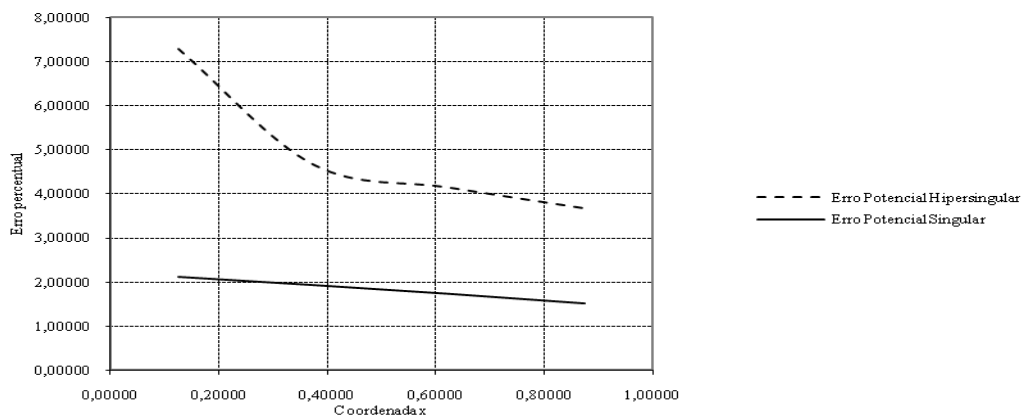


Figura 5.20– Erro percentual na tensão com malha de 16 EC calculado no interior - barra engastada.

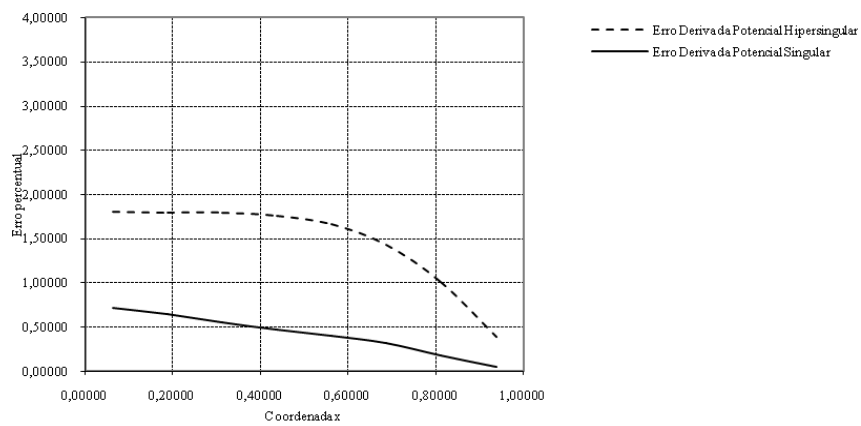
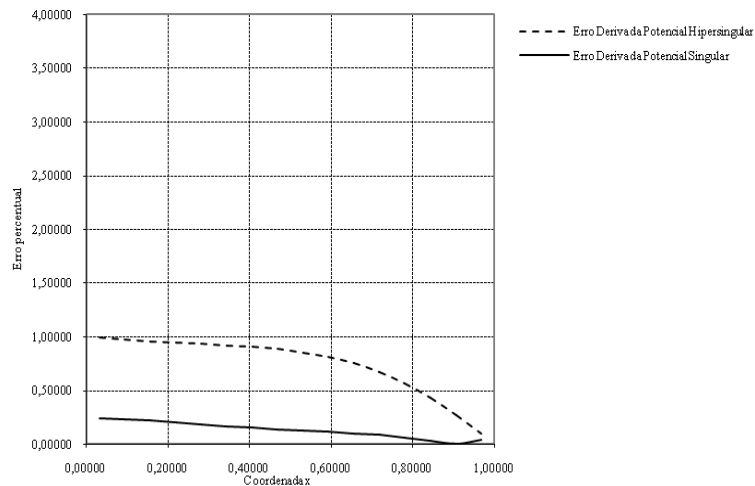
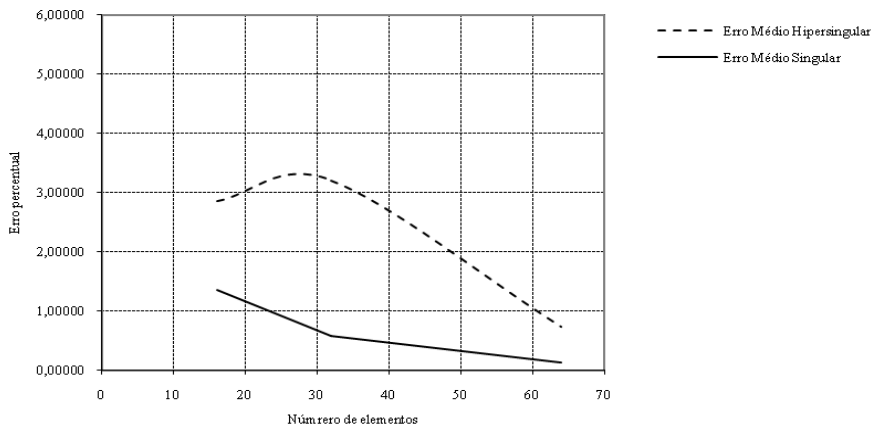


Figura 5.21– Erro percentual na tensão com malha de 32 elementos constantes calculado no interior - barra engastada.



*Figura 5.22– Erro percentual na tensão com malha de 64 EC calculado no interior - barra engastada.*

Por fim, a Figura 5.23 apresenta a curva de erro médio percentual em função da quantidade de elementos de contorno empregados.



*Figura 5.23– Erro médio percentual da tensão no interior da barra engastada para diversas malhas - barra engastada.*

### 5.3 TUBO COM SIMETRIA ANGULAR

Neste segundo exemplo, considera-se um cilindro infinitamente longo, sujeito a um diferencial de temperatura entre os contornos interno e externo, diferencial esse que varia apenas ao longo da direção radial. Dessa forma, pode-se examinar o cilindro empregando-se o conceito de simetria e apenas um quarto de seu domínio necessita ser representado, tal como mostrado na Figura 5.24.

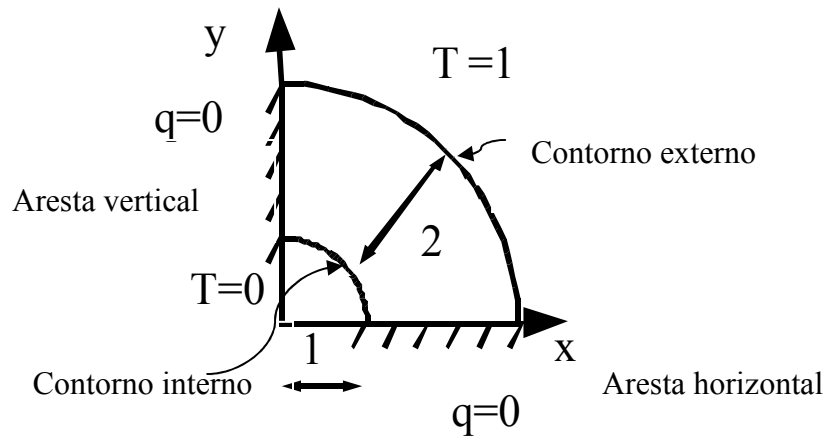


Figura 5.24 – Cilindro infinitamente longo sujeito a diferencial de temperatura

Então, tomando partido dessa simetria angular ou circunferencial, apenas um quarto do domínio é discretizado, por malhas compostas de 16, 32 e 64 elementos de contorno constantes, de diferentes tamanhos, no padrão mostrado na Figura 5.25.

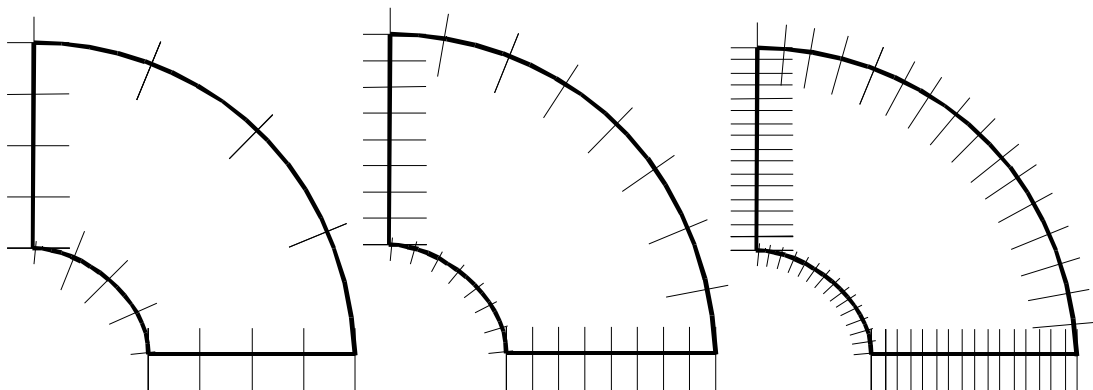


Figura 5.25 - Discretização do contorno com malhas de 16,32 e 64 EC – um quarto de cilindro

Os valores analíticos de temperatura e fluxo de calor ao longo do raio são dados por:

$$T = \frac{\ln r}{\ln 3}$$

$$q = \frac{1}{r \ln 3}$$



Neste segundo exemplo, estuda-se o comportamento dos erros percentuais nos pontos nodais da aresta horizontal, da aresta vertical, do contorno externo e do contorno interno nas duas formulações.

### 5.3.1 Temperatura na aresta horizontal - contorno

A seguir, ilustra-se nas Figuras 5.26 a 5.28, o comportamento do erro percentual cometido no cálculo do potencial, que agora representa a temperatura no contorno para a FSC (linha contínua) e para a FHS (linha tracejada), em função da quantidade de elementos de contorno utilizados, para a aresta horizontal.

Mais uma vez observa-se que, com o refinamento da malha, as soluções analíticas e numéricas tendem a se aproximar, constatando a convergência de ambas as formulações.

Na Figura 5.29 os erros percentuais referentes à temperatura para o caso em estudo com 16 elementos de contorno são evidenciados nas duas formulações.

Pode-se observar que a FSC tem desempenho melhor, com menores erros que a FHS. Para essa malha pobre vê-se que os erros junto ao contorno interno são muito maiores do que os erros junto ao contorno externo, em ambas as formulações.

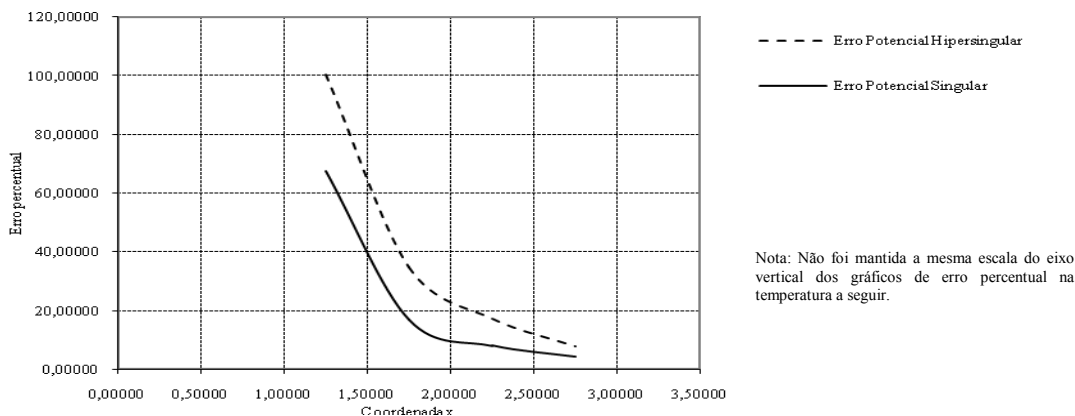
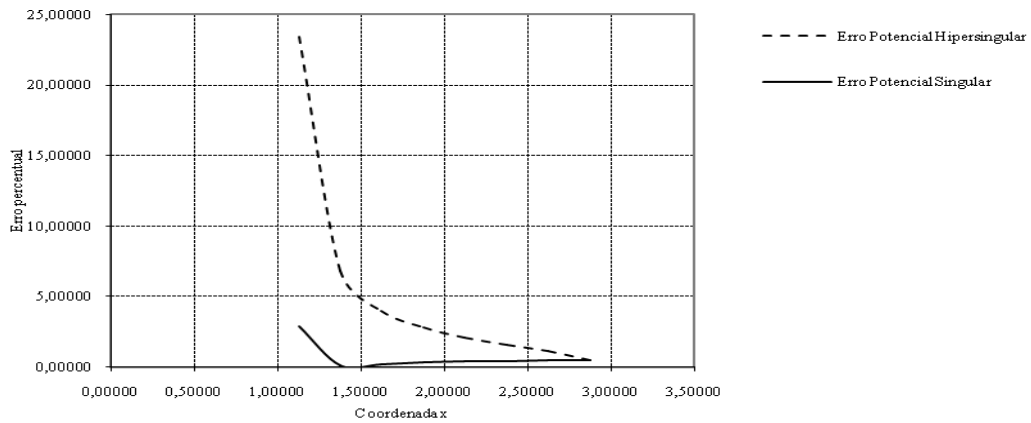


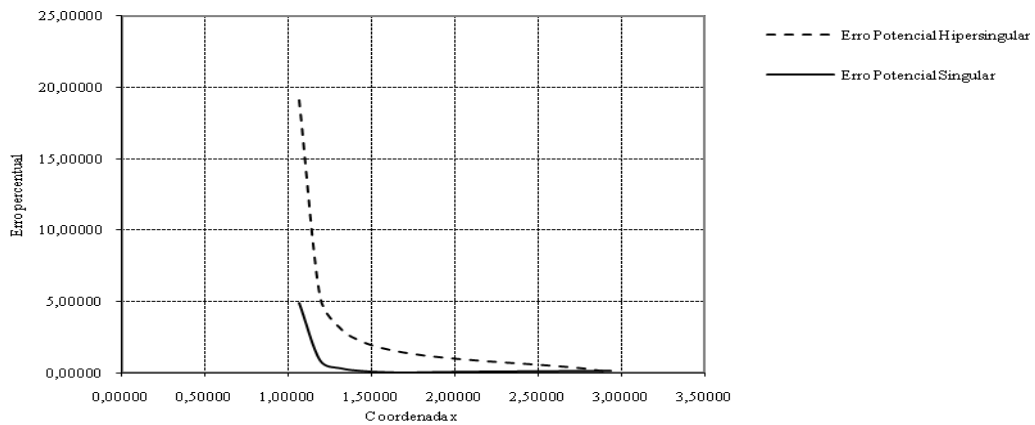
Figura 5.26- Erro percentual na temperatura com malha de 16 EC calculado no contorno – aresta horizontal – um quarto de secção de cilindro.

Para as malhas mais refinadas esse maior erro no canto junto ao contorno interno ainda persiste e continua alto; mas, os valores como um todo são razoáveis, pois fora dessa região a faixa de erro percentual cai para cerca de 0,5% junto ao contorno externo.

Ao contrário do exemplo anterior, onde os elementos possuem mesmo comprimento, agora os elementos do contorno externo e interno diferem no tamanho, o que pode ter contribuído para valores de erros maiores próximos às extremidades.

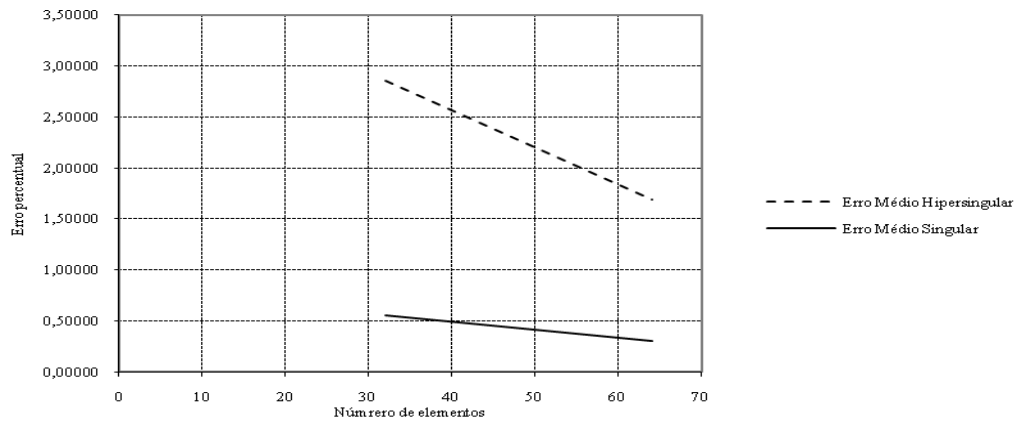


*Figura 5.27- Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no contorno – aresta horizontal - um quarto de secção de cilindro.*



*Figura 5.28- Erro percentual na temperatura com malha de 64 elementos constantes calculado no contorno – aresta horizontal - um quarto de secção de cilindro.*

No próximo gráfico, mostrado na Figura 5.29, mostra-se a curva de erro percentual em ambas as formulações em função da quantidade de elementos de contorno utilizados.



*Figura 5.29- Erro médio percentual da temperatura no contorno do quarto de cilindro para diversas malhas.*

### 5.3.2 Temperatura no interior do domínio

É analisado a seguir o comportamento da temperatura em pontos localizados internamente, sobre uma linha radial inclinada de  $45^\circ$  em relação aos eixos coordenados. As mesmas malhas de 16, 32 e 64 elementos constantes foram utilizadas.

Mais uma vez, os valores de erro percentual na temperatura em pontos internos são inferiores quando comparados aos valores do contorno, para ambas as formulações.

Nas figuras que se seguem são apresentados os gráficos com as curvas de erro percentual para cada malha.

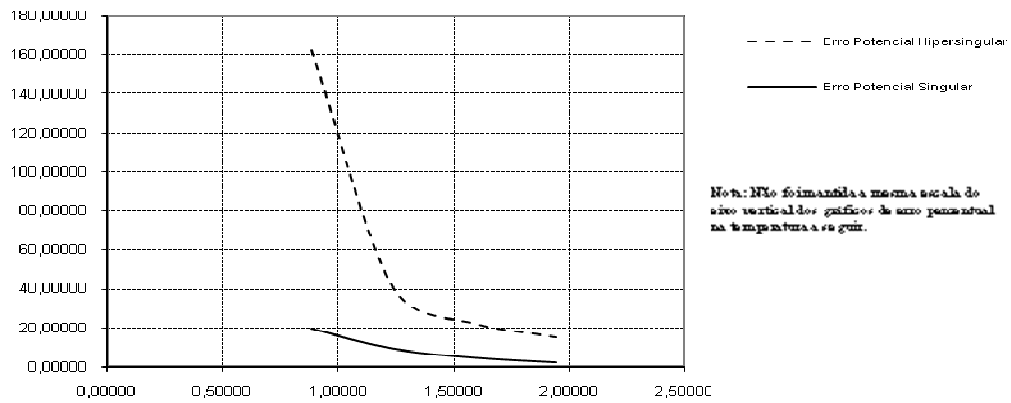


Figura 5.30- Erro percentual na temperatura com malha de 16 elementos constantes calculado no interior - um quarto de secção de cilindro.

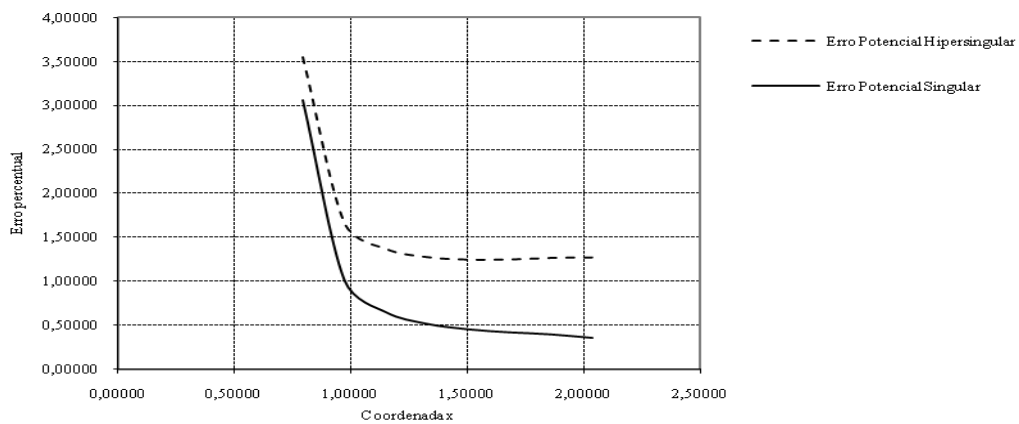


Figura 5.31 - Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro.

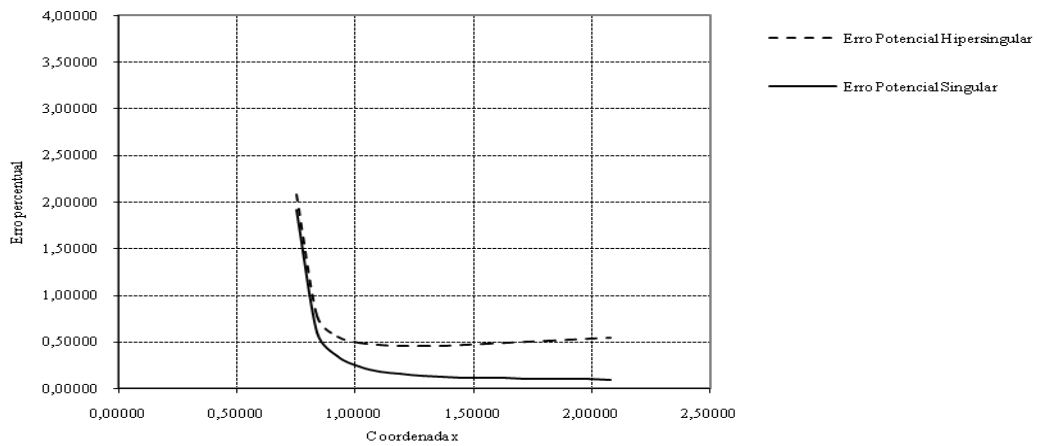


Figura 5.32- Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro.

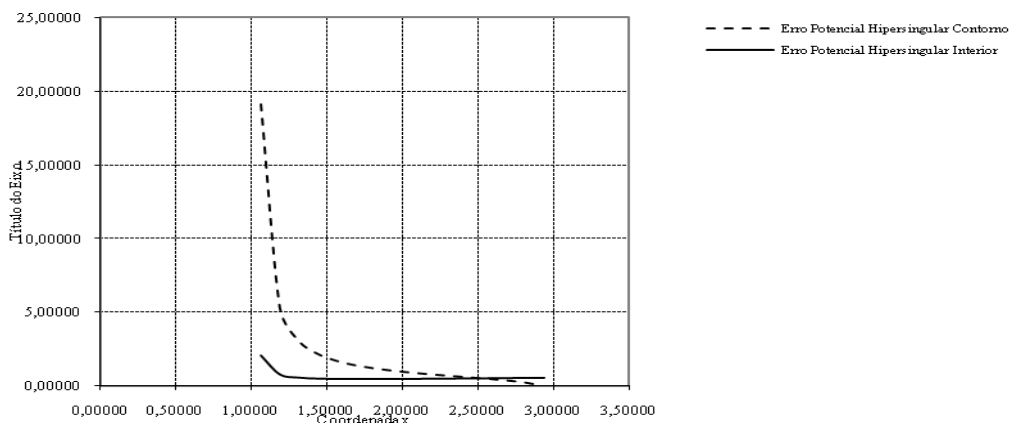


Figura 5.33- Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no contorno e interior – Formulação Hipersingular - um quarto de secção de cilindro.

Os erros da FHS nesse caso decaíram bastante, quando comparados ao observado no exemplo precedente, onde houve basicamente uma uniformização da curva de erro ao longo da direção da variação do fluxo, ou seja, nesse caso, a direção radial, conforme mostra a Figura 5.33.

Persistem, ainda, em ambas as formulações, a alta imprecisão nos valores numéricos próximos ao contorno interno.

Na Figura 5.34 são apresentadas as curvas de convergência de ambas as formulações, ou seja, a curva de erro médio percentual em função da quantidade de elementos utilizados. Percebe-se que da malha de 16 elementos para a malha de 32 elementos há uma expressiva melhoria de desempenho.

Ressalta-se ainda que nesse exemplo, em que um contorno curvo é representado por retas, há um erro adicional causado pela aproximação da geometria, bastante sensível nas malhas menos refinadas.

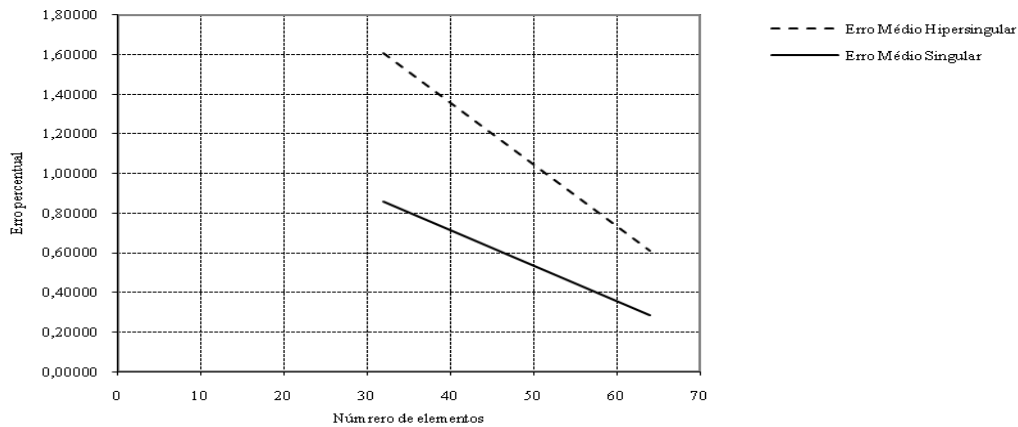


Figura 5.34- Erro médio percentual da temperatura no contorno do quarto de cilindro para diversas malhas.

### 5.3.3 Fluxo no interior do domínio

Nas Figuras 5.35 a 5.37 representa-se o comportamento do erro percentual para o cálculo do fluxo no interior.

A FSC continua apresentando desempenho melhor que a FHS. Não obstante os valores reduzidos, o comportamento das curvas de erro percentual ao longo da direção radial para ambas as formulações não são monótonas, e na FSC apresentam mesmo algumas oscilações.

Nas malhas mais refinadas, os maiores índices de erro ocorrem nas proximidades da aresta interna, enquanto na malha com 16 EC esses índices acontecem próximo à aresta externa.

Os erros para o cálculo do fluxo no interior são significativamente menores do que os valores de fluxo calculados diretamente no contorno, demonstrando o efeito de minimização de resíduos no uso recursivo da sentença integral. Também os valores desse erro são menores do que os obtidos no cálculo das temperaturas no interior.

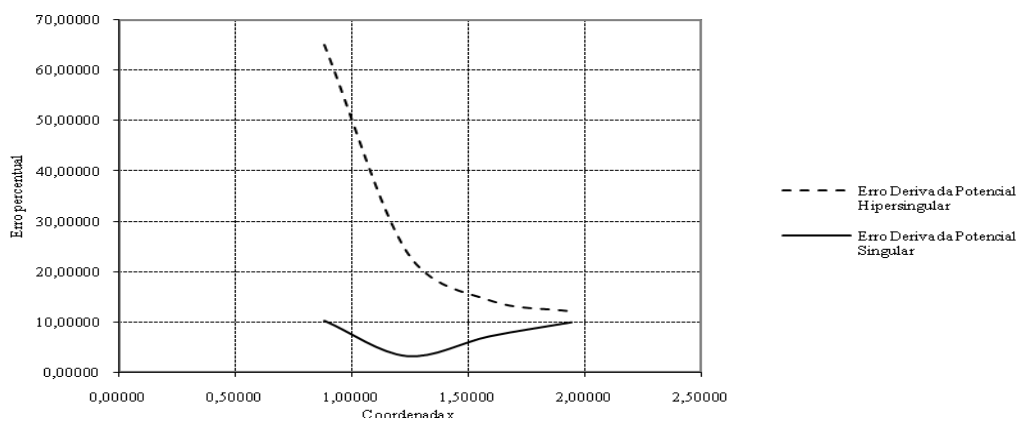


Figura 5.35 - Erro percentual no fluxo com malha de 16 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro.

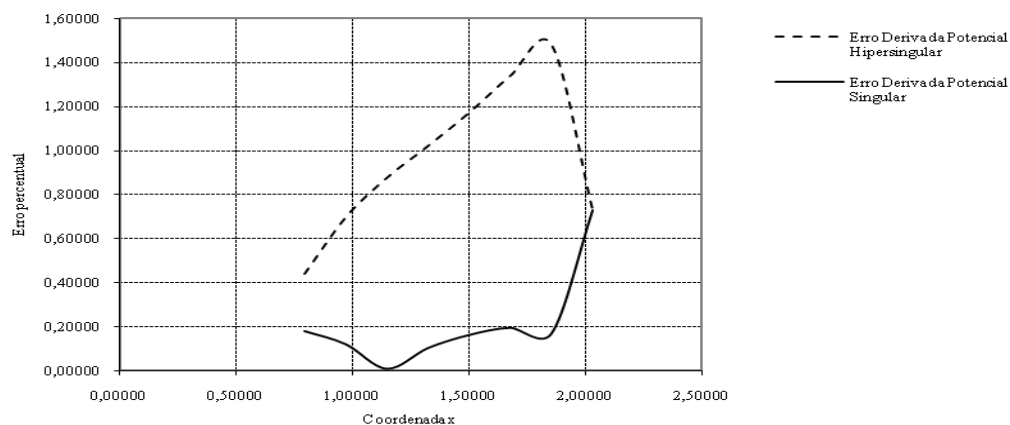


Figura 5.36 - Erro percentual no fluxo com malha de 32 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro.

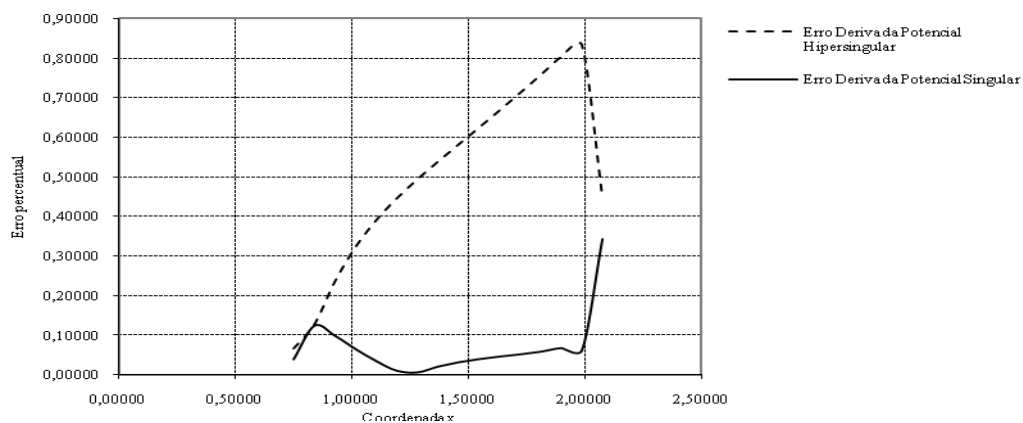


Figura 5.37 - Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no interior - um quarto de secção de cilindro.

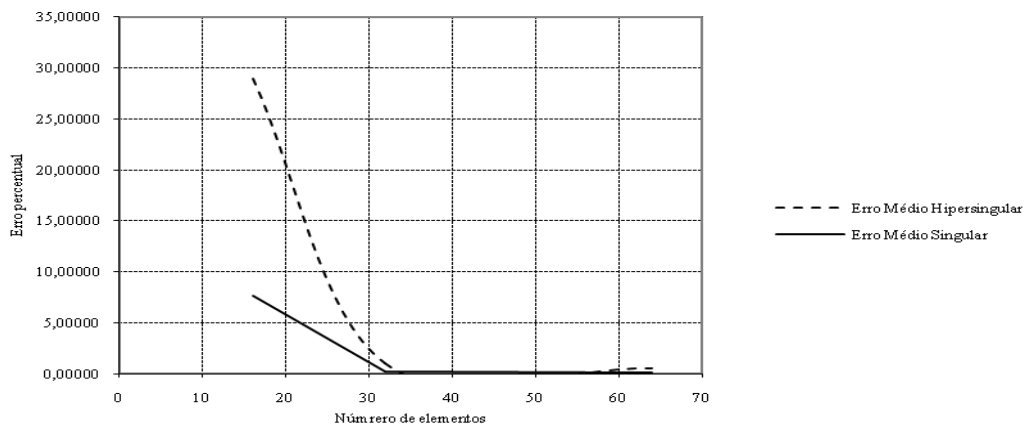


Figura 5.38—Erro médio percentual fluxo no interior do quarto de cilindro para diversas malhas.

#### 5.3.4 Fluxo no contorno externo

Nas Figuras 5.39 a 5.41, ilustra-se o comportamento do erro percentual cometido no cálculo do fluxo no contorno para a FSC (linha contínua) e para a FHS (linha tracejada), em função da quantidade de elementos de contorno utilizados no contorno externo do cilindro em estudo.

Optou-se por plotar metade dos dados porque estes valores são simétricos e se repetem na segunda metade do arco.

Para a malha mais pobre, a FHC apresentou melhores resultados, conforme mostra a figura 5.38. Entretanto, com o refinamento da malha, essa situação se inverteu e a FSC teve melhor desempenho.



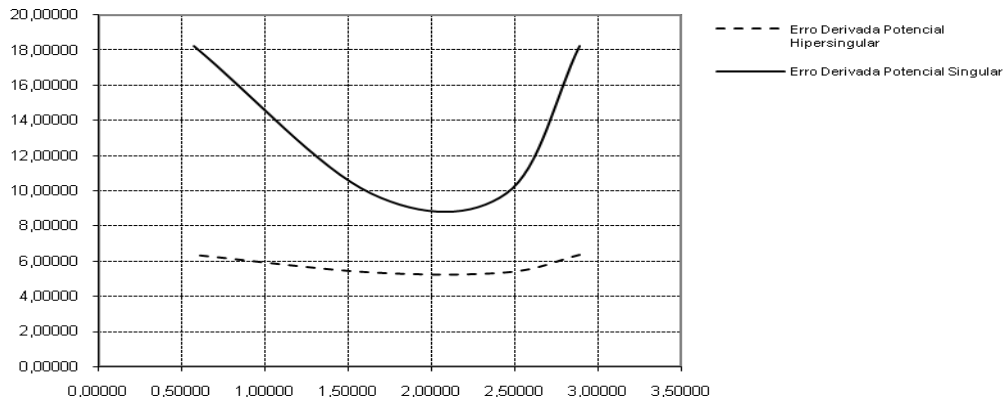


Figura 5.39 - Erro percentual no fluxo com malha de 16 EC calculado no contorno – contorno externo - um quarto de secção de cilindro.

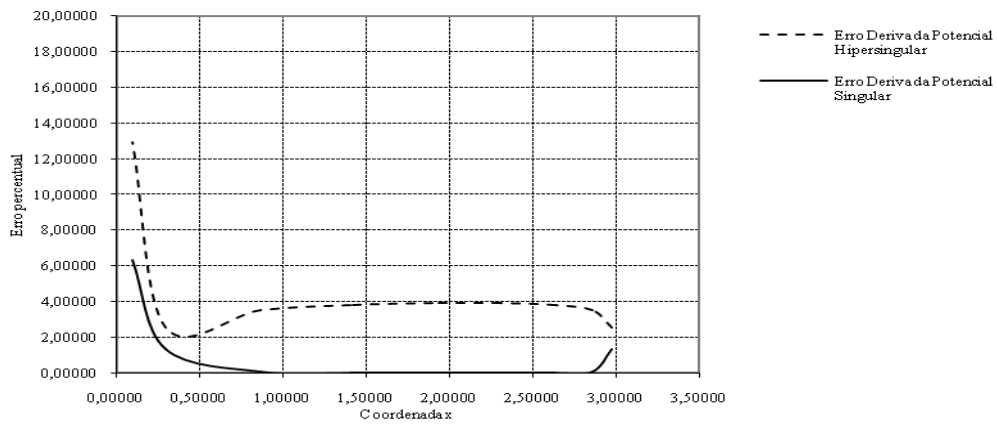


Figura 5.40- Erro percentual no fluxo com malha de 32 EC calculado no contorno – contorno externo - um quarto de secção de cilindro.

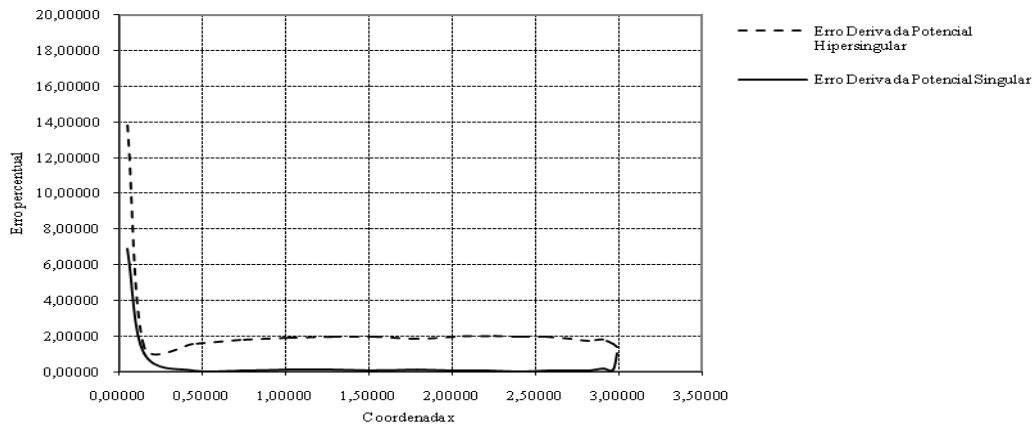


Figura 5.41- Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no contorno – contorno externo - um quarto de secção de cilindro.

A região próxima ao canto apresenta os maiores valores de erro. Esse comportamento é típico com o MEC, especialmente com elementos constantes. Na FHS, esses erros nos cantos são amplificados, conforme se pode observar nos diversos gráficos mostrados, devido à maior sensibilidade das integrais que compõem essa formulação.

A Figura 5.42 compara diretamente o desempenho da FHS no cálculo do fluxo para a malha de 64 EC no contorno e em pontos do interior.

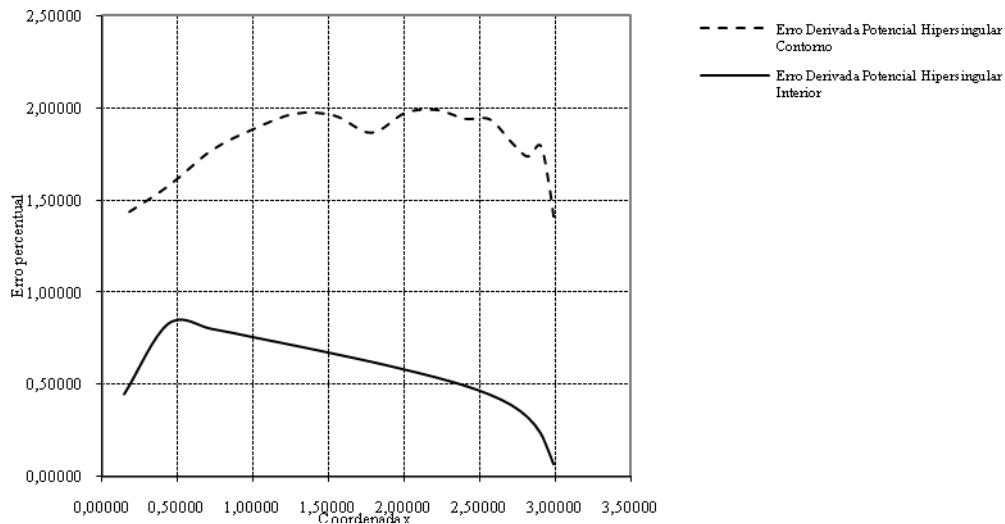


Figura 5.42- Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no contorno e interior – Formulação Hipersingular - um quarto de secção de cilindro..

Por fim, a Figura 5.43 apresenta a curva de erro médio percentual no fluxo em função da quantidade de elementos de contorno empregados.

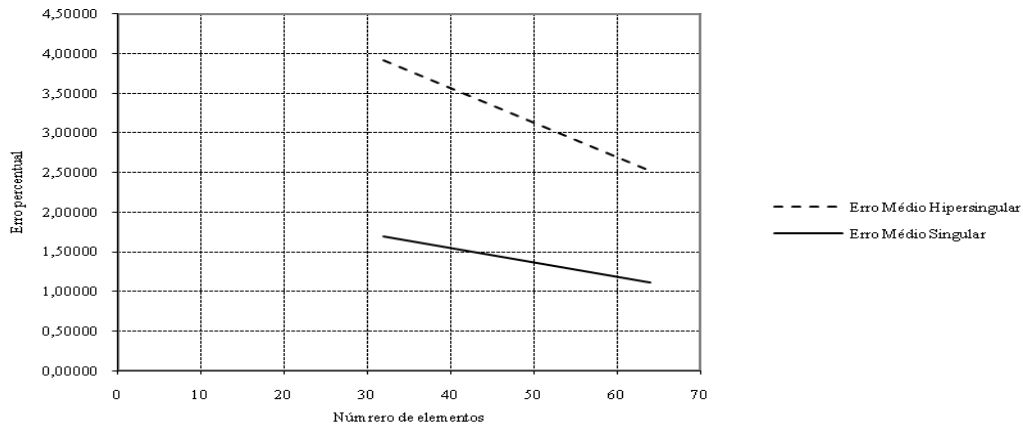


Figura 5.43- Erro médio percentual do fluxo no interior do quarto de cilindro para diversas malhas.

#### 5.4 CHAPA SEMICIRCULAR COM DESCONTINUIDADE

Nesse exemplo, considera-se um chapa semicircular sujeita a uma descontinuidade no valor da temperatura em  $r=0$ , conforme mostra a Figura 5.43. A condição de fluxo nulo no contorno circular impõe um fluxo de calor circunferencial que não depende do ângulo  $\theta$ , variando apenas radialmente.

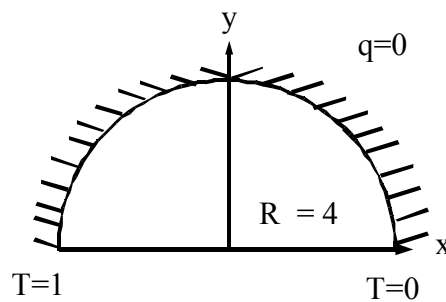


Figura 5.44- Semicírculo sujeito a diferencial de temperatura no contorno reto

Os valores analíticos para a temperatura em qualquer linha radial e fluxo de calor na aresta horizontal da base do semicírculo são dados por:

$$T = \frac{\theta}{\pi}$$

$$q = \frac{dT}{dn} = -\frac{1}{\pi x}$$

Naturalmente, são determinados o potencial no contorno curvo, que aqui representa a temperatura, e a derivada do potencial, representando o fluxo de calor no contorno reto.

Foram usadas malhas com 16, 32 e 64 elementos constantes, de tamanhos distintos conforme Figura 5.45 a seguir.

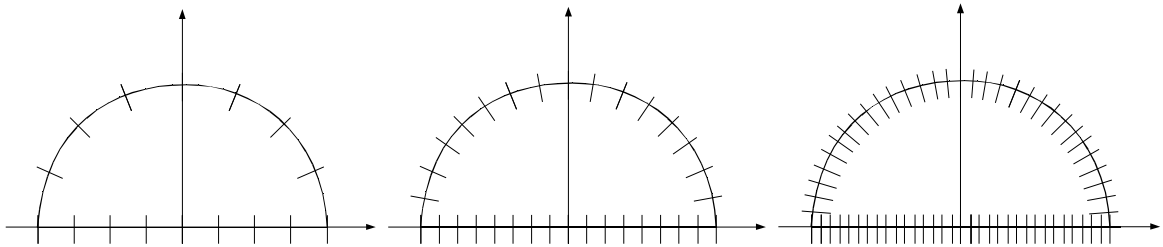


Figura 5.45- Discretização feita com malhas de 16, 32 e 64 EC – meio círculo

### 5.4.1 Temperatura no contorno curvo

As Figuras 5.46 a 5.48 ilustram o comportamento do erro percentual obtido no cálculo do potencial (temperatura) no contorno para a FSC (linha contínua) e para a Hipersingular (linha tracejada), em função da quantidade de elementos de contorno utilizados.

Diferentemente dos exemplos anteriores, as duas formulações possuem desempenho bastante próximos.

Os maiores valores de erro percentual na temperatura do contorno ocorrem na região do canto.

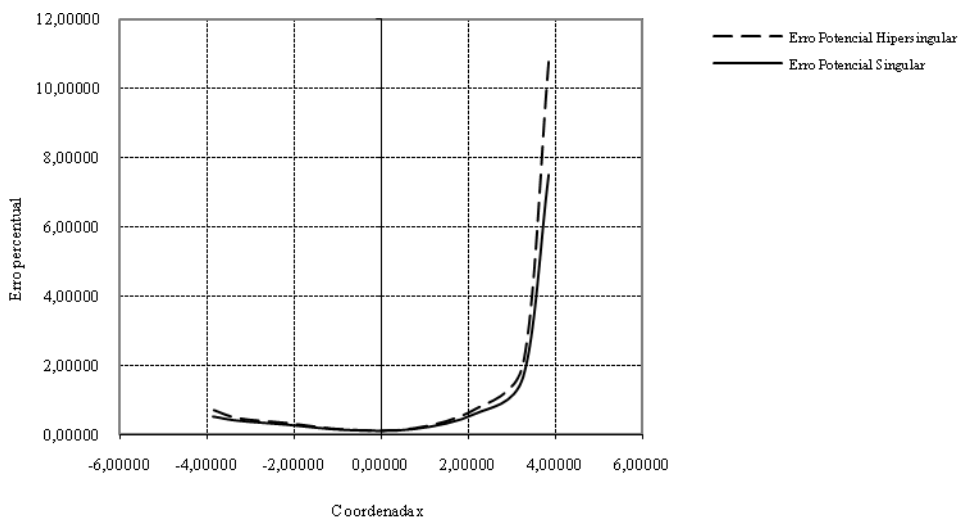


Figura 5.46 - Erro percentual na temperatura com malha de 16 EC calculado no contorno curvo - semicírculo

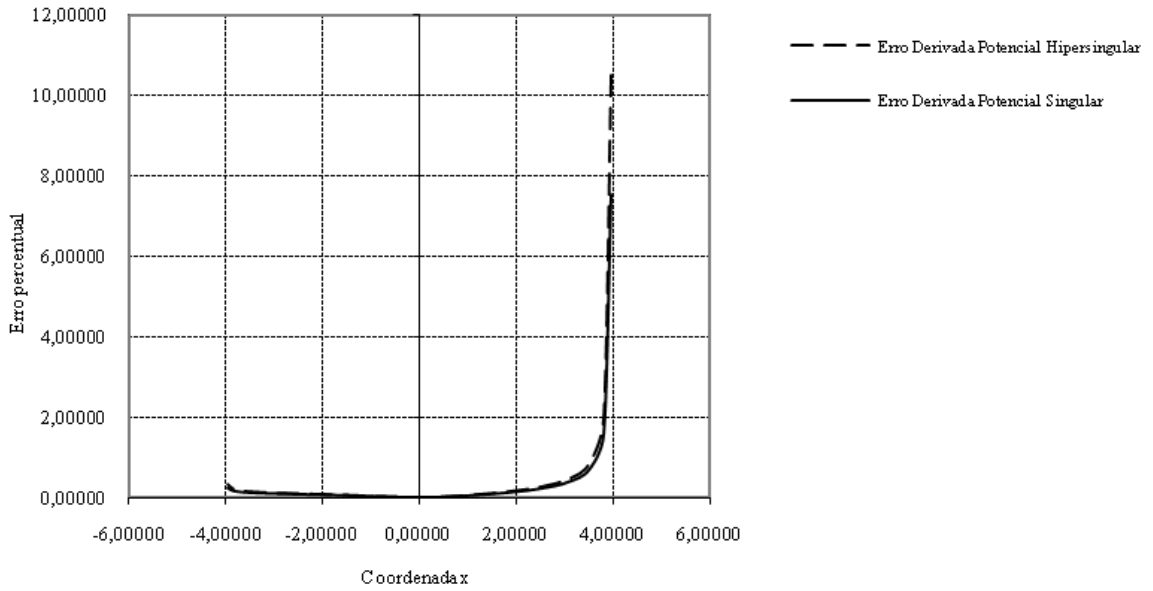


Figura 5.47 - Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no contorno curvo - semicírculo

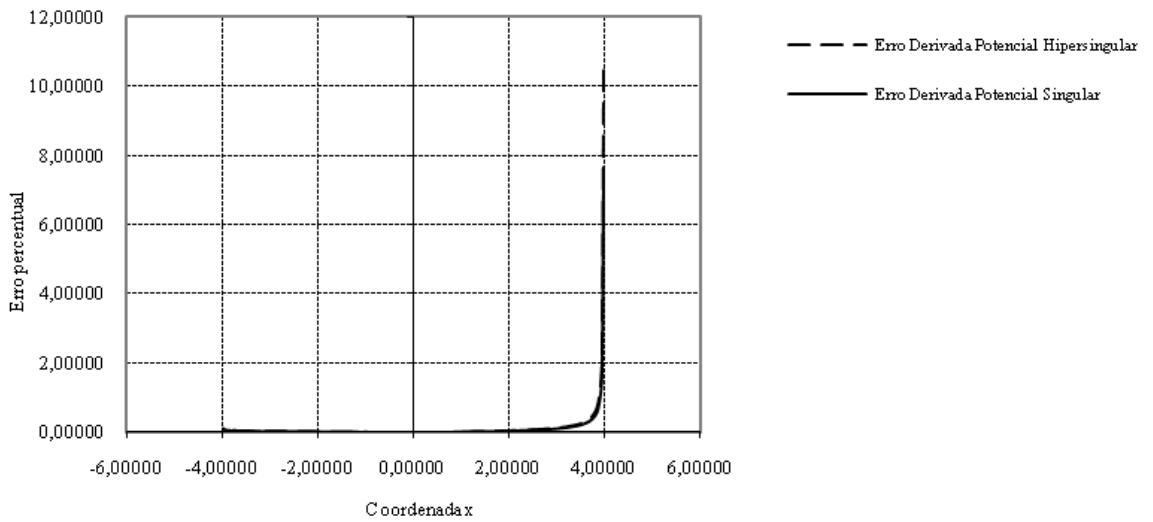


Figura 5.48 - Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no contorno curvo - semicírculo

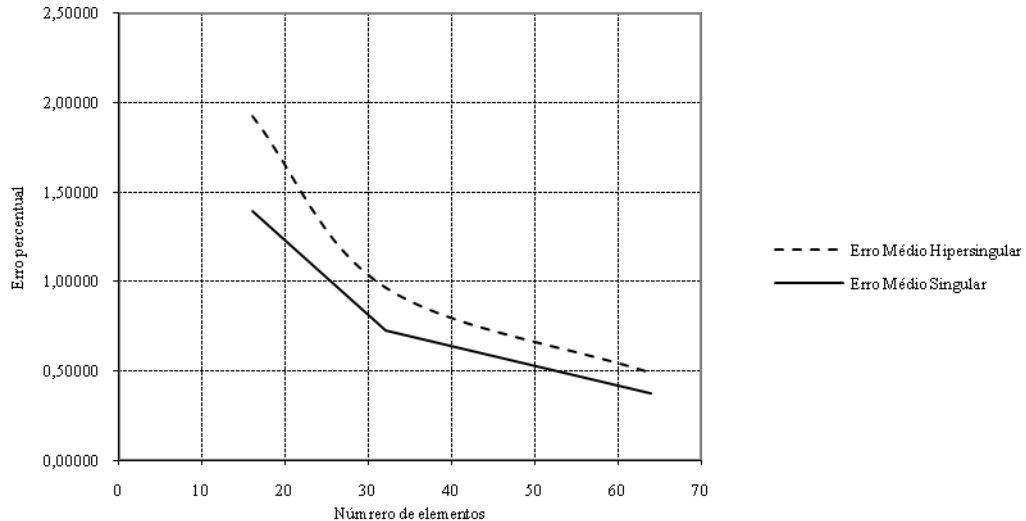


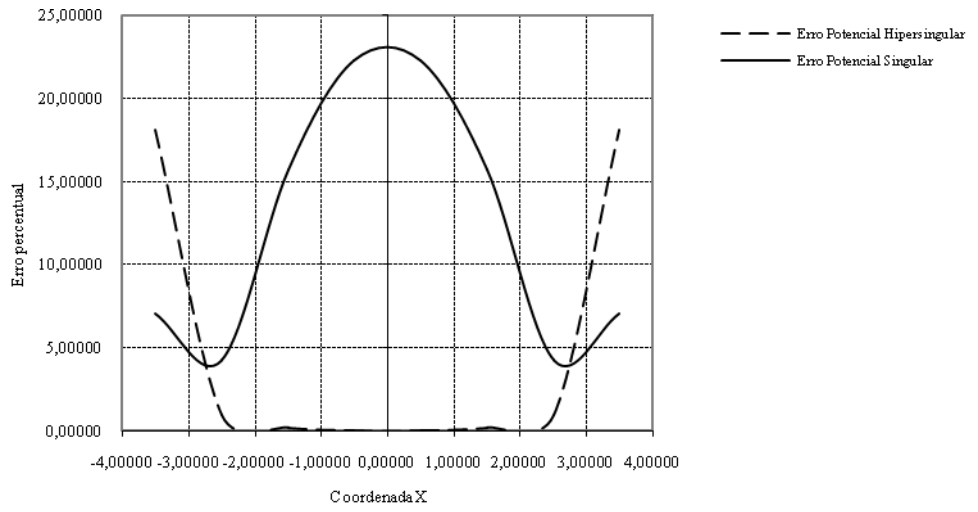
Figura 5.49 - Erro médio percentual na temperatura no contorno para diversas malhas - semicírculo

#### 5.4.2 Fluxo no contorno reto

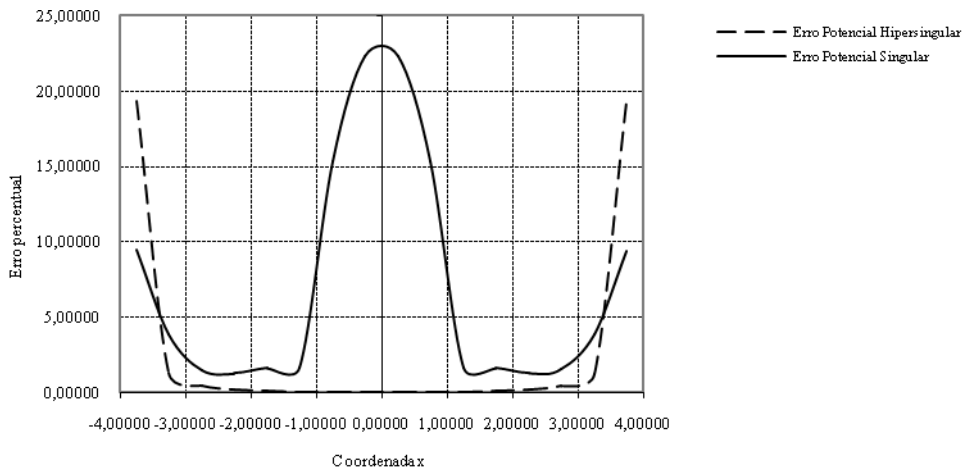
Nas curvas apresentadas a seguir nas Figuras 5.50 a 5.52 mostra-se o erro percentual cometido no cálculo do fluxo no contorno reto (base do semicírculo) para o caso em estudo.

Os valores do erro percentual são simétricos em relação à  $x=0$  atingindo o seu máximo exatamente neste ponto na FSC.

Também pode ser observado que próximo aos cantos, ou seja, no intervalo compreendido entre  $4 > x > 2,8$  e  $-4 < x < -2,8$  a FSC tem melhor desempenho quando comparada a FHS. Fora disso, o erro referente à FHS é bem menor do que o da FSC. Próximo à singularidade, o erro da FHS é praticamente nulo.



*Figura 5.50 - Erro percentual no fluxo com malha de 16 EC calculado no contorno reto - semicírculo*



*Figura 5.51 - Erro percentual no fluxo com malha de 32 EC calculado no contorno reto - semicírculo.*

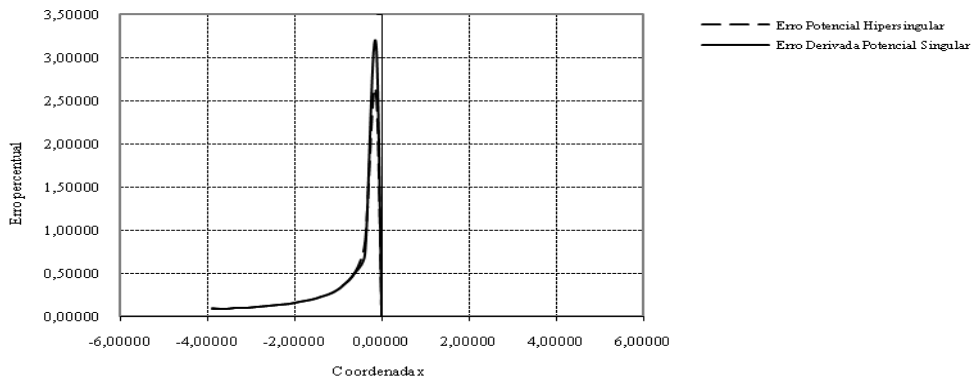


Figura 5.52 - Erro percentual no fluxo com malha de 64 EC calculado no contorno reto-semicírculo

Finalmente, na Figura 5.53, verifica-se com o gráfico de erro médio percentual que, à medida que a malha é refinada, ocorre uma diminuição geral do erro da FSC, assim como, uma diminuição deste erro entre as malhas de 16 e 32 EC para ocorrência de um aumento e inversão do comportamento. A partir de 50 EC, a FSC tem melhor desempenho no cálculo dos erros, ocorrendo uma acentuada divergência entre as formulações, com destaque para o aumento crescente do erro na FHS.

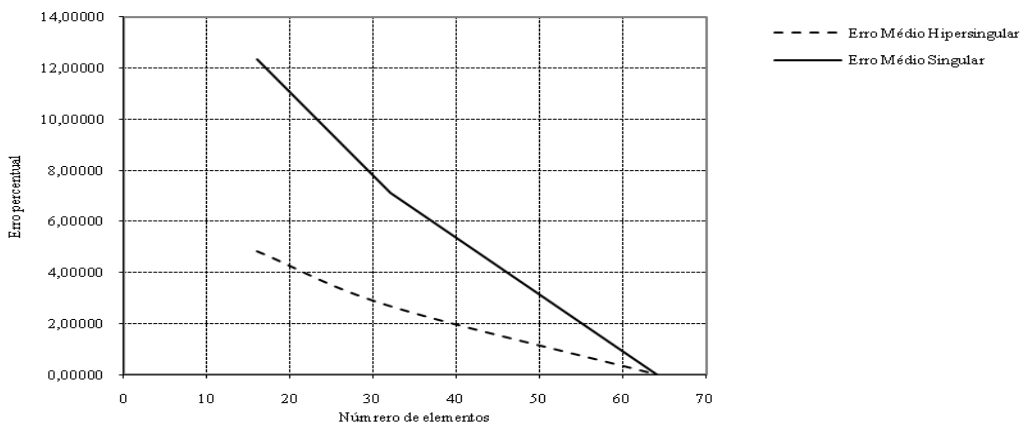


Figura 5.53 - Erro médio percentual no fluxo no contorno para diversas malhas - semicírculo

### 5.4.3 Temperatura no interior

Nas curvas apresentadas nas Figuras 5.54 a 5.56 mostra-se o erro percentual cometido no cálculo da temperatura no interior para o caso do meio círculo estudado.

À medida que, a malha é refinada, o erro percentual diminui o que demonstra soluções numéricas mais precisas.

A região considerada como interior é aquela cujos pontos encontram-se sobre o eixo da ordenada y.



É importante observar que, neste caso, o erro percentual decresce muito significativamente com o aumento da malha e que a FHS possui desempenho melhor no interior para o cálculo da temperatura no exemplo estudado.

Quanto ao erro percentual da temperatura, é razoável afirmar-se que a FHS tem melhor desempenho que a FSC a partir de 64 EC e os erros são extremamente pequenos.

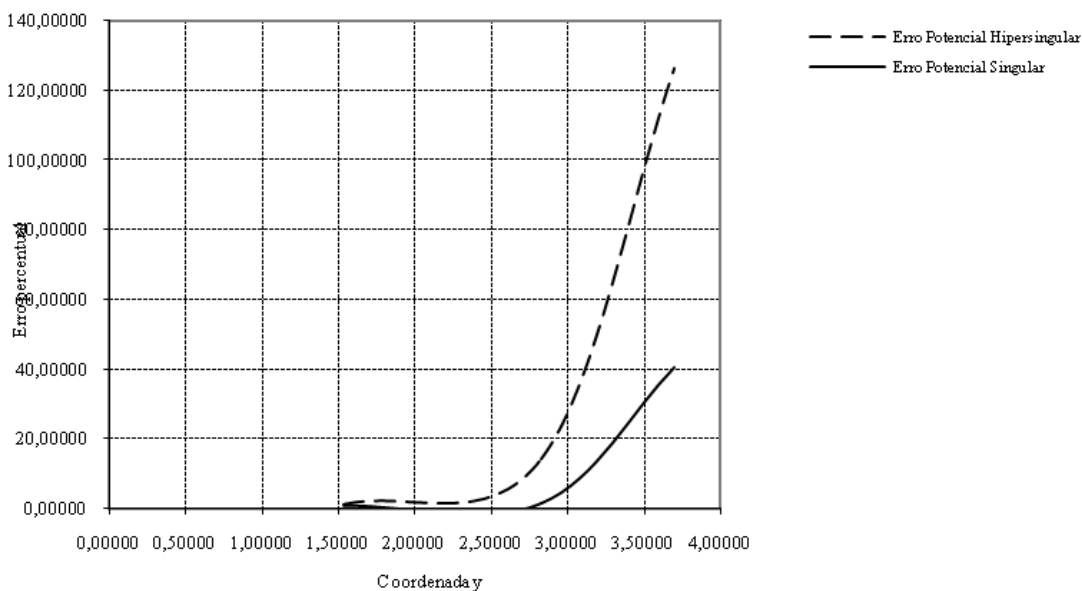


Figura 5.54 - Erro percentual na temperatura com malha de 16 EC calculado no interior - semicírculo

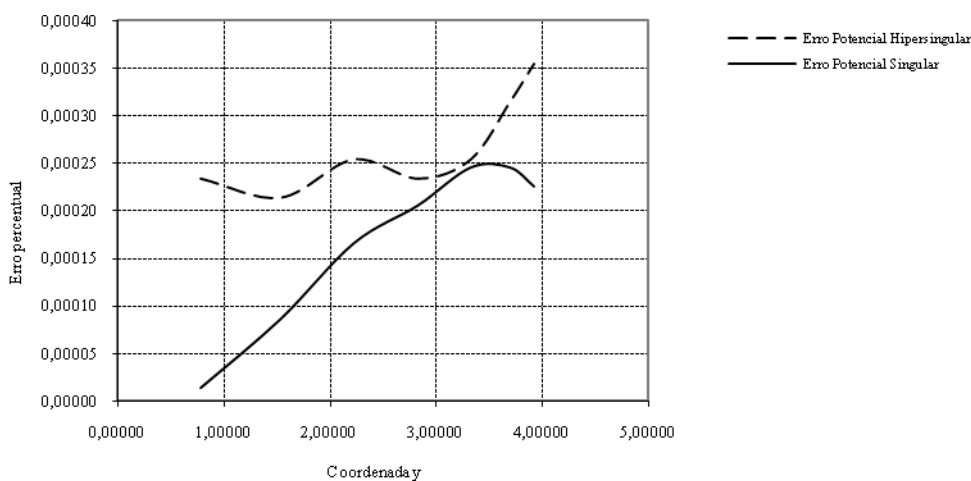


Figura 5.55 - Erro percentual na temperatura com malha de 32 EC calculado no interior - semicírculo.

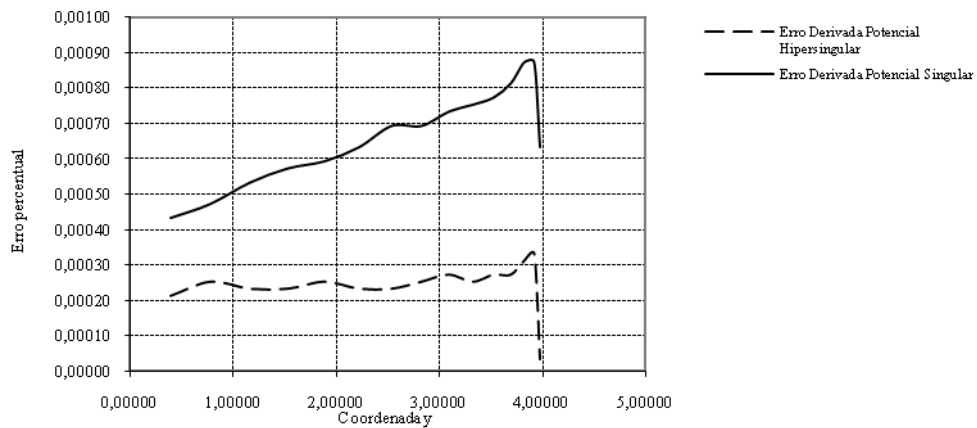


Figura 5.56 - Erro percentual na temperatura com malha de 64 EC calculado no interior – semicírculo

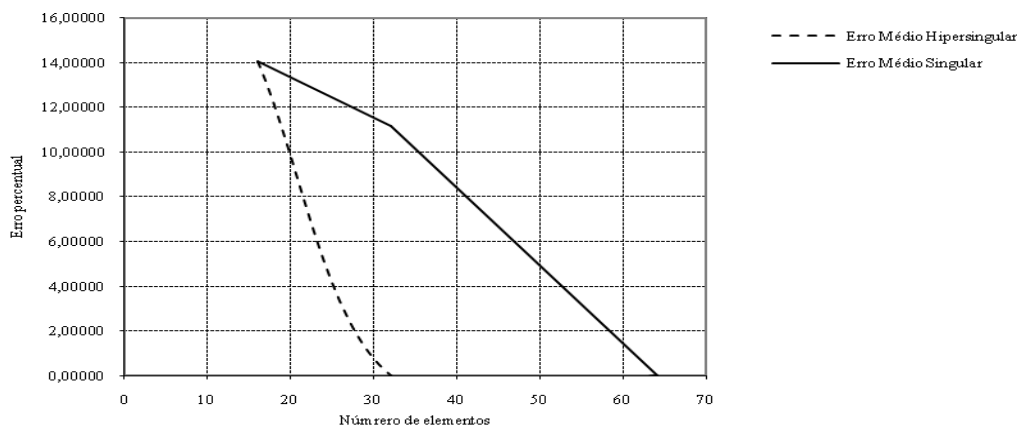


Figura 5.57 - Erro médio percentual na temperatura no interior para diversas malhas – semicírculo.

## 5.5 MEIO POROSO

No exemplo apresentado a seguir para efeito de comparação com outro método, a malha tem o mesmo grau de refinamento ao longo do contorno e possui 64 EC constantes discretizados.

Consiste na solução numérica de um caso de percolação em um meio poroso isotrópico e homogêneo, cuja equação de governo é a Equação de Laplace e o potencial representa a altura piezométrica.

O problema físico consiste em uma barragem, cujas características geométricas e condições de contorno são dadas pela Figura 5.58.

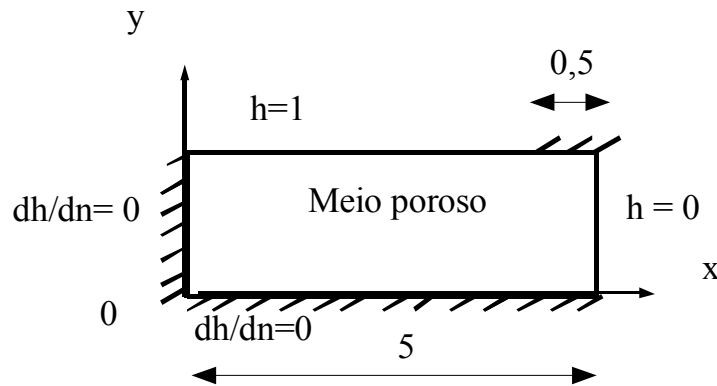


Figura 5.58 – Percolação em meio poroso

O gráfico referente à Figura 5.59 compara os valores de derivada potencial que representa o fluxo (vazão) obtido pelo Método dos Volumes Finitos (MVF) e pelo Método de Elementos de Contorno utilizando a Formulação Hipersingular. A malha empregada pelo MVF possui 320 volumes finitos e é tomada como referência para avaliação de desempenho.

Na superfície superior há uma região na qual os valores do fluxo sofrem um abrupta descontinuidade em seu valor. Isso ocorre próximo à parede onde o fluxo é prescrito, de valor nulo.

Vê-se que os valores da FSC e FHS concordam com o obtido pelo MVF. Na região de descontinuidade, o pico de valor do fluxo obtido pela FHS está um pouco menos próximo do pico do MVF do que o obtido pela FSC.

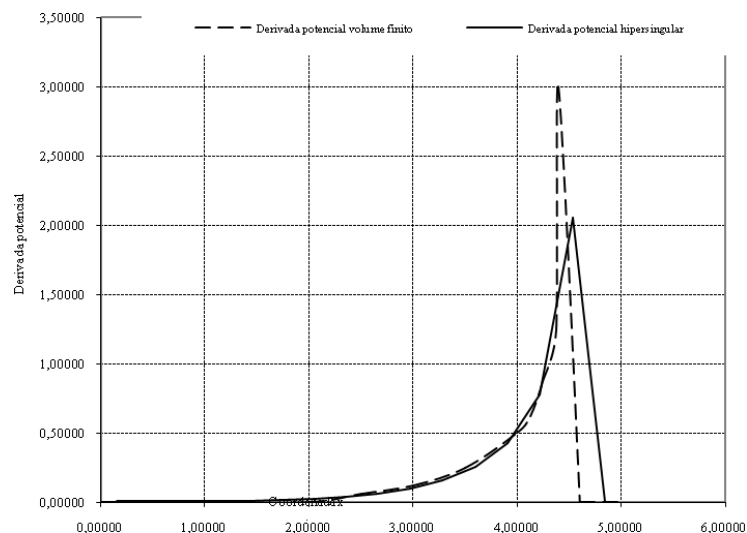


Figura 5.59 – Comparação dos valores obtidos pela FHS do MEC(64EC) e MVF(320VF)-meio poroso

É notável, no entanto, o bom desempenho das formulações FHS e FSC do MEC quando comparado com o MVF, em todo o intervalo, excetuando-se o ponto singular, onde a malha mais refinada do MVF ressalta o pico de fluxo imediatamente antes do valor prescrito nulo.

Esperava-se, entretanto, que a FHS representasse melhor do que a FSC o valor do pico de fluxo, estimado em atingir valor infinito no ponto imediatamente próximo à parede impermeável, por conta de sua formulação contar com funções de maior ordem de singularidade.

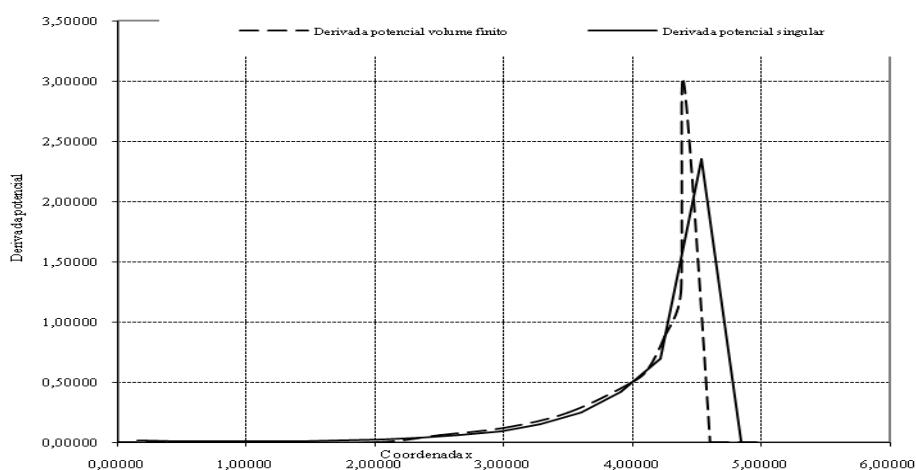


Figura 5.60 – Comparação dos valores obtidos pela FSC do MEC (64EC) e MVF(320VF)-meio poroso

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSÃO

Neste trabalho, diversos aspectos das Formulações do Método de Elementos de Contorno puderam ser avaliados. De uma maneira geral pode-se notar a potencialidade do método usado como ferramenta numérica para resolução de problemas físicos matematicamente bem postos.

Trata-se de uma poderosa ferramenta, bastante usada, que permite que valores no contorno sejam calculados a partir das condições de contorno conhecidas com o uso da equação de governo.

A singularidade e hipersingularidade originadas do método são resolvidas com recursos matemáticos de relativa elaboração matemática, mas os problemas físicos, tais como os apresentados, são resolvidos com bastante facilidade, quando comparados com outros métodos numéricos.

A idéia de se comparar as Formulações Singulares e Hipersingulares do MEC vem de encontro à necessidade de cada vez mais conhecer as potencialidade e particularidades do método, permitindo utilizar formulações específicas que se ajustam melhor as peculiaridades de certos problemas físicos. No caso da FHS, recomenda-se seu uso particularmente aos casos em que gradientes e descontinuidades se façam presentes no problema físico que se quer resolver.

Os problemas simulados, entretanto, não escolhidos todos de modo a privilegiar o desempenho da FHS, mas sim permitir conhecer melhor suas particularidades, especialmente à luz dos conceitos do Método dos Resíduos Ponderados.

Em dois deles, havia presença de elevados gradientes e esperava-se um melhor desempenho da FHS. Em um deles, o problema da chapa semicircular, problema esse bem examinado na literatura, as simulações apresentadas confirmaram o excelente desempenho da FHS.

Já no problema da barragem, surpreendentemente, a FSC teve melhores resultados, o que sugere que não apenas a presença de gradientes elevados recomenda o emprego da FHS.

Ambas as formulações, todavia, apresentaram resultados satisfatórios em termos de aplicações em engenharia, com seus erros percentuais reduzindo-se com o refinamento da malha.

Pode ser conjecturado que, a utilização da discretização com elementos de geometria não retilínea levasse a cálculos de valores mais precisos na FHS e FSC, e, portanto, mais próximos da solução analítica, especialmente nas proximidades de regiões de descontinuidade.

Espera-se que este estudo contribua para novos trabalhos utilizando-se a Formulação Hípersingular, que é relativamente pouco estudada.

# CAPÍTULO 7

## BIBLIOGRAFIA

BREBBIA, C.A. **The Boundary Element Method for Engineers**. Pentech Press. London. 1978.

BREBBIA, C.A, J.C. TELLES e L.C. WROBEL, **Boundary Element Techniques**, Springer Verlag, Berlin 1984.

BREBBIA, C.A., DOMINGUEZ. J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. McGraw-Hill. 1989.

HUACASI, W, MANSUR W.J, AZEVEDO J.P.S. **A Novel Hyper-singular BEM Formulation for Three-Dimensional Potencial Problems**. 2003.

GIULIANI M.

KUTT H.R. **On the Numerical Evaluation of Finite Part Integrals Involving an Algebraic Singularity**, Special Report WISK 179, Nacional Research Inst. Math. Sciences, Pretoria, 1975.

LOEFFLER NETO C.F. **Recursive Employment of the Integral Equation in the Boundary Element Method**. 2009.

LOEFFLER NETO C.F., OLIVEIRA P.C e BULCÃO A. **Comparação do Desempenho do Método dos Elementos de Contorno e dos Volumes Finitos em Problemas de Campo Escalar**.

LOEFFLER NETO C.F., WROBEL L. C. **Aplicação Recursiva da Técnica de Resíduos Ponderados para Melhoria da Precisão do Método dos Elementos de Contorno**. 2008.

LOEFFLER NETO C.F, WROBEL L. C. **Um Procedimento Simples para melhorar a Precisão Numérica da Solução do Método dos Elementos de Contorno**. 2008.

MAA H, KAMIYAB N. **Approximate Formulation of the Hypersingular Boundary, Integral Equation in Potential Theory, Engineering Analysis with Boundary Elements**. 2003.

MANSUR, W.J, FLEURY J.P e AZEVEDO J. P. S. **A Vector Approach to the Hyper-singular BEM Formulation for Laplace's Equation in 2D**. The International Journal of BEM Communications. 1997.

MUKHERJEE, S. **Boundary Element Methods in Solid Mechanics - a Tribute to Frank Rizzo**. Electronic Journal of Boundary Elements. 2003.

MUKHERJEE, S. MUKHERJEE Y. X. **Boundary Methods: Elements, Contours, and Nodes**. CRC Press. 2005.

PAULINO H. **Singular Integrals**. BEM Boundary Element Methods, Fall Semester 2001

**PRADO A. A. Uma Formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais.** Dissertação de Mestrado COPPE/UFRJ Engenharia Civil. Rio de Janeiro. 1991.



## Apêndice A - Solução Fundamental

Neste apêndice será demonstrada a expressão utilizada como solução fundamental nos exemplos apresentados.

Para o desenvolvimento da formulação de Elementos de Contorno analisada empregou-se uma função de ponderação correspondente à solução de um problema bidimensional de potencial escalar estacionário, governado pela Equação de Poisson, onde uma fonte ou carga concentrada unitária é aplicada no ponto  $\xi$  do domínio  $\Omega(x)$ .

A representação matemática desse problema corresponde à:

$$\Delta^2 u^* + \Delta(\zeta; x) = 0 \quad \text{A.1}$$

Onde  $\Delta(\zeta; x)$  é a função delta de Dirac., a intensidade do carregamento estabelece que:

$$\int_{\Omega} \Delta(\zeta; x) d\Omega(x) = 1 \quad \text{A.2}$$

Em razão da singularidade contida na função delta de Dirac, resolve-se a equação isolando-se a equação A.2. Isolando-se a região carregada, como mostra a figura a seguir (idêntica a figura 4.1)

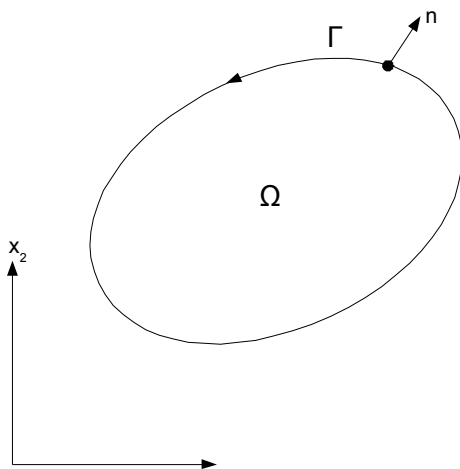


Figura A.1 - Domínio  $\Omega(x)$  com isolamento na região carregada

As condições de equilíbrio determinam:

$$\int_{\Gamma} q^* d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \Delta(\xi; x) d\Omega(x) \quad \text{A.3}$$

É conveniente escrever-se a equação A.1 em coordenadas polares. Omitindo-se os argumentos das variáveis por simplicidade, tem-se:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \quad \text{A.4}$$

Como  $u^*$  independe de  $\theta$ , com isto a equação A.4 simplifica-se e pode ser escrita equação A.5:

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d u^*}{dr} = 0 \quad \text{A.5}$$

Considerando-se uma variável auxiliar  $v(r)$ , tal que:

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} = v \quad \text{A.6}$$

Substituindo-se a equação A.6 na expressão A.5 e rearranjando-se se tem:

$$\frac{d(rv)}{dr} = 0 \quad \text{A.7}$$

Integrando-se a equação anterior, pode-se escrever:

$$v = \frac{D1}{r} \quad \text{A.8}$$

$$\frac{du^*}{dr} = \frac{D1}{r} \tag{A.9}$$

Voltando-se a expressar o problema em termos da variável original  $u^*$ , a equação A.8 fica:

Integrando-se a expressão A.9 chega-se à:

$$u^* = D1 \ln r + D2 \tag{A.10}$$

A condição de contorno natural é então introduzida de modo que:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{du^*}{dr} \frac{dr}{dn} \tag{A.11}$$

Para o contorno  $\Gamma(x)$  tem-se:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{du^*}{dr} \frac{dr}{dn} \tag{A.12}$$

Substituindo-se a equação A.12 na equação A.11 têm-se a expressão:

$$\int_{\Gamma} \frac{D1}{r} d\Gamma = \int_{\Omega} \Delta u^* d\Omega = 1 \tag{A.13}$$

Verificando-se na Figura A.1 que:

$$d\Gamma = r d\theta \tag{A.14}$$

Substituindo-se a equação A.14 na equação A.13 têm-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{D1}{r} r d\theta = 1 \quad \text{A.15}$$

Logo

$$D1 = \frac{-1}{2\pi} \quad \text{A.16}$$

A condição de contorno essencial ou geométrica restringe o valor do potencial de acordo com um valor de referência. Normalmente para  $r=1$ , o potencial é nulo. Com estas condições, a constante D2 fica determinada e a expressão A.10 passa a ser escrita como:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad \text{A.17}$$

## Apêndice B - Solução analítica para barra engastada

Neste apêndice, serão demonstradas as expressões utilizadas no cálculo analítico do potencial e sua derivada que representam no caso da barra engastada o deslocamento axial e a tensão.

Considerando a figura B.1 a seguir (idêntica a figura 5.1) tem-se:

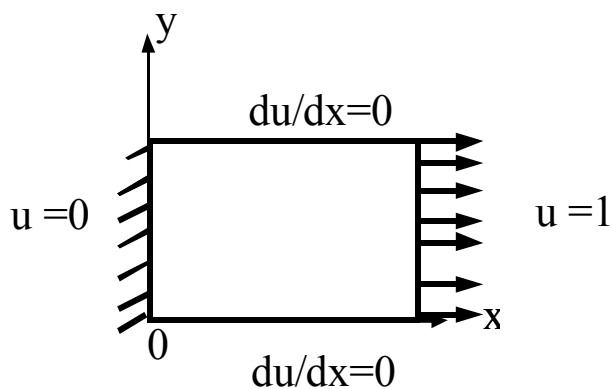


Figura B.1 – Barra engastada sujeita a carga unitária na extremidade direita.

$$T = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall x \in (0,1) \quad \text{B.1}$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial x_1} = k_1 = EA \quad \text{B.2}$$

Como condição de contorno tem-se, deslocamento em  $x=0$

$$u = 0 \quad \text{B.3}$$

Força em  $x=1$

$$v(1) = 1 \quad \text{B.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{B.5}$$

Considerando-se B.2 e B.5, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = EA = 1 \quad \text{B.6}$$

Mas

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{B.7}$$

Sabendo-se que

$$\sigma = \frac{f}{A} \quad \text{B.8}$$

Então:

$$\varepsilon = \frac{f}{AE} \quad \text{B.9}$$

Das equações B.7 e B.8 obtêm-se que força = deformação

$$\varepsilon = f \tag{B.10}$$

Resolvendo-se B.7 e considerando-se B.4:

$$\int du = \int dx_1 = \tag{B.11}$$

$$u(0) = 0 + C \tag{B.12}$$

$$u = x_1 \tag{B.13}$$

## Apêndice C - Solução analítica para quarto de secção de cilindro

Neste apêndice, serão demonstradas as expressões utilizadas no cálculo analítico do potencial e sua derivada para o quarto de cilindro que representam respectivamente a temperatura e o fluxo.

Considerando a figura C.1 a seguir (idêntica a figura 5.24) tem-se:

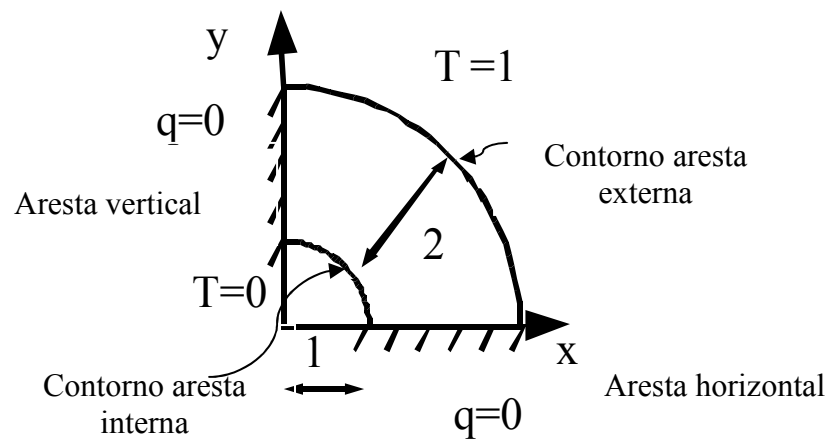


Figura C.1 – Cilindro infinitamente longo sujeito a diferencial de temperatura

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \tag{C.1}$$

$$\frac{dr}{dr} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} r = 0 \tag{C.2}$$



Simplificando,  $dr/dr = 1$  obtém-se:

$$\frac{dT}{dr} + r \frac{d^2T}{dr^2} = 0 \quad \text{C. 3}$$

Usando a regra da cadeia para derivadas vem:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{C. 4}$$

$$r \frac{dT}{dr} = C_1 \quad \text{C. 5}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} = \frac{q}{k} \quad \text{C. 6}$$

$$dT = \frac{C_1}{r} dr \quad \text{C. 7}$$

Integrando, tem-se:

$$\int_0^1 dT = C_1 \int_1^3 \frac{dr}{r} + C_2 \quad \text{C. 8}$$

$$T_0^1 = C_1 \ln r_0^3 \quad \text{C. 9}$$

Para o cálculo das constantes  $C_1$  e  $C_2$  tem-se o sistema:

$$\begin{pmatrix} C_1 \ln 3 & C_2 \\ C_1 \ln 1 & C_2 \end{pmatrix} = \frac{0}{1} \quad \text{C. 10}$$

De onde

$$C_2 = 0 \quad \text{C. 11}$$

$$C_1 = \frac{1}{\ln 3} \quad \text{C. 12}$$

Substituindo os valores de  $C_1$  e  $C_2$  tem-se:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r \ln 3} \quad \text{C. 13}$$

Então:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r \ln 3} = q$$

C. 14

Pela equação C.5 é igual a  $q/k$ : Fazendo-se  $k = 1$ , a equação torna-se igual a  $q$  (equação final, fluxo de calor).

## Apêndice D – Solução analítica para o semicírculo

Neste apêndice, serão demonstradas as expressões utilizadas no cálculo analítico do potencial e sua derivada para o semicírculo que representam respectivamente a temperatura e o fluxo.

Considerando a figura D.1 a seguir (idêntica a figura 5.42) tem-se:

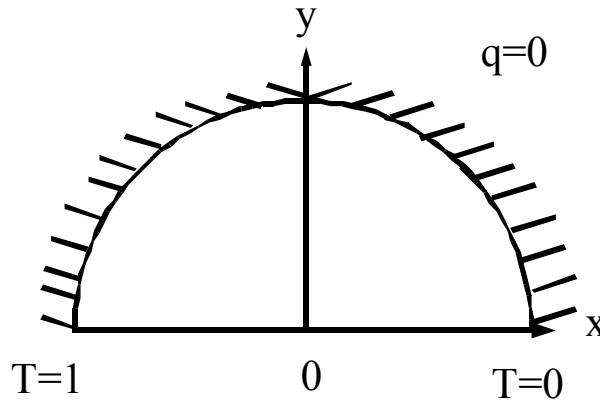


Figura D.1 – Semicírculo sujeito a diferencial de temperatura na base

Sabendo-se que:

$$u = -s \sin \theta = -\frac{sy}{r} \rightarrow s = -\frac{ur}{y} \quad \text{D. 1}$$

$$v = s \cos \theta = \frac{sx}{r} \rightarrow s = \frac{vr}{x}$$

$$\theta = 0; r = x \quad \text{D. 2}$$

Supondo  $T = \theta/\pi$  substituindo para calcular fluxo.

$$dT = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} r d\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} ds = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} d\left(\frac{-ur}{y}\right) \quad \text{D. 3}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} d\left(\frac{-vr}{x}\right)$$

D. 4

$$dT = \frac{1}{x} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dy$$

D. 5

$$\frac{dT}{dn} = -\frac{dT}{dy} = -\frac{1}{x} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dy = -\frac{1}{x} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

D. 6

## Apêndice E - Quadratura de Gauss - Legendre

O estudo contido neste apêndice baseou-se nos livros de Assan (2003) e Brebbia e Dominguez (1992).

Dada da função  $f(x)$  contínua e definida num intervalo  $a \leq x \leq b$ , é possível calcular o valor aproximado (numérico) da integral desta função em certos pontos  $x_i$ , tais que  $a \leq x_i \leq b$  utilizando uma combinação linear dos mesmos. Assim:

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1f(x_1) + w_2f(x_2) + \dots + w_if(x_i) + \dots w_nf(x_n) \quad \text{E. 1}$$

*Onde  $f(x_i)$  é o valor da função no ponto  $x_i$  e  $w_i$  são valores denominados pesos da função neste ponto. Para cada número  $n$  de pontos existe um peso equivalente, e estes valores são tabelados.*

*Quanto maior o número de pontos utilizados na aproximação, melhor é o resultado, enquanto que uma aproximação com somente um ponto de Gauss, por exemplo, a resposta é bastante grosseira.*

*Fazendo a transformação para coordenadas adimensionais  $\xi$ , válidas em um intervalo  $-1 \leq \xi \leq 1$ , a equação A.5.1 fica:*

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 g(\xi)d\xi = J \sum_{i=1}^{NG} w_i g(\xi_i) \quad \text{E. 2}$$

*Onde  $NG$  é o número de pontos de Gauss da integração e  $J$  é o Jacobiano da transformação, dado por:*

$$J = \frac{(b-a)}{2} \quad \text{E. 2}$$

Estes pontos são localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo a ser integrado e os pares simétricos possuem o mesmo peso. Por exemplo, para até 4 números de Gauss tem-se conforme tabela abaixo:

*Tabela E.1 – Pontos de Gauss*

<i>NG</i>	<i>i</i>	<i>Valor (<math>\xi</math>)</i>	<i>Peso (<math>w_i</math>)</i>
<i>4</i>	<i>1</i>	<i>0.8611363116</i>	<i>0.3478548451</i>
	<i>2</i>	<i>0.3399810435</i>	<i>0.6521451549</i>
	<i>3</i>	<i>-0.3399810435</i>	<i>0.6521451549</i>
	<i>4</i>	<i>-0.8611363116</i>	<i>0.3478548451</i>

## Apêndice E – Demonstração Hipersingular

Neste apêndice, será demonstrada a expressão dada pela Equação E.1.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} = I \quad \text{E. 1}$$

Fazendo-se uma integração angular e prestando atenção ao fato de que  $n_i$  e  $n_j$  são funções de  $\theta$ .

O resultado desta integral é dependente do ângulo interno dentro do elemento circular de raio  $\varepsilon$ . Resolvendo o segundo termo do primeiro membro da equação

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int (n_x + n_y) (u_{,x} n_x + u_{,y} n_y) d\theta \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int (u_{,x} n_x^2 + u_{,y} n_y^2 + n_x n_y u_{,y} + n_x n_y u_{,x}) d\theta \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int (u_{,x} \cos^2 \theta + u_{,y} \sin^2 \theta + (u_{,x} + u_{,y}) \sin \theta \cos \theta) d\theta \right\} \end{aligned} \quad \text{E. 2}$$

E sabendo-se que:  $u_{,x} = q_x = \text{constante}$ ;  $u_{,y} = q_y = \text{constante}$  e ainda que  $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ ;  $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$

Substituindo estes valores acima na última equação do grupo de Equações E.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ q_x \int_{\theta_\varepsilon} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta + q_y \int_{\theta_\varepsilon} \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta + (q_x + q_y) \int_{\theta_\varepsilon} \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} = \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ q_x \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} + q_y \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} + (q_x + q_y) \left( \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} = \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ (q_x + q_y) \left( \frac{\theta}{2} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} + (q_x - q_y) \left( \frac{\sin 2\theta}{4} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} + (q_x + q_y) \left( \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} \end{aligned} \quad \text{E. 3}$$

Como:

$q_i = q_x + q_y$ ;  $q_j = q_x + q_y$ ;  $i = 1, 2$ ;  $\epsilon_{3ji}$  ( $\epsilon_{312} = 1$  e  $\epsilon_{321} = -1$ ) Onde  $\epsilon$  é o símbolo de permutação substituindo os valores na última equação do grupo de Equação



$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon}^{\theta_1} \frac{n_i}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int (n_x + n_y) (u_{,x} n_x + u_{,y} n_y) d\theta \right\} = \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int (u_{,x} n_x^2 + u_{,y} n_y^2 + n_x n_y u_{,y} + n_x n_y u_{,x}) d\theta \right\} = \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int (u_{,x} \cos^2 \theta + u_{,y} \sin^2 \theta + (u_{,x} + u_{,y}) \sin \theta \cos \theta) d\theta \right\}
\end{aligned} \tag{E. 4}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon}^{\theta_1} \frac{n_i}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} = \frac{1}{\pi} q_i(\xi) \left\{ \left( \frac{\theta}{2} - \frac{(-1)^i}{4} \sin 2\theta \right)_{\theta_1}^{\theta_2} + \varepsilon_{3ji} q_j(\xi) (-1)^i \left( \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} \tag{E. 5}$$

Expressando todo o lado esquerdo da Equação E.5 em uma expressão mais concisa, tem-se:

$$\begin{aligned}
q_i(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon}^{\theta_1} \frac{n_i}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} &= q_i(\xi) - S'(\xi) q_i(\xi) + w(\xi) \varepsilon_{3ji} q_j(\xi), \text{ onde} \\
S'(\xi) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{(-1)^i}{4} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\
w(\xi) &= (-1)^i \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi = (-1)^i [0 - 0] = 0
\end{aligned} \tag{E. 6}$$

Os valores acima são válidos para contornos suaves, e, assim, a expressão contendo  $S(\xi)$  e  $w$  torna-se:

$$S(\xi) q_i(\xi) = q_i(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon}^{\theta_1} \frac{n_i}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} = q_i(\xi) - \frac{1}{2} q_i(\xi) = \frac{1}{2} q_i(\xi) \tag{E. 7}$$

## Apêndice F – Exemplo de formação de matriz

Neste apêndice, será mostrado um exemplo da matriz resultante das equações algébricas formadas através do Método de Elemento de Contorno para 3 nós.

$$C(\xi)U(\xi) + U_1 \int_{\Gamma_1} q^* d\Gamma_1 + U_2 \int_{\Gamma_2} q^* d\Gamma_2 + U_3 \int_{\Gamma_3} q^* d\Gamma_3 = q_1 \int_{\Gamma_1} u^* d\Gamma_1 + q_2 \int_{\Gamma_2} u^* d\Gamma_2 + q_3 \int_{\Gamma_3} u^* d\Gamma_3$$

Equação formada com ponto  $\xi$  no nó 1

$$\frac{1}{2}U_1 + U_1H_{11} + U_2H_{12} + U_3H_{13} = q_1G_{11} + q_2G_{12} + q_3G_{13}$$

Equação formada com ponto  $\xi$  no nó 2

$$\frac{1}{2}U_2 + U_1H_{21} + U_2H_{22} + U_3H_{23} = q_1G_{21} + q_2G_{22} + q_3G_{23}$$

Equação formada com ponto  $\xi$  no nó 3

$$\frac{1}{2}U_3 + U_1H_{31} + U_2H_{32} + U_3H_{33} = q_1G_{31} + q_2G_{32} + q_3G_{33}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & \frac{1}{2} + H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & \frac{1}{2} + H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$